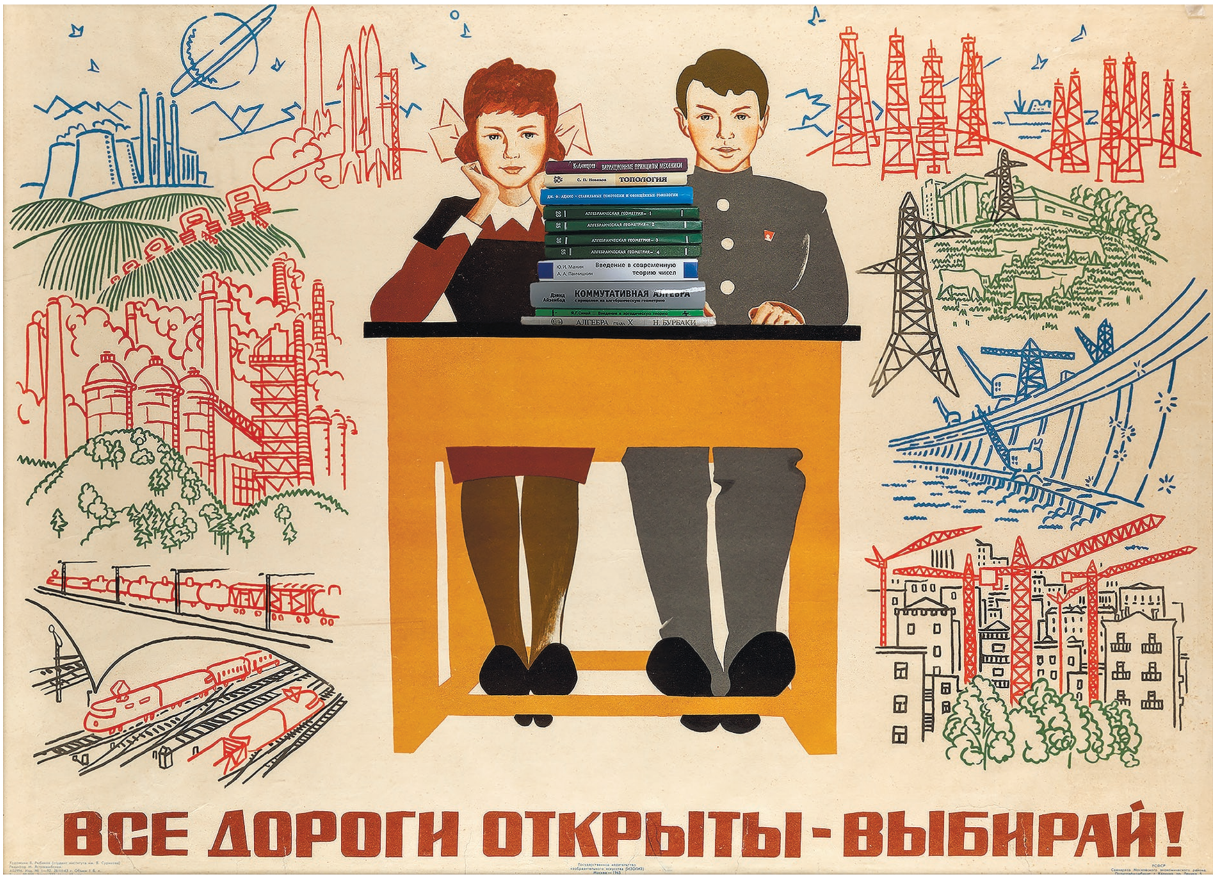
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ ПО ВЫБОРУ ПРЕДЛАГАЕМЫЕ В 2024/25 УЧЕБНОМ ГОДУ СТУДЕНТАМ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ



МОСКВА
2 июля 2024 г.

Содержание

(*primary* and advanced level curses are in *italic* and regular shape respectively)

Курсы на выбор студентов

Все занятия на факультете математики формально делятся на «курсы», «семинары» и «проекты». Деление вызвано имеющимися в НИУ ВШЭ ограничениями на число занятий каждого типа с одной стороны и число студентов на этих занятиях с другой. Уточнять, сколько курсов, семинаров и проектов может или должно быть в Вашем учебном плане, следует в учебной части. Обратите внимание, что формальный статус «курса», «семинара» или «проекта» может не иметь никакого отношения к стилю проведения занятий. О реальном соотношении лекций, упражнений, докладов участников и т. п. и их влиянии на итоговую отметку читайте на странице с аннотацией предмета.

В представленных ниже таблицах **толстым шрифтом** набраны «толстые» предметы с нагрузкой две пары в неделю и оцениваемые в 6 кредитов за семестр[1]. Остальные, «тонкие» предметы идут одну пару в неделю и оцениваются в 3 кредита за семестр. Английское название предмета всегда означает, что он преподаётся на английском языке. У некоторых таких занятий кроме английской аннотации имеется ещё и русская, к ней ведёт отдельная гиперссылка. По уровню предполагаемой от участников предварительной подготовки занятия делятся на *начальные*[2], не слишком опирающиеся на другие курсы, и специальные[3], рассчитанные на тех, кто уже что-то знает в данной области. Пометка типа «2+» означает, что занятия ориентированы[4] на студентов второго года обучения и старше.

Эпитеты «простой» и «трудный» добавлены по просьбам студентов и выражают субъективную оценку[5] усилий, которые придётся приложить для освоения предмета. Эта характеристика не имеет чёткого формального определения и мало коррелирует с тем, на студентов какого года рассчитан курс, а также является ли он начальным или более продвинутым в той или иной линейке курсов. Бывают как «трудные» занятия для начинающих, вполне доступные первокурсникам, так и «простые» спецкурсы, предполагающие владение материалом первых трёх лет бакалавриата.

По умолчанию все занятия и контрольные мероприятия на всех курсах и семинарах происходят в аудиториях факультета математики. Те курсы, которые проводятся дистанционно (online) снабжены эпитетом «дистанционный». Эпитет «межкампусный» означает, что в занятиях могут принимать участие студенты не московских кампусов НИУ ВШЭ. Как это будет реализовано технически — не вполне понятно, однако «межкампусность» курса никак не коррелирует с тем, каким образом — аудиторно или дистанционно — будут проводиться занятия.

[1] Если «толстый» предмет продолжается меньше семестра (скажем, один модуль), то он, как правило, оценивается в 3 кредита, однако возможны исключения — уточняйте это на странице с описанием курса.

[2] Названия этих занятий набраны в оглавлении *курсивом*.

[3] Названия таких занятий набраны в оглавлении прямым шрифтом.

[4] По мнению организаторов и академического руководства учебных программ. Это мнение имеет рекомендательный характер и не означает никаких формальных ограничений на выбор данного предмета студентами младших курсов.

[5] Основанную на мнениях студентов прошлых лет, организаторов занятий и академического руководства программ.

Курсы и семинары начального уровня

Пререквизиты к этим курсам не выходят за рамки первых двух лет бакалавриата. Они рекомендуются студентам младших курсов[1] как введения в те разделы математики, где планируется дальнейшая специализация, а также старшекурсникам, желающим расширить математический кругозор в областях, выходящих за рамки выбранной специализации. В «Содержании» на стр. 1 – 5 ссылки на описания курсов начального уровня набраны *курсивом*.

Занятия, доступные первокурсникам

Осень

- Пропозициональные логические системы, А. В. Кудинов, труд. межк. курс 1+
- Основные понятия математики, С. М. Львовский, труд. дист. НИС 1+
- Проективная алгебраическая геометрия 1, И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров, прост. межк. НИС 1+
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, прост. межк. НИС 1+
- Combinatorics of Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, simp. intercam. RS 1+
- Знакомство с математической физикой, Ф. В. Уваров, прост. межк. НИС 1+

Весна

- Избранные главы дискретной математики, И. В. Артамкин, прост. межк. НИС 1+
- Геометрия и группы, О. В. Шварцман, труд. межк. дист. НИС 1+
- **Введение в теорию Галуа**, А. М. Левин, труд. межк. курс 1+
- Проективная алгебраическая геометрия 2, И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров, прост. межк. НИС 1+
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, прост. межк. НИС 1+
- Combinatorics of Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, simp. intercam. RS 1+
- Математика физических явлений, П. И. Арсеев, прост. межк. курс 1+

Спецкурсы, доступные второкурсникам («антимайноры»)

Осень

- **Gromov hyperbolic groups** (русское описание), A. S. Golota, hard intercam. course 2+
- **Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику**, В. А. Гриценко, прост. межк. НИС 2+
- **Introduction to algebraic number theory** (русское описание), V. S. Zhgoon, hard intercam. course 2+
- **Noncommutative Algebra**, M. Rovinsky, simp. intercam. course 2+
- **Геометрическое введение в алгебраическую геометрию**, И. В. Артамкин, прост. межк. курс 2+
- **Введение в теорию пучков**, К. В. Логинов, труд. межк. курс 2+
- **Введение в алгебраическую топологию**, М. Э. Казарян, труд. межк. курс 2+
- **Введение в функциональный анализ**, С. В. Шапошников, прост. межк. курс 2+

Весна

- **Symmetric Functions** (русское описание), K. G. Kuyumzhiyan, hard intercam. course 2+
- **Введение в теорию чисел**, В. А. Кириченко, прост. межк. курс 2+
- Конечные кольца: арифметика многочленов и коды, В. А. Гриценко, прост. межк. дист. НИС 2+
- **Введение в коммутативную алгебру**, Е. Ю. Америк, труд. межк. курс 2+
- **Introduction to the category theory and homological algebra**, A. B. Pavlov, simp. course 2+
- **Noncommutative Algebra**, M. Rovinsky, simp. intercam. course 2+
- **Геометрическое введение в алгебраическую геометрию**, И. В. Артамкин, прост. межк. курс 2+
- **Введение в теорию схем**, К. В. Логинов, труд. межк. курс 2+
- **Введение в римановы поверхности**, А. Ю. Буряк, прост. межк. курс 2+
- Геометрия и алгебра интегрируемых распределений, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, прост. межк. курс 2+
- **Функциональный анализ**, С. В. Шапошников, труд. межк. курс 2+

(продолжение на следующей стр.)

[1] В частности, большинство этих курсов подойдут второкурсникам в качестве «антимайноров».

(начало на предыдущей стр.)

ОСЕНЬ

- Интегрируемые системы классической механики, В. В. Прокофьев, прост. межж. курс 2+
- Markov chains (русское описание), A. S. Skripchenko, simp. intercam. course 2+
- Discrete Optimization and Integer Programming (русское описание), D. I. Arkhipov, A. N. Lavrov, simp. intercam. course 2+

ВЕСНА

- **Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные**, А. В. Хохлов, прост. межж. курс 2+
- Асимптотические методы, К. П. Зыбин, прост. курс 2+
- **Ergodicity and Mixing for Markov processes**, C. Bernardin, S. Kuksin, hard intercam. course 2+
- **Элементы стохастической динамики**, А. С. Ильин, прост. межж. курс 2+
- **Линейное программирование**, Е. О. Степанов, прост. межж. курс 2+
- **Game Theory** (русское описание), M. S. Panov, simp. intercam. course 2+
- **Topological data analysis** (русское описание), V. G. Gorbounov, simp. intercam. RS 2+

Годовые студенческие научные семинары

На этих семинарах можно выбрать тему и научного руководителя для будущей выпускной квалификационной работы как в бакалавриате, так и в магистратуре. Для студентов магистратуры участие в одном таких семинаров является обязательным элементом ИУП.

ОСЕНЬ

- Современные проблемы математической логики, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман, прост. межж. дист. НИС 2+
- Современные проблемы анализа, А. В. Колесников, Е. Д. Косов, С. В. Шапошников, труд. межж. дист. НИС 3+
- Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин, труд. межж. НИС 3+
- Stochastic Analysis and Related Topics, C. Bernardin, V. D. Konakov, hard intercam. online RS 3+
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский, прост. межж. НИС 3+
- Geometric structures on manifolds (русское описание), E. Yu. Amerik, M. S. Verbitsky, V. S. Zhgoon, D. B. Kaledin, hard RS 2+
- Модулярные формы, В. С. Болбачан, А. Б. Калмынин, прост. межж. НИС 3+
- Combinatorics of Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, simp. intercam. RS 1+
- Теория пересечений и характеристические классы, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, труд. межж. НИС 3+
- Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, труд. межж. дист. НИС 3+
- Representations and Probability (русское описание), A. V. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, simp. intercam. RS 3+

ВЕСНА

- Современные проблемы математической логики, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман, прост. межж. дист. НИС 2+
- Современные проблемы анализа, А. В. Колесников, Е. Д. Косов, С. В. Шапошников, труд. межж. дист. НИС 3+
- Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин, труд. межж. НИС 3+
- Stochastic Analysis and Related Topics, C. Bernardin, V. D. Konakov, hard intercam. online RS 3+
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский, прост. межж. НИС 3+
- Geometric structures on manifolds (русское описание), E. Yu. Amerik, M. S. Verbitsky, V. S. Zhgoon, D. B. Kaledin, hard RS 2+
- Модулярные формы, В. С. Болбачан, А. Б. Калмынин, прост. межж. НИС 3+
- Combinatorics of Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, simp. intercam. RS 1+
- Теория пересечений и характеристические классы, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, труд. межж. НИС 3+
- Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, труд. межж. дист. НИС 3+
- Representations and Probability (русское описание), A. V. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, simp. intercam. RS 3+

(продолжение на следующей стр.)

(начало на предыдущей стр.)

ОСЕНЬ

∘ Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2+
∘ Математическая физика, А. В. Маршаков, прост. межк. НИС 3+
∘ Квантовые группы: структуры, представления и приложения, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, труд. межк. НИС 3+
∘ **Integrability in quantum field theory** (русское описание), M. N. Alfimov, hard intercam. RS 4+

ВЕСНА

∘ Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2+
∘ Математическая физика, А. В. Маршаков, прост. межк. НИС 3+
∘ Квантовые группы: структуры, представления и приложения, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, труд. межк. НИС 3+
∘ **Integrability in quantum field theory** (русское описание), M. N. Alfimov, hard intercam. RS 4+

Специальные курсы

Эти курсы предназначены для более глубокого изучения тех разделов математики, по которым планируется дальнейшая специализация. В «Содержании» на стр. 1 – 5 они набраны прямым шрифтом.

СПЕЦКУРСЫ

ОСЕНЬ

∘ Множества и модели, В. Б. Шехтман, труд. межк. курс 3+
∘ Автоморфные формы и их приложения, В. А. Гриценко, В. П. Спиридонов, труд. НИС 3+
∘ **Алгебраические кривые**, А. А. Авилов, труд. межк. НИС 3+
∘ Поверхности и многомерная алгебраическая геометрия, Е. Ю. Америк, труд. межк. курс 4+
∘ Holomorphic dynamics (русское описание), V. A. Timorin, hard intercam. course 3+
∘ Dynamics of automorphisms of algebraic varieties (русское описание), A. Kuznetsova, hard intercam. course 3+
∘ Introduction to Ergodic Theory (русское описание), M. L. Blank, hard intercam. course 3+
∘ **Группы и алгебры Ли**, А. И. Ильин, труд. межк. курс 3+
∘ **Classical groups, their invariants, and representations** (русское описание), A. I. Ilin, G. I. Olshanski, hard intercam. online course 3+
∘ Harmonic analysis and Banach algebras (русское описание), A. Yu. Pirkovskii, simp. intercam. course 3+
∘ **Introduction to differential geometry** (русское описание), F. V. Uvarov, simp. intercam. course 3+
∘ Дифференциальная геометрия и однородные пространства. Применения к информационной геометрии, Д. В. Алексеевский, прост. межк. НИС 3+

ВЕСНА

∘ Введение в обобщённую теорию рекурсий, М. Н. Рыбаков, Д. С. Шамканов, прост. межк. курс 3+
∘ **Алгоритмы как математическое исследование**, Д. А. Шмелькин, прост. межк. курс 3+
∘ **Алгебраические поверхности**, А. А. Авилов, труд. межк. НИС 3+
∘ **The Cremona group and its subgroups** (русское описание), A. S. Golota, hard intercam. course 3+
∘ **Modern Dynamical Systems** (русское описание), S. K. Lando, A. S. Skripchenko, hard intercam. RS 3+
∘ **Непараметрика и другие сюжеты статистики**, И. А. Самойленко, прост. межк. НИС 3+
∘ Introduction to the theory of random processes (русское описание), M. L. Blank, hard intercam. course 3+
∘ **Алгебры Ли и их представления**, М. В. Игнатьев, прост. межк. курс 3+
∘ **Introduction to algebraic groups and invariant theory** (русское описание), V. S. Zhgoon, hard intercam. course 3+
∘ K-theory of C^*-algebras (русское описание), A. Yu. Pirkovskii, simp. intercam. course 3+
∘ **Риманова геометрия**, А. В. Пенской, труд. межк. курс 3+
∘ **Геометрия общей теории относительности**, В. О. Медведев, труд. межк. курс 3+

(продолжение на следующей стр.)

(НАЧАЛО НА ПРЕДЫДУЩЕЙ СТР.)

ОСЕНЬ	ВЕСНА
∘ **Комплексная геометрия**, П. С. Осипов, труд. межк. курс 3+	∘ **Комплексная геометрия**, П. С. Осипов, труд. межк. курс 3+
∘ Многогранники и алгебраическая геометрия, Ф. И. Селянин, труд. межк. курс 3+	∘ **Группа кос, квантовые группы и приложения**, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, прост. межк. курс 3+
∘ Геометрия и топология особых точек комплексных гиперповерхностей, С. М. Гусейн–Заде, труд. межк. курс 3+	∘ Infinite-dimensional Lie algebras, F. V. Uvarov, hard intercam. course 3+
∘ **Localisation and rational homotopy theory** (русское описание), A. G. Gorinov, hard intercam. RS 3+	∘ **An introduction to generalised cohomology** (русское описание), A. G. Gorinov, hard intercam. course 3+
∘ **Гладкие структуры на многообразиях**, А. С. Тихомиров, труд. межк. курс 3+	∘ Теория солитонов, А. К. Погребков, прост. межк. курс 3+
∘ Римановы поверхности, тэта-функции и нелинейные уравнения, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, прост. межк. НИС 3+	∘ **Special functions** (русское описание), S. M. Khoroshkin, hard intercam. online course 3+
∘ Analysis and Geometry of period integrals (русское описание), S. Tanabe, simp. intercam. course 3+	∘ Hodge structure and A-discriminant of affine hypersurface (русское описание), S. Tanabe, simp. intercam. course 3+
∘ **Уравнения в частных производных**, В. Н. Сивкин, прост. курс 3+	∘ Integrable systems of particles and nonlinear equations (русское описание), A. V. Zabrodin, simp. intercam. course 3+
∘ **Algebraic introduction to Kadomtsev-Petviashvili hierarchy**, B. S. Bychkov, P. I. Dunin–Barkowski, simp. intercam. course 3+	∘ Introduction to KAM theory (русское описание), A. A. Glutsyuk, hard intercam. course 3+
∘ **Calculus of variations and optimal control** (русское описание), L. V. Lokutsievsky, hard intercam. course 3+	∘ **Статистическая физика в точнорешаемых моделях**, А. М. Поволоцкий, труд. межк. курс 3+
∘ **Гамильтонова механика**, В. А. Побережный, труд. межк. курс 3+	∘ **Классическая теория поля**, П. И. Арсеев, труд. межк. курс 3+
∘ **Математические основы квантовой механики**, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, прост. межк. курс 3+	∘ **Квантовая механика**, А. Г. Семёнов, труд. межк. курс 3+
∘ **Функциональный интеграл: стохастические процессы и основы квантовой механики**, А. Г. Семёнов, прост. межк. НИС 3+	∘ **Введение в квантовую теорию поля**, П. И. Дунин–Барковский, В. В. Лосяков, прост. межк. курс 3+

Нематематические курсы, читаемые на факультете математики

Эти курсы читаются представителями других факультетов НИУ ВШЭ и предназначены тем, кто хочет изучить те или иные области за пределами математики.

КУРСЫ, ЧИТАЕМЫЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЯМИ ДРУГИХ ФАКУЛЬТЕТОВ

ОСЕНЬ	ВЕСНА
∘ **Избранные главы математической экономики**, М. И. Левин, прост. межк. дист. НИС 3+	

Курсы от Huawei R&D

Эти курсы читаются на факультете математики представителями Huawei R&D. Они входят в число математических предметов и могут без ограничений включаться в ИУП студентами всех бакалаврских и магистерских программ факультета математики.

Курсы Huawei R&D

осень

◦ Discrete Optimization and Integer Programming (русское описание), D. I. Arkhipov, A. N. Lavrov, simp. intercam. course 2+

весна

◦ **Алгоритмы как математическое исследование**, Д. А. Шмелькин, прост. межк. курс 3+

Рекомендуемые линейки курсов

В этом разделе курсы собраны в «линейки», рекомендуемые для специализации в той или иной области. Это деление довольно условное: между линейками имеются значительные пересечения, а взаимная зависимость курсов далеко не линейна. Логическая взаимосвязь предметов уточняется в предваряющих таблицы пояснениях. Всем, кто только выбирает себе направления будущей специализации, рекомендуется начинать с посещения занятий, доступных первокурсникам и «антимайноров».

Алгебра и теория чисел

Семинары «Основные понятия математики» и «Геометрия и группы» адресованы студентам, только выбирающим для себя направления дальнейшей специализации, и позволяют почувствовать единство алгебры и геометрии. Вводный курс «Symmetric functions and Young diagrams» тоже не зависит от других курсов и крайне важен всем, кто будет заниматься комбинаторикой, теорией представлений, а также исчислительными геометрией и топологией (теория пересечений, характеристические классы и т. п.).

Курсы по теории чисел почти не зависят друг от друга и слабо пересекаются по содержанию, их можно брать в произвольном порядке и количестве в зависимости от интересов и уровня алгебраической подготовки. Студентам, не слишком владеющим алгеброй в объёме первого курса бакалавриата (первокурсникам, а также второкурсникам, которым плохо дался этот предмет) рекомендуется начинать с курсов «Введение в теорию чисел», «Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику» и «Конечные кольца: арифметика многочленов и коды». Студентам, хорошо освоившим алгебру и анализ первого года, можно сразу браться за курсы «Introduction to algebraic number theory» и «Analytic number theory» — в зависимости от своих предпочтений.

Курсы «Введение в теорию Галуа» и «Некоммутативная алгебра» являются дополнительными главами к обязательному трёхсеместровому курсу алгебры первых двух лет бакалавриата и рекомендуются всем, кто хочет поднять свою алгебраическую культуру на уровень выше начального. В частности, оба курса будут полезны тем, кто собирается заниматься алгебраической геометрией, алгебраической теорией чисел и теорией представлений, ибо теория Галуа и структурная теория ассоциативных алгебр являются важными идейными и техническими составляющими этих наук.

Курсы «Введение в коммутативную алгебру», «Introduction to category theory and homological algebra» и годовой курс по группам и алгебрам Ли рассчитаны на студентов, хорошо освоивших алгебру в объёме первых трёх семестров. Они мало зависят от друга и являются пререквизитами ко многим продвинутым курсам по алгебраической и диофантовой геометрии, алгебраической топологии, теории инвариантов, теории представлений, математической физике и т. п. Студентам, специализирующимся в алгебре и её приложениях к арифметике, геометрии, топологии и физике, рекомендуется взять их в любом удобном порядке.

Семинары по модулярным и автоморфным формам и спецкурс про группу Кремоны посвящены двум красивейшим классическим и вместе с тем стремительно развивающимся сейчас направлениям на стыке алгебры, геометрии и арифметики, вобравшим в себя технику из очень многих разделов современной математики.

осень	весна
∘ Основные понятия математики, С. М. Львовский, труд. дист. НИС 1 +	∘ Геометрия и группы, О. В. Шварцман, труд. межк. дист. НИС 1 + ∘ **Введение в теорию Галуа**, А. М. Левин, труд. межк. курс 1 + ∘ **Symmetric Functions** (русское описание), K. G. Kuyumzhiyan, hard intercam. course 2 +

(продолжение на следующей стр.)

(НАЧАЛО НА ПРЕДЫДУЩЕЙ СТР.)

ОСЕНЬ	ВЕСНА
	◦ **Введение в теорию чисел**, В. А. Кириченко, прост. межк. курс 2+
◦ **Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику**, В. А. Гриценко, прост. межк. НИС 2+	◦ Конечные кольца: арифметика многочленов и коды, В. А. Гриценко, прост. межк. дист. НИС 2+
◦ **Introduction to algebraic number theory** (русское описание), V. S. Zhgoon, hard intercam. course 2+	◦ **Введение в коммутативную алгебру**, Е. Ю. Америк, труд. межк. курс 2+
◦ **Аналитическая теория чисел с элементами геометрии чисел**, А. А. Илларионов, прост. межк. курс 3+	◦ **Introduction to the category theory and homological algebra**, A. B. Pavlov, simp. course 2+
◦ **Noncommutative Algebra**, M. Rovinsky, simp. intercam. course 2+	◦ **Noncommutative Algebra**, M. Rovinsky, simp. intercam. course 2+
◦ **Группы и алгебры Ли**, А. И. Ильин, труд. межк. курс 3+	◦ **Алгебры Ли и их представления**, М. В. Игнатьев, прост. межк. курс 3+
◦ Модулярные формы, В. С. Болбачан, А. Б. Калмынин, прост. межк. НИС 3+	◦ Модулярные формы, В. С. Болбачан, А. Б. Калмынин, прост. межк. НИС 3+
◦ Автоморфные формы и их приложения, В. А. Гриценко, В. П. Спиридонов, труд. НИС 3+	◦ **The Cremona group and its subgroups** (русское описание), A. S. Golota, hard intercam. course 3+

Алгебраическая геометрия

Основу линейки образуют начальный курс «Геометрическое введение в алгебраическую геометрию» и более продвинутые курсы «Теория схем» и «Кэлерова геометрия». Для понимания первого из них достаточно обязательных курсов первого года бакалавриата, для второго потребуется коммутативная алгебра, а также основные понятия теории пучков и гомологической алгебры, для третьего — основы алгебраической топологии, дифференциальной геометрии, теории пучков, гомологической алгебры, ТФКП и функционального анализа (эллиптические операторы). Курсы «Алгебраические кривые», «Алгебраические поверхности» и «Поверхности и многомерная алгебраическая геометрия» посвящены применению развитой в предыдущих трёх курсах техники к задачам классификации и изучения геометрии алгебраически многообразий размерностей 1, 2 и выше. Их разумно брать именно в таком порядке, причём первые два можно слушать параллельно курсам по теории пучков и теории схем. Курс «Introduction to Riemann surfaces» даёт аналитический взгляд на комплексные кривые. Курс «Grothendieck Duality» посвящён гомологическим свойствам алгебраических многообразий и когерентных пучков на них и требует владения техникой производных категорий и производных функторов.

Начальные курсы «Введение в теорию пучков» и «Введение в коммутативную алгебру» служат пререквизитами ко многим курсам по геометрии, топологии, геометрической теории представлений, алгебраической теории чисел и т. п. Для их понимания достаточно хорошего знания алгебры и общей топологии в объёме первого курса. Курс «Многогранники и алгебраическая геометрия» — о связях между геометрическими характеристиками алгебраической гиперповерхности и комбинаторными свойствами многогранника Ньютона её уравнения. Курсы «Геометрия и топология особых точек комплексных гиперповерхностей» и «An introduction to generalized cohomology» посвящены связям аналитической и алгебраической геометрии с теорией особенностей и алгебраической топологией. Первый курс более наглядный и аналитический, второй — более абстрактный и алгебраический. Оба требуют владения основами алгебраической топологии (гомотопии и (ко)гомологии). Два коротких интенсивных продвинутых курса Сусуму Танабэ посвящены различным аспектам зеркальной симметрии: периодам алгебраических многообразий и инвариантам гиперповерхностей в торических многообразиях.

Курс «Introduction to algebraic groups and invariant theory» посвящён строению линейных алгебраических групп (таких как SL_n, SO_n, Sp_n, …) и описанию инвариантов их действий на алгебраических многообразиях. Это алгебро-геометрическая сторона науки, дифференциально-геометрический взгляд на которую известен как теория групп Ли. Она служит основным инструментом построения всевозможных «пространств модулей» и мощным вычислительным средством во всех задачах, где присутствует действие алгебраической группы. Курсы «Dynamics of automorphisms of algebraic varieties» и «The Cremona group and its subgroups» посвящены группам регулярных и рациональных автоморфизмов алгебраических многообразий и разнообразным структурам, связанным с такими группами. Это активно развивающиеся сейчас направления, лежащие на стыке алгебраической геометрии и теории динамических систем и использующие технику из самых разных областей математики.

Основными семинарами для студентов, специализирующихся в алгебраической геометрии и смежных вопросах, являются студенческий семинар «Геометрические структуры на многообразиях» (проходит по четвергам) и научный семинар Международной лаборатории алгебраической геометрии (проходит по пятницам). Первокурсникам, только выбирающим направления дальнейшей специализации, для знакомства с областью можно посоветовать семинар «Проективная алгебраическая геометрия».

ОСЕНЬ	ВЕСНА
◦ Проективная алгебраическая геометрия 1, И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров, прост. межж. НИС 1+	◦ Проективная алгебраическая геометрия 2, И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров, прост. межж. НИС 1+
◦ **Геометрическое введение в алгебраическую геометрию**, И. В. Артамкин, прост. межж. курс 2+	◦ **Геометрическое введение в алгебраическую геометрию**, И. В. Артамкин, прост. межж. курс 2+
◦ Многогранники и алгебраическая геометрия, Ф. И. Селянин, труд. межж. курс 3+	◦ **Introduction to algebraic groups and invariant theory** (русское описание), V. S. Zhgoon, hard intercam. course 3+
◦ Геометрия и топология особых точек комплексных гиперповерхностей, С. М. Гусейн–Заде, труд. межж. курс 3+	◦ **Введение в коммутативную алгебру**, Е. Ю. Америк, труд. межж. курс 2+
◦ **Введение в теорию пучков**, К. В. Логинов, труд. межж. курс 2+	◦ **Введение в теорию схем**, К. В. Логинов, труд. межж. курс 2+
◦ **Алгебраические кривые**, А. А. Авилов, труд. межж. НИС 3+	◦ **Алгебраические поверхности**, А. А. Авилов, труд. межж. НИС 3+
◦ Поверхности и многомерная алгебраическая геометрия, Е. Ю. Америк, труд. межж. курс 4+	◦ **Введение в римановы поверхности**, А. Ю. Буряк, прост. межж. курс 2+
◦ **Комплексная геометрия**, П. С. Осипов, труд. межж. курс 3+	◦ **Комплексная геометрия**, П. С. Осипов, труд. межж. курс 3+
◦ Analysis and Geometry of period integrals (русское описание), S. Tanabe, simp. intercam. course 3+	◦ Hodge structure and A-discriminant of affine hypersurface (русское описание), S. Tanabe, simp. intercam. course 3+
◦ Dynamics of automorphisms of algebraic varieties (русское описание), A. Kuznetsova, hard intercam. course 3+	◦ **The Cremona group and its subgroups** (русское описание), A. S. Golota, hard intercam. course 3+
◦ **Grothendieck Duality** , A. B. Pavlov, hard course 4+	◦ **An introduction to generalised cohomology** (русское описание), A. G. Gorinov, hard intercam. course 3+
◦ Geometric structures on manifolds (русское описание), E. Yu. Amerik, M. S. Verbitsky, V. S. Zhgoon, D. B. Kaledin, hard RS 2+	◦ Geometric structures on manifolds (русское описание), E. Yu. Amerik, M. S. Verbitsky, V. S. Zhgoon, D. B. Kaledin, hard RS 2+

Анализ

Курс «Введение в функциональный анализ» является пререквизитом к очень многим дисциплинам из этой книги и его настоятельно рекомендуется взять не позже первого семестра 3-го курса. Курс «Функциональный анализ» служит прямым его продолжением, и вместе они составляют стандартный годовой университетский курс функционального анализа, необходимый для занятий случайными процессами и эргодической теорией, уравнениями в частных производных и задачами оптимизации (включая прикладные), а также дифференциальной и аналитической (понимаемой как раздел алгебраической) геометрией. Столь же базовыми и важными для многих направлений (включая математическую физику и геометрию) являются курсы «Вариационное исчисление и оптимальное управление» и «Уравнения в частных производных». Формально они не опираются на курс функционального анализа, однако их будет значительно проще освоить, владея хотя бы первой его половиной. Более глубокое знакомство с идеями и методами современного функционального анализа, а также его связями с алгеброй и топологией, можно получить на курсах «Гармонический анализ и банаховы алгебры», «K-теория C^*-алгебр», а также на семинаре «Функциональный анализ и некоммутативная геометрия».

Курс «Специальные функции», рассчитанный на студентов, владеющих анализом и дифференциальными уравнениями в объёме первых двух лет бакалавриата, расширяет понятие «элементарная функция» и знакомит слушателей с замечательными во многих отношениях функциями, естественно возникающими в физике, алгебре, теории вероятностей и арифметике. Семинар по модулярным формам посвящён красивой аналитической технике, широко используемой в арифметике, геометрии и матфизике. В курсе «Введение в римановы поверхности» излагается современный геометрический взгляд на классические результаты комплексного анализа.

Студентам, интересующимся практическими приложениями математики, рекомендуется исключительно важный для решения многих оптимизационных задач курс «Линейное программирование», для изучения которого достаточно знания линейной алгебры.

Семинар «Современные проблемы анализа» рассчитан на студентов, достаточно хорошо знакомых со стандартными аналитическими курсами и интересующихся актуальными задачами современного анализа и смежных областей — вероятностными, оптимизационными, аппроксимационными, а также уравнениями в частных производных. Семинар «Stochastic analysis and related topics» и курс «Ergodicity and mixing for Markov processes» посвящены современной теории вероятности и случайных процессов, однако тоже имеют существенную аналитическую составляющую.

осень	весна
∘ Современные проблемы анализа, А. В. Колесников, Е. Д. Косов, С. В. Шапошников, труд. межк. дист. НИС 3+	∘ Современные проблемы анализа, А. В. Колесников, Е. Д. Косов, С. В. Шапошников, труд. межк. дист. НИС 3+
∘ **Введение в функциональный анализ**, С. В. Шапошников, прост. межк. курс 2+	∘ **Функциональный анализ**, С. В. Шапошников, труд. межк. курс 2+
∘ **Уравнения в частных производных**, В. Н. Сивкин, прост. курс 3+	∘ **Линейное программирование**, Е. О. Степанов, прост. межк. курс 2+
∘ **Calculus of variations and optimal control** (русское описание), L. V. Lokutsievsky, hard intercam. course 3+	∘ **Special functions** (русское описание), S. M. Khoroshkin, hard intercam. online course 3+
	∘ **Введение в римановы поверхности**, А. Ю. Буряк, прост. межк. курс 2+
∘ Модулярные формы, В. С. Болбачан, А. Б. Калмынин, прост. межк. НИС 3+	∘ Модулярные формы, В. С. Болбачан, А. Б. Калмынин, прост. межк. НИС 3+
∘ Harmonic analysis and Banach algebras (русское описание), A. Yu. Pirkovskii, simp. intercam. course 3+	∘ K-theory of C^*-algebras (русское описание), A. Yu. Pirkovskii, simp. intercam. course 3+
∘ Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский, прост. межк. НИС 3+	∘ Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский, прост. межк. НИС 3+
	∘ **Ergodicity and Mixing for Markov processes**, C. Bernardin, S. Kuksin, hard intercam. course 2+
∘ Stochastic Analysis and Related Topics, C. Bernardin, V. D. Konakov, hard intercam. online RS 3+	∘ Stochastic Analysis and Related Topics, C. Bernardin, V. D. Konakov, hard intercam. online RS 3+

Вероятность и стохастическая динамика

Младшекурсникам, интересующимся этими областями, будет полезно начать с НИС «Геометрия и динамика», в котором разбираются различные сюжеты, относящиеся к регулярной и хаотической динамике, теории вероятностей и т. д. Курс «Цепи Маркова» также доступен начиная со 2-го курса (до обязательного курса теории вероятностей), и там можно на простом, но очень важном (в том числе для практических приложений) примере познакомиться с центральными понятиями теории случайных процессов. Продолжить изучение марковских процессов можно на курсе «Ergodicity and mixing for Markov processes». Курс «Сложные сети» требует минимальной подготовки и посвящён случайным графам и их приложениям. Курс «Modern dynamical systems» имеет относительно небольшую вероятностную составляющую, но требует уверенного владения анализом и геометрией в объёме первого года бакалавриата.

Есть два разных способа смотреть на случайность в математике: теория случайных процессов (более вероятностный взгляд) и эргодическая теория (более динамический). Чтобы овладеть сразу двумя подходами, мы советуем освоить оба базовых курса «Введение в теорию случайных процессов» и «Введение в эргодическую теорию». Их можно брать в любом порядке, однако мы настоятельно рекомендуем параллельно (или раньше) изучить курс функционального анализа хотя бы в объёме его первого семестра — это математическая основа обеих дисциплин. Курс «Элементы стохастической динамики» даёт более элементарное введение в теорию случайных процессов, сфокусированное на стохастических дифференциальных уравнениях. Курс «Стохастический анализ и приложения» требует знание стандартных обязательных курсов анализа и теории вероятностей и знакомит слушателей с аппаратом стохастического анализа и теории мартингалов, а также их современными приложениями в нейросетях и финансовой математике. Физический взгляд на статистику и стохастику и физические задачи, в которых он возникает, представлены в курсах «Элементы стохастической динамики», «Статистическая механика» и «Функциональный интеграл… ». Эти курсы слабо зависят друг от друга, и первые два из них не требуют глубоких пререквизитов.

Продвинутые семинары «Представления и вероятность», «Стохастический анализ и смежные вопросы» и «Современные проблемы анализа» нацелены на студентов старших курсов, специализирующихся в теории случайных процессов и смежных областях.

Студентам, интересующимся в основном приложениями теории вероятностей, в качестве минимальной теоретической базы в случайных процессах мы советуем курсы «Цепи Маркова» и «Элементы стохастической динамики». Курс «Непараметрика и другие сюжеты статистики» требует относительно небольшой подготовки и посвящён современным статистическим приложениям.

ОСЕНЬ	ВЕСНА
∘ Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, прост. межк. НИС 1 +	∘ Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, прост. межк. НИС 1 +
∘ Representations and Probability (русское описание), A. V. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, simp. intercam. RS 3 +	∘ Representations and Probability (русское описание), A. V. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, simp. intercam. RS 3 +
∘ Современные проблемы анализа, А. В. Колесников, Е. Д. Косов, С. В. Шапошников, труд. межк. дист. НИС 3 +	∘ Современные проблемы анализа, А. В. Колесников, Е. Д. Косов, С. В. Шапошников, труд. межк. дист. НИС 3 +
∘ Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2 +	∘ Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2 +
∘ Markov chains (русское описание), A. S. Skripchenko, simp. intercam. course 2 +	∘ **Modern Dynamical Systems** (русское описание), S. K. Lando, A. S. Skripchenko, hard intercam. RS 3 +
	∘ **Ergodicity and Mixing for Markov processes**, C. Bernardin, S. Kuksin, hard intercam. course 2 +
∘ Introduction to Ergodic Theory (русское описание), M. L. Blank, hard intercam. course 3 +	∘ Introduction to the theory of random processes (русское описание), M. L. Blank, hard intercam. course 3 +

(продолжение на следующей стр.)

(начало на предыдущей стр.)

осень	весна
◦ Stochastic Analysis and Related Topics, C. Bernardin, V. D. Konakov, hard intercam. online RS 3 +	◦ Stochastic Analysis and Related Topics, C. Bernardin, V. D. Konakov, hard intercam. online RS 3 +
	◦ **Стохастический анализ и приложения**, А. В. Колесников, труд. курс 3 +
◦ **Statistical Mechanics** (русское описание), C. Bernardin, M. Mariani, simp. intercam. course 4 +	◦ **Непараметрика и другие сюжеты статистики**, И. А. Самойленко, прост. межк. НИС 3 +
◦ **Функциональный интеграл: стохастические процессы и основы квантовой механики**, А. Г. Семёнов, прост. межк. НИС 3 +	◦ **Элементы стохастической динамики**, А. С. Ильин, прост. межк. курс 2 +

Геометрия и топология

Математика описывается на языке формул или наблюдается воочию. Первое можно условно называть «алгеброй», второе — «геометрией и топологией». Взаимное проникновение этих двух способов думать о математике первокурсники бакалавриата могут увидеть на семинарах «Основные понятия математики» и «Геометрия и группы», а второкурсники — на спецкурсе «Гиперболические группы по Громову».

Курс теории пучков знакомит с важным формальным инструментом, связывающим алгебру с топологией и служит перереквизитом ко многим геометрическим курсам. Курс «Введение в римановы поверхности» развивает геометрический взгляд на ТФКП, который в начале XX века собственно и привёл к появлению алгебраической геометрии и топологии.

Топологическая линейка представлена курсами «Введение в алгебраическую топологию», «An introduction to generalized cohomology» и «Localization and rational homotopy theory». Именно в таком порядке их и рекомендуется брать. Первый служит пререквизитом ко многим геометрическим, топологическим и аналитическим курсам в этой книге, поэтому не стоит откладывать его в долгий ящик.

Дифференциально-геометрическая линейка состоит из курсов «Введение в дифференциальную геометрию», «Риманова геометрия», «Дифференциальная геометрия однородных пространств», «Геометрия ОТО» и «Кэлерова геометрия». Первый из них служит пререквизитом ко всем остальным и является продвинутой версией обязательного бакалаврского курса «Анализ на многообразиях», адресованной тем, кто плохо усвоил этот курс или вообще его не учил (магистрантам и аспирантам). Следующие три курса практически не зависят друг от друга, и уверенно овладевшие анализом на многообразиях могут попробовать начать прямо с них. Курс кэлеровой геометрии наиболее продвинутый и требует знания теории пучков, дифференциальной геометрии, гомологической алгебры, ТФКП и функана.

Курсы «Многогранники и алгебраическая геометрия» и «Геометрия и топология особых точек комплексных гиперповерхностей» посвящены алгебраическим и аналитическим гиперповерхностям. Первый из них более элементарен и связывает геометрию и топологию гладкой гиперповерхности с комбинаторикой многогранника Ньютона её уравнения. Второй более техничный и посвящён описанию особенностей. Курс «Гладкие структуры на многообразиях» знакомит с инвариантами гладкой структуры на вещественном четырёхмерном многообразии, возникающими из уравнений Янга – Миллса, и требует владения теорией связностей в векторных расслоениях на римановом многообразии.

Курсы «Геометрия и алгебра интегрируемых распределений» и «Introduction to KAM theory» посвящены приложениям дифференциальной геометрии и топологии к теории интегрируемых систем и анализу поведения решений дифференциальных уравнений. Первый из них более элементарен и наряду с «Введением в дифференциальную геометрию» подойдёт в качестве мотивирующего введения в более продвинутые курсы дифференциальной геометрии.

Курсы «Голоморфная динамика» и «Modern Dynamical systems» посвящены дискретной динамике. Первый — о самоподобных геометрических структурах, связанных с орбитами голоморфных отображений, второй — об эргодических задачах анализа, арифметики и римановой и гиперболической геометрии.

Курс и семинар А. Ю. Пирковского посвящены некоммутативным обобщениям геометрических представлений о многообразиях средствами функционального анализа и требуют соответствующих аналитических пререквизитов.

Основными студенческими научными семинарами по геометрии и топологии являются «Geometric structures on manifolds» и «Теория пересечений и характеристические классы». Первый акцентирован на алгебро-геометрических, дифференциально-геометрических и когомологических задачах, второй — на алгебраической и комбинаторной топологии, а также инвариантах узлов и зацеплений.

ОСЕНЬ

- Основные понятия математики, С. М. Львовский, труд. дист. НИС 1 +
- **Gromov hyperbolic groups** (русское описание), A. S. Golota, hard intercam. course 2 +
- **Введение в теорию пучков**, К. В. Логинов, труд. межк. курс 2 +
- **Introduction to differential geometry** (русское описание), F. V. Uvarov, simp. intercam. course 3 +
- Дифференциальная геометрия и однородные пространства. Применения к информационной геометрии, Д. В. Алексеевский, прост. межк. НИС 3 +
- **Комплексная геометрия**, П. С. Осипов, труд. межк. курс 3 +
- Analysis and Geometry of period integrals (русское описание), S. Tanabe, simp. intercam. course 3 +
- **Гладкие структуры на многообразиях**, А. С. Тихомиров, труд. межк. курс 3 +
- Geometric structures on manifolds (русское описание), E. Yu. Amerik, M. S. Verbitsky, V. S. Zhgoon, D. B. Kaledin, hard RS 2 +
- Теория пересечений и характеристические классы, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, труд. межк. НИС 3 +
- **Введение в алгебраическую топологию**, М. Э. Казарян, труд. межк. курс 2 +
- **Localisation and rational homotopy theory** (русское описание), A. G. Gorinov, hard intercam. RS 3 +
- Holomorphic dynamics (русское описание), V. A. Timorin, hard intercam. course 3 +
- Многогранники и алгебраическая геометрия, Ф. И. Селянин, труд. межк. курс 3 +
- Геометрия и топология особых точек комплексных гиперповерхностей, С. М. Гусейн – Заде, труд. межк. курс 3 +
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский, прост. межк. НИС 3 +

ВЕСНА

- Геометрия и группы, О. В. Шварцман, труд. межк. дист. НИС 1 +
- **Введение в римановы поверхности**, А. Ю. Буряк, прост. межк. курс 2 +
- **Риманова геометрия**, А. В. Пенской, труд. межк. курс 3 +
- **Геометрия общей теории относительности**, В. О. Медведев, труд. межк. курс 3 +
- **Комплексная геометрия**, П. С. Осипов, труд. межк. курс 3 +
- Geometric structures on manifolds (русское описание), E. Yu. Amerik, M. S. Verbitsky, V. S. Zhgoon, D. B. Kaledin, hard RS 2 +
- Теория пересечений и характеристические классы, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, труд. межк. НИС 3 +
- **An introduction to generalised cohomology** (русское описание), A. G. Gorinov, hard intercam. course 3 +
- Геометрия и алгебра интегрируемых распределений, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, прост. межк. курс 2 +
- **Modern Dynamical Systems** (русское описание), S. K. Lando, A. S. Skripchenko, hard intercam. RS 3 +
- Introduction to KAM theory (русское описание), A. A. Glutsyuk, hard intercam. course 3 +
- K-theory of C^*-algebras (русское описание), A. Yu. Pirkovskii, simp. intercam. course 3 +
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, А. Ю. Пирковский, прост. межк. НИС 3 +

Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы

Ньютон и Лейбниц создали математический анализ во многом ради того, чтобы составлять и решать дифференциальные уравнения. Первые примеры таких уравнений пришли из механики и других физических моделей реального мира. Их исследование привело к возникновению целого направления, вобравшего в себя идеи и методы практически всех областей современной математики. Курс «Уравнения в частных производных», о дифурах как таковых, служит введением в это направление. В курсах «Гамильтонова механика» и «Квантовая механика» обсуждаются уравнения, описывающие классические и квантовые механические системы. Курс «Calculus of variations and optimal control» посвящён дифференциальным уравнениям, возникающим в различных задачах оптимизации, и имеет множество приложений — от лагранжева формализма математической физики до машинного обучения. Все эти вводные курсы мало зависят друг от друга, и для их понимания хватит обязательных курсов первых двух лет бакалавриата.

Курс «Геометрия и алгебра интегрируемых распределений» и семинар «Римановы поверхности, тэта-функции и нелинейные уравнения» посвящены геометрическим, топологическим и комплексно-аналитическим методам исследования дифференциальных уравнений и их решений. В курсе «Специальные функции» и на семинаре «Автоморфные формы и их приложения» обсуждаются естественные расширения класса «элементарных функций» путём добавления к нему новых, обладающих замечательными свойствами функций и дифференциальных форм, позволяющих в явном виде решать и исследовать поведение решений задач из самых разных областей от геометрии до арифметики. Все свойства этих специальных функций и форм в конечном итоге выводятся из дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют.

Динамика (эволюция во времени) разного рода систем, описываемых дифференциальными уравнениями, бывает устроена так, что малые изменения начальных условий приводят к «непредсказуемым» изменениям результата эволюции за достаточно долгое время. Такие хаотические свойства динамических систем обсуждаются в курсе «Introduction to Ergodic Theory». Системы с достаточно большим числом инвариантов («интегралов движения») в определённом смысле «точно решаемы» и называются *интегрируемыми*. Им посвящены курсы «Introduction to KAM theory», «Algebraic introduction to Kadomtsev–Petviashvili hierarchy», «Integrable systems of particles and nonlinear equations» и семинар «Integrability in quantum field theory». В первом рассматривается общая геометрическая теория интегрируемых систем и их возмущений, во втором — алгебраические свойства важного класса интегрируемых систем, удивительным образом появляющегося во многих интересных задачах из разных областей современной математики. Последние курс и семинар сосредоточены на системах, возникающих в конкретных физических моделях.

Научный семинар «Динамические системы» посвящён очень широкому кругу проблем, так или иначе связанных с дифференциальными уравнениями и динамическими системами, и призван привлечь студентов (в том числе младших курсов) к решению актуальных задач в этой интересной области.

ОСЕНЬ	ВЕСНА
∘ **Calculus of variations and optimal control** (русское описание), L. V. Lokutsievsky, hard intercam. course 3+ ∘ Introduction to Ergodic Theory (русское описание), M. L. Blank, hard intercam. course 3+	
∘ **Уравнения в частных производных**, В. Н. Сивкин, прост. курс 3+ ∘ **Гамильтонова механика**, В. А. Побережный, труд. межк. курс 3+	∘ Introduction to KAM theory (русское описание), A. A. Glutsyuk, hard intercam. course 3+ ∘ Integrable systems of particles and nonlinear equations (русское описание), A. V. Zabrodin, simp. intercam. course 3+
∘ Римановы поверхности, тэта-функции и нелинейные уравнения, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, прост. межк. НИС 3+ ∘ Автоморфные формы и их приложения, В. А. Гриценко, В. П. Спиридонов, труд. НИС 3+	∘ Геометрия и алгебра интегрируемых распределений, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, прост. межк. курс 2+ ∘ **Special functions** (русское описание), S. M. Khoroshkin, hard intercam. online course 3+
∘ **Algebraic introduction to Kadomtsev-Petviashvili hierarchy**, B. S. Bychkov, P. I. Dunin–Barkowski, simp. intercam. course 3+	

(продолжение на следующей стр.)

(начало на предыдущей стр.)

Осень	Весна
◦ Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин, труд. межк. НИС 3 +	◦ Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин, труд. межк. НИС 3 +
◦ **Integrability in quantum field theory** (русское описание), M. N. Alfimov, hard intercam. RS 4 +	◦ **Integrability in quantum field theory** (русское описание), M. N. Alfimov, hard intercam. RS 4 +

Искусственный интеллект

Для профессионального математика работа в области искусственного интеллекта является полем приложения современных математических методов к задачам обучения нейронных сетей — стремительно развивающейся сейчас компьютерной технологии, в которой задействованы самые разные направления: численные методы, статистика, случайные процессы, уравнения в частных производных и оптимизация, теория функций и комплексный анализ, алгебраическая геометрия и топология, комбинаторика и теория графов. Теоретический минимум математика-разработчика ИИ безусловно должен включать в себя курсы «Линейное программирование», «Вариационное исчисление и оптимальное управление», «Цепи Маркова», «Введение в теорию случайных процессов», «Стохастический анализ и его приложения». Конкретные применения этих методов к реальным практическим задачам обсуждаются на прикладных курсах «Алгоритмы как математическое исследование», «Дискретная оптимизация и целочисленное линейное программирование», «Преобразование Фурье и его использование… ». Теоретическому анализу эффективности принимаемых решений и организации больших объёмов данных посвящены курсы «Теория игр», «Непараметрика и другие сюжеты статистики», «Топологическая обработка данных», а также семинар «Сложные сети».

Осень	Весна
◦ **Calculus of variations and optimal control** (русское описание), L. V. Lokutsievsky, hard intercam. course 3 +	◦ **Линейное программирование**, Е. О. Степанов, прост. межк. курс 2 +
◦ Discrete Optimization and Integer Programming (русское описание), D. I. Arkhipov, A. N. Lavrov, simp. intercam. course 2 +	◦ **Game Theory** (русское описание), M. S. Panov, simp. intercam. course 2 +
◦ Markov chains (русское описание), A. S. Skripchenko, simp. intercam. course 2 +	◦ Introduction to the theory of random processes (русское описание), M. L. Blank, hard intercam. course 3 +
	◦ **Алгоритмы как математическое исследование**, Д. А. Шмелькин, прост. межк. курс 3 +
	◦ **Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные**, А. В. Хохлов, прост. межк. курс 2 +
	◦ **Стохастический анализ и приложения**, А. В. Колесников, труд. курс 3 +
	◦ **Непараметрика и другие сюжеты статистики**, И. А. Самойленко, прост. межк. НИС 3 +
	◦ **Topological data analysis** (русское описание), V. G. Gorbounov, simp. intercam. RS 2 +
◦ Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2 +	◦ Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2 +

Комбинаторика и маломерная топология

Комбинаторика и маломерная топология (графы, узлы и зацепления, поверхности, тела и т. п.) с одной стороны являются отличным полигоном для применения и освоения техники из самых разных разделов математики, а с другой стороны позволяют максимально наглядно и конкретно, без привлечения «абстрактной чепухи», устанавливать и связывать друг с другом разные кажущиеся далёкими по своей природе соотношения.

Курс «Симметрические функции» знакомит с важными классами многочленов от многих переменных и функциями более общего вида, играющими ключевую роль во многих областях алгебры и теории представлений, исчислительной геометрии и топологии, комбинаторики и теории особенностей.

Многие задачи теории динамических систем, описываемых непрерывными отображениями многообразий малой размерности и векторными полями на них, сводятся к чисто комбинаторным. Таким задачам посвящены семинар «Геометрия и динамика» и курс «Голоморфная динамика».

Основными студенческими научными семинарами по комбинаторике и маломерной топологии являются «Combinatorics of invariants» и «Теория пересечений и характеристические классы». Участие в первом из них не предполагает серьёзной предварительной подготовки: каждый студент при желании сможет найти себе приемлемую по уровню тему для доклада. Второй семинар является основным научным семинаром Международной лаборатории кластерной геометрии.

ОСЕНЬ

- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, прост. межк. НИС 1+
- Holomorphic dynamics (русское описание), V. A. Timorin, hard intercam. course 3+
- Discrete Optimization and Integer Programming (русское описание), D. I. Arkhipov, A. N. Lavrov, simp. intercam. course 2+
- Combinatorics of Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, simp. intercam. RS 1+
- Теория пересечений и характеристические классы, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, труд. межк. НИС 3+
- Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, труд. межк. дист. НИС 3+
- Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2+

ВЕСНА

- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, прост. межк. НИС 1+
- **Symmetric Functions** (русское описание), K. G. Kuyumzhiyan, hard intercam. course 2+
- Hodge structure and A-discriminant of affine hypersurface (русское описание), S. Tanabe, simp. intercam. course 3+
- Combinatorics of Invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, simp. intercam. RS 1+
- Теория пересечений и характеристические классы, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, труд. межк. НИС 3+
- Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, труд. межк. дист. НИС 3+
- Complex networks (русское описание), V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko, simp. intercam. RS 2+

Логика

Логика как наука является почти столь же древней, как и математика. Математическая логика изучает основания математики, принципы и инструменты построения математических теорий, а также имеет приложения в лингвистике, философии, информатике. Она предоставляет фундамент, необходимый для изложения любой другой математической дисциплины. Знание основных возможностей и ограничений, присущих той или иной формальной теории, позволяет глубже понять значение многих теорем алгебры, анализа, топологии и других разделов математики.

Вводный курс «Пропозициональные логические системы» знакомит с основными понятиями классической, а также интуиционистской и модальной пропозициональных логик и даёт навыки работы с аксиоматическими системами. Это поможет вам чётко и грамотно формулировать утверждения и избегать логических ошибок в рассуждениях. Более продвинутый курс «Множества и модели» посвящён логическому анализу теории множеств на современном языке теории моделей. Это строгое основание всей нынешней математики — от анализа и теории вероятностей до алгебраической геометрии и топологии.

Математическая логика тесно связана с теорией алгоритмов (или рекурсий), которая допускает разнообразные обобщения. Например, можно рассматривать «вычисления», требующие трансфинитного числа шагов или имеющие дело не только с конструктивными объектами. Возникающим при этом задачам посвящён семинар «Введение в обобщённую теорию рекурсий».

На научно-исследовательском семинаре «Современные проблемы математической логики» рассматриваются вопросы из самых разных разделов: классические и неклассические логические системы, формальные языки и теории, теория моделей, теория алгоритмов, вычислительная сложность и другие. При этом обсуждаются как важнейшие классические результаты, так и ключевые продвижения самого последнего времени.

ОСЕНЬ

- Пропозициональные логические системы, А. В. Кудинов, труд. межк. курс 1 +
- Современные проблемы математической логики, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман, прост. межк. дист. НИС 2 +
- Множества и модели, В. Б. Шехтман, труд. межк. курс 3 +

ВЕСНА

- Современные проблемы математической логики, А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман, прост. межк. дист. НИС 2 +
- Введение в обобщённую теорию рекурсий, М. Н. Рыбаков, Д. С. Шамканов, прост. межк. курс 3 +

Матфизика

Эта наука родилась в начале XX века в ходе математического осмысления квантовой физики и к концу века вобрала в себя практически весь арсенал современной математики. Матфизическая линейка призвана познакомить студентов-математиков с ключевыми идеями и языком математической физики. Занятия линейки разделяются на несколько групп.

Вводная группа даёт первое представление о физических моделях и математических методах их исследования. Осенний семинар «Знакомство с математической физикой» знакомит младшекурсников с разнообразными физическими моделями и возникающими в них задачами, а также с матфизиками факультета. Весенний семинар «Математика физических явлений» даёт более систематическое представление о задачах классической физики.

Базовые физические курсы знакомят слушателей с фундаментальными моделями современной физики. Вводимые при этом понятия и математический аппарат составляют основу «физического взгляда» на математические и естественно-научные задачи. Курсы «Гамильтонова механика» и «Классическая теория поля» дополняют обязательный бакалаврский курс механики и формируют цельное представление о классических законах динамики точечных частиц и полей. Осенний курс «Математические основы квантовой механики» и весенний курс «Квантовая механика» знакомят слушателей с законами квантового мира. В первом из них акцент делается на описании математических структур квантовой теории, а во втором рассматривается больше физических приложений. В весеннем курсе «Введение в квантовую теорию поля» обсуждаются квантовые явления, в которых возможны рождение и уничтожение частиц. Все эти курсы идейно следуют один за другим. Курсы «Statistical mechanics» и «Статистическая физика в точно решаемых моделях» знакомят слушателей с физическими законами и математическим аппаратом статистической физики, описывающей системы с огромным числом частиц.

Третья группа курсов знакомит с *математическим аппаратом* современной физики. К ней относятся относительно простые курсы «Уравнения в частных производных», «Прикладные методы анализа» и «Асимптотические методы», где собран стандартный аналитический инструментарий, одинаково необходимый как физикам, так и математикам. Алгебраические и геометрические методы современной математической физики обсуждаются на курсах «Группы и алгебры Ли», «Алгебры Ли и их представления», «Геометрия общей теории относительности», «Infinite dimensional Lie algebras», «Группа кос, квантовые группы и приложения». Курс «Функциональный интеграл… » посвящён интегрированию по бесконечномерным пространствам.

Отдельные занятия посвящены двум актуальным направлениям математической физики, особенно хорошо представленным на матфаке. *Нелинейные уравнения и интегрируемые системы* обсуждаются в курсах «Теория солитонов», «Интегрируемые системы классической механики», «Integrable systems of particles and nonlinear equations» и «Algebric introduction to Kadomtsev – Petviashvili hierarchy». *Статистическая физика и стохастические процессы* обсуждаются в курсах «Элементы стохастической динамики», «Статистическая физика в точно решаемых моделях», «Introduction to the theory of random processes». Каждый из этих курсов является самодостаточным введением в предмет. Они рекомендуются тем, кто желает расширить свой матфизический кругозор за пределы базового.

Студенческие научно-исследовательские семинары для тех, кто собирается специализироваться по математической физике и ищет тему и научного руководителя будущей выпускной квалификационной работы — это годовые семинары «Математическая физика», «Integrability in quantum field theory», «Квантовые группы: структуры, представления и приложения» и осенний семинар «Римановы поверхности, тэта-функции и нелинейные уравнения». На первом из них обсуждается широкий круг актуальных задач из разных областей математической физики, остальные три отражают научные интересы своих организаторов.

ОСЕНЬ	ВЕСНА
∘ Знакомство с математической физикой, Ф. В. Уваров, прост. межж. НИС 1 +	∘ Математика физических явлений, П. И. Арсеев, прост. межж. курс 1 +
∘ **Уравнения в частных производных**, В. Н. Сивкин, прост. курс 3 +	∘ **Геометрия общей теории относительности**, В. О. Медведев, труд. межж. курс 3 +
∘ Интегрируемые системы классической механики, В. В. Прокофьев, прост. межж. курс 2 +	∘ Integrable systems of particles and nonlinear equations (русское описание), A. V. Zabrodin, simp. intercam. course 3 +
∘ Римановы поверхности, тэта-функции и нелинейные уравнения, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, прост. межж. НИС 3 +	∘ Теория солитонов, А. К. Погребков, прост. межж. курс 3 +
∘ **Algebraic introduction to Kadomtsev-Petviashvili hierarchy**, B. S. Bychkov, P. I. Dunin – Barkowski, simp. intercam. course 3 +	∘ Infinite-dimensional Lie algebras, F. V. Uvarov, hard intercam. course 3 +
∘ **Прикладные методы анализа**, А. В. Забродин, К. П. Зыбин, прост. межж. курс 3 +	∘ Асимптотические методы, К. П. Зыбин, прост. курс 2 +
∘ **Гамильтонова механика**, В. А. Побережный, труд. межж. курс 3 +	∘ **Классическая теория поля**, П. И. Арсеев, труд. межж. курс 3 +
∘ **Математические основы квантовой механики**, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, прост. межж. курс 3 +	∘ **Квантовая механика**, А. Г. Семёнов, труд. межж. курс 3 +
∘ **Функциональный интеграл: стохастические процессы и основы квантовой механики**, А. Г. Семёнов, прост. межж. НИС 3 +	∘ **Введение в квантовую теорию поля**, П. И. Дунин – Барковский, В. В. Лосяков, прост. межж. курс 3 +
∘ **Statistical Mechanics** (русское описание), C. Bernardin, M. Mariani, simp. intercam. course 4 +	∘ **Элементы стохастической динамики**, А. С. Ильин, прост. межж. курс 2 +
	∘ **Статистическая физика в точнорешаемых моделях**, А. М. Поволоцкий, труд. межж. курс 3 +
	∘ Introduction to the theory of random processes (русское описание), M. L. Blank, hard intercam. course 3 +
∘ Математическая физика, А. В. Маршаков, прост. межж. НИС 3 +	∘ Математическая физика, А. В. Маршаков, прост. межж. НИС 3 +
	∘ **Группа кос, квантовые группы и приложения**, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, прост. межж. курс 3 +
∘ Квантовые группы: структуры, представления и приложения, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, труд. межж. НИС 3 +	∘ Квантовые группы: структуры, представления и приложения, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, труд. межж. НИС 3 +

(продолжение на следующей стр.)

(начало на предыдущей стр.)

осень	весна
◦ **Integrability in quantum field theory** (русское описание), M. N. Alfimov, hard intercam. RS 4+	◦ **Integrability in quantum field theory** (русское описание), M. N. Alfimov, hard intercam. RS 4+

Представления и инварианты

Представление группы или алгебры A — это её действие на том или ином множестве X отображениями $a : X \to X$, где $a \in A$: «симметриями», «инфинитезимальными симметриями», «переклейками» и т. п. Не изменяющиеся под действием преобразований из A величины (точки из X, функции на X и т. п.) называются A-инвариантами. Умение увидеть алгебру симметрий и описать её инварианты — мощнейший и красивейший способ решения естественнонаучных задач, известный как «соображения симметрии».

Вводный курс по симметрическим функциям и диаграммам Юнга знакомит с важным комбинаторным объектом, играющим в теории представлений примерно такую же роль, как натуральные числа в алгебре и анализе. Обсуждаемые в этом курсе тождества используются в самых разных областях математики. Курс «Gromov hyperbolic groups» знакомит с изящным взаимодействием комбинаторной теории групп и гиперболической геометрии. Годовой курс «Non-commutative algebra» посвящён структурной теории ассоциативных алгебр и модулей над ними — идейному фундаменту всей теории представлений. Эти три вводных курса мало зависят друг от друга и для их понимания достаточно владения алгеброй и геометрией в объёме первого года бакалавриата.

Годовой курс по группам и алгебрам Ли включает в себя классическую теорию Ли, описывающую связь между матричными группами и их касательными алгебрами, а также строение и представления этих групп и алгебр (первый семестр) и более продвинутую структурную теорию и классификацию абстрактных полупростых алгебр Ли и их представлений (второй семестр). Курс «Infinite dimensional Lie algebras» посвящён бесконечномерным обобщениям структурной теории полупростых алгебр Ли и использует предыдущий курс в качестве пререквизита.

Курс «Classical groups, their invariants and representations» является глубоким современным изложением знаменитой книги Г. Вейля с таким же названием и требует владения материалом первой половины курса про группы и алгебры Ли, а также теорией представлений конечных групп и анализом (теория меры). В курсе «Introduction to algebraic groups and invariant theory» даётся алгебро-геометрический взгляд на матричные группы и инварианты их действий на алгебраических многообразиях над произвольными полями. Для понимания этого курса требуется владение алгебраической геометрией в объёме «Геометрического введения в алгебраическую геометрию». Два этих курса не зависят друг от друга и являются двумя неотъемлемыми и дополняющими друг друга отражениями одной и той же сущности.

Курс «Harmonic analysis and Banach algebras» посвящён концептуальному объяснению «метода Фурье» и его обобщениям посредством разложения пространства функций на локально компактной абелевой группе (например, на $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, или $S^1 = \mathrm{U}_1$) на неприводимые представления и использования техники теории представлений для решения уравнений и доказательства таких результатов, как двойственность Понтрягина. Курс требует владения теорией меры и основами функционального анализа.

Международный научный семинар Б. Л. Фейгина «Теория представлений» проводится online и требует серьёзной подготовки. На семинаре «Представления и вероятность» обсуждается использование соображений симметрии в вероятностных и эргодических задачах, а также вероятностные задачи и динамические системы, естественно возникающие в самой теории представлений. Курс и семинар П. Н. Пятова и П. А. Сапонова по квантовым группам посвящены некоммутативным обобщениям алгебр функций на матричных группах, мотивированным задачами, навеянными квантовой физикой. Для участия в этих занятиях достаточно хорошего владения обязательными курсами первых двух лет бакалавриата.

осень	весна
	◦ **Symmetric Functions** (русское описание), K. G. Kuyumzhiyan, hard intercam. course 2+

(продолжение на следующей стр.)

(начало на предыдущей стр.)

ОСЕНЬ	ВЕСНА
◦ **Noncommutative Algebra**, M. Rovinsky, simp. intercam. course 2+	◦ **Noncommutative Algebra**, M. Rovinsky, simp. intercam. course 2+
◦ **Группы и алгебры Ли**, А. И. Ильин, труд. межк. курс 3+	◦ **Алгебры Ли и их представления**, М. В. Игнатьев, прост. межк. курс 3+
◦ **Gromov hyperbolic groups** (русское описание), A. S. Golota, hard intercam. course 2+	◦ Infinite-dimensional Lie algebras, F. V. Uvarov, hard intercam. course 3+
◦ **Classical groups, their invariants, and representations** (русское описание), A. I. Ilin, G. I. Olshanski, hard intercam. online course 3+	◦ **Introduction to algebraic groups and invariant theory** (русское описание), V. S. Zhgoon, hard intercam. course 3+
◦ Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, труд. межк. дист. НИС 3+	◦ Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, труд. межк. дист. НИС 3+
◦ Representations and Probability (русское описание), A. V. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, simp. intercam. RS 3+	◦ Representations and Probability (русское описание), A. V. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, simp. intercam. RS 3+
◦ Harmonic analysis and Banach algebras (русское описание), A. Yu. Pirkovskii, simp. intercam. course 3+	◦ **Группа кос, квантовые группы и приложения**, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, прост. межк. курс 3+
◦ Квантовые группы: структуры, представления и приложения, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, труд. межк. НИС 3+	◦ Квантовые группы: структуры, представления и приложения, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, труд. межк. НИС 3+

Прикладная математика

Студенты, увлёкшиеся приложениями математики, могут включить в свой ИУП перечисленные ниже курсы. Между ними нет чётких логических зависимостей.

ОСЕНЬ	ВЕСНА
◦ **Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику**, В. А. Гриценко, прост. межк. НИС 2+	◦ Конечные кольца: арифметика многочленов и коды, В. А. Гриценко, прост. межк. дист. НИС 2+
◦ Основные приложения математики, С. М. Львовский, прост. дист. НИС 3+	◦ Избранные главы дискретной математики, И. В. Артамкин, прост. межк. НИС 1+
	◦ **Алгоритмы как математическое исследование**, Д. А. Шмелькин, прост. межк. курс 3+
	◦ **Линейное программирование**, Е. О. Степанов, прост. межк. курс 2+
◦ Discrete Optimization and Integer Programming (русское описание), D. I. Arkhipov, A. N. Lavrov, simp. intercam. course 2+	◦ **Game Theory** (русское описание), M. S. Panov, simp. intercam. course 2+
◦ **Прикладные методы анализа**, А. В. Забродин, К. П. Зыбин, прост. межк. курс 3+	◦ Асимптотические методы, К. П. Зыбин, прост. курс 2+
	◦ **Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные**, А. В. Хохлов, прост. межк. курс 2+
	◦ **Topological data analysis** (русское описание), V. G. Gorbounov, simp. intercam. RS 2+
	◦ **Стохастический анализ и приложения**, А. В. Колесников, труд. курс 3+
◦ **Избранные главы математической экономики**, М. И. Левин, прост. межк. дист. НИС 3+	◦ **Непараметрика и другие сюжеты статистики**, И. А. Самойленко, прост. межк. НИС 3+

Статистическая информация о курсах

в этой книге представлено	осенью	весной
курсов	34	41
НИСов	27	25
проектов	0	0
толстых	27	35
тонких	34	31
русских описаний	56	60
английских описаний	23	23
описаний на двух языках	18	17
занятий 1 +	5	8
занятий 2 +	14	21
начального уровня	19	29
занятий 3 +	38	36
занятий 4 +	4	1
субъективно простых	31	34
субъективно трудных	30	32
дистанционных	7	8
межкампусных	56	61

Описания курсов на русском

Кроме курсов, читаемых по-русски, в этом разделе имеются русские описания некоторых курсов, читаемых по-английски. Это отмечается сразу под названием курса, следом за указанием его статуса и целевой аудитории.

Автоморфные формы и их приложения
трудный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: В. А. Гриценко, В. П. Спиридонов.

ОПИСАНИЕ. Автоморфные и модулярные формы появляются в самых различных областях математики и физики. Как написал известнейший математик Мартин Эйхлер в математике есть пять арифметических операций: сложение, вычитание, умножение, деление и модулярные формы. Можно добавить к этому, что в некоторых математических проблемах модулярная форма является тем объектом, который «знает все». Основная часть докладов будет посвящена актуальным вопросам теории автоморфных форм, но они будут предваряться введением в предмет, что позволит участникам изучить некоторые разделы теории модулярных форм и подключиться к научным исследованиям.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. ТФКП, готовность быстро усвоить основные определения классической теории модулярных форм и теории форм Якоби.

ПРОГРАММА.

- Теория квази-модулярных дифференциальных операторов и соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений.
- Формы Якоби многих переменных и векторнозначные модулярные формы.
- Теория инвариантов и формы Якоби систем корней: полиномиальность кольца слабых форм Якоби инвариантных относительно действия группы Вейля системы корней D_n.
- Формы Якоби и инварианты Громова – Виттена некоторых моделей.
- Скобки Ранкина – Коэна и их приложения в теории чисел.
- Квадратичные решетки и тета-ряды Якоби многих переменных.
- Автоморфные формы и зеркальная симметрия.

УЧЕБНИКИ.

- **[G]** V. Gritsenko « Jacobi modular forms: 30 ans après», online course of NRU HSE.
- **[K]** Н. Коблиц « Введение в эллиптические кривые и модулярные формы», 1988.
- **[E]** W. Ebeling « Lattices and Codes», 2012.
- **[AF]** F. Diamond, J. Shurman, « A First Course in Modular Forms», 2006. M. Eichler, D. Zagier, «Jacobi forms», 1985.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Для получения оценки 10 достаточно сделать 30-минутный доклад на семинаре или подготовить содержательный реферат научной статьи.

Алгебраические кривые
трудный межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. А. Авилов.

ОПИСАНИЕ. Алгебраическая геометрия возникла как наука о множествах решений систем полиномиальных уравнений, но сейчас это одна из самых широких, разнообразных и быстро развивающихся областей математики, имеющая тесные связи с математической физикой. Алгебраические многообразия малой размерности (кривые и поверхности) возникают на каждом шагу, и понимание их свойств очень важно. В рамках этого семинара мы разберёмся с тем, какими бывают алгебраические кривые, какие у них свойства, изучим их группы автоморфизмов и т.д. При этом будут затронуты и некоторые более общие сюжеты алгебраической геометрии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Очень желательно владение коммутативной алгеброй и материалом курса «Алгебраическая геометрия» Е. Ю. Америк (однако все необходимые понятия мы постараемся разобрать).

ПРОГРАММА.

- Кривые, дивизоры, линейные расслоения, линейные системы.
- Канонический пучок, двойственность Серра, теорема Римана – Роха на кривых.
- Гиперэллиптические кривые, формула Гурвица.
- Кривые в пространстве, оценка Кастельнуово.
- Эллиптические кривые.
- Автоморфизмы кривых большого рода.

УЧЕБНИКИ.

- Р. Хартсхорн, «Алгебраическая геометрия»
- E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris «Geometry of algebraic curves»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по формуле $(T+E)/2$, где T — оценка за устный доклад, а E — за письменный домашний экзамен.

Алгебраические поверхности
трудный межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. А. Авилов.

ОПИСАНИЕ. Этот семинар является логическим продолжением семинара «Алгебраические кривые» про алгебраические многообразия размерности 1 и посвящён двумерным многообразиям — алгебраическим поверхностям. Мы увидим, какими они бывают, и изучим некоторые их свойства.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Очень желательно владение коммутативной алгеброй и материалом курса «Алгебраическая геометрия» Е. Ю. Америк (однако все необходимые понятия мы постараемся разобрать).

ПРОГРАММА.

- Двумерная программа минимальных моделей
- Классификация Кодаиры – Энриквеса
- Поверхности дель Пеццо
- Эллиптические поверхности
- Поверхности кодаировой размерности 0
- (если останется время) Автоморфизмы поверхностей
- (если останется время) Особенности поверхностей

УЧЕБНИКИ.

- Р. Хартсхорн, «Алгебраическая геометрия»
- Griffiths, Phillip, and Joseph Harris. «Surfaces.» Chapter 4 in Principles of Algebraic Geometry
- Barth, Wolf P., Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. Compact Complex Surfaces

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по формуле $(T+E)/2$, где T — оценка за устный доклад, а E — оценка за домашний экзамен.

Алгебры Ли и их представления
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Представления и инварианты», «Алгебра и теория чисел».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. В. Игнатьев.

ОПИСАНИЕ. Структурная теория полупростых алгебр Ли и теория их представлений — один из важнейших разделов современной алгебры с массой ярких приложений в различных областях математики, математической физики и квантовой механики. Целью курса будет классификация полупростых алгебр Ли на языке схем Дынкина и построение их неприводимых представлений с помощью доминантных весов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Необходимо знание линейной алгебры в объёме первых двух курсов бакалавриата. Желательно, но НЕ обязательно знакомство со спецкурсом «Группы и алгебры Ли».

ПРОГРАММА.

- Определение и примеры полупростых алгебр Ли, построение исключительных алгебр.
- Форма Киллинга, критерий полупросты алгебры Ли.
- Система корней полупростой алгебры Ли.
- Абстрактные системы корней, их базисы и группа Вейля.
- Классификация систем корней в терминах схем Дынкина.
- Картановские и борелевские подалгебры, их сопряжённость.
- Классификация полупростых алгебр Ли с помощью систем корней. Соотношения Серра.
- Абстрактная теория доминантных весов.
- Модули Верма и неприводимые конечномерные представления полупростых алгебр Ли.
- Классификация неприводимых конечномерных представлений. Формула Вейля. Формула Фрейденталя.
- Если успеем: группы Шевалле как аналоги полупростых алгебр Ли над кольцами.
- Если успеем: бесконечномерные аналоги полупростых алгебр Ли, их представления.

УЧЕБНИКИ.

- Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.
- Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. Главы 1–3.
- Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. Главы 4–6.
- Р. Стейнберг. Лекции о группах Шевалле.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Вычисляется по формуле 0,2K + 0,5E + 0,1S + 0,2L, где K — оценка за контрольную в середине семестра, E — оценка за экзамен в конце семестра, S — оценка за работу на семинарах, L — оценка за листки.

Алгоритмы как математическое исследование
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Прикладная математика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Д. А. Шмелькин.

ОПИСАНИЕ. Алгоритмы служат мостом между программированием и математикой. Мы расскажем о том, в чём заключается и как оценивается эффективность алгоритмов. С одной стороны, алгоритмы различаются своей асимптотической сложностью, с другой стороны — структурами данных, выбор которых существенно влияет на эту сложность. Слушатели приобретут опыт практической реализации алгоритмов в виде программ — без этого трудно по настоящему понять алгоритмы. Курс будет иллюстрирован примерами, как из учебников, так и из практики. У студентов матфака большие возможности в выбора курсов. На других факультетах ВШЭ и в ШАД есть глубокие многосеместровые курсы по алгоритмам. Выбирая между ними и нашим курсом стоит иметь в виду, что наша основная цель — за ограниченное время показать математику в алгоритмах, задействуя минимальный багаж программирования, что удобно для тех, кто пока ещё только присматривается к компьютерным наукам.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. В части математических познаний достаточно школьной математики в рамках программы «Матфак: предисловие». Однако участники должны быть морально готовы к написанию программ на `Python`, а лучше — на `C++`. Требования к владению языком будут невелики, всё недостающее легко освоить в процессе решения задач, но чтобы писать программы, нужен доступ к компьютеру, в идеале — собственный ноутбук, за которым можно работать на практическом занятии.

ПРОГРАММА.

- Начальные примеры алгоритмических задач. Понятие сложности алгоритма и сложности задачи. Нижние оценки сложности алгоритмов. Навыки: алгоритмы на множествах чисел, оценка их сложности.
- Стандартные структуры данных: массив, стек, очередь, список, дерево, хэш таблица. Навыки: умение программировать некоторые методы структур данных и выбирать подходящую структуру для задачи.
- Неориентированные графы и их обходы. Поиск в ширину и его применения (поиск связных компонент и минимального покрывающего дерева графа, поиск кратчайших путей, обобщения). Навык: умение решать алгоритмические задачи на графах методом построения структуры данных и поиска в ширину.
- Ориентированные графы и порядки на множествах. Поиск в глубину. Топологическая сортировка, поиск сильно связных компонент, перечисление всех ориентированных циклов. Навык: построение полных порядков из предпорядка.
- Потоки на графах. Алгоритмы поиска максимального потока и минимального разреза. Многопродуктовые потоки, алгоритмы поиска максимального конкурентного потока. Навык: решение задач методом построения и максимизации потока на графе.
- Динамическое программирование
- Жадные алгоритмы и их применимость. Матроиды и субмодулярные функции. Примеры (минимальное покрывающее дерево, упаковка рюкзака, оптимальное расписание, покраски графов). Навык: умение видеть задачи, допускающие точные жадные алгоритмы.

УЧЕБНИКИ.

- Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест «Алгоритмы: построение и анализ», пер. под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2001.
- С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани «Алгоритмы» пер. под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2014.
- Alexander Shen «Algorithms and Programming, Problems and Solutions» 2nd edition, 2010

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка складывается из 3 составляющих. 50% составит оценка за выполнение периодически анонсируемых упражнений по решению задач, как в виде текстового решения, так и на программирование; 15% — оценка за коллоквиум в конце третьего модуля; 35% — оценка за устный экзамен в конце курса.

Анализ и геометрия интегралов-периодов
простой межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 1-й модуль 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 2 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. Танабэ.

ОПИСАНИЕ. В основе трансцендентной алгебраической геометрии (transcendental algebraic geometry) лежит понятие так называемых «периодов» (periods) многообразия. Каждый период определяется как спаривание элемента гомологии (цикла) и элемента когомологии (голоморфной дифференциальной формы на многообразии), т.е. как интеграл некой дифференциальной формы вдоль гомологического цикла подходящей размерности. С помощью таких «интеграловпериодов» (period integrals) можно исследовать монодромию гомологии или когомологии многообразия. Для специального класса многообразий глобальная группа монодромии может оказаться весьма нетривиальной дискретной группой, вложенной в алгебраической группе (G.D. Mostow). Локальная монодромия описывает структуру Ходжа когомологии (P. Deligne, А.Н.Варченко, Morihiko Saito). В данном курсе мы начнём с того, чтобы составить обзорное представление о пользе и важности интегралов-периодов, используя пример семейства эллиптических кривых, зависящих от одного параметра. Анализ данного примера нам даёт следующие сведения : периоды представимы во виде некоторой гипергеометрической функции (гипергеометрическая ф. Гаусса .... А-ГГФ Гельфанда-Зелевинского-Капранова), от периодов возникают такие глобальные объекты как уравнение Пикара-Фукса или связность Гаусса-Манина (Ph.Griffiths), специальное значение периода вычисляет мощность p-адических точек на алгебраической кривой (Ю.И. Манин).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Комплексный анализ в объёме учебника Ahlfors, Compelx Analysis. Анализ на многообразиях в объёме учебника W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis (кроме главы 11 про интеграл Лебега). Это примерно соответствует содержанию одноимённых обязательных курсов бакалавриата на матфаке ВШЭ. Предварительное знакомство с периодами алгебраических кривых даёт книга Г. Клеменса «Мозаика теории комплексных кривых» (§§2.7 – 2.12).

ПРОГРАММА.

- Эллиптическая кривая и эллиптические интегралы. Риманова поверхность, получаемая как многолистное накрытие над комплексной плоскостью в проколотыми точками.
- Гипергеометрические функции Гаусса. Гамма функция. Бета функция Бернулли. Интегральное представление Эйлера. Интеграл Меллина – Барнса. Глобальное монодромное представление ГГФ Гаусса при помощи их интегрального представления.
- Мероморфные формы на римановой поверхности. Циклы на римановой поверхности и их индексы пересечения. Периоды замкнутых форм. Билинейное соотношение Римана для периодов.
- Гипергеометрические функции Похгаммера и их интегральное представление Эйлера. Интеграл Меллина – Барнса для ГГФ Похгаммера. Монодромное представление ГГФ Похгаммера при помощи их интегрального представления.
- A-гипергеометрические функции Гельфанда – Зелевинского – Капранова. Многомерные вычеты и интегралы-периоды аффинного алгебраического многообразия. Дискриминантное множество аффинного алгебраического многообразия. Униформизация Горна – Капранова дискриминантного множества. Интегральное представление A-ГГФ ГЗК путем применения торической геометрии.

УЧЕБНИКИ.

- K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions .
- F. Beukers, G. Heckman, Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$, Inventiones Math. 1989, 95:325—354.
- I. Nörlund, Hypergeometric functions, Acta Math. 94, (1955/56), pp.289-349.
- V. V. Batyrev, Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori, Duke Math.J., 1993, 69 (2): 349-409.
- I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, 1989. Hypergeometric functions and toric varieties, Functional analysis and its appl., 23(1): 12-26.
- I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, 1990. Generalized Euler integrals and A- Hypergeometric functions, Adv. in Math., 84: 255-271.
- D. Cox, S. Katz, Mirror symmetry and Algebraic Geometry, Math Surveys and Monographs, Vol. 68, AMS, RI Providence, 1999 .
- Т. М. Садыков, А. К. Цих, Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных, М. Наука 2014.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по правилам: 60% — решения домашних заданий, 40% — решения экзаменационных задач. В обоих случаях решения будут сдаваться в письменной форме. В течение курса лекций распространяться будут больше десяти домашних задач. Балл за решение варьируется от 5 до 15 в зависимости от сложности задачи. Если кто-то наберёт 100 баллов за решения домашних задач, то он получит полное 60%, предназначенное для данной части оценки.

Аналитическая теория чисел с элементами геометрии чисел
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебра и теория чисел».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. А. Илларионов.

ОПИСАНИЕ. Аналитическая теория чисел — это раздел теории чисел, который изучает количественные аспекты различных объектов арифметического происхождения при помощи аналитических методов. Геометрия чисел занимается применением в теории чисел геометрических понятий и методов. В первой части этого курса мы обсудим доказательства таких классических фактов, как асимптотический закон распределения простых чисел и теорема Дирихле о простых в арифметических прогрессиях, а также научимся использовать свойства дзета-функции Римана и метод комплексного интегрирования. Во второй части мы изучим некоторые вопросы, связанные отклонением многомерных последовательностей от равномерного распределения (теорема Рота), а также поймём, как теория чисел может использоваться для приближенных методов (теоретико-числовой метод Коробова).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Комплексный анализ (основные свойства голоморфных функций, интегральная формула Коши, принцип максимума, теорема Вейерштрасса о целых функциях), анализ («O» большое и «o» малое, интегрирование по частям, ряды Фурье, преобразование Фурье), алгебра и линейная алгебра (основные результаты стандартного курса первого года бакалавриата).

ПРОГРАММА.

1. Формулы суммирования, средние значения арифметических функций. Функции Мёбиуса и Мангольдта, ряды Дирихле. Проблема круга Гаусса и проблема делителей Дирихле.
2. Характеры Дирихле и L-функции. Теорема Дирихле о бесконечности множества простых в арифметической прогрессии.
3. Дзета-функция Римана, распределение простых чисел (оценки Чебышева, постулат Бертрана, асимптотический закон о распределении простых чисел). Алгоритмы распознавания простых чисел (тесты простоты)*.
4. Гипотеза Римана о нулях дзета-функции. Оценка остаточного члена для АЗРП. Теорема Зигеля – Вальфиша*. Уточнение остаточного члена в проблеме делителей Дирихле*.
5. Теория равномерного распределения, суммы Вейля. Отклонение последовательностей от равномерного распределения. Теорема Рота.
6. Решетки, базис решетки, теорема Минковского о выпуклом теле и ее следствия. Отклонение сеток Коробова от равномерного распределения.
7. Теоретико-числовые квадратурные формулы Коробова.

УЧЕБНИКИ.

- А. Л. Карацуба. Основы аналитической теории чисел, 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983
- Чанга М. Е. Методы аналитической теории чисел. Электронное издание. М.: МЦНМО, 2019.
- Дж. В. С. Касселс. Введение в теорию диофантовых приближений, Изд-во иностр. лит., М.: 1961.
- Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. $\min(10, 0.54P+0.6E)$, где P — доля решенных задач из листков, а E — оценка за экзамен.

Асимптотические методы
простой спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Прикладная математика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: К. П. Зыбин.

ОПИСАНИЕ. Будут изложены асимптотические методы решения различных содержащих малый параметр линейных и нелинейных задач математической физики. Формальное разложение по параметру приводит к рядам, которые существуют лишь на конечном (достаточно малом) интервале времени, а когда малый параметр находится при старшей производной, его зануление в первом приближении препятствует решению граничной задачи. Целью курса является знакомство с различными методами преодоления такого рода проблем.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. ТФКП, дифференциальные уравнения.

ПРОГРАММА.

- Асимптотические ряды.
- Методы вычисления различных интегралов, содержащих малый параметр.
- Уравнение Дюффинга.
- Колебательные системы с самовозбуждением.
- Колебательные системы со слабой нелинейностью.
- Многочастотное возбуждение.
- Уравнение Матье.
- Задачи с пограничным слоем.

УЧЕБНИКИ.

- А. Найфе. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
- Асимптотические методы в динамике систем, Новосибирск: Наука, 1980.
- Б. Р. Вайнберг. Асимптотические методы в уравнениях математической физики М.: МГУ, 1982.
- Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн – Заде. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Половина — работа на семинаре, половина — контрольная.

Вариационное исчисление и оптимальное управление
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы», «Геометрия и топология», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Л. В. Локуциевский.

ОПИСАНИЕ. В курсе рассматриваются современная геометрическая теория управления и классическое вариационное исчисление как часть ее. Цель курса — познакомить слушателей с красивой геометрией, стоящей за этими науками, с основными идеями и результатами, а также с некоторыми открытыми вопросами. В первой части курса предполагается обсудить классические методы и результаты Эйлера, Лагранжа, Лежандра, Якоби и Вейерштрасса с современной точки зрения. Вторая часть курса будет посвящена геометрической теории управления и некоторым ее приложениям — например, в субримановой геометрии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Обыкновенные дифференциальные уравнения, линейная алгебра, математический анализ первого года бакалавриата. Помогут, но не обязательны анализ на многообразиях и функциональный анализ.

ПРОГРАММА.

1. Задачи вариационного исчисления как задачи геометрической теории управления.
2. Принцип Гюйгенса.
3. Уравнение Эйлера – Лагранжа и гамильтонов формализм. Теорема Гильберта о гладкости.
4. Теория поля экстремалей Якоби.
5. Прямые методы: теорема существования оптимального решения Тонелли.
6. Теорема о внутренности множества достижимости Кренера.
7. Теорема об орбите Нагано – Суссманна и теорема Рашевского – Чжоу.
8. Принцип максимума Понтрягина.

9*. Субримановы многообразия.

УЧЕБНИКИ.

- Аграчев А. А., Сачков Ю. Л., «Геометрическая теория управления»
- Зеликин М. И., «Оптимальное управление и вариационное исчисление»
- Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., «Оптимальное управление»
- Clarke, «Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control», Springer

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.5 * задачи на семинарах (листочки) + 0.5 * экзамен

Введение в КАМ-теорию
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. А. Глуцюк.

ОПИСАНИЕ. Уравнения Гамильтона — один из наиболее фундаментальных классов дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию механических и ряда других физических систем. Эти уравнения сохраняют симплектическую структуру и связанную с нею форму объёма. Простейший класс гамильтоновых систем — интегрируемые системы на компактных симплектических многообразиях. По теореме Арнольда – Лиувилля в этой ситуации многообразие расслаивается на инвариантные торы половинной размерности, вдоль которых движение квазиперидично: траектории идут вдоль линейной обмотки тора. Созданная А. Н. Колмогоровым, В. И. Арнольдом и Ю. Мозером в конце 1950-х — начале 1960-х гг. теория КАМ описывает возмущения так называемых невырожденных интегрируемых систем (в которых частота квазипериодического движения на инвариантном торе имеет невырожденную производную по трансверсальному параметру). Основная теорема КАМ утверждает, что при малом возмущении большинство инвариантных торов сохраняется: чем меньше параметр возмущения, тем больше процент (в смысле меры Лебега) сохранившихся инвариантных торов. Теория КАМ используется во многих областях математики, механики и физики. В первую очередь, в симплектической динамике и в небесной механике, а также в теории бильярдов. Цель курса — изложить теорию КАМ с доказательством разных версий теоремы КАМ и обсудить её применения, включая закручивающие отображения цилиндра (сохранение большинства инвариантных окружностей) и теорию бильярдов (теорема Лазуткина о существовании канторова семейства каустик — кривых, касательные к которым отражаются в их же касательные). Мы также обсудим глобальную динамику возмущённой системы, в первую очередь, возмущения интегрируемого закручивающего отображения цилиндра.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знание стандартных курсов линейной алгебры и матанализа. Желательно знание понятия гладкого многообразия.

ПРОГРАММА.

- Гамильтоновы системы. Примеры из механики. Сохранение симплектической формы и объёма.
- Симплектические многообразия и гамильтоновы векторные поля на них. Интегрируемые гамильтоновы системы Теорема Арнольда – Лиувилля. Классические примеры.
- Симплектоморфизмы. Интегрируемые закручивающие симплектоморфизмы цилиндра. Теорема КАМ для их возмущений и динамика возмущённого симплектоморфизма.
- Теорема КАМ для общей интегрируемой гамильтоновой системы.
- Симплектическая структура на пространстве ориентированных прямых в Евклидовом пространстве. Бильярдные отражения ориентированных прямых как симплектоморфизмы. Обобщение на геодезические и бильярды на произвольном римановом многообразии: редукция Мельроуза.
- Плоские выпуклые бильярды. Каустики. Интегрируемость эллиптического бильярда.
- Теорема Лазуткина типа КАМ о существовании в выпуклом бильярде канторова семейства (положительной меры) непересекающихся замкнутых каустик.
- Обзор гипотезы Бирхгофа об интегрируемых бильярдах.

УЧЕБНИКИ.

- В. И. Арнольд, «Математические методы классической механики»
- Ю. Мозер, «КАМ теория и проблемы устойчивости»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. $0.6\times$(оценка за решение задач)$+0.6\times$(оценка за экзамен). Если полученное число больше 10, за курс ставится 10.

Введение в алгебраические группы и их инварианты
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Представления и инварианты», «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. С. Жгун.

ОПИСАНИЕ. Геометрическая и классическая теории инвариантов алгебраических групп — важнейшие разделы современной математики. Первые примеры инвариантов линейных преобразований — определитель, след, характеристический многочлен возникают прямо в начальном курсе линейной алгебры. Классическая теория инвариантов описывает все полиномиальные инварианты «классических» линейных групп: полной, проективной, специальной, ортогональной, симплектической и др. Геометрическая теория инвариантов, берущая начало в работах Гильберта и Мамфорда, исследует геометрические свойства инвариантов и пространств орбит действий алгебраических групп на алгебраических многообразиях, являясь основным инструментом для построения разнообразных пространств модулей (кривых, векторных расслоений, когерентных пучков, подсхем и других геометрических объектов). В курсе излагаются основы структурной теории алгебраических групп и начала как классической, так и геометрической теории инвариантов, а также вопросы, связанные с эквивариантными вложениями однородных пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Требуется знание линейной алгебры и теории представлений конечных групп. Последнее желательно, чтобы используемые конструкции не вызывали удивления. Полезно знание групп и алгебр Ли и основ алгебраической геометрии.

ПРОГРАММА.

- Алгебраические группы и их алгебры Ли.
- Действия алгебраических групп. Орбиты, стабилизаторы, однородные пространства. Теорема Шевалле.
- Многообразия флагов. Действие разрешимых групп на полных многообразиях. Теорема Бореля (Ли – Колчина) о неподвижной точке.
- Сопряженность борелевских подгрупп, максимальных торов, картановских подгрупп.
- Структурная теория полупростых алгебраических групп.
- Действие редуктивных групп на аффинных многообразиях. Конечная порожденность алгебры инвариантов (Теорема Гильберта).
- Категорный фактор. Геометрический фактор. Существование категорного фактора для действия редуктивных групп на аффинных многообразиях.
- Теорема Нётер о степенях образующих алгебры инвариантов.
- Теория инвариантов классических групп.
- Действие редуктивных групп. Линеаризация обратимого пучка. Группа G-линеаризованных линейных расслоений.
- Полустабильные и стабильные точки. Фактор Мамфорда.
- Численный критерий стабильности.

- Критерий Гильберта – Мамфорда.

Дополнительные темы (если позволит время).

- Критерий В. Л. Попова стабильности действия на аффинном многообразии.
- Теорема Луны о слайсе.
- Отображение моментов. Замкнутость орбит, критерий Кемпфа – Несс.
- Стратификация Хесселинка множества нестабильных точек.
- Пространства модулей кривых.

УЧЕБНИКИ.

- D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd. edition, Ergebnisse Math. 34, Springer, 1994
- I. V. Dolgachev, Introduction to Geometric Invariant Theory, Lect. Notes Series, 25, Seoul Nat. Univ., 1994.
- Э. Б. Винберг, В. Л. Попов. Теория инвариантов. Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Совр. пробл. мат., Фунд. направл., т. 55, 1989, с. 137–309.
- J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Math., no. 21, Springer, 1975. (русский перевод: Хамфри Д. Линейные алгебраические группы. М., Наука, 1980.)
- Х. Крафт, Геометрические методы в теории инвариантов, Москва: Мир, 1987.
- F. Knop, H. Kraft, T. Vust, The Picard group of a G-variety. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar **13**, Birkhäuser (1989), 77–88.
- D. A. Timashev. Homogeneous spaces and equivariant embeddings. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII (R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov, eds.), Encyclopædia of Math. Sci., vol. 138, Springer, 2011.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.3 grade for exercise sheet + 0.7 final exam grade

Введение в алгебраическую теорию чисел
трудный межкампусный спецкурс на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. С. Жгун.

ОПИСАНИЕ. Алгебраическая теория чисел – классическая область математики, сформировавшаяся в ходе исследования решений диофантовых уравнений, а также благодаря попыткам доказать теорему Ферма. Сейчас это обширная классическая область лежащая в основании Арифметической геометрии. В этом курсе мы напомним основы теории Галуа, рассмотрим так называемую теорию ветвления, докажем основные теоремы о структуре идеалов (разложения на простые идеалы), докажем теорему Дирихле о структуре S-единиц, теорему о конечности группы классов. Мы осветим очень важную аналогию между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических кривых над конечными полями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. стандартные курсы алгебры

ПРОГРАММА.

- Теория Галуа и конечные поля. Основные факты из теории Галуа. Структура конечных полей. Уравнения над конечными полями. Квадратичный закон взаимности.
- p-адические числа. Сравнения и p-адические числа. Лемма Гензеля. Теорема Островского.
- Квадратичные формы. Представление чисел квадратичными формами над $\mathbb{Q}_p$ и над $\mathbb{Q}$. Теорема Минковского – Хассе.
- Поля алгебраических чисел. Дедекиндовы кольца. Разложение на простые идеалы. Модули над Дедекиндовыми кольцами.
- Норма и след. Ветвление, дискриминант, дифферента.
- Адели и идели.
- Группа классов идеалов. Теорема конечности. Константа Минковского.
- Теорема Дирихле о S-единицах.
- Циклотомические поля.

УЧЕБНИКИ.

- Боревич З. И., Шафаревич И. Р. «Теория чисел». - М.: Наука, 1985.
- Вейль А. Основы теории чисел. - М.: Едиториал УРСС, 2004.
- Ленг С. «Алгебра». - М.: Мир, 1968.
- Ленг С. «Алгебраические числа». - М.: Мир, 1972.
- Манин Ю. И., Панчишкин А. А. «Введение в современную теорию чисел». - М.: МЦНМО, 2009.
- Серр Ж.-П. «Курс арифметики». - М.: Мир, 1972.
- Касселс Д., Фрелих А.(ред.), Алгебраическая теория чисел. – 1969.
- Serre J. P. Local fields. – Springer, 2013. – Т. 67.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 1/10(2/3(final exam%) + 1/2(problem sheets%))

Введение в алгебраическую топологию
трудный межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Э. Казарян.

ОПИСАНИЕ. Одна из наиболее ярких черт, отличающих математику XX века от всей предшествующей — появление и развитие алгебраической топологии. В настоящее время использование алгебро-топологического инструментария стало непременным атрибутом значительной части математических исследований. Сочетание геометрических идей с формализованными алгебраическими алгоритмами для вычисления топологических инвариантов привели к эффективному средству изучения многих математических структур, в том числе, и не связанных напрямую с топологией. В курсе предлагается знакомство с начальными понятиями алгебраической топологии, в основном вокруг гомологий и когомологий. Основной упор делается не столько на формулировки, сколько на применение этих знаний на практике и доведения вычислений в конкретных задачах «до числа».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знания в рамках начального курса топологии, включая фундаментальную группу и накрытия.

ПРОГРАММА.

- Топологические пространства и операции над ними: факторпространство, конус, надстройка, джойн
- Цепной комплекс: циклы, границы, гомологическая эквивалентность, гомологии
- Симплициальные гомологии: симплициальное пространство и его цепной комплекс, граничный оператор
- Клеточные и сингулярные гомологии: сравнение разных подходов к теории гомологий, доказательство их эквивалентности для клеточных пространств.
- Длинная точная последовательность и ее применения для вычисления гомологий конкретных пространств
- Гомологии многообразий: фундаментальный класс, ориентируемость, двойственность Пуанкаре
- Индекс пересечения и степень отображения: пересечение циклов, локальный индек, классификация отображений сфер одинаковой размерности, индекс зацепления
- Умножение в когомологиях: «чашечное» умножение и пересечение циклов, вычисление кольца когомологий проективного пространства
- Теория Морса: индекс Морса, комплекс Морса, неравненство Морса

УЧЕБНИКИ.

- Allen Hatcher. Algebraic topology. (2002)
- Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Элементарная топология. МЦНМО, 2010, 352с.
- Фоменко А. Т., Фукс Д. Б., Курс гомотопической топологии.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 40% (оценка за промежуточную контрольную), 60% (итоговый письменный экзамен) + 1–2 дополнительных балла за решения задач семинаров.

Введение в дифференциальную геометрию
простой межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Ф. В. Уваров.

ОПИСАНИЕ. Курс знакомит с основными инструментами дифференциальной геометрии на многообразиях, необходимыми для работы в таких областях современной геометрии, как симплектическая и кэлерова геометрии, калибровочные теории, гладкие структуры и глобальный анализ на многообразиях. Главными объектами изучения будут дифференциальные формы и векторные поля, римановы метрики, главные и векторные расслоения на многообразиях, связности, кривизны, характеристические классы, комплексные и почти комплексные структуры.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курсы линейной алгебры и геометрии, элементарной топологии и дифференциальных уравнений первых двух лет бакалавриата.

ПРОГРАММА.

- Гладкие многообразия.
- Дифференциальные формы на многообразиях.
- Риманова метрика на многообразии, геодезические, оператор Ходжа.
- Векторные расслоения и главные расслоения на многообразиях.
- Связности на главных и векторных расслоениях, ковариантное дифференцирование.
- Кривизна связности. Характеристические классы.
- Ковариантные производные и метрика. Риманов тензор кривизны.
- Комплексные и почти комплексные многообразия.

УЧЕБНИКИ.

- Ш. Кобаяши, К. Номидзу, «Основы дифференциальной геометрии», тт. 1, 2, М., 1981.
- Дж. Милнор, Дж. Сташеф, «Характеристические классы», М., 1979.
- C. H. Taubes, «Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature», Oxford, 2011.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.5 (оценка за семинар) + 0.5 (оценка за экзамен)

Введение в квантовую теорию поля
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. И. Дунин–Барковский, В. В. Лосяков.

ОПИСАНИЕ. Общепринятая сегодня стандартная модель физики элементарных частиц представляет собой квантовую теорию поля (КТП). Помимо этой центральной роли в современной фундаментальной физике, КТП имеет множество приложений в чистой математике: именно из неё пришли квантовые инварианты узлов и инварианты Громова–Виттена симплектических многообразий. Если «обычная» квантовая механика занимается системами с фиксированным числом частиц, то объектами изучения КТП являются поля (не такие, как поле комплексных чисел, а, например, электромагнитное поле), элементарные возмущения которых являются аналогами квантовомеханических частиц, способных появляться и исчезать («рождаться» и «умирать»), и которые имеют бесконечно много степеней свободы. В этом курсе будут «с нуля» введены базовые понятия КТП: пространство Фока и формализм операторов на нём, а также формализм «континуального интегрирования». Все используемые объекты будут строго определены. Главным примером послужит квантовая теория скалярного поля. С физической точки зрения такое поле на классическом уровне определяется одним числом в каждой точке, т. е. его состояние в данный момент времени — это числовая функция на пространстве (в отличие от векторного, например, электромагнитного поля). В реальной стандартной модели физики элементарных частиц скалярным является только поле, соответствующее бозону Хиггса. Однако отдельное рассмотрение квантовой теории скалярного поля (даже более простого, чем поле Хиггса) крайне полезно, ибо позволяет освоиться с аппаратом и явлениями КТП на максимально простом содержательном примере. В курсе будет рассмотрена «теория возмущений» (поправки первого порядка в разложении по малому параметру) скалярного поля и способы вычисления вероятностей различных событий с частицами. Используемый математический аппарат включает в себя операторы на гильбертовых пространствах и обобщённые функции (всё необходимое мы напомним). Предварительное освоение курсов классической механики, классической теории поля и квантовой механики формально не предполагается, но безусловно не помешает (все необходимые сведения из этих курсов будут подробно рассказаны).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Алгебра, линейная алгебра и геометрия в объёме первого года бакалавриата. Анализ в объёме первых двух лет бакалавриата и ТФКП.

ПРОГРАММА.

- Базовые сведения из квантовой механики. Гильбертово пространство, наблюдаемые, гамильтониан, уравнение Шрёдингера.
- Квантование гармонического осциллятора.
- Квантовая система из многих тождественных частиц. Гильбертово пространство, наблюдаемые, гамильтониан, операторы рождения и уничтожения.
- Когерентные состояния. Коммутационные соотношения.
- Континуальный (фейнмановский) интеграл.
- Квантовая теория скалярного поля.
- S-матрица для скалярного поля. Теория возмущений. Диаграммы Фейнмана.
- Расходимости и регуляризации.
- Перенормировки в КТП на примере скалярного поля.

УЧЕБНИКИ.

- М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.
- А. С. Шварц. Матеамтические основы квантовой теории поля. Москва: Атомиздат, 1975.
- В. Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Москва: Атомиздат, 1976.
- Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Москва: Наука, 1984.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по формуле $\min(0.3\cdot(H_1+H_2+H_3)+0.2\cdot E, 10)$ с округлением по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх), где H_1, H_2, H_3 — отнормированные на 10 баллов (можно получить и больше 10 баллов) оценки за три домашних задания, а E — оценка за устный неблокирующий коллоквиум в конце курса.

Введение в коммутативную алгебру
трудный межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Е. Ю. Америк.

ОПИСАНИЕ. Коммутативная алгебра — теория коммутативных колец и модулей над ними — важный технический инструмент в алгебраической геометрии и теории чисел. Предполагается освоить необходимый для изучения этих дисциплин минимум, не залезая, впрочем, в гомологическую алгебру — это уже следующий шаг.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартный курс алгебры первого года бакалаврита.

ПРОГРАММА.

- Кольца, идеалы, модули, простые и максимальные идеалы — простейшие свойства (повторение)
- Кольца и модули частных
- Тензорное произведение
- Целые расширения, теорема Гильберта о нулях
- Нетеровы и артиновы кольца
- Примарное разложение (модулей над нетеровыми кольцами)
- Пополнение, лемма Артина–Риса
- Размерность. Размерность нетеровых локальных колец

УЧЕБНИКИ.

- М. Атия, И. Макдональд, Введение в коммутативную алгебру
- H. Matsumura, Commutative ring theory
- M. Hochster, lecture notes ”Math 614” (Melvin Hochster’s home page)

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 50% ДЗ, 50% итоговый письменный экзамен.

КОММЕНТАРИИ. Возможна «пробная» контрольная в середине семестра, которая даст вклад в экзаменационную оценку, если будет её улучшать, а не портить ☺.

Введение в обобщенные теории когомологий
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Горинов.

ОПИСАНИЕ. Обобщенные теории когомологий удовлетворяют всем аксиомам Эйленберга – Стинрода, кроме, возможно, аксиомы точки. Оказывается, что бывают простые, но содержательные примеры таких теорий, которые знают про пространства что-то, чего не знают классические когомологии. Например, теорему об инварианте Хопфа 1 проще всего доказывать с помощью комплексной K-теории. В то же время, многие результаты обычной теории когомологий (например, двойственность Пуанкаре) несложно перенести на обобщенные, что иногда проясняет/упрощает их доказательство. Цель курса — разобрать основы теории и несколько приложений и примеров.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Алгебраическая топология, например, в объеме глав 1-2 Фоменко – Фукса или глав 1-3 Хатчера. По просьбам участников мы будем напоминать всё, что потребуется.

ПРОГРАММА.

- Спектры и их примеры.
- Отображения спектров. Гомотопические группы и теорема Уайтхеда.
- Спектры можно разнадстраивать.
- Произведение двух спектров и Hom-спектр.
- Конструкции (ко)гомологий с помощью спектров.
- Мультипликативные теории когомологий. Ориентируемость расслоений и изоморфизм Тома.
- Комплексная и вещественная K-теория. Теорема Ботта. Применения комплексной K-теории.
- Кобордизмы и конструкция Понтрягина – Тома.

УЧЕБНИКИ.

- Дж. Ф. Адамс, Стабильные гомотопии и обобщенные гомологии
- А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии.
- А. Хатчер, Алгебраическая топология.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. max(0,4 промежуточный экзамен + 0,6 итоговый экзамен, задачи)

Введение в обобщённую теорию рекурсий
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Логика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: М. Н. Рыбаков, Д. С. Шамканов.

ОПИСАНИЕ. Вторая половина XX в. отмечена появлением различных обобщений классической теории рекурсий (или теории алгоритмов). Во-первых, учёные стали варьировать предметную область и допускать вычисления, которые имеют дело не только с конструктивными объектами, т.е. с натуральными числами, словами и т.п. Во-вторых, введены инфинитарные обобщения вычислительных процессов. Теперь «вычисления» требуют трансфинитного числа шагов. Наконец, изучаются непервопорядковые вычислимые объекты, например, функции на функциях. В нашем курсе мы обсудим обобщение теорий рекурсий в первых двух направлениях. Опираясь на элементарные формальные системы, мы введём перечислимые отношения на произвольных реляционных структурах, а разрешив себе трансфинитные «вычисления», изучим теорию гиперэлементарных и индуктивных отношений, которые в случае стандартной модели арифметики образуют первый уровень аналитической иерархии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знание классической логики предикатов и теории алгоритмов в рамках курса «Логика и алгоритмы».

ПРОГРАММА.

- Элементарные и обобщенные элементарные формальные системы.
- Монотонные индуктивные определения и их замыкающие ординалы.
- Совпадение представимых и индуктивных отношений.
- Структура гиперэлементарных множеств в случае гиперэлементарности базовых отношений реляционной структуры.
- Кодирование и универсальные формальные системы.

УЧЕБНИКИ.

- M. Fitting. «Fundamentals of Generalized Recursion Theory». 1981.
- Y. N. Moschovakis. «Elementary Introduction on Abstract Structures». 1974.
- R. M. Smullyan. «Diagonalization and Self–Reference». 1994.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Накопленная оценка (Н) равна средней оценке за домашние задания. Если она не меньше 8, то она совпадает с итоговой и студент освобождается от экзамена. Иначе, итоговая оценка равна 0.7*Н + 0.4*К, где К — оценка за экзамен в форме коллоквиума.

Введение в римановы поверхности
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Анализ».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Буряк.

ОПИСАНИЕ. Римановой поверхностью называется гладкое двумерное многообразие (поверхность) с заданной комплексной структурой. Замечательным образом, теория римановых поверхностей сочетает в себе обилие красивых результатов вместе с доступностью доказательств, особенно в сравнении с теорией комплексных многообразий большей размерности. Основным техническим инструментов у нас будет теория когомологий пучков, которую мы аккуратно построим, не предполагая никаких предварительных знаний. Основной целью курса является вывод теоремы Римана – Роха, будут также сформулированы двойственность Серра и теорема Абеля и продемонстрированы их приложения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Теория функций одной комплексной переменной, основы топологии (в объёме первого курса), основы теории гладких многообразий (включая дифференциальные формы и формулу Стокса).

ПРОГРАММА.

- Понятие римановой поверхности, примеры.
- Каноническое разложение пространства дифференциальных форм, голоморфные формы.
- Дивизоры на римановой поверхности.
- Понятие пучка.
- Когомологии пучков.
- Теорема конечности, род римановой поверхности.
- Теорема Римана – Роха.
- Двойственность Серра и теорема Абеля (без доказательства), их приложения.

УЧЕБНИКИ. О. Форстер. Римановы поверхности.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Домашние задания 2, первая контрольная 2, вторая контрольная 2, экзамен 5. Если суммарная оценка превышает 10, до результат уменьшается до 10.

Введение в теорию Галуа
трудный межкампусный спецкурс на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. М. Левин.

ОПИСАНИЕ. Теория Галуа с технической стороны являлась полигоном для выработки техники современной алгебры.

С идейной стороны эта теория выявила значимость структуры симметрий объектов, что сыграло первостепенную роль в концептуальном плане — начиная с Эрлангенской программы Феликса Клейна «Геометрия — это группы» до симметрийных методов современной математической физики.

Курс планируется сколь возможно элементарным по применяемой технике и опирающимся на разбор примеров.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Алгебра: группы и поля — главы 2 и 3 в «Алгебра» Ван дер Вардена линейная алгебра — глава 4

ПРОГРАММА.

- Действие группы на множестве: стабилизатор, неподвижные точки, централизатор.
- Поля: простое подполе, конечные расширения, степень расширения, присоединение корня многочлена = алгебраического элемента, поле разложения многочлена.
- Поля II: теорема о примитивном элементе, нормальные расширения, совпадение порядка группы и степени расширения.
- Основная теорема теории Галуа.
- Совпадение понятие нормальности для подполей и подгрупп, интерпретация факторгруппы.
- Теорема о нормальном базисе
- Целые элементы, кольцо целых и действие на него группы Галуа. Применение для анализа группы Галуа.
- Если позволит время: Геометрические интерпретации группы Галуа.

УЧЕБНИКИ.

- W. Б. Л. Ван дер Варден «Алгебра» Главы 6 и 8.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по формуле $\min(150, H + E) \,/\, 15$, где H и E суть процентные доли решённых домашних и экзаменационных задач от общего числа заданных обязательных задач, вычисленные по формуле $100 *$ [число всех (включая необязательные) решённых задач]:[число заданных обязательных задач]. Обратите внимание, что это отношение может быть больше 100. Таким образом, для получения оценки 10 достаточно решить 75% обязательных домашних и 75% обязательных экзаменационных задач, или другим способом набрать сумму $H + E = 150$. При наборе меньшей суммы оценка уменьшается линейно и вычисляется по стандартным правилам округления.

Введение в теорию пучков
трудный межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебраическая геометрия», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: К. В. Логинов.

ОПИСАНИЕ. Пучок — это фундаментальное понятие современной геометрии, позволяющее исследовать связь между глобальными и локальными свойства многообразий. Теория пучков является основой для построения различных полезных теорий когомологий, необходимых при изучении алгебраической геометрии и других наук. Мы обсудим базовые определения и теоремы теории пучков.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Желательно знать алгебру, топологию и анализ в объеме программы первых двух курсов бакалавриата. Полезно знать основы гомологической алгебры.

ПРОГРАММА. Приблизительная программа. 1. Пучки: определения и примеры. 2. Элементы теории категорий и гомологической алгебры. 3. Вялые, тонкие и мягкие пучки, вялые резольвенты. 4. Когомологии с коэффициентами в пучке 5. Когомологии Чеха. 6. Теорема ДеРама.

УЧЕБНИКИ. С. М. Натанзон, ”Введение в пучки, расслоения и классы Черна”

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка будет складывать из двух частей: из домашних заданий и экзамена. Формулы для оценки такая: $\min(100, 0.5H + 0.7E)$ / 10, где H — процентные доли решенных домашних задач, и E — письменного домашнего экзамена.

Введение в теорию случайных процессов
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Вероятность и стохастическая динамика», «Математическая физика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Л. Бланк.

ОПИСАНИЕ. Курс является продолжением стандартного курса по теории вероятностей (связанного в основном с комбинаторикой) и предназначен для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Уделяется особое внимание связи этой теории с функциональным анализом и общей теорией меры. Курс ориентирован на бакалавров 3-4 курса, магистрантов и аспирантов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. курсы математического анализа и теории вероятностей

ПРОГРАММА.

- Понятие случайного процесса.
- Элементы случайного анализа.
- Корреляционная теория случайных процессов.
- Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.
- Винеровский и пуассоновский процессы.
- Стохастический интеграл. Формула Ито.
- (Суб/супер)мартингалы.
- Инфинитезимальный оператор полугруппы.
- Стохастическая устойчивость динамических систем.
- Большие уклонения в марковских процессах и хаотической динамике.
- Нелинейные марковские процессы.

УЧЕБНИКИ.

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.
- Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 2003
- А. Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.4*(Накопленная оценка) + 0.6*Экзамен

Введение в теорию схем
трудный межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебраическая геометрия», «Алгебра и теория чисел».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: К. В. Логинов.

ОПИСАНИЕ. Это начальный курс по алгебраической геометрии на языке теории схем. Условно говоря, в объеме второй главы книжки Хартсхорна. Мы изучим основные понятия алгебраической геометрии: схемы, морфизмы и пучки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Требуется знакомство с алгеброй, топологией и анализом в объеме программы первых двух курсов бакалавриата. Полезно знакомство с основами коммутативной и гомологической алгебры.

ПРОГРАММА. Аффинные схемы. Понятие окольцованное пространства. Понятие схемы. Свойства схем и морфизмов: целостность, конечность, сепарабельность, собственность. Когерентные пучки. Дивизоры. Проективные морфизмы. Обильность. Дифференциалы.

УЧЕБНИКИ. Р. Харстхорн, «Алгебраическая геометрия» R. Vakil, «The rising sea. Foundations of Algebraic Geometry. »

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Среднее промежуточной контрольной и экзамена.

Введение в теорию чисел
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебра и теория чисел».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Кириченко.

ОПИСАНИЕ. Натуральные числа — естественный, интересный и сложный для изучения объект. Теория чисел — одна из самых древних областей математики, и стороннему наблюдателю она может показаться набором отдельных сюжетов из разных опер. В курсе мы изучим основные задачи и методы теории чисел с акцентом на внутреннюю цельность и логику этой области и её связи с другими областями. Курс поможет подготовиться к более продвинутым спецкурсам алгебраической направленности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Алгебра и геометрия 1 курса

ПРОГРАММА.

- Простые числа, конечные поля, квадратичный закон взаимности.
- Целочисленные квадратичные формы, кольца целых квадратичных числовых полей.
- Дзета-функция, L-функции, теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.
- Модулярная группа, эллиптические кривые, модулярные функции.

УЧЕБНИКИ.

- **[G]** К.-Ф. Гаусс, «Арифметические исследования».
- **[S]** Ж.-П. Серр, «Курс арифметики».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 30% ДЗ + 30% К + 40% Э, где ДЗ — средняя оценка за домашние задания, К — оценка за контрольную в конце 3 модуля, Э — оценка за письменный экзамен

Введение в функциональный анализ
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Анализ».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. В. Шапошников.

ОПИСАНИЕ. Курс функционального анализа посвящен широкому кругу идей и методов современной математики. В курсе будут рассмотрены метрические и нормированные пространства, понятие полноты и теорема Бэра, компактные множества и их свойства, линейные функционалы и отделимость выпуклых множеств, линейные операторы, элементы спектральной теории.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курс опирается на обязательные курсы математического анализа и алгебры.

ПРОГРАММА.

- Метрические и нормированные пространства. Эквивалентность метрик и норм.
- Полные пространства. Теорема Бэра. Теорема о сжимающем отображении.
- Компакты и их свойства. Теорема Стоуна – Вейерштрасса.
- Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцела – Асколи.
- Линейные функционалы. Теорема Хана – Банаха.
- Сопряженное пространство. Слабая и $*$ — слабая топология.
- Гильбертово пространство. Теорема Рисса. Ряды Фурье.
- Линейные непрерывные операторы. Теорема Банаха – Штейнгауза.
- Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
- Спектр линейного оператора и его свойства. Резольвента.
- Компактный оператор и его спектр. Альтернатива Фредгольма.
- Спектр самосопряженного оператора. Теорема Гильберта – Шмидта.

УЧЕБНИКИ.

- Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: РХД, 2009.
- Бородин П. А., Савчук А. М., Шейпак И. А. Задачи по функциональному анализу, МЦМНО, 2017.
- Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
- Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
- Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Курс включает лекции и семинары. На семинарах выдаются листки с задачами, часть из которых разбирается на семинаре, а часть является домашним заданием. Оценка за курс складывается из оценки за экзамен и накопленной оценки по формуле 0.5*(Накопленная оценка) + 0.5*(Экзамен), а накопленная оценка складывается из оценки за выполнение домашних заданий и оценки за работу на семинаре по формуле 0.6*(домашнее задание) + 0.4*(работа на семинарах). Все формы контроля оцениваются от 0 до 10 баллов.

Введение в эргодическую теорию
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы», «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Л. Бланк.

ОПИСАНИЕ. Можно ли отличить детерминированную хаотическую динамику от чисто случайной и имеет ли этот вопрос смысл? Влияет ли необратимость динамики на качественные характеристики процесса? Эргодическая теория изучает эти и другие статистические свойства динамических систем. Интерес к этой проблематике связан с тем, что «типичные» детерминированные динамические системы (например, дифференциальные уравнения) демонстрируют хаотическое поведение: их траектории выглядят как реализации случайных процессов. Мы начнем с классических результатов Пуанкаре, Биркгофа, Хинчина, Колмогорова и дойдем до современных постановок (в том числе и нерешенных) задач. Курс является вводным и ориентирован на бакалавров 2-4 курса, магистрантов и аспирантов. Предварительных знаний кроме курса мат. анализа не требуется (хотя они и желательны).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курс математического анализа

ПРОГРАММА.

- Динамические системы: траектории, инвариантные множества, простые и странные аттракторы и их классификация, хаотичность.
- Топологические свойства измеримой динамики.
- Действие в пространстве мер, понятие трансфер-оператора, инвариантные меры. Сравнение со случайными марковскими процессами.
- Эргодичность, теорема Биркгофа, перемешивание, ЦПТ. Меры Синая – Боуэна – Рюэлля и естественные/наблюдаемые меры.
- Основные эргодические конструкции: прямые и косые произведения, производное и интегральное отображения, естественное расширение и проблема необратимости.
- Эргодический подход к задачам теории чисел.
- Энтропия: метрический и топологический подходы.
- Операторный формализм. Спектральная теория динамических систем. Банаховы пространства мер, случайные возмущения.
- Многокомпонентные системы: синхронизация и фазовые переходы.
- Математические основания численного моделирования хаотической динамики.

УЧЕБНИКИ.

- И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. «Эргодическая теория», Наука, Москва, 1980.
- A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.
- М. Бланк. «Устойчивость и локализация в хаотической динамике», МЦНМО, Москва, 2001.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.4*(Накопленная оценка) + 0.6*Экзамен

Гамильтонова механика
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Побережный.

ОПИСАНИЕ. Курс гамильтоновой механики относится к базовым фундаментальным матфизическим курсам и направлен на знакомство слушателей с современным взглядом на основы теории интегрируемых систем и математической физики. Курс рассчитан на старших студентов бакалавриата и студентов магистратуры, освоение его программы даёт возможность в дальнейшем изучать более продвинутые курсы связанные с математической физикой.

Математический аппарат современной теории гамильтоновых систем включает в себя методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем, групп и алгебр Ли и их представлений, симплектической и пуассоновой геометрии, анализа на многобразиях и многих других. Приобретение практических навыков применения методов и конструкций этих разделов математики, умение их сочетать для решения задач механики является одной из целей данного курса. Курс может быть рекомендован не только студентам, собирающимся продолжить свою обучение на программе «Математика и математическая физика», но и планирующим специализироваться в чистой математике или её приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартные курсы бакалавриата первых двух лет: анализ, анализ на многообразиях, дифференциальные уравнения. Знакомство с лагранжевой механикой желательно, но не критично. Физический бэкграунд не требуется.

ПРОГРАММА.

- Ньютонов формализм: напоминание, симметрии, геометрия.
- Лагранжев формализм: принцип наименьшего действия, симметрии, законы сохранения.
- Гамильтонов формализм: канонические преобразования, симметрии, интегрируемость по Лиувиллю – Арнольду, уравнения Гамильтона – Якоби, разделение переменных.
- Симплектические и пуассоновы структуры: теорема Дарбу, системы на алгебрах Ли, коприсоединённое действие, скобка Кириллова – Костанта, отображение момента.
- Представление Лакса.

УЧЕБНИКИ.

- В. И. Арнольд «Математические методы классической механики», 3-е изд. М.: Наука, 1989
- А. М. Переломов, «Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли» М.: Наука, 1990
- Д. тер Хаар, «Основы гамильтоновой механики» М.: Наука, 1974

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. (сумма оценок за две контрольные)/4 + (оценка за экзамен)/2 с округлением до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх.

Гармонический анализ и банаховы алгебры
простой межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Анализ», «Представления и инварианты».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

ОПИСАНИЕ. Гармонический анализ на локально компактных абелевых группах представляет собой естественное обобщение классического анализа Фурье, обычно изучаемого студентами–математиками на младших курсах — а именно, теории тригонометрических рядов Фурье и теории преобразования Фурье на прямой. Наиболее элегантный подход к гармоническому анализу на абелевых группах основан на теории коммутативных банаховых алгебр, которая была основана Гельфандом в начале 1940-х гг. и впоследствии развита Райковым, Наймарком, Шиловым и другими замечательными математиками. Этот подход, в частности, доставляет сравнительно несложное аналитическое доказательство двойственности Понтрягина, основанное на теореме Планшереля. В этом курсе мы обсудим основы теории банаховых алгебр и применим ее к построению гармонического анализа на локально компактной абелевой группе. Если позволит время, то будут рассмотрены также некоторые неабелевы группы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Теория интеграла Лебега (в объеме стандартного курса анализа). Основы функционального анализа (в объеме 1-го семестра курса, ежегодно читаемого на матфаке).

ПРОГРАММА.

1. Игрушечный пример: гармонический анализ на конечной абелевой группе. Классические примеры: гармонический анализ на группе целых чисел, на окружности и на прямой.
2. Топологические группы. Мера Хаара. Модулярный характер.
3. Банаховы алгебры и элементарная спектральная теория. Гельфандов спектр и преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры. C^*-алгебры и первая теорема Гельфанда – Наймарка.
4. Банаховы алгебры, связанные с локально компактными группами: L^1-алгебра, алгебра мер, групповая C^*-алгебра. Представления локально компактных групп и их групповых алгебр.
5. Группа, двойственная к локально компактной абелевой группе. Преобразование Фурье как частный случай преобразования Гельфанда. Положительные функционалы на банаховой $*$-алгебре. Положительно определенные функции и теорема Бохнера. Формула обращения Фурье. Теорема Планшереля. Двойственность Понтрягина.
6. Гармонический анализ на группе Гейзенберга и/или на некоторых других неабелевых группах (если позволит время).

УЧЕБНИКИ.

1. A. Deitmar, S. Echterhoff. Principles of harmonic analysis. Springer, 2009.
2. G. B. Folland. A course in abstract harmonic analysis. CRC Press, 1995.
3. Н. Бурбаки. Спектральная теория. М.: Мир, 1972.
4. Дж. Мёрфи. C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
5. А. Я. Хелемский. Банаховы и полинормированные алгебры. М.: Наука, 1989.
6. А. Ю. Пирковский. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. М.: МЦНМО, 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка = оценка за промежуточную контрольную с весом 0.3 + оценка за экзамен с весом 0.7. Промежуточная контрольная и экзамен будут представлять собой письменные индивидуальные домашние задания, на выполнение каждого из которых отводится приблизительно 7 дней.

Геометрические структуры на многообразиях
трудный семинар на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебраическая геометрия», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Е. Ю. Америк, М. С. Вербицкий, В. С. Жгун, Д. Б. Каледин.

ОПИСАНИЕ. Семинар ориентирован на студентов и аспирантов, интересующихся геометрией в самом широком смысле. На семинаре предполагаются доклады участников по комплексной и алгебраической геометрии, в том числе по геометрии гиперкэлеровым многообразиям, топологии, теории особенностей, алгебраической геометрии в конечной характеристике. Кроме ликбеза, необходимого для занятий современной математикой и понимания текущей литературы ничего не требуется, литература выбирается исходя их вкусов и возможностей участников семинара. Участники семинара делают доклады по разным статьям, от классики и до недавно опубликованных препринтов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. 1-2 курс бакалавриата

ПРОГРАММА.

- Геометрия схем и алгебраических многообразий.
- Геометрия Гиперкэлеровых многообразий
- Многообразия в характеристике p. Кристаллические когомологии, комплекс де Рама – Витта
- Геометрия расслоений на алгебраичсеких многообразиях.
- Исключительные наборы в производных категориях пучков на алгебраических многообразиях.

УЧЕБНИКИ.

- S. Gallot, D. Hulin, «Riemannian Geometry»
- Ж.-П. Серр, « Алгебры Ли и группы Ли.»
- Дж. Милнор, Дж. Сташеф., « Характеристические классы».
- А. С. Мищенко. «Векторные расслоения и их применения».
- J.-P. Demailly «Complex analytic and differential geometry».
- С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин. «Методы гомологической алгебры. Том 1. Введение в когомологии и производные категории.»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка зависит от активности участия студента в семинаре (для 10 баллов необходимо сделать доклад).

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: модули 1 – 3 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 9 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. В. Артамкин.

ОПИСАНИЕ. Алгебраическая геометрия изучает фигуры, локально устроенные как множество решений системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве, и служит мостом между точным, но скудным языком алгебраических формул и бесконечно богатым, но трудно выражаемым в словах миром геометрических образов. Поэтому алгебраическая геометрия занимает центральное место в самых разных областях математики и математической физики, являясь наиболее эффективным и красивым инструментом для установления нетривиальных связей между кажущимися далёкими друг от друга явлениями. Настоящий курс является геометрическим введением в предмет и знакомит слушателей с фундаментальными геометрическими фигурами и конструкциями, а также современной алгеброй, которая за ними стоит

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Обязательные курсы 1 года бакалавриата

ПРОГРАММА.

1. Проективные пространства и проективные квадрики. Пространства квадрик. Прямые, коники, PGL_2, кривые Веронезе, рациональные кривые. Плоские кубические кривые.
2. Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй.
3. Доза коммутативной алгебры: целые элементы в расширениях колец, строение конечно порождённых алгебр над полем, базисы трансцендентности, теоремы Гильберта о нулях и базисе идеала.
4. Словарик «Коммутативная алгебра – Аффинная алгебраическая геометрия». Спектры, гомоморфизмы поднятия, топология Зарисского, геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.
5. Алгебраические многообразия. Отделимость. Свойства проективных многообразий, собственность. Рациональные функции и рациональные морфизмы.
6. Размерность. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Вычисление размерностей проективных многообразий.
7. Векторные расслоения и пучки их сечений. Векторные расслоения на проективной прямой. Линейные системы, обратимые пучки и дивизоры, группа Пикара.
8. Если позволит время: (ко)касательные и (ко)нормальные пространства и конусы, гладкость, раздутие. Точная последовательность Эйлера на грассманиане.

УЧЕБНИКИ.

1. А. Л. Городенцев, Алгебра – 2. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
2. А. Л. Городенцев. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/giag_ru/giag.pdf.
3. А. Л. Городенцев. Algebraic Geometry. A Start Up Course, М., МЦНМО, 2006, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz
4. Дж. Харрис. Алгебраическая геометрия. Начальный курс, «МЦНМО».
5. И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка совпадает с накопленной, которая складывается из оценок за своевременные решения задач, выдаваемых к каждому семинару, и рассказы этих решений на семинаре. Для тех, у кого накопленная оценка получается ниже 6, оценка может быть выставлена по результатам дополнительной контрольной работы, оцениваемой по шкале от 0 до 7 баллов.

Геометрия и алгебра интегрируемых распределений
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

ОПИСАНИЕ. Дифференциальные уравнения — обыкновенные и в частных производных — возникают и применяются в самых разных областях математики и физики. Общая теория таких уравнений использует методы классического и функционального анализа, дифференциальной и алгебраической геометрии и топологии, теории групп и алгебр Ли, являя собой яркий пример эффективного взаимодействия взглядов, подходов и техник из самых разных разделов математики. Систематическое изучение симметрий дифференциального уравнения и связи его разрешимости «в квадратурах» с разрешимостью некоторой алгебры Ли было начато Софусом Ли. Его идеи были развиты Эли Картаном, описавшим симметрии уравнений и распределений в терминах векторных полей и дифференциальных форм. В рамках этого курса мы сначала напомним базовые сведения о многообразиях, векторных полях и дифференциальных формах, а затем с их помощью дадим современное изложение результатов Ли и Картана и докажем теоремы Ли – Бьянки об интегрируемости и суперпозиции. Всё это пригодится вам в дальнейшем при изучении дифференциальной и контактной геометрии, теории интегрируемых систем и уравнений в частных производных.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курсы дифференциальных уравнений (теорема существования и единственности) и анализа на многообразиях (знакомство с многообразиями, векторными полями, дифференциальными формами). Второе будет бегло напомнено.

ПРОГРАММА.

- Векторные поля и дифференциальные формы, элементы анализа.
- m-мерные распределения в $n + m$-мерных пространствах, различные описания.
- Интегрируемость, интегральные многобразия, теорема Фробениуса.
- Симметрии распределений и дифференциальных уравнений, алгебры Ли симметрий.
- Теорема Ли о суперпозиции.

УЧЕБНИКИ.

- A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov/ «Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations».
- М. М. Постников. «Лекции по геометрии. Семестр IV».
- А. Г. Хованский. «Топологическая теория Галуа».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Среднее из оценок за сдачу двух листков округлённое до ближайшего целого. Полуцелые округляются вверх.

Геометрия и группы

трудный межкампусный дистанционный семинар на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Алгебра и теория чисел».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: О. В. Шварцман.

ОПИСАНИЕ. Займёмся кристаллографическими группами в геометриях постоянной кривизны. В частности, познакомимся с техникой разбиений Делоне, областями Вороного, теоремами Бибербаха. Поговорим о связях кристаллографии и арифметики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Обязательные курсы анализа, алгебры и геометрии за первый семестр бакалавриата. Знакомство с базовыми понятиями топологии (топологическое пространство, фундаментальная группа, накрытие).

ПРОГРАММА.

- Некоторые задачи дискретной геометрии.
- Области Вороного на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского.
- Принцип пустого круга. Разбиения Делоне.
- Группы движений трех геометрий и их дискретные подгруппы.
- Кристаллографические группы на евклидовой плоскости и в евклидовом пространстве.
- Теоремы Бибербаха.
- Кристаллографические фуксовы и клейновы группы. Их арифметические конструкции.
- Геометрия областей Вороного и разбиений Дирихле, ассоциированных с фуксовыми группами.

УЧЕБНИКИ.

- ДЖ. Касселс, «Введение в геометрию чисел»
- В. П. Терстен, «Трехмерная геометрия и топология».
- С. Б. Каток, «Фуксовы группы».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Полусумма оценок за две контрольные в 3 и 4 модулях.

Геометрия и динамика
простой межкампусный семинар на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Вероятность и стохастическая динамика», «Комбинаторика и маломерная топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко.

ОПИСАНИЕ. Мы предполагаем рассказать слушателям о понятиях, методах и результатах из различных разделов геометрии, динамики и смежных областей. При этом нередко соображения из одной области будут использоваться в работе с объектами другой природы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Семинар рассчитан на студентов 1–2 курса бакалавриата: изложение опирается только на изученный к данному моменту материал обязательных предметов 1 курса.

ПРОГРАММА. НИС состоит из почти независимых блоков в 1–3 занятия. Вот некоторые из тем, запланированные на этот год.

- Символическое кодирование: связь отображения $x \mapsto 2x$ на единичном отрезке с подбрасыванием монетки; как построить обратимую непрерывную динамическую систему с похожим поведением?
- Энтропия динамической системы: как измерить «случайность» поведения системы?
- Геометрическая теория групп: сколько разных элементов можно получить перемножая n образующих группы и при чём тут случайные блуждания?
- Хаотическая динамика: что общего у кота Арнольда, отображения пекаря и бильярда Бунимовича?
- Цепные дроби: как динамика помогает теории чисел и при чём тут геодезические?
- Геометрия классических групп.
- Элементы алгебраической комбинаторики.
- Вероятностные задачи в геометрии и комбинаторике.

УЧЕБНИКИ.

- А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
- С. Табачников. Геометрия и биллиарды. Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», Ижевск, 2011.
- Э. Артин. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.
- У. Фултон. Таблицы Юнга. М.: МЦНМО, 2006.
- Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. Т. 2. М.: Мир, 2017.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Семестр разбивается на тематические блоки, каждый из которых оценивается отдельной оценкой O_k. Итоговая оценка равна $\min(10, \sum_k O_k)$ (максимальное значение суммы составляет примерно 12). Каждая из оценок O_k есть сумма оценки за проверочную работу в конце блока и за соответствующую часть экзамена (с ограничением на суммарное число набранных баллов). Задачи экзамена сдаются в письменном виде с последующим устным обсуждением. Также предусмотрено выставление оценки за доклад на семинаре.

Геометрия и топология особых точек комплексных гиперповерхностей
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. М. Гусейн – Заде.

ОПИСАНИЕ. Изучение критических точек функций и особых точек соответствующих гиперповерхностей играет важную роль в ряде разделов математики и математической физики. В рамках курса основное внимание будет уделяться геометрическим и топологическим объектам, связанным с критическими точками, их свойствам и связям с объектами из других разделов математики: анализа, алгебры, топологии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Помимо обязательных курсов первых двух лет бакалавриата (вещественный анализ многих переменных, линейная алгебра, начала ТФКП) потребуется знание основ теории гомологий и локально тривиальных расслоений.

ПРОГРАММА.

- Критические точки функций и начало их классификации.
- Слой Милнора и расслоение Милнора.
- Теорема Милнора о букете сфер, число Милнора.
- Версальная деформация критической точки и бифуркационные диаграммы.
- Форма пересечений на слое Милнора и оператор классической монодромии.
- Формула Пикара – Лефшеца и группа монодромии особенности.
- Форма пересечений для функций двух переменных.
- (при наличии времени) Обобщения на другие особенности, например, полных пересечений.

УЧЕБНИКИ.

- В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн – Заде, «Особенности дифференцируемых отображений», тома I и II.
- Дж. Милнор, «Особые точки комплексных гиперповерхностей».
- В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко, «Теория особенностей» (ВИНИТИ, Динамические системы VI).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Сумма баллов за решение задач в течение курса и баллов за экзамен (поровну).

Геометрия общей теории относительности
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. О. Медведев.

ОПИСАНИЕ. Многие задачи общей теории относительности по природе своей дифференциально-геометрические, т. е. относятся к римановой геометрии и теории уравнений с частными производными. Слушатели познакомятся с основными геометрическими объектами общей теории относительности и современными методами их изучения средствами геометрического анализа. Этот курс не является курсом по физике, и физической стороне дела будет уделено совсем немного времени. Основное внимание будет сосредоточено на геометрических задачах.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Дифференцируемые многообразия, формулы Грина и Стокса, векторные расслоения и связности в них, тензорные поля, пространство L^p.

ПРОГРАММА.

- Основные факты из римановой и псевдоримановой геометрии: кривизны римановых и псевдоримановых многообразий, минимальные подмногообразия, начала спектральной геометрии.
- Уравнение Эйнштейна: наиболее популярные решения уравнения Эйнштейна, подход Шоке – Брюа, множества начальных данных, теоремы единственности.
- Масса в общей теории относительности: АДМ-масса, квазилокальные массы, теорема о положительной массе, неравенство Пенроуза.
- Теорема Пенроуза о неполноте: черные дыры и ловушечные поверхности, минимальные поверхности как особый вид ловушечных поверхностей.

УЧЕБНИКИ.

- D. A. Lee. Geometric Relativity.
- B. O’Neill. Semi – Riemannian Geometry With Applications to Relativity.
- Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия: Методы и приложения.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка за курс вычисляется по формуле: 0,4К + 0,6Э, где К — оценка за промежуточную контрольную (максимум 10), Э — оценка за экзамен (максимум 10). Округление до ближайшего целого числа. Все контрольные мероприятия проводятся в формате «домашний экзамен».

Гиперболические группы по Громову
трудный межкампусный спецкурс на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Представления и инварианты».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Голота.

ОПИСАНИЕ. Исторически, изучение бесконечных групп было в значительной степени мотивировано геометрическими задачами. С другой стороны, геометрические методы широко применяются для изучения групп как таковых. Так, для группы с конечным набором образующих можно определить граф Кэли и метрику на нём, инвариантную относительно действия группы умножениями слева. В 1980-е годы М. Громов заложил основы теории «гиперболических» групп, то есть групп, графы Кэли которых являются пространствами «отрицательной кривизны» (в подходящем смысле). Класс гиперболических групп достаточно широк, например, гиперболическими являются решетки в группах Ли ранга 1, фундаментальные группы пространств отрицательной кривизны, свободные группы и многие другие группы. Для гиперболических групп оказалось возможным развить глубокую теорию, богатую содержательными результатами. Цель курса — дать введение в теорию гиперболических групп, а также изучить методы геометрической теории групп на большом числе содержательных примеров.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Для освоения курса достаточно владения материалом обязательных курсов алгебры и топологии первого года бакалавриата, а также готовности самостоятельно изучить некоторые примеры, относящиеся к более продвинутым курсам.

ПРОГРАММА.

- Метрическая геометрия: метрические пространства, изометрии, геодезические.
- Основы комбинаторной теории групп: образующие и соотношения, графы Кэли, действия групп на графах.
- CAT-неравенства, CAT(0)-пространства, теорема Картана – Адамара;
- Эквивалентные определения гиперболических групп, примеры;
- Основные свойства гиперболических групп;
- Квазиизометрии метрических пространств и квазигеодезические;
- Граница гиперболического пространства, действие изометрий на границе;
- *Более общие действия на гиперболических пространствах: относительная гиперболичность, гиперболически вложенные подгруппы.

УЧЕБНИКИ.

- М. Громов, «Гиперболические группы», Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002.
- П. де ля Арп, Э. Гис, «Гиперболические группы по Михаилу Громову», Москва, Мир, 1992.
- C. Drutu, M. Kapovich, «Geometric group theory».
- M. Bridson, A. Haefliger, «Metric spaces of non-positive curvature», Springer, 1999.
- F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin, «Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces», Memoirs of the AMS, 2017.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка складывается из оценок за листки с задачами и за домашний экзамен.

Гладкие структуры на многообразиях
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Тихомиров.

ОПИСАНИЕ. Гладкая топология 4-мерных многообразий уникальна в том смысле, что в ней наблюдаются феномены, не имеющие аналогов как в меньших, так и больших размерностях. Например, на многих топологических 4-мерных многообразиях имеется бесконечное, а на $\mathbb{R}^4$ даже несчетное множество различных гладких структур. Этот феномен был обнаружен в 80-х — 90-х годах XX в. в работах С. Дональдсона, К. Таубса и ряда других геометров в результате применения к 4-мерной топологии новых методов современной дифференциальной геометрии, лежащих на стыке глобального анализа и калибровочной теории и связанных с функционалом Янга – Миллса. Решения уравнений Янга – Миллса — так называемые инстантоны — приводят к новым типам инвариантов гладких структур 4-мерных многообразий. Цель настоящего курса — дать введение в инстантоны и показать, как они работают в гладкой 4-мерной топологии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Предполагается знание курсов «Линейная алгебра и геометрия», «Введение в алгебраическую топологию» и «Анализ на многообразиях». От двух последних требуется владение такими понятиями, как топологические и гладкие многообразия, группы гомологий, касательное расслоение, дифференциальные формы и их интегралы по многообразиям.

ПРОГРАММА.

- Гладкие структуры на топологических многообразиях.
- Главные и векторные расслоения. Связности.
- Кривизна и характеристические классы.
- Пространство связностей.
- Уравнения Янга – Миллса и пространство модулей.
- Компактность пространства модулей.
- Знакоопределенные формы пересечения.
- Полиномиальные инварианты Дональдсона.
- Теорема о связной сумме.
- Соответствие Кобаяши – Хитчина.
- Гладкие структуры на комплексных алгебраических поверхностях.

УЧЕБНИКИ.

- Д. Фрид, К. Уленбек, «Инстантоны и четырехмерные многообразия». Москва, Мир, 1988.
- A. Scorpan, «The wild world of 4-manifolds». American Mathematical Society, Providence, 2005.
- 2. C. H. Taubes, «Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature». Oxford Univ. Press, 2011.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка вычисляется по формуле $\mathbf{3H + 2E + 0{,}5F}$, где **H** и **E** суть доля решенных домашних задач и доля решенных задач промежуточного письменного домашнего экзамена, вычисленные по формуле [число всех (включая необязательные) решенных задач] ⁄ [число заданных обязательных задач], а **F** — оценка по 10-бальной шкале на итоговом устном экзамене.

Голоморфная динамика
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Комбинаторика и маломерная топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Тиморин.

ОПИСАНИЕ. Самые простые с точки зрения алгебры формулы (такие, как $f(z) = z^2 + c$) могут порождать исключительно тонкие самоподобные структуры, если соответствующие отображения рассматривать как динамические системы. Теория динамических систем изучает поведение *орбит* отображения f, то есть последовательностей вида z, $f(z)$, $f(f(z))$, ... Типичные вопросы: Как ведет себя конкретная орбита (сходится ли она к периодическому циклу или демонстрирует хаотическое поведение)? Как поведение орбиты зависит от начальной точки z? Как оно меняется при изменении самого отображения f? Бурное развитие голоморфной динамики, начавшееся в 1980-е годы, стало возможно в том числе благодаря появлению компьютерной графики. Неожиданные картинки мотивировали новые результаты, которые потом удалось строго доказать. Мы разберем некоторые фундаментальные результаты и простейшие примеры из области комплексных динамических систем, следуя в основном учебнику Дж. Милнора.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Необходимо владение комплексным анализом в объеме обязательного курса 2го года обучения, а также общей топологией (в объеме обязательного курса «Введение в дискретную математику и топологию») и теорией гомотопий (в объеме курса «Введение в алгебраическую топологию», обязательного для ОП Математика).

ПРОГРАММА.

- Рациональная динамика на сфере Римана: набор примеров с картинками.
- Римановы поверхности и униформизация (обзор основных понятий и результатов).
- Множества Фату и Жюлиа, их простейшие свойства.
- Локальная динамика вблизи неподвижных точек, линеаризация.
- Гиперболичность в голоморфной динамике.
- Полиномиальная динамика: внешние лучи, роль локальной связности.

УЧЕБНИКИ.

- Дж. Милнор, «Голоморфная динамика». — Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
- Х. О. Пайтген, П. Х. Рихтер, «Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем». — Мир, 1993.
- W. Thurston, «On the geometry and dynamics of iterated rational maps». In: D. Schleicher (ed), *Complex dynamics: families and friends*. A K Peters, 2009.
- L. Carleson, T. Gamelin, Complex dynamics. — Springer, 1996.
- A. Beardon, «Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems». — Springer, 2000.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 50% текущие тесты и домашние задания, 50% индивидуальный итоговый проект (домашний экзамен).

Группа Кремоны и её подгруппы
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебраическая геометрия», «Алгебра и теория чисел».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Голота.

ОПИСАНИЕ. Группа Кремоны (над полем k) — это группа бирациональных автоморфизмов проективной плоскости над полем k, или, равносильно, группа k-автоморфизмов поля рациональных функций $k(x, y)$. Это один из наиболее классических объектов изучения в алгебраической геометрии, начиная с 19 века. В то же время, группа Кремоны интересна и с точки зрения абстрактной теории групп: так, вопрос о её простоте (существовании нетривиальных нормальных подгрупп) оставался открытым более ста лет. Уже в XXI веке взаимопроникновение методов алгебраической геометрии (программа минимальных моделей) и геометрической теории групп (действия на гиперболических пространствах) позволило доказать многие важные результаты о группе Кремоны и её подгруппах. Курс будет посвящен изложению этих результатов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Для понимания курса нужно владение основами алгебраической геометрии (алгебраические многообразия, рациональные отображения, дивизоры, линейные системы). Также полезно (хотя и не обязательно) знакомство с курсом «Гиперболические группы по Громову» 1 семестра.

ПРОГРАММА.

- Бирациональная геометрия поверхностей: рациональные отображения, линейные системы, факторизация.
- Примеры бирациональных автоморфизмов: инволюции, автоморфизмы рациональных поверхностей.
- Теория пересечений, действие группы Кремоны на гиперболическом пространстве.
- Эллиптические, параболические и локсодромические элементы в группе Кремоны.
- Теорема Нётера – Кастельнуово, программа Саркисова.
- Топологии и структуры на группе Кремоны.
- Конечные и алгебраические подгруппы в группе Кремоны.
- Построение нормальных подгрупп в группе Кремоны.

УЧЕБНИКИ.

- J. Deserti, «The Cremona group and its subgroups», https://arxiv.org/abs/1902.03262
- S. Lamy, «The Cremona group», https://www.math.univ-toulouse.fr/~slamy/blog/cremona.html

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка за курс складывается из оценок за листки с задачами и домашний экзамен.

Группа кос, квантовые группы и приложения
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Представления и инварианты», «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.

ОПИСАНИЕ. В этом курсе мы обсудим несколько тем из теории групп кос и теории квантовых групп, в которых возникает и применяется R-матрица — один из наиболее популярных объектов современной математической физики. R-матрица в узком понимании этого термина — это решение (кубического матричного) уравнения Янга–Бакстера, известного также как соотношение кос. Сферы применения R-матриц очень разнообразны — от теории квантовых групп и инвариантов узлов до исследований точно решаемых моделей квантовой механики, стохастических процессов и статистической физики.

Сперва мы познакомим слушателей с алгебраическими структурами, порождающими R-матрицы — группой кос и алгебрами Гекке, подробно обсудим теорию представлений алгебр Гекке в подходе Вершика–Окунькова. Затем рассмотрим R-матричные представления группы кос, разовьем R-матричную технику и применим ее к построению инвариантов зацеплений.

Возникновение и применение R-матриц в теории квазитреугольных алгебр Хопфа (квантовых групп) обсудим во второй части курса. Мы применим R-матрицы из первой части в построении двух семейств квантовых матричных алгебр. Первое семейство — это квантованные алгебры полиномиальных функций на линейных матричных группах Ли $GL(n)$. Второе семейство — квантованные алгебры (левоинвариантных) дифференциальных операторов на тех же группах Ли. Оба семейства алгебр находят применение в описании некоммутативной геометрии квантовых групп, а также в построении интегрируемых моделей современной математической физики. Мы обсудим структурную теорию этих алгебр: докажем аналоги теоремы Гамильтона–Кэли для «квантовых» матриц, а также приведём описание центра и максимальных коммутативных подалгебр. Если будет время, мы также обсудим следующие сюжеты:

- построение конечномерных разложимых представлений семейства квантованных алгебр дифференциальных операторов;
- применение алгебр Гекке и R-матриц в построении и изучении моделей квантовых спиновых цепочек Гейзенберга.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Для понимания курса требуется знание оснований алгебры, теории групп и теории представлений в рамках программы первых 2-х курсов матфака. Все необходимые сведения по теории групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли, а также алгебр Хопфа будут напоминаться в процессе занятий. Курс рассчитан на студентов 3-4 курса и магистрантов, но подойдет и сильным второкурсникам.

ПРОГРАММА.

- Группа кос B_n, ее геометрическое и алгебраическое представления. Конечномерная фактор-алгебра $\mathbb{C}[B_n]$ — алгебра Гекке, классификация ее неприводимых представлений в духе Вершика–Окунькова.
- R-матричные представления группы кос, R-след, а также их приложение к построению инвариантов зацеплений. Инварианты Джонса и HOMFLY-PT.
- Коммутативная алгебра с пуассоновой структурой и ее квантование. Квантование алгебр функций на линейных группах Ли — RTT-алгебры. Приложение этих алгебр в построении трансфер-матриц и изучении интегралов движения квантовых спиновых цепочек Гейзенберга.

- Квантование алгебры функций на двойственном пространстве к алгебре Ли $gl(n)$ — универсальная обертывающая алгебра $U(gl(n))$. Квадратичная скобка Пуассона на алгебре функций на $gl(n)^*$ и ее квантование — алгебра уравнения отражений.
- Квантовые матричные алгебры. Квантовая версия теоремы Гамильтона – Кэли. Построение коммутативных подалгебр (подалгебр Бете). Конечномерные разложимые представления алгебр уравнения отражений.

УЧЕБНИКИ.

- Joan S. Birman, Tara E. Brendle, «Braids: A Survey» arXiv:math/0409205 (2005); published in the Handbook of Knot Theory, edited by W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier Science, 2005.
- Кассель К., Тураев В. Г., «Группы кос», издательство МЦНМО, 2014.
- А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, «Новый подход к теории представлений симметрических групп. II», Записки научных семинаров ПОМИ, 2004, т. 307, стр. 57–98;
- O. Ogievetsky, P. Pyatov, «Lecture on Hecke algebras». Preprint CPT-2000/P.40762.
- Кассель К., «Квантовые группы», Фазис, 1999.
- A. Klimyk, K. Schmuedgen, «Quantum groups and their representations», Springer, 1997.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. По каждой теме курса будет выдаваться листок с задачами. Задания листков оцениваются по 10-балльной шкале. Для получения оценки 10 достаточно решить примерно 80% задач листка. Накопленная оценка $O_{\text{накоп}}$ — среднее арифметическое оценок за все листки. Если $O_{\text{накоп}} \geq 7$, итоговая оценка $O_{\text{итог}}$ получается округлением $O_{\text{накоп}}$ до целого по обычному правилу. В случае, если $O_{\text{накоп}} < 7$, студент должен сдать экзамен, при этом итоговая оценка определяется по формуле $O_{\text{итог}} = 0.5(O_{\text{накоп}} + O_{\text{экз}})$.

Группы и алгебры Ли
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Представления и инварианты».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. И. Ильин.

ОПИСАНИЕ. Группы и алгебры Ли и их представления являются важнейшим инструментом в таких,казалось бы далеких друг от друга областях математики как алгебраическая топология, алгебраиче-ская и дифференциальная геометрия, динамические системы и математическая физика. Данный курсявляется базовым курсом теории групп и алгебр Ли. Основные результаты курса:

- Теоремы о соответствии между группами и алгебрами Ли (три теоремы Ли). Эквивалетность категорий связных односвязных групп Ли и алгебр Ли. Эквивалентность категорий представлений связной односвязной группы Ли и соответствующей алгебры Ли.
- Классификация представлений алгебр Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})/\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
- Описание центра универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$. Теорема Хариш – Чандры.
- Формула Вейля для характеров представлений $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Линейная алгебра, многомерный анализ, дифференциальная геометрия (многообразия, подмногообразия, касательные простарнства, векторные поля, дифференциальные формы), топология (общая топология, фунадаментальная группа, накрытия, локально-тривальные расслоения), теоремы существования и единственности для ОДУ. При этом необходимые определения и теоремы будут формулироваться.

ПРОГРАММА.

1. Определение вещественных и комплексных групп Ли. Примеры матричных групп. Подгруппы Ли, гомоморфизмы. Действия групп Ли на многообразиях.
2. Фактор-группы, однородные пространства, ядра и образы гомоморфизмов, орбиты и стабилизаторы. Виртуальные подгруппы Ли.
3. Алгебры Ли: определение, гомоморфизмы. Касательное пространство в единице к группе Ли является алгеброй Ли. Присоединённые представления Ad и ad. Примеры алгебр Ли, алгебры Ли векторных полей.
4. Экспоненциальное отображение, функториальность. Классификация одномерных и абелевых групп Ли.
5. Универсальное накрытие группы Ли, фундаментальныя группа, примеры накрытий.
6. Три теоремы Ли, эквивалентосноть категорий связных односвязных групп Ли и алгебр Ли.
7. Представления групп и алгебр Ли, эквивалетность категорий конечномерных представлений связной односвязной группы Ли и соответствующей алгебры Ли.
8. Универсальная обёртывающая алгебра, теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта.
9. Конечномерные представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Теорема Жордана – Гёльдера, вполне приводимость, классификация. Характеры.

10. Представления $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: вполне приводимость и классификация. Модули Верма.
11. Центр универсальной обёртывающей $U(\mathfrak{gl}_n)$, гомоморфизм Хариш – Чандры.
12. Характеры представлений $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, формула Вейля для характера.
13. Представления компактных групп Ли, теорема Петера – Вейля.

УЧЕБНИКИ.

1. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. *Основы теории групп Ли. Группы и алгебры Ли - 1.*
2. A. Kirillov, Jr. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.*
3. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.*
4. В. Фултон, Д. Харрис. *Теория представлений. Начальный курс.*

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка вычисляется по формуле 0.4*Э + 0.2*К + 0.2*Л + 0.2*Д, где К — контрольная в середние семестра, Э — письменный экзамен, Д — домашние работы, Л — оценка за листки.

Динамика автоморфизмов алгебраических многообразий
трудный межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Кузнецова.

ОПИСАНИЕ. Группа автоморфизмов алгебраического многообразия это важнейший инвариант, который много говорит о геометрии многообразия. В ходе курса мы будем обсуждать автоморфизмы с положительной энтропии — с помощью теоремы Громова и Иомдина это понятие можно интерпретировать в терминах алгебраической геометрии. Мы изучим связь динамики и геометрии регулярных и бирациональных автоморфизмов многообразий, опишем свойства очень общего элемента группы Кремоны и обсудим поведение семейств бирациональных автоморфизмов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартный курс алгебраической геометрии, например, https://www.hse.ru/edu/courses/845663040

ПРОГРАММА.

- Действие автоморфизма алгебраического многообразия на когомологиях и группе Нерона – Севери обратным образом. Определение роста автоморфизма и динамической степени. Теорема Громова – Иомдина и идеи доказательства.
- Доказательство отсутствия автоморфизмов с нетривиальным ростом на кривых, многообразиях общего типа, многообразиях Фано. Примеры автоморфизмов с ростом на абелевых многообразиях, на K3 поверхностях, на некоторых раздутиях проективной плоскости (пример Бланка). Классификация поверхностей с автоморфизмом с положительной энтропией.
- Свойства автоморфизмов поверхностей с нетривиальным ростом: доказательство того, что динамическая степень это число Салема, и теорема Гизатуллина об автоморфизмах поверхностей с полиномиальным ростом.
- Рост бирациональных автоморфизмов, теорема Дина – Сибони о связи с энтропией, доказательство лог-выпуклости динамических степеней, теорема Дина – Нгуена о поведении динамических степеней автоморфизма, сохраняющего структуру расслоения.
- Теоремы Диллера – Фавра и Бланка – Канты о бирациональных автоморфизмах поверхностей.
- Результаты о бирациональных автоморфизмах многомерных многообразий, теорема Ло Бьанко о свойствах динамических степеней автоморфизмов трифолдов, теорема Труонга о собственном классе псевдоавтоморфизма, пример Огизо – Труонга.
- Теорема Кси о полунепрерывности динамических степеней в семействах.
- Теорема Канты – Кси – Дезерти об очень общем элементе группы Кремоны.
- Подгруппы группы бирациональных автоморфимов с неограниченным ростом, теорема Дина – Сибони о вложениях $\mathbb{Z}^n$.
- Если позволит время: категорная энтропия, примеры, теорема Оучи об автоморфизмах гиперкэлеровых многообразий, индуцированных автоэквивалентностями на K3 поверхностях.

УЧЕБНИКИ.

- J. Blanc «On the inertia group of elliptic curves in the Cremona group of the plane»
- J. Blanc, S. Cantat «Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces»
- S. Cantat «Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces»
- S. Cantat, J. Déserti, J. Xie «Three chapters on Cremona groups»
- J. Diller, C. Favre «Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces»
- G. Dimitrov, F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich «Dynamical systems and categories»
- T.-C. Dinh, N. Sibony «Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle»
- T.-C. Dinh, N. Sibony «Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variete Kahlerienne compacte»
- T.-C. Dinh, V.-A. Nguyen «Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps»
- M. Gromov «On the entropy of holomorphic maps»
- F. Lo Bianco «On the cohomological action of automorphisms of compact Kähler threefolds»
- K. Oguiso, T. T. Truong «Explicit examples of rational and Calabi – Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy»
- G. Ouchi «Automorphisms of positive entropy on some hyperKahler manifolds via derived automorphisms of K3 surfaces»
- T. T. Truong «The simplicity of the first spectral radius of a meromorphic map»
- J. Xie «Periodic points of birational transformations of projective surfaces»
- J. Xie «Algebraic dynamics and recursive inequalities»
- М. Гизатуллин «Рациональные G-поверхности»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка с весом 0,3 за работу на лекциях и 0,7 за финальный экзамен

Динамические системы
трудный межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

ОПИСАНИЕ. Семинар посвящён теории динамических систем в ее разных аспектах: многомерные динамические системы и хаос, теория аттракторов, дифференциальные уравнения на плоскости, комплексные дифференциальные уравнения, теория бифуркаций. Семинар преследует две цели: научить младших участников азам перечисленных теорий; вовлечь всех участников в современные исследования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория функций комплексного переменного в объёме обязательных курсов бакалавриата.

ПРОГРАММА. Мозаика из перечисленных выше теорий.

УЧЕБНИКИ.

- Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.
- Арнольд В. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений.
- Ильяшенко Ю., Ли Вейгу. Нелокальные бифуркации.
- Ильяшенко Ю., Яковенко С. Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка выставляется по формуле $\min(10, 0.6T + 6W + 0.4E)$, где T — оценка за доклад, если студент делает доклад на семинаре, W — минимум из 1 и суммы доли посещенных семинаров и доли решенных домашних задач, E — оценка за более сложные дополнительные задачи.

Дискретная оптимизация и целочисленное линейное программирование
простой межкампусный спецкурс на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Прикладная математика», «Комбинаторика и маломерная топология», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Д. И. Архипов, А. Н. Лавров.

ОПИСАНИЕ. Каждый из нас постоянно составляет расписания. Мы оптимизируем своё время: составляем планы на выходные, выбираем оптимальный маршрут чтобы добраться от одной станции метро до другой. Сложно ли составить расписание для факультета или спортивной лиги, учитывая множество требований и пожеланий? А если речь идёт об оптимизации работы дата-центра с тысячами серверов, морского порта или железнодорожной сети крупной страны? В рамках курса мы сформулируем, какие вызовы стоят перед математиками в условиях современного мира, когда размер данных, влияющих на принятие решений растёт быстрее вычислительных возможностей. После прохождения курса вы научитесь строить математические модели оптимизационных задач разной сложности и решать их с помощью солверов, основанных на методах целочисленного и линейного программирования. Курс не ограничивается практикой решения задач, вас ждёт знакомство с базовыми понятиями и классическими алгоритмами методов оптимизации, а также основные аспекты теории, лежащей в основах программного обеспечения, помогающего принимать решения в современном мире.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Строгие ограничения на пройденные ранее курсы отсутствуют.

Желательно прохождение курса "Линейное программирование (А. В. Колесников) 2021-22" (https://math.hse.ru/lin_progr_kolesn2122)

ПРОГРАММА.

- Задачи безусловной и условной оптимизации. Метод множителей Лагранжа.
- Численные методы оптимизации. Градиентный спуск. Метод Ньютона.
- Элементы теории сложности. Отношение классов P и NP.
- Линейное программирование. Симплекс-метод.
- Теория двойственности. Условия оптимальности и двойственность в задачах линейного программирования.
- Целые точки многогранников. Целочисленное линейное программирование. Унимодулярные матрицы. Метод ветвей и границ. Метод секущих плоскостей.
- Постановка и решение задач с использованием MILP-солверов.
- Эффективность MILP-солверов на примере графовых задач. Поиск кратчайшего пути, нахождение минимального остовного дерева в графе.
- Программирование в ограничениях.

УЧЕБНИКИ.

- **[STF]** А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров «Курс методов оптимизации».
- bfseries[S]А. Схрейвер «Теория линейного и целочисленного программирования».
- **[KV]** Б. Корте, Й. Фиген «Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы».
- **[SI]** И. Сигал, А. Иванова «Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. $0.5H + 0.5E$, где H и E – оценки по 10-бальной шкале за домашние задания и экзамен соответственно.

Дифференциальная геометрия и однородные пространства. Применения к информационной геометрии
простой межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Д. В. Алексеевский.

ОПИСАНИЕ. Курс посвящён изложению основных понятий и результатов римановой геометрии однородных пространств и её обобщений. Долгое время эта теория применялась в основном в естественных науках — физике и механике. В последние десятилетия она стала широко применяться в новой прикладной математической дисциплине, которая называется «Информационной геометрией» (в широком смысле) или, по предложению Ю. И. Манина, «Геометрией Информации». На последней традиционной конференции «Geometric Science of Information» (GSI-23) в Сант Мало работало 25 секций, посвящённых геометрии и машинному обучению, топологии и пространствам шейпов, динамике обучения, квантовой информационной геометрии, геометрии биологических структур и т. п. Применения информационной геометрии и литература обсуждаются на https://en.wikipedia.org/wiki/Information_geometry и https://habr.com/ru/companies/skillfactory/articles/708796/. Цель курса состоит в изложении базисных понятий и результатов дифференциальной геометрии, теории групп Ли и геометрии однородных пространств, освоение которых позволит студентам в дальнейшем работать в различных областях информационной геометрии. В конце курса мы кратко рассмотрим основные понятия информационной геометрии Ченцова – Амари и применение теории Винберга однородных выпуклых конусов к информационной геометрии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Предполагается только знание стандартных курсов линейной алгебры, математического анализа и элементарной топологии (включая теорию накрытий) в объёме первых двух лет бакалавриата.

ПРОГРАММА.

- Тензорная алгебра. Сопряженное пространство. Алгебра ковариантных и контравариантных тензоров. Симметрическая и внешняя алгебра. Алгебра Клиффорда, классификация клиффордовых алгебр и клиффордовых модулей.

- Многообразия, гладкие функции и гладкие кривые, гладкие отображения. Диффеоморфизмы. Джеты, касательные и кокасательные векторы, Касательное и кокасательное расслоения, их сечения, Алгебра Ли векторных полей, Поток векторного поля и его действия на функции, векторные поля и 1-формы. Производная Ли.

- Тензорные поля и тензорные расслоения. Алгебра дифференциальных форм, внешний дифференциал, когомологии. Действие производной Ли на тензорные поля.

- Римановы многообразия. Пример: Гиперповерхности евклидова пространства и связность Леви – Чивита. Линейные связности, и параллельный перенос, геодезические. Кривизна и кручение связности. Группа голономии. Разложение де Рама риманова пространства, классификация неприводимых групп голономии. Псевдоримановы многообразия. Пространства постоянной кривизны и их геодезические. Геометрия Лобачевского.

- Вещественные и комплексные группы Ли. Примеры групп Ли. Действие группы Ли на многообразии, стационарные подгруппы и орбиты. Три действия группы на себе и три канонических связности. Алгебра Ли группы Ли, однопараметрические подгруппы и экспоненциальное отображение. Восстановление связной линейной группы Ли по алгебре Ли. Теорема Адо. Связь между группами Ли и алгебрами Ли.

- Подход Ф. Клейна к геометрии. Однородное пространство как фактор-пространство. Алгебра кватернионов. 3-сфера как группа единичных кватернионов. Расслоение Хопфа и его применение к описанию конфигурационного пространства глаза, законы Дондерса и Листинга.
- Инфинитезимальное описание однородного пространства и инвариантных тензорных полей. Инвариантные римановы метрики в однородном пространстве G/H, формулы для тензора кривизны, тензора Риччи и связности Леви-Чивита. Уравнение Эйнштейна. Примеры однородных метрик Эйнштейна. Риманова геометрия компактной группы Ли. Геометрия симметрических римановых пространств. Двойственность.
- Риманова геометрия однородных выпуклых конусов и её статистическая интерпретация как многообразия вероятностных мер. Случай симметрических конусов и конусов Винберга, ассоциированных с клиффордовым модулем.

УЧЕБНИКИ.

- М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия; Семестр IV. Дифференциальная геометрия; Семестр V. Группы и алгебры Ли. М.: Наука. 1982.
- С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии.
- С. Натанзон, Гладкие многобразия.
- Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, «Основы теории групп Ли», Группы Ли и алгебры Ли – 1, 1988.
- С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия, Группы Ли и симметрические пространства, 2005.
- D. Wagenaar, Information geometry for neural networks, 1998.
- F Nielsen , An elementary introduction to information geometry, arXiv, 2018.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка равна $0.7H + 0.3E$, где H — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

Знакомство с математической физикой
простой межкампусный семинар на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Ф. В. Уваров.

ОПИСАНИЕ. На протяжении столетий взаимодействие физики и математики приводит к появлению новых математических объектов с удивительно богатой структурой, и матфизика занимается исследованием таких объектов. Цель этого семинара — познакомить его участников с избранными сюжетами математической физики и мотивировать дальнейшее изучение этой красивой науки. Семинар будет состоять из выступлений приглашённых докладчиков — специалистов по матфизике, в ходе которых участникам будут представлены темы для самостоятельных исследований и потенциальные научные руководители-матфизики. Семинар рассчитан на студентов самых младших младших курсов, начиная с первого, и не требует предварительной подготовки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Нет.

ПРОГРАММА. Точные темы будут определяться докладчиками.

УЧЕБНИКИ. Мы будем просить каждого докладчика рекомендовать книги и статьи для тех, кого заинтересовала тема доклада.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Для получения положительной оценки студент обращается (как минимум) к одному из докладчиков, и выполняет данное им задание (например, решение задач по теме доклада, либо подготовка небольшого реферата). Руководитель семинара выставляет студентам оценки, проконсультировавшись с докладчиками.

Избранные главы дискретной математики
простой межкампусный семинар на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Прикладная математика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. В. Артамкин.

ОПИСАНИЕ. Под дискретной математикой в нашей стране обычно понимают собрание разрозненных математических сюжетов, оказавшихся полезными в информатике или смежных прикладных областях. Некоторые из этих сюжетов входят в обязательные курсы математической логики и дискретной математики, читаемые в бакалавриате. На нашем семинаре обсуждаются не вошедшие в эти курсы конструкции, имеющие, тем не менее, заметное значение как в математике, так и в приложениях

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. программа 1 семестра 1 курса

ПРОГРАММА. □ Булевы функции и теорема Поста о функциональной полноте. Эта теорема даёт эффективный от- вет на следующий вопрос: можно ли любую булеву функцию (от любого числа переменных) выра- зить с помощью операции композиции через заданный набор функций. Удивительно, что на такой вопрос имеется простой и содержательный ответ, позволяющий, например, придумать функцию от двух переменных, через которую можно выразить любую функцию. □ Конечные поля. Теорема о том, что мультипликативная группа конечного поля является цикличе- ской, позволяет строить длинные периодические последовательности, повсеместно используемые в радиолокации, системах опознавания «свой-чужой» и т.д. □ Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке в транспортной сети. Речь идет о такой задаче: имеется некоторая сеть дорог (трубопроводов), соединяющих пункты А и Б. У каждой до- роги (трубы) есть своя максимальная пропускная способность — наибольшее число автомобилей (баррелей нефти) которые могут пройти по этой дороге (трубе) за час. Требуется организовать движение (перекачку нефти) таким образом, чтобы общее число автомобилей (баррелей нефти), попадающее за час из А в Б, было максимально возможным. Оказывается, многие важные резуль- таты и алгоритмы теории графов, как прикладные, так и чисто математические, связаны с этим кругом идей

УЧЕБНИКИ. 1. Ф. Харири. Теория графов. М.: УРСС, 2003. 2. В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. Теория графов. М.: Высш. школа, 1976. 3. М. Свами, К. Тхулалираман. Графы, сети и алгоритмы. М: Мир, 1984. 4. А. И. Кострикин. Основы алгебры. 5. Барти, Биркгоф. Современная прикладная алгебра. М. 1976. 6. А. И. Сирота, Ю. И. Худак. Основы дискретной математики. Ч. 1. М. 2010

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка совпадает с накопленной. Основу накопленной оценки составляет индивидуальное письменное домашнее задание, оцениваемое от 0 до 7; оценка 6 или 7 за вовремя сданное задание может быть повышена за счет дополнительных баллов, начисляемых за рассказ решений задач на семинаре (от 0,5 до 1 балла за задачу в зависимости от ее сложности).

Избранные главы математической экономики
простой межкампусный дистанционный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Прикладная математика», «Нематематический курс».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. И. Левин.

ОПИСАНИЕ. Семинар ориентирован на студентов 3–4 курса бакалавриата, студентов магистратуры и аспирантов, а также всех интересующихся современными проблемами экономической теории и применением математических моделей для исследования социально- экономических систем. Предполагается ознакомить студентов с основными концепциями современной экономической теории и обсудить актуальные вопросы конструирования и использования математических моделей для принятия экономических и политических, индивидуальных и коллективных решений в условиях ограниченной рациональности, асимметрии информации и рентоориентированного поведения. Наряду с теоретическими моделями будут рассмотрены прикладные модели экономических систем и элементы поведенческой и цифровой экономик. Одна из задач семинара научить пользоваться математическим инструментарием для разработки и исследования социально-экономических и политэкономических явлений. Курс основывается на современных исследованиях, в том числе, на работах лектора.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартные курсы математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей.

ПРОГРАММА.

- Введение в науку экономику. «Экономика — это интересно!». Примеры экономических «парадоксов», иллюзий и ошибочных решений.
- Модели экономического равновесия и неравновесия. Экономика дефицита, очередей и привилегий.
- Элементы теории игр. Ассимметричная и неполная информация.
- Неопределенность и риск. Равновесие на финансовых рынках.
- Экономика общественного сектора, семьи и «сект».
- Теневые рынки, «экономика джунглей», модели аддиктивного поведения.
- Математические модели экономики коррупции и борьбы за ренту.
- Экономика институтов. Нормы, традиции и мораль.
- Модели международной торговли и международной политики.
- Эволюционная экономика. Диффузия инноваций и «созидательное разрушение».
- Модели экономического роста и развития.
- Экономика знаний и интернет-экономика.

УЧЕБНИКИ.

1. А. Мас–Коллелл, М. Уинстон, Дж. Грин. Микроэкономическая теория. М.: Дело, 2016.
2. А. Хилман. Государство и экономическая политика. Возможности и ограничения управления. М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2009.
3. М. И. Левин, В. Л. Макаров, А. М. Рубинов. Математические модели экономического взаимодействия. М.: Физматлит, 1993.

А также статьи, актуальные на момент чтения спецкурса.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. форма контроля — реферат, оценивающийся по 10-бальной шкале и по шкале «плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично».

Интегрируемость в квантовой теории поля
трудный межкампусный семинар на английском для 4-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 12 кредитов (по 6 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Н. Алфимов.

ОПИСАНИЕ. Данный курс организован в форме еженедельных семинаров, где мы собираемся обсуждать интегрируемые структуры, возникающие в квантовой теории поля. Эти структуры сейчас встречаются во многих примерах, таких как сигма-модели, суперсимметричных калибровочных теориях, теориях струн, калибровочно/струнных дуальностях, амплитудах рассеяния и корреляционных функциях и так далее. В качестве педагогических примеров, решаемых методом анзатца Бете, будут рассмотрены модель Бозе газа и модель главного кирального поля в первой части курса вместе с основами AdS/CFT соответствия для случая четырёхмерной суперконформной калибровочной теории. Во второй части курса будет дано введение в приложения теории интегрируемых систем к изучению спектра $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга – Миллса и дуальной ей теории суперструн на $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ бэкграунде, а также изучены интегрируемые деформации сигма-моделей. Курс предназначен для аспирантов и магистрантов. Постдоки и студенты бакалавриата тоже могут посещать данный курс.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовые знания квантовой теории поля. Некоторое знакомство с конформной теорией поля и теорией струн желательно, но не необходимо.Базовые знания квантовой теории поля. Некоторое знакомство с конформной теорией поля и теорией струн желательно, но не необходимо.

ПРОГРАММА.

- Уравнения Бете для спектра модели Бозе газа и их термодинамический предел. Уравнения термодинамического анзатца Бете (TBA) для модели Бозе газа.
- Асимптотический анзатц Бете для спектра модели главного кирального поля и их термодинамический предел. Уравнения термодинамического анзатца Бете для модели главного кирального поля.
- Струнный бэкграунд $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ как решение уравнений супергравитации.
- Классическая интегрируемость модели главного кирального поля и $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ суперструнной сигма-модели.
- Вывод S-матрицы суперструнной сигма-модели на $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ из алгебры Замолодчикова – Фаддеева.
- Уравнения Бете для XXX спиновой цепочки Гейзенберга (однопетлевой спектр аномальных размерностей локальных операторов в $SU(2)$ секторе $\mathcal{N} = 4$ SYM). Асимптотические уравнения Бете для спектра $\mathcal{N} = 4$ SYM. Уравнения термодинамического анзатца Бете (TBA) для спектра $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- Соответствующие уравнения Хироты и вронскианное решение этих уравнений.
- Вывод AdS/CFT Квантовой Спектральной Кривой для $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ теории суперструн и $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- Непертурбативные характеристики траекторий операторов в $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- Интегрируемые деформации O(N) сигма-моделей. q-деформированная S-матрица. Eta-деформированная $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ теория суперструн и её S-матрица.

УЧЕБНИКИ.

- Ahn, C., Nepomechie, R. I. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.2: Exact world-sheet S-matrix. https://doi.org/10.1007/s11005-011-0478-
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2011). Solving the AdS/CFT Y-system. https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)02
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2013). Quantum spectral curve for AdS_5/CFT_4. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.01160
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2014). Quantum spectral curve for arbitrary state/operator in AdS_5/CFT_4. https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)18
- Minahan, J. A., Zarembo, K. (2002). The Bethe – Ansatz for N = 4 Super Yang – Mills. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/03/01
- V. A. Fateev, A. V. Litvinov. (2018). Integrability, duality and sigma models. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)20
- A. V. Litvinov, L. A. Spodyneiko. (2018). On dual description of the deformed O(N) sigma model. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)13
- Rej, A. (2009). Integrability and the AdS/CFT correspondence. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/25/25400
- Gromov, N. (2017). Introduction to the Spectrum of N = 4 SYM and the Quantum Spectral Curve.
- Gromov, N., Kazakov, V., Vieira, P. (2008). Finite Volume Spectrum of 2D Field Theories from Hirota Dynamics. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/12/06
- Gromov, N., Kazakov, V., Sakai, K., Vieira, P. (2006). Strings as Multi – Particle States of Quantum Sigma – Models. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.11.01
- Korepin, V. E., Izergin, A. G., Bogoliubov, N. M. (1993). Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.
- **[T]** Tseytlin, A. A. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter II.1: Classical AdS5xS5 string solutions.
- Kazakov, V. (2018). Quantum Spectral Curve of γ-twisted $N = 4$ SYM theory and fishnet CFT. https://doi.org/10.1142/S0129055X1840010

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Устный доклад на семинаре*0.7 + Участие в дискуссии на семинаре*0.3

Интегрируемые системы классической механики
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. В. Прокофьев.

ОПИСАНИЕ. Интегрируемые системы являются одной из интереснейших и бурно развивающихся областей математической физики. Многие модели статистической физики, теории поля, квантовой механики облдают свойством интегрируемости. В курсе будут рассмотренны интегрируемые системы, возникающие в рамках классической механики. Будут исследованы важнейшие представители их представители, такие как системы Калоджеро – Мозера, Руйсенаарса – Шнайдера, Тоды. На их примере определеним основные понятия и методы относящиеся к интегрируемым системам в целом, кроме того мы разберем связь с другими важными математическими и физическими конструкциями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курс можно рассматривать как продолжение курса (https://math.hse.ru/courses/838221019.html). Помимо этого необходимо начальное знание линейной алгебры (операции с матрицами), теории групп (на уровне определения), желательно уметь решать простейшие дифференциальные уравнения.

ПРОГРАММА. 1. Системы Калоджеро, получаемые из уравнений Лакса. 2. Рациональная система Калоджеро как свободное движение. 3. Гиперболическая система Калоджеро 4. Система Тоды 5. Положение равновесия для частиц в Калоджере с потенциалом. 6. Эллиптические функции 7. Эллиптическая система Калоджера 8. *Преобразования Бэклунда 9. *Системы Корней 10. P-Q дуальность и системы Руйсенаарса: 11. Описание систем Руйсеннарса через матрицы Лакса

УЧЕБНИКИ.

- А. М. Переломов, «Интегрируемые системы классической механики»
- G. Arutyunov «Elements of classical and quantum Integrable Systems»
- F. Calogero «Classical Many – Body Problems Amenable to Exact Treatments»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по количеству сданных домашних задач (не обязательно решать все). Максимально возможная оценка 9. Для получения 10 необходимо будет дополнительно разобраться с темой по выбору.

Интегрируемые системы частиц и нелинейные уравнения
простой межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы», «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Забродин.

ОПИСАНИЕ. Интегрируемые системы многих частиц (системы Калоджеро – Мозера, Руйсенарса – Шнайдера и их спиновые обобщения) чрезвычайно интересны с математической точки зрения и находят многочисленные применения в современной математической физике. Они также тесно связаны с интегрируемыми дифференциальными уравнениями в частных производных (солитонными уравнениями) через динамику полюсов их сингулярных решений. Целью курса является овладение аппаратом теории интегрируемых систем частиц.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Основы линейной алгебры и теории функций комплексного переменного

ПРОГРАММА.

- Системы Калоджеро – Мозера: гамильтониан, уравнения движения, представление Лакса, интегралы движения.
- Системы Руйсенарса – Шнайдера и их интегралы движения.
- Деформированные системы Руйсенарса – Шнайдера.
- Спиновые обобщения систем Калоджеро – Мозера и Руйсенарса – Шнайдера: представление Лакса и интегралы движения.
- Уравнение Кадомцева – Петвиашвили и его эллиптические решения. Система Калоджеро – Мозера как динамика полюсов эллиптических решений.
- Двумеризованная цепочка Тоды и ее эллиптические решения. Система Руйсенарса – Шнайдера как динамика полюсов эллиптических решений.
- Системы Калоджеро – Мозера и Руйсенарса – Шнайдера в дискретном времени.

УЧЕБНИКИ.

- А. М. Переломов, «Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли ».
- Н. И. Ахиезер, «Элементы теории эллиптических функций ».
- А. Ньюэлл, «Солитоны в математике и физике ».
- Т. Мива, М. Джимбо, Э. Дате, «Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка равна числу правильно и полностью решенных экзаменационных задач (в количестве 10).

K-ТЕОРИЯ C^*-АЛГЕБР
простой межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Анализ», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

ОПИСАНИЕ. K-теория C^*-алгебр возникла в 1970-х гг. как некоммутативный аналог топологической K-теории Атьи – Хирцебруха. В некотором смысле на эту теорию можно смотреть как на «алгебраическую топологию для C^*-алгебр». K-теория естественным образом сопоставляет каждой C^*-алгебре A две абелевых группы, обозначаемые через $K_0(A)$ и $K_1(A)$. Эти группы являются весьма важными инвариантами C^*-алгебры A. С одной стороны, они содержат в себе существенную часть информации об этой алгебре, а с другой стороны, имеются эффективные инструменты для их явного вычисления. В случае, когда A — это алгебра непрерывных функций $C(X)$ на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X, группы $K_0(A)$ и $K_1(A)$ совпадают с топологическими K-группами $K^0(X)$ и $K^1(X)$ соответственно. Таким образом, топологическая K-теория полностью вкладывается в K-теорию C^*-алгебр. Многие фундаментальные результаты топологической K-теории, в том числе периодичность Ботта, естественно обобщаются на случай C^*-алгебр. В то же время K-теория C^*-алгебр обладает некоторыми интересными «чисто некоммутативными» свойствами, не имеющими классических прототипов. В этом курсе мы определим K-теорию для C^*-алгебр, докажем ее основные свойства (включая периодичность Ботта) и вычислим K-группы в некоторых важных случаях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Основы функционального анализа (банаховы и гильбертовы пространства, ограниченные линейные операторы). Полезным будет некоторое знакомство с C^*-алгебрами (например, в объеме первой половины курса «C^*-алгебры и компактные квантовые группы» (весна 2024) или соответствующей части курса «Гармонический анализ и банаховы алгебры» (осень 2024)). В любом случае на нескольких первых лекциях будет дан обзор основных фактов о C^*-алгебрах.

ПРОГРАММА.

1. Основные факты о C^*-алгебрах (обзор).
2. Отношения эквивалентности для проекторов. Группа $K_0(A)$. Замечания о коммутативном случае (векторные расслоения, теорема Серра – Суона, топологическая K-теория).
3. Гомотопическая инвариантность, полуточность и стабильность функтора K_0.
4. Эквивалентность унитарных элементов. Группа $K_1(A)$.
5. Отображение индекса в K-теории. Связь с фредгольмовым индексом. Точная последовательность K-групп, индуцированная расширением C^*-алгебр.
6. Алгебра Тёплица. Периодичность Ботта.
7. Индуктивные пределы C^*-алгебр. Непрерывность функтора K_0. Порядковая структура на группе $K_0(A)$. AF-алгебры и их диаграммы Браттели. Классификация Эллиотта AF-алгебр в терминах их K-теории.

УЧЕБНИКИ.

1. N. E. Wegge – Olsen. K-theory and C^*-algebras. A friendly approach. Oxford University Press, 1993.
2. M. Rordam, F. Larsen, N. Laustsen. An introduction to K-theory for C^*-algebras. Cambridge University Press, 2000.
3. Дж. Мёрфи. C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
4. B. Blackadar. K-theory for operator algebras. Cambridge University Press, 1998.
5. K. R. Davidson. C^*-algebras by example. AMS, 1996.
6. P. A. Fillmore. A user's guide to operator algebras. Wiley, 1996.
7. N. Higson, J. Roe. Analytic K-homology. Oxford University Press, 2000.
8. В. М. Мануйлов, Е. В. Троицкий. Материалы курса «C^*-алгебры и K-теория». http://mech.math.msu.su/~troitsky/teaching.html.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка = оценка за промежуточную контрольную с весом 0.3 + оценка за экзамен с весом 0.7. Промежуточная контрольная и экзамен будут представлять собой письменные индивидуальные домашние задания, на выполнение каждого из которых отводится приблизительно 7 дней.

Квантовая механика
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

ОПИСАНИЕ. Одним из ключевых достижений физики в XX веке является осознание того факта, что весь окружающий нас мир подчиняется законам квантовой механики, в то время как привычные нам законы классической физики (такие как, например, уравнения Ньютона) описывают лишь макроскопические объекты и могут быть получены при помощи предельного перехода. Создание квантовой механики позволило не только продвинуться в понимании того, как устроен мир на атомных масштабах, но и стимулировало развитие множества естественнонаучных дисциплин. Например, квантовая механика объяснила почему и каким образом из атомов образуются молекулы. Даже создание привычного нам компьютера на микроэлектронной базе не было бы возможным без понимания квантовомеханических законов. В то же самое время она оказала существенное влияние на развитие математики и стимулировала развитие ряда ее областей, таких как, например, теория линейных самосопряженных операторов в бесконечномерном Гильбертовом пространстве, теория обобщенных функций, спектральная теория и др. В настоящее время квантовая механика является базовым разделом теоретической и математической физики, а ее знание необходимо для понимания практически всех продвинутых областей современной физики и части разделов современной математики. Неожиданное применение квантовая механика нашла и в области компьютерных наук. Оказалось, что в ряде ситуаций квантовые компьютеры (вычислители функционирующие на основе квантовомеханических принципов) могут работать кардинально быстрее классических вычислительных устройств.

Целью данного курса является обсуждение ключевых идей квантовой механики, ее аппарата, а также ее применения для решения конкретных задач и описания физических явлений. В рамках курса планируется рассмотреть основные точные и приближенные методы квантовой механики, а также на примерах обсудить их применение. Также планируется обсудить основные принципы функционирования квантовых компьютеров.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовые курсы анализа, теории вероятностей, ТФКП, классической механики, дифф. уравнений. Желательно, но не обязательно: классическая теория поля, статистическая механика.

ПРОГРАММА.

- Введение и простейшие примеры квантовомеханических систем.
- Квантовая механика одной частицы и принцип соответствия.
- Квантовая механика и одномерное движение.
- Гармонический осциллятор и соотношение неопределенности.
- Квантовая эволюция и картина Гейзенберга.
- Системы с несколькими степенями свободы и симметрии в квантовой механике.
- Угловой момент в квантовой механике. Алгебраический подход и координатное представление.
- Движение в центральном поле. Атом водорода
- Спин в квантовой механике.

- Движение частицы в электромагнитных полях. Частица в постоянном магнитном поле.
- Состояния рассеяния и движение в периодическом потенциале. Туннелирование.
- Основные принципы функционирования квантового компьютера. Универсальный квантовый компьютер и адиабатический вычислитель.

УЧЕБНИКИ.

- Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А., Лекции по квантовой механике для студентов математиков. 1980.
- Елютин П. В., Кривченков В. Д., Квантовая механика с задачами, 2001.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка равна $0.7H+0.3E$, где H - средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E - оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

Квантовые группы: структуры, представления и приложения
трудный межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Представления и инварианты», «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.

ОПИСАНИЕ. Квантовые группы — обширная и динамично развивающаяся область современной математики, находящаяся на стыке теории ассоциативных алгебр и их представлений, функционального анализа и теории интегрируемых моделей математической физики.

В рамках данного семинара будут обсуждаться, в первую очередь (но не только) темы, входящие в круг интересов его руководителей: структурная теория и теория представлений квантовых матричных алгебр, дифференциально-геометрические конструкции на квантовых группах, поиск новых R-матричных представлений группы кос, R-матричная техника и ее развитие, приложение всего вышеперечисленного в исследовании интегрируемых моделей стохастических процессов и квантовых спиновых цепочек, а также в построении инвариантов зацеплений.

Семинар будет организован как серия докладов его организаторов и участников, а также приглашенных докладчиков. Мы рассчитываем, что на семинаре будут обсуждаться возможные темы дипломных работ и самостоятельных научных исследований его участников.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Семинар задуман как дополнение к спецкурсу «Группа кос, квантовые группы и приложения», но в нем смогут принять участие не только слушатели этого спецкурса. Все не общеизвестные понятия и результаты будут напоминаться.

Помимо базовых курсов алгебры и анализа, полезным будет знакомство с симметрической группой и ее представлениями, основами теории групп и алгебр Ли, симметрическими функциями.

ПРОГРАММА. Ориентировочный, но не исчерпывающий список тем для обсуждения на семинаре включает в себя:

- Обобщения теоремы Гамильтона – Кэли для различных семейств квантовых матричных алгебр, структура и соотношения для образующих их характеристических подалгебр.
- Спектр квантовых матриц и спектральное расширение квантовых матричных алгебр, применение спектральных расширений в построении представлений этих алгебр. Квазиосцилляторные алгебры.
- Гейзенбергов дубль или алгебра дифференциальных операторов на квантовой группе. Спектральное расширение гейзенбергова дубля. Реализация квантовомеханических моделей на гейзенберговом дубле.
- Неприводимые представления группы кос, а также алгебр Гекке и Бирман – Мураками – Венцля.
- R-матричные представления группы кос. Изучение возможности построения новых семейств R-матриц в рамках различных анзацев. Вычисление соответствующих инвариантов зацеплений.
- Стохастические R-матрицы и их применение в построении и исследовании моделей марковских стохастических процессов.

УЧЕБНИКИ.

- Записки лекций курса «Группа кос, квантовые группы и приложения» https://math.hse.ru/BraidGroupEtc–PyatovSaponov-2024
- A. Klimyk, K. Schmuedgen, «Quantum groups and their representations», Springer, 1997.
- Дополнительные статьи для разбора и обсуждения на семинарах будут предлагаться слушателям в процессе прохождения курса.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. При выставлении оценки за курс будет в равных долях учитываться

- активное очное участие слушателя в семинарских занятиях;

- выступление с докладом на семинаре.

Классическая теория поля
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. И. Арсеев.

ОПИСАНИЕ. Курс «Классическая теория поля» является следующим после курса по механике в программе «Математическая физика». Понимание классической теории поля является необходимым для дальнейшего изучения квантовой теории поля, общей теории относительности, теории струн и т.д. Поскольку известный нам мир и существующие в нем поля обладают симметрией, известной, как релятивистская инвариантность, обсуждаются группа Лоренца (Пуанкаре) и построение действия, инвариантного относительно этой группы. В первую очередь мы рассмотрим разные формулировки уравнений электродинамики, как наиболее разработанный и «практичный» пример теории поля, однако, потом обсудим и другие примеры: скалярное поле, спинорное и соответствующие уравнения поля. В конце поговорим о некоторых нетривиальных решениях уравнений на экстремум действия в лагранжевой формулировке некоторых простых классических полевых теорий.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Помимо знания матанализа и основ дифференциальных уравнений, желательно знание лагранжевой механики, основ теории групп и алгебр Ли и их представлений.

ПРОГРАММА.

- Введение: Лагранжев подход в механике, уравнения Эйлера – Лагранжа. Законы сохранения, как следствие некоторых симметрийных свойств Лагранжиана.
- Специальная теория относительности. Пространство Минковского и группа Лоренца. Постоянство скорости света в различных системах отсчета – физическая основа преобразований Лоренца.
- Лагранжиан частицы, инвариантный относительно группы Лоренца – релятивистское действие свободной частицы. 4-х вектора, преобразование различных физических величин при переходе от одной системы отсчета к другой- действие группы Лоренца (Пуанкаре).
- Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. Векторный и скалярный потенциал, как компоненты 4-х вектора.
- Напоминание основ электродинамики: уравнения Максвелла, их дифференциальная и интегральная формулировка.
- Уравнения электромагнитных волн в терминах потенциалов и полей, их Лоренц-инвариантность.
- Расширение Лагранжева подхода для описания полей: что такое Лагранжиан поля (а не частицы), уравнения Эйлера – Лагранжа для полей. Простой вид Лагранжиана электромагнитного поля через напряженности поля.
- Построение Лоренц инвариантного лагранжиана – тензор электромагнитного поля. Действие для электромагнтного поля и уравнения Максвелла (записанные через тензора поля) как уравнения Эйлера – Лагранжа.
- Полный Лагранжиан электромагнитного поля - возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Инварианты, законы сохранения. Калибровочная инвариантность. Нарушение Лоренц-инвариантности выбором калибровки.

- Различные решения «уравнений движения» электромагнитного поля (они же уравнения Максвелла). Функция источника (Грина) для скалярного потенциала в электростатике и для векторного потенциала. Запаздывающие потенциалы, излучение волн.

- Другие примеры релятивистски инвариантных уравнений для полей. О представлениях группы вращения, Лоренца. Скалярное поле – уравнение Клейна – Гордона. Спинорные представления. Уравнение Дирака как классическое полевое уравнение.

- Появление нетривиальных решений в уравнениях на экстремум действия в лагранжевой формулировке ряда классических полевых теорий. Скалярные ϕ^4 и синус – Гордон.

- *Нелинейная O (3)-модель

- *Понятие о полях Янга – Миллса: пример более сложной калибровочной симметрии.

УЧЕБНИКИ. Л. Ландау, Е. Лифшиц, «Теория поля», Курс теоретической физики, т. 2.Москва, Физматлит, 2003.
К. Ициксон, Ж-Б. Зюбер, «Квантовая теория поля» т.1,Москва,Мир,1984
Р. Раджараман Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. Москва, Мир, 1985
Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, Том 1, Москва, ИздИностр Лит 1958
Дж. Джексон, «Классическая электродинамика», Москва, Мир, 1965.
Тамм И. Е. Основы теории электричества — М.: Гос.изд.технико-теоретической литературы. 1956
Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, «Электродинамика. Фейнмановские лекции пофизике», т.6, Москва, Мир, 1977.
Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1977
В. С. Владимиров, «Обобщенные функции в математической физике»,Москва, Наука, 1979.
В. С. Владимиров, «Уравнения математической физики», Москва, Наука,1981.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. За семестр предполагается решение студентами 4-х листков с задачами, проведение 1 контрольной работы и сдача экзамена.
Оценка за листки L от 0 до 10
Оценка за контрольную работу K от 0 до 10
Накопленная оценка $N = (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + K * 1.2)/4.5)$
Если накопленная оценка больше 8 (без округления) студент получает автомат за экзамен.
В случае сдачи экзамена с оценкой E от 0 до 10 итоговая оценка определяется по формуле: $N*0.4+E*0.6$

Классические группы, их инварианты и представления

трудный межкампусный дистанционный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Представления и инварианты».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. И. Ильин, Г. И. Ольшанский.

ОПИСАНИЕ. Название курса намеренно скопировано со знаменитой книги Германа Вейля (1939; 1946). Материал книги составляет ядро теории представлений. Поэтому проработать этот материал полезно всем, кто хочет заниматься какими бы то ни было задачами теорией представлений или применять ее результаты. Цель курса — познакомить студентов с основными идеями и результатами книги Вейля, а также и их дальнейшим развитием. Разумеется, наряду с книгой Вейля мы будем использовать и другие, более современные источники.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Алгебра и линейная алгебра (в объеме обязательных курсов первых двух лет). Весьма желательно знакомство с основами теории групп и алгебр Ли (курсы на эту тему регулярно читались в первом семестре).

ПРОГРАММА.

- Четыре серии A,B,C,D комплексных классических групп. Компактные классические группы. Классические алгебры Ли.
- Центр универсальной обертывающей алгебры и гомоморфизм Хариш – Чандры.
- Тождество Капелли.
- Теория инвариантов для комплексных классических групп: различные версии первой основной теоремы.
- Мера Хаара на компактных классических группах, ее радиальная часть (формула Вейля).
- Неприводимые характеры: первая и вторая формулы Вейля.
- Реализация фундаментальных представлений.
- Полиномиальные представления и двойственность Шура – Вейля.
- Биномиальная формула для характеров и интерполяционные полиномы Шура.
- Правила ветвления для характеров.
- Универсальные характеры Койке – Терады.
- Двойственность Вейля в бесследовых тензорах.
- Двойственность Брауэра.

УЧЕБНИКИ.

- Г. Вейль. Классические группы. Их инварианты и представления. М., ИЛ, 1947 (перевод первого издания 1939 г.).
- У. Фултон, Дж. Харрис. Теория представлений. Начальный курс.
- Д. П. Желобенко. Компактные группы Ли и их представления. М., Наука, 1970.
- R. Goodman, N. R. Wallach. Symmetry, Representations, and Invariants. Springer, 2009.
- C. Procesi. Lie groups. An Approach through Invariants and Representations. Springer, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Будет указано позже на сайте Сколтеха

КОММЕНТАРИИ. Это курс Сколтеха

Комплексная геометрия
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебраическая геометрия», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 12 кредитов (по 6 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. С. Осипов.

ОПИСАНИЕ. Комплексная геометрия изучает комплексно аналитические многообразия и голоморфные векторные расслоения. Будучи тесно связанной с дифференциальной и алгебраической геометрией, алгебраической топологией, геометрическим анализом и математической физикой, комплексная геометрия является красивой, привлекательной и стремительно развивающейся областью в самом центре современной математики. Этот курс является фундаментом для дальнейшего самостоятельного изучения комплексной геометрии по предлагаемой ниже литературе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курс требует знания анализа на многообразиях (дифференциальные формы, теорема Стокса, векторные расслоения), комплексного анализа (ряд Тейлора, теоремы Коши), и алгебраической топологии (когомологии Де Рама, двойственность Пуанкаре). Знание базовых понятий дифференциальной геометрии (метрики, связности, кручения, кривизны) желательно, но коротко я о них расскажу.

ПРОГРАММА.

- Основы многомерного комплексного анализа.
- Почти комплексные структуры и комплексные структуры, теорема Ньюландера – Ниренберга.
- Кэлеровы многообразия, связности Леви – Чивита и Черна.
- Пучки и их когомологии.
- Голоморфные расслоения, дивизоры, классы Черна.
- Гармонические формы и когомологии, двойственность Серра, разложение Ходжа.
- Теоремы Кодаира и Римана Роха.
- Абелевы многообразия, якобиан, отображение Альбенезе.
- Теорема Калаби – Яу, многообразие Калаби – Яу, деформации комплексных структур.

УЧЕБНИКИ.

- D. Huybrechts, «Complex Geometry — An Introduction».
- П. Гриффитс, Дж. Харрис,«Принципы алгебраической геометрии» в 2-х томах.
- К. Вуазен, «Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия» в 2-х томах.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка равна среднему арифметическому оценки за листки и оценки за экзамен. Активно работающим на семинарах студентам оценка дополнительно будет повышена на 1 или 2 балла.

Конечные кольца: арифметика многочленов и коды
простой межкампусный дистанционный семинар на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Прикладная математика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Гриценко.

ОПИСАНИЕ. Первый вопрос курса — как разложить многочлен над кольцом вычетов по модулю 4 на неприводимые множители? В качестве ответа мы построим теорию делимости многочленов над кольцами вычетов по модулю степени простого числа. В таких кольцах имеются делители нуля, поэтому обычная алгебраическая интуиция обязательного курса алгебры не работает. Оказывается, что разумная теория разложения существует, но не работает в том объеме, к которому мы привыкли в случае полей. При построении теории делимости необходимо перейти от простых идеалов к примарным. Этот шаг расширит знания слушателей в коммутативной алгебре на примере конкретной проблемы. Разложение на неприводимые, окажется единственным только в случае отсутствия у многочлена кратных корней после естественной редукции к случаю конечных полей. Кратные корни приводят нас к еще не построенной сегодня теории арифметических особенностей. В литературе рассмотрены только первые случаи. Данные алгебраические вопросы возникли в самом конце XX века в теории циклических кодов (специальных модулей над конечными кольцами). Теория, которую мы построим, естественно переносится на случай конечных колец Галуа, с которыми мы познакомимся в данном курсе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знакомство только с базисными понятиями алгебры такими как поля, многочлены, конечномерные векторные пространства, кольца, идеалы, фактор-кольца, модули. Доступен для всех, начиная со студентов второго курса.

ПРОГРАММА.

- Конечные кольца, примеры конечных колец, классификация конечных колец малых порядков, нильпотенты, кольца Галуа, кольцо многочленов над кольцом вычетов по модулю m.
- Простые и максимальные идеалы, нильрадикал кольца, примарные идеалы.
- Нильрадикал и группа обратимых элементов кольца многочленов над конечным кольцом. Редукция любого многочлена к унитарному.
- Базисные неприводимые многочлены по модулю p^n, где p простое.
- Радикал примарного идеала, операции с примарными идеалами, неприводимые многочлены и примарные идеалы в кольце многочленов над конечным кольцом.
- Подъем Гензеля и примарное разложения многочлена по модулю p^n. Подъем Гензеля многочлена над полем из двух элементов до многочлена по модулю 4.
- Теория делимости в кольце многочленов над кольцом вычетов по модулю p^n.
- Критерии неприводимости многочленов над кольцом вычетов по модулю p^n.
- Кольца Галуа. Теория делимости в кольце многочленов над кольцом Галуа.
- Конечные кольца, на которые можно обобщить теорию делимости многочленов. Реферативные проекты.
- Примитивный корень степени m из единицы над конечным полем. Разложение кругового многочлена над конечным полем.

- Изучение разложения многочлена $^m - 1$ на множители по модулю p^n. Случай хорошей редукции. Индивидуальная лабораторная работа.
- Изучение разложения многочлена $^m - 1$ на множители по модулю p^n. Случаи плохой и очень плохой редукции. Творческие проекты.

УЧЕБНИКИ.

- M. R. Kibler, «Galois Fields and Galois Rings Made Easy» Elsevier, 2017.
- G. Bini, F. Flamini, « Finite commutative rings and their applications», Springer 2002.
- W. C. Huffman, V. Pless, «Fundamentals of Error – Correcting Codes», Chapter 12. Codes over $\mathbb{Z}_4$. Cambridge University Press 2003.
- Min J. Shi, A. Alahmadi, P. Solé, «Codes and Rings. Theory and Practice», Elsevier, 2017.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.3*Оценка за практическую работу по курсу (письменное решение задач) + 0.5*оценки за обязательную индивидуальную лабораторную работу + 0.2*Устный коллоквиум. Если индивидуальная работа оценена в 10 баллов, то устный коллоквиум не является необходимым.

Линейное программирование
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Анализ», «Прикладная математика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Е. О. Степанов.

ОПИСАНИЕ. Линейное программирование — раздел теории оптимизации, изучающих специальный класс задач — нахождение экстремумов линейных функций на выпуклых множествах (как конечномерных, так и бесконечномерных). Линейное программирование зародилось как прикладная дисциплина, с приложениями (в первую очередь) к экономике, но оно имеет глубокие связи со многими задачами анализа, геометрии, дискретной математики, а также численными методами и алгоритмами. Настоящий курс представляет собой введение в линейное программирование и ставит своей целью осветить многообразие связей и приложений линейного программирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. математический анализ и линейная алгебра в объёме первого курса.

ПРОГРАММА.

- Линейное программирование. Постановка задачи и базовые свойства. Классические задачи линейного программирования (задача о диете, транспортная задача и др.)
- Элементы теории выпуклых многогранников. Метод исключения Фурье – Моцкина. Основная теорема о многогранниках.
- Элементы выпуклого анализа. Лемма Фаркаша, теорема Хелли, теорема Каратеодори, теорема об отделимости.
- Двойственность в линейном программировании.
- Крайние точки выпуклых множеств. Теорема Бирхгофа о бистохастических матрицах.
- Теорема о минимаксе.
- Другие приложения минимакса. Двудольные графы (теоремы Кёнига, Холла). Игры с нулевой суммой.
- Симплекс-метод.
- Другие алгоритмы (обзорно).
- Транспортные потоки в сетях. Теорема Форда–Фалькерсона.
- Целочисленное линейное программирование.
- Общая теорема о минимаксе (в бесконечномерных пространствах).
- Непрерывная транспортная задача. Метрика Канторовича–Рубинштейна.

УЧЕБНИКИ.

- T. S. Ferguson, Linear programming: a concise introduction. https://www.math.ucla.edu/~tom/LP.pdf
- Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Том 1. Мир (1991)

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Промежуточная аттестация Результат вычисляется по итогам двух письменных контрольных, каждая оценивается в 10 баллов. Итог вычисляется по формуле 0.5 *(оценка за первую контрольную + оценка за вторую контрольную). Правила округления стандартные. Правила пересдачи Итоговая средняя оценка за контрольные, в случае, если ее значение не ниже 4 баллов, может быть зачтена как оценка по дисциплине, но в пределах 8 баллов. Для тех, кто по уважительным причинам пропустил какую-либо из контрольных, набрал ниже 4 баллов, а также для тех, кто хочет повысить среднюю оценку за контрольные, предусмотрена третья контрольная во время сессии или за 10 дней до нее по договоренности, либо как дополнение ко 2 контрольной. В случае, если студент хочет получить 9 или 10 баллов (даже в том случае, если средняя оценка за контрольные равна 9 или 10) проводится устный экзамен с обсуждением теоретического материала и дополнительными задачами, по итогу которого можно заработать дополнительно 1 или 2 балла.

Локализация и рациональная теория гомотопий
трудный межкампусный семинар на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Горинов.

ОПИСАНИЕ. Гомотопическая категория CW-комплексов устроена довольно сложно. Если даны два односвязных полиэдра, то не очень понятно, как определить, будут ли они гомотопически эквивалентными, или как описать гомотопические классы отображений между ними. Но оказывается, что эти и другие подобные вопросы сильно упрощаются, если объявить изоморфизмами отображения, которые индуцируют изоморфизм в рациональных гомологиях. При этом получается *рациональная гомотопическая категория*, в которой довольно просто описать гомотопические классы отображений и классы гомотопической эквивалентности объектов.

У этого всего есть применения в «обычной» топологии: например, это дает способ посчитать ранги гомотопических групп односвязных пространств. Еще одно приложение: если вещественные когомологии двух компактных кэлеровых односвязных многообразий абстрактно изоморфны, то между этими многообразиями есть отображение, индуцирующее изоморфизм рациональных когомологий. Наша первая цель в том, чтобы построить рациональную гомотопическую категорию и изучить некоторые ее применения. Затем мы рассмотрим общую процедуру локализации категории по классу морфизмов и увидим, как рационализация оказывается ее частным случаем.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Алгебраическая топология, например, в объеме глав 1-2 Фоменко – Фукса или глав 1-3 Хатчера. По просьбам участников мы будем напоминать то, что нам будет нужно.

ПРОГРАММА.

- Пространства Эйленберга – МакЛейна и башни Постникова.
- Локализация пространства в подмножестве простых чисел. Рационализация.
- Сулливановские модели коммутативных дифференциальных градуированных алгебр. Существование и единственность.
- Примеры сулливановских моделей.
- Применения сулливановских моделей; гомотопические группы; формальность кэлеровых многообразий; группы классов отображений.
- Другие способы моделировать рациональные пространства (C_∞-алгебры, модели Ли и т. д.).
- Локализация категорий. Локализация Бусфилда.

УЧЕБНИКИ.

- Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, Rational homotopy theory.
- D. Sullivan, Geometric topology.
- D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0,4 промежуточный экзамен, 0,6 итоговый экзамен

Математика физических явлений
простой межкампусный спецкурс на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. И. Арсеев.

ОПИСАНИЕ. Курс о связи реальных физических явлений и математических методов их описания, о возникновении определенных математических структур из законов физики, в первую очередь, в механике, электростатике, электродинамике. В курсе обсуждаются такие вещи, как связь второго закона Ньютона с Лагранжевым формализмом, движение «по прямой» по криволинейной поверхности, поведение гироскопа, эквивалентность закона Кулона теореме Гаусса и т.д

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Желательно знание основ матанализа, понимание простых дифференциальных уравнений

ПРОГРАММА. Второй закон Ньютона-основа описания классического движения. Примеры динамики. Законы сохранения из уравнений движения.

От законов Ньютона к лагранжевой формулировке. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения с точки зрения лагранжевого подхода.

«Свободное» движение в криволинейном пространстве. Движение по сфере и поверхностям вращения. Описание с помощью метрики.

Движение быстро вращающихся тел. Нетривиальность их свободного движения. «Антиинтуитивное» поведение гироскопа.

II. Электростатика

Закон Кулона как прямое следствие эксперимента. Понятие потока векторного поля. Эквивалентность теоремы Гаусса «экспериментальной» формулировке закона Кулона. Дивергенция векторного поля, дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнения Лапласа и Пуассона.

Решение задач электростатики с помощью теоремы Гаусса. Поле заряженных плоскостей и стержней. Понятие о двумерной и одномерной электростатике и специфических «законах Кулона». Заряды над поверхностью металла.

Электрическое поле в диэлектриках. Поверхностные заряды и граничные условия для электрического поля в неоднородной системе. Метод зарядов изображений - физическое решение задачи о нахождении решения дифференциального уравнения с граничными условиями.

III. Электродинамика

Взаимодействие токов. Экспериментальные законы Эрстеда и Ампера. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Движение частицы в магнитном поле.

Понятие векторного потенциала. Ротор векторного поля, формула Стокса. Свойства векторного потенциала, сравнение со скалярным потенциалом. Дифференциальная формулировка законов электромагнетизма при условии стационарности токов. Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

Закон Фарадея, его интегральная и дифференциальная формулировки. Система уравнений Максвелла. Еще раз их физический смысл и математическая формулировка. Полный Лагранжиан электромагнитного поля - возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.

Уравнения электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в среде. Граничные условия на поверхности раздела двух сред.

Отражение от поверхности раздела двух сред. Два метода решения задачи об отражении от плоскопараллельной пластины. Поверхностные волны

УЧЕБНИКИ. Фейнман Р.,Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике – М.: Мир,1967
Арнольд В. И. Математические методы классической механики - М.;Физматлит, 1974
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика – М.;Физматлит, 2004
Тамм И. Е. Основы теории электричества – М.: Гос.изд.технико-теоретической литературы. 1956
Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1977

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по формуле $Q = 0.2Qact + 0.4Q1 + 0.4Q2$ где Qact - степень участия в занятиях в течение полугода, Q1- оценка за первый листок с задачами, Q2- оценка за второй набор задач.

Математическая физика
простой межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Маршаков.

ОПИСАНИЕ. Математическая физика является источником большинства серьезных математических задач. В рамках данного НИСа предполагается максимально простое ознакомление студентов с рядом интересных задач, предлагаемых современной матфизикой, на основе их самостоятельной работы. Целью НИСа является введение в курс современных научных проблем и выработка необходимых навыков работы в рамках научных семинаров.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовое математическое образование, желание работать

ПРОГРАММА. Программа составляется по желанию участников

УЧЕБНИКИ. Литература подбирается после выработки программы

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Для получения отличной оценки достаточно сделать содержательный доклад по самостоятельно выбранной и разобранной теме. Это требование не является необходимым, и в остальных случаях оценка пропорциональна активности и качеству участия в семинаре.

Математические основы квантовой механики
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.

ОПИСАНИЕ. Квантовая механика является важнейшим инструментом исследования явлений микромира и в настоящее время входит в обязательный образовательный минимум физиков-теоретиков и специалистов по математической физике. Данный курс является введением в квантовую механику для студентов-математиков, не требующее серьезной подготовки по физике. При моделировании квантовых явлений мы будем использовать в качестве аргументов внутреннюю логику и естественность математических конструкций. Модели квантовой механики служили и продолжают служить источником вдохновения для многих разделов современной математики, включая теорию групп и алгебр Ли, функциональный анализ, представления ассоциативных алгебр, деформационное и геометрическое квантования, теорию квантовых групп и др.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курс рассчитан на студентов 3-4 года бакалавриата и магистрантов. Специальных знаний по физике не требуется, хотя знакомство с механикой и классической теорией поля облегчит восприятие материала.

Необходимая математическая подготовка (в объеме базовых курсов 1-го и 2-го года бакалавриата):

- Лагранжева и гамильтонова механика: уравнения Гамильтона и скобки Пуассона, законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

- Линейная алгебра: векторные пространства, скалярное произведение, линейные операторы, их собственные значения и собственные векторы.

- Теория вероятностей и математическая статистика: случайная величина, функция распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

- Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Математический анализ (вещественный и комплексный), в основном теория интегрирования (обычные и кратные интегралы) и преобразование Фурье.

Желательная дополнительная математическая подготовка:

- Знакомство с азами теории групп и алгебр Ли и их конечномерными представлениями на примерах групп SU(2) и SO(3), базовые сведения о симметрической группе.

- Некоторые понятия функционального анализа: гильбертово пространство, линейные операторы в гильбертовом пространстве, эрмитовы и самосопряжённые операторы.

- Понятие об обобщённых функциях на пространстве быстроубывающих функций (пространстве Шварца), производная и преобразование Фурье обобщённой функции, дельта-функция Дирака и ее регуляризации.

При необходимости математические понятия (особенно из раздела дополнительной математической подготовки) будут напоминаться и вводиться на лекциях.

ПРОГРАММА.

- Краткий обзор основных физических проблем, приведших к возникновению квантовой механики. Гамильтонов формализм классической механики, фазовое пространство состояний механической системы и пуассонова структура на нем.

- Основные понятия квантовой механики. Гильбертово пространство состояний квантовой системы, спектры самосопряженных операторов как множество значений квантовых наблюдаемых, статистическая интерпретация. Элементы теории обобщенных функций. Уравнения движения квантовой системы в представлениях Шредингера и Гейзенберга.

- Гармонический осциллятор, его координатное представление и полиномы Эрмита. Алгебра операторов рождения и уничтожения и представление осциллятора в пространстве Фока. Общая теория одномерного движения.

- Трехмерное движение в центральном поле. Модель атома водорода. Сферические функции, полиномы Лагерра.

- Группы симметрий квантово-механических систем и их представления в пространстве состояний, законы сохранения и интегралы движения. Угловой момент в квантовой механике. Спин квантовой частицы. Конечномерные представления алгебры Ли $su(2)$.

- Симметрическая группа и теория тождественных частиц. Статистики Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака, типы симметрий векторов состояний и диаграммы Юнга. Принцип запрета Паули и объяснение периодического закона Менделеева.

- Релятивистская квантовая механика. Уравнение Дирака и квантование свободного фотонного поля.

УЧЕБНИКИ.

- Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, «Лекции по квантовой механике для студентов-математиков», Издательство ЛГУ, 1980.

- Brian C. Hall, «Quantum Theory for Mathematicians'», Graduate Texts in Mathematics 267, Springer 2013.

- Л. А. Тахтаджян, «Квантовая механика для математиков», Перевод с американского издания, Graduate Studies in Mathematics, vol.95. Москва – Ижевск, изд. «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

- В. В. Балашов, В. К. Долинов, «Курс квантовой механики», Москва – Ижевск, изд. «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

- П. А. М. Дирак, «Принципы квантовой механики», Москва, Физматгиз, 1960.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. По темам курса выдается 3 листка с задачами для самостоятельного решения. Задания листков оцениваются по 10-балльной шкале. Для получения оценки 10 достаточно решить примерно 80% задач листка. Накопленная оценка $O_{\text{накоп}}$ — среднее арифметическое оценок за все листки. Если $O_{\text{накоп}} \geq 7$, итоговая оценка $O_{\text{итог}}$ получается округлением $O_{\text{накоп}}$ до целого по обычному правилу. В случае, если $O_{\text{накоп}} < 7$, студент должен сдать экзамен, при этом итоговая оценка определяется по формуле $O_{\text{итог}} = 0.5(O_{\text{накоп}} + O_{\text{экз}})$.

Многогранники и алгебраическая геометрия
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебраическая геометрия», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Ф. И. Селянин.

ОПИСАНИЕ. Любому многочлену от нескольких переменных можно сопоставить многогранник Ньютона: выпуклую оболочку показателей ненулевых мономов. Оказывается многие свойства полиномов и задаваемых ими многообразий можно описать при помощи этих многогранников. Это очень красивые результаты, также они часто используются в других областях математики и математической физики.

Вначале мы подробно изучим, как устроены комплексные кривые и их пересечения на проективной плоскости. При замене степени однородной кривой на многогранник Ньютона неоднородной кривой проективная плоскость естественным образом заменяется на гладкое торическое многообразие. Эта замена позволяет продолжить все результаты с той лишь разницей, что возникает нетривиальная комбинаторика многогранников.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовые знания по гладким многообразиям, комплексному анализу одной переменной, линейной алгебре. Понимание, что такое выпуклые многогранники, конусы, Эйлерова характеристика, накрытие, двойственность Пуанкаре.

ПРОГРАММА.

- Комплексные алгебраические кривые на проективной плоскости. Теорема Безу, род кривой данной степени.
- Кратность пересечения комсплексных кривых.
- Многогранники, конусы, вееры.
- Гладкие торические многообразия.
- Теорема Бернштейна – Кушниренко. Эйлерова характеристика гиперповерхности.
- * Плоские вещественные алгебраические кривые, Харнаковские кривые.
- * Кольцо условий комплексного тора, хорошие компактификации.
- * Теорема Кушниренко для особенности гиперповерхности.

УЧЕБНИКИ.

Список литературы

[1] А. Л. Городенцев, «Линейная алгебра и геометрия», тема 12, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_12.pdf

[2] М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов «Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей»

[3] Б. Я. Казарновский, А. Г. Хованский, А. И. Эстеров «Многогранники Ньютона и тропическая геометрия»

[4] O. Viro «Introductions to topology of real algebraic varieties» https://www.pdmi.ras.ru/ olegviro/introTRAV.html

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Будут предложены две письменные работы. Среднее арифметическое их результатов будет итоговой оценкой за курс.

КОММЕНТАРИИ. Последние темы будут разобраны при наличии времени и в порядке интереса аудитории.

Множества и модели
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Логика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Б. Шехтман.

ОПИСАНИЕ. В курсе дается краткое введение в аксиоматическую теорию множеств. Основная цель — познакомить слушателей с методом форсинга, который применил Коэн для доказательства независимости гипотезы континуума. Этот метод в дальнейшем был использован для исследования непротиворечивости утверждений из разных областей математики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовый курс «Логика и алгоритмы» (2-3 курс бакалавриата), разделы «Теория множеств», «Логика предикатов».

ПРОГРАММА.

- Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля.
- Ординалы и кардиналы.
- Модели теории множеств. Релятивизация. Теорема отражения.
- Метод форсинга.
- Совместность континуум-гипотезы.
- Независимость континуум-гипотезы.
- Теорема Серпинского.
- Независимость аксиомы выбора (если позволит время).

УЧЕБНИКИ.

- «Справочная книга по математической логике, ч. 2. Теория множеств». М., 1982.
- N. Weaver. «Forcing for mathematicians». World Scientific, 2014.
- A. Levy. «Basic set theory». Dover Publications, 1979.
- K. Kunen. «Set theory». Elsevier, 1980.
- T. Jech. «Set theory». Springer, 2006.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Накопленная оценка = (средний балл по домашним задачам) x 1.1. Если эта оценка не менее 8, она равна итоговой. Иначе: итоговая оценка = (средний балл по домашним задачам) + оценка за экзамен x 0.5. Округление до ближайшего целого.

Модулярные формы
простой межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Анализ».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: В. С. Болбачан, А. Б. Калмынин.

ОПИСАНИЕ. Модулярные формы и функции — классический объект, возникший изначально в контексте теории эллиптических функций. Впоследствии оказалось, что они возникают естественным образом во многих других областях математики и имеют массу полезных приложений. Так, j-инвариант может быть использован для явного построения полей классов для мнимоквадратичных порядков, ряды Эйзенштейна помогают в изучении решёток, а квазимодулярные формы играют важную роль в решении задачи об упаковке шаров. Цель данного НИСа — познакомить слушателей с основами теории модулярных форм и обсудить её яркие приложения. Планируется, что часть занятий будут лекциями организаторов семинара, а все остальные — докладами участников.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Алгебра и анализ в рамках 1 курса, а также комплексный анализ

ПРОГРАММА.

1. Гиперболическая плоскость, группа $SL(2,\mathbb{Z})$ и её фундаментальная область. Эквивалентность квадратичных форм.
2. Модулярные формы, формула валентности. Ряды Эйзенштейна, модулярный дискриминант, модулярные функции и j-инвариант.
3. Конгруэнц-подгруппы, операторы Гекке, мультипликативность τ-функции Рамануджана, L-функции модулярных форм.
4. Произведение Петерсона, ряды Пуанкаре.
5. Производные модулярных форм, квазимодулярные формы и бесконечные произведения.
6. Вещественно-аналитические ряды Эйзенштейна, формы Маасса.
7. Приложения: дзета-значения числовых полей, простые числа вида $x^2 + ny^2$, гиперболическая проблема круга, упаковки шаров.

УЧЕБНИКИ.

- Серр, Ж-П. «Курс арифметики.» Издательство «Мир» (1972). 7 глава
- П. Сарнак «Модулярные формы и их приложения»
- F. Diamond, J. Shurman «A first course in modular forms»
- Don Zagier. «Introduction to modular forms. In From number theory to physics», pages 238–291. Springer, 1992.
- Don Zagier. «Elliptic modular forms and their applications. The 1-2-3 of modular forms: Lectures at a summer school in Nordfjordeid, Norway», pages 1–103, 2008.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. max(оценка за сделанный доклад, оценка за письменный экзамен)

Непараметрика и другие сюжеты статистики
простой межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Прикладная математика», «Вероятность и стохастическая динамика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. А. Самойленко.

ОПИСАНИЕ. На практике регулярно возникают ситуации, когда распределения и зависимости в данных неизвестны, или данные содержат мало наблюдений и много шума. В таких случаях на помощь приходят непараметрические методы статистики, базовое представление о которых можно получить на этом семинаре. Мы надеемся рассказать об основных непараметрических критериях проверки гипотез, а также обзорно затронуть темы, которые будут полезны при анализе медицинских, социологических и других типов данных (в том числе относящихся к образованию, в связи с чем надеемся на участие студентов совместных программ с ЦПМ). Фактическая программа семинара может несколько отличаться от написанной ниже, но общее содержание будет предельно похожим. В прошлые годы на семинаре была опробована и в этом году планируется к продолжению практика проектов: вместо доклада (который является составной частью оценки) можно выполнить исследовательский или практический проект. Это может быть как небольшое исследование, так и анализ реальных данных (образовательных, медицинских и т. п.). Среди поставщиков таких задач будет Международная лаборатория статистической и вычислительной геномики, сотрудничество с которой было начато ещё в прошлом году, и другие партнёры. Часть задач будет предложена самим преподавателем. На семинаре также планируются доклады приглашённых специалистов, применяющих непараметрику на практике (социологи, медицинские статистики, аналитики, специалисты по психометрии). О каждой такой лекции будет сообщаться заранее.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовые знания по дискретной математике, линейной алгебре, математическому анализу и теории вероятностей. Значительно проще будет имеющим определенный бэкграунд в статистике, однако он необязателен: основные определения будут даны по ходу курса и в целом критичные для понимания курса знания ограничиваются школьной программой.

ПРОГРАММА.

1. Задача о дихотомических данных: биномиальный критерий.
2. Одновыборочная задача о положении (сдвиге): анализ повторных наблюдений с помощью знаковых рангов (свободный от распределения критерий знаковых рангов Уилкоксона), анализ повторных парных наблюдений с помощью знаков (свободный от распределения критерий знаков Фишера), анализ данных одной выборки.
3. Двухвыборочная задача о положении (сдвиге): свободный от распределения критерий знаковых ранговых сумм Уилкоксона, оценка Ходжес – Лемана.
4. Двухвыборочная задача о рассеянии (масштабе): свободный от распределения ранговый критерий Ансари – Брэдли, свободный от распределения критерий Мизеса.
5. Критерии согласия: χ^2, Колмогорова – Смирнова и др.
6. Однофакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критериии Краскела – Уоллиса, Джонкхиера – Терпстры
7. Двухфакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критерии Фридмана, Кендала и Бэбингтона Смита, свободные от распределения критерии для альтернатив с упорядочиванием Пейджа.

8. Корелляции Пирсона, Спирмена, Кендэла. Свободный от распределения критерий независимости Кендэла.
9. Коэффициенты согласованности: альфа-кронбаха, омега-макдональда, коэффициент конкордации. Применение этих коэффициентов к анализу психометрических данных.
10. Сравнение двух вероятностей успеха(таблицы сопряжённости). Критерий однородности χ^2, критерий независимости χ^2. Тест Мак – Нимара. Точный тест Фишера.
11. Задача о регрессии и угле наклона. Метод Тейла. Оценка угла наклона методом тейла. Свободный от распределения критерий параллельности двух регрессионных прямых. Введение в ядерную регрессию.
12. Анализ выживаемости. Кривая выживаемости, оценка методом Каплана – Мейера. Критерий Гехана.
13. Понятие номинального признака. Анализ таблиц сопряженности. Величина φ^2. Коэффициент Кетле и φ^2. Метод анализа соответствий (Correspondence analysis) и эквивалентные методы оцифровки.
14. Другие темы связанные с непараметрической статистикой, интересные слушателям, которые получится успеть пройти.

УЧЕБНИКИ.

1. М. Холландер, Д. Вульф Непараметрические Методы Статистики. Перевод с английского Д. С. Шмерлинга. 1983
2. Nonparametric Statistical Methods. Third Edition. Myles Hollander, Douglas A. Wolfe, Eric Chicken. 2014
3. S. Glanz Medical and Biological Statistics (1998)
4. T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman, The Elements of Statistical Learning Data Mining, Inference, and Prediction. (2001)

Дополнительная литература:

1. Mirkin, B. (2019). Core data analysis: Summarization, correlation, and visualization. Cham: Springer International Publishing.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка равна $\alpha \cdot \min(10;\ 0.5 \cdot \text{ДЗ} + 0.3 \cdot \text{ЭК} + 0.3 \cdot \text{ИР} + 0.1 \cdot \text{СЕМ})$, где

- ДЗ — домашние задания. За сдачу задания в течение недели после дедлайна вы получите 0.8 результата, а после лишь 0.4.
- ЭК — экзамен.
- ИР — индивидуальная работа: доклад со статьёй или проект. В некоторых случаях, если полученный в рамках проекта результат потребовал очень больших затрат и/или получившийся результат является очень значимым вес этой компоненты оценки может быть увеличен.
- СЕМ — работа на семинарах.
- α — коэффициент посещения лекций приглашённых докладчиков. Если Вы посетили большую их часть, то $\alpha = 1$, иначе $\alpha = 0.7$ и относительно Вашей оценки перестают работать правила математического округления.

Если перед экзаменом $0.4 \cdot \text{ДЗ} + 0.4 \cdot \text{ИР} + 0.2 \cdot \text{СЕМ} \geq 8$ (без округления), то можно зачесть себе эту оценку в качестве итоговой и не ходить на экзамен.

Основные понятия математики
трудный дистанционный семинар на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. М. Львовский.

ОПИСАНИЕ. Это семинар для первокурсников, посвящённый тому, как «работает» математика. Мы будем обсуждать темы из самых разных областей — анализа, геометрии, алгебры, комбинаторики, теории чисел и т.п. Доклад по теме длится одно занятие, в редких случаях — два. Некоторые доклады делают руководители семинара, некоторые — слушатели, некоторые — приглашённые докладчики.

Семинар позволит слушателям ещё раз ощутить красоту и разнообразие математики; он также может помочь в выборе темы и руководителя курсовой работы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Нет никаких, это семинар для начинающих.

ПРОГРАММА.

- Разрезание четырехмерного куба трехмерной пилой: что получится в сечении?
- Квадратичный закон взаимности: квадратные корни по модулю простого числа.
- Как решать кубические уравнения и почему этого никогда не делают.
- Парадокс Банаха – Тарского: разрезание шара на конечное число кусков, из которых можно сложить четыре шара такого же радиуса.
- Теорема Эрроу о диктаторе (невозможность идеальной системы голосования по нескольким кандидатурам) и нестандартный анализ (в котором есть бесконечно малые числа).
- Пентагональное тождество Эйлера.
- Три взаимосвязанных теоремы из топологии: теорема Брауэра о неподвижной точке, основная теорема алгебры и теорема о причесывании ежа.

УЧЕБНИКИ. Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика», М., МЦНМО, 2000 или http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.pdf. Также по каждой из тем есть своя литература.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка за курс совпадает с оценкой за итоговую контрольную.

КОММЕНТАРИИ. НИС проходит полностью онлайн.

Основные приложения математики
простой дистанционный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Прикладная математика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. М. Львовский.

ОПИСАНИЕ. На этом НИСе различные приглашенные докладчики будут рассказывать о том, как применяется математика в их профессии, будь то другая наука или более практическая деятельность.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Математические курсы матфака НИУ ВШЭ за первые два года.

ПРОГРАММА. Программа определяется выбором докладчиков.

УЧЕБНИКИ. В силу специфики НИСа список литературы предоставить невозможно.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценки за НИС получаются следующим образом. Студент, желающий получить оценку, должен договориться с одним из докладчиков, получить от него/нее задание (докладчик вправе отказать студенту без объяснения причин) и выполнить это задание. После этого докладчик выставляет студенту оценку по 10-балльной шкале.

Поверхности и многомерная алгебраическая геометрия
трудный межкампусный спецкурс на русском для 4-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Е. Ю. Америк.

ОПИСАНИЕ. Курс обращен к студентам, которые слушали "Алгебраическую геометрию - схемы, пучки, когомологии" или каким-то другим образом овладели языком алгебраической геометрии, а теперь хотят позаниматься собственно геометрией

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Вне стандартной бакалаврской программы - курс "Алгебраическая геометрия 1 и 2" или знакомство со стандартным учебником типа Хартсхорна

ПРОГРАММА.

- Поверхности, общие сведения: пересечение на поверхности, формула Римана – Роха, теорема Ходжа об индексе
- Теорема Кастельнуово о стягивании, «программа минимальных моделей» для поверхностей
- Размерность Кодаиры, классификация Кодаиры – Энриквеса, кое-что об отдельных типах поверхностей, связанные с этим геометрические конструкции (вроде проективных расслоений)
- Введение в многомерную программу минимальных моделей: bend-and-break, теорема о конусе, теорема Каваматы о свободе от базисных точек
- Если успеем, что-нибудь о деформациях рациональных кривых (рационально связные многообразия, теорема Грабера – Харриса – Старра о сечении?.)

Все это очень приблизительно! Буду еще думать!

УЧЕБНИКИ.

- Р. Хартсхорн, Алгебраическая геометрия
- A. Beauville, Complex algebraic surfaces
- O. Debarre, Higher-dimensional complex geometry

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка складывкается из промежуточного контроля с весом 0,5 и экзамена с весом 0,5

Представления и вероятность
простой межкампусный семинар на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Вероятность и стохастическая динамика», «Представления и инварианты».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Дымов, А. В. Клименко, М. Мариани, Г. И. Ольшанский.

ОПИСАНИЕ. Семинар в основном предназначен для студентов 3-4 курса бакалавриата, магистрантов и аспирантов. Тематика семинара объединяет современные результаты в области вероятности и случайных процессов, динамических систем, представлений, а также служащих для них основной более старые сюжеты в этих областях. Мы предполагаем, что старшие участники, специализирующиеся по тематике семинара, выступят на нём с докладом.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартные курсы математического анализа (включая теорию меры) и теории вероятностей. Знание основ функционального анализа и случайных процессов (в объёме первой части соответствующих курсов матфака) будет полезно (но не необходимо) в осеннем семестре, а знание алгебры (теории представлений в объёме стандартного курса алгебры матфака) — в весеннем. Семестры можно включать в учебный план независимо друг от друга. Предполагается, что осенью занятия будут проходить в МИАН (ул. Губкина, 8), а весной — на матфаке.

ПРОГРАММА. Ниже представлен примерный список тем, которые предполагается обсуждать на семинаре. Подчеркнем, что не все из упомянутых сюжетов будут затронуты, и наоборот, будет затронут ряд не упомянутых сюжетов. Мы предполагаем, что большинство семинаров будут заняты докладами студентов на различные темы, большая часть которых, но не все, будет связанна с представлениями и вероятностью. В осеннем семестре семинар в основном будут вести А. Дымов, А. Клименко и М. Мариани, в то время как весенний семестр по большей части берет на себя Г. Ольшанский.

Ориентировочные темы осеннего семестра:

- Случайные динамические системы и их поведение на больших временах
- Винеровский хаос и нормальная аппроксимация
- Детерминантные случайные точечные процессы
- Теория потенциала для цепей Маркова на пространствах общего вида: формулы представления и приложения
- Экспоненциально растущие группы: свободные, гиперболические, марковские, фуксовы и др. Эргодическая теория их действий

Ориентировочные темы весеннего семестра:

- Классическая теория представлений
- Представления бесконечномерных групп и операторные алгебры
- Связь с алгебраической комбинаторикой (симметрическими функциями), квантовыми группами, классическим анализом и теорией вероятностей

УЧЕБНИКИ.

- И. И. Гихман, А. В. Скороход. «Введение в теорию случайных процессов».
- S. Janson, «Gaussian Hilbert spaces».
- I. Nourdin, G. Peccati, «Normal approximations with Malliavin calculus».
- A. Bovier, F. DenHollander, «Metastability, A Potential – Theoretic Approach».
- I. Seo, «Generalized Dirichlet and Thomson Principles and Their Applications». https://arxiv.org/abs/2102.05538
- P. Etingof et al. «Introduction to representation theory».
- A. Borodin and G. Olshanski, «Representations of the infinite symmetric group».
- P.-L. Meliot, «Representation theory of symmetric groups».
- H. Weyl, «The classical groups: their invariants and representations».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Участники могут сделать доклад на семинаре (такой доклад обычно оценивается в 6-8 баллов итоговой оценки) и/или решать задачи экзамена. Список задач выдаётся для решения примерно за неделю до экзамена. На экзамене студент обсуждает свои решения с преподавателем. Формула для вычисления оценки за экзамен указывается в списке задач к нему.

Преобразование Фурье и его использование: примеры дискретные и непрерывные
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Прикладная математика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Хохлов.

ОПИСАНИЕ. Обучаясь математике, каждый студент неоднократно сталкивается с разложениями в ряды Фурье и интегральными преобразованиями Фурье: при решении дифференциальных и интегральных уравнений, при изучении свойств пределов случайных величин и т. п. Многие физические результаты — как теоретические, так и вполне прикладные — тоже используют идеи, близкие к преобразованию Фурье. В коротком курсе, предназначенном для владеющих основами математического анализа и линейной алгебры, мы проследим происхождение главных формул для преобразования Фурье — от дискретного до интегрального, а также укажем на его связи с быстрыми алгоритмами и преобразованием Радона. С практической стороны будут рассмотрены конкретные вычислительные примеры, возникающие в анализе данных, цифровой обработке звука и изображений, медицинской томографии. В курсе также будут затронуты (по большей части на уровне примеров) и другие связанные со спектральными преобразованиями идеи и формулы функционального анализа и теории обобщённых функций.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Минимальные теоретические требования сводятся к стандартным курсам линейной алгебры и математического анализа первого года бакалавриата. Кроме этого потребуется умение написать простенький (5 – 10 операторов) код на языке типа Python, позволяющий обработать и визуализировать числовой массив.

ПРОГРАММА.

- Функции на конечной циклической группе, оператор сдвига. Частоты.
- Тождество Фурье и идеи предельного перехода в этом тождестве.
- Полосовая фильтрация цифровых сигналов и эффект Гиббса. Вопросы аппроксимации.
- Симметрии и многомерное преобразование Фурье. Обработка видеообразов.
- Топологические абелевы группы и равномерные последовательности. Двойственность Понтрягина.
- Формулы свертки и быстрые алгоритмы.
- Интегральное преобразование и его связь с дискретизацией непрерывного сигнала. Теорема Котельникова – Шеннона.
- Численное интегрирование и разложения в ряды Фурье.
- Поточечные версии тождества Фурье в недискретном случае.
- Соотношения неопределенности в дискретном и непрерывном случае. Теорема Чеботарева.
- Медицинская томография и ее математическое описание. Преобразование Радона.
- Обращение преобразования Радона и некорректные задачи.
- Примеры из теории информации и теории сигналов.

УЧЕБНИКИ.

- E. Candes, «Applied Fourier Analysis and Elements of Modern Signal Proessing», https://candes.su.domains/teaching/math262/
- D. Rockmore, «Recent progress and applications in group FFTS», https://www.cs.dartmouth.edu/~rockmore/nato-1.pdf
- D. Kammler, «A first course in Fourier analysis», CUP, 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка выставляется по проценту решений очной контрольной работы, в которую включаются ранее рассмотренные на занятиях и заданные на дом задачи и упражнения.

Прикладные методы анализа
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Прикладная математика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Забродин, К. П. Зыбин.

ОПИСАНИЕ. Будут изложены методы математической физики, основанные на применении обобщённых функций. Мы рассмотрим теорию потенциала, уравнение теплопроводности, волновое уравнение, солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза и уравнение Кадомцева – Петвиашвили.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. https://math.hse.ru/applied_meth_analysis_zybin_fall22.

ПРОГРАММА.

- Интегралы типа Коши и их граничные значения
- Обобщенные функции
- Гармонические функции
- Теория потенциала
- Цилиндрические и сферические функции
- Уравнение теплопроводности
- Некоторые задачи спектральной геометрии
- Волновое уравнение
- Уравнение Кортевега де Фриза
- Уравнение Кадомцева – Петвиашвили

УЧЕБНИКИ.

- М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функции комплексного переменного, Наука, Москва, 1973
- И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Наука, Москва, 1959
- В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, Наука, Москва, 1985
- А. Н. Тихонов, В. В. Самарский, Уравнения математической физики, Наука, Москва, 1977
- В. И. Арнольд, Лекции об уравнениях с частными производными, Фазис, Москва, 1999

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Две трети — оценки за две контрольные работы, одна треть — за решение домашних задач.

Проективная алгебраическая геометрия 1
простой межкампусный семинар на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров.

ОПИСАНИЕ. В течение последних полувека алгебраическая геометрия оказалась в фокусе всей современной математики, аккумулировав мощнейшие технические средства, обеспечившие колоссальное продвижение в понимании многих труднейших вопросов. Столь бурное развитие имело и оборотную сторону: абстрактная алгебраическая техника в значительной мере вытеснила из поля зрения прозрачные геометрические основания этой науки. Однако, эти основания по-прежнему остаются основным источником алгебро-геометрической интуиции, и потому крайне важны для понимания этой науки. Основная задача семинара — показать студентам младших курсов геометрические истоки алгебраической геометрии. Старшекурсникам, магистрантам и аспирантам, уже обладающим солидной алгебраической подготовкой, наглядное знакомство с ключевыми геометрическими образами несомненно тоже будет полезно.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знание алгебры и геометрии в объеме стандартного курса средней школы.

ПРОГРАММА. 1. Первоначальные свойства проективного пространства; классические задачи проективной геометрии, связанные с теоремами Дезарга, Паппа, Паскаля, Брианшона. 2. Коники на проективной плоскости. Пространство коник, поверхность Веронезе и кубический симметроид в пространстве коник, их интерпретация в терминах семейств коник. 3. Интерпретация евклидовой и неевклидовых геометрий в терминах проективной геометрии; геометричекие задачи, решаемые средствами проективной геометрии. 4. Геометрия кривых на проективной плоскости, теорема Безу, индексы пересечения плоских кривых, правила Цейтена.

УЧЕБНИКИ. И. Р. Шафаревич, «Основы алгебраической геометрии», МЦНМО, 2007

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Накопленная оценка есть среднее арифметическое двух оценок за активность в 1 и 2 модулях, округление в пользу студента. Оценка за активность выставляются с учетом выступлений на семинаре, решения домашних задачи, участия в обсуждении. Для тех, у кого накопленная оценка не менее 6, она совпадает с итоговой. Для тех, у кого накопленная оценка F получается меньше 6, итоговая оценка равна оценке E за заключительную очную контрольную работу, которая будет проводиться в конце семестра только для этой категории слушателей. Оценка E за контрольную находится по формуле: E = MIN(6,F/2 + 6.(число решенных задач в контрольной / общее число задач в контрольной)). Таким образом, максимальная оценка E за контрольную 6 баллов. Итоговый экзамен не планируется.

Проективная алгебраическая геометрия 2
простой межкампусный семинар на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Алгебраическая геометрия».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров.

ОПИСАНИЕ. Это продолжение годового семинара, первый семестр которого описан на предыдущей странице.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знание алгебры и геометрии в объеме стандартного курса средней школы.

ПРОГРАММА.

- Полярное отображение, особенности двойственной проективной кривой, формулы Плюккера для кривой с простейшими особенностями, применение гессиана кривой к исследованию ее свойств, доказательство принципа двойственности.
- Общие свойства линейных рядов. Примеры линейных рядов на плоскости: отображение плоскости линейными рядами кубик, поверхности дель Пеццо, исследование конфигураций прямых на поверхностях дель Пеццо через базисные точки линейных рядов, аналог конструкции Штейнера для кубических поверхностей.
- Применение линейных рядов к описанию раздутий плоскости в конечном множестве точек; примеры: поверхности дель Пеццо.
- Общие, симметрические и антисимметрические детерминантали в проективном пространстве, многообразия Веронезе как симметрические детерминантали минимального ранга, многообразия Сегре как общие детерминантали минимального ранга, проективная конструкция многообразий Сегре, детерминантали высших рангов как многообразия хорд, норммногообразия, их проективная конструкция, гиперквадрики.
- Грассманианы как антисимметрические детерминантали минимального ранга, плюккерово вложение, внутренняя геометрия грассманианов: прямые на грассманианах как базы пучков линейных подпространств, многообразия флагов как графики инциденции.
- Пространственные конфигурации прямых: четверки прямых на квадрике, системы прямых на кубических поверхностях, ассоциированные пятерки прямых в четырехмерном проективном пространстве.

УЧЕБНИКИ. И. Р. Шафаревич, «Основы алгебраической геометрии», МЦНМО, 2007

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Накопленная оценка есть среднее арифметическое двух оценок за активность в 3 и 4 модулях, округление в пользу студента. Оценка за активность выставляются с учетом выступлений на семинаре, решения домашних задачи, участия в обсуждении. Для тех, у кого накопленная оценка не менее 6, она совпадает с итоговой. Для тех, у кого накопленная оценка F получается меньше 6, итоговая оценка равна оценке E за заключительную очную контрольную работу, которая будет проводиться в конце семестра только для этой категории слушателей. Оценка E за контрольную находится по формуле: E= MIN(6,F/2 + 6.(число решенных задач в контрольной / общее число задач в контрольной)). Таким образом, максимальная оценка E за контрольную 6 баллов. Итоговый экзамен не планируется.

Пропозициональные логические системы
трудный межкампусный спецкурс на русском для 1-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Логика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Кудинов.

ОПИСАНИЕ. Математическая логика изучает основания математики, принципы построения формальных математических теорий и их свойства, а также имеет множество приложений в информатике. Математическая логика является необходимой базой для изучения любой другой математической дисциплины. Понимание основных принципов, возможностей и ограничений формального построения математической теории позволяет более глубоко понять многие теоремы алгебры, математического анализа, топологии и других математических дисциплин. Освоение формального языка математики позволит более четко формулировать утверждения и не совершать ошибок в рассуждениях. Целью курса является овладение основными понятиями классического и неклассических (интуиционистской и модальной) пропозициональных логик, а также приобретение навыков работы с формальными аксиоматическими системами.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Предварительных знаний не требуется.

ПРОГРАММА.

- Булевы формулы, индуктивное определение. ДНФ, КНФ, теорема Поста.
- Тавтологии и эквивалентности. Булевы алгебры. Теорема Стоуна о представлении булевых алгебр
- Аксиомы исчисления высказываний. Формальное определение вывода, как математической модели доказательства.
- Теорема о дедукции. Противоречивость.
- Независимость аксиомы исключенного третьего и многозначная логика.
- Теорема о полноте исчисления высказываний.
- Теорема о компактности и ее следствия
- Интуиционистская логика: история, аксиоматика
- Семантика Крипке интуиционистской логики и теорема корректности.
- Полнота интуиционистской логики по Крипке
- Модальная логика, язык и семантика Крипке
- Корректность модальной логики относительно семантики Крипке
- Булевы алгебры с оператором, как семантика модальной логики.
- Теорема о канонической модели и теорема о полноте.

УЧЕБНИКИ.

- Н. К. Верещагин, А. Шень «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления.» М.: МЦНМО, 2017.
- С. П. Одинцов, С. О. Сперанский, С. А. Дробышевич, «Введение в неклассические логики», Новосибирск, 2014 https://homepage.mi-ras.ru/~speranski/courses/non-cl-2020-autumn/textbook.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Вычисляется по формуле $0,6H+0,4E$, где H — средняя оценка за домашние задания, E — оценка за устный экзамен.

Риманова геометрия
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Пенской.

ОПИСАНИЕ. Риманова геометрия занимается изучением многообразий, снабжённых римановой метрикой. С одной стороны, это важнейший раздел дифференциальной геометрии, изучающий касательное расслоение с евклидовой метрикой в нем, с другой стороны, это глубокое обобщение евклидовой геометрии аффинных пространств на случай многообразий, где появляется кривизна, и многие простые вещи становятся неочевидными.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Анализ на многообразиях (совершенно необходим, мы начнем использовать многообразия с самого начала курса), дифференциальная геометрия (мы напомним необходимые определения, но без опыта решения задач на курсе дифференциальной геометрии будет тяжело), алгебраическая топология (желательно, так как в паре мест может понадобиться фундаментальная группа, гомотопические группы, (ко)гомологии).

ПРОГРАММА.

- Римановы многообразия, риманова метрика, связность Леви – Чивиты.
- Параллельный перенос. Геодезические, экспоненциальное отображение, геодезические координаты.
- Тензоры кручения и кривизны. Секционная кривизна, тензор Риччи, скалярная кривизна.
- Вариационный подход к геодезическим, функционалы длины и энергии, уравнения Якоби, якобиевы поля, сопряженные точки, минимальность геодезических, множества раздела.
- Римановы накрытия.
- Риманова геометрия поверхностей.
- Изопериметрические неравенства.

УЧЕБНИКИ.

- I. Chavel, «Riemannian Geometry. A Modern Introduction.», 2nd Ed.
- Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, «Введение в риманову геометрию».
- Дж. Милнор, «Теория Морса».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0,4 * оценка за контрольную + 0,1 * оценка за работу на семинарах + 0,5 * оценка за письменный экзамен

Римановы поверхности, тэта-функции и нелинейные уравнения
простой межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы», «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

ОПИСАНИЕ. Исторически возникшие при исследовании задач механики (в первую очередь эллиптических интегралов) римановы поверхности в настоящее время находят всё новые, часто неожиданные приложения в различных областях математики и физики. Например, таких, как динамические системы, конформная теория поля и теория интегрируемых систем, оптимизация, теория чисел, криптография. В прикладных задачах они применяются в экономике, инженерном деле, и даже медицине. Кроме этого, римановы поверхности лежат в основе многих красивых и полезных математических конструкций, а тэта-функции являются удобным инструментом работы на них, хотя и не столь привычным как многочлены или рациональные функции.

На курсе мы познакомимся с понятием римановой поверхности, разберём ряд конструкций и техник с ними связанных, в первую очередь, имея в виду приложения к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений.

От участников семинара предполагается разбор тем и подготовка докладов по программе курса.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Основные курсы комплексного анализа, гладких многообразий и обыкновенных дифференциальных уравнений. Знакомство с римановыми поверхностями приветствуется, но не является обязательным.

ПРОГРАММА.

- Римановы поверхности, гиперэллиптические кривые и их род.
- Мероморфные функции и формы на римановой поверхности. Периоды замкнутых дифференциалов.
- Эллиптические и тэта-функции.
- Дивизоры на римановой поверхности, теорема Римана – Роха.
- Строение римановых поверхностей рода 1, точки Вейерштрасса, их вложение.
- Функции Бейкера – Ахиезера и их приложения к нелинейным уравнениям (КдФ, КП, уравнение Шрёдингера) и коммутирующим дифференциальным операторам.

УЧЕБНИКИ.

- Б. А. Дубровин, «Римановы поверхности и нелинейные уравнения», НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001.
- О. Форстер, «Римановы поверхности», Мир, М., 1980.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценку за НИС можно получить по результатам сделанных докладов или сдачи задач листка.

Симметрические функции
трудный межкампусный спецкурс на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Комбинаторика и маломерная топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: К. Г. Куюмжиян.

ОПИСАНИЕ. Симметрические функции — один из центральных разделов алгебраической комбинаторики. Теория симметрических функций красива сама по себе и имеет многочисленные приложения в теории представлений симметрических и линейных групп, а также в алгебраической геометрии и топологии (однородные пространства и исчисление Шуберта). В этом курсе мы обсудим комбинаторные реализации и алгебраические свойства симметрических функций, установим основные факты про полиномы Шура и объясним, почему они являются характерами представлений группы GL_n и возникают в исчислительной геометрии грассманианов. Если останется время, поговорим и полиномах Шуберта.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знание стандартных курсов алгебры и дискретной математики первого года бакалавриата, опыт вычислений с многочленами от многих переменных, диаграммами Юнга, конечными группами и их подгруппами. Приветствуется знакомство с теорией представлений конечных групп и группы GL_n.

ПРОГРАММА.

- Симметрические многочлены. Кольцо симметрических функций. Диаграммы Юнга. Элементарные симметрические функции. Полные однородные симметрические функции. Степенные суммы.
- Кососимметрические многочлены. Многочлены Шура и функции Шура. Тождества Якоби – Труди. Внутреннее произведение. Косые функции Шура и диаграммы Юнга. Переходы между различными базисами в симметрических многочленах.
- Правило Литтлвуда – Ричардсона. Правило Мурнагана – Накаямы.
- Присоединённые операторы и алгебра Хопфа. Структура алгебры Хопфа на кольце симметрических функций.
- Приложения к теории представлений. Представления конечных групп. Индуцирование и ограничение. Характеры симметрических групп. Модули Шпехта. Представления GL_n.
- Если останется время — многочлены Шуберта.

УЧЕБНИКИ.

- Ian G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. Clarendon Press, 1998. (An expanded Russian translation of the 1st edition available)
- А. Л. Городенцев, «Алгебра — 2». http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- Alistair Savage, Symmetric Functions, lecture notes
- William Fulton. Young tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry. CUP, 1997 (Russian translation available)
- Laurent Manivel. Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Société Mathématique de France, 1998. (English translation available)
- Allen Knutson. Schubert polynomials and symmetric functions, lecture notes.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.6 Накоп + 0.4 Экз. Накоп вычисляется на основании листков: сдача 70% задач во всех листках даёт 100.

КОММЕНТАРИИ. Две пары в неделю: лекция и семинар/сдача листков.

Сложные сети
простой межкампусный семинар на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Комбинаторика и маломерная топология», «Вероятность и стохастическая динамика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: В. Г. Горбунов, Ф. Ю. Ожегов, И. А. Самойленко.

ОПИСАНИЕ. Теория сложных сетей — обширная наука, изучающая графы и их эволюцию. Модели этой теории используются в биологии, машинном обучении, социологии, экономике и т. д. На нашем годовом семинаре обсуждаются основные имеющиеся способы анализа статических и динамических свойств сложных сетей. В начале каждого семестра руководители читают несколько вводных лекций, после чего участники семинара выступают с докладами. В 1 семестре мы введём основные понятия и модели теории сложных сетей, после чего немного углубимся в их теоретико-игровые приложения. Во 2 семестре обсудим сюжеты, связанные со случайными графами и динамикой на сложных сетях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Желательно хотя бы минимальное владение курсами теории вероятностей, дискретной математики, математического анализа и линейной алгебры. Некоторые сюжеты второго семестра требуют знакомства с дифференциальными уравнениями. При необходимости нужные понятия будут напоминаться по ходу дела.

ПРОГРАММА.

1 семестр

1. Введение. Основные понятия теории сложных сетей (степень вершины, центральности, мотивы, структуры сообществ, спектр графа).
2. Топологические свойства реальных сетей.
3. Основные модели сложных сетей.
4. Теоретико-игровые модели сложных сетей (образования и динамики). Мэтчинги и паросочетания.

2 семестр

1. Случайные графы, основные модели (Эрдеш–Реньи, предпочтительное присоединение и т. д.) и их свойства.
2. Процессы распространения в сетях.
3. Синхронизация и коллективная динамика, основная функция устойчивости.
4. Алгоритмы поиска структур в сообществах и гиперграфах.

Темы могут варьироваться в зависимости от запроса слушателей.

УЧЕБНИКИ.

- Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D. U. Complex networks: Structure and dynamics. Physics reports (2006) 424 (4-5), 175-308.
- Chung F. et al. Complex graphs and networks. – American Mathematical Soc., 2006, No. 107.
- Newman, M. E. (2003). The structure and function of complex networks. SIAM review 45(2), 167-256.
- Харари, Фрэнк. Теория графов (1973).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Каждому участнику семинара необходимо сделать доклад, по результатам которого и будет сформирована итоговая оценка.

КОММЕНТАРИИ. Это студенческий семинар НУЛ сложных сетей, гиперграфов и их приложений. Сразу после студенческого НИС обычно происходит рабочий научный семинар лаборатории. Кроме докладов участников семинара и сотрудников лаборатории планируются лекции приглашённых специалистов.

Современные динамические системы
трудный межкампусный семинар на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Геометрия и топология», «Вероятность и стохастическая динамика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: С. К. Ландо, А. С. Скрипченко.

ОПИСАНИЕ. В курсе будет дан обзор наиболее ярких результатов последних тридцати лет, полученных в маломерной топологии, теории чисел и геометрии методами теории динамических систем, а также классических задач динамики, решение которых потребовало привлечения инструментов из комбинаторики, теории вероятностей и других областей. Мы планируем начать с простых и понятных примеров и дойти до достаточно свежих работ А. Авилы, А. Эскина, М. Мирзахани, К. МакМаллена, Г. Маргулиса и других выдающихся современных математиков.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Теория меры, топология – 1, основы дифференциальной геометрии.

ПРОГРАММА. Курс включает в себя следующие разделы:

- Введение: мы рассказываем о динамических системах, опираясь на два простых классических примера — поворот окружности и цепные дроби.
- Динамика и геометрия: мы показываем, как динамические методы применяются при изучении поверхностей постоянной отрицательной кривизны; изучаем динамику геодезического потока и знакомимся с гиперболической динамикой;
- Динамика, эргодическая теория и топология: в этом разделе мы знакомимся с базовыми понятиями эргодический теории и используем их для изучения бильярдов в многоугольниках и измеримых слоений на ориентируемых поверхностях.
- Динамика и теория чисел: этот раздел посвящен однородной динамике и ее приложениям к известным гипотезам в теории чисел — гипотезе Оппенхайма (доказана Г. Маргулисом) и гипотезе Литтлвуда (открыта).
- Динамика и анализ: этот блок посвящён оператору переноса и его спектральным дырам и связан с аналитическими и численными подходами к построению инвариантных мер.

УЧЕБНИКИ.

- S. Katok. Fuchsian groups. University of Chicago, 1992 (русский перевод: М., Факториал, 2002)
- Ya. Sinai. Introduction to ergodic theory. Princeton University, 1977.
- W. Thurston. Geometry and topology of three-manifolds, Princeton University, 1997 (русский перевод: М., МЦНМО, 2001).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка за курс является суммой оценок за домашние задания (ожидается три листка суммарным весом не менее 8 баллов), оценки за устное выступление (не менее 4 баллов) и экзамена. Выступившие с докладом и/или решавшие домашние задания могут не сдавать экзамен, если накопленная оценка их устраивает.

Современные проблемы анализа
трудный межкампусный дистанционный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Анализ», «Вероятность и стохастическая динамика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Колесников, Е. Д. Косов, С. В. Шапошников.

ОПИСАНИЕ. НИС задуман как вводный курс в современные методы анализа. Последний понимается в широком смысле этого слова, так как вопросы, которые мы собираемся обсуждать, затрагивают многие смежные дисциплины: теорию вероятностей, уравнения в частных производных, оптимизацию, геометрию. Предполагается, что часть семинаров будет отведена на вводные лекции, часть на доклады приглашенных экспертов с рассказом о современном состоянии и того или иного направления, и еще часть на доклады студентов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курс анализа в объеме первых двух лет обучения, знакомство с основами теории вероятностей. Желательно знакомство с уравнениями в частных производных.

ПРОГРАММА.

1. Задача Монжа – Канторовича и приложения
   (а) Постановка задачи, существование решения, расстояние W_p, оптимальные отображения.
   (б) Задача Канторовича со многими маргиналами, барицентры мер
   (в) Обобщения транспортной задачи (нелинейная и слабая транспортная задачи)
   (г) Оптимальный транспорт и кривизна, пространства CD(K,N)
2. Варианты неравенства Брунна – Минковского, выпуклая геометрия и смежные вопросы
   (а) Неравенство Брунна – Минковского, изопериметрическое неравенство, неравенства Соболева
   (б) Вероятностные неравенства: логарифмическое неравенство Соболева, неравенства концентрации
   (в) Открытые вопросы: проблема логарифмического неравенства Минковского
   (г) Продвинутая выпуклая геометрия: смешанные объемы, valuations
   (д) Стохастическая локализация и прогресс в доказательстве гипотезы КЛС
3. Регулярность дважды дивергентных эллиптических уравнений
   (а) Принцип максимума А. Д. Александрова. Существование плотности у решения.
   (б) Непрерывность решений. Неравенство Харнака.
   (в) Преобразование Звонкина и добавление членов первого и нулевого порядка.
4. Принцип суперпозиции для уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова.
   (а) Уравнение непрерывности. Принцип суперпозиции Л. Амброзио. Применение к проблеме единственности.
   (б) Мартингальная задача и уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова. Единственность решений.
   (в) Вероятностное представление решений уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова.
5. Приближение моментов случайных векторов эмпирическими моментами и метод чейнинга.

   (а) Метод чейнинга, энтропия, оценка Дадли
   (б) Функционалы и подход Р. ван – Ханделя
   (в) Теорема Рудельсона для приближения ковариационной матрицы, логарифмически вогнутый случай

6. Вокруг проблемы Кадисона – Зингера и теоремы Маркуса – Спилмана – Сриваставы
   (а) Нахождение операторных подматриц с заданными свойствами: теоремы Бургейна–Цафрири и Батсона – Спилмана – Сриваставы
   (б) Теорема Маркуса – Спилмана – Сриваставы: схема доказательства и приложения

УЧЕБНИКИ.

- В. И. Богачев, А. В. Колесников, С. В. Шапошников «Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки», 2024
- Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М., Шапошников С. В. «Уравнения Фоккера – Плагка – Колмогорова», 2013.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Для оценки за семинар достаточно сделать доклад. Кроме этого, можно получить оценку, решая задачи из заданного списка по темам семинара.

Современные проблемы математической логики
простой межкампусный дистанционный семинар на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Логика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Кудинов, Д. С. Шамканов, В. Б. Шехтман.

ОПИСАНИЕ. Математическая логика представляет собой широкий спектр дисциплин, движимых интересом к основаниям математики, а также множеством различных приложений в таких областях как информатика, лингвистика и философия. Данный научно-исследовательский семинар призван познакомить слушателей с различными задачами и проблемами современной математической логики, показать как классические результаты, так и продвижения последнего времени в данной области.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знание логики в рамках обязательного курса «Логика и алгоритмы» или любого другого логического курса: «Элементы математической логики», «Введение в теорию моделей» и др.

ПРОГРАММА. Доклады на семинаре будут касаться таких тем как модальная логика, теория доказательств, лямбда-исчисление, теория индуктивных определений, семантика компьютерных языков и т.п. Возможные темы докладов:

- эпистемические логики,
- циклические выводы в модальной мю-логике,
- формальная арифметика и вторая теорема Гёделя о неполноте,
- логика доказуемости,
- генценовское доказательство непротиворечивости формальной арифметики,
- теоремы Шаврукова об алгебрах доказуемости формальных теорий,
- интуиционистская логика,
- теоремы Руитенбурга для интуиционистской логики,
- игровая семантика для модальной логики Гжегорчика,
- теорема Зиглера о неразрешимости некоторых теорий полей,
- элементы теории типов,
- циклические и нефундированные выводы в арифметике Пеано.

УЧЕБНИКИ.

- Справочная книга по математической логике. Ред. Дж. Барвайс.
- Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (в трех частях).
- С. П. Одинцов, С. О. Сперанский, С. А. Дробышевич. Введение в неклассические логики. Учебное пособие.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. В каждом семестре оценка совпадает с накопленной. Если участник сделал доклад, то его накопленная оценка - 10. Если нет - оценка равна оценке за итоговый коллоквиум.

КОММЕНТАРИИ. Научно-исследовательский семинар рассчитан на студентов второго курса и старше, но в нем также могут принять участия особо заинтересованные первокурсники.

Специальные функции
трудный межкампусный дистанционный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Анализ», «Дифференциальные уравнения и интегрируемые системы».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. М. Хорошкин.

ОПИСАНИЕ. Предлагается общедоступное введение в теорию специальных функций гипергеометрического типа. Сюда входят, в частности, гипергеометрическая функция Гаусса и функции, полученные преобразованиями вырожденных геометрических функций (функции Бесселя, Эйри и др.), а также их дальнейшие обобщения: базисные (q) гипергеометрические ряды, эллиптические гипергеометрические функции и интегралы. Вслед за элементарными функциями, они входит в багаж знаний образованного математика, физика, химика. В исследовании свойств специальных функций проявляется изящество методов, совмещающих средства действительного и комплексного анализа, дифференциальных и разностных уравнений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартные обязательные курсы анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений и ТФКП в объёме первых двух лет балакавриата.

ПРОГРАММА.

- Гамма функция Эйлера и связанные с ней интегралы. Дзета функция Римана.
- Классическая гипергеометрическая функция: интегральные представления, гипергеометрические тождества, соотношения смежности, ортогональные многочлены Якоби, гипергеометрическое уравнение по Риману.
- Вырожденное гипергеометрическое уравнение. Асимптотические свойства решений. Функции Уиттекера, Лежандра, Эйри, Бесселя.
- * Многократные гамма-функции Барнса. Двойной синус и «квантовый дилогарифм».
- * Специальные функций в теории представлений групп Ли.
- * Гипергеометрические интегралы. Интегралы Сельберга, Густафсона. Интегральные соотношения Райнса.

УЧЕБНИКИ.

- Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа. Том 2.
- Аски, Рой, Эндрюс. Специальные функции.
- Виленкин., Специальные функции и теория представлений.
- Гаспер, Рахман. Базисные гипергеометрические ряды. М., Мир, 1993.
- В. П. Спиридонов. Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций. Успехи математических наук, 63:3 (2008), 3 – 72.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Работа на семинаре 4, первая контрольная 2, вторая контрольная 2, экзамен 5. Если сумма превышает 10, результат уменьшается до 10.

Статистическая механика
простой межкампусный спецкурс на английском для 4-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Вероятность и стохастическая динамика», «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: С. Бернардан, М. Мариани.

ОПИСАНИЕ. В XX веке статистическая механика была формализована в математическую теорию, ставшую основным инструментом исследования динамических систем и множества прикладных задач, связанных со статистикой. Курс является введением в математический аппарат статистической механики и иллюстрирует его на важных и интересных примерах.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Теория меры, теория вероятностей.

ПРОГРАММА.

- Почему статистическая механика? [R]
- Статистическая механика решетчатых систем и меры Гиббса. [FV]
- Фазовые переходы в модели Изинга. [FV]
- Теоремы Мермина – Вагнера. [FV]
- Неупорядоченные системы. [B]
- Случайные полимеры. [G]
- Гауссово свободное поле. [FV]

УЧЕБНИКИ.

[FV] S. Freidli, Y. Velenik, Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction (2017).

[B] A. Bovier, Statistical Mechanics of Disordered Systems (2006).

[R] D. Ruelle, Chance and Chaos (1993).

[G] G. Giacomin, Random Polymers models (2007).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0,2 домашние задания + 0,35 промежуточный коллоквиум + 0,45 выпускной экзамен

Статистическая физика в точнорешаемых моделях
трудный межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. М. Поволоцкий.

ОПИСАНИЕ. Статистическая физика — наука о случайных системах, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой компонентов, предлагающая универсальные инструменты объяснения их макроскопического поведения, исходя из их микроскопической структуры. Она позволяет строить термодинамическое описание таких систем, объяснять такие явления, как фазовые переходы, образование макроскопических структур и форм, описывать флуктуации макроскопических наблюдаемых и корреляции между ними. В курсе планируется разбор базовых принципов статистической физики на примере идеализированных точнорешаемых математических моделей равновесной и неравновесной статфизики. При этом упор будет сделан на методы математической физики, развитые для точного решения таких таких моделей, включающие элементы из таких областей, как алгебра, комбинаторика, теория графов, теория интегрируемых систем.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Предполагается знание матанализа, линейной алгебры, ТФКП, теория рядов фурье и владение базовыми навыками из алгебры, комбинаторики и теории вероятности.

ПРОГРАММА.

- Базовые сведения из термодинамики и статистической физики: понятие о термодинамических потенциалах и статистических ансамблях
- Модель нард: Эквивалентность и неэквивалентность ансамблей. Конденсация Бозе – Энштейна в игрушечном примере.
- Модель Изинга на полном графе и теория фазовых переходов в приближении среднего поля.
- Модель Изинга на дереве Кэйли.
- Одномерная модель Изинга. Метод трансфер матрицы. Невозможность фазовых переходов в $d = 1$.
- Двумерная модель Изинга. Вычисление критических индексов. Контурный метод. Метод свободных фермионов.
- Модель случайных кластеров Фортуина – Кастеляйна и бихроматический многочлен. Связанные модели: модель Поттса, модели петель, перколяция, остовные деревья.
- Модель димеров на квадратной решетке и ацтекском ромбе.
- Модель льда и анзац Бете.
- Одномерные модели неравновесных решеточных газов.

УЧЕБНИКИ.

- Бэкстер, Р. (1985). Точно решаемые модели в статистической механике, Мир, Москва.
- Белавин, А. А., Кулаков, А. Г., Усманов, Р. А. (2013). Лекции по теоретической физике. Учебное пособие.
- Lavis, D., Bell, G. M. (2013). Statistical Mechanics of Lattice Systems: Volume 1: Closed – Form and Exact Solutions. Springer.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. $\min(100, H + E)\ /\ 10$

Стохастический анализ и приложения
трудный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Вероятность и стохастическая динамика», «Прикладная математика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Колесников.

ОПИСАНИЕ. Курс представляет собой введение в стохастический анализ. Слушатели познакомятся с техникой стохастического интегрирования и основными результатами теории диффузионных процессов. В курсе также будут затронуты приложения: элементы финансовой математики (опционы, формула Блэка – Шоулза), а также приложения к нейросетям (диффузионные модели).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Хорошее владение теорией вероятности в объеме вводного курса, а также математическим анализом (в особенности теорией меры и интеграла)

ПРОГРАММА.

- Условные распределения. Многомерные гауссовы распределения, слабая сходимость мер, законы 0-1, лемма Бореля – Кантелли.
- Винеровский процесс. Броуновское движение и его математическая модель. Исторический экскурс — работы Эйнштейна и Башелье.
- Доказательства существования винеровского процесса (обзорно). Винеровский процесс как предел случайных блужданий.
- Случайное блуждание и винеровский процесс. Принцип отражения, комбинаторный подход. Распределение максимума на отрезке, возвращение процесса в точку старта и другие свойства траекторий.
- Моделирование финансовых активов. Теория арбитража для дискретного времени. Опционы и другие ценные бумаги. Одношаговая биномиальная модель. Многошаговая биномиальная модель и формула CRR.
- Элементы теории мартингалов (дискретное время). Первая фундаментальная теорема. Полнота рынка. Вторая фундаментальная теорема. Модель CRR и сходимость к модели Блэка – Шоулза.
- Мартингалы с непрерывным временем. Марковские моменты. Мартингальные неравенства.
- Стохастический интеграл. Стохастический интеграл как мартингал. Формула Ито.
- Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). Процесс Орнштейна – Уленбека. Теорема о существовании и единственности решений.
- Марковские свойства решений стохастических дифференциальных уравнений.
- СДУ и уравнения в частных производных. Прямое и обратное уравнения Колмогорова.
- Приложения СДУ к нейросетям. Диффузионные модели.

УЧЕБНИКИ.

- Elliot R. J., Kopp P. E., Mathematics of financial markets, 2004.
- Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS Graduate Studies in Mathematics. Vol. 43. 2002.
- R. Grimmet, D. Stirzacker, One thousand exercises in probability. Oxford University Press; 1st edition (2001)

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. В течение семестра студентам предлагается решать задачи из двух листков. Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по следующей формуле (E*0.4 + H*0.06) где E - это оценка за письменный экзамен, а H - процент правильно решенных задач в течение семестра.

Структура Ходжа и A-дискриминант аффинной гиперповерхности
простой межкампусный спецкурс на английском для 3-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебраическая геометрия», «Комбинаторика и маломерная топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 4-й модуль 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 2 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. Танабэ.

ОПИСАНИЕ. Курс посвящён гомологическим инвариантам гладких аффинных гиперповерхностей в алгебраическом торическом многообразии и их пространствам модулей. Материал курса служит необходимым пререквизитом для тех, кто собирается заниматься зеркальной симметрией, инвариантами Громова – Виттена, Γ-классами Галкина – Голышева – Иритани и т. п. Курс состоит из двух частей. В первой мы напомним основные факты из торической геометрии, нужные для описания смешанной структуры Ходжа на аффинной гиперповерхности, и введём на когомологиях такой гиперповерхности ходжеву и весовую фильтрации, несущие ключевую информацию о монодромии. Они допускают комбинаторные описания в терминах веера торического многообразия и многогранника Ньютона гиперповерхности. В заключение первой части мы рассмотрим кольцо Стэнли – Рейснера, описывающее когомологии гиперповерхности в терминах порождающих классов. Вторая часть курса посвящена изучению пространства модулей аффинных гиперповерхностей на языке A-дискриминантов и A-дискриминантных множеств Гельфанда – Зелевинского – Капранова. A-дискриминант описывается посредством вторичного многогранника, который строится по регулярным триангуляциям многогранника Ньютона. В качестве приложения мы обсудим области сходимости A-гипергеометрических рядов. Такой подход к пространству модулей аффинных гиперповерхностей особенно полезен при описании глобальной монодромии в гомологиях гиперповерхности и широко применяется в гомологической зеркальной симметрии. В заключение мы обсудим амёбы A-дискриминантных множеств — активно исследуемые сейчас объекты, служащие мостом между торической и тропической геометрией.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Коммутативная алгебра в объёме гл. 1 «Кольца и идеалы», гл. 2 «Модули», гл. 10 «Пополнения» и гл. 11 «Теория размерности» из учебника Атьи и Макдональда «Введение в коммутативнвую алгебру».

ПРОГРАММА.

- Градуированное кольцо многочленов. Многочлены Эрхарта. Эйлерова характеристика аффинной гиперповерхности.
- Многочлен Лорана, невырожденный по отношению к своему многограннику Ньютона. Якобиево кольцо многочлена Лорана. Комплекс Кошуля, определенный якобиевым идеалом многочлена Лорана.
- Смешанная структура Ходжа когомологии аффинной гиперповерхности. Ходжева и весовая фильтрации когомологии. Примитивная часть когомологии.
- Кольцо Стэнли – Рейснера и когомология аффинной гиперповерхности.
- Регулярная триангуляция многогранника. Вторичный многогранник. A-дискриминант аффинной гиперповерхности. Вторичный веер.
- A-гипергеометрические функции Гельфанда – Зелевинского – Капранова. Области сходимости A-гипергеометрических рядов. A-Дискриминантное множество аффинного алгебраического многообразия. Униформизация Горна – Капранова A-дискриминантного множества. Главный A-дискриминант и амёбы.

УЧЕБНИКИ.

- В. И. Данилов, Геометрия торических многообразий, УМН. 1978.
- W. Fulton, Introduction to toric varieties .
- D. Cox, J. Little, H. Schenck, Introduction to toric varieties .
- V. V. Batyrev,Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori, Duke Math.J., 1993, 69 (2): 349-409.
- И. М. Гельфанд, М. М. Капранов, А. Зелевинский, Гипергеометрические функции и торические многообразия, ФАП. 1989, 23(2): 12-26.
- I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants, and Multidimensional determinants. Birkhaeuser 1994.
- D. Cox, S. Katz, Mirror symmetry and Algebraic Geometry, Math Surveys and Monographs, Vol. 68, AMS, RI Providence, 1999 .
- Т. М. Садыков, А. К. Цих, Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных, М. Наука 2014.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по правилам: 60% — решения домашних заданий, 40% — решения экзаменационных задач. В обоих случаях решения будут сдаваться в письменной форме. В течение курса лекций распространяться будут больше десяти домашних задач. Балл за решение варьируется от 5 до 15 в зависимости от сложности задачи. Если кто-то наберёт 100 баллов за решения домашних задач, то он получит полное 60%, предназначенное для данной части оценки.

Теория игр

простой межкампусный спецкурс на английском для 2-го курса и старше

(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Прикладная математика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. С. Панов.

ОПИСАНИЕ. Теория игр берет свое начало в 1944 с совместной книги Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна. С тех пор теория игр получила большое развитие в вычислительной математике, общественных науках, биологии. Методы теории игр стали повсеместно использоваться во многих прикладных областях. В этом курсе мы обсудим основные понятия и решения теории игр, область их применимости, их слабые и сильные стороны.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовый курс математической логики.

ПРОГРАММА.

- Статические игры. Равновесие Нэша. Последовательное удаление доминируемых страгеий.
- Динамические игры. Секвенциальное равновесие.
- Самоподдерживающиеся соглашения в играх в непрерывном времени.
- Равновесия в сигнальных играх.
- Проблема торга.
- Аукционы и дизайн механизмов.
- Мэтчинг.

УЧЕБНИКИ.

- В. И. Данилов «Лекции по теории игр»
- D. M. Kreps «Microeconomic Foundations II.”

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка, F, будет рассчитана по формуле $F = 0.5 \cdot P + 0.5 \cdot E$, где P — это оценка за решение домашних заданий, а E — оценка за итоговый устный экзамен.

КОММЕНТАРИИ. Курс будет читаться блоками. Всего будет 11 учебных блоков с января по середину мая. Блоки будут проходить примерно раз в две недели. Один блок будет состоять из двух пар в пятницу и двух пар в субботу. Экзамен по курс будет во второй половине мая.

Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику
простой межкампусный семинар на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Алгебра и теория чисел», «Прикладная математика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Гриценко.

ОПИСАНИЕ. Теория кодирования возникла в 50-е годы XX века. Первые ее задачи состояли в изучении линейного векторного пространства над простейшим полем из двух элементов как метрического пространства. Для построения подпространств с очень специальными метрическими свойствами — кодов — используются различные алгебраические и геометрические методы. Задачи теория кодирования, совершенно естественные по формулировкам, дают новую базу для изучения основных алгебраических и геометрических структур. Например, структура корней многочленов над конечными полями (один из основных вопросов теории Галуа) отвечает за существование эффективных циклических кодов. Двойственность линейных пространств сводится к парам двойственных кодов. Геометрические структуры (конечные проективные пространства, лагранжианы бинарного и тернарного векторных пространств) отвечают за автодуальные и совершенные коды. Группы автоморфизмов кодов — это основные конечные простые группы. Цель нашего курса в том, чтобы освоить основные алгебраические конструкции (конечные поля, кольца и фактор-кольца, модули, двойственность), включая основные результаты теории Галуа над конечным полем, на примере внешних для алгебры задач теории кодирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Знакомство только с основными понятиями алгебры такими как конечномерные векторные пространства, кольца, фактор-кольца, поля, многочлены, конечные группы. Доступен для всех, начиная с мотивированных студентов первого курса.

ПРОГРАММА.

- Метрика Хэмминга, бинарное векторное пространство (пространство над полем из двух элементов) как метрическое пространство, разбиение на шары. Группа автоморфизмов бинарного метрического пространства.
- Примеры кодов, линейные коды, совершенные коды.
- Как задать линейный код? Двойственность линейных пространств и классический метод Гаусса в полном его объеме. Автодуальные коды.
- Конечная проективная плоскость Фано. Конечные геометрии (нерешенные проблемы). Совершенный код Хэмминга. Группа автоморфизмов кода Хэмминга — следующая после знакопеременной группы A_5 простая группа.
- Описание метрической характеристики линейного кода методами линейной алгебры. Бесконечная серия кодов Хэмминга.
- Фактор-кольцо по модулю многочлена $x^n - 1$ и циклические коды длины n.
- Неприводимые многочлены над конечным полем. Как их описать?
- Классический круговой многочлен a Φ_n над конечным полем. Автоморфизм Фробениуса. Циклотомические орбиты и один из основных результатов теории Галуа над конечным полем (конструктивное доказательство).
- Определитель Вандермонда как основной инструмент оценки минимальной длины циклического кода.

- Неожиданные являния теории конечных колец: задание идеалов идемпотентами.
- Арифметика квадратичных вычетов, идемпотенты в кольцах Галуа и вычетно-квадратичные коды.
- Совершенный бинарный код Голея, его структура и свойства.

УЧЕБНИКИ.

- **[L]**
- **[B]** Simeon Ball, «A Course in Algebraic Error – Correcting Codes» Compact Textbooks in Mathematics, Springer, 2020.
- Ф. И. Соловьева,«Введение в теорию кодирования», 2006. J. H. van Lint, «Introduction to coding theory» Gr. Texts in Mathem., Vol. 86, 1999.
- **[E]** Noam D. Elkies, «Lattices, Linear Codes, and Invariants» Part I. II, Notices of the AMS vol 47 (2000), N 10–11.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.5*Индивидуальная лабораторная работа + 0.3*Индивидуальное письменное решение дополнительных задач + 0.2*Устный коллоквиум. Если индивидуальная работа оценена в 10 баллов, то устный коллоквиум не является необходимым.

Теория пересечений и характеристические классы
трудный межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Комбинаторика и маломерная топология», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: М. Э. Казарян, С. К. Ландо.

ОПИСАНИЕ. Данный НИС является рабочим семинаром лаборатории кластерной геометрии, на котором разбираются современные результаты в областях, близких к интересам лаборатории: кластерная алгебра, маломерная топология, интегрируемые системы, топологическая рекурсия, многочлены Тома. По форме семинар проходит в виде докладов как приглашенных докладчиков, так и участников семинара. Для студентов участие в семинаре состоит в подготовке доклада с изложением новых результатов других авторов или по своей научной деятельности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Помимо знания математики в объёмах первых двух курсов матфака основным требованием является готовность к восприятию новых знаний и идей

ПРОГРАММА.

- комбинаторика кластерных алгебр, колчанов, мутаций в них и их представлений;
- пуассоновы структуры, связанные с кластерными алгебрами, и их квантования;
- инварианты графов и вложенных графов, связанные с теорией узлов и зацеплений и теорией кластерных алгебр;
- геометрия пространств модулей различных геометрических объектов;
- методы топологической рекурсии;
- структура алгебр Хопфа, ассоциированных с инвариантами графов, вложенных графов и пространств модулей;
- теория особенностей, связанные с ней стратификации пространств модулей и интегрируемые системы;
- геометрические и комбинаторные решения интегрируемых систем.

УЧЕБНИКИ. Ландо С. К., Звонкин А. К. Графы на поверхностях и их приложения

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Вычисляется по формуле $10*I$, где I - коэффициент вовлеченности студента в работу семинара. Основным показателем вовлеченности в работу семинара является подготовленный доклад. В качестве альтернативы полноценному докладу можно рассмотреть краткое сообщение на семинаре, написанное эссе по теме непрочитанного доклада, подготовленные слайды и т.п.

КОММЕНТАРИИ. Это научный семинар Международной лаборатории кластерной геометрии.

Теория представлений
трудный межкампусный дистанционный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Представления и инварианты», «Комбинаторика и маломерная топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.

ОПИСАНИЕ. Мы начнем с известных сюжетов о симметрических многочленах. В частности, будем обсуждать связи симметрических многочленов с теорией представлений симметрической и полной линейной групп и с геометрией многообразий флагов, включая комбинаторные тождества Робинсона – Шенстеда и МакМагона. Дальше перейдем к полубесконечными конструкциями представлений алгебр Гейзенберга и Вирасоро и их приложениями к комбинаторным формулам Эйлера, Якоби и других. Дальнейшая программа семинара будет зависеть от пожеланий и возможностей участников.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Свободное владение материалом алгебры 1-2 курса. Полезно иметь начальные знания по теории представлений конечных групп и по алгебрам Ли.

ПРОГРАММА.

- Теорема о симметрических многочленах. Многочлены Шура и их ортогональность. Формулы Пьери. Многочлены Шура как характеры полной линейной группы.
- Двойственность Шура – Вейля. Характеры представлений симметрической группы. Базис Гельфанда – Цетлина и таблицы Юнга. Соответствие Робинсона – Шенстеда.
- Грассманианы и многообразия флагов. Вложение Плюккера*. Клетки Шуберта. Кольца когомологий многообразий флагов. Классы Черна и эквиванриантные когомологии*. Разрешение Спрингера и соответствие Робинсона – Шенстеда*.
- Геометрические конструкции представлений симметрической и полной линейной группы.
- Пространство полубесконечных форм и пространство Фока. Бозон-фермионное соответствие и симметрические функции. Приложения к комбинаторным тождествам.
- Представления алгебр Гейзнберга, Вирасоро и других в пространстве полубесконечных форм.
- Далее везде

УЧЕБНИКИ.

- Фултон У. «Таблицы Юнга и их приложения в алгебре, геометрии и комбинаторике»
- Фултон У., Харрис Дж. «Теория представлений. Начальный курс. »
- Chriss N., Ginzburg V. «Representation Theory and Complex Geometry»
- Кац В. Г., Райна А., Рожковская Н. А. «Бомбейские лекции о представлениях со старшим весом бесконечномерных алгебр Ли.»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. 0.2(доклад) + 0.8(участие)

Теория солитонов
простой межкампусный спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Математическая физика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. К. Погребков.

ОПИСАНИЕ. Уединённая устойчивая нелинейная волна, позже названная солитоном, впервые была случайно обнаружена экспериментально в 1834 году, и лишь 130 лет спустя, удалось построить математический аппарат для описания подобных явлений. Теория вполне интегрируемых уравнений и систем, созданная трудами П. Лакса, М. Крускала, В. Захарова, Ф. Калоджеро, С. Новикова, Л. Фаддеева и многих других замечательных учёных стала одним из наиболее громких и значительных успехов математической физики второй половины XX века, качественным прорывом в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Именно в рамках этого подхода, не использующего методы теории возмущений, удалось доказать существование солитонных решений, исследовать и описать их динамику.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартные курсы ВШЭ по математическому анализу

ПРОГРАММА. В рамках курса, мы познакомимся с понятием солитона, разберём примеры нелинейных уравнений, обладающих солитонными решениями, рассмотрим общую схему метода. Построим бесконечный набор интегралов движения в инволюции.

В курсе гамильтоновой механики вы могли уже познакомиться с алгебро-геометрическими подходами и методами исследования уравнений движения различных систем. Здесь мы рассмотрим дальнейшее развитие этих идей и техники. Будет исследована алгебра скобок Пуассона, отвечающая приложениям к интегрируемым системам.

УЧЕБНИКИ.

- Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, «Спектральные преобразования и солитоны».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по формуле $0,7H + 0,3E$ H - накопленная оценка и E - экзаменационная оценка (все оценки округляются до ближайшего целого числа). Накопленная оценка пропорциональна числу решенных задач так, что 10 отвечает 75% всех задач плюс бонус за активное участие.

Топологическая обработка данных
простой межкампусный семинар на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Прикладная математика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Г. Горбунов.

ОПИСАНИЕ. Топологический анализ данных (ТДА) это область современной прикладной математики, которая находится на стыке анализа данных, алгебраической топологии, вычислительной геометрии, информатики, статистики и других смежных областей. Основная цель ТДА — использовать идеи и результаты алгебры, геометрии и топологии для разработки инструментов для изучения качественных характеристик данных. Для достижения этой цели необходимы точные определения качественных характеристик, инструменты для их практического расчета и некоторые гарантии надежности этих характеристик. Основные инструменты ТДА, которые будут обсуждаться в курсе, персистентные гомологии и персистентный Лапласиан, основанные на идеях из алгебраической топологии. И тот и другой уже доказали свою эффективность для использования в приложениях, дают понятную теоретическую основу для изучения качественных характеристик данных со сложной структурой, вычислимы с помощью линейной алгебры и устойчивы к небольшим возмущениям во входных данных.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Стандартный курс линейной алгебры и топологии

ПРОГРАММА.

- Симплициальные комплексы.
- Гомологии симплициальных комплексов.
- Теория персистентных модулей.
- Персистентные гомологии фильтрованного симплициального комплекса.
- Персистентный Лапласиан.
- Устойчивость персистентных гомологий и персистентного Лапласиана.

УЧЕБНИКИ. Заметки с основным материалом курса

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка выставляется на основании экзамена по основным понятиям курса и доклада по научной статье или вычислительного проекта по теме курса.

Уравнения в частных производных
простой спецкурс на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Анализ».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Н. Сивкин.

ОПИСАНИЕ. Уравнения с частными производными — важнейший раздел математики, который описывает разнообразные явления в физике и технике, а также имеет множество связей с другими разделами математики, включая геометрию, функциональный и комплексный анализ, случайные процессы. В курсе будут изложены постановки классических задач уравнений математической физики, в том числе волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа. Мы обсудим фундаментальное и слабое решения. Также мы изучим методы исследования задач: метод Фурье, принцип максимума, интегральные оценки, вариационный подход и теорию пространств Соболева.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения.

ПРОГРАММА.

- Физические задачи, приводящие к УрЧП.
- УрЧП первого порядка. Метод характеристик.
- Основные типы линейных УрЧП второго порядка.
- Постановка основных краевых задач. Теорема Коши – Ковалевской.
- Решение уравнения колебаний струны, формула Даламбера. Метод Фурье решения волновых уравнений. Обобщенные решения уравнения колебаний струны.
- Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций этой задачи.
- Решение уравнение теплопроводности методом Фурье и с помощью преобразования Фурье. Формула Пуассона. Принцип максимума.
- Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Распространение волн.
- Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Метод функций Грина решения краевых задач для эллиптических уравнений.
- Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума. Теорема Лиувилля.
- Обобщенные производные и пространства Соболева. Неравенство Фридрихса. Теоремы вложения. Существование решений краевых задач для эллиптических уравнений. Вариационный метод решения эллиптических уравнений. Собственные числа и собственные функции лапласиана.

УЧЕБНИКИ.

- **[V]** В. С. Владимиров, «Уравнения математической физики», М.: Наука, 1988
- **[S]** С. Л. Соболев, «Некоторые приложения функционального анализа в математической физике», М.: Наука, 1988

- **[Il]** А. М. Ильин, «Уравнения математической физики», М.: Физматлит, 2009
- **[Shu]** В. С. Шубин, «Лекции об уравнениях математической физики», М.: МЦНМО, 2003
- **[Ol]** О. А. Олейник, «Лекции об уравнениях с частными производными», М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010
- **[Ev]** Л. К. Эванс, «Уравнения с частными производными», Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003
- **[ShK]** «Сборник задач по уравнениям с частными производными», Под ред. Шамаева А. С. – М.: БИНОМ, 2005

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Оценка вычисляется по формуле:

$L * 0.1 + K * 0.3 + 1 * 0.15 + K2 * 0.15 + Exam * 0.3$

L – это накопленная оценка за письменные опросы на лекциях.

К — оценка за коллоквиум.

К1, К2 - оценки за контрольные работы.

Exam – оценка за экзамен.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
трудный межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКЕ: «Анализ».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. В. Шапошников.

ОПИСАНИЕ. Курс функционального анализа продолжает курс «Введение в функциональный анализ». Будут рассмотрены следующие темы: спектральная теория ограниченных операторов, полинормированные пространства и обобщенные функции, преобразование Фурье, пространства Соболева, неограниченные операторы и полугруппы операторов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Курс опирается на обязательные курсы математического анализа и алгебры и на курс «Введение в функциональный анализ»

ПРОГРАММА.

- Операторы Фредгольма. Индекс оператора и его свойства.
- Самосопряженные операторы. Непрерывные функции от самосопряженного оператора.
- Унитарная эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию.
- Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере.
- Полинормированные пространства. Метризуемость и нормируемость топологии таких пространств. Линейные непрерывные функционалы.
- Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ и сходимость в них. Пространства обобщенных функций.
- Обобщенная производная. Свёртка интегрируемых и обобщенных функций. Фундаментальное решение дифференциального оператора.
- Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}$. Преобразование Фурье функций из $L^2(\mathbb{R})$. Спектр преобразования Фурье.
- Преобразование Фурье обобщенных функций. Существование фундаментального решения. Гипоэллиптичность.
- Пространства Соболева. Описание через преобразование Фурье. Теоремы вложения.
- Неограниченные операторы. Полугруппа операторов. Теорема Стоуна. Теорема Хилле–Иосиды.
- Банаховы алгебры.

УЧЕБНИКИ.

- Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: РХД, 2009.
- Бородин П. А., Савчук А. М., Шейпак И. А. Задачи по функциональному анализу, МЦМНО, 2017.
- Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
- Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
- Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Курс включает лекции и семинары. На семинарах выдаются листки с задачами, часть из которых разбирается на семинаре, а часть является домашним заданием. Оценка за курс складывается из оценки за экзамен и накопленной оценки по формуле 0.5*(Накопленная оценка) + 0.5*(Экзамен), а накопленная оценка складывается из оценки за выполнение домашних заданий и оценки за коллоквиум по формуле 0.6*(домашнее задание) + 0.4*(коллоквиум). Все формы контроля оцениваются от 0 до 10 баллов.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
простой межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Анализ», «Геометрия и топология».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 6 кредитов (по 3 за семестр).

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

ОПИСАНИЕ. Студенты, участвующие в семинаре, делают доклады по функционально-аналитическим аспектам некоммутативной геометрии. Доклады, относящиеся к некоммутативной алгебраической геометрии или к «чистому» функциональному анализу (предпочтительно с алгебраическим или геометрическим ароматом), также приветствуются. Темы для докладов обычно берутся из литературы, но иногда участники рассказывают о своих собственных результатах. Время от времени с докладами выступают руководитель семинара и приглашенные докладчики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Участники семинара должны знать основы алгебры и функционального анализа (в объеме стандартных вводных курсов матфака ВШЭ) и любить какую-нибудь разновидность геометрии или топологии.

ПРОГРАММА. Это не программа в обычном смысле, а, скорее, набор сюжетов (некоторые из которых весьма обширны), который может видоизменяться в соответствии со вкусами участников.

1. Квантовые ограниченные симметрические области и некоммутативный комплексный анализ в духе Л. Л. Ваксмана.

2. Строгое деформационное квантование (M. Rieffel и др.)

3. Деформации C^*-алгебр (в широком смысле).

4. Некоммутативная комплексная аналитическая геометрия (A. Polishchuk, A. Schwarz, P. Smith, M. Khalkhali, G. Landi и др.).

5. Теоретико-операторный подход к некоммутативному комплексному анализу (W. Arveson, G. Popescu и др.).

6. Некоммутативные комплексные структуры и положительные хохшильдовы коциклы (A. Connes, M. Khalkhali, G. Landi и др.).

7. Некоммутативное интегрирование, некоммутативные L^p-пространства.

8. Некоммутативная геометрия (алгебраическая и аналитическая) PI-алгебр.

9. Бивариантная K-теория и бивариантные периодические циклические гомологии (G. Kasparov, J. Cuntz, R. Meyer и др.).

10. C^*-супералгебры (P. Bieliavsky и др.).

11. DQ-модули (M. Kashiwara, P. Schapira).

12. Голоморфные функции нескольких свободных переменных (J. Taylor, D. S. Kaliuzhnyi – Verbovetskyi, V. Vinnikov).

13. Физические аспекты некоммутативной геометрии (в т.ч. системы Боста – Конна).

УЧЕБНИКИ. 1. A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

2. A. Connes, M. Marcolli. Noncommutative geometry, quantum fields and motives. AMS, 2008.

3. L. L. Vaksman. Quantum bounded symmetric domains. AMS, 2010.

4. M. A. Rieffel. Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 506.

5. J. Cuntz, R. Meyer, J. Rosenberg. Topological and bivariant K-theory. Birkhäuser, 2007.

6. D. S. Kaliuzhnyi – Verbovetskyi, V. Vinnikov. Foundations of free noncommutative function theory. AMS, 2014.

7. M. Kashiwara, P. Schapira. Deformation quantization modules. Astérisque No. 345 (2012).

8. K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Birkhäuser, 2002.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Для получения положительной оценки требуется сделать хотя бы один доклад на семинаре в течение семестра. Оценка будет зависеть от качества доклада.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ: СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ
простой межкампусный семинар на русском для 3-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Вероятность и стохастическая динамика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

ОПИСАНИЕ. Одним из мощнейших методов современной теоретической физики является метод функционального интегрирования или, интегрирования по траекториям. Основы данного подхода были заложены Н. Винером ещё в начале XX века, однако наибольшую известность он получил после того, как Р. Фейнман применил данный подход в квантовой механике. В настоящее время функциональный интеграл нашел своё применение в теории случайных процессов, физике полимеров, квантовой и статистической механике и даже в финансовой математике. Несмотря на то, что в ряде случаев его применимость математически строго пока не доказана, данный метод позволяет с удивительным изяществом получать точные и приближённые решения различных интересных задач. Курс посвящён основам данного подхода и его приложениям к теории случайных процессов и квантовой механике. В первой части курса на примере стохастических дифференциальных уравнений будут рассказаны основные идеи данного подхода, а так же различные способы точного и приближённого вычисления функциональных интегралов. Далее в рамках курса будут рассмотрены основные идеи квантовой механики, причем будет рассмотрен как операторный подход, так и подход с использованием функционального интегрирования. Будет продемонстрировано, что с точки зрения формализма описание случайных процессов и описание квантовомеханических систем весьма похоже. Это позволит сделать ряд интересных наблюдений, таких как, например, аналогию между суперсимметричной квантовой механикой и диффузией частицы во внешнем потенциале. В заключительной части курса, в зависимости от интересов аудитории, будет рассказано о различных применениях метода функционального интегрирования, таких как физика полимеров, финансовая математика и др. При наличии времени будет дан обзор более продвинутых сюжетов в данной области, в том числе, интегрирование по грассмановым переменным, вычисление функциональных детерминантов операторов и др.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Базовые курсы анализа, теории вероятностей, ТФКП, классической механики, дифф. уравнений. Желательно, но совершенно не обязательно: классическая теория поля, статистическая механика.

ПРОГРАММА.

- Стохастические дифференциальные уравнения и случайные процессы. Производящий функционал. Марковский (δ-коррелированный) и Гауссов случайные процессы.
- Вероятность перехода и ее представление в виде функционального интеграла. Вычисление простейших функциональных интегралов.
- Вывод уравнения Фоккера — Планка. Некоторые свойства его решений.
- Гауссовы функциональные интегралы и теорема Гельфанда – Яглома.
- Приближенное вычисление некоторых функциональных интегралов.
- Основные идеи квантовой механики. Интеграл по траекториям и амплитуда перехода.
- Операторный подход в квантовой механике. Гильбертово пространство состояний и канонические коммутационные соотношения.

- Эволюция состояний в квантовой теории и уравнение Шредингера. Собственные состояния Гамильтониана.
- Наблюдаемые в квантовой теории. Процедура измерения и редукция состояний.
- Вывод представления для амплитуды перехода квантовомеханической частицы в виде функционального интеграла из операторного подхода.
- Сходство и различие между уравнениями Фоккера – Планка и Шредингера. Суперсимметричная квантовая механика.
- Приближенные методы квантовой механики. Формула Ван – Флека и ее интерпретация в терминах классической механики.
- Применение функционального интеграла в физике полимеров и финансовой математике. Дальнейшее развитие идей. (При наличии времени и желания слушателей)

УЧЕБНИКИ.

- Chaichian M., Demichev A. Path integrals in physics. Vol. 1: Stochastic processes and quantum mechanics. 2001.
- Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А., Лекции по квантовой механике для студентов математиков. 1980.
- Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. 2004.
- Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. 1976.
- Семёнов А. Г. О случайном блуждании «пьяной компании». Теор. и мат. физика Т. 187 с. 350–359. 2016.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка равна $0.7H+0.3E$, где H - средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E - оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

КОММЕНТАРИИ. Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Тем ни менее, он достаточно прост и может быть освоен студентами начиная с третьего курса бакалавриата. А некоторые продвинутые студенты смогут его успешно освоить и на втором курсе.

Цепи Маркова
простой межкампусный спецкурс на английском для 2-го курса и старше
(description in English)

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Вероятность и стохастическая динамика», «Искусственный интеллект».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2024/25 уч. года, одна пара в неделю, 3 кредита.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Скрипченко.

ОПИСАНИЕ. Цепи Маркова — простейшие случайные процессы, образованные последовательностями зависимых событий: при заданном событии предполагается, что следующее событие зависит только от данного, но не зависит от предыдущих событий. Другими словами, «будущее зависит только от настоящего, но не зависит от прошлого». Цепи Маркова имеют глубокую и красивую, но довольно простую математику. Благодаря своей поразительной эффективности в приложениях к задачам из различных областей — математики, физики, информатики, биологии, экономики и т. д. — они известны как, пожалуй, самый важный класс случайных процессов. Настоящий курс представляет собой введение в теорию цепей Маркова. Мы обсудим их наиболее важные свойства и некоторые области применения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Линейная алгебра, анализ 1. Знакомство с теорией вероятностей и теорией меры могут помочь, но не обязательны (и даже наоборот, цепи Маркова могут оказаться хорошей подготовкой для встречи с общим курсом теории вероятностей).

ПРОГРАММА.

- Цепи Маркова с конечным числом состояний: примеры, свойства
- Стохастические матрицы и их свойства
- Уравнения Колмогорова - Чепмена
- Модель Гальтона – Ватсона
- Стационарные распределения цепей Маркова, их существование для цепей с конечным числом состояний
- Закон больших чисел для цепей Маркова
- Теорема Перрона - Фробениуса
- Алгоритм Page Rank
- Алгоритм Метрополиса Гастингса. Расшифровка текстов.

УЧЕБНИКИ.

- А. Н. Ширяев Вероятность
- Л. Б. Коралов, Я. Г. Синай Теория вероятностей и случайных процессов

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Среднее арифметическое накопленной оценки и оценки за экзамен

Элементы стохастической динамики
простой межкампусный спецкурс на русском для 2-го курса и старше

ОТНОСИТСЯ К ЛИНЕЙКАМ: «Математическая физика», «Вероятность и стохастическая динамика».

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2024/25 уч. года, две пары в неделю, 6 кредитов.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Ильин.

ОПИСАНИЕ. Стохастические динамические системы возникают в самых разных областях — от теоретической физики и астрофизики до экономики и финансовой математики. Слушатели познакомятся с основными идеями и понятиями этой науки, а также освоят минимальный набор инструментов для решения конкретных задач. Изложение будет вестись на относительно элементарном языке корреляционных функций и их производящих функционалов. Мы начнём с обсуждения непрерывных случайных величин, плотности вероятности, статистических моментов, характеристических функций и связных моментов (куммулянтов) случайных векторов, что позволяет легко и изящно изложить закон больших чисел, ЦПТ и принципы больших отклонений. Случайная функция (случайный процесс, случайное поле) вводится как естественное бесконечномерное обобщение случайного вектора. Изложение ведётся на языке корреляционных функций и куммулянтов. Мы обсудим понятия корреляционного времени, корреляционного масштаба, дельта-процессов. Подробно изучим пуассонов и гауссов случайные процессы, теорему Вика, принципы расщепления корреляций, закон больших чисел и ЦПТ для случайных процессов с конечным корреляционным временем. Далее рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения с аддитивным шумом (диффузия) и мультипликативным шумом (системы с перемежаемостью). Такие уравнения встречаются во многих областях теоретической физики, экономики и финансовой математики, составляя основу интуитивного понимания процессов в более сложных нелинейных стохастических системах. В качестве интересного примера обсуждается парадоксальное поведение статистических моментов в системах с мультипликативным шумом (таких как стохастические потоки) и поясняется значение редких «катастрофических» событий для жизни таких систем. Далее мы рассмотрим формализм Фейнмана–Каца, который позволяет просто и изящно исследовать решения параболических дифференциальных уравнений в частных производных с помощью континуального интегрирования по мере Винера. Этот формализм считается некоторыми авторами «главным аналитическим результатом XX века», поэтому знакомство с ним важно для каждого культурного математика. В процессе изучения этого формализма мы рассмотрим понятия интегралов Ито и Стратоновича. В заключение курса мы рассмотрим технически довольно сложную, но чрезвычайно красивую теорию континуальных произведений случайных матриц. Эти произведения естественным образом возникают при решении линейных матричных стохастических уравнений с мультипликативным шумом и используются в теории турбулентного транспорта, стохастической гидродинамике, экономике.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА. Линейная алгебра и дифференциальные уравнения. Желательно знакомство с основами теории вероятностей, однако все нужные факты будут кратко напоминаться на лекциях.

ПРОГРАММА.

- Случайные векторы, моменты, куммулянты, производящие функции.
- Гауссовы случайные векторы.
- Закон больших чисел, центральная предельная теорема, принцип больших отклонений, перемежаемость.
- Некоммутативный закон больших чисел. Произведение случайных матриц. Стохастические интегралы движения.

- Случайные процессы и поля. Корреляционные функции. Связные корреляционные функции. Производящие функционалы.
- Одноточечная и двухточечная статистика, корреляционное время. Дельта процессы. Пуассонов процесс.
- Гауссовы случайные процессы и поля, теорема Вика.
- Закон больших чисел, центральная предельная теорема и принцип больших отклонений для случайных процессов.
- Стохастические дифференциальные уравнения. Мультипликативный и аддитивный шум. Диффузия. Перемежаемость. Уравнение Ланжевена. Процесс Винера.
- Формализм Фейнмана – Каца. Стохастические Интегралы Ито и Стратоновича.
- Дискретные и континуальные произведения случайных матриц. Индексы Ляпунова. Матричные стохастические уравнения с мультипликативным шумом.

УЧЕБНИКИ.

- В. Кляцкин. «Динамика стохастических систем».
- Б. Оксендаль. «Стохастические дифференциальные уравнения».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ. Итоговая оценка вычисляется по формуле $\min(10, \lceil S+C+E \rceil)$, где $\lceil\rceil$ означает округление вверх, а вещественные числа $S, C, E \in [0, 5]$ суть оценки за сдачу листков, за самостоятельные работы на семинарах (проводимые раз в несколько занятий), и за итоговый устный экзамен. Если перед экзаменом $\min(10, \lceil S + C \rceil) \geq 8$, то эта оценка по желанию студента выставляется в качестве итоговой без экзамена.

Course descriptions in English

Listed in this section are the courses that will be given in English if required (e.g., if some students do not understand Russian). All these courses will be equipped with printed matter in English.

Algebraic introduction to Kadomtsev-Petviashvili hierarchy
simple intercampus course in English for 3rd year students and higher

SUBJECT CLASSES: «Mathematical Physics», «Differential Equations and Integrable Systems».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHERS: B. S. Bychkov, P. I. Dunin – Barkowski.

DESCRIPTION. Kadomtsev – Petviashvili hierarchy is an infinite system of pairwise commuting PDEs. It has a proper description in terms of the Lax operators and commuting flows, but in this course we will work with the KP hierarchy from the point of view of its solutions and will give a description of the formal solutions of the KP hierarchy through the points of the semi infinite Grassmannian. We start with the bosonic and fermionic Fock spaces and the isomorphism between them, then describe a symmetry group which maps one solution to the different one. Then we describe an orbit of this action as an infinite dimensional Grassmannian and rewrite the conditions on tau functions as Hirota bilinear equations. This point of view on KP hierarchy turns out to be very fruitful in applications. We will presents such example as Konstevich – Witten tau function, Orlov – Scherbin tau function and others.

PREREQUISITES. Basic courses of the first 2 years of the Bachelor program

SYLLABUS.

- Fock space
- Boson – Fermion correspondence
- KP hierarchy
- tau functions and algebra gl(∞)
- Infinite dimensional Grassmaninans
- Hirota bilinear equations
- Examples of tau functions from enumerative geometry and enumerative combinatorics

TEXTBOOKS.

- T. Miwa, M. Jimbo, E. Date. Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras
- V. Kac, A. Raina, N. Rozhkovskaya. Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras

GRADING RULES. $4 * 0.1 * HW + 0.6 * E$, where HW is a grade for the homework (4 during the semester), E is a final exam grade.

AN INTRODUCTION TO GENERALISED COHOMOLOGY
hard intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Geometry and Topology», «Algebraic Geometry».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: A. G. Gorinov.

DESCRIPTION. Generalised cohomology theories satisfy all Eilenberg – Steenrod axioms except maybe the dimension axiom. It turns out there are examples of such theories that know something about spaces that the usual cohomology does not. For example, the easiest way to prove the Hopf invariant 1 theorem uses the complex K-theory. On the other hand, many results of the ordinary cohomology theory (such as the Thom isomorphism theorem or the Poincaré duality) extend to generalised cohomology, which sometimes allows one to clarify/simplify the proofs. Our aim is to cover the basics of the theory and discuss a few applications and examples.

PREREQUISITES. Algebraic topology as covered e.g. in chapters 1-2 of Fomenko – Fuchs or chapters 1-3 of Hatcher. We will review what we need upon request.

SYLLABUS.

- Spectra and examples.
- Maps of spectra. Homotopy groups and Whitehead's theorem.
- Spectra can be desuspended.
- The smash product of spectra and the Hom spectrum.
- Constructing (co)homology via spectra.
- Multiplicative cohomology theories. Orientability and the Thom isomorphism.
- Dualities (Whitehead, Alexander, Poincaré, Poincaré – Lefschetz).
- Complex and real K-theory. Bott's theorem. Applications of the complex K-theory.
- Cobordisms and the Pontrjagin – Thom construction.

TEXTBOOKS.

- J. F. Adams, Stable Homotopy and Generalised Homology.
- A. T. Fomenko, D. B. Fuchs, Homotopical topology.
- A. Hatcher, Algebraic Topology.
- A. Hatcher, Vector bundles and K-theory.

GRADING RULES. 100% home exam.

ANALYSIS AND GEOMETRY OF PERIOD INTEGRALS
simple intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Geometry and Topology», «Algebraic Geometry».

LEARNING LOAD: 1rd module of 2024/25 A.Y., one class per week, 2 credits.

TEACHER: S. Tanabe.

DESCRIPTION. On the very fundamental level of transcendental algebraic geometry, we encounter the notion of so-called «periods» of an algebraic variety. We define period as a coupling between homological cycle and cohomology element represented by a differential form on the variety i.e. it is defined as an integral of a differential form along some homological cycle of proper dimension. With the aid of such period-integrals, we can investigate monodromy of homology or cohomology of the variety. For a special class of varieties, the global monodromy group may turn out to be highly non-trivial discrete group, embedded into some algebraic group (G. D. Mostow). Local monodromy of period-integrals describes Hodge structre of the cohomology (P. Deligne, A. N. Varchenko, Morihiko Saito). In this course, we start from the example of a family of elliptic curves to furnish a survey on the utility and importance of period-integrals. Analysis of this example will give us the following lesson: periods can be represented in terms of special hypergeometric functions (Gauss hypergeometric function… A-hypergeometric functions of Gel'fand – Kapranov – Zelevinsky), from the periods we obtain such global objects like Picard – Fuchs equation or Gauss – Manin connection (Ph. Griffiths), special value of a period integral calculates cardinality of p-adic points on an algebraic curve (Yu. I. Manin).

SYLLABUS.

- Elliptic curve and elliptic integrals. Riemann surface obtained as a multi-sheeted covering over the perforated complex plane.
- Gauss hypergeometric functions. Gamma functions. Bernoulli beta function. Euler integral representation. Mellin – Barnes integral. Global monodromy representation of Gauss HGF by means of their integral representations.
- Meromorphic forms on a Riemann surface. Cycles on a Riemann surface and their intersection numbers. Periods of closed forms. Riemann bilinear relation for periods.
- Pochhammer hypergeometric functions and their Euler integral representation. Mellin – Barnes integral for Pochhammer HGF. Monodromy representation of Pochhammer HGF with the aid of their integral representations.
- … A-hypergeometric functions of Gel'fand – Kapranov – Zelevinsky. Multiple residues and period integrals of an affine algebraic variety. Discriminantal loci of an affine algebraic variety Horn – Kapranov uniformisation of discriminantal loci. Integral representation of GKZ A-HGF in terms of toric geometry.

TEXTBOOKS.

- K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida.
- F. Beukers, G. Heckman, Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$, Inventiones Math. 1989, 95:325—354.
- I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, Hypergeometric functions and toric varieties, Functional analysis and its appl., 23(1): 12-26.

- I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, 1990. Generalized Euler integrals and A- Hypergeometric functions, Adv. in Math., 84: 255-271.
- D. Cox, S. Katz, Mirror symmetry and Algebraic Geometry, Math Surveys and Monographs, Vol. 68, AMS, RI Providence, 1999 .
- Т. М. Садыков, А. К. Цих, Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных, М. Наука 2014.

GRADING RULES. Evaluation will be made according to the rule: 60% -answers to homework exercises, 40% - the final examination. In both cases, answers shall be submitted in a written form. During the course, more than 14 exercise questions will be spread in the classroom. Each question corresponds to 5 – 15 points. One who gains more than 100 points for solution of exercises will get full 60% mark attributed to homework exercises.

Calculus of variations and optimal control
hard intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Differential Equations and Integrable Systems», «Geometry and Topology», «Artificial Intelligence».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: L. V. Lokutsievsky.

DESCRIPTION. The course covers modern geometric control theory and classical calculus of variations as a part of it. The goal of the course is to introduce students to the beautiful geometry behind these sciences, the main ideas and results, as well as some open questions. The first part of the course is intended to discuss classical methods and results of Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi, and Weierstrass from a modern point of view. The second part of the course will be dedicated to geometric control theory and some of its applications—for example, in sub-Riemannian geometry.

PREREQUISITES. Ordinary differential equations, linear algebra, calculus – 1. Smooth manifolds and functional analysis are helpful, but not mandatory.

SYLLABUS.

1. Problems of calculus of variations as problems of geometric control theory.
2. Huygens' principle.
3. Euler – Lagrange equation and Hamiltonian formalism. Hilbert's theorem on smoothness.
4. Jacobi's field theory of extremals.
5. Direct methods: Tonelli's existence theorem for optimal solutions.
6. Krener's theorem on the interior of the reachable sets.
7. Nagano – Sussmann orbit theorem and Rashevsky – Chow theorem.
8. Pontryagin's maximum principle.

9*. Sub-Riemannian manifolds.

TEXTBOOKS.

- Agrachev A. A., Sachkov Yu. L., «Geometric control theory»
- Zelikin M. I., «Optimal control and calculus of variations»
- Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V., «Optimal Control»
- Clarke F., «Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control», Springer

GRADING RULES. 0.5 * problem sets in seminars (worksheets) + 0.5 * exam

Classical groups, their invariants, and representations
hard intercampus online course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASS: «Representations and Invariants».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHERS: A. I. Ilin, G. I. Olshanski.

DESCRIPTION. The title of the course is deliberately copied from the famous book by Hermann Weyl (1939; 1946). The material in the book forms the core of representation theory. For this reason, working through this material is useful for everyone who wants to deal with any problems in representation theory or apply its results. The purpose of the course is to introduce students to the main ideas and results of Weyl's book, as well as to their further development. Of course, along Weyl's book, we will also use other, more modern sources.

PREREQUISITES. Algebra and linear algebra (compulsory courses of the first two years). Familiarity with the basics of the theory of Lie groups and Lie algebras is highly desirable (courses on this topic were regularly taught in the first semester).

SYLLABUS.

- Four series A, B, C, D of complex classical groups. Compact classical groups. Classical Lie algebras.
- Center of universal enveloping algebra and Harish – Chandra's homomorphism.
- Capelli identity.
- Invariant theory for complex classical groups: various versions of the first fundamental theorem.
- Haar measure on compact classical groups, its radial part (Weyl's formula).
- Irreducible characters: first and second Weyl's formulas.
- Realization of fundamental representations.
- Polynomial representations and Schur – Weyl duality.
- Binomial formula for characters and interpolation Schur polynomials.
- Character branching rules.
- Universal characters of Koike – Terada.
- Weyl duality in traceless tensors.
- Brauer duality.

TEXTBOOKS.

- H. Weyl. The Classical Groups. Their Invariants and Representations. Amer. Math. Soc., 1939; 1946.
- W. Fulton, J. Harris. Representation Theory, a First Course (Graduate Texts in Mathematics 129), Springer – Verlag, New York, 1991.
- D. P. Zelobenko. Compact Lie Groups and Their Representations. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1973.
- R. Goodman, N. R. Wallach. Symmetry, Representations, and Invariants. Springer, 2009.
- C. Procesi. Lie groups. An Approach through Invariants and Representations. Springer, 2007.

GRADING RULES. Will be indicated later on Skoltech's site.

COMMENTS. This is a Skoltech course

Combinatorics of Invariants
simple intercampus seminar in English for 1st year students and higher

SUBJECT CLASS: «Combinatorics and Low-Dim Topology».

LEARNING LOAD: Fall & Spring terms of 2024/25 A.Y., one class per week, 6 credits (3 per term).

TEACHERS: M. E. Kazarian, S. K. Lando.

DESCRIPTION. This students' research seminar is devoted to combinatorial problems arising in knot theory. The topics include finite order knot invariants, graph invariants, matroids, delta-matroids, integrable systems and their combinatorial solutions. Hopf algebras of various combinatorial species are studied. Seminar's participants give talks following resent research papers in the area and explaining results of their own.

PREREQUISITES. no

SYLLABUS.

1. Knots and their invariants.
2. Knot diagrams and chord diagrams.
3. 4-term relations for chord diagrams, graphs, and delta-matroids.
4. Weight systems.
5. Constructing weight systems from Lie algebras.
6. Hopf algebras of graphs, chord diagrams and delta-matroids.
7. Combinatorial solutions to integrable hierarchies.
8. Khovanov homology.

TEXTBOOKS.

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.

GRADING RULES. Regular participation in the seminar is necessary for marking. However, the participation only can not contribute more than 8 points. For getting a higher score, you have to give a talk either on resent actual papers or on your own results in scientific directions of the seminar.

Complex networks

simple intercampus seminar in English for 2nd year students and higher

(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Combinatorics and Low-Dim Topology», «Probability and Stochastic Dynamics», «Artificial Intelligence».

LEARNING LOAD: Fall & Spring terms of 2024/25 A.Y., one class per week, 6 credits (3 per term).

TEACHERS: V. G. Gorbounov, F. U. Ozhegov, I. A. Samoylenko.

DESCRIPTION. Complex network theory is a broad science that studies graphs and their evolution. Models of complex networks are used in many areas of human knowledge (economics, biology, sociology, etc.). In this course, we plan to discuss the main existing methods for analyzing the static and dynamic properties of complex networks. The course will be divided into two parts, by semesters. The general logic of each semester is that in the beginning, instructors give a number of introductory lectures, followed by presentations from seminar participants. At the beginning of the 1st semester, we will introduce the basic definitions and models used in the study of complex networks, and delve a bit deeper into the application of these models to game-theoretical applications. At the beginning of the 2nd semester, selected topics from various areas of this science will be discussed, mainly focusing on random graphs and dynamics on complex networks.

PREREQUISITES. The prerequisites include a minimum understanding of courses in probability theory, mathematical analysis, linear algebra, and differential equations. Although the necessary concepts will be introduced as the story progresses, mastering these disciplines will greatly simplify the understanding of what is happening

SYLLABUS.

Program for the 1st Semester

1. Introduction. Main structures of complex networks and their definitions (degree of a node, centrality, motifs, community structures, spectrum of a graph)
2. Topological properties of real networks
3. Basic models of complex networks
4. Game-theoretic models of complex networks (formation and dynamics). Matchings and pairings

Program for the 2nd Semester

1. Random graphs, basic models (Erdős – Rényi, preferential attachment, etc., and their properties)
2. Spreading processes in networks
3. Synchronization and collective dynamics, main stability function
4. Algorithms for finding structures in communities and hypergraphs

The topics may vary depending on the requests of the participants.

TEXTBOOKS.

- Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. Physics reports, 424(4-5), 175-308.
- Chung F. et al. Complex graphs and networks. – American Mathematical Soc., 2006. – No. 107.
- Newman, M. E. (2003). The structure and function of complex networks. SIAM review, 45(2), 167-256.
- Харари, Фрэнк. Теория графов. (1973): 274.

GRADING RULES. Each student enrolled in the seminar must make a report that will form an assessment for completing this course.

COMMENTS. The course is organized by the efforts of the Complex Networks and Hypergraphs Scientific Research Laboratory team and their applications. Typically, following the student research workshop, a working seminar of the laboratory is organized. In addition to presentations by students and laboratory staff, guest lectures may also be featured

Discrete Optimization and Integer Programming
simple intercampus course in English for 2nd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Applied Math», «Combinatorics and Low-Dim Topology», «Artificial Intelligence».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHERS: D. I. Arkhipov, A. N. Lavrov.

DESCRIPTION. Each of us constantly makes schedules. We optimize our time: make plans for the weekend, choose the best route to get from one metro station to another. Is it difficult to create a schedule for a faculty or a sports league, given the many requirements and wishes? And what about optimization of the data center with thousands of servers, a seaport or a railway network of a large country? In this course we will formulate what challenges mathematicians face in the modern world, when the size of data that influences decision-making is growing faster than computing capabilities. After completing the course you will learn how to build mathematical models of optimization problems of varying complexity and solve them using solvers based on integer and linear programming methods. The course is not limited to the practice of problem solving, you will get acquainted with the basic concepts and classical algorithms of optimization methods, as well as the main aspects of the theory underlying the software that helps to make decisions in the modern world.

PREREQUISITES. There are no strict restrictions on previously completed courses.

SYLLABUS.

- Problems of unconditional and conditional optimization. Method of Lagrange multipliers.
- Numerical optimization methods. Gradient descent. Newton's method.
- Basics of complexity theory. Relation of classes P and NP.
- Linear programming. Simplex method.
- Theory of duality. Optimality Conditions and Duality in Problems of Linear Programming.
- Integer points of polyhedra. Integer linear programming. Unimodular matrices. The branch and bound method. Cutting-plane method.
- Statement and solution of problems using MILP-solvers.
- Efficiency of MILP-solvers for some graph theory problems. Shortest path problem. Minimum spanning tree.
- Constraint programming.

TEXTBOOKS.

- **[KV]** B. Korte, J. Vygen, «Combinatorial Optimization. Theory and Algorithms».
- **[SCO]** A. Schriver «Combinatorial Optimization».
- **[SLP]** A. Schriver «Theory of Linear and Integer Programming».
- **[W]** L. Wolsey «Integer Programming».
- **[JL]** M. Junger, T. M. Liebling et al. «50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the – Art».

GRADING RULES. $0.5H + 0.5E$, where H and E are marks on a 10-point scale for homework and an exam respectively.

Dynamics of automorphisms of algebraic varieties
hard intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASS: «Algebraic Geometry».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: A. Kuznetsova.

DESCRIPTION. Group of automorphisms of an algebraic variety is an important invariant, geometric properties of the variety depend a lot on it. In this course we are going to discuss positive entropy automorphisms. By Gromov – Yomdin's theorem the entropy of an automorphism can be computed with algebraic geometry invariants. We are going to study the connection of the dynamics and the geometry of regular and birational automorphisms of varieties, to describe properties of a very general element of the Cremona group, and discuss the behavior of families of birational automorphisms.

PREREQUISITES. A standard course of algebraic geometry, for instance https://www.hse.ru/edu/courses/845663040.

SYLLABUS.

- The action of an automorphism on the cohomology groups and on the Neron – Severi group by the inverse image. Definition of the growth rate and of the dynamical degrees of an automorphism. Gromov – Yomdin's theorem and the idea of the proof.
- Curves, general type varieties, Fano varieties have no automorphisms with non-trivial growth rate. Examples of automorphisms with interesting growth rate on abelian varieties, K3 surfaces, blow-ups of the projective plane (Blanc's example). Classification of surfaces admitting a positive entropy automorphism.
- Properties of surface automorphisms: dynamical degree is a Salem number, Gizatullin's theorem about surface automorphisms with polynomial growth.
- Growth rate of birational automorphism, Dinh – Sibony's theorem about the relation with the entropy, Dinh – Nguyen's theorem about dynamical degrees of non-primitive automorphisms.
- Diller – Favre's and Blanc – Cantat's theorem on birational automorphisms of surfaces.
- Results about birational automorphisms of varieties of higher dimensions, Lo Bianco's theorem about dynamical degrees, Truong's theorem about the eigenclass for pseudo-automorphisms, Oguiso – Truong's example.
- Xie's theorem about semi-continuity of dynamical degrees in families.
- Cantat – Deserti – Xie's theorem about a very general element of the Cremona group.
- Positive entropy groups of automorphisms, Dinh – Sibony's theorem about embeddings of $\mathbb{Z}^n$.
- If time permits: categorical entropy, examples, Ouchi's theorem about automorphisms of hyperkähler manifolds induced by autoequivalences on K3 surfaces.

TEXTBOOKS.

- J. Blanc «On the inertia group of elliptic curves in the Cremona group of the plane»
- J. Blanc, S. Cantat «Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces»
- S. Cantat «Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces»
- S. Cantat, J. Déserti, J. Xie «Three chapters on Cremona groups»
- J. Diller, C. Favre «Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces»
- G. Dimitrov, F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich «Dynamical systems and categories»
- T.-C. Dinh, N. Sibony «Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle»
- T.-C. Dinh, N. Sibony «Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variete Kahlerienne compacte»
- T.-C. Dinh, V.-A. Nguyen «Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps»
- M. Gizatullin «Rational G-surfaces»
- M. Gromov «On the entropy of holomorphic maps»
- F. Lo Bianco «On the cohomological action of automorphisms of compact Kähler threefolds»
- K. Oguiso, T. T. Truong «Explicit examples of rational and Calabi – Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy»
- G. Ouchi «Automorphisms of positive entropy on some hyperKahler manifolds via derived automorphisms of K3 surfaces»
- T. T. Truong «The simplicity of the first spectral radius of a meromorphic map»
- J. Xie «Periodic points of birational transformations of projective surfaces»
- J. Xie «Algebraic dynamics and recursive inequalities»

GRADING RULES. The final grade equals the grade for the take-home final exam.

ERGODICITY AND MIXING FOR MARKOV PROCESSES
hard intercampus course in English for 2^{nd} year students and higher

SUBJECT CLASSES: «Probability and Stochastic Dynamics», «Analysis».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHERS: C. Bernardin, S. Kuksin.

DESCRIPTION. Markov random processes is a kind of random dynamics which is very common in nature. Often in physics and engineering ”if dynamics of some system is random, then it is Markovian”, and often in the process of their evolution corresponding systems converge to certain statistical equilibria. The goal of the corse is to build a theory of Markov processes in spaces of finite or infinite dimension, and for some classes of such processes prove mixing theorems which guarantee the convergence to statistical equilibria. Finite Markov chains is a subject of a course which teaches A. V. Dymov. They are a special class of Markov processes. The constructions and results we will talk about significantly generalise those for finite chains, and we will use the latter for examples.

PREREQUISITES. Probability with measure theory, basic ideas in topology and in real analysis. No deep knowledge is assumed, all essential definitions and technique will be recalled during the course.

SYLLABUS.

- Some basics from probability and measure theory.
- Independence, conditional expectation and conditional probability.
- Spaces of measures and metrics on them.
- Markov processes in metric spaces: Transition function and Markov semigroups; Construction of a Markov process from a transition function.
- Markov property. Stopping times and strong Markov property.
- Markov processes, defined by stochastic equations.
- Doeblin condition and Doeblin mixing theorem.
- Harris’ mixing theorem.
- Law of large numbers.
- Some examples from physics.

TEXTBOOKS.

- Shiryaev, «Probability» (in Russian and in English).
- Koralov and Sinai, «Theory of probability and random processes» (in Russian and in English).
- Dudley, «Real analysis and probability» (in English).
- Wentzel, «Course in the theory of random processes» (in Russian and in English)

GRADING RULES. $0,1 * H + 0,4 * M + 0,5 * F$ where H is for the home work grade, M is for the midterm grade and F is for the final exam grade.

Game Theory

simple intercampus course in English for 2^{nd} year students and higher

(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Applied Math», «Artificial Intelligence».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: M. S. Panov.

DESCRIPTION. The theory of games was first formulated by John von Neumann and Oskar Morgenstern in the book published in 1944. Since then, game theory has been extensively developed by mathematicians, social scientists, computer scientists, and evolutionary biologists. Game-theoretic tools have become indispensable in many applied fields. In this course, we will discuss various game-theoretic solution concepts that have been proposed, outline their scope of applicability, their weaknesses and strengths.

PREREQUISITES. Standard course of logic.

SYLLABUS.

- Static games. Nash equilibrium. Rationalizability and Iterative Admissibility.
- Dynamic games. Sequential equilibrium.
- Self-enforcing agreements in continuous-time games.
- Equilibrium refinements in signaling games.
- Bargaining.
- Auctions and mechanism design.
- Matching.

TEXTBOOKS.

- V. I. Danilov «Lectures on Game Theory.»
- D. M. Kreps «Microeconomic Foundations II.”

GRADING RULES. The final grade, F, will be computed as $F = 0.5 \cdot P + 0.5 \cdot E$, where P is the grade for solving problem sets and E is the grade for the final oral exam.

COMMENTS. The course will consists of 11 blocks from January till mid May. Blocks will take place approximately once every two weeks. Each block will consists of two lectures on Friday and two lectures on Saturday. The final exam will take place in the second half of May.

Geometric structures on manifolds
hard seminar in English for 2nd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Algebraic Geometry», «Geometry and Topology».

LEARNING LOAD: Fall & Spring terms of 2024/25 A.Y., one class per week, 6 credits (3 per term).

TEACHERS: E. Yu. Amerik, M. S. Verbitsky, V. S. Zhgoon, D. B. Kaledin.

DESCRIPTION. The seminar is aimed at students and postgraduates interested in geometry in the broadest sense. The seminar will include talks by participants on complex and algebraic geometry, including the geometry of hyperkahler manifolds, topology, the theory of singularities and also algebraic geometry in finite characteristics. In addition to the educational program necessary for studying modern mathematics and understanding current literature, nothing is required. The literature is selected based on the tastes and the capabilities of the participants. The participants of the seminar are making reports on various papers, from classics to recently published preprints.

PREREQUISITES. 1-2 years of standard program

SYLLABUS.

- Geometry of schemes and algebraic varieties.
- Geometry of Hyperkahler manifolds
- Algebraic varieties in characteristic p. Crystalline cohomology, De Rham – Witt complex item Geometry of vector bundles on algebraic varieties.
- Exceptional collections in derived categories of sheaves on algebraic varieties.

TEXTBOOKS.

- S. Gallot, D. Hulin, «Riemannian Geometry»
- J.-P. Serre, « Lie algebras and Lie groups.»
- J. Milnor, J. Stashef., «Characteristic classes».
- A. S. Mishchenko. «Vector bundles and their applications».
- J.-P. Demailly «Complex analytic and differential geometry».
- S. I. Gelfand, Yu. I. Manin. «Methods of homological algebra. Volume 1. An introduction to cohomology and derived categories.»

GRADING RULES. The final grade depends on the student activity in the seminar (for 10 points it is necessary to make a report).

Gromov hyperbolic groups
hard intercampus course in English for 2nd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Geometry and Topology», «Representations and Invariants».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: A. S. Golota.

DESCRIPTION. Historically, the study of infinite groups was primarily motivated by problems from geometry. On the other hand, geometric methods are widely used to explore the structure of groups. For instance, for a group with a finite set of generators one can define its Cayley graph and a natural left-invariant metric on it. In 1980s M. Gromov laid the foundations of a theory of «hyperbolic» groups, that is, the groups with Cayley graphs of «negative curvature» (in an appropriate sense). The class of hyperbolic groups is quite large, for example, it includes lattices in Lie groups of rank 1, fundamental groups of negatively-curved manifolds, free groups etc. The theory of hyperbolic groups is a rich theory with numerous applications. The goal of the course is to provide an introduction to this theory and, more generally, to study methods of geometric group theory via examples.

PREREQUISITES. First-year algebra and topology, as well as aptitude to quickly learn more advanced subjects.

SYLLABUS.

- Metric geometry: metric spaces, isometries, geodesics.
- Basic notions of combinatorial group theory: Cayley graphs, group actions on trees.
- CAT-inequalities, CAT(0)-spaces, Cartan – Hadamard theorem;
- Equivalent definitions of hyperbolic groups, examples;
- Basic properties of hyperbolic groups;
- Quasi-isometries of metric spaces, quasi-geodesics;
- The boundary of a hyperbolic space, actions of isometries on the boundary;
- *More general actions on hyperbolic spaces: relative hyperbolicity, hyperbolically embedded subgroups.

TEXTBOOKS.

- M. Gromov, «Hyperbolic groups», Essays in group theory, Springer, 1987.
- E. Ghys, P. de la Harpe, «Sur le Groupes Hyperboliques d'apres M. Gromov», Birkhauser, 1990.
- C. Drutu, M. Kapovich, «Geometric group theory».
- M. Bridson, A. Haefliger, «Metric spaces of non-positive curvature», Springer, 1999.
- F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin, «Hyperbolically embedded subgroups and rotational families in groups acting on hyperbolic spaces», Memoirs of the AMS, 2017.

GRADING RULES. The final grade for the course consists of the grades for problem sheets and the grade for a take-home exam.

Grothendieck Duality
hard course in English for 4th year students and higher

SUBJECT CLASS: «Algebraic Geometry».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: A. B. Pavlov.

DESCRIPTION. Grothendieck duality is a deep generalization of the Serre duality in algebraic geometry, which holds for proper morphisms of schemes and complexes of quasi-coherent sheaves. The goal of this course is to give a complete modern proof of the Grothendieck duality following ideas of A. Neeman. The proof is based on the Brown's representability theorem, which is a general theorem on compactly generated triangulated categories. The course will consists of two part. In the first part we'll develop general theory of triangulated categories from the definition to the Brown's representability theorem with applications to derived categories of abelian categories. This part can be considered as a second course in homological algebra based on the notion of triangulated categories. In the second part of the course we apply those techniques to the derived categories of the quasi-coherent sheaves on schemes. We'll show that derived categories of the quasi-coherent sheaves on quasi-compact quasi-separated schemes are compactly generated, and that compact objects are the same as perfect complexes. Derive existence and general properties of the functor $f^{\times}$ and its relations to the dualizing objects on schemes.

PREREQUISITES. Basics of algebraic geometry: schemes, morphisms of schemes, (quasi-)coherent sheaves on schemes, cohomology of sheaves.

SYLLABUS.

- Definition and basic properties of triangulated categories.
- Verdier localizations. Derived categories.
- Compact objects, compactly generated triangulated categories and Thomasons localizations.
- Brown's representability theorem.
- K-injective and K-projective resolutions. Derived functors.
- Derived functors in algebraic geometry.
- Derived categories of the quasi-coherent sheaves on quasi-compact quasi-separated schemes.
- Functor $f^{\times}$ and its special cases.
- Dualizing objects.

TEXTBOOKS.

- A. Neeman, Triangulated categories.
- J. Lipman, Notes on Derived Functors and Grothendieck Duality.
- U. Görtz, T. Wedhorn, Algebraic Geometry II: Cohomology of Schemes.

GRADING RULES. Four assignments.

HARMONIC ANALYSIS AND BANACH ALGEBRAS
simple intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Analysis», «Representations and Invariants».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: A. Yu. Pirkovskii.

DESCRIPTION. Harmonic analysis on locally compact abelian groups is a natural generalization of the classical Fourier analysis usually studied by undergraduate students in mathematics (that is, of the theory of trigonometric Fourier series and of the Fourier transform on the real line). The most elegant approach to harmonic analysis on abelian groups is based on the theory of commutative Banach algebras, which was initiated by Gelfand in the early 1940ies and was further developed by Raikov, Naimark, Shilov and many other brilliant mathematicians. This approach, in particular, yields a relatively simple analytic proof of the Pontryagin duality based on the Plancherel theorem. In this course, we discuss the basics of Banach algebra theory and apply it to constructing the harmonic analysis on a locally compact abelian group. If time permits, some nonabelian groups will also be considered.

PREREQUISITES. The Lebesgue integration theory and the basics of functional analysis (Banach and Hilbert spaces, bounded linear operators).

SYLLABUS.

1. A toy example: harmonic analysis on a finite abelian group. Classical examples: harmonic analysis on the integers, on the circle, and on the real line.
2. Topological groups. The Haar measure. The modular character.
3. Banach algebras and an elementary spectral theory. The Gelfand spectrum and the Gelfand transform of a commutative Banach algebra. C^*-algebras and the 1st Gelfand–Naimark theorem.
4. Banach algebras associated to locally compact groups: the L^1-algebra, the measure algebra, and the group C^*-algebra. Representations of locally compact groups and of their group algebras.
5. The dual of a locally compact abelian group. The Fourier transform as a special case of the Gelfand transform. Positive functionals on a Banach $*$-algebra. Positive definite functions and Bochner's theorem. The Fourier inversion formula. The Plancherel theorem. The Pontryagin duality.
6. Harmonic analysis on the Heisenberg group and/or on some other nonabelian groups (if time permits).

TEXTBOOKS.

1. A. Deitmar and S. Echterhoff. Principles of harmonic analysis. Springer, 2009.
2. G. B. Folland. A course in abstract harmonic analysis. CRC Press, 1995.
3. N. Bourbaki. Théories spectrales. Hermann, 1967.
4. G. J. Murphy. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.
5. A. Ya. Helemskii. Banach and locally convex algebras. Clarendon Press, 1993.

GRADING RULES. Final grade $=$ 0.3 $\times$ (midterm grade) + 0.7 $\times$ (exam grade). Both the midterm and the final exam will have the form of written take-home individual assignments. You will have appr. a week for preparing your solutions.

Hodge structure and A-discriminant of affine hypersurface

simple intercampus course in English for 3rd year students and higher

(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Algebraic Geometry», «Combinatorics and Low-Dim Topology».

LEARNING LOAD: 4rd module of 2024/25 A.Y., one class per week, 2 credits.

TEACHER: S. Tanabe.

DESCRIPTION. We aim at an introduction to fundamental theory on affine hypersurfaces in algebraic toric variety and on their moduli spaces. This kind of knowledge is necessary for further studies on mirror symmetry, Gromov – Witten invariants and Gamma classes of Galkin – Golyshev – Iritani etc. The course consists of two parts. In the first part, we recall basic facts from the toric geometry that are necessary to describe the mixed Hodge structure of an affine hypersurface. Two filtrations — Hodge and weight filtrations – defined on the cohomology carry fundamental information about its monodromy. These topological data are reduced to combinatorics of the Newton polyhedron and the related fan. At the end of the first part, we shall take a look of Stanley – Reisner ring that describes the cohomology with the aid of generating class cycles. In the second part, we shall study moduli space of affine hypersurfaces in making use of A-discriminant and A-discriminantal loci introduced by Gel'fand – Kapranov – Zelevinsky. In order to get A-discriminant, we have recourse to the construction of secondary polytope that is obtained from regular triangulations of the Newton polyhedron. As an application, we will analyze the convergent domains of A-hypergeometric series. We know utility of this kind of approach to the moduli space of affine hypersurfaces in studies of global monodromy of homological cycles. It is widely applied in the homological mirror symmetry. At the end of the second part, we shall recall several fundamental properties of the amoeba of A-discriminantal loci. In the last years, the amoeba notion attracts more attention as it serves a bridge between toric and tropical geometry.

SYLLABUS.

- Graded ring of polynomials. Ehrhart polynomial. Euler characteristic of an affine hypersurface in algebraic tori.
- Laurent polynomial nondegenerate with respec to its Newton polyhedron. Jacobian ring of a Laurent polynomial. Koszul complex defined by the Jacobian ideal of a Laurent polynomial.
- The mixed Hodge structure of the cohomology of an affine hypersurface. Hodge and weight filtrations of the cohomology. Primitive part of the chomology.
- Stanley – Reisner ring and the cohomology of an affine hypersurface.
- Regular triangulations of a polyhedron. Secondary polytope. A-discriminant of an affine hypersurface. Secondary fan.
- A-hypergeometric functions of Gel'fand – Kapranov – Zelevinsky. Domains of convergence of A-hypergeometric series. A-discriminantal loci of an affine algebraic variety. Horn – Kapranov uniformisation of A-discriminantal loci. Principal A-discriminant and amoebas.

TEXTBOOKS.

- V. I. Danilov, Geometry of toric varieties, Russian Math. Survey. 1978.
- W. Fulton, Introduction to toric varieties .
- D. Cox, J. Little, H. Schenck, Introduction to toric varieties.

- V. V. Batyrev,Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori, Duke Math.J., 1993, 69 (2): 349-409.
- I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, 1989. Hypergeometric functions and toric varieties, Functional analysis and its appl., 23(1): 12-26.
- I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants, and Multidimensional determinants. Birkhaeuser 1994.
- D. Cox, S. Katz, Mirror symmetry and Algebraic Geometry, Math Surveys and Monographs, Vol. 68, AMS, RI Providence, 1999 .
- Т. М. Садыков, А. К. Цих, Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных, М. Наука 2014.

GRADING RULES. Evaluation will be made according to the rule: 60% — answers to homework exercises, 40% — the final examination. In both cases, answers shall be submitted in a written form. During the course, more than 14 exercise questions will be spread in the classroom. Each question corresponds to 5 – 15 points. One who gains more than 100 points for solution of exercises will get full 60% mark attributed to homework exercises.

Holomorphic dynamics
hard intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Geometry and Topology», «Combinatorics and Low-Dim Topology».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: V. A. Timorin.

DESCRIPTION. The simplest (from the viewpoint of algebra) formulas, such as $f(z) = z^2 + c$, can generate intricate self-similar structures when the corresponding maps are regarded as dynamical systems. Dynamical systems theory studies what the *orbits* of f, i.e., sequences of the form z, $f(z)$, $f(f(z))$, ..., are doing. Typical questions: what a specific orbit looks like (does it converge to a periodic cycle or exhibit a chaotic behavior)? How does the behavior of the orbit depend on the initial point z? How does it change as f itself varies? Rapid development of holomorphic dynamics, which started around 1980s, became possible, among other factors, due to emerging of computer graphics. Unexpected pictures motivated new results, which were rigorously proven later. We will discuss some fundamental results and the simplest examples from the area of complex dynamics, mostly following J. Milnor's textbook.

PREREQUISITES. Complex analysis, basics of point-set topology, basics of homotopy topology (homotopies, covering spaces, fundamental groups).

SYLLABUS.

- Rational dynamics on the Riemann sphere: examples and pictures.
- Riemann surfaces and uniformization (an overview of basic notions and results).
- Fatou and Julia sets; their simplest properties.
- Local dynamics near fixed points, linearization.
- Hyperbolicity in holomorphic dynamics.
- Polynomial dynamics: external rays, the role of local connectedness.

TEXTBOOKS.

- J. Milnor, «Dynamics in One Complex Variable». (AM–160). — Princeton University Press, 2011.
- H. O. Peitgen, P. H. Richter, «The beauty of fractals: images of complex dynamical systems». — Springer, 1986.
- W. Thurston, «On the geometry and dynamics of iterated rational maps». In: D. Schleicher (ed), *Complex dynamics: families and friends*. A K Peters, 2009.
- L. Carleson, T. Gamelin, Complex dynamics. — Springer, 1996.
- A. Beardon, «Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems». — Springer, 2000.

GRADING RULES. 50% tests and homeworks, 50% individual final project (take-home exam)

INFINITE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS
hard intercampus course in English for 3^{rd} year students and higher

SUBJECT CLASSES: «Representations and Invariants», «Mathematical Physics».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: F. V. Uvarov.

DESCRIPTION. Infinite-dimensional Lie algebras naturally arise in quantum field theory and differential geometry (for example, as Lie algebras of vector fields). Unlike in finite-dimensional case, the understanding of infinite-dimensional Lie algebras and their representations is far from being complete. In this course, we will cover the most famous and studied examples of infinite-dimensional Lie algebras, whose structure theory and representations on the one hand, resemble those of finite-dimensional simple Lie algebras, on the other hand, posses new interesting features.

PREREQUISITES. basics of semi-simple Lie algebras and their representations.

SYLLABUS.

- Representations of $\mathfrak{gl}(\infty)$. Semi-infinite wedge product. Japanese cocycle.
- Heisenberg and Virasoro algebras, Fock modules.
- Affine Lie algebras as central extensions of loop algebras. The Sugawara construction.
- Generalized Cartan matrices and Kac–Moody Lie algebras.
- Affine Lie algebras as Kac–Moody Lie algebras.

TEXTBOOKS.

- V. G. Kac, A. K. Raina, (Bombay Lectures on) Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras, World Scientific 1987.
- Victor G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Third Edition, CUP 1995.

GRADING RULES. 0.5*(problem lists) + 0.5*(final exam)

INTEGRABILITY IN QUANTUM FIELD THEORY
hard intercampus seminar in English for 4th year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Mathematical Physics», «Differential Equations and Integrable Systems».

LEARNING LOAD: Fall & Spring terms of 2024/25 A.Y., two classes per week, 12 credits (6 per term).

TEACHER: M. N. Alfimov.

DESCRIPTION. This course is organized in the form of weekly seminars, where we are going to discuss the integrability structures appearing in quantum field theory. These structures nowadays are present in numerous examples, such as sigma models, supersymmetric gauge theories, string theories, gauge/string dualities, scattering amplitudes and correlation functions etc. As pedagogical examples of the integrable systems solved by the Bethe Ansatz method Bose gas and Principal Chiral Field models will be considered in the first part of the course together with the foundations of the AdS/CFT correspondence for the case of 4-dimensional superconformal gauge theory. In the second part of the course there will be given an introduction into the applications of the theory of integrable systems to the study of the spectrum of $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang–Mills theory and dual superstring theory on the $AdS_5 \times S^5$ background and we will study integrable deformations of sigma models. The course is intended for PhD and Master students. Postdocs and Bachelor students are also welcome.

PREREQUISITES. Basic knowledge of quantum field theory. Some acquaintance with conformal field theory and string theory would be helpful, but not necessary.

SYLLABUS.

- Bethe equations for the spectrum of the Bose gas model and their thermodynamic limit. Thermodynamic Bethe Ansatz (TBA) equations for the Bose gas model.
- Asymptotic Bethe Ansatz for the spectrum of the PCF model and their thermodynamic limit. Thermodynamic Bethe Ansatz equations for the PCF.
- String background $AdS_5 \times S^5$ as a solution of supergravity equations.
- Classical integrability of the PCF model and $AdS_5 \times S^5$ superstring sigma model.
- Derivation of the S-matrix for the superstring sigma model on $AdS_5 \times S^5$ from Zamolodchikov–Faddeev algebra.
- Bethe equations for the XXX Heisenberg spin chain (1-loop spectrum of anomalous dimensions of the local operators in the SU(2) sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM). Asymptotic Bethe equations for the spectrum of $\mathcal{N} = 4$ SYM. Thermodynamic Bethe ansatz (TBA) equations for the spectrum of $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- The corresponding Hirota equations and wronskian solution of these equations.
- Derivation of AdS/CFT Quantum Spectral Curve for $AdS_5 \times S^5$ superstring theory and $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- Non-perturbative characteristics of the operator trajectories in the $\mathcal{N} = 4$ SYM.
- Integrable deformations of the O(N) sigma models. q-deformed S-matrix. Eta-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring theory and its S-matrix.

TEXTBOOKS.

- Ahn, C., Nepomechie, R. I. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter III.2: Exact world-sheet S-matrix. https://doi.org/10.1007/s11005-011-0478-
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2011). Solving the AdS/CFT Y-system. https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)02
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2013). Quantum spectral curve for AdS_5/CFT_4. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.01160
- Gromov, N., Kazakov, V., Leurent, S., Volin, D. (2014). Quantum spectral curve for arbitrary state/operator in AdS_5/CFT_4. https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)18
- Minahan, J. A., Zarembo, K. (2002). The Bethe – Ansatz for N = 4 Super Yang – Mills. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/03/01
- V. A. Fateev, A. V. Litvinov. (2018). Integrability, duality and sigma models. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)20
- A. V. Litvinov, L. A. Spodyneiko. (2018). On dual description of the deformed O(N) sigma model. Journal of High Energy Physics, 2018(11), 1–29. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)13
- Rej, A. (2009). Integrability and the AdS/CFT correspondence. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/25/25400
- Gromov, N. (2017). Introduction to the Spectrum of N = 4 SYM and the Quantum Spectral Curve.
- Gromov, N., Kazakov, V., Vieira, P. (2008). Finite Volume Spectrum of 2D Field Theories from Hirota Dynamics. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/12/06
- Gromov, N., Kazakov, V., Sakai, K., Vieira, P. (2006). Strings as Multi – Particle States of Quantum Sigma – Models. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.11.01
- Korepin, V. E., Izergin, A. G., Bogoliubov, N. M. (1993). Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.
- **[T]** Tseytlin, A. A. (2010). Review of AdS/CFT Integrability, Chapter II.1: Classical $AdS_5 \times S^5$ string solutions.
- Kazakov, V. (2018). Quantum Spectral Curve of γ-twisted $N = 4$ SYM theory and fishnet CFT. https://doi.org/10.1142/S0129055X1840010

GRADING RULES. Giving talk at the seminar*0.7 + Taking part in the discussion at the seminar*0.3

Integrable systems of particles and nonlinear equations
simple intercampus course in English for 3^{rd} year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Differential Equations and Integrable Systems», «Mathematical Physics».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: A. V. Zabrodin.

DESCRIPTION. The course is devoted to integrable systems of particles (such as Calogero – Moser and Ruijsenaars – Schneider and their spin generalizations) which are very interesting from mathematical point of view and find many applications in modern mathematical physics. They are closely connected with integrable nonlinear partial differential equations (soliton equations) through dynamics of poles of their singular solutions.

PREREQUISITES. Basics of linear algebra and theory of functions of complex variables.

SYLLABUS.

- Calogero – Moser systems: Hamiltonian, equations of motion, Lax representation, integrals of motion.
- Ruijsenaars – Schneider systems and their integrals of motion
- Deformed Ruijsenaars – Schneider systems.
- Spin generalizations of the Calogero – Moser and Ruijsenaars – Schneider systems.
- The Kadomtsev – Petviashvili equation. The Calogero – Moser system as dynamics of poles of its elliptic solutions.
- 2D Toda chain and its elliptic solutions. The Ruijsenaars – Schneider system as dynamics of their poles.
- Calogero – Moser and Ruijsenaars – Schneider systems in discrete time.

TEXTBOOKS.

- A. M. Perelomov, Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras.
- N. Akhiezer, Elements of theory of elliptic functions.
- A. Newell, Solitons in mathematics and physics.
- T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, Solitons: differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras.

GRADING RULES. The grade equals the number of solved problems (total 10).

Introduction to Ergodic Theory
hard intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Differential Equations and Integrable Systems», «Mathematical Physics».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: M. L. Blank.

DESCRIPTION. Is it possible to distinguish deterministic chaotic dynamics from a purely random and whether this question makes sense? Does irreversibility influence qualitative characteristics of the process? Ergodic theory studies these and other statistical properties of dynamical systems. Interest in this subject stems from the fact that «typical» deterministic dynamical systems (eg, differential equations) exhibit chaotic behavior: their trajectories look similar to the implementation of random processes. We begin with the classical results by Poincare, Birkhoff, Khinchin, Kolmogorov, and get to modern productions (including yet unresolved) problems. This is an introductory course designed for 2-4 bachelors and graduate students. Prior knowledge except for the course in mathematical analysis is not required (although it is desirable).

PREREQUISITES. mathematical analysis

SYLLABUS.

- Dynamical systems: trajectories, invariant sets, simple and strange attractors and their classification, randomness.
- The action in the space of measures, transfer operator, invariant measures. Comparison with Markov chains.
- Ergodicity, Birkhoff ergodic theorem, mixing, CLT. Sinai – Bowen – Ruelle measures and natural/observable measures.
- Basic ergodic structures: direct and skew products, Poincare and integral maps, a natural extension and the problem of irreversibility.
- Ergodic approach to number theoretical problems.
- Entropy: metric and topological approaches.
- Operator formalism. Spectral theory of dynamical systems. Banach space of measures, random perturbations.
- Multicomponent systems: synchronization and phase transitions.

TEXTBOOKS.

- М. Бланк. «Устойчивость и локализация в хаотической динамике», МЦНМО, Москва, 2001.
- И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. «Эргодическая теория», Наука, Москва, 1980.
- A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

GRADING RULES. 0.4*(cumulative assessment) + 0.6*exam

Introduction to KAM theory

hard intercampus course in English for 3rd year students and higher

(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Differential Equations and Integrable Systems», «Geometry and Topology».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: A. A. Glutsyuk.

DESCRIPTION. Hamilton equations are one of the most fundamental class of differential equations describing law of movements of mechanical systems and many physical laws. Their flows preserve symplectic structure and hence, the corresponding volume form. The simplest class of Hamiltonian systems are integrable Hamiltonian systems on compact symplectic manifolds. In this case Arnold — Liouville Theorem states that the manifold is fibered by invariant half-dimensional tori along which the movement is quasi-periodic: its trajectories follow integral curves of linear flow on torus. The KAM theory created by A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold and J. Moser in late 1950-ths - early 1960-ths deals with perturbations of the so-called non-degenerate integrable Hamiltonian systems: namely, those of them, where the frequency vector of quasi-periodic movement along an invariant torus has non-degenerate derivative in the transversal parameter. The main KAM theorem states that for every small perturbation most of invariant tori survive: the smaller is the perturbation parameter, the more percentage (in the sense of Lebesgue measure) of survived tori. The KAM theory is used in many domains of mathematics, mechanics and physics. First of all, in symplectic dynamics and in celestial mechanics. And also in the theory of billiards. The goal of the cours is to present the KAM theory with a proof of the KAM theorem and its different versions, and to discuss its applications and related questions. Including the case of perturbations of integrable twist symplectomorphisms of planar cylinder (persistance of most of invariant circles) and billiard theory (Lazutkin's Theorem on existence of Cantor family (of positive measure) of caustics: curves whose tangent lines are reflected again to their tangent lines). We will also discuss global dynamics of the perturbed system; first of all, for perturbations of integrable twist symplectomorphism of cylinder.

PREREQUISITES. Knowledge of basic linear algebra and analysis courses. It would be nice to know the notion of a smooth manifold.

SYLLABUS.

- Hamiltonian systems. Examples from mechanics. Invariance of symplectic form and the corresponding volume.
- Symplectic manifolds and Hamiltonian vector fields on them. Integrable Hamiltonian systems. Arnold – Liouville Theorem. Classical examples.
- Symplectomorphisms. Integrable twist symplectomorphisms of planar cylinder. KAM theorem for their perturbations and dynamics of the perturbed symplectomorphism.
- KAM Theorem for general non-degenerate integrable Hamiltonian system.
- Symplectic structure on the space of oriented lines in Euclidean space. Billiard reflections of oriented lines as symplectomorphisms. Generalization to geodesics and billiards on arbitrary Riemannian manifold: Melrose reduction.
- Convex planar billiards. Caustics. Integrability of elliptic billiard.
- Lazutkin KAM type Theorem on convex planar billiards: existence of Cantor family (of positive measure) of disjoint closed caustics.
- A survey of Birkhoff Conjecture on integrable billiards.

TEXTBOOKS.

- V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer
- J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems: With Special Emphasis on Celestial Mechanics (AM-77) (Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, 31)
- J. Féjoz, An introduction to KAM theory. https://www.ceremade.dauphine.fr/~fejoz/Articles/introductionKam pdf

GRADING RULES. $0.6x$ (grade for problem solutions) $+0.6x$ (exam grade). If the number thus obtained is greater than 10, then the final grade is 10.

Introduction to algebraic groups and invariant theory
hard intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Representations and Invariants», «Algebraic Geometry».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: V. S. Zhgoon.

DESCRIPTION. Geometric invariant theory and the classical theory of invariants of algebraic groups are a very important branchs of modern mathematics. Everyone meets already the first examples of invariants of linear transformations, such as determinant, trace, characteristic polynomial, already in the first course of linear algebra. The classical theory of invariants is devoted to the description of the algebra of polynomial or tenzor invariants of classical groups, such as the full linear group, orthogonal and symplectic groups. In turn, the geometric invariant theory, which originates in the works of Hilbert and Mumford, is devoted to the study of the geometric properties of invariants, for example, the construction and the study of the geometry of various quotient spaces, and is use as the main tool for constructing moduli spaces (curves, vector spaces, and other objects). In the course we will touch on both the classical theory of invariants and geometric. We will also study equivariant embeddings of homogeneous spaces.

PREREQUISITES. Knowledge of linear algebra and the theory of representations of finite groups is required. Knowledge of Lie groups and algebras and the basics of algebraic geometry is useful.

SYLLABUS.

- Algebraic groups and their Lie algebras.
- Actions of algebraic groups. The orbits, stabilizers and homogeneous spaces. Chevalley's theorem.
- Flag varieties. Action of solvable groups on complete varieties. Borel (Lie – Kolchin) fixed point theorem.
- Conjugacy of Borel subgroups, maximal tori, Cartan subgroups.
- Structural theory of semisimple algebraic groups.
- Action of reductive groups on affine varieties. Finite generation of the algebra of invariants (Hilbert's theorem).
- Category and geometric quotient. The existence of a category quotient for the action of reductive groups on affine varieties.
- Noether's theorem that bound the degrees of generators of algebra of invariants.
- Theory of invariants of classical groups.
- Action of reductive groups. Linearization of an invertible line bundle. The group of G - linearized line bundles $\mathrm{Pic}_G(X)$.
- Semistable and stable points. The Mumford quotient.
- Numerical stability criterion.
- Hilbert – Mumford criterion.
- Popov criterion for the stability of an action on an affine manifold.
- Luna's slice theorem.
- Moment maps. The Kempf – Ness criterion that characterize closed orbits.
- Hesselink stratification of a set of unstable points.

TEXTBOOKS.

- D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd. edition, Ergebnisse Math. 34, Springer – Verlag, Berlin, 1994
- I. V. Dolgachev, Introduction to Geometric Invariant Theory, Lect. Notes Series, **25**, Seoul Nat. Univ., 1994.
- J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Math., no. 21, Springer – Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1975.
- F. Knop, H. Kraft, T. Vust, The Picard group of a G-variety. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar **13**, Birkhauser Verlag (Basel – Boston) (1989), 77–88.
- D. A. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII (R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov, eds.), Encyclopædia Math. Sci., vol. 138, Springer – Verlag, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2011.

GRADING RULES. 0.3*grade for exercise sheet + 0.7 final exam grade

Introduction to algebraic number theory
hard intercampus course in English for 2nd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Algebra and Number Theory», «Algebraic Geometry».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: V. S. Zhgoon.

DESCRIPTION. Algebraic number theory is a classical field of mathematics that was formed during the study of solutions to Diophantine equations, as well as through attempts to prove Fermat's theorem. Now it is a vast classical field underlying Arithmetic geometry. In this course, we will recall the basics of Galois theory, consider the so-called branching theory, prove the main theorems on the structure of ideals (decompositions into simple ideals), prove Dirichlet's theorem on the structure of S-units and the finiteness theorem of a class group. We will highlight a very important analogy between the theory of algebraic numbers and the theory of algebraic curves over finite fields.

PREREQUISITES. basic course of algebra

SYLLABUS.

- Galois theory and finite fields. The main facts from Galois theory. The structure of finite fields. Equations over finite fields. The quadratic law of reciprocity.
- p-adic numbers. Completions. Hensel lemma. Ostrovsky theorem.
- Quadratic forms. The representation of numbers by quadratic forms over $\mathbb{Q}_p$ and over $\mathbb{Q}$. The Minkowski–Hasse theorem.
- Fields of algebraic numbers. Dedekind rings. Decomposition into simple ideals. Modules over Dedekind rings.
- The norm and the trace. Ramification, discriminant, different.
- Adels and idels.
- A group of classes of ideals. The finiteness theorem. The Minkowski constant.
- Dirichlet's theorem on S-units.
- Cyclotomic fields.

TEXTBOOKS.

- Borevich Z. I., Shafarevich I. R. Theory of numbers. M., Nauka, 1985.
- Lang S. Algebra. Springer, 2012. – T. 211.
- Lang S. Lang S. Algebraic number theory. Springer, 1994. T. 110.
- Manin Y. I., Panchishkin A. A. Introduction to modern number theory. Springer, 2005. – T. 49.
- Serre J. P. A course in arithmetic. Springer, 2012, T. 7.
- Cassels D., Frelich A.(ed.), Algebraic number theory, 1969.
- Serre J. P. Local fields. – Springer, 2013, Vol. 67.

GRADING RULES. 1/10(2/3(final exam%) + 1/2(problem sheets%))

Introduction to differential geometry

simple intercampus course in English for 3rd year students and higher

(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Geometry and Topology», «Geometry and Topology».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: F. V. Uvarov.

DESCRIPTION. In this course you will learn the basic tools of differential geometry on manifolds necessary for working in various areas of modern geometry, such as symplectic and Kähler geometry, gauge theory, smooth structures and global analysis on manifolds. The main subjects of study are differential forms on manifolds, Riemannian metrics, smooth vector and principal bundles, connections, curvatures, characteristic classes, complex and almost complex structures.

PREREQUISITES.

- Smooth manifolds.
- Differential forms on manifolds.
- Riemannian metric on a manifold, geodesics, Hodge's operator.
- Vector bundles and principal bundles on manifolds.
- Connections on principal and vector bundles, covariant differentiation.
- Connectivity curvature. Characteristic classes.
- Covariant derivatives and metrics. Riemannian curvature tensor.
- Complex and almost complex varieties.

SYLLABUS.

- Sh. Kobayashi, K. Nomizu, «Foundations of Differential Geometry», v. 1, 2, Wiley, 1996.
- J. W. Milnor, J. D. Stasheff, «Characteristic Classes», Princeton, 1974.
- C. H. Taubes, «Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature», Oxford, 2011.

GRADING RULES. 0.5 (seminar grade) + 0.5 (exam grade).

Introduction to the category theory and homological algebra
simple course in English for 2^{nd} year students and higher

SUBJECT CLASS: «Algebra and Number Theory».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: A. B. Pavlov.

DESCRIPTION. This is an introductory course in category theory and homological algebra. In the first part we cover basics of the category theory with main focus on universal construction (limits and colimits). The category theory is a universal mathematical language that has applications in many areas on mathematics, it allows us to illustrate all definition and theorems with examples from algebra, topology and geometry. After this focus on the categories that resemble categories of modules (abelian categories) and develop resolutions of objects in such categories. Using resolutions we define derived functors. The second half of the course is about general properties and examples of derived functors.

PREREQUISITES. First year algebra and topology.

SYLLABUS.

- Categories and Functors.
- Adjoint Functors.
- Limits and Colimits.
- Additive and Abelian Categories.
- Complexes and Categories of Complexes.
- Derived Functors Tor and Ext over a Ring.
- Homological Dimensions.
- Spectral Sequences.

TEXTBOOKS.

- S. Mac Lane Categories for Working Mathematicians, 2nd ed., 1997
- C. Weibel An Introduction to Homological Algebra, 1994

GRADING RULES. $0.1S + 0.2Q + 0.3M + 0.4F$, where S is grade for participation in tutorials, Q is quiz grade for 4 one-hour long quizzes, M is the midterm grade, F is final exam grade.

INTRODUCTION TO THE THEORY OF RANDOM PROCESSES
hard intercampus course in English for 3^{rd} year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Probability and Stochastic Dynamics», «Mathematical Physics», «Artificial Intelligence».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: M. L. Blank.

DESCRIPTION. The course is a continuation of the standard course in probability theory (associated mainly with combinatorics) and is intended for an initial introduction to the theory of random processes. Special attention is paid to the connection of this theory with functional analysis and general measure theory. The course is aimed at bachelors 3-4 courses, undergraduates and graduate students.

PREREQUISITES. mathematical analysis and probability theory

SYLLABUS.

- The concept of a random process.
- Elements of random analysis.
- Correlation theory of random processes.
- Markov processes with discrete and continuous time.
- Wiener and Poisson processes.
- Stochastic integral. Ito's formula.
- (sub / super) martingales.
- Infinitesimal semigroup operator.
- Stochastic stability of dynamical systems.
- Large deviations in Markov processes and chaotic dynamics.
- Nonlinear Markov processes.

TEXTBOOKS.

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.

GRADING RULES. 0.4*(cumulative assessment) + 0.6*exam

K-THEORY OF C^*-ALGEBRAS
simple intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Analysis», «Geometry and Topology».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: A. Yu. Pirkovskii.

DESCRIPTION. K-theory of C^*-algebras appeared in the 1970ies as a noncommutative counterpart of Atiyah–Hirzebruch topological K-theory. In some sense, this theory may be viewed as «algebraic topology for C^*-algebras». K-theory naturally associates two abelian groups, $K_0(A)$ and $K_1(A)$, to every C^*-algebra A. These groups are quite important invariants of A. On the one hand, they contain much information about A, and on the other hand, there are powerful tools to explicitly calculate them. If $A = C(X)$, the algebra of continuous functions on a compact Hausdorff topological space X, then $K_0(A)$ and $K_1(A)$ are just the topological K-groups $K^0(X)$ and $K^1(X)$, respectively. Thus topological K-theory is fully embedded into K-theory of C^*-algebras. A number of fundamental results in topological K-theory, including the Bott periodicity, have natural extensions to C^*-algebras. At the same time, K-theory of C^*-algebras has some interesting «purely noncommutative» properties, which do not have classical prototypes. In this course we define K-theory for C^*-algebras, prove its basic properties (including the Bott periodicity theorem), and calculate the K-groups in some important cases.

PREREQUISITES. The basics of functional analysis (Banach and Hilbert spaces, bounded linear operators). Some acquaintance with C^*-algebras will be helpful (for example, as given in the first half of the course «C^*-algebras and compact quantum groups», spring 2024, or in the respective part of the course «Harmonic analysis and Banach algebras», fall 2024). Anyway, basic facts on C^*-algebras will be surveyed in the beginning of the course.

SYLLABUS.

1. Basic facts on C^*-algebras (a survey).
2. Equivalence relations for projections. The group $K_0(A)$. Remarks on the commutative case (vector bundles, the Serre–Swan theorem, topological K-theory).
3. Homotopy invariance, half-exactness, and stability of K_0.
4. Equivalence of unitaries. The group $K_1(A)$.
5. The index map in K-theory. A relation to the Fredholm index. The exact sequence of K-groups induced by a C^*-algebra extension.
6. The Toeplitz algebra. The Bott periodicity.
7. Inductive limits of C^*-algebras. The continuity of K_0. The order structure on $K_0(A)$. AF-algebras and their Bratteli diagrams. Elliott's classification of AF-algebras in terms of K-theory.

TEXTBOOKS.

1. N. E. Wegge–Olsen. K-theory and C^*-algebras. A friendly approach. Oxford University Press, 1993.
2. M. Rørdam, F. Larsen, N. Laustsen. An introduction to K-theory for C^*-algebras. Cambridge University Press, 2000.
3. G. J. Murphy. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.

4. B. Blackadar. K-theory for operator algebras. Cambridge University Press, 1998.

5. K. R. Davidson. C^*-algebras by example. AMS, 1996.

6. P. A. Fillmore. A user's guide to operator algebras. Wiley, 1996.

7. N. Higson, J. Roe. Analytic K-homology. Oxford University Press, 2000.

GRADING RULES. Final grade $= 0.3 \times$ (midterm grade) $+ 0.7 \times$ (exam grade). Both the midterm and the final exam will have the form of written take-home individual assignments. You will have appr. a week for preparing your solutions.

Localisation and rational homotopy theory
hard intercampus seminar in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASS: «Geometry and Topology».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: A. G. Gorinov.

DESCRIPTION. The homotopy category of CW-complexes is quite complicated. For example, given two simply-connected polyhedra, it is not clear how to tell whether they are homotopy equivalent, or to describe the homotopy classes of maps between them. It turns out however that these and other similar questions become much easier if we declare maps that induce isomorphisms of rational homology to be isomorphisms. The result is the *rational homotopy category*, in which the homotopy classes of maps and the homotopy equivalence classes of objects can be explicitly described.

All this has applications in the «usual» topology: for example, this gives one a recipe to calculate the ranks of the homotopy groups. Another application: if the real cohomology rings of two compact simply-connected Kähler manifolds are isomorphic, then there is a map between these manifolds that induces an isomorphism of rational cohomology. Our first aim is to construct the rational homotopy category and discuss a few applications. Next, we will consider the general notion of localisation of categories and see how rationalisation fits into the general picture.

PREREQUISITES. Algebraic topology as covered e.g. in chapters 1-2 of Fomenko – Fuchs or chapters 1-3 of Hatcher. We will review what we need upon request.

SYLLABUS.

- Eilenberg – MacLane spaces and Postnikov towers.
- Localising a space in a set of primes. Rationalisation.
- Sullivan models of commutative differential graded algebras: existence and uniqueness.
- Examples of Sullivan models.
- Applications of Sullivan models: homotopy groups; formality of Kähler manifolds; mapping class groups.
- Other models of rational homotopy types (C_∞-algebras, Lie models etc.)
- Localisation of a category. Bousfield localisation.

TEXTBOOKS.

- Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, Rational homotopy theory.
- D. Sullivan, Geometric topology.
- D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology.

GRADING RULES. 100% home exam.

Markov chains
simple intercampus course in English for 2nd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Probability and Stochastic Dynamics», «Artificial Intelligence».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., one class per week, 3 credits.

TEACHER: A. S. Skripchenko.

DESCRIPTION. The simplest random process is a sequence of independent events (experiments). The scope of such processes is limited, since in practice very often the events are not independent. Markov chains are the simplest random processes formed by sequences of dependent events: given an event, it is assumed that the next event depends only on the given one, but does not depend on the previous events. In other words, «the future depends only on the present, but does not depend on the past». Markov chains have deep and beautiful but rather simple mathematics. Due to their amazing efficiency in applications to problems from various fields — mathematics, physics, computer science, biology, economics, etc. — they are known as probably the most important class of random processes. The present course is an introduction to the theory of Markov chains. We will discuss their most important properties and some of their applications

PREREQUISITES. Linear algebra and Calculus 1. Probability theory and measure theory are not required but can be an advantage. Still, Markov chains can be used as the first Intro for Probaility theory.

SYLLABUS.

- Markov chains with finite number of states: examples
- transition probability matrix
- The law of large numbers for Markov chains.
- Galton – Watson process
- The Google's Page Rank.
- Perron–Frobenius theorem
- Gastings Metropolis algoritm for texts.

TEXTBOOKS. David Levin, Yuval Peres and Elizabeth Wilmer Markov Chains and Mixing Times, 2008.

GRADING RULES. average of cumulative mark and exam mark

MODERN DYNAMICAL SYSTEMS
hard intercampus seminar in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Geometry and Topology», «Probability and Stochastic Dynamics».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHERS: S. K. Lando, A. S. Skripchenko.

DESCRIPTION. Dynamical systems in our course will be presented mainly not as an independent branch of mathematics but as a very powerful tool that can be applied in geometry, topology, probability, analysis, number theory and physics. We consciously decided to sacrifice some classical chapters of ergodic theory and to introduce the most important dynamical notions and ideas in the geometric and topological context already intuitively familiar to our audience. As a compensation, we will show applications of dynamics to important problems in other mathematical disciplines. We hope to arrive at the end of the course to the most recent advances in dynamics and geometry and to present (at least informally) some of results of A. Avila, A. Eskin, M. Kontsevich, M. Mirzakhani, G. Margulis. In accordance with this strategy, the course comprises several blocks closely related to each other. The first three of them (including very short introduction) are mainly mandatory. The decision, which of the topics listed below these three blocks would depend on the background and interests of the audience.

PREREQUISITES. Measure theory, topology I, differential geometry I

SYLLABUS.

- Introduction: We will introduce dynamical systems using the most elementary examples — rotation of the circle and continued fractions
- Dynamics and geometry: In this part we will check how dynamical methods can be used to study one of the most classical notions of differential geometry — geodesics on surfaces of negative curvature
- Dynamics, ergodic theory and topology: In this part we stay again on a Riemann surface but now we would like to have an almost flat metrics on it and to consider related geodesic flow (equivalently, we study measured foliations on such a surface). The purpose of this block is to make a crash course in ergodic theory with a topological interpretation of the main notions and results.
- Dynamics and number theory: This block is dedicated to homogeneous dynamics and its applications to famous conjectures in number theory, such as Oppenheim conjecture (solved) and Littlewood conjecture (still open). We mainly will follow G. Margulis work in this direction.
- Dynamics and analysis: This block can be more interesting for future specialists in mathematical physics and numerical analysis. We plan to discuss the notion of transfer operator and its spectral gap, Perron–Frobenius theorem and its generalization by D. Ruelle, zetafunction and its interpretation in terms of transfer operator.

TEXTBOOKS.

- S. Katok, Fuchsian groups, University of Chicago Press, Chicago and London, 1992 (Russian translation: Faktorial Press, Moscow, 2002)
- Ya. Sinai, Introduction to ergodic theory Princeton University Press, 1977
- W. Thurston, Geometry and topology of three-manifolds, Princeton University Press, 1997 (Russian translation: MCCME, 2001

GRADING RULES. Final score = Homework score (3 assignments, total weight of them is greater of equal than 8 points) + Oral presentation (at least 5 points) + Exam. Thus those whose cumulative score formed by assignments and oral presentations is sufficient may skip the final exam.

NONCOMMUTATIVE ALGEBRA
simple intercampus course in English for 2nd year students and higher

SUBJECT CLASSES: «Algebra and Number Theory», «Algebraic Geometry».

LEARNING LOAD: Fall & Spring terms of 2024/25 A.Y., two classes per week, 12 credits (6 per term).

TEACHER: M. Rovinsky.

DESCRIPTION. Associative rings and modules over them appear naturally in all domains of Mathematics.The goal of this course is to present some basic results on rings and modules, as well as to discuss severalinteresting examples and applications.

PREREQUISITES. A standard first-year graduate course in abstract algebra including basic group theory and linear algebra.

SYLLABUS.

- Basic notions and examples of rings and modules
- Simple modules and Schur's lemma
- Semisimple modules and Jacobson's density theorem
- Artinian and noetherian conditions
- Jordan – Hölder theorem
- Krull – Remak – Schmidt theorem
- Applications to the Galois (and non – Galois) theory
- Wedderburn – Artin theorem
- Applications to the representation theory of finite groups
- Categories of modules and their equivalences
- Simple and semisimple rings and Brauer groups

TEXTBOOKS.

- K. R. Goodearl, R. B. Warfield, Jr., An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, 2nd edition,London Mathematical Society Student Texts, vol. 61, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- I. N. Herstein, Noncommutative Rings, 1968, 2014.
- I. Bucur, A. Deleanu, Introduction to the theory of categories and functors, Wiley & Sons.

GRADING RULES. min[10,20/3((ratio of solved problem of the problem sets) + (ratio of solved problem ofthe final exam))]. A half-integer grade is rounded to the bigger nearest integer, another fractional grade isrounded to the nearest integer.

Representations and Probability

simple intercampus seminar in English for 3rd year students and higher

(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Probability and Stochastic Dynamics», «Representations and Invariants».

LEARNING LOAD: Fall & Spring terms of 2024/25 A.Y., one class per week, 6 credits (3 per term).

TEACHERS: A. V. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski.

DESCRIPTION. The seminar is mostly aimed to 3–4th year bachelor students, as well as master and PhD students. Senior participants are expected to deliver a talk on the seminar. The seminar topics are the mix of modern results in areas related to probability theory, random processes, dynamical systems, representations, and older areas, which are prerequisites to the former, as well as keep their own value

PREREQUISITES. Standard courses of calculus (including measure theory) and probability. Basic courses on functional analysis and random processes will be helpful but by no means required for the fall semester, while algebra (representations theory) will be useful for the spring semester. Semesters of the seminar can be taken independently. We plan to hold seminar meetings at the Steklov Mathematical Institute in the fall semester and at HSE Math Dept. in the spring semester.

SYLLABUS. Below we present a list of tentative topics for the seminar. We emphasize that not all of them will be discussed, and vice versa, some other topics certainly will be included. We plan that most of the talks will be delivered by students and will be devoted to various topics related but not limited to representations and probability. In the fall semester, the seminar will be mainly conducted by A. Dymov, A. Klimenko and M. Mariani, while the spring semester will be mostly taken by G. Olshanski.

Tentative topics for fall semester:

- Random dynamical systems and their large time behaviour
- Wiener chaos and normal approximation
- Determinantal random point processes
- Potential theory for Markov chains on generic spaces: representation formulas and applications
- Exponentially growing groups: free, hyperbolic, Markov, Fuchsian, etc. Ergodic theory of their actions

Tentative topics for spring semester:

- Classical representation theory
- Representations of infinite-dimensional groups and operator algebras
- Connections with algebraic combinatorics (symmetric functions), quantum groups, classical analysis, and probability theory

TEXTBOOKS.

- I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, «Introduction to the theory of random processes».
- S. Janson, «Gaussian Hilbert spaces».
- I. Nourdin, G. Peccati, «Normal approximations with Malliavin calculus».

- A. Bovier, F. DenHollander, «Metastability, A Potential – Theoretic Approach».
- I. Seo, «Generalized Dirichlet and Thomson Principles and Their Applications». https://arxiv.org/abs/2102.05538
- P. Etingof et al. «Introduction to representation theory».
- A. Borodin and G. Olshanski, «Representations of the infinite symmetric group».
- P.-L. Meliot, «Representation theory of symmetric groups».
- H. Weyl, «The classical groups: their invariants and representations».

GRADING RULES. Participants can make a talk during the semester (this is usually graded with a mark 6-8) and/or solve the problems of the final exam. The problems list is given to the students approximately a week before the exam, and on the exam a student discusses the solutions that he/she obtained. Formula for calculating the final grade for the exam is provided along with the problems list.

Special functions
hard intercampus online course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Analysis», «Differential Equations and Integrable Systems».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: S. M. Khoroshkin.

DESCRIPTION. The course suggests an accessible introduction to the theory of special functions of hypergeometric type. In particular, it concernes with Gauss hypergeometric function and functions given by transormations of degenerate hypergeometric function (Bessel's, Airy's, etc.) as well as their further generalizations: basic (q) hypergeometric series, elliptic hypergeometric functions and integrals. Nest to elementary functions, they are in the knowledge base of an educated mathematician, physicist, and chemist. The study of the properties of special functions reveals the elegance of methods that combine the means of real and complex analysis, differential and difference equations.

PREREQUISITES. Standard obligatory courses in analysis, linear algebra, complex variables, ordinary differential equations at the 2nd level of the HSE bachelor's degree course.

SYLLABUS.

- Euler's Gamma function and related integrals. Riemann zeta function.
- Classical hypergeometric function: integral representations, hypergeometric identities, adjacency relations, orthogonal Jacobi polynomials, Riemann hypergeometric equation.
- . Degenerate hypergeometric equation. Asymptotic properties of solutions. Whittaker, Legendre, Airy, Bessel functions.
- * Multiple Barnes gamma functions. Double sine and «quantum dilogarithm».
- * Special functions in the theory of representations of Lie groups.
- * Hypergeometric integrals. Selberg and Gustafson integrals. Rhines integral relations.

TEXTBOOKS.

- Whittaker, Watson. Course of modern analysis. Vol. 2.
- Askey, Roy, Andrews. Special Features.
- Vilenkin. Special functions and representation theory.
- Gasper, Rahman. Basic hypergeometric series. 1993.
- V. P. Spiridonov. Essays on the theory of elliptic hypergeometric functions. Adv. Mathematical Sciences, 63:3 (2008), 3–72.

GRADING RULES. Seminar work 4, first test 2, second test 2, exam 5. If the total score exceeds 10, the result is reduced to 10.

Statistical Mechanics
simple intercampus course in English for 4th year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Probability and Stochastic Dynamics», «Mathematical Physics».

LEARNING LOAD: Fall term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHERS: C. Bernardin, M. Mariani.

DESCRIPTION. In the 20th century, statistical mechanics was mathematically formalized into a theory, which became the main source of the mathematical apparatus of the theory of dynamical systems, statistics, optimization and some branches of applied mathematics. The course provides an introduction to the mathematical theory of statistical mechanics through its most influential models and tools.

PREREQUISITES. Measure Theory (Mathematical analysis), Probability Theory.

SYLLABUS.

- Why statistical mechanics? [R]
- Statistical mechanics of lattice systems and Gibbs measures. [FV]
- phase transitions in the Ising model. [FV]
- Mermin – Wagner theorems. [FV]
- Disordered systems. [B]
- Random polymers. [G]
- Gaussian free field. [FV]

TEXTBOOKS.

[FV] S. Freidli, Y. Velenik, Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction (2017).

[B] A. Bovier, Statistical Mechanics of Disordered Systems (2006).

[R] D. Ruelle, Chance and Chaos (1993).

[G] G. Giacomin, Random Polymers models (2007).

GRADING RULES. 0.2 assignments + 0.35 intermediate colloquium + 0.45 final exam.

Stochastic Analysis and Related Topics
hard intercampus online seminar in English for 3rd year students and higher

SUBJECT CLASSES: «Probability and Stochastic Dynamics», «Analysis».

LEARNING LOAD: Fall & Spring terms of 2024/25 A.Y., one class per week, 6 credits (3 per term).

TEACHERS: C. Bernardin, V. D. Konakov.

DESCRIPTION. This research seminar will cover a wide range of problems related to stochastic analysis. Its aim is to present new developments in this field and to give students an opportunity to learn some modern concepts of stochastic analysis in connection with various mathematical area such as PDE's optimization, optimal transport, statistics and machine learning. Special attention will be paid to applications in economics, finance, physics and other natural sciences. The talks will be given by the members of the laboratory of stochastic analysis and its applications (lsa.hse.ru), the guests of the laboratory, the stuff of the faculty of mathematics, as well as by students and postdocs.

PREREQUISITES. Probability with measure theory, basic ideas in stochastic analysis (Brownian motions, stochastic differential equations), basic ideas in analysis.

SYLLABUS.

- Transportation theory, Monge – Kantorovich problem (with applications in machine learning);
- Homogenisation theory for stochastic differential equations and slow-fast systems;
- Discretisation and approximation schemes for stochastic differential equations;
- Optimisation problems (with applications in machine learning);
- Non-parametric and semi-parametric statistics;
- Applications of stochastic analysis in finance, insurance and economics;
- Applications of stochastic analysis in physics, biology and other natural sciences.

TEXTBOOKS.

- Freidlin and Wentzel, «Random Perturbations of Dynamical Systems» (in Russian and in English).
- Kuo, «Introduction to Stochastic Integration» (in English).
- Karlin and Taylor, «A Second Course in Stochastic Processes» (in English).
- Koralov and Sinai, «Theory of probability and random processes» (in Russian and in English).
- Sato, "Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions" (in English).
- Shiryaev, «Probability» (in Russian and in English).
- Tsybakov, «Introduction to Nonparametric Estimation» (in English).
- Villani, «Optimal Transport: Old and New» (in English).
- Wentzel, «Course in the theory of random processes» (in Russian and in English)

GRADING RULES. P, where P is grade for participation in the research seminar

COMMENTS. The seminars will be mainly in English (70%) but the rest will be in Russian, in particular for students who would not be comfortable to give a seminar in English.

Symmetric Functions
hard intercampus course in English for 2nd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Algebra and Number Theory», «Combinatorics and Low-Dim Topology».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: K. G. Kuyumzhiyan.

DESCRIPTION. The theory of symmetric functions is one of the central branches of algebraic combinatorics. Being a rich and beautiful theory by itself, it also has numerous connections with the representation theory and algebraic geometry (especially representation theory of finite or classical groups and geometry of homogeneous spaces). In this course we will mostly focus on the combinatorial aspects of the theory of symmetric functions and study the properties of Schur polynomials. In representation theory they appear as characters of representations of $GL(n)$; they are also closely related with the geometry of Grassmannians. If time permits, we will also discuss Schubert polynomials. 2+

PREREQUISITES. Standard courses of algebra and discrete mathematics: work with polynomials, convert huge sums over Young diagrams, work with finite groups and its subgroups. Some knowledge of representation theory of symmetric and general linear groups is not required, but helpful.

SYLLABUS.

- Symmetric polynomials. The ring of symmetric functions. Tableaux. Elementary symmetric functions. Complete homogeneous symmetric functions. Power sums.
- Alternating polynomials. Schur polynomials and Schur functions. Jacobi–Trudi identities. The Hall inner product. Skew Schur functions and semistandard tableaux. Transition matrices.
- The Littlewood – Richardson rule. The Murnaghan–Nakayama rule.
- Adjoint operators and Hopf algebras. Hopf algebra structure on the ring of symmetric functions.
- Applications to representation theory. Characters of finite groups. Induction and restriction. Characters of symmetric groups. Specht modules. Representations of general linear groups.
- If time permits — Schubert polynomials

TEXTBOOKS.

- Ian G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. Clarendon Press, 1998. (An expanded Russian translation of the 1st edition available)
- А. Л. Городенцев, «Алгебра — 2». http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- Alistair Savage, Symmetric Functions, lecture notes
- William Fulton. Young tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry. CUP, 1997 (Russian translation available)
- Laurent Manivel. Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence. Société Mathématique de France, 1998. (English translation available)
- Allen Knutson. Schubert polynomials and symmetric functions, lecture notes

GRADING RULES. 0.6 problem sets, 0.4 final exam. If You tell the solutions of 70 % of problems in all the sets, it gives 100 for the problem sets.

COMMENTS. Two classes per week: lecture and seminar/problem solving (сдача листков).

The Cremona group and its subgroups
hard intercampus course in English for 3rd year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Algebraic Geometry», «Algebra and Number Theory».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: A. S. Golota.

DESCRIPTION. The Cremona group (over a field k) is the group of birational automorphisms of the projective plane over k, or equivalently, the group of k-automorphisms of the field of rational functions $k(x, y)$. It is one of the most classical objects of study in algebraic geometry since the 19th century. On the other hand, the Cremona group is interesting from the group-theoretic point of view: for instance, the question of its simplicity (existence of non-trivial normal subgroups) has remained open for over one hundred years. In the XXI century a combination of methods from algebraic geometry (minimal model program) and geometric group theory (actions on hyperbolic spaces) allowed to prove numerous important results related to the Cremona group and its subgroups. In this course we will study these methods and results.

PREREQUISITES. Basic algebraic geometry (algebraic varieties, rational maps, divisors, linear systems). Some knowledge of hyperbolic groups (e. g. from the first-semester course «Gromov hyperbolic groups») will be useful, but not strictly necessary.

SYLLABUS.

- Birational geometry of surfaces: rational maps, linear systems, factorization.
- Examples of birational automorphisms: involutions, automorphisms of rational surfaces.
- Intersection theory, action of the Cremona group on a hyperbolic space.
- Elliptic, parabolic and loxodromic elements.
- The Noether – Castelnuovo theorem, the Sarkisov program.
- Topologies and structures on the Cremona group.
- Finite and algebraic subgroups in the Cremona group.
- Constructing normal subgroups in the Cremona group.

TEXTBOOKS.

- J. Deserti, «The Cremona group and its subgroups», https://arxiv.org/abs/1902.03262
- S. Lamy, «The Cremona group», https://www.math.univ-toulouse.fr/~slamy/blog/cremona.html

GRADING RULES. The final grade for the course consists of the grades for the problem sheets and the final (take-home) exam.

Topological data analysis
simple intercampus seminar in English for 2^{nd} year students and higher
(описание на русском)

SUBJECT CLASSES: «Applied Math», «Artificial Intelligence».

LEARNING LOAD: Spring term of 2024/25 A.Y., two classes per week, 6 credits.

TEACHER: V. G. Gorbounov.

DESCRIPTION. Topological Data Analysis (TDA) is a field that lies at the intersection of data analysis, algebraic topology, computational geometry, computer science, statistics, and other related areas. The main goal of TDA is to use ideas and results from geometry and topology to develop tools for studying qualitative features of data. To achieve this goal, one needs precise definitions of qualitative features, tools to compute them in practice, and some guaranteeabout the robustness of those features. One way to address all three points is a method in TDA called persistent homology (PH). This method is appealing for applications because it is based on algebraic topology, which gives a well-understood theoretical framework to study qualitative features of data with complex structure, is computable via linear algebra, and is robust with respect to small perturbations in input data.

PREREQUISITES. Linear and multilinear algebra, topological spaces and their open, closed and compact subsets. No deep knowledge is assumed, all essential definitions and technique will be recalled during the course.

SYLLABUS.

- Simplicial complexes.
- Homologies of simplicial complexes.
- Theory of persistent modules.
- Persistent homologies of a filtered simplicial complex.
- Persistent Laplacian.
- Stability of persistent homology and persistent Laplacian.

TEXTBOOKS. Notes with all the material of the course

GRADING RULES. The mark will be calculated based on the exam and a talk given in the course or a project with the software for calculation of persistent homology