Analízis 4 vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1 Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel. (a bizonyítás vázlata)

1.1 Az implicitfüggvény fogalma

Legyenek n, $m \in \mathbb{N}$ természetes számok, ahol $2 \leq n$ és $1 \leq m \leq n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

akkor az f-et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbb{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f-nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a-nak egy olyan $K(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$ környezete, a b-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbb{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x, y) = 0.$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_{n-m}, y_1, \ldots, y_m) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_{n-m}, y_1, \ldots, y_m) & = & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1, \ldots, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1, \ldots, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

1.2 Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). *Adott $n, m \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az*

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a, b) \in int\mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

1.3 Lokális invertálhatóság

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r,\, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h_{|_I})^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h_{|_I})^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többáltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

függvény és az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a-ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a-beli *lokális inverzének* nevezzük.

Tétel. *Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy egy $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$ és $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor az f függvény az a-ban lokálisan invertálható, és az a-beli lokális inverze folytonos.*

Bizonyítás (vázlat). Feltehető, hogy

$$a = f(a) = 0 \in \mathbb{R}^n,\; f'(0) = (v_{ik})_{i,\,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

pedig az $n \times n$-es egységmátrix:

$$v_{ii} = 1,\, v_{ik} = 0 \quad (i,\, k \in \{i,\, \ldots,\, n\},\, i \neq k).$$

Legyen $y \in \mathbb{R}^n$ és

$$\Phi_y(x) := x - f(x) + y =: g(x) + y \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor $g \in C^1\{0\}$ és

$$g'(0) = \Theta := (0)_{i,\,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

(az $n \times n$-es nullmátrix). Ha tehát

$$g = (g_1,\, \dots,\, g_n),$$

akkor egy $K_r(0) \subset \mathcal{D}_f \quad (r > 0)$ környezet minden pontjában a g függvény differenciálható, a g_k koordinátafüggvények $\partial_i g_k$ $(i,\, k = 1,\, \dots,\, n)$ parciális deriváltfüggvényei valamennyien folytonosak a 0-ban, és

$$\partial_i g_k(0) = 0 \quad (i,\, k = 1,\, \dots,\, n).$$

Válasszuk a $q > 0$ számot úgy, hogy $n \cdot q < 1/2$, ekkor az előbbiek szerint a $K_r(0)$ környezetről az is feltehető, hogy

$$G_r(0) := \overline{K_r(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq r\} \subset \mathcal{D}_f$$

és

$$|\partial_i g_k(x)| < q \quad (x \in G_r(0),\, i,\, k = 1,\, \dots,\, n).$$

Ezért

$$\|g'(x)\|_{(\infty)} = \max\left\{\sum_{i=1}^n |\partial_i g_k(x)| : k = 1,\, \dots,\, n\right\} < n \cdot q < \frac{1}{2} \quad (x \in G_r(0)).$$

Így azt mondhatjuk, hogy

$$\|g(x) - g(t)\| \leq$$

$$\sup\left\{\|g'(\xi)\|_{(\infty)} : \xi \in G_r(0)\right\} \cdot \|x - t\|_\infty \leq \frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \quad (x,\, t \in G_r(0)).$$

Tehát egyúttal

$$\|\Phi_y(x) - \Phi_y(t)\|_\infty = \|g(x) - g(t)\|_\infty \leq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^n,\, x,\, t \in G_r(0)),$$

speciálisan tetszőleges $y \in K_{r/2}(0)$ mellett

$$\|\Phi_y(x)\|_\infty \leq \|g(x)\|_\infty + \|y\|_\infty = \|g(x) - g(0)\|_\infty + \|y\|_\infty \leq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \|x\|_\infty + \|y\|_\infty < r \quad (x \in G_r(0)),$$

azaz $\Phi_y(x) \in K_r(0)$. Mindez azt jelenti, hogy bármelyik $y \in K_{r/2}(0)$ esetén a

$$\Phi_y : G_r(0) \to K_r(0) \quad (\subset G_r(0))$$

leképezés kontrakció. A fixponttétel alkalmazásával ezért $y \in K_{r/2}(0)$ mellett egyértelműen létezik olyan $x_y \in G_r(0)$, ami fixpontja a Φ_y-nak:

$$\Phi_y(x_y) = x_y.$$

Definiálhatunk tehát egy

$$\varphi : K_{r/2}(0) \to G_r(0)$$

leképezést, amelyre

$$\varphi(y) := x_y \quad (y \in K_{r/2}(0)),$$

azaz

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) \quad (y \in K_{r/2}(0)).$$

Más szóval

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) - f(\varphi(y)) + y = g(\varphi(y)) + y = \varphi(y) \quad (y \in K_{r/2}(0)),$$

amiből

$$f(\varphi(y)) = y \quad (y \in K_{r/2}(0))$$

is rögtön következik. Az eddigieket figyelembe véve

$$\|\varphi(y)\|_\infty = \|\Phi_y(\varphi(y))\|_\infty < r \quad (y \in K_{r/2}(0))$$

miatt

$$\varphi : K_{r/2}(0) \to K_r(0).$$

Világos, hogy $\varphi(0) = 0$, hiszen $\Phi_0(0) = -f(0) + 0 = 0$, azaz $y = 0$-ra a $0 \in G_r(0)$ fixpontja a Φ_0-nak.

Mutassuk meg, hogy a φ függvény folytonos. Ha ui. $y, z \in K_{r/2}(0)$, akkor

$$\varphi(y) = \Phi_y(\varphi(y)) + y, \, \varphi(z) = \Phi_z(\varphi(z)) + z$$

amiből

$$\|\varphi(y)-\varphi(z)\|_\infty \leq \|g(\varphi(y))-g(\varphi(z))\|_\infty + \|y-z\|_\infty \leq$$

$$\frac{1}{2}\cdot\|\varphi(y)-\varphi(z)\|_\infty + \|y-z\|_\infty,$$

ezért

$$\|\varphi(y)-\varphi(z)\|_\infty \leq 2\cdot\|y-z\|_\infty.$$

Innen már világos, hogy a φ (egyenletesen) folytonos. ■

Tétel (inverzfüggvény-tétel). *Legyen* $1 \leq n \in \mathbb{N}$, *és* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Tegyük fel, hogy egy* $a \in int\mathcal{D}_f$ *pontban* $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. *Ekkor alkalmas* $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ *környezettel az* $f_{|_{K(a)}}$ *leszűkítés invertálható, a* $g := (f_{|_{K(a)}})^{-1}$ *lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és*

$$h'(x) = \Big(f'(h(x))\Big)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

2 A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.

2.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in \mathcal{D}_f$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik φ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő f függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala.*

2.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges φ, ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$ egy (τ-t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor $\mathcal{M}$ a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \to \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M},\, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x,\, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi_{|\mathcal{D}_\varphi}$.

A Φ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

2.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az $I,\, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \to \mathbb{R},\, h : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x,\, y) \in I \times J).$$

A $\varphi \in I \to J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\, \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

Tétel. *Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \to \mathbb{R}$ is, és az $1/h : J \to \mathbb{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \to \mathbb{R},\ H : J \to \mathbb{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a $\mathcal{D}_\varphi$ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen a H függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}\Big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\Big) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek $\tilde{G}$, $\tilde{H}$), akkor alkalmas α, $\beta \in \mathbb{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha,\ \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi$, $\mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen
$$F(x,\, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I,\, y \in J).$$
Ekkor az
$$F : I \times J \to \mathbb{R}$$
függvényre léteznek és folytonosak a
$$\partial_1 F(x,\, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I,\, y \in J),$$
$$\partial_2 F(x,\, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I,\, y \in J)$$
parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az F függvény folytonosan differenciálható,
$$F(\tau,\, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$
továbbá
$$\partial_2 F(\tau,\, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$
Ezért az F-re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I$, $K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a $(\tau,\, \xi)$ körül meghatározott
$$\varphi : K(\tau) \to K(\xi)$$
folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és
$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t,\, \varphi(t))}{\partial_2 F(t,\, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$
Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A tétel bizonyítása során egyúttal egy módszert ("képletet") is adtunk a
$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$
szeparábilis egyenletre vonatkozó $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-probléma megoldására. Ennek a kulcsmozzanata a G, H primitív függvények meghatározása:
$$G(x) = \int_\tau^x g(t)\, dt,\; H(y) = \int_\xi^y \frac{dt}{h(t)} \quad (x \in I,\, y \in J),$$

amiből aztán a φ-re vonatkozó

$$H\big(\varphi(x)\big) = \int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = G(x) = \int_{\tau}^{x} g(t)\,dt \quad (x \in \mathcal{D}_{\varphi}),$$

azaz

$$\int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_{\tau}^{x} g(t)\,dt \quad (x \in \mathcal{D}_{\varphi})$$

implicit egyenlet adódott.

3 Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel. A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel.

3.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;
4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciatétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbb{N}$ mellett az $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt. Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek.*

3.2 Egzisztenciatétel

Tétel (Picard-Lindelöf). *Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.*

Bizonyítás (vázlat). Legyenek a $\delta_1,\, \delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to \Omega : \psi \in C\}.$$

Az $\mathcal{F}$ halmaz a

$$\rho(\phi,\, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi,\, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha $\mathcal{X}$ jelöli a

$$g : I_* \to \mathbb{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \mathbb{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F},\, x \in I_*).$$

Tehát az f függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" $f_1,\, \ldots,\, f_n$ szimbólumokkal jelölve, a $\psi,\, f$ függvények (és egyúttal az f_i-k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t,\, \psi(t)) \in \mathbb{R} \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

függvények folytonosak. következőképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

integráloknak, és így a

$$\xi + \int_{\tau}^{x} f(t,\, \psi(t))\, dt := (\xi_1 + d_1,\, \dots,\, \xi_n + d_n) \in \mathbb{R}^n$$

"integrálvektoroknak". Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x,\, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_{\tau}^{x} f(t,\, \psi(t))\, dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_\mu := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - \xi\|_\infty \le \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x,\, y)\|_\infty : x \in I_*,\, y \in K_\mu\}$$

(ami meg az f folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_\mu$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max\left\{\left|\int_{\tau}^{x} f_i(t,\, \psi(t))\, dt\right| : i = 1,\, \dots,\, n\right\} \le \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az $\mathcal{F}$ definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to K_\mu : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$-val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1,\, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \le \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is $\mathcal{F}$-beli. (Ha a kiindulásul választott δ_1, δ_2-re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a δ_1, δ_2 helyébe olyan "új" $0 < \tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}$-t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta_1},\, \tau + \tilde{\delta_2}] \subset [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2]$$

és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$

legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I}_* := [\tau - \tilde{\delta_1},\, \tau + \tilde{\delta_2}]$ intervallummal az "új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi,\, \psi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\rho(T\psi,\, T\phi) = \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} =$$

$$\max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))\, dt)\right| : i = 1,\, \ldots,\, n\right\} : x \in I_*\right\} \leq$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))| : i = 1,\, \ldots,\, n\}\, dt\right| : x \in I_*\right\} =$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty\, dt\right| : x \in I_*\right\}.$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t,\, y) - f(t,\, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q),$$

speciálisan

$$\|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty \leq$$

$$L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty \leq L_Q \cdot \rho(\psi,\, \phi) \quad (t \in I_*).$$

Ezért

$$\rho(T\psi,\, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi,\, \phi).$$

Tehát a T leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1,\, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2-t, (ezt - az "eddigi" I_*-ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre

$$T\phi = \phi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad \Big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\Big).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t,\, \varphi(t))\, dt \quad \Big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\Big).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x,\, \varphi(x)) \quad \Big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\Big).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A fenti Picard Lindelöf-egzisztenciatételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja.

Tétel. *Az előző tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg, azaz bármely* φ, ψ *megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Legyen adott $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ középpont, $R > 0$ sugár. Ekkor a kör egy paraméterezése:

$$k(\varphi) := \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) + a \\ R \cdot \sin(\varphi) + b \end{pmatrix} \quad (\varphi \in [0,\, 2\pi]).$$

Egy $\varphi \in [0,\, 2\pi]$ helyen az érintősugár paraméterezése

$$r_\varphi(t) = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) \\ R \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} t + k(\varphi) \quad (\varphi \in [0,\, 2\pi]).$$

Keresni akarunk olyan $\varphi \in [0,\, 2\pi]$ helyeket, ahol az érintősugár tartalmazza az origót, azaz

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_{r_\varphi}.$$

Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $t \in \mathbb{R}$ paraméter, hogy

$$r_\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mindezt kiírva, keressünk olyan $\varphi \in [0,\, 2\pi]$-t, hogy valamilyen $t \in \mathbb{R}$ paraméterre

$$\begin{cases} -R \cdot \sin(\varphi) \cdot t + R \cdot \cos(\varphi) + a = 0 \\ R \cdot \cos(\varphi) \cdot t + R \cdot \sin(\varphi) + b = 0 \end{cases}.$$

Legyen $\varphi \in [0,\, 2\pi]$ esetén $v_\varphi := \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) \\ R \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $u_\varphi := \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) + a \\ R \cdot \sin(\varphi) + b \end{pmatrix}$. Azaz valamilyen $\varphi \in [0,\, 2\pi]$ esetén

$$v_\varphi \cdot t + u_\varphi = \mathbf{0}.$$

Ha v_φ, u_φ vektorok lineárisan összefüggőek, akkor létezik egy ilyen $t \in \mathbb{R}$. Tehát olyan $\varphi \in [0,\, 2\pi]$ számokat kell keresni, amire v_φ, u_φ lineárisan összefüggő lesz.