

# Analízis alkalmazásai vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

## Tartalom

<b>1</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>4</b>
1.1	Implicitfüggvény-tétel . . . . .	6
1.2	Inverzfüggvény-tétel . . . . .	6
1.3	Hiperkoordinátás parciális deriváltak . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>9</b>
2.1	Elsőrendű szükséges feltétel . . . . .	10
2.2	Másodrendű elégséges feltétel . . . . .	13
2.3	Másodrendű szükséges feltétel . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>15</b>
3.1	Közönséges differenciálegyenletek . . . . .	15
3.2	Teljes megoldás . . . . .	16
3.3	Szeparábilis differenciálegyenlet . . . . .	16
3.4	Rakéta emelkedési ideje . . . . .	20
3.5	Egzakt differenciálegyenlet . . . . .	21
3.6	Multiplikátor módszer . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>25</b>
4.1	Lineáris differenciálegyenlet . . . . .	25
4.2	Radioaktív bomlás . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>31</b>
5.1	Lipschitz-feltétel . . . . .	31
5.2	Egzisztenciátétel . . . . .	32

<b>6</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>36</b>
6.1	Lineáris differenciálegyenlet-rendszer . . . . .	36
6.2	Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptétele . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>42</b>
7.1	Alaprendszer, alapmátrix . . . . .	42
7.2	Állandók variálásának módszere . . . . .	42
7.3	Állandó együtthatós diagonalizálható eset . . . . .	43
7.4	Tetszőleges állandó együtthatós mátrix . . . . .	45
7.5	Valós értékű megoldások . . . . .	46
<b>8</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>48</b>
8.1	Új feladat megfogalmazása . . . . .	48
8.2	Átviteli elv . . . . .	50
8.3	Állandók variálásának módszere . . . . .	51
<b>9</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>54</b>
9.1	Alaprendszer . . . . .	56
9.2	Valós értékű megoldások . . . . .	57
<b>10</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>58</b>
10.1	Kvázipolinomok . . . . .	58
10.2	Kvázopolinom jobb oldal . . . . .	59
10.3	Rezgések . . . . .	61
<b>11</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>64</b>
11.1	Függvénysorozatok, függvénysorok . . . . .	64
11.2	Konvergencia, határfüggvény . . . . .	65
11.3	Trigonometrikus sorok, Fourier-sorok . . . . .	67
11.4	Egyenletes konvergencia . . . . .	70
11.5	Weierstrass-kritérium . . . . .	72
<b>12</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>73</b>
12.1	Folytonosság és a határátmenet . . . . .	76
12.2	Riemann-integrálhatóság és a határátmenet . . . . .	77
<b>13</b>	<b>Vizsgakérdés</b>	<b>80</b>
13.1	Differenciálhatóság és a határátmenet . . . . .	80

<b>14 Vizsgakérdés</b>	<b>84</b>
14.1 Trigonometrikus rendszer . . . . .	84
14.2 Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok . . . . .	85
14.3 Bessel - Parseval . . . . .	87
<b>15 Vizsgakérdés</b>	<b>89</b>
15.1 Teljesség . . . . .	89

# 1 Vizsgakérdés

*Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).*

Legyenek  $n, m \in \mathbf{N}$  természetes számok,  $1 \leq m < n$ . Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

akkor az  $f$ -et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az  $f(x, y)$  helyettesítési értékben az argumentum első változójára  $x \in \mathbf{R}^{n-m}$ , a második változójára pedig  $y \in \mathbf{R}^m$  teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen  $(a, b) \in \mathcal{D}_f$  zérushelye az  $f$ -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az  $a$ -nak egy olyan  $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$  környezete, a  $b$ -nek pedig olyan  $K(b) \subset \mathbf{R}^m$  környezete, hogy tetszőleges  $x \in K(a)$  esetén egyértelműen létezik olyan  $y \in K(b)$ , amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a  $\varphi(x) := y$  hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden  $x \in K(a)$  mellett az  $y = \varphi(x)$  az egyetlen olyan  $y \in K(b)$  hely amelyre

$$f(x, y) = 0.$$

Az előbbi  $\varphi$  függvényt az  $f$  által (az  $(a, b)$  körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden  $x = (x_1, \dots, x_{n-m}) \in K(a)$  mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1, \dots, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván  $\varphi(a) = b$ .

A  $\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$  implicitfüggvényre a következő igaz:

$$(K(a) \times K(b)) \cap \{f = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}.$$

Geometria szóhasználatával élve

$$\text{graf } \varphi := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}$$

(a  $\varphi$  függvény "grafikonja", ami a függvény definíciója miatt persze maga a  $\varphi$  függvény), tehát az előbbi egyenlőség így néz ki:

$$(K(a) \times K(b)) \cap \{f = 0\} = \text{graf } \varphi = \varphi.$$

## 1.1 Implicitfüggvény-tétel

**Tétel.** Adott  $n, m \in \mathbf{N}$ , valamint  $1 \leq m < n$  mellett az

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat:  $f \in C^1$ , és az  $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$  helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas  $K(a), K(b)$  környezetekkel létezik az  $f$  által az  $(a, b)$  körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

A tételben  $f \in C^1, \partial_2 f(a, b) \neq 0$  feltételekből következően a  $K(a), K(b)$  környezetekről az is feltehető, hogy

$$\det \partial_2 f(x, y) \neq 0 \quad (x \in K(a), y \in K(b)),$$

egyúttal

$$\det \partial_2 f(x, \varphi(x)) \neq 0 \quad (x \in K(a)).$$

Ezért az  $x \in K(a)$  helyeken a  $\partial_2 f(x, \varphi(x))$  mátrix valóban invertálható.

## 1.2 Inverzfüggvény-tétel

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h \in C^1\{a\}$$

és  $h'(a) \neq 0$ , akkor egy alkalmas  $r > 0$  mellett

$$I := (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a  $(h|_I)^{-1}$  inverzfüggvény, a  $g := (h|_I)^{-1}$  függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többváltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen  $1 \leq n \in \mathbf{N}$  mellett adott az

$$f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény és az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pont. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény *lokálisan invertálható* az  $a$ -ban, ha létezik olyan  $K(a) \subset \mathcal{D}_f$  környezet, hogy a  $g := f|_{K(a)}$  leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a  $g^{-1}$  inverzfüggvényt az  $f$   $a$ -beli *lokális inverzének* nevezzük.

**Tétel.** Legyen  $1 \leq n \in \mathbf{N}$ , és  $f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Tegyük fel, hogy egy  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban  $f \in C^1\{a\}$ ,  $\det f'(a) \neq 0$ . Ekkor alkalmas  $K(a) \subset \mathcal{D}_f$  környezettel az  $f|_{K(a)}$  leszűkítés invertálható, a  $h := (f|_{K(a)})^{-1}$  lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = (f'(h(x)))^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

### 1.3 Hiperkoordinátás parciális deriváltak

Legyen adott  $n, m \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq m < n \in \mathbf{N}$  mellett

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m.$$

Az előbbiek alapján most adott  $k \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq k < n$  esetén legyen  $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-k} \times \mathbf{R}^k$ . Ha  $\xi \in \mathcal{D}_f$ , akkor legyen  $(a, b) = \xi$ , ahogy eddig. Azaz  $f$ -et fel lehet fogni egy kétváltozós függvénynek. Tekintsük az alábbi definíciót:

$$\mathcal{D}_1^{(a,b)} := \{x \in \mathbf{R}^{n-k} : (x, b) \in \mathcal{D}_f\},$$

$$\mathcal{D}_2^{(a,b)} := \{y \in \mathbf{R}^k : (a, y) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Ekkor analóg módon a *szokásos* parciális deriváltakhoz

$$f_{(a,b),1} \in \mathbf{R}^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

$$f_{(a,b),2} \in \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

ahol

$$f_{(a,b),1}(x) := f(x, b) \quad (x \in \mathcal{D}_1^{(a,b)}),$$

$$f_{(a,b),2}(y) := f(a, y) \quad (y \in \mathcal{D}_2^{(a,b)}).$$

Ebben az esetben a *hiperkoordinátás* alakja a parciális deriváltaknak (amennyiben értelmes a derivált):

$$\partial_1 f(a, b) := \partial_1 f(a, b) := f'_{(a,b),1}(a),$$

$$\partial_2 f(a, b) := \partial_2 f(a, b) := f'_{(a,b),2}(b).$$

Azaz egy  $(a, b)$  helyen lerögzítjük az első vagy második változók és az így kapott függvénynek vesszük a deriváltját. Ha  $f$  egy differenciálható függvény az  $(a, b) \in \mathcal{D}_f$  helyen, akkor

$$f'(a, b) = [\partial_1 f(a, b) \quad \partial_2 f(a, b)] = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a, b) & \partial_2 f_1(a, b) & \cdots & \partial_n f_1(a, b) \\ \partial_1 f_2(a, b) & \partial_2 f_2(a, b) & \cdots & \partial_n f_2(a, b) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a, b) & \partial_2 f_n(a, b) & \cdots & \partial_n f_n(a, b) \end{bmatrix},$$

ahol a  $\partial_1 f(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times (n-k)}$ ,  $\partial_2 f(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times k}$  mátrixok rendre az  $f'(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times n}$  mátrix első  $n - k$ -edik és utolsó  $k$ -edik oszlopvektorai. Pl. legyen  $f \in \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$   $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ -ben differenciálható függvény,  $k := 2$ . Ekkor

$$f \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$$

és

$$f'(a, b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a, b) & \partial_2 f_1(a, b) & \partial_3 f_1(a, b) \\ \partial_1 f_2(a, b) & \partial_2 f_2(a, b) & \partial_3 f_2(a, b) \\ \partial_1 f_3(a, b) & \partial_2 f_3(a, b) & \partial_3 f_3(a, b) \\ \partial_1 f_4(a, b) & \partial_2 f_4(a, b) & \partial_3 f_4(a, b) \end{bmatrix},$$

$$\partial_1 f(a, b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a, b) \\ \partial_1 f_2(a, b) \\ \partial_1 f_3(a, b) \\ \partial_1 f_4(a, b) \end{bmatrix}, \partial_2 f(a, b) = \begin{bmatrix} \partial_2 f_1(a, b) & \partial_3 f_1(a, b) \\ \partial_2 f_2(a, b) & \partial_3 f_2(a, b) \\ \partial_2 f_3(a, b) & \partial_3 f_3(a, b) \\ \partial_2 f_4(a, b) & \partial_3 f_4(a, b) \end{bmatrix}.$$



## 2 Vizsgakérdés

*Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).*

Legyen  $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$ ,  $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ , és

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}, g = (g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvénynek a  $g = 0$  feltételre vonatkozóan *feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a  $c$ -ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az  $f(c)$ -re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá  $c$ -re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az  $f$ -nek a  $c \in \{g = 0\}$  helyen feltételes lokális szélsőértéke van a  $g = 0$  feltételre nézve, akkor egy alkalmas  $K(c)$  környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \quad (\xi \in \{g = 0\} \cap K(c))$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \quad (\xi \in \{g = 0\} \cap K(c))$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

## 2.1 Elsőrendű szükséges feltétel

**Tétel.** Tegyük fel, hogy  $1 \leq n$ ,  $m \in \mathbf{N}$ ,  $m < n$ ,  $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$  nyílt halmaz, és  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Ha  $f \in D$ ,  $g \in C^1$ , az  $f$ -nek a  $c \in \{g = 0\}$  helyen feltételes lokális szélsőértéke van a  $g = 0$  feltételre vonatkozóan, továbbá a  $g'(c)$  Jacobi-mátrix rangja megegyezik  $m$ -mel, akkor létezik olyan  $\lambda \in \mathbf{R}^m$  vektor, hogy

$$\text{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő  $\lambda g$  függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó  $f$  függvény helyett (egy alkalmas  $\lambda \in \mathbf{R}^m$  vektorral) az  $F := f + \lambda g$  függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is.

**Bizonyítás.** A rangfeltétel szerint a  $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$  Jacobi-mátrixnak van olyan  $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$  részmátrixa, amelyre  $\det A \neq 0$ . Feltehető, hogy az  $A$ -t a  $g'(c)$  mátrix utolsó  $m$  oszlopa határozza meg, amikor is az  $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$  felbontást úgy képzeljük el, hogy a

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x, y) \in \mathbf{R}^n$$

vektorokra

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően  $c = (a, b)$ . Ekkor tehát

$$\det \partial_2 g(a, b) = \det A \neq 0.$$

Mivel  $g(a, b) = 0$ , ezért alkalmazható az implicitfüggvény tétel: alkalmas

$$K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}, K(b) \subset \mathbf{R}^m$$

környezettel létezik a  $g$  függvény által az  $(a, b)$  körül meghatározott

$$h : K(a) \rightarrow K(b)$$

$h \in C^1$  implicitfüggvény:

$$(K(a) \times K(b)) \cap \{g = 0\} = \{(x, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -(\partial_2 g(x, h(x)))^{-1} \cdot \partial_1 g(x, h(x)) \quad (x \in K(a)).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas  $K(c) \subset U$  környezettel (pl.)

$$f(\xi) \leq f(c) \quad (\xi = (x, y) \in K(c) \cap \{g = 0\}).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x, h(x)) \quad (x \in K(a))$$

függvényre  $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \rightarrow \mathbf{R}$  és

$$\Phi(x) \leq f(c) = \Phi(a) \quad (x \in K(a)).$$

Más szóval a  $\Phi$  függvénynek az  $a$ -ban lokális maximuma van. A  $\Phi$  differenciálható, ezért

$$\Phi'(a) = \text{grad } \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x, h(x)) \quad (x \in K(a))$$

függvénnyel  $\Phi = f \circ \varphi$  és  $\varphi \in D$ , valamint  $I$ -vel jelölve az  $\mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ -beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times (n-m)} \quad (x \in K(a)).$$

Következésképpen

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = f'(a, h(a)) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$f'(c) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = \partial_1 f(c) + \partial_2 f(c) \cdot h'(a) =$$

$$\partial_1 f(c) - \partial_2 f(c) \cdot (\partial_2 f(c))^{-1} \cdot \partial_1 g(c) = \partial_1 f(c) + \lambda \cdot \partial_1 g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_2 f(c) \cdot (\partial_2 g(c))^{-1} \in \mathbf{R}^m.$$

Tehát (a  $\partial_1$  értelmezéséből)

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-m). \quad (1)$$

A  $\lambda$  vektor definíciójából ”átszorzással” azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 f(c) + \lambda \cdot \partial_2 g(c) = 0,$$

azaz (a  $\partial_2$  definíciójából)

$$\partial_j f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_j g_l(c) = 0 \quad (j = n-m+1, \dots, n). \quad (2)$$

A (1), (2) formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

más szóval

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + \lambda g)(c) &= 0 = \\ \left( \partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_1 g_l(c), \dots, \partial_n f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_n g_l(c) \right) &= 0. \end{aligned}$$

■

A fentiekben az  $m < n$  feltételezéssel éltünk. Ha  $m = n$ , akkor pl. az  $g'(c) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , és a rang  $g'(c) = m = n$  rangfeltétel jelentése az, hogy a

$$g'(c) = \begin{bmatrix} \text{grad } g_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad } g_n(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

Jacobi-mátrix invertálható. Tehát a  $\text{grad } g_k(a) \in \mathbf{R}^n$  ( $k = 1, \dots, n$ ) vektorok lineárisan függetlenek, más szóval bázist alkotnak az  $\mathbf{R}^n$ -ben. Így (egyértelműen) léteznek olyan  $\lambda_j \in \mathbf{R}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) számok, amelyekkel

$$-\text{grad } f(c) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{grad } g_j(c),$$

azaz a  $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$  vektorral  $\text{grad}(f + \lambda g)(c) = 0$ . Röviden: ekkor is igaz a tétel, de az állítása triviális.

Legyen adott a

$$Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

kvadratikus alak, a  $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$  mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbf{R}^n : Bx = 0\}.$$

Feltesszük, hogy  $m < n$ , és a  $B$  mátrix rangja  $m$ . Ekkor azt mondjuk, hogy a  $Q$  kvadratikus alak a  $B$ -re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha  $Q(x) > 0$  ( $0 \neq x \in \mathcal{A}_B$ );
2. *feltételesen negatív definit*, ha  $Q(x) < 0$  ( $0 \neq x \in \mathcal{A}_B$ );
3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha  $Q(x) \geq 0$  ( $x \in \mathcal{A}_B$ );
4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha  $Q(x) \leq 0$  ( $x \in \mathcal{A}_B$ ).

## 2.2 Másodrendű elégséges feltétel

**Tétel.** Az  $n, m \in \mathbf{N}, 1 \leq m < n$  paraméterek mellett legyen adott az  $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$  nyílt halmaz, és tekintsük az  $f : U \rightarrow \mathbf{R}, g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  függvényeket. Feltesszük, hogy  $f, g \in D^2, c \in \{g = 0\}$ , a  $g'(c)$  Jacobi-mátrix rangja  $m$ , továbbá valamilyen  $\lambda \in \mathbf{R}^m$  vektorral az  $F := f + \lambda g$  függvényre

1.  $\text{grad } F(c) = 0$ ;
2. A  $Q_c^F$  kvadratikus alak a  $g'(c)$  mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az  $f$ -nek a  $c$ -ben a  $g = 0$  feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Idézzük fel, hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x, x \rangle \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

## 2.3 Másodrendű szükséges feltétel

**Tétel.** Az  $n, m \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq m < n$  paraméterek mellett legyen adott az  $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$  nyílt halmaz, és  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $f, g \in D^2$  függvények. Tegyük fel, hogy valamilyen  $c \in \{g = 0\}$  helyen  $f$ -nek lokális minimuma (maximuma) van a  $\{g = 0\}$  feltételre vonatkozóan, a  $g'(c)$  Jacobi-mátrix rangja megegyezik  $m$ -mel. Ekkor létezik olyan  $\lambda \in \mathbf{R}^m$ , hogy az  $F := f + \lambda g$  függvényre az alábbiak teljesülnek:

1.  $\text{grad } F(c) = 0$ ;
2. a  $Q_c^F$  kvadratikus alak a  $g'(c)$  mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) **szemidefinit**.

### 3 Vizsgakérdés

*A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.*

#### 3.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen  $0 < n \in \mathbf{N}$ ,  $I \subset \mathbf{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan  $\varphi \in I \rightarrow \Omega$  függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1.  $\mathcal{D}_\varphi$  nyílt intervallum;
2.  $\varphi \in D$ ;
3.  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$ .

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \Omega$  elemek, akkor a fenti  $\varphi$  függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4.  $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$  és  $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban mindegyre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik  $\varphi$  függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő  $f$  függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala*.

### 3.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* egyértelműen oldható meg, ha tetszőleges  $\varphi, \psi$  megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel  $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ , ezért  $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$  egy  $(\tau$ -t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor  $\mathcal{M}$  a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy  $\tau$ -t tartalmazó nyílt intervallum és  $J \subset I$ . Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \rightarrow \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy  $\Phi(\tau) = \xi$ ,  $\Phi \in D$  és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy  $\Phi \in \mathcal{M}$ , és (ld. a  $\mathcal{D}_\Phi = J$  definícióját) bármelyik  $\varphi \in \mathcal{M}$  esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden  $\varphi = \Phi|_{\mathcal{D}_\varphi}$ .

A  $\Phi$  függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

### 3.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen  $n := 1$ , továbbá az  $I, J \subset \mathbf{R}$  nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \rightarrow \mathbf{R}, h : J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x, y) \in I \times J).$$



A  $\varphi \in I \rightarrow J$  megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$  számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

**Tétel.** Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen  $\varphi, \psi$  megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Mivel a  $h$  függvény sehol sem nulla, ezért egy  $\varphi$  megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A  $g : I \rightarrow \mathbf{R}$  is, és az  $1/h : J \rightarrow \mathbf{R}$  is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}, H : J \rightarrow \mathbf{R}$$

primitív függvényeik:  $G' = g$  és  $H' = 1/h$ . Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a  $\mathcal{D}_\varphi$  is egy nyílt intervallum) van olyan  $c \in \mathbf{R}$ , hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az  $1/h$  függvény nyilván nem vesz fel 0-t a  $J$  intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a  $H'$  függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a  $H'$  állandó előjelű. Következésképpen a  $H$

függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A  $H^{-1}$  inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$ , és a  $\varphi$  megoldás eleget tesz a  $\varphi(\tau) = \xi$  kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a  $G, H$  helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek  $\tilde{G}, \tilde{H}$ ), akkor alkalmas  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha, \quad \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen  $\tilde{c} \in \mathbf{R}$  konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a  $t := \tau$  helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik  $G, H$  primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a  $\psi$  függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a  $\mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\psi$  értelmezési tartományok mindegyike egy-egy  $\tau$ -t tartalmazó nyílt intervallum, ezért  $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$  is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a  $G, H$  primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az  $F$  függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az  $F$ -re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas  $K(\tau) \subset I, K(\xi) \subset J$  környezetekkel létezik az  $F$  által a  $(\tau, \xi)$  körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \rightarrow K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire  $\varphi(\tau) = \xi$  és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t, \varphi(t))}{\partial_2 F(t, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a  $\varphi$  implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

### 3.4 Rakéta emelkedési ideje

Egy  $m$  tömegű rakétát  $v_0$  kezdősebességgel függőlegesen fellövünk (függőleges hajítás). Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő (jelöljük  $\alpha$ -val a nehézségi gyorsulást) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen  $\beta$ ). Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

Ha  $v \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor – feltételezve, hogy  $v \in D$ ,  $\mathcal{D}_v$  intervallum és  $0 \in \mathcal{D}_v$  – a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika Newton-féle mozgástörvényeit): adott  $m, \alpha, \beta$  pozitív számok mellett olyan differenciálható  $v$  függvényt keresünk, amelyre

$$mv'(t) = -m\alpha - \beta v^2(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Világos, hogy  $v(0) = v_0$ . Azt a  $T \in \mathcal{D}_v$  "pillanatot" kell meghatározni, amikor  $v(T) = 0$ .

$$I := J := \mathbf{R}, g(x) := -\alpha, h(y) := 1 + \frac{\beta y^2}{m\alpha} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

választással egy szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Legyen  $\tau := 0$ ,  $\xi := v_0$ , ekkor a

$$G(x) := \int_0^x -\alpha dt = -\alpha x \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$H(y) := \int_{v_0}^y \frac{1}{1 + \frac{\beta t^2}{m\alpha}} dt =$$

$$\sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \cdot \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot y - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (y \in \mathbf{R})$$

függvények eleget tesznek az előbbi tétel bizonyításában mondottaknak. Következésképpen

$$H(v(t)) = G(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v),$$

azaz

$$\operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t) \right) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

A  $v(T) = 0$  egyenlőségből a  $t := T$  helyettesítéssel – figyelembe véve, hogy  $\arctg(0) = 0$  – az adódik, hogy

$$T = \sqrt{\frac{m}{\beta\alpha}} \cdot \arctg\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right).$$

### 3.5 Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen  $n := 1$ , és az  $I, J \subset \mathbf{R}$  nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \text{ és } h : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad ((x, y) \in I \times J).$$

Ekkor a fenti minden  $\varphi$  megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott d.e. *egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y)) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$\text{grad } G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g, h).$$

Ha  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$  és a  $\varphi$  függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

**Tétel.** Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen  $\varphi, \psi$  megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Valóban,  $0 \notin \mathcal{R}_h$  miatt a feltételezett  $\varphi$  megoldásra

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen  $\varphi$  függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges  $x \in \mathcal{D}_\varphi$  helyen

$$F'(x) = \langle \text{grad } G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle =$$

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A  $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$  halmaz nyílt intervallum, ezért az  $F$  konstans függvény, azaz létezik olyan  $c \in \mathbf{R}$ , amellyel

$$G(x, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel  $\varphi(\tau) = \xi$ , ezért

$$c = G(\tau, \xi).$$

A  $G$ -ről feltehetjük, hogy  $G(\tau, \xi) = 0$ , ezért a szóban forgó k.é.p.  $\varphi$  megoldása eleget tesz a

$$G(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a  $\varphi$  nem más, mint egy, a  $G$  által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó k.é.p. minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján  $G \in C^1$ ,  $G(\tau, \xi) = 0$ , továbbá

$$\partial_2 G(\tau, \xi) = h(\tau, \xi) \neq 0,$$

ezért a  $G$ -re (a  $(\tau, \xi)$  helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \rightarrow J$$

(implicit)függvény, amelyre  $\mathcal{D}_\psi \subset I$  nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi, G(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi), \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x, \psi(x))}{\partial_2 G(x, \psi(x))} = -\frac{g(x, \psi(x))}{h(x, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

### 3.6 Multiplikátor módszer

Az egzakt differenciálegyenlet definíciójában szereplő  $\text{grad } G = (g, h)$  feltételből a

$$\partial_1 G = g, \partial_2 G = h$$

egyenlőségek következnek. Ha  $g, h \in D$ , akkor  $G \in D^2$ , így a Young-tétel miatt

$$\partial_{12} G = \partial_2 g = \partial_{21} G = \partial_1 h,$$

azaz ekkor a

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel teljesülése szükséges az "egzaktsághoz".

Azonban, ha  $g, h \in D$ , de ez előző

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel nem teljesül, akkor esetenként alkalmas ekvivalens átalakításokkal a feladat "egzakt alakra hozható". Ezek közül az átalakítások közül az ún. *multiplikátor módszer* a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy a

$$\mu : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

differenciálható függvény (pl.) minden helyen pozitív. Ekkor a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség nyilván ekvivalens a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x)) \cdot \mu(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x)) \cdot \mu(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel, azaz a  $g$ ,  $h$  függvények "kicserélhetők" a  $g\mu$ ,  $h\mu$  függvényekre. Ekkor az egzaktságnak az előző megjegyzésben megfogalmazott szükséges feltételéhez a

$$\partial_2(g\mu) = g \cdot \partial_2\mu + \mu \cdot \partial_2g = \partial_1(h\mu) = h \cdot \partial_1\mu + \mu \cdot \partial_1h$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük.



## 4 Vizsgakérdés

*Lineáris differenciálegyenlet. Az állandók variálásának módszere.  
A radioaktív bomlás felezési idejének meghatározása.*

### 4.1 Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most  $n := 1$  és az  $I \subset \mathbf{R}$  egy nyílt intervallum, valamint a

$$g, h : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \mathbf{R}$  mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a  $\theta$  függvény is és a  $\psi$  függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és  $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$ . Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot (\theta(t) - \psi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a  $\theta - \psi$  függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben  $h \equiv 0$ :

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő  $h$  függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

**Tétel.** Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges  $\varphi, \psi$  megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Legyen a

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és  $G' = g$  (a  $g$ -re tett feltételek miatt ilyen  $G$  primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik  $t \in \mathcal{D}_\chi$  helyen

$$\begin{aligned} \left( \frac{\chi}{\varphi_0} \right)'(t) &= \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} = \\ &= \frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0, \end{aligned}$$

azaz (lévén a  $\mathcal{D}_\chi$  nyílt intervallum) egy alkalmas  $c \in \mathbf{R}$  számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol  $c \in \mathbf{R}$ . Nyilván minden ilyen  $\chi$  függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a  $\theta$  függvény is és a  $\psi$  függvény is megoldása és  $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$ , akkor egy alkalmas  $c \in \mathbf{R}$  együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény, hogy az  $m \cdot \varphi_0$  függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (az *állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az  $m$ -re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen  $m$  függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a  $h/\varphi_0$  függvény bármelyik  $m$  primitív függvényét is véve, az  $m \cdot \varphi_0$  függvény megoldása a

lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges  $\varphi \in I \rightarrow \mathbf{R}$  megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol  $m$  egy tetszőleges primitív függvénye a  $h/\varphi_0$  függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen  $c \in \mathbf{R}$  és  $J \subset I$  nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ez megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) = \\ &= \frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J). \end{aligned}$$

Speciálisan az "egész"  $I$  intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbf{R}, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik  $\varphi$  megoldásra egy alkalmas  $c \in \mathbf{R}$  mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a  $J := \mathcal{D}_\varphi$  jelöléssel  $\varphi = \psi_{c|_J}$ .

Ha  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \mathbf{R}$ , és a  $\varphi(\tau) = \xi$  kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden  $\varphi$ ,  $\psi$  megoldására  $\varphi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\varphi}}$  és  $\psi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\psi}}$ , ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

A tétel bizonyításából a következők is kiderültek: legyen

$$\mathcal{M} := \{\varphi : I \rightarrow \mathbf{R} : \varphi \in D, \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in I)\},$$

$$\mathcal{M}_h := \{\varphi : I \rightarrow \mathbf{R} : \varphi \in D, \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in I)\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{M}_h = \{c \cdot \varphi_0 : c \in \mathbf{R}\}$$

(azaz algebrai nyelven mondva az  $\mathcal{M}_h$  egy 1 dimenziós vektortér), és

$$\mathcal{M} = m \cdot \varphi_0 + \mathcal{M}_h := \{\varphi + m \cdot \varphi_0 : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

Itt  $m \cdot \varphi_0$  helyébe bármelyik  $\psi \in \mathcal{M}$  (ún. *partikuláris megoldás*) írható, így

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h = \{\varphi + \psi : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

## 4.2 Radioaktív bomlás

*Radioaktív anyag bomlik, a bomlási sebesség egyenesen arányos a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. A bomlás kezdetétől számítva mennyi idő alatt bomlik el az anyag fele?*

Legyen  $m_0$  az anyag eredeti,  $\varphi(t)$  pedig a  $t$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) időpontban még el nem bomlott anyag mennyisége. A feladatban szereplő arányossági tényező  $0 < \alpha \in \mathbf{R}$ . Ekkor

$$\varphi'(t) = -\alpha\varphi(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol  $\varphi(0) = m_0$ . A  $T$  (felezési időt) keressük, amikor is  $\varphi(T) = m_0/2$ .

Ez egy homogén lineáris differenciálegyenlet, ahol  $g \equiv -\alpha$ . Ezért (pl.)

$$G(t) = -\alpha t \quad (t \in I).$$

valamint

$$\varphi_0(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \in I),$$

ill.

$$\varphi(t) = ce^{-\alpha t} \quad (t \in I, c \in \mathbf{R}).$$

Mivel

$$m_0 = \varphi(0) = c,$$

ezért

$$\varphi(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (t \in I).$$

A  $T$  definíciója alapján

$$\varphi(T) = m_0 e^{-\alpha T} = \frac{m_0}{2},$$

azaz  $e^{-\alpha T} = 1/2$ . Innen

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

## 5 Vizsgakérdés

*Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása). A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel (bizonyítás nélkül).*

### 5.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan  $\varphi \in I \rightarrow \Omega$  függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1.  $\mathcal{D}_\varphi$  nyílt intervallum;
2.  $\varphi \in D$ ;
3.  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$ ;
4. adott  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \Omega$  mellett  $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$  és  $\varphi(\tau) = \xi$ .

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciátétel).

Legyenek tehát  $0 < n \in \mathbf{N}$  mellett az  $I \subset \mathbf{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \Omega$  esetén keressük a fenti differenciálható  $\varphi \in I \rightarrow \Omega$  függvényt. Az  $f$  függvényről feltesszük, hogy minden kompakt  $\emptyset \neq Q \subset \Omega$  halmazhoz létezik olyan  $L_Q \geq 0$  konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az  $f$  (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

## 5.2 Egzisztenciátétel

**Tétel (Picard-Lindelöf).** Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.

**Bizonyítás (vázlat).** Legyenek a  $\delta_1, \delta_2 > 0$  olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow \Omega : \psi \in C\}.$$

Az  $\mathcal{F}$  halmaz a

$$\rho(\phi, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha  $\mathcal{X}$  jelöli a

$$g : I_* \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt \in \mathbf{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F}, x \in I_*).$$

Tehát az  $f$  függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos"  $f_1, \dots, f_n$  szimbólumokkal jelölve, a  $\psi, f$  függvények (és egyúttal az  $f_i$ -k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t, \psi(t)) \in \mathbf{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények folytonosak. Következésképpen (minden  $x \in I_*$  esetén) van értelme a

$$d_i := \int_{\tau}^x f_i(t, \psi(t)) dt \quad (i = 1, \dots, n)$$



integráloknak, és így a

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt := (\xi_1 + d_1, \dots, \xi_n + d_n) \in \mathbf{R}^n$$

”integrálvektoroknak”. Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a  $T\psi$  függvény folytonos, minden  $x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)$  helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az  $I_*$  alkalmas megválasztásával minden  $\psi \in \mathcal{F}$  függvényre  $T\psi \in \mathcal{F}$ , azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a  $\mu > 0$  számot úgy, hogy a

$$K_{\mu} := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - \xi\|_{\infty} \leq \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen  $\mu$  az  $\Omega$  nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x, y)\|_{\infty} : x \in I_*, y \in K_{\mu}\}$$

(ami meg az  $f$  folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az  $I_* \times K_{\mu}$  halmaz kompakt). A jelzett  $T\psi \in \mathcal{F}$  tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max \left\{ \left| \int_{\tau}^x f_i(t, \psi(t)) dt \right| : i = 1, \dots, n \right\} \leq \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az  $\mathcal{F}$  definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow K_{\mu} : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető  $M \cdot \delta$ -val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Így  $M \cdot \delta \leq \mu$  esetén a fenti  $T\psi$  is  $\mathcal{F}$ -beli. (Ha a kiindulásul választott  $\delta_1, \delta_2$ -re  $M \cdot \delta > \mu$ , akkor írjunk a  $\delta_1, \delta_2$  helyébe olyan ”új”  $0 < \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ -t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2]$$

és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

legyen. Az  $I_*$  helyett az  $\tilde{I}_* := [\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2]$  intervallummal az "új"  $M$  az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  leképezést, amelyre tetszőleges  $\phi, \psi \in \mathcal{F}$  mellett

$$\begin{aligned} \rho(T\psi, T\phi) &= \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} = \\ \max \left\{ \max \left\{ \left| \int_\tau^x (f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))) dt \right| : i = 1, \dots, n \right\} : x \in I_* \right\} &\leq \\ \max \left\{ \left| \int_\tau^x \max\{|f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))| : i = 1, \dots, n\} dt \right| : x \in I_* \right\} &= \\ \max \left\{ \left| \int_\tau^x \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty dt \right| : x \in I_* \right\}. \end{aligned}$$

A Lipschitz-feltétel miatt a  $Q := K_\mu$  (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan  $L_Q \geq 0$  konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q),$$

speciálisan

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty &\leq \\ L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty &\leq L_Q \cdot \rho(\psi, \phi) \quad (t \in I_*). \end{aligned}$$

Ezért

$$\rho(T\psi, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi, \phi).$$

Tehát a  $T$  leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a  $\delta_1, \delta_2$ -t, (ezt - az "eddig"  $I_*$ -ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan  $\psi \in \mathcal{F}$ , amelyre

$$T\psi = \psi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

A  $T$  definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_{\tau}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Ez azt jelenti, hogy a  $\varphi$  függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért  $\varphi \in D$  és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Világos, hogy a  $\varphi(\tau) = \xi$ , más szóval a  $\varphi$  megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A fenti Picard-Lindelöf-egzisztenciátételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja.

**Tétel.** Az előző tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg, azaz bármely  $\varphi, \psi$  megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_{\varphi} \cap \mathcal{D}_{\psi}).$$

Legyen az  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  jobb oldal olyan, hogy  $\Omega := \mathbf{R}^n$ , és (az előző tétel feltételein kívül) valamilyen  $\alpha, \beta$  pozitív együtthatókkal

$$\|f(x, y)\|_{\infty} \leq \alpha \cdot \|y\|_{\infty} + \beta \quad (x \in I, y \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor belátható, hogy az  $f$  által meghatározott differenciálegyenletre vonatkozó bármelyik k.é.p. teljes megoldása az  $I$ -n van értelmezve.

## 6 Vizsgakérdés

*A lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata: homogén, inhomogén rendszerek. A megoldáshalmaz szerkezete.*

### 6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Valamilyen  $1 \leq n \in \mathbf{N}$  és egy nyílt  $I \subset \mathbf{R}$  intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad b = (b_1, \dots, b_n) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

*mátrixfüggvényt.* Ha

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

akkor az  $f$  függvény, mint jobb oldal által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ( $n > 1$  esetén *lineáris differenciálegyenlet-rendszernek*) nevezzük.

Legyenek a fentiekén túl adottak még a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \mathbf{K}^n$  értékek, és vizsgáljuk a  $\varphi(\tau) = \xi$  k.é.p.-t. Ha  $I_* \subset I$ ,  $\tau \in \text{int } I_*$ , kompakt intervallum, akkor

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} \in \mathbf{R} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} \in \mathbf{R}.$$

Következésképpen

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_\infty = \|A(x) \cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y - z\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (x \in I_*, y, z \in \mathbf{K}^n).$$

Továbbá a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\in \mathbf{R})$$

jelöléssel

$$\|f(x, y)\|_\infty = \|A(x) \cdot y + b(x)\|_\infty \leq \|A(x) \cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq q \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I_*, y \in \mathbf{K}^n),$$

ezért minden k.é.p. teljes megoldása az  $I$  intervallumon van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó d.e. *homogén*, ha  $b \equiv 0$ , *inhomogén*, ha létezik  $x \in I$ , hogy  $b(x) \neq 0$ . Legyenek

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \rightarrow \mathbf{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \rightarrow \mathbf{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi + b\}.$$

## 6.2 Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptétele

**Tétel.** A bevezetésben mondott feltételek mellett

1. az  $\mathcal{M}_h$  halmaz  $n$  dimenziós lineáris tér a  $\mathbf{K}$ -ra vonatkozóan;
2. tetszőleges  $\psi \in \mathcal{M}$  esetén

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a  $\phi_k = (\phi_{k1}, \dots, \phi_{kn})$  ( $k = 1, \dots, n$ ) függvények bázist alkotnak az  $\mathcal{M}_h$ -ban, akkor léteznek olyan  $g_k : I \rightarrow \mathbf{K}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) differenciálható függvények, amelyekkel

$$\psi := \sum_{k=1}^n g_k \cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

**Bizonyítás.** Az 1. állítás bizonyításához mutassuk meg először is azt, hogy bármilyen  $\psi, \varphi \in \mathcal{M}_h$  és  $c \in \mathbf{K}$  esetén  $\psi + c \cdot \varphi \in \mathcal{M}_h$ :

$$(\psi + c \cdot \varphi)' = \psi' + c \cdot \varphi' = A \cdot \psi + c \cdot A \cdot \varphi = A(\psi + c \cdot \varphi),$$

amiből a mondott állítás az  $\mathcal{M}_h$  definíciója alapján nyilvánvaló. Tehát az  $\mathcal{M}_h$  lineáris tér a  $\mathbf{K}$  felett.

Most megmutatjuk, hogy ha  $m \in \mathbf{N}$ , és  $\chi_1, \dots, \chi_m \in \mathcal{M}_h$ , tetszőleges függvények, akkor az alábbi ekvivalencia igaz:

a  $\chi_1, \dots, \chi_m$  függvények akkor és csak akkor alkotnak lineárisan független rendszert az  $\mathcal{M}_h$  vektortérben, ha bármilyen  $\tau \in I$  esetén a  $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$  vektorok lineárisan függetlenek a  $\mathbf{K}^n$ -ben.

Az ekvivalencia egyik fele nyilvánvaló: ha a  $\chi_1, \dots, \chi_m$ -ek lineárisan összefüggnek, akkor alkalmas  $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{K}$ ,  $|c_1| + \dots + |c_m| > 0$  együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k \equiv 0.$$

Speciálisan minden  $\tau \in I$  helyen is

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0 \quad (\in \mathbf{K}^n).$$

Így a  $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$  vektorok összefüggő rendszert alkotnak a  $\mathbf{K}^n$ -ben.

Fordítva, legyen  $\tau \in I$ , és tegyük fel, hogy a  $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$  vektorok összefüggnek. Ekkor az előbbi (nem csupa nulla)  $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{K}$  együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0.$$

Már tudjuk, hogy

$$\phi := \sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k \in \mathcal{M}_h,$$

ezért az így definiált  $\phi : I \rightarrow \mathbf{K}^n$  függvény megoldása a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \varphi(\tau) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának. Világos ugyanakkor, hogy a  $\Psi \equiv 0$  is a most mondott k.é.p. megoldása az

$I$ -n. Azt is tudjuk azonban, hogy (ld. fent) ez a k.é.p. (is) egyértelműen oldható meg, ezért  $\phi \equiv \Psi \equiv 0$ . Tehát a  $\chi_1, \dots, \chi_m$  függvények is összefüggnek.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy az  $\mathcal{M}_h$  vektortér véges dimenziós és a  $\dim \mathcal{M}_h$  dimenziója legfeljebb  $n$ .

Tekintsük most a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \varphi(\tau) = e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

kezdetiérték-problémákat, ahol az  $e_i \in \mathbf{K}^n$  ( $i = 1, \dots, n$ ) vektorok a  $\mathbf{K}^n$  tér "szokásos" (kanonikus) bázisvektorait jelölik. Ha

$$\chi_i : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

jelöli az említett k.é.p. teljes megoldását, akkor a

$$\chi_i(\tau) = e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Így az előbbieik alapján a  $\chi_1, \dots, \chi_n$  függvények is azok. Tehát az  $\mathcal{M}_h$  dimenziója legalább  $n$ , azaz a fentiekre tekintettel  $\dim \mathcal{M}_h = n$ .

A 2. állítás igazolásához legyen  $\chi \in \mathcal{M}_h$ . Ekkor  $\psi + \chi \in D$ , és

$$(\psi + \chi)' = \psi' + \chi' = A \cdot \psi + b + A \cdot \chi = A \cdot (\psi + \chi) + b,$$

amiből  $\psi + \chi \in \mathcal{M}$  következik. Ha most egy  $\varphi \in \mathcal{M}$  függvényből indulunk ki és  $\chi := \varphi - \psi$ , akkor  $\chi \in D$ , és

$$\chi' = \varphi' - \psi' = A \cdot \varphi + b - (A \cdot \psi + b) = A \cdot (\varphi - \psi) = A \cdot \chi,$$

amiből  $\chi \in \mathcal{M}_h$  adódik. Tehát  $\varphi = \psi + \chi$  a 2.-ben mondott előállítás a  $\varphi$  függvénynek.

A tétel 3. részének a bizonyítása érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket, ill. fogalmakat. A

$$\phi_k = (\phi_{k1}, \dots, \phi_{kn}) \quad (k = 1, \dots, n)$$

bázisfüggvények mint oszlopvektor-függvények segítségével tekintsük a

$$\Phi : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvényt:

$$\Phi := [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\Phi' := [\phi'_1 \quad \cdots \quad \phi'_n] = \begin{bmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{21} & \cdots & \phi'_{n1} \\ \phi'_{12} & \phi'_{22} & \cdots & \phi'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi'_{1n} & \phi'_{2n} & \cdots & \phi'_{nn} \end{bmatrix}$$

a  $\Phi$  deriváltja. Ekkor könnyen belátható, hogy

$$\Phi' = A \cdot \Phi.$$

Továbbá tetszőleges  $g_1, \dots, g_n : I \rightarrow \mathbf{K}$  differenciálható függvényekkel a

$$g := (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

vektorfüggvény differenciálható,

$$\psi := \sum_{k=1}^n g_k \cdot \phi_k = \Phi \cdot g,$$

és

$$\psi' = \Phi' \cdot g + \Phi \cdot g' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g'.$$

A  $\psi \in \mathcal{M}$  tartalmazás nyilván azzal ekvivalens, hogy

$$\psi' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g' = A \cdot \psi + b = A \cdot (\Phi \cdot g) + b = (A \cdot \Phi) \cdot g + b,$$

következésképpen azzal, hogy

$$\Phi \cdot g' = b.$$



A 2. pont alapján tetszőleges  $x \in I$  helyen a  $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  vektorok lineárisan függetlenek, azaz a  $\Phi(x)$  mátrix nem szinguláris. A mátrixok inverzének a kiszámítása alapján egyszerűen adódik, hogy a

$$\Phi^{-1}(x) := (\Phi(x))^{-1} \quad (x \in I)$$

definícióval értelmezett

$$\Phi^{-1} : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény komponens-függvényei is folytonosak. Ezért a

$$(h_1, \dots, h_n) := \Phi^{-1} \cdot b : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

függvény is folytonos. Olyan folytonosan differenciálható

$$g : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

függvényt keresünk tehát amelyekre  $g' = \Phi^{-1} \cdot b$ , azaz

$$g'_i = h_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ilyen  $g_i$  létezik, nevezetesen a (folytonos)  $h_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) függvények bármelyik primitív függvénye ilyen. ■

## 7 Vizsgakérdés

*Alaprendszer, alaplátrix. Az állandók variálásának a módszere. Alaplátrix előállítású állandó együtthetős diagonalizálható mátrix esetén. Az  $n = 2$  eset vizsgálata tetszőleges, állandó együtthetős mátrixra.*

### 7.1 Alaprendszer, alaplátrix

Az  $\mathcal{M}_h$  vektortérben minden bázist az illető egyenlet *alaprendszerének* nevezünk. Ha  $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$  egy alaprendszer, akkor a

$$\Phi := [\phi_1 \ \cdots \ \phi_n] : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet (egy) ún. *aplátrixa*. Tehát

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k \cdot \phi_k : c_1, \dots, c_n \in \mathbf{K} \right\} = \{ \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n \}.$$

Az  $\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h$  előállításban minden  $\psi \in \mathcal{M}$  függvényt *partikuláris megoldásként* említünk.

### 7.2 Állandók variálásának módszere

Ld. 6.2 alcímbe tárgyalt tétel 3. pontjának bizonyítása. A partikuláris megoldás

$$\psi = \Phi \cdot g$$

alakban való előállítású (alkalmas  $g : I \rightarrow \mathbf{K}^n$  differenciálható függvény) az 6.2 alcímbe tárgyalt tétel bizonyításában bemutatott módszer az *állandók variálása*. Tetszőleges  $\phi_1, \dots, \phi_n$  alaprendszerrel és  $\psi \in \mathcal{M}$  partikuláris megoldással

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi + \sum_{k=1}^n c_k \cdot \phi_k : c_1, \dots, c_n \in \mathbf{K} \right\}.$$

Ha  $\Phi$  egy alaplátrix, akkor ugyanez a következőképpen írható:

$$\mathcal{M} = \{ \psi + \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n \} = \{ \Phi \cdot (g + c) : c \in \mathbf{K}^n \}.$$

### 7.3 Állandó együtthatós diagonalizálható eset

Legyen most

$$f(x, y) := A \cdot y + b(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

ahol  $1 \leq n \in \mathbf{N}$ ,  $I \subset \mathbf{R}$  nyílt intervallum mellett

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbf{R}^n, b \in C.$$

Tegyük fel, hogy  $A$  diagonalizálható, azaz létezik  $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$ ,  $\det T \neq 0$ , hogy  $T^{-1}AT$  mátrix diagonális: alkalmas  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$  számokkal

$$\Lambda := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$T$  invertálhatósága miatt a

$$T = [t_1 \cdots t_n]$$

$t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) oszlopvektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$AT = [At_1 \cdots At_n] = T\Lambda = [\lambda_1 \cdot t_1 \cdots \lambda_n \cdots t_n]$$

miatt

$$A \cdot t_i = \lambda_i \cdot t_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Mivel

$$t_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

ezért mindez röviden azt jelenti, hogy a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  számok az  $A$  mátrix sajátértékei, a  $t_1, \dots, t_n$  vektorok pedig rendre a megfelelő sajátvektorok. Lévéen, a  $t_i$ -k lineárisan függetlenek, az  $A$ -ra vonatkozó feltételünk úgy fogalmazható, hogy van a  $\mathbf{K}^n$ -ben (az  $A$  sajátvektoraiból álló) sajátvektorbázis.

A homogén egyenlet tehát a következőképpen írható fel:

$$\varphi' = A \cdot \varphi = T\Lambda T^{-1} \cdot \varphi,$$

amiből

$$(T^{-1}\varphi)' = \Lambda \cdot (T^{-1}\varphi)$$

következik. Vegyük észre, hogy ha  $\varphi \in \mathcal{M}_h$ , akkor a  $\psi := T^{-1}\varphi$  függvény megoldása a  $\Lambda$  diagonális mátrix által meghatározott állandó együtthatós homogén lineáris egyenletnek. Ez utóbbit ez előző tétel alapján nem nehéz megoldani. Legyenek ui. a

$$\psi_i : I \rightarrow \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények a következők:

$$\psi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i \quad (x \in I, i = 1, \dots, n).$$

Világos, hogy  $\psi_i \in D$  és

$$\begin{aligned} \psi'_i(x) &= \lambda_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot (\Lambda \cdot e_i) = \\ \Lambda \cdot (e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i) &= \Lambda \cdot \psi_i(x) \quad (x \in I, i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Más szóval a  $\psi_i$ -k valóban megoldásai a  $\Lambda$  által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek. Mivel bármely  $\tau \in I$  esetén a

$$\psi_i(\tau) = e^{\lambda_i \cdot \tau} \cdot e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

vektorok nyilván lineárisan függetlenek, ezért az előző tétel bizonyításában mondottak szerint a  $\psi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) függvények lineárisan függetlenek. Ha

$$\phi_i := T \cdot \psi_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

akkor nyilván a  $\phi_i$ -k is lineárisan függetlenek,

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in I, i = 1, \dots, n),$$

és minden  $i = 1, \dots, n$  indexre

$$\phi'_i = A \cdot \phi_i.$$

Tehát  $\phi_i \in \mathcal{M}_h$  ( $i = 1, \dots, n$ ) egy bázis. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  mátrix diagonalizálható. Legyenek a sajátértékei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ , egy-egy megfelelő sajátvektora pedig  $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{K}^n$ . Ekkor a

$$\varphi' = A \cdot \varphi$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a

$$\phi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n)$$

függvények lineárisan független megoldásai.

## 7.4 Tetszőleges állandó együtthatós mátrix

Tekintsük az  $n = 2$  esetet, amikor is valamilyen  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  számokkal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a mátrix pontosan akkor nem diagonalizálható, ha

$$(a - d)^2 + 4bc = 0 \text{ és } |b| + |c| > 0.$$

Ekkor egyetlen sajátértéke van az  $A$ -nak nevezetesen

$$\lambda := \frac{a + d}{2},$$

legyen a  $t_1$  egy hozzá tartozó sajátvektor:

$$0 \neq t_1 \in \mathbf{R}^2, At_1 = \lambda t_1.$$

Egyszerű számolással igazolható olyan  $t_2 \in \mathbf{R}^2$  vektor létezése, amelyik lineárisan független a  $t_1$ -től és

$$At_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ha mármost a  $T \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  mátrix oszlopvektorai rendre a  $t_1, t_2$  vektorok:  $T := [t_1 \ t_2]$ , akkor

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva könnyen belátható, hogy a

$$\phi_1(x) := e^{\lambda x} \cdot t_1, \phi_2(x) := e^{\lambda x} \cdot (t_2 + xt_1) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy alaprendszer. Valóban,  $\phi_i \in \mathcal{M}_h$  ( $i = 1, 2$ ), mert egyrészt

$$\phi_1'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_1 = e^{\lambda x} At_1 = A(e^{\lambda x} \cdot t_1) = A\phi_1(x),$$

másrészt

$$\begin{aligned} \phi_2'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \cdot t_2 + e^{\lambda x} \cdot t_1 + \lambda e^{\lambda x} x \cdot t_1 = e^{\lambda x} ((t_1 + \lambda \cdot t_2) + \lambda x \cdot t_1) = \\ &= e^{\lambda x} (At_2 + xAt_1) = A(e^{\lambda x} (t_2 + x \cdot t_1)) = A\phi_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Mivel a

$$\phi_1(0) = t_1, \phi_2(0) = t_2$$

vektorok lineárisan függetlenek, ezért a  $\phi_1, \phi_2$  függvények is lineárisan függetlenek, azaz a  $\phi_1, \phi_2$  egy alaprendszer.

## 7.5 Valós értékű megoldások

Tegyük fel, hogy a  $\lambda \in \mathbf{K}$  szám az  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  (diagonalizálható) együtthatómátrixnak egy sajátértéke, a  $t_\lambda \in \mathbf{K}^n$  vektor pedig egy  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektor. Ha a  $\lambda$  valós, akkor nyilván a  $t_\lambda$  sajátvektor is választható "valósnak", azaz feltehető, hogy  $t_\lambda \in \mathbf{R}^n$ . Ebben az esetben az  $\mathcal{M}_h$ -beli

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda \quad (x \in \mathbf{R})$$

bázisfüggvény is "valós" tehát  $\phi_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

Ha viszont a  $\lambda$  (nem valós) komplex szám, azaz

$$\lambda = u + iv \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$$

(alkalmas  $u \in \mathbf{R}$  és  $0 \neq v \in \mathbf{R}$  számokkal), akkor – lévén az  $A$  karakterisztikus polinomja valós együtthatós – az  $A$ -nak egyúttal a

$$\bar{\lambda} = u - iv$$

(komplex konjugált) is (ugyanannyiszoros) sajátértéke. Hasonlóan, ha a

$$t_\lambda = S_\lambda + iY_\lambda \in \mathbf{K}^n$$

vektor (alkalmas  $S_\lambda, Y_\lambda \in \mathbf{R}^n$  vektorokkal) az  $A$ -nak a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektora, akkor a

$$\bar{t}_\lambda = S_\lambda - iY_\lambda$$

vektor a  $\bar{\lambda}$ -hoz tartozó sajátvektor. Továbbá a megfelelő bázisfüggvények a következők:

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda, \quad \phi_{\bar{\lambda}}(x) := e^{\bar{\lambda} x} \cdot \bar{t}_\lambda \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Rövid számolással ellenőrizhető, hogy

$$\phi_{\bar{\lambda}}(x) = \overline{\phi_\lambda(x)} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a homogén egyenlet (teljes) megoldásainak az  $\mathcal{M}_h$  halmaza a  $\mathbf{K}$  felett vektortér, ezért a

$$\frac{\phi_\lambda + \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Re} \phi_\lambda, \quad \frac{\phi_\lambda - \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Im} \phi_\lambda$$

függvények is  $\mathcal{M}_h$ -beliek. Világos, hogy

$$e^{\lambda x} = e^{ux} \cdot (\cos(vx) + \imath \sin(vx)) \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt

$$\phi_{\lambda,r}(x) := \operatorname{Re} \phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot (\cos(vx) \cdot S_\lambda - \sin(vx) \cdot Y_\lambda) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\phi_{\lambda,i}(x) := \operatorname{Im} \phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot (\sin(vx) \cdot S_\lambda + \cos(vx) \cdot Y_\lambda) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$\phi_{\lambda,r}(0) = S_\lambda = \frac{t_\lambda + \bar{t}_\lambda}{2},$$

$$\phi_{\lambda,i}(0) = Y_\lambda = \frac{t_\lambda - \bar{t}_\lambda}{2\imath}.$$

A  $t_\lambda, \bar{t}_\lambda$  sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért az  $S_\lambda, Y_\lambda$  vektorok is azok, következésképpen a  $\phi_{\lambda,r}, \phi_{\lambda,i}$  függvények is lineárisan függetlenek. Így  $\phi_\lambda, \phi_{\bar{\lambda}}$  függvényeket kicserélve az előző függvényekre, továbbra is alaprendszert kapunk.

## 8 Vizsgakérdés

*Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere.*

### 8.1 Új feladat megfogalmazása

Legyen  $1 \leq n \in \mathbf{N}$ ,  $I \subset \mathbf{R}$  nyílt intervallum, az

$$a_k : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (k = 0, \dots, n-1), c : I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényekről tegyük fel, hogy folytonosak. Olyan  $\varphi \in I \rightarrow \mathbf{K}$  függvényt keresünk, amelyekre

1.  $\mathcal{D}_\varphi \subset I$  nyílt intervallum;
2.  $\varphi \in D^n$ ;
3.  $\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^k(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$

Ezt a feladatot röviden *n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan  $\varphi$  függvény amelyik eleget tesz az előbbi kívánalmaknak, az illető differenciálegyenlet (egy) *megoldása*.

Tegyük fel, hogy a fentiekén túl adottak még a

$$\tau \in I, \xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$$

számok. Ha az előbbi  $\varphi$  megoldástól azt is elvárjuk, hogy

$$4. \tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

akkor a szóban forgó *n-edrendű lineáris differenciálegyenletre* vonatkozó *kezdetiérték-problémáról* beszélünk.

Ha  $n = 1$ , akkor egy lineáris differenciálegyenletről van szó, ezért a továbbiakban nyugodtan feltehetjük már, hogy  $n \geq 2$ .



Az *átviteli elv* segítségével a most megfogalmazott feladat visszavezethető a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatára. (A későbbiekben szereplő állítások is részben ennek az elvnek a segítségével láthatók majd be.) Vezessük be ui. az alábbi jelöléseket: legyen  $2 \leq n \in \mathbf{N}$  és

$$b := (b_1, \dots, b_n) : I \rightarrow \mathbf{R}^n, b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(x) \end{pmatrix} \quad (x \in I),$$

$$A := (a_{ik})_{i,k=1}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Ekkor

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad (x \in I, y \in \mathbf{K}^n).$$

Ha tehát a

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

differenciálható függvény ez utóbbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek (egy) megoldása, akkor  $\mathcal{D}_\psi \subset I$  nyílt intervallum, és bármely  $x \in \mathcal{D}_\psi$  esetén

$$\psi'(x) = A(x) \cdot \psi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

Azaz

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \vdots \\ \psi'_n \end{pmatrix} = \psi_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_0 \end{pmatrix} + \psi_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \cdots + \psi_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (-a_{k-1}) \cdot \psi_k + c \end{pmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \psi'_i(x) = \psi_{i+1}(x) & (i = 1, \dots, n-1) \\ \psi'_n(x) = \sum_{k=1}^n (-a_{k-1}(x)) \cdot \psi_k(x) + c(x). \end{cases} \quad (\star)$$

Ennek alapján eléggé nyilvánvaló az alábbi állítás.

## 8.2 Átviteli elv

**Tétel.** Ha a  $\varphi$  függvény megoldása a fenti  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletnek, akkor az

$$I \ni x \mapsto \psi(x) := (\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathbf{K}^n$$

függvényre igazak a  $(\star)$  egyenlőségek. Fordítva, ha a  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  függvény eleget tesz a  $(\star)$ -nak, akkor a  $\varphi := \psi_1$  (első) komponensfüggvény megoldása a szóban forgó  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletnek. Ha adottak a  $\tau \in I$ ,  $\xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$  kezdeti értékek, és a  $\varphi$ , megoldása a

$$\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

k.é.p.-nak, akkor a  $(\star)$  lineáris differenciálegyenlet-rendszer előbbi  $\psi$  megoldása kielégíti a

$$\psi(\tau) = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$$

kezdeti feltételt.

Legyen most

$$\mathcal{M}_h := \left\{ \varphi : I \rightarrow \mathbf{K} : \varphi \in D^n, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0 \right\}.$$

Az  $\mathcal{M}_h$  függvényhalmaz tehát nem más, mint a

$$c(x) := 0 \quad (x \in I)$$

esetnek megfelelő *homogén  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenlet*  $I$  intervallumon értelmezett megoldásainak a halmaza. Legyen továbbá

$$\mathcal{M} := \left\{ \varphi : I \rightarrow \mathbf{K} : \varphi \in D^n, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c \right\}$$

a kiindulási  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenlet  $I$ -n értelmezett megoldásainak a halmaza. Az utóbbival kapcsolatban már nyilván feltehető, hogy valamilyen  $x \in I$  helyen  $c(x) \neq 0$ , azaz az illető egyenlet *inhomogén*. Ekkor az átviteli elv alapján a következőket mondhatjuk.

### 8.3 Állandók variálásának módszere

**Tétel.** Az  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletet illetően

1. az  $\mathcal{M}_h$  halmaz  $n$  dimenziós lineáris tér a  $\mathbf{K}$ -ra vonatkozóan;
2. tetszőleges  $\omega \in \mathcal{M}$  esetén

$$\mathcal{M} = \omega + \mathcal{M}_h := \{\omega + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  függvények bázist alkotnak az  $\mathcal{M}_h$ -ban, akkor léteznek olyan differenciálható  $g_k : I \rightarrow \mathbf{K}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) függvények, amelyekkel

$$\omega := \sum_{k=1}^n g_k \varphi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyításképpen elegendő annyit megjegyezni, hogy az  $\mathcal{M}_h$ -beli

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m : I \rightarrow \mathbf{K} \quad (1 \leq m \in \mathbf{N})$$

függvények akkor és csak akkor függetlenek, ha a

$$\hat{\varphi}_j := \left( \varphi_j, \varphi'_j, \dots, \varphi_j^{(n-1)} \right) : I \rightarrow \mathbf{K}^n \quad (j = 1, \dots, m)$$

(vektor)függvények is azok.

Ha  $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$  bázis, akkor minden bázist (most is) *alaprendszernek*, az előző tételben szereplő  $\omega$  függvényt pedig *partikuláris megoldásnak* nevezünk. Egy partikuláris megoldásnak az előző tétel szerinti előállítását az *állandók variálásaként* említjük,

Tegyük fel tehát, hogy  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{M}_h$  alaprendszer, ekkor a

$$\hat{\varphi}_j := \left( \varphi_j, \varphi'_j, \dots, \varphi_j^{(n-1)} \right) \quad (j = 1, \dots, n)$$

függvények alaprendszert alkotnak az átviteli elvből adódó  $(\star)$  lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozóan. Más szóval a

$$\Phi := [\hat{\varphi}_1 \cdots \hat{\varphi}_n] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény alaplátrixa a  $(\star)$ -rendszernek. Innen tudjuk, hogy a

$$g = (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

jelöléssel a  $\Phi \cdot g$  függvény pontosan akkor partikuláris megoldása a  $(\star)$ -nak (alkalmas differenciálható  $g_1, \dots, g_n : I \rightarrow \mathbf{K}$  függvényekkel), ha

$$\Phi \cdot g' = b = (0, \dots, 0, c).$$

Ez azt jelenti, hogy a  $\Phi \cdot g$  függvény első komponense, azaz az

$$\omega := \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot g_k$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldása az  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletnek, ha

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varphi_1 \cdot g'_1 & + & \varphi_2 \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi_n \cdot g'_n & = & 0 \\
\varphi'_1 \cdot g'_1 & + & \varphi'_2 \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi'_n \cdot g'_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\varphi_1^{(n-2)} \cdot g'_1 & + & \varphi_2^{(n-2)} \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-2)} \cdot g'_n & = & 0 \\
\varphi_1^{(n-1)} \cdot g'_1 & + & \varphi_2^{(n-1)} \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-1)} \cdot g'_n & = & c.
\end{array}$$

Ennek a  $(g'_1, \dots, g'_n$  függvényekre mint "ismeretlenekre" vonatkozó) lineáris (függvény)egyenletrendszernek a determinánsa (determináns-függvénye), azaz a

$$W(x) := \det \left( \varphi_i^{(k-1)}(x) \right)_{k,i=1}^n = \det (\Phi(x)) \quad (x \in I)$$

leképezés (az ún. *Wronski-determináns*) a  $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n$  függvények lineáris függetlensége miatt egyetlen  $x \in I$  helyen sem tűnik el.

## 9 Vizsgakérdés

*Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítás, a karakterisztikus polinom szerepe (a bizonyítás vázlata).*

Az előzőekben vizsgált

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

$n$ -edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásához tehát elegendő az  $\mathcal{M}_h$  egy bázisát meghatározni. Ez általában "reménytelen" feladat, általános módszer nem is adható.

Ezért csak abban az esetben tesszük ezt meg, ha az  $a_k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) együtthatófüggvények mindegyike konstansfüggvény. Ez az ún. *állandó együtthatós* eset:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

A  $c = 0$  (*homogén egyenlet*) választással

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} \equiv 0.$$

Tekintsük ehhez a

$$P(x) := x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad (x \in \mathbf{K})$$

$n$ -edfokú polinomot, a differenciálegyenlet *karakterisztikus polinomját*.

Ha a  $\lambda \in \mathbf{K}$  szám a  $P$ -nek gyöke, akkor az

$$e_\lambda(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

és az  $a_n := 1$  jelöléssel

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda}^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot P(\lambda) = 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt az  $e_{\lambda}$  függvény megoldása a szóban forgó homogén differenciálegyenletnek.

Legyen az előbbi  $\lambda$  gyök multiplicitása  $\nu \geq 2$ . Belátjuk, hogy az

$$e_{\lambda,j}(x) := x^j e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}, j = 0, \dots, \nu - 1)$$

függvények is megoldásai a homogén differenciálegyenletnek:

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda,j}^{(k)} \equiv 0.$$

Tegyük fel ui., hogy ezt valamilyen  $j \in \mathbf{N}$  mellett minden olyan esetben már tudjuk, amikor (az aktuális differenciálegyenletre)  $\nu - 1 \geq j$ . Például a  $j = 0$  ilyen, hiszen ezt az  $e_{\lambda,0} \equiv e_{\lambda}$  függvényre az előbb láttuk. Vegyük észre, hogy

$$e_{\lambda,j+1}(x) = x e_{\lambda,j}(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért (ami teljes indukcióval rögtön adódik)

$$e_{\lambda,j+1}^{(k)}(x) = x e_{\lambda,j}^{(k)}(x) + k e_{\lambda,j}^{(k-1)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}, 1 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Így – feltételezve most azt, hogy  $\nu - 1 \geq j + 1$  – az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda,j+1}^{(k)}(x) = x \cdot \sum_{k=0}^n e_{\lambda,j}^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^n k a_k e_{\lambda,j}^{(k-1)}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} e_{\lambda,j}^{(k)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

A

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \varphi^{(k)} \equiv 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a karakterisztikus polinomja:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}t^k = P'(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol a  $\lambda$  a  $P'$  (derivált)polinomnak  $\mu := \nu - 1$ -szeres gyöke. Mivel  $\mu - 1 \geq j$ , ezért az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}e_{\lambda,j}^{(k)} \equiv 0,$$

következésképpen (a fentiekre tekintettel)

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda,j+1}^{(k)} \equiv 0.$$

Tehát az  $e_{\lambda,j+1}$  függvény is megoldása a homogén egyenletnek.

## 9.1 Alaprendszer

Tegyük fel, hogy a  $P$  gyöktényezős előállítás a következő:

$$P(x) = \prod_{l=1}^k (x - \lambda_l)^{\nu_l} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

ahol  $1 \leq k \in \mathbf{N}$  és  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$  jelöli a  $P$  összes, páronként különböző gyökét,  $1 \leq \nu_l \in \mathbf{N}$  pedig a  $\lambda_l$  gyök multiplicitását ( $l = 1, \dots, k$ ). Ekkor tehát a

$$\varphi_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\lambda_l x} \quad (x \in I, l = 1, \dots, k \text{ és } j = 0, \dots, \nu_l - 1)$$

függvények valamennyien  $\mathcal{M}_h$ -beliek.

Ennél még több is igaz, nevezetesen:

**Tétel.** A fentiekben definiált

$$\varphi_{lj} \quad (l = 1, \dots, k \text{ és } j = 0, \dots, \nu_l - 1)$$

függvények a szóban forgó állandó együtthatós  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét alkotják.



## 9.2 Valós értékű megoldások

Az előző tétel alapján kapott

$$\varphi_{lj}(x) := x^j e^{\lambda_l x} \quad (x \in I, l = 1, \dots, k; j = 0, \dots, \nu_l)$$

alaprendszerben a  $\varphi_{lj}$  ( $l = 1, \dots, k; j = 0, \dots, \nu_l$ ) függvények valós értékűek, ha a szóban forgó  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenlet  $P$  karakterisztikus polinomjában a  $\lambda_l$  gyök valós szám. Ha viszont valamilyen  $l = 1, \dots, k$  esetén a  $\lambda_l$  gyök nem valós komplex szám, akkor a következőket mondhatjuk. Legyen ekkor

$$\lambda_k = u_k + \imath v_l,$$

ahol  $u_l, v_l \in \mathbf{R}$  és  $v_l \neq 0$ . Mivel a  $P$  polinom valós együtthatós, ezért a

$$\overline{\lambda_l} = u_l - \imath v_l$$

komplex konjugált is  $v_l$ -szeres gyöke a  $P$ -nek. Ez azt jelenti, hogy a fenti alaprendszerben a

$$\hat{\varphi}_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\overline{\lambda_l} x} = \overline{\varphi_{lj}(x)} \quad (x \in I, j = 0, \dots, \nu_l - 1)$$

függvények is szerepelnek. Tudjuk, hogy az  $\mathcal{M}_h$  halmaz vektortér a  $\mathbf{K}$ -ra nézve, ezért

$$\phi_{lj} := \frac{\varphi_{lj} + \hat{\varphi}_{lj}}{2} = \operatorname{Re} \varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h \text{ és } \hat{\phi}_{lj} := \frac{\varphi_{lj} - \hat{\varphi}_{lj}}{2\imath} = \operatorname{Im} \varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h.$$

Itt tetszőleges  $j = 0, \dots, \nu_l - 1$  mellett

$$\phi_{lj}(x) = \operatorname{Re} \varphi_{lj}(x) = \operatorname{Re} (x^j \cdot e^{\lambda_l x}) = \operatorname{Re} (x^j \cdot e^{u_l x + \imath v_l x}) =$$

$$\operatorname{Re} (x^j \cdot e^{u_l x} (\cos(v_l x) + \imath \sin(v_l x))) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \cos(v_l x) \quad (x \in I),$$

és (analóg számolás után)

$$\hat{\phi}_{lj}(x) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \sin(v_l x) \quad (x \in I).$$

Könnyen belátható, hogy ha a fenti  $\varphi_{lj}, \hat{\varphi}_{lj}$  (összesen  $2\nu_l$  darab) függvényt kicseréljük a  $\phi_{lj}, \hat{\phi}_{lj}$  (ugyancsak  $2\nu_l$  darab) függvényre, akkor továbbra is lineárisan független függvényrendszert kapunk. Ha ezt a cserét a  $P$  polinom minden nem valós gyökével kapcsolatban meg tesszük, akkor az  $\mathcal{M}_h$  egy valós értékű függvényekből álló bázisát kapjuk, azaz egy valós függvényekből álló alaprendszert.

## 10 Vizsgakérdés

*Partikuláris megoldás kvázi-polinom jobb oldal esetén (a bizonyítás vázlata). A csillapítás nélküli kényszerrezgés vizsgálata, rezonancia.*

### 10.1 Kvázipolinomok

Az állandó együtthatós

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad (\star)$$

$n$ -edrendű lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az állandók variálásával való előállítása esetenként sok számolást igénylő feladat. Ezért "megbecsülendők" azok a módszerek, amelyek révén (az illető differenciálegyenlettől függően) más úton juthatunk el egy partikuláris megoldáshoz. Ez a más út gyakran a feladat jobb oldala, azaz a  $c$  függvény speciális "szerkezete" révén lehetséges. Ilyen függvények pl. az ún. kvázipolinomok. Az

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}$$

függvényt *kvázipolinomnak* nevezzük, ha egy  $R$  (algebrai) polinom és  $\lambda \in \mathbf{K}$  szám mellett

$$f(x) = R(x) \cdot e_\lambda(x) = R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

## 10.2 Kvázopolinom jobb oldal

**Tétel.** Tegyük fel, hogy  $1 \leq n \in \mathbf{N}$ ,  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ , és valamilyen  $r \in \mathbf{N}$  esetén a  $\lambda \in \mathbf{K}$  szám a

$$P(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinomnak  $r$ -szeres gyöke. Ha a  $Q$  polinom fokszáma  $m \in \mathbf{N}$ , akkor van olyan legfeljebb  $m$ -edfokú  $R$  polinom, hogy az

$$\omega(x) := x^r \cdot R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

kvázipolinomra

$$\omega^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \omega^{(k)}(x) = Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát a  $\varphi := \omega$  függvény (kvázipolinom) a

$$c(x) := Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

jobb oldal (kvázipolinom) esetén eleget tesz a  $(\star)$  egyenlőségnek, azaz megoldása az illető differenciálegyenletnek. Ha itt pl.  $r = 0$ , azaz  $P(\lambda) \neq 0$ , akkor a keresett  $R$  polinommal

$$\omega = R \cdot e_\lambda.$$

Ehhez ui. legyen  $a_n := 1$ , amikor is azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = Q \cdot e_\lambda.$$

A "binomiális szabályt" alkalmazva

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} \cdot e_\lambda = Q \cdot e_\lambda.$$

Ezért a kívánt  $R$  polinom létezése a következő egyenlőséggel ekvivalens:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} = Q. \quad (\star\star)$$

Világos, hogy ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalán egy-egy polinom áll, így együttható-összehasonlítással azt kell megmutatni, hogy alkalmasan választott  $\alpha_j \in \mathbf{K}$  ( $j = 0, \dots, m$ ) számokkal az

$$R(x) := \sum_{j=0}^m \alpha_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinom eleget tesz a  $(\star\star)$  egyenlőségnek. Legyen a  $Q$  algebrai alakja a  $\beta_j \in \mathbf{R}$  ( $j = 0, \dots, m$ ) együtthatókkal az alábbi:

$$Q(x) := \sum_{j=0}^m \beta_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K}).$$

Ekkor a  $(\star\star)$  bal oldalán a főegyüttható a következő:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot \alpha_m \cdot \lambda^k = \alpha_m \cdot P(\lambda),$$

Így az  $\alpha_m \cdot P(\lambda) = \beta_m$  egyenlőségnek kell teljesülni. Mivel most  $P(\lambda) \neq 0$ , ezért az

$$\alpha_m := \frac{\beta_m}{P(\lambda)}$$

választás megfelelő. Az  $\alpha_m$  ismeretében az  $\alpha_{m-1}$  meghatározása  $(\star\star)$  alapján a

$$\begin{aligned} \beta_{m-1} &= \sum_{k=0}^n a_k \cdot \alpha_{m-1} \cdot \lambda^k + \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot m \cdot \alpha_m \cdot \lambda^{k-1} = \\ &P(\lambda) \cdot \alpha_{m-1} + m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda) \end{aligned}$$

egyenlőségből történhet:

$$\alpha_{m-1} = \frac{\beta_{m-1} - m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Az eljárást analóg módon folytatva kapjuk a keresett  $R$  polinom többi együtthatóját is.

### 10.3 Rezgések

Tekintsük a rezgésekre vonatkozó

$$ms'' = F - \alpha \cdot s - \beta \cdot s'$$

másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet, vagy "standard" alakban felírva ugyanez:

$$s'' + \frac{\beta}{m} \cdot s' + \frac{\alpha}{m} \cdot s = \frac{F}{m}.$$

Ennek a karakterisztikus polinomja a következő:

$$P(x) := x^2 + \frac{\beta}{m}x + \frac{\alpha}{m} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

aminek gyökei:

$$\lambda_{1,2} := \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4m\alpha}}{2m}.$$

A fizika "nyelvén" fogalmazva az  $F/m$  függvény (a differenciálegyenlet jobb oldala) a "kényszer" (kényszererő). Ha nincs kényszer, azaz  $F \equiv 0$ , akkor  $\beta > 0$  esetén *csillapított rezgőmozgásról*, a  $\beta = 0$  esetben pedig *harmonikus rezgőmozgásról* beszélünk.

A tényleges kényszerrezgések között különösen érdekes a periodikus külső kényszer esete:

$$F(x) := A \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol  $A > 0$  (*amplitúdó*),  $\omega > 0$  (*kényszerfrekvencia*) és  $\theta \in [0, 2\pi]$  (*fázisszög*). Tekintsünk most el a csillapítástól, azaz legyen  $\beta := 0$ . Ekkor egy (valós) alarendszert az

$$\omega_0 := \sqrt{\alpha/m}$$

*sajátfrekvenciával* az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \cos(\omega_0 x), \quad \mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(\omega_0 x)$$

függvényrendszer. Egyszerűen megadhatunk egy partikuláris megoldást is. Ez ui. könnyen ellenőrizhetően

1.  $\omega \neq \omega_0$  esetén pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta),$$

2.  $\omega = \omega_0$  (*rezonancia*) esetén pedig pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto -\frac{q}{2\omega}x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

függvény, ahol  $q := A/m$ .

Valóban, ha  $\omega \neq \omega_0$ , akkor egy  $\gamma \in \mathbf{R}$  együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldás, ha

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) &= -\gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega x + \theta) + \omega_0^2 \cdot \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) = \\ &= q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Mindez azzal egyenértékű, hogy  $\gamma \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) = q$ , azaz, hogy

$$\gamma = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ha viszont  $\omega = \omega_0$ , akkor most egy  $\gamma \in \mathbf{R}$  együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre kell, hogy fennáljon a

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) &= \\ -2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) - \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) + \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) &= \\ -2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) &= q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

egyenlőség. Ezért  $\gamma = -q/(2\omega)$ . A  $\omega_0 \neq \omega$  feltétel mellett tehát

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega_0 x) + \delta \cdot \sin(\omega_0 x) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol a  $\gamma, \delta$  együtthatókat az

$$s(0) = s_0, s'(0) = s'_0$$

egyenlőségekből kapjuk. Alkalmas  $r > 0$  és  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  segítségével felírhatjuk  $s(x)$ -et a következő alakban:

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega_0 x + \theta_0) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ami nem más mint két harmonikus rezgés összege.

Ha  $\omega_0 = \omega$ , akkor

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega x) + \delta \cdot \sin(\omega x) - \frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$s(0) = s_0, \quad s'(0) = s'_0.$$

Tehát a 2. esetben megfelelően választott  $r > 0$  és  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  paraméterekkel

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega x + \theta_0) - \frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Az  $\omega$  sajátfrekvenciájú (korlátos) harmonikus rezgésre ekkor nem egy harmonikus rezgés, hanem az

$$x \mapsto -\frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

*aperiodikus* mozgás szuperponálódik.

## 11 Vizsgakérdés

*A függvénysorozat, függvénysor fogalma. Hatványsorok, trigonometrikus sorok, Fourier-sorok. A Dirichlet-féle magfüggvény. Konvergencia, határfüggvény (összegfüggvény), egyenletes konvergencia. A Weierstrass-féle majoráns kritérium.*

### 11.1 Függvénysorozatok, függvénysorok

A függvénysorozatok fogalmával részben találkoztunk már korábban is: az  $(f_n)$  sorozatot *függvénysorozatnak* nevezzük, ha minden  $n \in \mathbf{N}$  esetén az  $f_n$  függvény. A továbbiakban mindig azzal a feltételezéssel élünk, hogy valamilyen  $\neq X$  halmazzal

$$f_n \in X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

és egy  $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$  halmazzal

$$\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Pl. a

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathcal{D} := \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvények egy  $(h_n)$  függvénysorozatot határoznak meg.

A fenti  $(f_n)$  függvénysorozat által meghatározott  $\sum(f_n)$  *függvénysor*:

$$\sum(f_n) := \left( \sum_{k=0}^n f_k \right).$$

A  $\sum(f_n)$  függvénysor tehát nem más, mint az

$$F_n := \sum_{k=0}^n f_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

*részletösszegfüggvények* által meghatározott  $(F_n)$  függvénysorozat:

$$\sum(f_n) := (F_n).$$

Így pl. az előbbi

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$



függvények esetén  $\sum(h_n) = (H_n)$ , ahol az  $n \in \mathbf{N}$  indexekre

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^n h_k(t) = \sum_{k=0}^n t^k = \begin{cases} n+1 & (t=1) \\ \frac{1-t^{n+1}}{1-t} & (t \neq 1) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

## 11.2 Konvergencia, határfüggvény

Tekintsük a fenti  $(f_n)$  függvénysorozatot. Ha egy  $x \in \mathcal{D}$  elem esetén konvergens a helyettesítési értékeknek az  $(f_n(x))$  sorozata, akkor azt mondjuk, hogy az  $(f_n)$  függvénysorozat *konvergens* az  $x$  helyen. A

$$\mathcal{D}_0 := \{x \in \mathcal{D} : (f_n(x)) \text{ konvergens}\}$$

halmaz az  $(f_n)$  függvénysorozat *konvergenciatartománya*. Ha  $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ , akkor az

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

definícióval értelmezett

$$f : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény az  $(f_n)$  függvénysorozat *határfüggvénye*. A  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_f$  esetben röviden azt mondjuk, hogy az  $(f_n)$  függvénysorozat *pontonként konvergens*.

Pl. az előbbi  $(h_n)$  függvénysorozattal  $\mathcal{D}_0 = (-1, 1]$ , és

$$h(x) := \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

a  $(h_n)$  sorozat határfüggvénye.

A függvénysorok "nyelvén" a pontonkénti konvergencia a következőképpen fogalmazható meg: legyen  $X \neq \emptyset$ , és a  $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$  halmazzal adott az

$$f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat. Ekkor a  $\sum_n (f_n)$  függvénysor  $x$ -beli konvergenciája azt jelenti, hogy a részletösszegek  $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$  sorozata konvergens az  $x$  helyen, azaz

a  $\left(\sum_{k=0}^n f_k(x)\right)$  sorozat konvergens. Nem fog félreértést okozni, ha az ilyen  $x \in \mathcal{D}$  elemek összegét fogjuk most  $\mathcal{D}_0$ -val jelölni. Tehát  $\mathcal{D}_0$  most nem más, mint a  $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$  függvénysorozat konvergenciatartománya. Ha  $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ , akkor legyen

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

A szóban forgó függvénysor *összegfüggvénye*. Pl. a

$$h_n(x) := x^n \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$\sum_{k=0}^n h_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & (x = 1) \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

miatt a  $\sum(h_n)$  függvénysor konvergenciatartománya a  $(-1, 1)$  intervallum, a  $H$  összegfüggvénye pedig a

$$H(x) := \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

függvény.

Emlékeztetünk a hatványsor fogalmára: legyen valamilyen  $a \in \mathbf{K}$  *középpont* és egy

$$(a_n) : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{K}$$

*együttható-sorozat* esetén

$$f_n(x) := a_n(x-a)^n \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a

$$\sum \left( a_n(x-a)^n \right) := \sum (f_n)$$

függvénysort nevezük *hatványsornak*. A Cauchy-Hadamard-tétel szerint egyértelműen létezik olyan

$$0 \leq r \leq +\infty$$

(*konvergenciasugár*) amellyel a hatványsor  $\mathcal{D}_0$  konvergenciatartományára a  $0 < r < +\infty$  esetben

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_0 \subset \overline{K_r(a)}.$$

Nyilvánvaló, hogy  $a \in \mathcal{D}_0$  mindig igaz, és az  $a$  helyen a fenti hatványsor összege 0.

### 11.3 Trigonometrikus sorok, Fourier-sorok

A  $\sum(f_n)$  függvényt *trigonometrikus sornak* nevezzük, ha

$$f_0(x) := \alpha_0, f_n(x) := \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}),$$

ahol adottak az  $\alpha_k \in \mathbf{R}$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) és a  $\beta_j$  ( $1 \leq j \in \mathbf{N}$ ) *együtthatók*. Használni fogjuk mindegyikre a

$$\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$$

szimbólumot is. Tehát egy adott trigonometrikus sor  $n$ -edik részletösszege egy  $x \in \mathbf{R}$  helyen az alábbi módon néz ki:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos(x) + \beta_1 \cdot \sin(x) + \cdots + \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx).$$

A szóban forgó  $\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$  trigonometrikus sor

$$S_n(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvényei *trigonometrikus polinomok*.

Legyen  $R_{2\pi}$  az összes olyan  $2\pi$  szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény halmaza, amelyre

$$f \in R[0, 2\pi]$$

teljesül. A periodicitás miatt nyilvánvaló, hogy ekkor tetszőleges  $2\pi$ -hosszúságú kompakt  $I \subset \mathbf{R}$  intervallumra is (az előbbi értelemben)  $f \in R(I)$ .

Legyen továbbá  $C_{2\pi}$  az olyan  $2\pi$  szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

függvények halmaza, amelyekre  $f \in C$ . Ekkor

$$C_{2\pi} \subset R_{2\pi},$$

továbbá  $C_{2\pi}$ ,  $R_{2\pi}$  lineáris terek az  $\mathbf{R}$ -re vonatkozóan, a  $C_{2\pi}$  altere az  $R_{2\pi}$ -nek. Továbbá bármely  $f \in R_{2\pi}$  függvény az  $f \in R[0, 2\pi]$  integrálhatóság miatt korlátos, azaz

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} < +\infty.$$

Vezessük be az alábbi fogalmakat:  $f \in R_{2\pi}$  esetén legyen

$$a_0(f) := a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n(f) := a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$b_n(f) := b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$Sf := \sum (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor az  $Sf$  trigonometrikus sor az  $f$  *Fourier-sora*, az együtthatói az  $f$  *Fourier-együtthatói*, az  $S_n f$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) trigonometrikus polinom pedig az  $f$  függvény  $n$ -edik *Fourier-részletösszege*.

Ha  $f \in R_{2\pi}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , akkor a fenti  $f$  *Fourier-részletösszegei* a következők:

$$S_0 f(x) = a_0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ill.  $1 \leq n \in \mathbf{N}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  esetén

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt \cdot \cos(kx) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt \cdot \sin(kx) \right) = \\
& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sum_{k=1}^n \left( \cos(kt) \cdot \cos(kx) + \sin(kt) \cdot \sin(kx) \right) dt = \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(x-t)) \right) dt.
\end{aligned}$$

Ha tehát

$$D_0(z) := \frac{1}{2}, \quad D_n(z) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kz) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot D_n(x-t) dt \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

A most definiált  $D_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) függvény az  $n$ -edik *Dirichlet-magfüggvény*. Világos, hogy minden  $D_n$  páros függvény, periodikus  $2\pi$  szerint, és bármilyen  $2\pi$  hosszúságú kompakt  $I \subset \mathbf{R}$  intervallumra

$$\int_I D_n = \int_I \frac{1}{2} dz + \sum_{k=1}^n \int_I \cos(kz) dz = \int_I \frac{1}{2} dz = \pi \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Nem nehéz "zárt" alakra hozni a szóvan forgó magfüggvényeket. Ha ui.  $0 < u < 2\pi$  és  $n \in \mathbf{N}$ , akkor

$$\begin{aligned}
\sin(z/2) \cdot D_n(z) &= \frac{\sin(z/2)}{2} + \sum_{k=1}^n \sin(z/2) \cdot \cos(kz) = \\
&= \frac{\sin(z/2)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \left( \sin((k+1/2)z) - \sin((k-1/2)z) \right) = \\
&= \frac{\sin(z/2)}{2} + \frac{\sin((n+1/2)z) - \sin(z/2)}{2} = \frac{\sin((n+1/2)z)}{2}.
\end{aligned}$$

Innen az következik, hogy

$$D_n(z) = \frac{\sin\left((n+1/2)z\right)}{2 \cdot \sin(z/2)} \quad (0 < z < 2\pi).$$

Tehát a  $D_n$  definíciójából adódóan a

$$\frac{\sin\left((n+1/2)0\right)}{2 \cdot \sin(0/2)} := D_n(0) = \frac{1}{2} + n$$

megállapodással tetszőleges  $f \in R_{2\pi}$  függvényre az alábbi integrál-előállítást kapjuk a Fourier-részletösszegekre:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot D_n(x-t) dt \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

## 11.4 Egyenletes konvergencia

Tekintsük az  $(f_n)$  függvénysorozatot, ahol

$$f_n \in X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\mathcal{D}_{f_n} =: \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\mathcal{D}_0 := \left\{ t \in \mathcal{D} : (f_n(x)) \text{ konvergens} \right\} \neq \emptyset$$

az  $(f_n)$  konvergenciatartománya, és

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

az  $(f_n)$  függvénysorozat határfüggvénye. Tehát  $f : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbf{K}$  és tetszőleges  $x \in \mathcal{D}_0$ , valamint  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}$ , hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (N_{x,\varepsilon} < n \in \mathbf{N}).$$

Hangsúlyozni kell, hogy az itt szereplő  $N_{x,\varepsilon}$  küszöbindex általában függ az  $x$ -től is, és az  $\varepsilon$ -tól is. Elképzelhető ugyanakkor, hogy bizonyos esetekben bármilyen  $\varepsilon > 0$  mellett olyan (csak az  $\varepsilon$ -tól függő)

$$N := N_\varepsilon \in \mathbf{N}$$

is megadható, amelyik az előbbi becslésben egy  $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$  halmaz mellett független az  $x \in A$  elemtől. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $(f_n)$  függvénysorozat az  $A$  halmazon *egyenletesen konvergens* az  $f$  függvényhez, azaz: minden  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $N \in \mathbf{N}$ , amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in A, N < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ekkor minden  $\emptyset \neq B \subset A$  halmaz esetén is az  $(f_n)$  sorozat egyenletesen konvergál a  $B$ -n az  $f$ -hez. Ha az egyenletes konvergencia definíciójában  $A = \mathcal{D}_0$  írható, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy az  $(f_n)$  függvénysorozat *egyenletesen konvergens*.

A  $\sum(f_n)$  függvény-sor egyenletesen konvergens az  $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$  halmazon, ha a részletösszegek  $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$  sorozata egyenletesen konvergens az  $A$ -n.

Ez tehát azt jelenti, hogy létezik olyan

$$F : A \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény és tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $N \in \mathbf{N}$ , amellyel

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A, N < n \in \mathbf{N}).$$

A Cauchy-kritérium miatt ez azzal ekvivalens, hogy bármilyen  $\varepsilon > 0$  esetén egy alkalmas  $N \in \mathbf{N}$  természetes számmal

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A, N < n, m \in \mathbf{N}, n < m)$$

(*egyenletes Cauchy-kritérium*).

## 11.5 Weierstrass-kritérium

**Tétel.** Tegyük fel, hogy valamilyen  $\emptyset \neq X$  mellett  $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ , és adott az

$$f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott  $\sum(f_n)$  függvénysor. Legyen továbbá egy  $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$  halmazzal és egy  $(a_n)$  számsorozattal

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in A\} \leq a_n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ . Ekkor a  $\sum(f_n)$  függvénysor az  $A$  halmazon egyenletesen konvergens.

**Bizonyítás.** Az alábbi becslés a tétel feltételei alapján nyilvánvaló:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k \quad (x \in A, n, m \in \mathbf{N}, n < m).$$

Ha az  $\varepsilon > 0$  egy pozitív szám, akkor a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$  feltételezés miatt van olyan  $N \in \mathbf{N}$ , amellyel

$$\sum_{k=n+1}^m a_k < \varepsilon \quad (n, m \in \mathbf{N}, N < n < m).$$

Ezért

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A, n, m \in \mathbf{N}, N < n < m).$$

■



## 12 Vizsgakérdés

*A folytonosság, ill. a Riemann-integrálhatóság kérdése konvergens függvénysorozatokkal kapcsolatban. Egyenletesen konvergens függvénysorozat határfüggvényének folytonossága, ill. integrálhatósága. Az integrálás és a határátmenet felcserélhetősége.*

Tekintsük az  $(f_n)$  függvénysorozatot, legyen  $f$  a határfüggvénye. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az  $f_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) függvényekre fennálló bizonyos tulajdonságok "öröklődnek-e" az  $f$  határfüggvényre. Az említett tulajdonságokat illetően a folytonosság, integrálhatóság, deriválhatóság fognak a vizsgálódásaink középpontjában állni.

Az utóbbi kettővel kapcsolatban az is egy "izgalmas" kérdés lesz, hogy ha (pl.) az  $f_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) függvények valamennyien differenciálhatók, és ugyanez igaz az  $f$  határfüggvényre is, akkor fennáll-e az

$$f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

egyenlőség? Ugyanez másképpen írva: igaz-e, hogy

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n,$$

azaz, hogy a differenciál- és a limesz-operátor felcserélhető?

Hasonlóan, ha

$$f_n \in R[a, b] \quad (n \in \mathbf{N})$$

és az  $(f_n)$  függvénysorozat  $f$  határfüggvényére is igaz, hogy  $f \in R[a, b]$ , akkor teljesül-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség? Más szóval

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n?$$

Az alábbi nagyon egyszerű példák azt mutatják, hogy a fenti kérdésekre minden további nélkül nem lehet igennel felelni. Legyen ui.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & (0 \leq x \leq 1/n) \\ 0 & (1/n \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy  $f_n \in C[0, 1]$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ), az  $(f_n)$  függvénysorozat pontonként konvergens, és az  $f$  határfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (1 < x \leq 1). \end{cases}$$

Az is nyilvánvaló, hogy  $f \notin C\{0\}$ .

Legyen most valamilyen  $a_n \in \mathbf{R}$  ( $0 < n \in \mathbf{N}$ ) számsorozat mellett

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n & (0 < x < 1/n) \\ 0 & (x \in [0, 1] \setminus (0, 1/n)) \end{cases} \quad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$f_n \in R[0, 1], \quad \int_0^1 f_n = \frac{a_n}{n} \quad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

továbbá minden  $x \in [0, 1]$  helyen könnyen beláthatóan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Tehát az  $(f_n)$  függvénysorozat pontonként konvergens, és az  $f$  határfüggvénye a  $([0, 1]$  intervallumon) az  $f \equiv 0$  függvény. Így  $f \in R[0, 1]$  és  $\int_0^1 f = 0$ .

Ugyanakkor az

$$a_n := n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$$

esetben az integrálok  $(\int_0^1 f_n)$  sorozata konvergens, de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \lim(1) \neq 0 = \int_0^1 f = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Az

$$a_n := (-1)^n \cdot n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$$

választással az  $(\int_0^1 f_n) = ((-1)^n)$  sorozat nem is konvergens.

Az  $f$  határfüggvényre (az  $f_n \in R[a, b]$   $(0 < n \in \mathbf{N})$  esetben) az sem teljesül "automatikusan", hogy integrálható. Legyen ui. az  $(r_k)$  sorozat a  $[0, 1]$ -beli racionális számok sorozata, és

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, \dots, r_n\}) \\ 0 & (x \notin \{r_0, \dots, r_n\}) \end{cases} \quad (x \in [0, 1], n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor  $f_n \in R[0, 1]$  és  $\int_0^1 f_n = 0$   $(n \in \mathbf{N})$ , tehát létezik az integrálsorozat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = 0$$

határértéke, azonban az

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \quad (x \in [0, 1])$$

Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható.

A differenciálhatóságot illetően tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) := |x|^{1+1/n} \quad (x \in \mathbf{R}, 0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor  $f_n \in D$   $(0 < n \in \mathbf{N})$ , de az

$$f(x) := |x| \quad (x \in \mathbf{R})$$

határfüggvény nem differenciálható a 0-ban.

A folytonosság és a határátmenet kapcsolatát illetően a következőket mondhatjuk:

## 12.1 Folytonosság és a határátmenet

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az

$$f_n \in \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott  $(f_n)$  függvénysorozat egyenletesen konvergens az  $\emptyset \neq X \subset \mathbf{K}$  halmazon. Legyen a határfüggvénye az

$$f : X \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény. Ha  $a \in X$  és  $f_n \in C\{a\}$   $(n \in \mathbf{N})$ , akkor  $f \in C\{a\}$ .

**Bizonyítás.** Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $N \in \mathbf{N}$ , amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in X, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden  $n \in \mathbf{N}$  indexre

$$|f(x) - f(a)| \leq$$

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \quad (x \in X),$$

ezért

$$|f(x) - f(a)| < 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(a)| \quad (x \in X, N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen a továbbiakban egy  $N < n \in \mathbf{N}$  index rögzítve. Mivel  $f_n \in C\{a\}$ , ezért egy alkalmas  $\delta > 0$  esetén

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon \quad (x \in X, |x - a| < \delta),$$

amiből

$$|f(x) - f(a)| < 3\varepsilon \quad (x \in X, |x - a| < \delta),$$

azaz  $f \in C\{a\}$ . ■

Fogalmazzuk át az előbbi állításunkat a függvénysorok esetére.

**Tétel.** Legyen adott a

$$g_n : X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott  $\sum(g_n)$  függvénysor, ami egyenletesen konvergens az  $\emptyset \neq X \subset \mathbf{K}$  halmazon. Legyen az összegfüggvénye az

$$G : X \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény. Ha  $a \in X$  és  $g_n \in C\{a\}$   $(n \in \mathbf{N})$ , akkor  $G \in C\{a\}$ .

Ha ui.

$$f_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor az  $(f_n)$  egyenletesen konvergál a  $G$ -hez. Mivel  $f_n \in C\{a\}$   $(n \in \mathbf{N})$ , ezért az első tétel szerint  $G \in C\{a\}$  is igaz.

## 12.2 Riemann-integrálhatóság és a határátmenet

**Tétel.** Tekintsük az  $[a, b]$   $(a, b \in \mathbf{R}, a < b)$  intervallumon értelmezett  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$   $(n \in \mathbf{N})$  függvényekből álló  $(f_n)$  függvénysorozatot, amelyről tegyük fel, hogy egyenletesen konvergens. Ha  $f_n \in R[a, b]$   $(n \in \mathbf{N})$  és  $f$  jelöli az  $(f_n)$  sorozat határfüggvényét, akkor  $f \in R[a, b]$ , az integrálok  $\left(\int_a^b f_n\right)$  sorozata konvergens, és

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

**Bizonyítás.** Legyen  $\varepsilon > 0$  tetszőleges szám, ekkor egy  $N \in \mathbf{N}$  küszöbindexszel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in [a, b], N < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért bármilyen  $J \subset [a, b]$  intervallum esetén

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(v)| + |f_n(v) - f(v)| <$$

$$2\varepsilon + |f_n(u) - f_n(v)| \quad (u, v \in J, N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$o_J(f) := \sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in J\} \leq$$

$$2\varepsilon + \sup\{|f_n(u) - f_n(v)| : u, v \in J\} = 2\varepsilon + o_J(f_n) \quad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát bármilyen  $\tau \subset [a, b]$  felosztásra

$$\omega(f, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| \leq \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} 2\varepsilon \cdot |J| + \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f_n) \cdot |J| =$$

$$2(b-a)\varepsilon + \omega(f_n, \tau) \quad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen az  $N < n \in \mathbf{N}$  rögzítve, ekkor  $f_n \in R[a, b]$  miatt van olyan  $\tau$ , hogy  $\omega(f_n, \tau) < \varepsilon$ . Így

$$\omega(f, \tau) < (2(b-a) + 1)\varepsilon,$$

ami (szükséges és) elegendő ahhoz, hogy  $f \in R[a, b]$ .

Ha  $N < n \in \mathbf{N}$ , akkor

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b-a) \cdot \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

■

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ ) intervallumon értelmezett

$$g_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló  $\sum(g_n)$  függvénysor egyenletesen konvergens. Ha  $g_n \in R[a, b]$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) és  $G$  jelöli a  $\sum(g_n)$  sor összegfüggvényét, akkor  $G \in R[a, b]$ , az integrálok alkotta  $\sum(\int_a^b g_n)$  sor konvergens, valamint

$$\int_a^b G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n.$$

Indoklásképpen elegendő az

$$f_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekre alkalmazni a Riemann-integrálhatóság linearitására vonatkozó ismert állítást.

## 13 Vizsgakérdés

*A határfüggvény differenciálhatósága, ill. a deriválás és a határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel.*

### 13.1 Differenciálhatóság és a határátmenet

**Tétel.** Legyen az  $I \subset \mathbf{R}$  korlátos, nyílt intervallum, az

$$f_n : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekről pedig tegyük fel, hogy valamennyien differenciálhatók, a deriváltakból álló  $(f'_n)$  függvény sorozat pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan  $a \in I$ , hogy az  $(f_n(a))$  (helyettesítési értékekből álló) sorozat konvergens, akkor

- az  $(f_n)$  függvény sorozat egyenletesen konvergens
- ha  $f$  jelöli az  $(f_n)$  sorozat határfüggvényét, akkor  $f \in D$  és

$$f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

**Bizonyítás.** Legyen  $b \in I$ , és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Phi_{bn}(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} & (x \neq b) \\ f'_n(b) & (x = b) \end{cases} \quad (x \in I, n \in \mathbf{N}).$$

A  $\Phi_{bn}$ -ek mind folytonosak. Ez ui. a  $b$ -től különböző helyeken az  $f_n$ -ek folytonossága alapján a műveleti szabályok és a folytonosság kapcsolatából következik. A  $b$  helyen pedig a

$$\lim_{x \rightarrow b} \Phi_{bn}(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = f'_n(b) = \Phi_{bn}(b) \quad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőségből. Azt sem nehéz belátni, hogy a  $(\Phi_{bn})$  függvény sorozat egyenletesen konvergens. Ti. legyen ehhez

$$n, m \in \mathbf{N}, b \neq x \in I,$$



ekkor a Lagrange-középértéktétel szerint alkalmasan  $b$  és  $x$  közötti  $\xi_{nm}$ -mel

$$\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(b) - f_m(b))}{x - b} = (f_n - f_m)'(\xi_{nm}) = f'_n(\xi_{nm}) - f'_m(\xi_{nm}).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\Phi_{bn}(x) - \Phi_{bm}(x)| = \begin{cases} |f'_n(\xi_{nm}) - f'_m(\xi_{nm})| & (b \neq x \in I) \\ |f'_n(b) - f'_m(b)| & (x = b) \end{cases} \quad (n, m \in \mathbf{N}).$$

A feltételeink szerint az  $(f'_n)$  sorozat egyenletesen konvergens, ezért minden  $\varepsilon > 0$  mellett egy  $N \in \mathbf{N}$  indexszel

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \varepsilon \quad (t \in I, N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Innen világos, hogy

$$|\Phi_{bn}(x) - \Phi_{bm}(x)| < \varepsilon \quad (x \in I, N < n, m \in \mathbf{N})$$

azaz a  $(\Phi_{bn})$  függvénysorozatra teljesül az egyenletesen Cauchy-kritérium: a  $(\Phi_{bn})$  sorozat egyenletesen konvergens. Legyen

$$\Phi_b := \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{bn},$$

ami (ld. előző tétel) folytonos.

Vegyük észre, hogy

$$f_n(x) = (x - a) \cdot \Phi_{an}(x) + f_n(a) \quad (x \in I, n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a

$$g(x) := x - a, \quad h_n(x) := f_n(a) \quad (x \in I, n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$(f_n) = (g\Phi_{an}) + (h_n).$$

Az  $I$  intervallum korlátossága miatt a  $g$  függvény korlátos, ezért a  $(g\Phi_{an})$  sorozat egyenletesen konvergens. Nyilván ugyanez igaz a  $(h_n)$

(konstans)sorozatra is, amiből az  $(f_n)$  függvénysorozat egyenletesen konvergenciája már következik, legyen

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

A  $(\Phi_{bn})$   $(b \in I)$  sorozat definíciója alapján most már világos, hogy

$$\Phi_b(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{bn}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} & (x \neq b) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(b) & (x = b) \end{cases} \quad (x \in I, n \in \mathbf{N}).$$

Láttuk, hogy a  $\Phi_b$  függvény folytonos, így létezik a  $\lim_{x \rightarrow b} \Phi_b(x)$  határérték és

$$\lim_{x \rightarrow b} \Phi_b(x) = \Phi_b(b).$$

Tehát

$$\Phi_b(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{bn}(b) = \lim_{x \rightarrow b} \Phi_b(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Mindez azt jelenti, hogy  $f \in D\{b\}$  és

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(b) \quad (b \in I).$$

■

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az  $I \subset \mathbf{R}$  korlátos és nyílt intervallumon értelmezett

$$g_n : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények mindannyian differenciálhatók, a deriváltakból álló  $\sum(g'_n)$  függvénysor pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan  $a \in I$ , hogy a  $\sum(g_n(a))$  (helyettesítési értékekből álló) sor konvergens, akkor

- a  $\sum(g_n)$  függvénysor egyenletesen konvergens
- ha  $G$  jelöli az  $\sum(g_n)$  sor összegfüggvényét, akkor  $G \in D$  és

$$G' = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n.$$

Ui. a differenciálhatóság, ill. a derivált linearitása miatt az

$$f_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények differenciálhatók, és

$$f'_n = \sum_{k=0}^n g'_k \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a deriváltakból álló  $(f'_n)$  függvénsorozat egyenletesen konvergens, továbbá az  $(f_n(a))$  sorozat is konvergens. Így a  $\sum(g_n) = (f_n)$  függvénsor egyenletesen konvergál a  $G$  függvényhez,  $G \in D$ , és

$$G' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n g'_k = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n.$$

Következésképpen

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n.$$

## 14 Vizsgakérdés

*A trigonometrikus rendszer ortogonalitása. Egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének a Fourier-sora. Bessel-azonosság, Bessel-egyenlőtlenség.*

### 14.1 Trigonometrikus rendszer

Legyen

$$c_0(x) := 1, c_n(x) := \cos(nx), s_n(x) := \sin(nx) \quad (x \in \mathbf{R}, 1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

és

$$\mathcal{R} := \{c_0, c_n, s_n : 1 \leq n \in \mathbf{N}\}$$

az ún. *trigonometrikus rendszer*.

**Lemma.** A trigonometrikus rendszer ortogonális a következő értelemben: bármely  $2\pi$  hosszúságú korlátos és zárt  $I \subset \mathbf{R}$  intervallumra

$$\int_I \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \begin{cases} 0 & (\varphi \neq \psi) \\ 2\pi & (\varphi = \psi = c_0) \\ \pi & (\varphi = \psi \neq c_0) \end{cases} \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{R}).$$

**Bizonyítás.** Az  $\mathcal{R}$  elemeinek a  $2\pi$  szerinti periodicitása miatt nyilván feltehető, hogy (pl.)  $I = [0, 2\pi]$ . Ekkor:

$$\begin{aligned} \int_I c_0^2(x) dx &= \int_I 1 dx = 2\pi; \\ \int_I c_n^2(x) dx &= \int_I \cos^2(nx) dx = \int_I \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_I 1 dx + \int_I \cos(2nx) dx \right) = \pi \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}); \\ \int_I s_n^2(x) dx &= \int_I \sin^2(nx) dx = \int_I \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \int_I 1 \, dx - \int_I \sin(2nx) \, dx \right) &= \pi \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}); \\ \int_I s_n(x) \cdot c_k(x) \, dx &= \int_I \sin(nx) \cdot \cos(kx) \, dx = \\ &= \int_I \frac{\sin((n+k)x) + \sin((n-k)x)}{2} \, dx \\ \frac{1}{2} \left( \int_I \sin((n+k)x) \, dx + \int_I \sin((n-k)x) \, dx \right) &= 0 \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

ui.  $n = k$  esetén

$$\int_I \sin((n-k)x) \, dx = 0$$

és

$$\begin{aligned} \int_I \sin((n+k)x) \, dx &= \int_I \sin(2nx) \, dx = 0, \\ \text{míg } n \neq k \text{ mellett alkalmas } 1 \leq m, r \in \mathbf{N} \text{ paraméterekkel} \\ \int_I \sin((n+k)x) \, dx &= \int_I \sin(mx) \, dx = 0 = \\ \int_I \sin(rx) \, dx &= \pm \int_I \sin((n-k)x) \, dx. \end{aligned}$$

■

## 14.2 Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok

Lássuk be, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok együtthatói "kiszámíthatók" a sor összegfüggvényének a segítségével.

**Tétel.** Tegyük fel, hogy a  $\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$  trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, legyen

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor  $f$  Fourier-sora megegyezik a szóban forgó trigonometrikus sorral, azaz

$$\alpha_0 = a_0(f), \alpha_n = a_n(f), \beta_n = b_n(f) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

**Bizonyítás.** A tagonkénti integrálhatóságból

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \\ \int_0^{2\pi} \alpha_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx + \beta_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx \right) &= \\ \int_0^{2\pi} \alpha_0 dx &= 2\pi \cdot \alpha_0. \end{aligned}$$

Mivel a  $\cos$ ,  $\sin$  függvények korlátosak, ezért  $1 \leq N$  esetén a

$$\begin{aligned} \sum \left( \cos(nx)(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \right), \\ \sum \left( \sin(nx)(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \right), \end{aligned}$$

sorok is egyenletesen konvergensek. Megint csak a tagonkénti integrálhatóság és a trigonometrikus rendszer ortogonalitása miatt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx &= \alpha_0 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(nx) dx + \beta_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \cos(nx) dx \right) &= \\ \alpha_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx &= \pi \alpha_n, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx &= \alpha_0 \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx + \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \sin(nx) dx + \beta_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(nx) dx \right) &= \end{aligned}$$

$$\beta_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \cdot \beta_n,$$

amiből az állításunk már következik. ■

Tehát: ha a

$$\sum \left( \alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \right)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens és

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \right) \quad (x \in \mathbf{R})$$

az összegfüggvénye, akkor  $f \in C_{2\pi}$ , és a szóban forgó trigonometrikus sor az  $f$  függvény Fourier-sora. Azt is mondjuk ilyenkor, hogy az  $f$  függvény *Fourier-sorba fejthető*.

### 14.3 Bessel - Parseval

Legyenek  $f \in R_{2\pi}$  esetén

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$S_n f(x) := a_0 + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx) \right) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R})$$

az  $f$  függvény Fourier-együtthatói,  $n$ -edik Fourier-részletösszege, és

$$\|f\| := \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

Továbbá adott

$$\alpha_k \in \mathbf{R} \quad (k \in \mathbf{N}) \text{ és } \beta_j \in \mathbf{R} \quad (1 \leq j \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal

$$T_n(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx) \right) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor (a trigonometrikus rendszer ortogonalitása miatt)

$$\begin{aligned} \|f - T_n\|^2 &= \int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 = \int_0^{2\pi} f^2 - 2 \cdot \int_0^{2\pi} f T_n + \int_0^{2\pi} T_n^2 = \\ &= \int_0^{2\pi} f^2 - 2 \left( 2\pi a_0 \alpha_0 + \pi \cdot \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right) + 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2). \end{aligned}$$

Speciálisan (*Bessel-azonosság*)

$$\|f - S_n f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2 - \pi \left( 2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$$

(*Bessel-egyenlőtlenség*).

Belátható, hogy a fenti Bessel-egyenlőtlenségben valójában egyenlőség van:

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$$

(*Parseval-egyenlőtlenség*).



## 15 Vizsgakérdés

*Egyenletesen konvergens Fourier-sorok, a trigonometrikus rendszer teljessége  $C_{2\pi}$ -re.*

### 15.1 Teljesség

Emlékeztető: ha a

$$\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens és

$$F(x) := \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)) \quad (x \in \mathbf{R})$$

az összegfüggvénye, akkor  $F \in C_{2\pi}$ , a szóban forgó trigonometrikus sor pedig az  $F$  függvény Fourier-sora.

Legyen most  $f \in C_{2\pi}$ , és tegyük fel, hogy az  $Sf$  Fourier-sora egyenletesen konvergens. Ha az  $Sf$  trigonometrikus sor összegfüggvényét  $g$ -vel jelöljük, akkor joggal vetődik fel a kérdés: mi köze van egymáshoz az  $f$  és a  $g$  függvénynek? Az előbbiek szerint  $Sf = Sg$ , azaz

$$a_0(f) = a_0(g), \quad a_n(f) = a_n(g), \quad b_n(f) = b_n(g) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ha

$$h := f - g,$$

akkor egyrészt  $h \in C_{2\pi}$ , másrészt a Fourier-együtthatók definíciója alapján rögtön adódik az, hogy

$$a_0(h) = a_0(f) - a_0(g) = 0$$

és

$$a_n(h) = a_n(f) - a_n(g) = 0, \quad b_n(h) = b_n(f) - b_n(g) = 0 \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy mindebből  $h \equiv 0$  következik, azaz  $f = g$ .

Ehhez szükségünk lesz az alábbi, önmagában is fontos állításra.

**Tétel.** Ha a  $h \in C_{2\pi}$  függvény valamennyi Fourier-együtthatója nulla, akkor a  $h$  az azonosan nulla függvény.

**Bizonyítás.** Tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen  $a \in \mathbf{R}$  esetén  $h(a) \neq 0$ . Nyugodtan feltehetjük a továbbiakban, hogy

$$a = 0 \text{ és } h(0) > 1.$$

Figyelembe véve, hogy a  $h$  függvény folytonos, van olyan  $0 < \delta < \pi/2$ , amellyel

$$h(x) > 1 \quad (|x| \leq \delta).$$

Vegyük észre, hogy bármilyen

$$T(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

trigonometrikus polinomra

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T(x) dx = \\ & \alpha_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \cos(kx) dx + \beta_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \sin(kx) dx \right) = \\ & 2\pi \cdot \alpha_0 \cdot a_0(h) + \pi \cdot \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot a_k(h) + \beta_k \cdot b_k(h)) = 0. \end{aligned} \quad (\star)$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ennek ellenére egy alkalmas  $T$  trigonometrikus polinommal

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T(x) dx \neq 0.$$

Legyen ehhez

$$T_n(x) := (\cos x + 1 - \cos \delta)^n \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy minden  $n \in \mathbf{N}$  esetén a  $T_n$  függvény egy trigonometrikus polinom. Továbbá

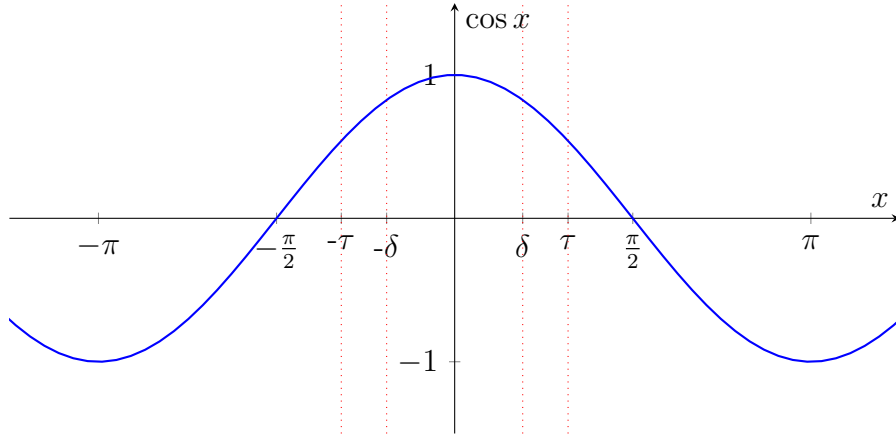
$$\cos x + 1 - \cos \delta \geq 1 \quad (|x| \leq \delta),$$

valamint bármilyen  $\delta < \tau < \pi/2$  választással

$$q_\tau := \max\{|\cos x + 1 - \cos \delta| : x \in [-\pi, -\tau] \cup [\tau, \pi]\} < 1$$

és

$$|\cos x + 1 - \cos \delta| \leq 1 \quad (x \in [-\tau, -\delta] \cup [\delta, \tau]).$$



Ekkor a

$$J_1 := [-\pi, -\tau], J_2 := [-\tau, -\delta], J_3 := [-\delta, \delta], J_4 := [\delta, \tau], J_5 := [\tau, \pi]$$

intervallumokkal minden  $n \in \mathbf{N}$  esetén

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^5 \int_{J_i} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| \geq \left| \int_{-\delta}^{\delta} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| - \sum_{3 \neq i=1}^5 \int_{J_i} |h(x) \cdot T_n(x)| dx.$$

Az előzményekre tekintettel itt a

$$C := \max\{|h(x)| : |x| \leq \pi\} \quad (< +\infty)$$

jelöléssel

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| = \int_{-\delta}^{\delta} h(x) \cdot T_n(x) dx \geq \int_{-\delta}^{\delta} 1 dx = 2\delta,$$

valamint

$$\int_{J_1} |h(x) \cdot T_n(x)| dx, \int_{J_5} |h(x) \cdot T_n(x)| dx \leq C \cdot q_\tau^n \cdot \tau$$

és

$$\int_{J_2} |h(x) \cdot T_n(x)| dx, \int_{J_4} |h(x) \cdot T_n(x)| dx \leq C \cdot (\tau - \delta).$$

Következésképpen

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| \geq 2\delta - (2C \cdot q_\tau^n \cdot \pi + 2C \cdot (\tau - \delta)).$$

A  $\tau$  (az eddigieken túl) nyilván megválasztható úgy is, hogy

$$2C \cdot (\tau - \delta) < \delta/2$$

teljesüljön. Ekkor

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| > 3\pi/2 - 2C \cdot q_\tau^n \cdot \pi.$$

Mivel  $0 < q_\tau < 1$ , ezért

$$q_\tau^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így létezik olyan  $N \in \mathbf{N}$ , amellyel

$$2C \cdot q_\tau^N \cdot \pi < \delta/2$$

amikor is

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_N(x) dx \right| > \delta.$$

Tehát

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_N(x) \neq 0,$$

azaz a  $T := T_N$  választás ellentmond a  $(\star)$  egyenlőségnek. ■

Az előzményekre is tekintettel igaz az alábbi tétel:

**Tétel.** Ha az  $f \in C_{2\pi}$  függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens, akkor az  $Sf$  Fourier-sor összegfüggvénye megegyezik az  $f$ -fel, azaz

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \right) \quad (x \in \mathbf{R}).$$