

Analízis 4

Gyakorlati feladatok

Tartalomjegyzék

1. Gyakorlat	3
1.1. Emlékeztető	3
1.2. Feladatok	7
1.2.1. Feladat	7
1.2.2. Feladat	7
2. Gyakorlat	9
2.1. Emlékeztető	9
2.2. Feladatok	10
2.2.1. Feladat	10
2.2.2. Feladat	11
3. Gyakorlat	12
3.1. Emlékeztető	12
4. Gyakorlat	13
4.1. Emlékeztető	13
4.2. Feladatok	14
4.2.1. Feladat	14
4.3. Feladat	15
5. Gyakorlat	17
5.1. Emlékeztető	17
5.2. Feladatok	18
5.3. Feladat	18
6. Gyakorlat	20
6.1. Emlékeztető	20
6.1.1. Közönséges differenciálegyenletek	20
6.1.2. Szeparábilis differenciálegyenlet	21
6.1.3. Egzakt differenciálegyenlet	23
6.1.4. Lineáris differenciálegyenlet	24
7. Gyakorlat	29
7.1. Emlékeztető	29

7.1.1.	Lineáris differenciálegyenlet-rendszer	29
7.1.2.	Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer, diagonalizálható mátrix	33
7.1.3.	Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer, általános eset	35
8.	Gyakorlat	37
8.1.	Emlékeztető	37
8.1.1.	Weierstrass-kritérium	37
8.1.2.	Folytonossági tétel	38
8.1.3.	Integrálhatósági tétel	38

1 Gyakorlat

1.1. Emlékeztető

Definíció. Legyen $1 \leq s \in \mathbf{N}$, $A \subset \mathbf{R}^s$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *nullmértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbf{R}^s$ ($k \in \mathbf{N}$) intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tekintsük pl. az $I \subset \mathbf{R}^n$ ($1 \leq n \in \mathbf{N}$) intervallum esetén az $f \in R(I)$ függvényt, és legyen

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} : x \in I\}.$$

Ekkor a $\text{graf } f \subset \mathbf{R}^{n+1}$ halmaz nullmértékű.

Ha az $f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ függvény $\mathcal{D}_f \subset \mathbf{R}^n$ értelmezési tartománya korlátos, akkor van olyan $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum, amellyel $\mathcal{D}_f \subset I$. Legyen ekkor

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{D}_f) \\ 0 & (x \in I \setminus \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha $F_I \in R(I)$, akkor $F_J \in R(J)$ minden olyan $J \subset \mathbf{R}^n$ intervallumra, amelyre $\mathcal{D}_f \subset J$ és

$$\int_I F_I = \int_J F_J.$$

Ez ad értelmet a következő definíciónak:

Definíció. A fenti f függvény *Riemann-integrálható*, ha egy alkalmas $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallummal $\mathcal{D}_f \subset I$ és $F_I \in R(I)$. Az utóbbi esetben

$$\int_{\mathbf{R}^n} f := \int_{\mathcal{D}_f} f := \int_I F_I.$$

Az előző definíció olyan függvényekre is kiterjeszthető, amik értelmezési tartománya nem korlátos, viszont a

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \neq 0\}}$$

tartója igen.

Definíció. Legyen az $A \subset \mathbf{R}^n$ halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \mathbf{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

az A *karakterisztikus függvénye*. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Jordan-mérhető*, ha a χ_A függvény integrálható, amikor is a

$$\mu(A) := \int_{\mathbf{R}^n} \chi_A$$

nemnegatív szám az A halmaz *Jordan-mértéke*.

Tétel. Tekintsük a nyílt halmazon értelmezett és folytonosan differenciálható

$$g \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvényt. Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathcal{D}_g$ halmaz kompakt intervallum, továbbá az I belsejére való $g|_{\text{int } I}$ leszűkítés injektív függvény. Ekkor az

$$f : g(I) \rightarrow \mathbf{R}$$

korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha az

$$I \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható. Az utóbbi esetben

$$\int_I f(g(x)) \cdot |\det g'(x)| dx = \int_{g[I]} f.$$

Speciális esetek.

1. **Síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ leképezés, amire

$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathbf{R}^2).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r, \varphi) = r \quad ((r, \varphi) \in \mathbf{R}^2).$$

2. **Módosított síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ leképezés, amire

$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi \\ br \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathbf{R}^2).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r, \varphi) = abr \quad ((r, \varphi) \in \mathbf{R}^2).$$

3. **Térbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ r \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ r \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^3).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r, \varphi, \psi) = -r^2 \cdot \sin \psi \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^3).$$

4. **Módosított térbeli polárkoordináta-transzformáció (elliptikus koordináták).** Legyen $a, b, c \in \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ br \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ cr \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^3).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r, \varphi, \psi) = -abcr^2 \cdot \sin \psi \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^3).$$

5. **Hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r, \varphi, z) = r \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3).$$

6. **Módosított hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $a, b, c \in \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi \\ br \cdot \sin \varphi \\ cz \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r, \varphi, z) = abcr \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. Ekkor Ω -nak valamely $0 \neq e \in \mathbf{R}^3$ irányvektorú, ill. $a \in \mathbf{R}^3$ pontra illeszkedő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

$$\Theta_t = \int_{\Omega} \ell^2(r) \rho(r) dr$$

valós szám, ahol $\ell(r)$ jelöli az $r \in \Omega$ pontnak a t tengelytől mért távolságát:

$$\ell(r) := \inf \{ \|r - (a + \tau e)\| \in \mathbf{R} : \tau \in \mathbf{R} \}.$$

Világos, hogy ha $a = 0$ és $e \in \{e_x, e_y, e_z\}$, akkor Ω -nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_{t_x} = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\Theta_{t_y} = \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\Theta_{t_z} = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Definíció. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test (tömeg)sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. (Ha ρ állandó, akkor a testet homogénnek nevezzük.) Ekkor az

$$m(\Omega) := \int_{\Omega} \rho$$

számot az Ω test tömegének nevezzük. Az Ω tömegközéppontjának koordinátái:

$$\bar{x} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\bar{y} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\bar{z} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

1.2. Feladatok

1.2.1. Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli testnek a *térfogatát*, amelyet az alábbi egyenletű felületek fognak közre:

$$z = x^2 + y^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2 - y^2.$$

Az egyenletekből kapunk két paraboloidot. Ezek metszetét kell *paraméterezni*. Válasszuk két részre a ponthalmazt. Nézzük meg az $y = 0$ síkban lévő pontokat:

$$z = x^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2.$$

Ez két ellentétes irányba néző parabola, amik metszete

$$x^2 - 1 = 2 - x^2 \iff x_1 := -\sqrt{\frac{3}{2}}, x_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Azaz az alábbi térbeli pontokban metszi egymást a két paraboloid:

$$p_1 := \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right), p_2 := \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Szimmetriai okok miatt, be tudjuk vezetni a következő hengerkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbf{R}^3).$$

Legyen

$$H_1 := [0, \sqrt{3/2}] \times [0, 2\pi] \times [1/2, 2 - r^2] \subset \mathbf{R}^3,$$

$$H_2 := [0, \sqrt{3/2}] \times [0, 2\pi] \times [r^2 - 1, 1/2] \subset \mathbf{R}^3,$$

Mivel ezek kompakt intervallumok, igaz lesz, hogy

$$\int_{\mathcal{H}} 1 = \int_{H_1} 1 \cdot |r| dr d\varphi dz + \int_{H_2} 1 \cdot |r| dr d\varphi dz,$$

ahol

$$\mathcal{H} := \Phi[H_1] \cup \Phi[H_2].$$

1.2.2. Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli T testnek a *térfogatát*, *tömegét* és a z -tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \text{ és } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal.

Tehát a sűrűségfüggvény adott $\alpha > 0$ mellett

$$\rho(x, y, z) := \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3).$$

Alkalmazzuk az alábbi térbeli polárkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ r \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ r \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^3).$$

Legyen

$$H := [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/4] \subset \mathbf{R}^3,$$

akkor H kompakt intervallum és

$$\Phi(H) = T.$$

Térfogat:

$$\int_H 1 \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi,$$

tömeg:

$$\int_H \rho(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi,$$

tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_H (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \cdot \rho(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi.$$

Számoljuk ki a tehetetlenségi nyomatékokat. Először írjuk fel tetszőleges $(r, \varphi, \psi) \in H$ esetén az integrandust (α -val történő osztás után)

$$\begin{aligned} r^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi) \cdot r \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + \cos^2 \psi} \cdot r^2 \sin \psi = \\ r^5 \sin^2 \psi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + 1 - \sin^2 \psi} \cdot \sin \psi = \\ r^5 \sin^3 \psi \cdot \sqrt{\sin^2 \psi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 1) + 1} = \\ r^5 \sin^3 \psi. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{t_x}}{\alpha} &= \int_H r^5 \sin^3 \psi dr d\varphi d\psi = \\ \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 \sin^3 \psi dr d\varphi d\psi &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} \sin^3 \psi \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi d\psi = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \sin^3 \psi d\varphi d\psi = \\ \frac{1}{6} \int_0^{\pi/4} [\varphi \sin^3 \psi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\psi &= \frac{2\pi}{6} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \psi d\psi \end{aligned}$$

2 Gyakorlat

2.1. Emlékeztető

Megjegyezzük, hogy ha a

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \in \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

függvény differenciálható, akkor a

$$\partial_k \Psi := (\partial_k \Psi_1, \partial_k \Psi_2, \partial_k \Psi_3) \quad (k \in \{1, 2\})$$

jelöléssel

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi & \partial_2 \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi_1 & \partial_2 \Psi_1 \\ \partial_1 \Psi_2 & \partial_2 \Psi_2 \\ \partial_1 \Psi_3 & \partial_2 \Psi_3 \end{bmatrix}.$$

Definíció. Valamely $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^3$ halmazt *felületdarabnak* nevezünk, ha alkalmas $\emptyset \neq K \subset \mathbf{R}^2$ kompakt és Jordan-mérhető halmaz, ill.

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbf{R}^3, \Psi \in C^1, \text{rang}(\Psi') = 2$$

függvény esetén

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_\Psi = \{\Psi(u, v) \in \mathbf{R}^3 : (u, v) \in K\}.$$

A Ψ leképezést az adott \mathcal{F} felületdarab *paraméterezésének* nevezzük.

1. A fenti definícióban a Ψ leképezés folytonos differenciálhatóságán azt értjük, hogy van olyan $K \subset U \subset \mathbf{R}^2$ nyílt halmaz, ill.

$$\hat{\Psi} : U \rightarrow \mathbf{R}^3, \hat{\Psi} \in C^1$$

függvény, amelyre $\hat{\Psi}|_K = \Psi$.

2. Ha a $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvényre $\Psi \in C^1$, akkor a $\text{rang}(\Psi') = 2$ feltétel azt jelenti, hogy a $\partial_1 \Psi, \partial_2 \Psi$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi \neq 0.$$

Ha a $\Psi : K \rightarrow \mathbf{R}^3$ leképezés valamely felületdarab paraméterezése, akkor az

$$n_\Psi(u, v) := \partial_1 \Psi(u, v) \times \partial_2 \Psi(u, v) \quad ((u, v) \in K)$$

vektor az adott felület $\Psi(u, v)$ pontjához tartozó *érintősíkjának* normálvektora.

Definíció. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^3$ felületdarab paraméterezése az

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbf{R}^3$$

függvény: $\mathcal{R}_\Psi = \mathcal{F}$. Ekkor az \mathcal{F} felület *felszínén* az

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \int_K \|n_\Psi\|$$

valós számot értjük.

1. Ha $\mathcal{F}_1 := \mathcal{R}_{\Psi_1}$, ill. $\mathcal{F}_2 := \mathcal{R}_{\Psi_2}$ nullmértékű halmazban (pl. élekben) csatlakozó felületdarabok, akkor

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) = \int_{K_1} \|n_{\Psi_1}\| + \int_{K_2} \|n_{\Psi_2}\|.$$

2.2. Feladatok

2.2.1. Feladat

Legyen $0 < R \in \mathbf{R}$. Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$$

félgömbfelületnek az

$$x^2 + y^2 = Rx$$

egyenletű hengerfelület által kimetszett részének (Viviani-féle levél) a felszínét!

A $z \geq 0$ feltérben lévő félgömbfelület paraméterezése:

$$\Psi(u, v) := (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \quad ((u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2).$$

Ekkor $\Psi \in C^1$, $\text{rang}(\Psi') = 2$, továbbá ($u^2 + v^2 < R^2$ esetén)

$$\begin{aligned} \partial_1 \Psi(u, v) &= \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right), \\ \partial_2 \Psi(u, v) &= \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right), \\ n_\Psi(u, v) &= \begin{pmatrix} -\partial_1 g(u, v) \\ -\partial_2 g(u, v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Azaz

$$\|n_\Psi(u, v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1} =$$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}.$$

Ha most

$$\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \in [0, \pi/2], r \in [0, R \cos(\varphi)])$$

Akkor a felszínt így kapjuk meg:

$$2R \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \int_0^{R \cos(\varphi)} \|n_{\Psi}(\Phi(r, \varphi))\| \cdot r \, dr \, d\varphi.$$

2.2.2. Feladat

Határozzuk meg az alábbi feltételekkel megadott felület felszínét:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } x^2 + y^2 \leq 2ax \quad (a > 0).$$

Legyen

$$f(x, y) := (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

ahol $\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2ax\}$, f egy Euler-Monge módon megadott paraméterezése a z -tengely irányába felfelé néző körkúp palástjának, *leszűkítve* annak a hengernek a belsejére, aminek alapját az Ω halmaz adja. Egyből írjuk is át az f függvényt a megfelelő polár-transzformációval

$$\Phi(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \quad (\varphi \in [-\pi/2, \pi/2], r \in [0, 2a \cos(\varphi)]).$$

A Φ transzformáció-függvény értelmezési tartományát a Thálész-tétel alkalmazásával könnyedén megkaptuk. Tehát ha $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^3$ a feladatban definiált felület, akkor

$$\Psi(r, \varphi) := f \circ \Phi = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), r) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}).$$

A felület kiszámításához szükségünk lesz a következőkre:

$$\partial_1 \Psi(r, \varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 1) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$\partial_2 \Psi(r, \varphi) = (-r \sin(\varphi), r \cos(\varphi), 0) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$n_{\Psi}(r, \varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 1 \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$\|n_{\Psi}(r, \varphi)\| = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}).$$

Tehát a keresett felszín

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{D}_{\Phi}} \|n_{\Psi}\| = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi.$$

3 Gyakorlat

3.1. Emlékeztető

Definíció. Legyen $K \subset \mathbf{R}^2$ kompakt, Jordan-mérhető halmaz,

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbf{R}^3, \Psi \in C^1, \text{rang}(\Psi') = 2,$$

továbbá tegyük fel, hogy $\Psi|_{\text{int}(K)}$ injektív. Ekkor

1. ha $f : \Psi[K] \rightarrow \mathbf{R}, f \in C$, akkor az f függvény Ψ -re vonatkozó *elsőfajú felületi integráljának* (vagy *felszíni integráljának*) nevezzük az

$$\int_{\Psi} f := \int_K (f \circ \Psi) \cdot \|n_{\Psi}\|$$

valós számot,

2. ha $f : \Psi[K] \rightarrow \mathbf{R}^3, f \in C$, akkor az f függvény Ψ -re vonatkozó (*másodfajú felületi integráljának*) nevezzük az

$$\int_{\Psi} f := \langle f \circ \Psi, n_{\Psi} \rangle$$

valós számot.

4 Gyakorlat

4.1. Emlékeztető

Valamilyen kompakt $[a, b]$ intervallum ($a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) és ($\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$) ($1 \leq n \in \mathbf{N}$) nyílt halmaz esetén tekintsük az

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényt. Ha $x \in U$, akkor legyen $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ az a függvény, amire

$$f_x(t) := f(x, t) \quad (t \in [a, b]).$$

Tegyük fel, hogy minden $x \in U$ esetén az f_x függvény Riemann-integrálható: $f_x \in R[a, b]$, legyen ekkor

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt := \int_a^b f_x \quad (x \in U).$$

Az így definiált $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt az f által meghatározott *paraméteres integrálnak* nevezzük.

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_f = U \times [a, b] \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

Vezessük be \mathbf{R}^n -en is és \mathbf{R}^{n+1} -en is a $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ normát. Nem fog félreértést okozni, ha $\xi \in \mathbf{R}^n$ és $\eta \in \mathbf{R}^{n+1}$ esetén egyaránt a $\|\xi\|$, $\|\eta\|$ jelölést használjuk. Így pl. nyilvánvaló, hogy az

$$(x, t) \in U \times [a, b]$$

vektorra

$$\|(x, t)\| = \max\{\|x\|, |t|\}.$$

Továbbá, ha az

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény folytonos, akkor tetszőleges $x \in U$ mellett az $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény is folytonos. Ui., ha $s \in [a, b]$ és $\xi := (x, s)$, akkor $f \in \mathcal{C}\{\xi\}$ miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amellyel

$$|f(\omega) - f(\xi)| < \varepsilon \quad (\omega \in U \times [a, b], \|\omega - \xi\| < \delta),$$

azaz

$$|f(y, t) - f(x, s)| < \varepsilon \quad ((y, t) \in U \times [a, b], \|(y, t) - (x, s)\| < \delta).$$

Ha itt $y := x$, akkor

$$\|(x, t) - (x, s)\| = \|(0, t - s)\| = |t - s|,$$

ezért

$$|f(x, t) - f(x, s)| = |f_x(t) - f_x(s)| < \varepsilon (t \in [a, b], |t - s| < \delta),$$

más szóval $f_x \in \mathcal{C}\{s\}$. Következésképpen $f_x \in C[a, b]$, így $f_x \in R[a, b]$, létezik tehát a fenti F paraméteres integrál.

Tétel. Tegyük fel, hogy adott az $[a, b]$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) kompakt intervallum, $1 \leq n \in \mathbf{N}$, és $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz. Ekkor tetszőleges folytonos

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény esetén az

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt \quad (x \in U)$$

paraméteres integrálra az alábbiak igazak:

1. az F függvény folytonos;
2. ha valamilyen $i = 1, \dots, n$ indexre létezik és folytonos a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény, akkor létezik a $\partial_i F$ parciális deriváltfüggvény is, és

$$\partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x, t) dt \quad (x \in U);$$

3. amennyiben az f folytonosan differenciálható, akkor F is.

4.2. Feladatok

4.2.1. Feladat

Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctg(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} dx = \frac{\pi}{2} \ln(y+1) \quad (y \geq 0).$$

Legyen

$$f(y, x) := \begin{cases} y & x = 0, y \in [0, +\infty) \\ 0 & x = \pi/2, y \in [0, +\infty) \\ \frac{\arctg(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} & ((y, x) \in [0, +\infty) \times (0, \pi/2)). \end{cases}$$

Ekkor $f \in C$, ezért a paraméteres integrál is folytonos. Mivel

$$\partial_1 f(y, x) := \begin{cases} 0 & x = \pi/2, y \in [0, +\infty) \\ \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2(x)} & ((y, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi/2)) \end{cases}$$

$\partial_1 f \in C$, tehát a paraméteres integrál deriválható.

4.3. Feladat

Indokoljuk meg, hogy tetszőleges $0 < \alpha \in \mathbf{R}$ esetén

$$F(\alpha) := \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \in \mathbf{R},$$

majd mutassuk meg, hogy fennáll az

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} \quad (0 < \alpha \in \mathbf{R})$$

egyenlőség!

Legyen

$$f(\alpha, x) := \begin{cases} \alpha & \alpha \in (0, +\infty), x = 0; \\ \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \alpha \in (0, +\infty), x \in (0, 1]; \end{cases}$$

akkor $f \in C$, hiszen (Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{1+\alpha^2 x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \alpha}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \alpha.$$

Tehát $F \in C$ is teljesül. Mivel

$$\partial_1 f(\alpha, x) = \frac{1}{1 + \alpha^2 x} \quad ((\alpha, x) \in (0, +\infty) \times [0, 1]),$$

és $\partial_1 f \in C$, ezért $F \in D$.

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^1 \partial_\alpha \left(\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \right) = \int_0^1 \frac{1}{1 + \alpha^2 x} dx = \left[\frac{\ln(1 + \alpha^2 x)}{\alpha^2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Tehát

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Számoljuk ki F' határozatlan integrálját:

$$\begin{aligned} \int F' &= \int \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2} d\alpha = -\frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} - \int \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha = \\ &= 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} + c \quad (c \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Azaz, mivel

$$F \in \int F',$$

ezért létezik egy $c \in \mathbf{R}$ konstans, amivel

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} + c.$$

Számoljuk ki $F(1)$ -et:

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

Ebből

$$F(1) = 2\operatorname{arctg}(1) - \ln(2) = \frac{\pi}{2} - \ln(2),$$

ahonnan $c = 0$, tehát

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha}$$

következik.

5 Gyakorlat

5.1. Emlékeztető

Legyenek $n, m \in \mathbf{N}$ természetes számok, ahol $2 \leq n$ és $1 \leq m < n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következésképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

akkor f -et olyan kétváltozós vektorfüggvényként tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékekben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelmében valamilyen $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ zérushelye az f -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a -nak olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a b -nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Nyilván $\varphi(a) = b$.

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Adott $n, m \in \mathbf{N}$, $2 \leq n$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$ és az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

5.2. Feladatok

5.3. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7$$

egyenletből y kifejezhető x implicitfüggvényeként a 2 egy környezetében, majd határozzuk meg így adódó implicitfüggvénynek deriváltját az $x = 2$ helyen, továbbá írjuk fel az érintőegyenese egyenleteit!

Legyen

$$f(x, y) := x^2 + 2xy - y^2 - 7 \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2).$$

Ekkor

$$f(2, y) = 0 \iff y \in \{1, 3\}.$$

Mivel $f \in C^1$, és

$$\partial_2 f(2, 1) = 2 \neq 0,$$

$$\partial_2 f(2, 3) = -2 \neq 0,$$

így teljesülnek az implicitfüggvényre vonatkozó tétel feltételei. Legyen

$$H := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2xy - y^2 = 7\}.$$

Így valóban léteznek olyan $U =: K(2)$, $V_1 := K(1)$, $V_2 := K(3)$ környezetek, hogy $\varphi_1 : U \rightarrow V_1$ és $\varphi_2 : U \rightarrow V_2$ folytonosan differenciálható függvények grafikonjai rendre megegyeznek a H halmaz $(2, 1)$, $(2, 3)$ pontban vett környezetével.

$$f(x, \varphi_i(x)) = 0 \quad (x \in U, i = 1, 2).$$

Mivel

$$\partial_1 f(2, 1) = 6, \text{ ill. } \partial_1 f(2, 3) = 10,$$

ezért

$$\varphi_1(2) = 1, \text{ ill. a } \varphi_2(2) = 3$$

egyenlőségek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\varphi_1'(2) = -3, \varphi_2(2) = 5.$$

A megfelelő érintők egyenlete:

$$y = \varphi_1(2) + \varphi_1'(2)(x - 2) = 7 - 3x \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$y = \varphi_2(2) + \varphi_2'(2)(x - 2) = 5x - 7 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

6 Gyakorlat

6.1. Emlékeztető

6.1.1. Közöséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvény, amelyre igazak a következő állítások:

1. \mathcal{D}_φ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közöséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1., 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban mindegyre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni.

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó k.é.p. *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges φ, ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Legyen ekkor \mathcal{M} a szóban forgó k.é.p. megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcap_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy τ -t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \rightarrow \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilván, $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén $\varphi = \Phi|_{\mathcal{D}_\varphi}$.

A Φ függvényt a k.é.p. *teljes megoldásának* nevezzük.

6.1.2. Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \rightarrow \mathbf{R}, h : J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x, y) \in I \times J).$$

A $\varphi \in I \rightarrow J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

(*Szeparábilis* (vagy más szóval *szétválasztható változójú*) differenciálegyenlet.)
Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi.$$

Tétel. Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra (ha az létezik)

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ is, és az $1/h : J \rightarrow \mathbf{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények, így léteznek a

$$G \in \int g, H \in \int \frac{1}{h},$$

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}, H : J \rightarrow \mathbf{R}$$

primitív függvényeik. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a \mathcal{D}_φ is nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen H szigorúan monoton, amiért invertálható. A H^{-1} inverzzel

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz $H(\xi) = G(\tau) + c$, ill.

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha G, H helyett más primitív függvényeket választunk, akkor ugyanezt az egyenlőséget kapjuk.

Elegendő már csak azt belátni, hogy létezik megoldás. Ld. előadás (implicitfüggvény-tétel megfelelő alkalmazása). ■

A tétel bizonyításával egyúttal egy módszert ("képletet") is adtunk a

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

szeparábilis egyenletre vonatkozó $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p. megoldására. Ennek a kulcsmozzanata a G, H primitív függvények meghatározása:

$$G(x) = \int_{\tau}^x g(t) dt, \quad H(y) = \int_{\xi}^y \frac{dt}{h(t)} \quad (x \in I, y \in J),$$

amiből aztán a φ -re vonatkozó

$$H(\varphi(x)) = \int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = G(x) = \int_{\tau}^x g(t) dt \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz az

$$\int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_{\tau}^x g(t) dt \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

implicit egyenlet adódott.

6.1.3. Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen $n := 1$, és az $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \text{ és } h : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad ((x, y) \in I \times J).$$

Ekkor a fenti minden φ megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott *d.e. egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y)) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$\text{grad } G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g, h).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a φ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

Tétel. Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Valóban, $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt a feltételezett φ megoldásra

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \langle \text{grad } G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle =$$

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ halmaz nyílt intervallum, ezért az F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(\tau) = \xi$, ezért

$$c = G(\tau, \xi).$$

A G -ről feltehetjük, hogy $G(\tau, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó kezdetiérték-probléma φ megoldása eleget tesz a

$$G(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó kezdetiérték-probléma minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau, \xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau, \xi) = h(\tau, \xi) \neq 0,$$

ezért G -re (a (τ, ξ) helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \rightarrow J$$

(implicit)függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi, G(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi), \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x, \psi(x))}{\partial_2 G(x, \psi(x))} = -\frac{g(x, \psi(x))}{h(x, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

6.1.4. Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most $n = 1$ és az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a

$$g, h : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$ mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot (\theta(t) - \psi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben $h \equiv 0$:

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

Tétel. Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges φ , ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Legyen a

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és $G' = g$ (a g -re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\chi}{\varphi_0} \right)'(t) &= \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} = \\ \frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} &= 0, \end{aligned}$$

azaz (lévén a \mathcal{D}_χ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény, hogy az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az m -re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármelyik m primitív függvényét is véve, az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \rightarrow \mathbf{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol m egy tetszőleges primitív függvénye a h/φ_0 függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbf{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ezt megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) = \\ &= \frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J). \end{aligned}$$

Speciálisan az "egész" I intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbf{R}, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik φ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c|_J}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden φ, ψ megoldására $\varphi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\varphi}}$ és $\psi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\psi}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

■

A

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

lineáris d.e.-re vonatkozó k.é.p. megoldására "megoldóképletet" is felírhatunk.
Legyen ui.

$$G(x) := \int_{\tau}^x g(t) dt, \quad m(x) := \int_{\tau}^x \frac{h(t)}{\varphi_0(t)} dt \quad (x \in I),$$

akkor

$$\varphi_0(\tau) = e^{G(\tau)} = 1, \quad m(\tau) = 0,$$

és a szóban forgó k.é.p. "teljes" megoldását jelentő

$$\psi(x) := m(x) \cdot \varphi_0(x) + c \cdot \varphi_0(x) \quad (x \in I)$$

függvényben

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)} = \xi.$$

7 Gyakorlat

7.1. Emlékeztető

7.1.1. Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és egy nyílt $I \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad b = (b_1, \dots, b_n) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

mátrixfüggvényt. Ha

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

akkor az f függvény, mint jobb oldal által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ($n > 1$ esetén *lineáris differenciálegyenlet-rendszernek*) nevezzük.

Legyenek a fentiekén túl adottak még a $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{K}^n$ értékek, és vizsgáljuk a $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p.-t. Ha $I_* \subset I$, $\tau \in \text{int } I_*$, kompakt intervallum, akkor

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} \in \mathbf{R} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} \in \mathbf{R}.$$

Következésképpen

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_\infty = \|A(x) \cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y - z\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (x \in I_*, y, z \in \mathbf{K}^n).$$

Továbbá a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\| : x \in I_*\} \in \mathbf{R}$$

jelöléssel

$$\|f(x, y)\|_\infty = \|A(x) \cdot y + b(x)\|_\infty \leq \|A(x) \cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq q \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I_*, y \in \mathbf{K}^n),$$

ezért minden k.é.p. teljes megoldása az I intervallumon van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó d.e. *homogén*, ha $b \equiv 0$, *inhomogén*, ha létezik $x \in I$, hogy $b(x) \neq 0$. Legyenek

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \rightarrow \mathbf{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \rightarrow \mathbf{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi + b\}.$$

A lineáris d.e.-ek "alaptétele" a következő

Tétel. A bevezetésben mondott feltételek mellett

1. az \mathcal{M}_h halmaz n dimenziós lineáris tér a \mathbf{K} -ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\psi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a $\phi_k = (\phi_{k1}, \dots, \phi_{kn})$ ($k = 1, \dots, n$) függvények bázist alkotnak az \mathcal{M}_h -ban, akkor léteznek olyan $g_k : I \rightarrow \mathbf{K}$ ($k = 1, \dots, n$) differenciálható függvények, amelyekkel

$$\psi := \sum_{k=1}^n g_k \cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyítás. Az 1. állítás bizonyításához mutassuk meg először is azt, hogy bármilyen $\psi, \varphi \in \mathcal{M}_h$ és $c \in \mathbf{K}$ esetén $\psi + c \cdot \varphi \in \mathcal{M}_h$:

$$(\psi + c \cdot \varphi)' = \psi' + c \cdot \varphi' = A \cdot \psi + c \cdot A \cdot \varphi = A \cdot (\psi + c \cdot \varphi),$$

amiből a mondott állítás az \mathcal{M}_h definíciója alapján nyilvánvaló. Tehát az \mathcal{M}_h lineáris tér a \mathbf{K} felett.

Most megmutatjuk, hogy ha $m \in \mathbf{N}$, és $\chi_1, \dots, \chi_m \in \mathcal{M}_h$ tetszőleges függvények, akkor az alábbi ekvivalencia igaz:

a χ_1, \dots, χ_m függvények akkor és csak akkor alkotnak lineárisan független rendszert az \mathcal{M}_h vektortérben, ha bármilyen $\tau \in I$ esetén a $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek a \mathbf{K}^n -ben.

Az ekvivalencia egyik fele nyilvánvaló: ha a χ_1, \dots, χ_m -ek lineárisan összefüggnek, akkor alkalmas $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{K}$, $|c_1| + \dots + |c_m| > 0$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k \equiv 0.$$

Speciálisan minden $\tau \in I$ helyen is

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0.$$

Így a $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggő rendszert alkotnak \mathbf{K}^n -ben.

Fordítva, legyen $\tau \in I$, és tegyük fel, hogy a $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggnek. Ekkor az előbbi (nem csupa nulla) $c_1, \dots, c_m \in K$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0.$$

Már tudjuk, hogy

$$\phi := \sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k \in \mathcal{M}_h,$$

ezért az így definiált $\phi : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ függvény megoldása a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \varphi(\tau) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának. Világos ugyanakkor, hogy a $\Psi \equiv 0$ függvény is a most mondott k.é.p. megoldása az I -n. Azt is tudjuk azonban, hogy ez a k.é.p. (is) egyértelműen oldható meg, ezért $\phi \equiv \Psi \equiv 0$. Tehát a χ_1, \dots, χ_m függvények is összefüggnek.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy az \mathcal{M}_h vektortér véges dimenziós, és a $\dim \mathcal{M}_h$ dimenziója legfeljebb n .

Tekintsük most a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \varphi(\tau) = e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

kezdetiérték-problémákat, ahol az $e_i \in \mathbf{K}^n$ ($i = 1, \dots, n$) vektorok az \mathbf{K}^n tér "szokásos" (kanonikus) bázisvektorait jelölik. Ha

$$\chi_i : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

jelöli az említett k.é.p. teljes megoldását, akkor a

$$\chi_i(\tau) = e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Így az előbbieik alapján χ_1, \dots, χ_m függvények is azok. Tehát az \mathcal{M}_h dimenziója legalább n , azaz a fentiekre tekintettel $\dim \mathcal{M}_h = n$.

A 2. állítás igazolásához legyen $\chi \in \mathcal{M}_h$. Ekkor $\psi + \chi \in D$, és

$$(\psi + \chi)' = \psi' + \chi' = A \cdot \psi + b + A \cdot \chi = A \cdot (\psi + \chi) + b,$$

amiből $\psi + \chi \in \mathcal{M}$ következik. Ha most egy $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényből indulunk ki és $\chi := \varphi - \psi$, akkor $\chi \in D$, és

$$\chi' = \varphi' - \psi' = A \cdot \varphi + b - (A \cdot \psi + b) = A \cdot \chi,$$

amiből $\chi \in \mathcal{M}_h$ adódik. Tehát $\varphi = \psi + \chi$.

A tétel. 3. részének a bizonyítása érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket, ill, fogalmakat. A

$$\phi_k = (\phi_{k1}, \dots, \phi_{kn}) \quad (k = 1, \dots, n)$$

bázisfüggvények mint oszlopvektor-függvények segítségével tekintsük a

$$\Phi : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvényt:

$$\Phi := [\phi_1 \cdots \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\Phi' := [\phi'_1 \cdots \phi'_n] = \begin{bmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{21} & \cdots & \phi'_{n1} \\ \phi'_{12} & \phi'_{22} & \cdots & \phi'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi'_{1n} & \phi'_{2n} & \cdots & \phi'_{nn} \end{bmatrix}$$

a Φ deriváltja. Ekkor könnyen belátható, hogy

$$\Phi' = A \cdot \Phi.$$

Továbbá tetszőleges $g_1, \dots, g_n : I \rightarrow \mathbf{K}$ differenciálható függvényekkel a

$$g := (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

vektorfüggvény differenciálható,

$$\psi := \sum_{k=1}^n g_k \cdot \phi_k = \Phi \cdot g,$$

és

$$\psi' = \Phi' \cdot g + \Phi \cdot g' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g'.$$

A $\psi \in \mathcal{M}$ tartalmazás nyilván azzal ekvivalens, hogy

$$\psi' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g' = A \cdot \psi + b = A \cdot (\Phi \cdot g) + b = (A \cdot \Phi) \cdot g + b,$$

következésképpen azzal, hogy

$$\Phi \cdot g' = b.$$

A 2. pont alapján tetszőleges $x \in I$ helyen a $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz a $\Phi(x)$ mátrix nem szinguláris. A mátrixok inverzének a kiszámítása alapján egyszerűen adódik, hogy a

$$\Phi^{-1}(x) := (\Phi(x))^{-1} \quad (x \in I)$$

definícióval értelmezett

$$\Phi^{-1} : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény komponens-függvényei folytonosak. Ezért a

$$(h_1, \dots, h_b) := \Phi^{-1} \cdot b : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

függvény is folytonos. Olyan folytonosan differenciálható

$$g : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

függvényt keresünk tehát, amelyekre $g' = \Phi^{-1} \cdot b$, azaz

$$g'_i = h_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ilyen g_i létezik, nevezetesen a (folytonos) h_i ($i = 1, \dots, n$) függvény bármely primitív függvénye ilyen. ■

Ezt összefoglalva, egy lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása a következőképpen történik:

1. Meghatározzuk a ϕ_1, \dots, ϕ_n bázist (*alaprendszert*). (Ez általában *lehetetlen*, nincs rá "képlet", viszont bizonyos feltételek mellett működik.) Ezzel a bázissal definiáljuk a Φ mátrixot (*alpmátrix*).
2. A tétel 3. pontja szerint keresnünk kell egy $g : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ differenciálható függvényt, amellyel

$$\psi := \Phi \cdot g \in \mathcal{M}.$$

(Az állandók variálásának módszere. ψ az ún. *partikuláris megoldás*). Azaz olyan g -t, ami eleget tesz a

$$g' = \Phi^{-1} \cdot b$$

egyenlőségnek. Mivel $\Phi^{-1} \cdot b$ folytonos (és I nyílt intervallum), ilyen g létezik:

$$(h_1, \dots, h_n) := \Phi^{-1} \cdot b : I \rightarrow \mathbf{K}^n,$$

$$g_i \in \int h_i.$$

7.1.2. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer, diagonalizálható mátrix

Legyen most

$$f(x, y) := A \cdot y + b(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

ahol $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum mellett

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbf{R}^n, b \in C.$$

Tegyük fel, hogy A diagonalizálható, azaz létezik $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$, hogy $T^{-1}AT$ mátrix diagonális: alkalmas $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ számokkal

$$\Lambda := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

T invertálhatósága miatt a

$$T = [t_1 \cdots t_n]$$

t_i ($i = 1, \dots, n$) oszlopvektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$AT = [At_1 \cdots At_n] = T\Lambda = [\lambda_1 \cdot t_1 \cdots \lambda_n \cdots t_n]$$

miatt

$$A \cdot t_i = \lambda_i \cdot t_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Mivel

$$t_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

ezért mindez röviden azt jelenti, hogy a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ számok az A mátrix sajátértékei, a t_1, \dots, t_n vektorok pedig rendre a megfelelő sajátvektorok. Lévén, a t_i -k lineárisan függetlenek, az A -ra vonatkozó feltételünk úgy fogalmazható, hogy van a \mathbf{K}^n -ben (az A sajátvektoraiból álló) sajátvektorbázis.

A homogén egyenlet tehát a következőképpen írható fel:

$$\varphi' = A \cdot \varphi = T\Lambda T^{-1} \cdot \varphi,$$

amiből

$$(T^{-1}\varphi)' = \Lambda \cdot (T^{-1}\varphi)$$

következik. Vegyük észre, hogy ha $\varphi \in \mathcal{M}_h$, akkor a $\psi := T^{-1}\varphi$ függvény megoldása a Λ diagonális mátrix által meghatározott állandó együtthatós homogén lineáris egyenletnek. Ez utóbbit az előző tétel alapján nem nehéz megoldani. Legyenek iu. a

$$\psi_i : I \rightarrow \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények a következők:

$$\psi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i \quad (x \in I, i = 1, \dots, n).$$

Világos, hogy $\psi_i \in D$ és

$$\psi_i'(x) = \lambda_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot (\Lambda \cdot e_i) =$$

$$\Lambda \cdot (e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i) = \Lambda \cdot \psi_i(x) \quad (x \in I, i = 1, \dots, n).$$

Más szóval a ψ_i -k valóban megoldásai a Λ által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek. Mivel bármely $\tau \in I$ esetén a

$$\psi_i(\tau) = e^{\lambda_i \cdot \tau} \cdot e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

vektorok nyilván lineárisan függetlenek, ezért az előző tétel bizonyításában mondottak szerint a ψ_i ($i = 1, \dots, n$) függvények lineárisan függetlenek. Ha

$$\phi_i := T \cdot \psi_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

akkor nyilván a ϕ_i -k is lineárisan függetlenek,

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in I, i = 1, \dots, n),$$

és minden $i = 1, \dots, n$ indexre

$$\phi'_i = A \cdot \phi_i.$$

Tehát $\phi_i \in \mathcal{M}_h$ ($i = 1, \dots, n$) egy bázis. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

Tétel. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrix diagonalizálható. Legyenek a sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, egy-egy megfelelő sajátvektora pedig $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{K}^n$. Ekkor a

$$\varphi' = A \cdot \varphi$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a

$$\phi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n)$$

függvények lineárisan független megoldásai.

7.1.3. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer, általános eset

Csak az $n = 2$ esettel foglalkozunk. Legyen $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $b : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ folytonos függvény, $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ és vizsgáljuk a

$$\varphi'(x) = A \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

lineáris differenciálegyenletet. Valamilyen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ számokkal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a mátrix pontosan akkor nem diagonalizálható, ha

$$(a - d)^2 + 4bc = 0 \text{ és } |b| + |c| > 0.$$

Ekkor egyetlen sajátértéke van az A -nak, nevezetesen

$$\lambda := \frac{a+d}{2},$$

legyen a t_1 egy hozzá tartozó sajátvektor:

$$0 \neq t_1 \in \mathbf{R}^2, At_1 = \lambda t_1.$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy létezik $t_2 \in \mathbf{R}^2$ vektor, amelyik lineárisan független a t_1 -től és

$$At_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ekkor

$$\boxed{\phi_1(x) := e^{\lambda x} \cdot t_1, \phi_2(x) := e^{\lambda x} \cdot (t_2 + xt_1)} \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy alaprendszer.

8 Gyakorlat

8.1. Emlékeztető

8.1.1. Weierstrass-kritérium

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\emptyset \neq X$ mellett $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$, és adott az

$$f_n : X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(f_n)$ függvény sor. Legyen továbbá egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$ halmazzal és egy (a_n) számsorozattal

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in A\} \leq a_n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvény sor az A halmazon egyenletesen konvergens.

Például, a

$$h_n(x) := x^n \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvény sorozattal legyen $0 < \delta < 1$ és $A := [-\delta, \delta]$, amikor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|h_n(x)| : x \in A\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|x^n| : x \in [-\delta, \delta]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < +\infty.$$

Tehát a szóban forgó $\sum(h_n)$ függvény sor a $[-\delta, \delta]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

A Weierstrass-kritérium nyilvánvaló következményeként kapjuk az alábbi állítást is: ha az (a_n) , (b_n) számsorozatokra

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

akkor az általuk meghatározott $\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens.

8.1.2. Folytonossági tétel

Tétel. Tegyük fel, hogy az

$$f_n \in \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq X \subset \mathbf{K}$ halmazon. Legyen a határfüggvénye az

$$f : X \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény. Ha $a \in X$ és $f_n \in \mathcal{C}\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $f \in \mathcal{C}\{a\}$.

Tétel. Legyen adott a

$$g_n : X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(g_n)$ függvénysor, ami egyenletesen konvergens, az összegfüggvénye pedig a

$$G : X \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény. Ha $a \in X$ és $g_n \in \mathcal{C}\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $G \in \mathcal{C}\{a\}$.

8.1.3. Integrálhatósági tétel

Tétel. Tekintsük az $[a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R}, a < b)$ intervallumon értelmezett $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló (f_n) függvénysorozatot, amelyikről tegyük fel, hogy egyenletesen konvergens. Ha $f_n \in R[a, b]$ $(n \in \mathbf{N})$ és f jelöli az (f_n) sorozat határfüggvényét, akkor $f \in R[a, b]$, az integrálok $(\int_a^b f_n)$ sorozata konvergens, és

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Tétel. Tegyük fel, hogy az $[a, b]$ ($a, b \in \mathbf{R}, a < b$) intervallumon értelmezett

$$g_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló $\sum(g_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens. Ha $g_n \in R[a, b]$ ($n \in \mathbf{N}$) és G jelöli a $\sum(g_n)$ sor összegfüggvényét, akkor $G \in R[a, b]$, az integrálok alkotta $\sum(\int_a^b g_n)$ sor konvergens, valamint

$$\int_a^b G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n.$$

Legyen adott (g_n) a fentebb említett sorozat. Ekkor

$$G_n(x) := \sum_{k=0}^n g_k(x) = g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x) \quad (x \in [a, b]).$$

$G_n \equiv \sum(g_n)$. Legyen

$$G(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Adott $x \in [a, b]$ mellett

$$\int_a^b G_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n g_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k(x) dx = \int_a^b g_0(x) dx + \cdots + \int_a^b g_n(x) dx.$$

Ekkor

$$\int_a^b G(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n(x) dx,$$

azaz

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b g_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b G_n(x) dx.$$

Részletesebben kiírva:

$$\int_a^b (g_0(x) + g_1(x) + \cdots) dx = \int_a^b g_0(x) dx + \int_a^b g_1(x) dx + \cdots.$$