

Analízis 4 vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1	Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel. (a bizonyítás vázlata)	2
1.1	Az implicitfüggvény fogalma	2
1.2	Implicitfüggvény-tétel	3
1.3	Lokális invertálhatóság	4
2	A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.	8
2.1	Közönséges differenciálegyenletek	8
2.2	Teljes megoldás	8
2.3	Szeparábilis differenciálegyenlet	9
3	Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel. A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel.	13
3.1	Lipschitz-feltétel	13
3.2	Egzisztenciátétel	14

1 Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel. (a bizonyítás vázlata)

1.1 Az implicitfüggvény fogalma

Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ természetes számok, ahol $2 \leq n$ és $1 \leq m \leq n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

akkor az f -et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbb{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a -nak egy olyan $K(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$ környezete, a b -nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbb{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x, y) = 0.$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1, \dots, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1, \dots, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

1.2 Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Adott $n, m \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

1.3 Lokális invertálhatóság

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h|_I)^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h|_I)^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többváltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény és az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a -ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f|_{K(a)}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a -beli *lokális inverzének* nevezzük.

Tétel. Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy egy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$ és $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor az f függvény az a -ban lokálisan invertálható, és az a -beli lokális inverze folytonos.

Bizonyítás (vázlat). Feltehető, hogy

$$a = f(a) = 0 \in \mathbb{R}^n, f'(0) = (v_{ik})_{i,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

pedig az $n \times n$ -es egységmátrix:

$$v_{ii} = 1, v_{ik} = 0 \quad (i, k \in \{1, \dots, n\}, i \neq k).$$

Legyen $y \in \mathbb{R}^n$ és

$$\Phi_y(x) := x - f(x) + y =: g(x) + y \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor $g \in C^1\{0\}$ és

$$g'(0) = \Theta := (0)_{i,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(az $n \times n$ -es nullmátrix). Ha tehát

$$g = (g_1, \dots, g_n),$$

akkor egy $K_r(0) \subset \mathcal{D}_f$ ($r > 0$) környezet minden pontjában a g függvény differenciálható, a g_k koordinátafüggvények $\partial_i g_k$ ($i, k = 1, \dots, n$) parciális deriváltfüggvényei valamennyien folytonosak a 0-ban, és

$$\partial_i g_k(0) = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Válasszuk a $q > 0$ számot úgy, hogy $n \cdot q < 1/2$, ekkor az előbbiek szerint a $K_r(0)$ környezetről az is feltehető, hogy

$$G_r(0) := \overline{K_r(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq r\} \subset \mathcal{D}_f$$

és

$$|\partial_i g_k(x)| < q \quad (x \in G_r(0), i, k = 1, \dots, n).$$

Ezért

$$\|g'(x)\|_{(\infty)} = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |\partial_i g_k(x)| : k = 1, \dots, n \right\} < n \cdot q < \frac{1}{2} \quad (x \in G_r(0)).$$

Így azt mondhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \|g(x) - g(t)\| \leq \\ & \sup \left\{ \|g'(\xi)\|_{(\infty)} : \xi \in G_r(0) \right\} \cdot \|x - t\|_\infty \leq \frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \quad (x, t \in G_r(0)). \end{aligned}$$

Tehát egyúttal

$$\begin{aligned} & \|\Phi_y(x) - \Phi_y(t)\|_\infty = \|g(x) - g(t)\|_\infty \leq \\ & \frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^n, x, t \in G_r(0)), \end{aligned}$$

speciálisan tetszőleges $y \in K_{r/2}(0)$ mellett

$$\|\Phi_y(x)\|_\infty \leq \|g(x)\|_\infty + \|y\|_\infty = \|g(x) - g(0)\|_\infty + \|y\|_\infty \leq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \|x\|_\infty + \|y\|_\infty < r \quad (x \in G_r(0)),$$

azaz $\Phi_y(x) \in K_r(0)$. Mindez azt jelenti, hogy bármelyik $y \in K_{r/2}(0)$ esetén a

$$\Phi_y : G_r(0) \rightarrow K_r(0) \quad (\subset G_r(0))$$

leképezés kontrakció. A fixponttétel alkalmazásával ezért $y \in K_{r/2}(0)$ mellett egyértelműen létezik olyan $x_y \in G_r(0)$, ami fixpontja a Φ_y -nak:

$$\Phi_y(x_y) = x_y.$$

Definiálhatunk tehát egy

$$\varphi : K_{r/2}(0) \rightarrow G_r(0)$$

leképezést, amelyre

$$\varphi(y) := x_y \quad (y \in K_{r/2}(0)),$$

azaz

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) \quad (y \in K_{r/2}(0)).$$

Más szóval

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) - f(\varphi(y)) + y = g(\varphi(y)) + y = \varphi(y) \quad (y \in K_{r/2}(0)),$$

amiből

$$f(\varphi(y)) = y \quad (y \in K_{r/2}(0))$$

is rögtön következik. Az eddigieket figyelembe véve

$$\|\varphi(y)\|_\infty = \|\Phi_y(\varphi(y))\|_\infty < r \quad (y \in K_{r/2}(0))$$

miatt

$$\varphi : K_{r/2}(0) \rightarrow K_r(0).$$

Világos, hogy $\varphi(0) = 0$, hiszen $\Phi_0(0) = -f(0) + 0 = 0$, azaz $y = 0$ -ra a $0 \in G_r(0)$ fixpontja a Φ_0 -nak.

Mutassuk meg, hogy a φ függvény folytonos. Ha ui. $y, z \in K_{r/2}(0)$, akkor

$$\varphi(y) = \Phi_y(\varphi(y)) + y, \quad \varphi(z) = \Phi_z(\varphi(z)) + z$$

amiből

$$\begin{aligned}\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty &\leq \|g(\varphi(y)) - g(\varphi(z))\|_\infty + \|y - z\|_\infty \leq \\ &\frac{1}{2} \cdot \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty + \|y - z\|_\infty,\end{aligned}$$

ezért

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \leq 2 \cdot \|y - z\|_\infty.$$

Innen már világos, hogy a φ (egyenletesen) folytonos. ■

Tétel (inverzfüggvény-tétel). Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, és $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy egy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel az $f|_{K(a)}$ leszűkítés invertálható, a $g := (f|_{K(a)})^{-1}$ lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = \left(f'(h(x))\right)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

2 A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.

2.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1. \mathcal{D}_φ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in \mathcal{D}_f$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik φ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő f függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala*.

2.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges φ , ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$ egy $(\tau$ -t tartalmazó) nyílt intervallum.)
 Legyen ekkor \mathcal{M} a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy τ -t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \rightarrow \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi|_{\mathcal{D}_\varphi}$.

A Φ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

2.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, h : J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x, y) \in I \times J).$$

A $\varphi \in I \rightarrow J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

Tétel. *Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ is, és az $1/h : J \rightarrow \mathbb{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \rightarrow \mathbb{R}, H : J \rightarrow \mathbb{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a \mathcal{D}_φ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen a H függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek \tilde{G}, \tilde{H}), akkor alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha, \quad \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy τ -t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az F függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az F -re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I$, $K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a (τ, ξ) körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \rightarrow K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t, \varphi(t))}{\partial_2 F(t, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának.

■

3 Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztenciátétel. A k.é.p. megoldásának az egyértelmősége, unicitási tétel.

3.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. \mathcal{D}_φ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;
4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciátétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbb{N}$ mellett az $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt. Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

3.2 Egzisztenciátétel

Tétel (Picard-Lindelöf). *Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.*

Bizonyítás (vázlat). Legyenek a $\delta_1, \delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow \Omega : \psi \in C\}.$$

Az \mathcal{F} halmaz a

$$\rho(\phi, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha \mathcal{X} jelöli a

$$g : I_* \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t)) dt \in \mathbb{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F}, x \in I_*).$$

Tehát az f függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" f_1, \dots, f_n szimbólumokkal jelölve, a ψ, f függvények (és egyúttal az f_i -k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t, \psi(t)) \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények folytonosak. következőképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t, \psi(t)) dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

integráloknak, és így a

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt := (\xi_1 + d_1, \dots, \xi_n + d_n) \in \mathbb{R}^n$$

”integrálvektoroknak”. Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_{\mu} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - \xi\|_{\infty} \leq \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x, y)\|_{\infty} : x \in I_*, y \in K_{\mu}\}$$

(ami meg az f folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_{\mu}$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max \left\{ \left| \int_{\tau}^x f_i(t, \psi(t)) dt \right| : i = 1, \dots, n \right\} \leq \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az \mathcal{F} definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow K_{\mu} : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$ -val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \leq \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is \mathcal{F} -beli. (Ha a kiindulásul választott δ_1, δ_2 -re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a δ_1, δ_2 helyébe olyan ”új” $0 < \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ -t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2]$$

és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I}_* := [\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2]$ intervallummal az "új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\begin{aligned} \rho(T\psi, T\phi) &= \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} = \\ &= \max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))) dt\right| : i = 1, \dots, n\right\} : x \in I_*\right\} \leq \\ &= \max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))| : i = 1, \dots, n\} dt\right| : x \in I_*\right\} = \\ &= \max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty dt\right| : x \in I_*\right\}. \end{aligned}$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q),$$

speciálisan

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty &\leq \\ L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty &\leq L_Q \cdot \rho(\psi, \phi) \quad (t \in I_*). \end{aligned}$$

Ezért

$$\rho(T\psi, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi, \phi).$$

Tehát a T leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2 -t, (ezt - az "eddig" I_* -ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre

$$T\psi = \psi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_{\tau}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■