

Analízis III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

Tartalom

1	Metrikus-, normált-, euklidesz-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz.	3
1.1	Metrika, metrikus tér fogalma	3
1.2	Diszkrét metrikus tér	4
1.3	(\mathbb{K}^n, ϱ) metrikus tér	4
1.4	$(C[a, b], \varrho_p)$ metrikus tér	4
1.5	Metrikák ekvivalenciája	5
1.6	Normált terek	5
1.7	Normák ekvivalenciája	6
1.8	Euklideszi terek	7
1.9	Környezet fogalma	8
1.10	Belső pont fogalma	8
1.11	Metrikus tér topológiája	9
1.12	Nyílt halmazok uniója és metszete	9
2	Konvergens sorozatok metrikus terekben. Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal. Banach- és Hilbert-tér.	11
2.1	Konvergenca metrikus térben	11
2.2	Határérték egyértelműsége	11
2.3	Vektorsorozatok	12
2.4	Koordináta-sorozatok konvergenciája	12
2.5	Függvényterek konvergenciája	14
2.6	Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal	14
2.7	Cauchy-sorozat fogalma	15
2.8	Banach- és Hilbert-tér fogalma	15
2.9	Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel	16
2.10	Függvénytér teljessége	17
3	A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A <i>Jacobi</i>-mátrix kiszámítása.	19
3.1	Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata	19

4	Az összetett függvény differenciálhatósága.	21
4.1	Az összetett függvény differenciálhatósága	21
5	Többször differenciálható függvények. Young-tétel.	24
5.1	Többször változós-valós függvények másodrendű differenciálhatósága	24
5.2	Többször változós-valós függvények magasabb rendű differenciálhatósága	24
5.3	Többször változós-vektorfüggvények magasabb rendű differenciálhatósága	25
5.4	Young-tétel	25
6	Taylor-formula Lagrange (Peano)-maradéktaggal.	28
6.1	Taylor-polinom fogalma	29
6.2	Taylor-formula	29
7	Szukcesszív integrálás	31
7.1	Fubini-tétel	32
8	Felület, felszín. Felületi integrál, fluxus.	33
8.1	Felszín	33

1 Metrikus-, normált-, euklidesz-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz.

Eredeti vizsgacím: Metrikus-, normált-, euklideszi-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz. Torlódási pont, zárt halmaz. Nyílt (zárt) halmazok uniója, metszete. A $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(C[a, b], \varrho_p)$, $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ ($0 < n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$) terek.

1.1 Metrika, metrikus tér fogalma

Definíció. (Axióma) Legyen az $X \neq \emptyset$ egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy a

$$\varrho : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. minden $x \in X$ esetén $\varrho(x, x) = 0$;
2. ha $x, y \in X$ és $\varrho(x, y) = 0$, akkor $x = y$;
3. bármely $x, y \in X$ választással $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;
4. tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekkel $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, z)$.

Azt mondjuk, hogy ekkor a ϱ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval metrika). Ha $x, y \in X$, akkor $\varrho(x, y)$ az x, y elemek *távolsága*. Az (X, ϱ) rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük. Az X -beli elemek távolsága tehát nemnegatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága nulla, továbbá két különböző elem távolsága mindig pozitív. A távolság szimmetrikus, azaz két elem távolsága független az illető eleme sorrendjétől. A 4. tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni.

Mutassuk meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből annak az alábbi változata is következik:

$$|\varrho(x, z) - \varrho(y, z)| \leq \varrho(x, y) \quad (x, y, z \in X).$$

Ui. a 4. axióma miatt

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$$

tehát

$$\varrho(x, z) - \varrho(y, z) \leq \varrho(x, y).$$

Ha itt az x -et és az y -t felcseréljük, akkor a

$$-(\varrho(x, z) - \varrho(y, z)) = \varrho(y, z) - \varrho(x, z) \leq \varrho(y, x) = \varrho(x, y)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utóbbi két becslés egybevetésével kapjuk a jelzett egyenlőtlenséget.

1.2 Diszkrét metrikus tér

Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható

$$\varrho : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

távolságfüggvény, ui. pl. a

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \quad ((x, y) \in X^2)$$

leképezés nyilván eleget tesz a fenti, a metrikát meghatározó axiómáknak. Az így definiált (X, ϱ) terek a *diszkrét* jelzővel illetjük.

1.3 (\mathbb{K}^n, ϱ) metrikus tér

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$, és

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

esetén definiáljuk az (x, y) -ban a

$$\varrho_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

függvény helyettesítési értékét a következőképpen:

$$\varrho_p(x, y) := \begin{cases} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p & (p \leq 1) \\ \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Terjesszük ki a ϱ_p értelmezését $p = \infty := +\infty$ -re is az alábbiak szerint:

$$\varrho_\infty(x, y) := \max \{ |x_i - y_i| : i = 1, \dots, n \}.$$

Belátható, hogy $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$ metrikus tér.

1.4 $(C[a, b], \varrho_p)$ metrikus tér

Valamilyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) esetén jelöljük $C[a, b]$ -vel az $[a, b]$ -n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $0 < p \leq +\infty$, akkor tekintsük az előbbi példa "folytonos" változatát: ha $f, g \in C[a, b]$, akkor

$$\varrho_p(f, g) := \begin{cases} \int_a^b |f - g|^p & (0 < p \leq 1) \\ \left(\int_a^b |f - g|^p \right)^{1/p} & (1 < p < +\infty) \\ \max \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \} & (p = \infty := +\infty). \end{cases}$$

Az előbbi példákhoz hasonlóan látható be, hogy $(C[a, b], \varrho_p)$ is metrikus tér.

1.5 Metrikák ekvivalenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és az X^2 -en értelmezett

$$\varrho, \sigma : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

metrikák esetén a ϱ és a σ *ekvivalens*, ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot \varrho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C \cdot \varrho(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Könnyű belátni, hogy ha \mathcal{M} jelöli az előbb említett metrikák halmazát, és a $\varrho, \sigma \in \mathcal{M}$ elemekre $\varrho \sim \sigma$ azt jelenti, hogy a ϱ és σ ekvivalens, akkor az így értelmezett $(\mathcal{M}^2\text{-beli}) \sim$ reláció ekvivalencia.

Pl. a fenti $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$ metrikus terekre a ϱ_p metrikák közül $p \geq 1$ esetén bármelyik kettő ekvivalens. A továbbiakban az

$$X := \mathbb{K}^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

esetben a $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_\infty$ metrikák valamelyikét fogjuk használni.

1.6 Normált terek

Definíció. (Axióma) Tegyük fel, hogy a szóban forgó $X \neq \emptyset$ halmaz *vektortér* a \mathbb{K} felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$$

leképezés *norma*, ha

1. $\|0\| = 0$;
2. ha $x \in X$ és $\|x\| = 0$, akkor $x = 0$;
3. bármely $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$ esetén $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
4. tetszőleges $x, y \in X$ elemekre $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A 4. axiómát szintén *háromszög-egyenlőtlenségként* említjük a későbbiekben. Ha pl. X jelöli a

$$\mathbb{K}^n \quad (0 < n \in \mathbb{N}), \quad C[a, b] \quad (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok bármelyikét, akkor a vektorok (függvények) szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve az X lineáris tér a \mathbb{K} , ill. az \mathbb{R} felett. Az említett terekben a nulla-elemet 0-val felölve azt kapjuk továbbá, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$\|x\|_p := \varrho(x, 0) \quad (x \in X)$$

norma, azaz ilyen p -kre

$$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p), (C[a, b], \|\cdot\|_p)$$

normált terek. Tehát

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max \{|x_i| : i = 1, \dots, n\} & (p = +\infty) \end{cases} \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n),$$

speciálisan az $n = 1$ esetben

$$\|x\|_p = |x| \quad (x \in \mathbb{K}, 1 \leq p \leq +\infty),$$

valamint

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max \{|f(x)| : x \in [a, b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \quad (f \in C[a, b]).$$

Világos, hogy a most mondott példákban

$$\varrho_p(x, y) = \|x - y\|_p \quad (x, y \in X).$$

Sőt, ha most $(X, \|\cdot\|)$ egy tetszőleges normált teret jelöl, akkor a

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \quad ((x, y) \in X^2)$$

függvény metrika, azaz (X, ϱ) metrikus tér:

$$(X, \varrho) \equiv (X, \|\cdot\|).$$

1.7 Normák ekvivalenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X (\mathbb{K} -feletti) vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\|, \|\cdot\|_* : X \rightarrow [0, +\infty)$$

normák *ekvivalensek* (erre is a $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$ jelölést fogjuk használni), ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot \|x\| \leq \|x\|_* \leq C \cdot \|x\| \quad (x \in X).$$

1.8 Euklideszi terek

A fent bevezetett $\|\cdot\|_p$ norma a $p = 2$ esetben speciális esete egy tágabb normaosztálynak.

Definíció. (Axióma) Legyen X egy vektortér a \mathbb{K} felett, az

$$\langle \cdot \rangle : X \rightarrow \mathbb{K}$$

függvényről pedig tegyük fel, hogy

1. minden $x, y \in X$ mellett $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (ahol a $\bar{\xi}$ szimbólum a $\xi \in \mathbb{K}$ szám komplex konjugáltját jelöli);
2. bármely $x \in X \setminus \{0\}$ esetén $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ és $\langle x, x \rangle > 0$;
3. ha $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$;
4. tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Ha $x, y \in X$, akkor az

$$\langle x, y \rangle$$

számot az x, y elemek *skaláris szorzatának*, az $(X, \langle \cdot \rangle)$ párt pedig *skaláris szorzat-térnek* (vagy *euklideszi térnek*) nevezzük.

Jelentse pl. X a

$$\mathbb{K}^n, (1 \leq n \in \mathbb{N}), C[a, b] (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, és

$$\langle x, y \rangle := \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i & (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n) \\ \int_a^b xy & (x, y \in C[a, b]). \end{cases}$$

Ekkor $(X, \langle \cdot \rangle)$ euklideszi tér, továbbá

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Ez utóbbi egyenlőségnek sokkal általánosabb háttére van, ui. tetszőleges $(X, \langle \cdot \rangle)$ euklideszi teret véve

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Itt a háromszög-egyenlőtlenség igazolásában fontos szerep jut a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in X)$$

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek. Ezt "lefordítva" az előbbi említett euklideszi terekre az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \quad (x, y \in \mathbb{K}^n),$$

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2} \quad (f, g \in C[a, b]).$$

1.9 Környezet fogalma

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér. Ha $b \in X$ és $r > 0$, akkor a

$$K_r(b) := \{x \in X : \varrho(x, b) < r\}$$

halmaz a b elem r -sugarú környezete. Használjuk a $K(b)$ jelölést is a $K_r(b)$ helyett, ha az adott szituációban a $K_r(b)$ környezet sugara nem játszik szerepet.

Nyilvánvaló, hogy $0 < v \leq r$ esetén

$$K_v(b) \subset K_r(b).$$

Tetszőleges $K_r(a)$ környezet és $b \in K_r(a)$ esetén

$$0 < v < r - \varrho(b, a)$$

feltételnek eleget tevő v "sugárral"

$$K_v(b) \subset K_r(a).$$

Ha ui. $x \in K_v(b)$, azaz $\varrho(x, b) < v$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\varrho(x, a) \leq \varrho(x, b) + \varrho(b, a) < v + \varrho(b, a) < r.$$

1.10 Belső pont fogalma

Definíció. Nevezzük valamilyen $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz esetén az $a \in A$ pontot az A halmaz *belső pontjának*, ha egy alkalmas $K(a)$ környezettel

$$K(a) \subset A$$

teljesül. Az ilyen tulajdonságú pontok által alkotott halmaz az A ún. *belseje*, amit az

$$\text{int } A$$

szimbólummal fogunk jelölni.

Nyilván $\text{int } X = X$, míg az

$$X := \mathbb{R}, \varrho(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

esetben $\text{int } \{a\} = \emptyset$ ($a \in \mathbb{R}$). Állapodjunk meg abban, hogy

$$\text{int } \emptyset := \emptyset.$$

Tehát bármely $A \subset X$ halmazra

$$\text{int } A \subset A.$$

Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *nyílt*, ha

$$\text{int } A = A.$$

Így pl. az \emptyset (az üreshalmaz) nyílt halmaz, ill. bármely környezet is az. Más megfogalmazásban tehát egy $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az A minden pontja belső pontja az A -nak:

$$a \in A \implies a \in \text{int } A.$$

Ismételjük el újra, hogy mit is jelent ez: az

$$\emptyset \neq A \subset X$$

halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha tetszőleges $a \in A$ elemének létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy

$$K(a) \subset A.$$

1.11 Metrikus tér topológiája

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér és

$$\mathcal{T}_\varrho(X) := \mathcal{T}_\varrho := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ nyílt}\}.$$

Az X nyílt részhalmazai által meghatározott \mathcal{T}_ϱ halmazrendszert az (X, ϱ) metrikus tér *topológiájának* nevezzük.

1.12 Nyílt halmazok uniója és metszete

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \in X$ ($\gamma \in \Gamma$) halmazok valamennyien nyíltak az (X, ϱ) metrikus térben. Ekkor

1. az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is nyílt;

2. ha a Γ véges, akkor a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszetük is nyílt.

Bizonyítás. Legyen $a \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Ekkor egy $\nu \in \Gamma$ indexszel $a \in A_\nu$. Mivel az A_ν halmaz nyílt, ezért egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset A_\nu$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_\nu \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma,$$

így egyúttal

$$K(a) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

is teljesül. Más szóval $a \in \text{int} \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)$, azaz $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ nyílt halmaz.

Most tegyük fel, hogy a Γ halmaz véges, és legyen $a \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma$ mellett $a \in A_\gamma$, következésképpen az A_γ -k nyíltsága miatt egy $r_\gamma > 0$ sugárral

$$K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma.$$

Ha

$$r := \min \{r_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

(ami egy pozitív szám), akkor $r \leq r_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) miatt

$$K_r(a) \subset K_{r_\gamma} \subset A_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma),$$

így

$$K_r(a) \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma.$$

Tehát $a \in \text{int} \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)$, ezért a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszethalmaz nyílt.

■

2 Konvergens sorozatok metrikus terekben. Halmazok zártóságának jellemzése konvergens sorozatokkal. Banach- és Hilbert-tér.

Eredeti vizsgacím:

Konvergens sorozatok metrikus terekben. Konvergenca \mathbb{K}^n -ben, a koordináta-sorozatok szerepe. *Bolzano-Weierstrass-kiválasztási* tétel. Konvergenca a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ térben (függvénysorozatok, az egyenletes, ill. a pontonkénti konvergenca fogalma). Halmazok zártóságának a jellemzése konvergens sorozatokkal. A teljesség fogalma, *Banach*-tér, *Hilbert*-tér. A $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ tér teljessége.

2.1 Konvergenca metrikus térben

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér, és legyen az

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$$

egy, az X elemeiből álló sorozat. Az (x_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $\alpha \in X$, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ "hibakorlát" mellett egy alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexszel igaz a

$$\varrho(x_n, \alpha) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N)$$

becslés. Ha ilyen α nincs, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *divergens*.

Például a diszkrét metrikus térben valamely (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha *kvázikonstans*, azaz létezik olyan $M \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy

$$x_n = x_M \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq M).$$

Ha ui. egy sorozat ilyen, akkor a konvergenca definíciójában az α helyébe az x_M -et, tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett pedig N helyébe M -et írva triviálisan fennáll a

$$\varrho(x_n, \alpha) = \varrho(x_n, x_M) = \varrho(x_M, x_M) = 0 < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq M)$$

egyenlőtlenség.

2.2 Határérték egyértelműsége

Tétel. Legyen valamilyen (X, ϱ) metrikus tér esetén az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$$

sorozat konvergens. Ekkor a konvergenca definíciójában szereplő $\alpha \in X$ elem egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tételben említett $X \ni \alpha$ -n kívül egy $\beta \in X$ elemre is igaz a konvergencia definíciója: bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, \beta) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > M).$$

Ekkor a ϱ metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőlegesen választott

$$n \in \mathbb{N}, n > \max \{N, M\}$$

indexre

$$\varrho(\alpha, \beta) \leq \varrho(\alpha, x_n) + \varrho(x_n, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Következésképpen

$$0 \leq \varrho(\alpha, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Mivel itt az $\varepsilon > 0$ bármilyen (pozitív) szám lehet, ezért csak $\varrho(\alpha, \beta) = 0$ lehetséges. A metrika axiómái szerint innen viszont $\alpha = \beta$ adódik. ■

2.3 Vektorsorozatok

Legyen most

$$1 \leq s \in \mathbb{N}, 0 < p \leq +\infty, X := \mathbb{K}^s, \varrho := \varrho_p,$$

és tekintsünk egy

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^s$$

sorozatot. Ha

$$x_n = (x_{n1}, \dots, x_{ns}) \in \mathbb{K}^s \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor minden $i = 1, \dots, s$ mellett definiálhatjuk az

$$x^{(i)} := (x_{ni})$$

számsorozatot, az x sorozat i -edik *koordináta-sorozatát*. Ekkor az x *vektorsorozat* konvergenciája az alábbiak szerint "kezelhető" a koordináta-sorozatainak a konvergenciája révén.

2.4 Koordináta-sorozatok konvergenciája

Tétel. Az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az előbbi $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ metrikus térben, ha minden $x^{(i)}$ ($i = 1, \dots, s$) koordináta-sorozata konvergens. Továbbá

$$\mathbb{K}^s \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \iff \alpha_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, s).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a tételbeli x sorozat konvergens, legyen

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$$

a határértéke. A ϱ_p metrikák definíciója szerint ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot megadva van olyan $N \in \mathbb{N}$, amellyel az $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ indexekre

$$\varepsilon > \varrho_p(x_n, \alpha) = \begin{cases} \sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p & (p < 1) \\ \left(\sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max \{|x_{ni} - \alpha_i| : i = 1, \dots, s\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

Világos, hogy bármely $i = 1, \dots, s$ esetén

$$\varrho(x_n, \alpha) \geq \begin{cases} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (0 < p < 1) \\ |x_{ni} - \alpha_i| & (1 \leq p \leq +\infty) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, p \geq 1)$$

és

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \sqrt[p]{\varepsilon} \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 0 < p < 1).$$

Mindez pontosan azt jelenti, hogy az $x^{(i)}$ koordináta-sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x^{(i)}) = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, s).$$

Fordítva, ha minden $x^{(i)}$ koordinátat-sorozat konvergens, akkor legyen

$$\alpha_i := \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, s)$$

és

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor minden $i = 1, \dots, s$ mellett létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N_i).$$

Legyen $N := \max \{N_1, \dots, N_s\}$, ekkor

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, i = 1, \dots, s).$$

Ezért

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p < s \cdot \varepsilon^p \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 0 < p < 1),$$

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p \right)^{1/p} < s^{1/p} \cdot \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 1 \leq p < +\infty),$$

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \max \{|x_{ni} - \alpha_i| : i = 1, \dots, s\} < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 1 \leq p = \infty).$$

Így minden $0 < p \leq +\infty$ esetén az (x_n) sorozat konvergens a $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ metrikus térben, és $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \alpha$. ■

2.5 Függvényterek konvergenciája

Valamely $-\infty < a < b < +\infty$ mellett tekintsük az $X := C[a, b]$ halmazt és a ϱ_∞ metrikát. Ha az

$$f_n \in C[a, b] \quad (n \in \mathbb{N})$$

(függvény)sorozat konvergens és

$$f := \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n) \in C[a, b],$$

akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén

$$\varrho_\infty(f_n, f) < \varepsilon,$$

azaz

$$\max \{|f_n(x) - f(x)| : a \leq x \leq b\} < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvényt sorozat *egyenletesen konvergens*. Az f az (f_n) határfüggvénye.

Nyilvánvaló, hogy ekkor az előbbi n indexekre bármelyik $x \in [a, b]$ helyen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

igaz. Más szóval ez azt jelenti, hogy az $(f_n(x))$ (szám)sorozat konvergens és a határértéke $f(x)$. Röviden: az (f_n) függvényt sorozat *pontonként konvergens*.

2.6 Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal

Tétel. Legyen (X, ϱ) metrikus tér. Az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

sorozatára $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \in A$.

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az A halmaz zárt, de valamilyen

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

konvergens sorozatra

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \notin A.$$

Ekkor tehát $\alpha \in X \setminus A$, ahol az $X \setminus A$ halmaz nyílt. Így van olyan $K(\alpha)$ környezet, hogy

$$K(\alpha) \subset X \setminus A.$$

Ugyanakkor egy $N \in \mathbb{N}$ indexszel

$$A \ni x_k \in K(\alpha) \subset X \setminus A \quad (N < k \in \mathbb{N}),$$

ami nyilván nem lehet.

Most tegyük fel azt, hogy tetszőleges konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

sorozat határértékére $\lim(x_n) \in A$, és lássuk be, hogy az A halmaz zárt. Legyen ehhez $\alpha \in A'$, ekkor egy alkalmas

$$(z_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

sorozatra $\lim(z_n) = \alpha$. A kiinduló feltételünk szerint ezért $\alpha \in A$, azaz $A' \subset A$ és (egy korábbi tételre hivatkozva) az A zárt. ■

2.7 Cauchy-sorozat fogalma

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér és

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$$

sorozat. Ezt a sorozat *Cauchy-sorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (m, n \in \mathbb{N}, m, n > N).$$

2.8 Banach- és Hilbert-tér fogalma

Legyen adott az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy ez a tér *teljes* (vagy *Banach-tér*), ha a $\|\cdot\|$ norma által indukált

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

metrikával az (X, ϱ) metrikus tér teljes. Világos, hogy a

$$(\mathbb{K}^s, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leq s \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek valamennyien Banach-terek. Hasonlóan: a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ tér is Banach-tér.

Azt mondjuk, hogy az $(X, \langle \cdot \rangle)$ euklideszi tér *teljes* (vagy *Hilbert-tér*), ha a $\langle \cdot \rangle$ skaláris szorzás által meghatározott

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

normával $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér. Így pl. a

$$(\mathbb{K}^s, \langle \cdot \rangle) \quad (1 \leq s \in \mathbb{N})$$

tér Hilbert-tér, ahol

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^s x_i \overline{y_i} \quad (x = (x_1, \dots, x_s), y = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{K}^s).$$

2.9 Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel

Tétel. A $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ $(1 \leq s \in \mathbb{N}, 0 < p \leq +\infty)$ metrikus térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Emlékeztetünk egy korábbi tételre, miszerint az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $x^{(i)}$ $i = 1, \dots, s$ koordináta-sorozata konvergens.

A feltételezésünk szerint most az (x_n) sorozat korlátos. Van tehát olyan $r > 0$ szám, amellyel

$$\varrho(x_n, 0) < r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A ϱ_p metrika definícióját figyelembe véve innen az is rögtön adódik, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$|x_{ni}| < r \quad (n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, s),$$

ill. $0 < p < 1$ mellett

$$|x_{ni}| < r^{1/p} \quad (n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, s),$$

azaz, hogy minden $x^{(i)}$ $(i = 1, \dots, s)$ koordináta-sorozat (mint számsorozat) is korlátos. A számsorozatokra ismert Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel alapján ezért létezik olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozat, hogy az

$$x^{(1)} \circ \nu^{(1)}$$

részsorozat konvergens. Világos, hogy az $x^{(2)} \circ \nu^{(1)}$ részsorozat is korlátos, ezért van olyan $\nu^{(2)}$ indexsorozat is amelyre az

$$(x^{(2)} \circ \nu^{(1)}) \circ \nu^{(2)} = x^{(2)} \circ (\nu^{(1)} \circ \nu^{(2)})$$

részsorozat is konvergens. A konstrukciót folytatva végül olyan

$$\nu^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s)$$

indexsorozatokat kapunk, hogy az

$$x^{(i)} \circ (\nu^{(1)} \circ \dots \circ \nu^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, s)$$

részsorozatok konvergenssek. Legyen

$$\nu := \nu^{(1)} \circ \dots \circ \nu^{(s)},$$

akkor a ν sorozat indexsorozat, és minden

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \dots, s)$$

sorozat részsorozata a konvergens $x^{(i)} \circ (\nu^{(1)} \circ \dots \circ \nu^{(i)})$ sorozatnak. Így az

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \dots, s)$$

számsorozatok mindegyike konvergens. Ez azt jelenti, hogy az $x \circ \nu$ részsorozat is konvergens. ■

2.10 Függvénytér teljessége

Tétel. A $(C[a, b], \varrho_\infty)$ metrikus tér teljes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az

$$(f_n) : \mathbb{N} \rightarrow C[a, b]$$

(függvény)sorozat (a ϱ_∞ metrika értelmében) Cauchy-sorozat. Ez most azt jelenti, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számot is adunk meg, ehhez találunk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, hogy

$$\begin{aligned} \varrho_\infty(f_n, f_m) = \\ \max \{ |f_n(x) - f_m(x)| : a \leq x \leq b \} < \varepsilon \quad (n, m \in \mathbb{N}, n, m > N). \end{aligned}$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén egyúttal

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad (n, m \in \mathbb{N}, n, m > N) \quad (\star)$$

is teljesül, más szóval az $(f_n(x))$ számsorozat Cauchy-sorozat. Létezik tehát az

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad (x \in [a, b])$$

(”pontenkénti”) határérték. Továbbá (\star) miatt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \varepsilon \quad (x \in [a, b], n \in \mathbb{N}, n > N). \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Mutassuk meg, hogy az így definiált

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény folytonos, azaz $f \in C[a, b]$. Legyen ehhez valamilyen $\xi \in [a, b]$ mellett $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az előbbiek szerint bármilyen (rögzített) $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f(\xi)| \leq \\ &2 \cdot \varepsilon + |f_n(x) - f_n(\xi)| \quad (x \in [a, b]). \end{aligned}$$

Mivel $f_n \in C[a, b]$, így $f_n \in C\{\xi\}$ is igaz. Következésképpen létezik olyan $\delta > 0$ szám, amellyel

$$|f_n(x) - f_n(\xi)| < \varepsilon \quad (x \in [a, b], |x - \xi| < \delta).$$

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$|f_n(x) - f(\xi)| < 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon \quad (x \in [a, b], |x - \xi| < \delta).$$

Ez nem jelent mást, mint azt, hogy $f \in C\{\xi\}$. Az itt szereplő ξ tetszőleges eleme volt az $[a, b]$ intervallumnak, ezért $f \in C[a, b]$. Végül, a $(\star\star)$ becslés szerint (az ottani szereplőkkel)

$$\varrho_\infty(f_n, f) = \max \{|f_n(x) - f(x)| : a \leq x \leq b\} \leq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N),$$

azaz

$$\varrho_\infty(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy a $(C[a, b], \varrho_\infty)$ metrikus térben az (f_n) sorozat konvergál az f függvényhez. Ezzel beláttuk, hogy a szóban forgó térben minden Cauchy-sorozat konvergens, azaz a $(C[a, b], \varrho_\infty)$ teljes metrikus tér. ■

3 A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A *Jacobi*-mátrix kiszámítása.

3.1 Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$. Az

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ helyen, ha minden $i = 1, \dots, m$ esetén az

$$f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

koordináta-függvény differenciálható az a -ban. Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először is azt, hogy $f \in D\{a\}$, és jelöljük az $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrix sorvektorait A_i -vel ($i = 1, \dots, m$):

$$f'(a) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor alkalmas

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$\eta(h) \rightarrow 0 \quad (||h|| \rightarrow 0)$$

és a

$$h \in \mathbb{R}^n \quad (a + h \in \mathcal{D}_f)$$

helyeken

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= (f_1(a + h) - f_1(a), \dots, f_m(a + h) - f_m(a)) = \\ &= f'(a) \cdot h + \eta(h) \cdot ||h|| = \\ &= (\langle A_1, h \rangle, \dots, \langle A_m, h \rangle) + (\eta_1(h) \cdot ||h||, \dots, \eta_m(h) \cdot ||h||). \end{aligned}$$

Következésképpen minden $i = 1, \dots, m$ mellett az η függvény

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

koordináta-függvényeivel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle A_i, h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f). \quad (\star)$$

Mivel bármely $i = 1, \dots, m$ indexre

$$\eta_i(h) \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0),$$

ezért az előbbi (\star) összefüggés azt jelenti, hogy $f_i \in D\{a\}$ és $A_i = \text{grad } f_i(a)$ ($i = 1, \dots, m$). Most azt tegyük fel, hogy $f_i \in D\{a\}$ ($i = 1, \dots, m$), amikor is valamilyen

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \eta_i \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0) \quad (i = 1, \dots, m)$$

függvényekkel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle \text{grad } f_i(a), h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f, i = 1, \dots, m).$$

Ha tehát

$$A := \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

akkor az

$$\eta := (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \eta(h) \cdot \|h\|,$$

ahol $\eta(h) \rightarrow 0$ ($\|h\| \rightarrow 0$). Ezért $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

4 Az összetett függvény differenciálhatósága.

4.1 Az összetett függvény differenciálhatósága

Tétel. Adott $1 \leq n, m, s \in \mathbb{N}$ mellett tekintsük a

$$g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$$

függvényeket. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathcal{D}_g$ pontban $g(a) \in \mathcal{D}_f$, valamint $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A bizonyítás előtt jegyezzük meg, hogy a tétel állításában szereplő $f'(g(a)) \cdot g'(a)$ mátrix az $f'(g(a)) \in \mathbb{R}^{s \times m}$ és a $g'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix szorzata, és mint ilyen, $\mathbb{R}^{s \times n}$ -beli. Ezt is "várjuk", hiszen

$$f \circ g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$$

miatt (ha $f \circ g \in D\{y\}$ valamilyen $y \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ helyen)

$$(f \circ g)'(y) \in \mathbb{R}^{s \times n}.$$

Bizonyítás. Mivel $a \in \text{int } \mathcal{D}_g$, $g(a) \in \text{int } \mathcal{D}_f$, következésképpen megadhatók olyan $r, \delta > 0$ számok, amelyekkel

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_g, K_\delta(g(a)) \subset \mathcal{D}_f.$$

A g függvény folytonos is az a -ban, ezért az előbbi $r > 0$ sugárról az is feltehető, hogy

$$g[K_r(a)] \subset K_\delta(g(a)).$$

Tehát egyúttal $g[K_r(a)] \subset \mathcal{D}_f$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $K_r(a) \subset \mathcal{D}_{f \circ g}$, más szóval $a \in \text{int } \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Írjuk fel a g , ill. az f megváltozását az a , ill. a $g(a)$ pont körül a differenciálhatósági feltételeknek megfelelően:

$$g(a+x) - g(a) = g'(a) \cdot x + \eta(x) \cdot \|x\| \quad (x \in \mathbb{R}^n, a+x \in \mathcal{D}_g),$$

$$f(g(a)+y) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot y + \tilde{\eta}(y) \cdot \|y\| \quad (y \in \mathbb{R}^m, g(a)+y \in \mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\eta(x) \rightarrow \eta(0) = 0 \quad (\|x\| \rightarrow 0)$$

és

$$\tilde{\eta}(y) \rightarrow \tilde{\eta}(0) = 0 \quad (\|y\| \rightarrow 0).$$

Speciálisan az

$$y := g(a + x) - g(a) \quad (x \in K_r(0))$$

választással

$$(f \circ g)(a + x) - (f \circ g)(a) = f(g(a + x)) - f(g(a)) =$$

$$\begin{aligned} & f'(g(a))(g(a + x) - g(a)) + \tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \cdot \|g(a + x) - g(a)\| = \\ & f'(g(a))(g'(a) \cdot x + \eta(x) \cdot \|x\|) + \tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \cdot \|g'(a) \cdot x + \|x\| \cdot \eta(x)\| = \\ & f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot x + f'(g(a)) \cdot \eta(x) \cdot \|x\| + \tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \cdot \|g'(a) \cdot x + \|x\| \cdot \eta(x)\|. \end{aligned}$$

Legyen

$$\begin{aligned} & \varphi(x) := \\ & f'(g(a)) \cdot \eta(x) + \frac{\tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \cdot \|g'(a) \cdot x + \|x\| \cdot \eta(x)\|}{\|x\|} \quad (0 \neq x \in K_r(0)), \end{aligned}$$

akkor

$$(f \circ g)(a + x) - (f \circ g)(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot x + \varphi(x) \cdot \|x\| \quad (0 \neq x \in K_r(0)).$$

Megmutatjuk, hogy $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($\|x\| \rightarrow 0$). Ui. $\eta(x) \rightarrow 0$ ($\|x\| \rightarrow 0$) miatt

$$\left\| f'(g(a)) \cdot \eta(x) \right\| \leq q \cdot \|\eta(x)\| \rightarrow 0 \quad (\|x\| \rightarrow 0),$$

ahol q jelenti az $f'(g(a))$ mátrix normáját. Továbbá a g folytonos (is) az a -ban ezért

$$g(a + x) - g(a) \rightarrow 0 \quad (\|x\| \rightarrow 0),$$

amiből $\tilde{\eta}(y) \rightarrow \tilde{\eta}(0) = 0$ ($\|y\| \rightarrow 0$) miatt

$$\tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \rightarrow 0 \quad (\|x\| \rightarrow 0)$$

következik. Végül

$$\begin{aligned} & \frac{\left\| \tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \right\| \cdot \left\| g'(a) \cdot x + \|x\| \cdot \eta(x) \right\|}{\|x\|} \leq \\ & \frac{\left\| \tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \right\| \cdot (\|g'(a) \cdot x\| + \|x\| \cdot \|\eta(x)\|)}{\|x\|} \leq \\ & \left\| \tilde{\eta}(g(a + x) - g(a)) \right\| \cdot (Q + \|\eta(x)\|) \rightarrow 0 \quad (\|x\| \rightarrow 0), \end{aligned}$$

ahol Q a $g'(a)$ mátrix normáját jelöli. Mindez azt jelenti, hogy

$$\varphi(x) \rightarrow 0 \quad (\|x\| \rightarrow 0)$$

valóban teljesül. Ezért azt

$$(f \circ g)(a + x) - (f \circ g)(a)$$

megváltozásra kapott előbbi egyenlőség szerint $f \circ g \in D\{a\}$, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$



5 Többször differenciálható függvények. Young-tétel.

5.1 Többváltozós-valós függvények másodrendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható* az a -ban ha minden $x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f \in D\{x\}$, és

$$\partial_i f \in D\{a\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ha a fenti feltételek teljesülnek akkor léteznek a

$$\partial_j(\partial_i f)(a) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

parciális deriváltak. Ehhez persze nem szükséges, hogy a $\partial_i f$ ($i = 1, \dots, n$) függvények deriválhatók legyenek az a helyen. Ha tehát a fenti

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre $f \in D^2\{a\}$, akkor minden $i, j = 1, \dots, n$ mellett létezik a $\partial_{ij} f(a)$ másodrendű parciális derivált. Az

$$f''(a) := (\partial_{ij} f(a))_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \dots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \dots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \dots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrixot az f függvény a -beli *másodrendű deriváltmátrixának* nevezzük. A későbbiekben tárgyalandó Young-tétel miatt ez egy szimmetrikus mátrix.

5.2 Többváltozós-valós függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, továbbá egy alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel minden $x \in K(a)$ pontban az f függvény s -szer differenciálható: $f \in D^s\{x\}$. Belátható, hogy ekkor a $K(a)$ pontjaiban az f összes s -edrendű parciális deriváltja létezik. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a -ban $(s+1)$ -szer differenciálható, ha minden s -edrendű parciális deriváltfüggvénye differenciálható az a -ban.

5.3 Többváltozós-vektorfüggvények függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ és

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \text{int } \mathcal{D}_f,$$

ill. $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény k -szor differenciálható az a -ban, ha

$$f_j \in D^k\{a\} \quad (j = 1, \dots, m).$$

5.4 Young-tétel

Tétel. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{int } \mathcal{D}_f, 2 \leq s \in \mathbb{N}$ és $f \in D^s\{a\}$. Ekkor tetszőleges $k_1, \dots, k_s \in \{1, \dots, n\}$ indexek esetén ezek bármely j_1, \dots, j_s permutációjára

$$\partial_{k_1 \dots k_s} f(a) = \partial_{j_1 \dots j_s} f(a).$$

Bizonyítás. Az s -szerinti teljes indukcióra gondolva elegendő az $s = 2$ esettel foglalkoznunk. Ekkor tehát azt kell belátnunk, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Világos, hogy csak az $i \neq j$ eset az "érdekes". Ezen túl (könnyen meggondolhatóan) azt is feltehetjük, hogy $n = 2$. Más szóval az

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényekre

$$a = (a_1, a_2) \in \text{int } \mathcal{D}_f, f \in D^2\{a\},$$

és ennek alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a).$$

Legyen ehhez $r > 0$ olyan, amellyel $(\mathbb{R}^n$ -ben a $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ normát választva)

$$K(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\} \subset \mathcal{D}_f,$$

és vezessük be az alábbi jelölést: az $u, v \in (-r, r)$ helyeken

$$\Delta(u, v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + v).$$

Ha rögzítjük a $v \in (-r, r)$ számot, akkor a

$$\varphi(u) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) \quad (u \in (-r, r))$$

függvénnyel

$$\Delta(u, v) = \varphi(u) - \varphi(0) \quad (u \in (-r, r)).$$

Az $f \in D^2\{a\}$ feltétel miatt az előbbi $K_r(a)$ környezettől azt is megkövetelhetjük, hogy egyrészt minden $x \in K_r(a)$ helyen $f \in D\{x\}$ (így egyúttal léteznek az $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ parciális deriváltak is), másrészt

$$\partial_1 f, \partial_2 f \in D\{a\}.$$

Következésképpen a most definiált

$$\varphi : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, ezért a Lagrange-középérték-tétel alapján

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot u \quad (u \in (-r, r)),$$

ahol $\xi \in (0, u)$ (vagy $\xi \in (u, 0)$). A parciális deriváltak definíciójára gondolva

$$\varphi'(u) = \partial_1 f(a_1 + u, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + u, a_2) \quad (u \in (-r, r)),$$

így

$$\varphi(u) - \varphi(0) = (\partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2)) \cdot u \quad (u \in (-1, r)).$$

A $\partial_1 f \in D\{a\}$ differenciálhatósági feltételből

$$\text{grad } \partial_1 f(a) = (\partial_{11} f(a), \partial_{12} f(a)),$$

és egy alkalmas

$$\eta \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \eta(z) \rightarrow 0 \quad (\|z\| \rightarrow 0)$$

függvénnyel

$$\begin{aligned} & \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2) = \\ & \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1, a_2) - (\partial_1 f(a_1 + \xi, a_2) - \partial_1 f(a_1, a_2)) = \\ & \langle \text{grad } \partial_1 f(a), (\xi, v) \rangle + \eta(\xi, v) \cdot \|(\xi, v)\| - \langle \text{grad } \partial_1 f(a), (\xi, 0) \rangle - \eta(\xi, 0) \cdot \|(\xi, 0)\| = \\ & \partial_{12} f(a) \cdot v + \eta(\xi, v) \cdot \|(\xi, v)\| - \eta(\xi, 0) \cdot |\xi|. \end{aligned}$$

Speciálisan a $0 \neq u = v \in (-r, r)$ választással

$$\Delta(u, u) = \varphi(u) - \varphi(0) = \partial_{12} f(a) \cdot u^2 + \eta(\xi, u) \cdot \|(\xi, u)\| \cdot u - \eta(\xi, 0) \cdot |\xi| \cdot u,$$

amiből

$$\frac{\Delta(u, u)}{u^2} = \partial_{12}f(a) + \eta(\xi, u) \cdot \frac{||(\xi, u)||}{u} - \eta(\xi, 0) \cdot \frac{|\xi|}{u}$$

következik. Ezért $|\xi| < |u|$ alapján

$$\left| \frac{\Delta(u, u)}{u^2} - \partial_{12}f(a) \right| \leq |\eta(\xi, u)| + |\eta(\xi, 0)| \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0),$$

hiszen

$$||(\xi, u)||, ||(\xi, 0)|| \leq |u| \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0).$$

Azt kapjuk ezzel, hogy

$$\partial_{12}f(a) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Delta(u, u)}{u^2}. \quad (\star)$$

Legyen most rögzített $u \in (-r, r)$ mellett

$$\psi(v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1, a_2 + v) \quad (v \in (-r, r)).$$

Ekkor

$$\Delta(u, v) = \psi(v) - \psi(0) \quad (v \in (-r, r))$$

és az előbbiekkal analóg módon az adódik, hogy

$$\partial_{21}f(a) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Delta(v, v)}{v^2}.$$

Itt a jobb oldali limesz ugyanaz, mint a (\star) -ban. Így $\partial_{21}f(a) = \partial_{12}f(a)$. ■

6 Taylor-formula Lagrange (Peano)-maradéktaggal.

Eredeti vizsgacím:

Taylor-formula Lagrange (Peano)-maradéktaggal, Lagrange-középérték-tétel. A kétszer differenciálható függvények vizsgálata.

Az alábbi jelöléseket fogjuk használni (feltételezve egyeben az azokban szereplő parciális deriváltak létezését). Legyen

$$1 \leq n, k \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{int } \mathcal{D}_f, j = 1, \dots, n,$$

és

$$\partial_j^k f(a) := \partial_{j \dots j}^k f(a)$$

(ahol a "j ... j" rövidítés k darab j-t jelöl). Speciálisan $\partial_j^1 f(a) = \partial_j f(a)$. Állapodjunk meg abban, hogy

$$\partial_j^0 f(a) := f(a).$$

Ha $i := (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, akkor legyen

$$\partial^i f(a) := \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n} f(a).$$

Az $i \in \mathbb{N}^n$ *multiindex* esetén az i hosszát a következőképpen definiáljuk:

$$|i| := ||i||_1 = \sum_{j=1}^n i_j.$$

A korábban mondottak szerint pl. $f \in D^{|i|}\{a\}$ elégséges ahhoz, hogy létezzen az $|i|$ -edrendű $\partial^i f(a)$ parciális derivált, és ekkor a Young-tétel miatt az $|i|$ hosszúságú $1 \dots 1 \dots n \dots n$ jelsorozat bármely $\nu_1 \dots \nu_n u_{|i|}$ permutációjára

$$\partial^i f(a) = \partial_{1 \dots 1 \dots n \dots n} f(a) = \partial_{\nu_1 \dots \nu_{|i|}} f(a).$$

Legyen az $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ multiindex és az $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén

$$i! := \prod_{j=1}^n i_j! = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{i_j} k$$

és

$$x^i := \prod_{j=1}^n x_j^{i_j}$$

az i faktoriálisa, ill. az x vektor i -kitevős *hatványa*. Nyilvánvaló, hogy ha $n = 1$, akkor $i = i_1 \in \mathbb{N}$ és $|i| = i$, ill.

$$i! = \prod_{j=1}^i j,$$

az x^i ($x \in \mathbb{R}$) pedig a "megszokott" hatvány.

Ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, akkor az a és b végpontú zárt, ill. $a \neq b$ esetén nyílt *szakaszt* az

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq 1\},$$

ill.

$$(a, b) := \{a + t(b - a) \in \mathbb{R}^n : 0 < t < 1\}$$

módon definiáljuk.

6.1 Taylor-polinom fogalma

Definíció. Tekintsük ezek után az

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt, és tegyük fel, hogy valamilyen

$$a \in \text{int } \mathcal{D}_f, \quad s \in \mathbb{N}$$

mellett $f \in D^s\{a\}$ (ahol - mint korábban is - a $D^0\{a\} := C\{a\}$ megállapodással élünk). Ekkor a

$$T_{a,s}f(x) := \sum_{k=0}^s \sum_{i \in \mathbb{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot (x - a)^i \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

előírással definiált

$$T_{a,s} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt azt f függvény a -hoz tartozó s -edrendű *Taylor-polinomjának* nevezzük.

Világos, hogy $T_{a,0}f \equiv f(a)$, ill. $T_{a,s}f(a) \equiv f(a)$.

6.2 Taylor-formula

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre valamilyen $s \in \mathbb{N}$ mellett $f \in D^{s+1}$ teljesül. Ekkor bármely $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ esetén van olyan $c \in [a, b]$, hogy

$$f(b) = T_{a,s}f(b) + \sum_{i \in \mathbb{N}^n, |i|=s+1} \frac{\partial^i f(c)}{i!} \cdot (b - a)^i.$$

Bizonyítás (vázlat). Feltehető, hogy $a \neq b$, legyen ekkor $h := b - a$ és

$$F(t) := f(a + th) \quad (t \in \mathbb{R}, a + th \in \mathcal{D}_f).$$

Az $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ feltétel miatt $[0, 1] \subset \mathcal{D}_F$. Mivel a

$$g(t) := a + th \quad (t \in \mathbb{R}, a + th \in \mathcal{D}_f)$$

függvényre $g \in D^{s+1}$ triviális módon igaz, így

$$F = f \circ g \in D^{s+1}$$

következik. Ezért az $F \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre alkalmazható az "egyváltozós" Taylor-formula, miszerint egy alkalmas $\xi \in (0, 1)$ helyen

$$f(b) = F(1) = \sum_{k=0}^s \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}.$$

Elég tehát azt megmutatni, hogy

$$\frac{F^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{i \in \mathbb{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a + th)}{i!} \cdot h^i \quad (t \in \mathcal{D}_F, k = 0, \dots, s+1), \quad (\star)$$

amiből következően a $c := a + \xi \cdot h$ pont megfelel az állításunknak.

Ha itt $k = 0$, akkor

$$\frac{F^{(0)}(t)}{0!} = F(t) = f(a + th) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n, |i|=0} \frac{\partial^i f(a + th)}{i!} \cdot h^i \quad (t \in \mathcal{D}_F)$$

nyilván igaz.

NINCS BEFEJEZVE

7 Szukcesszív integrálás

Eredeti vizsgacím:

Az integrál kiszámítása Darboux-integrálok integráljaként. Szukcesszív integrálás. Normál tartományon értelmezett folytonos függvények integrálja.

A továbbiakban a "többváltozós" Riemann-integrál egyik leggyakrabban alkalmazott tulajdonságával foglalkozunk, az ún. *szukcesszív* integrálással. Legyen ehhez $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és valamilyen $s = 1, \dots, n-1$ mellett adottak az

$$1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$$

indexek. Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

akkor a $\xi \equiv (x, y)$ szimbólum jelentse a következőt:

$$x := (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_s}) \in \mathbb{R}^s, y := (\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_{n-s}}) \in \mathbb{R}^{n-s},$$

ahol $j_1 < \dots < j_{n-s}$ és

$$\{j_1, \dots, j_{n-s}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_s\}.$$

Ennek megfelelően az \mathbb{R}^n teret az

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$$

alakban tekintjük. Továbbá minden

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt

$$f \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}$$

"kétváltozós" függvényként fogunk fel, ahol az f függvény

$$f(x, y)((x, y) \in \mathcal{D}_f)$$

helyettesítési értékeiben az (x, y) "vektor" első komponense \mathbb{R}^s -beli, a második pedig \mathbb{R}^{n-s} -beli. Hasonlóan, ha

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

intervallum, akkor legyen

$$I \equiv I_1 \times I_2,$$

ahol

$$I_1 := [a_{i_1}, b_{i_1}] \times \dots \times [a_{i_s}, b_{i_s}]$$

és

$$I_2 := [a_{j_1}, b_{j_1}] \times \dots \times [a_{j_{n-s}}, b_{j_{n-s}}]$$

\mathbb{R}^s -beli ill. \mathbb{R}^{n-s} -beli intervallumok.

Mindezt figyelembe véve legyen

$$f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

adott "kétváltozós" függvény, és tetszőleges $x \in I_1$, $y \in I_2$ esetén tekintsük az

$$f_x : I_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

ill. az

$$f^y : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt, ahol

$$f_x(z) := f(x, z) \quad (z \in I_2),$$

ill.

$$f_y(t) := f(t, y) \quad (t \in I_1).$$

Ha az f korlátos, akkor nyilván az f_x , f^y ($x \in I_1$, $y \in I_2$) függvények is korlátosak. Következésképpen vehetjük azokat az

$$\mathbf{m}_f, \mathbf{M}_f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ valamint } \mathbf{m}^f, \mathbf{M}^f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényeket, amiket az alábbi módon értelmezzünk:

$$\mathbf{m}_f(x) := I_*(f_x) \quad (x \in I_1), \quad \mathbf{M}_f(x) := I^*(f_x) \quad (x \in I_1),$$

$$\mathbf{m}^f(y) := I_*(f_y) \quad (y \in I_2), \quad \mathbf{M}^f(y) := I^*(f_y) \quad (y \in I_2).$$

A most bevezetett jelölésekkel a szukcesszív integrálás tétele a következőképpen szól:

7.1 Fubini-tétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in R(I)$. Ekkor

$$\mathbf{m}_f, \mathbf{M}_f \in R(I_1) \text{ és } \mathbf{m}^f, \mathbf{M}^f \in R(I_2),$$

továbbá

$$\int_{I_1} \mathbf{m}_f = \int_{I_1} \mathbf{M}_f = \int_{I_2} \mathbf{m}^f = \int_{I_2} \mathbf{M}^f = \int_I f.$$

asdf

8 Felület, felszín. Felületi integrál, fluxus.

8.1 Felszín

Tegyük fel, hogy a $\Phi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény folytonosan differenciálható, és a

$$\partial_1 \Phi(\xi), \partial_2 \Phi(\xi) \quad (\xi \in \mathcal{D}_\Phi)$$

parciális deriváltvektorok nem párhuzamosak. Tekintsük a $[0, 1]^2$ "négyzet" valamilyen $\tau \subset [0, 1]^2$ felosztását, legyen az $ABCD$ téglalap ennek egy osztásintervalluma. Ekkor a $\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D)$ felületi pontok által "kijelölt"

$$\{\Phi(\xi) \in \mathbb{R}^3 : \xi \in ABCD\}$$

felületdarabot a $\Phi(D) - \Phi(A), \Phi(B) - \Phi(A)$ vektorok által kifeszített paralelogrammával helyettesítjük. Ez utóbbinak a t_{ABCD} területe az

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

vektoriális szorzat és az $\|a\| := \|a\|_2$ ($a, b \in \mathbb{R}^3$) norma alapján a következő:

$$t_{ABCD} = \left\| (\Phi(D) - \Phi(A)) \times (\Phi(B) - \Phi(A)) \right\|.$$

Itt a parciális deriváltak definíciójára gondolva közelítőleg

$$t_{ABCD} \approx \left\| (\partial_2 \Phi(A) \cdot |AD|) \times (\partial_1 \Phi(A) \cdot |AB|) \right\| = \\ \left\| \partial_1 \Phi(A) \times \partial_2 \Phi(A) \right\| \cdot |ABCD|,$$

ahol $|AD|, |AB|$ az AD, AB szakaszok hosszát, $|ABCD| := |AD| \cdot |AB|$ pedig a jelzett osztásintervallum területét jelöli. A

$$\sum_{ABCD} t_{ABCD} \approx \left\| \partial_1 \Phi(A) \times \partial_2 \Phi(A) \right\| \cdot |ABCD|$$

közelítéssel az utóbbi összeg nem más, mint a

$$\left\| \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \right\| : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

folytonos függvénynek a τ felosztáshoz tartozó (Riemann-féle) integrálközelítő összege. Ezért "logikusnak" látszik a szóban forgó felület *felszínét* a

$$\Upsilon_\Phi := \int_{[0, 1]^2} \left\| \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \right\|$$

kettős integrálként definiálni.