

Analízis III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

A jegyzet egy az egyben Dr. Simon Péter analízis 3 segédanyagából lett összegyűjtve. Elsősorban magamnak írtam, hogy elősegítse a felkészülést a vizsgára.

Tartalom

1	Metrikus-, normált-, euklideszi-terek	2
1.1	Metrikus terek	2
1.1.1	Példák	3
1.2	Normált terek	5
1.3	Euklideszi terek	6
2	Konvergencia metrikus terekben	9
2.1	Nyílt halmazok uniója és metszete	11
2.2	Zárt halmazok uniója, metszete	14

1 Metrikus-, normált-, euklideszi-terek

Teljes vizsgacím: Metrikus-, normált-, euklideszi-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz. Torlódási pont, zárt halmaz. Nyílt (zárt) halmazok uniója, metszete. A $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(C[a, b], \varrho_p)$, $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, $(0 < n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$ terek.

1.1 Metrikus terek

Konkrét példák sokasága vezet el a távolság-fogalom absztrakciójához: legyen az $X \neq \emptyset$ egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy a

$$\varrho : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. minden $x \in X$ esetén $\varrho(x, x) = 0$;
2. ha $x, y \in X$ és $\varrho(x, y) = 0$, akkor $x = y$;
3. bármely $x, y \in X$ választással $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;
4. tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekkel $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, z)$.

Azt mondjuk, hogy ekkor a ϱ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval *metrika*). Ha $x, y \in X$, akkor $\varrho(x, y)$ az x, y elemek *távolsága*. Az (X, ϱ) rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük.

Az X -beli elemek távolsága tehát nemnegatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága *nulla* (ld. 1.), továbbá két különböző elem távolsága mindig *pozitív* (ld. 2.). A távolság *szimmetrikus*, azaz két elem távolsága független az illető elemek sorrendjétől (ld. 3.). A 4. tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni.

Mutassuk meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből annak az alábbi változata is következik:

$$|\varrho(x, z) - \varrho(y, z)| \leq \varrho(x, y) \quad (x, y, z \in X).$$

Ugyanis a 4. axióma miatt

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$$

tehát

$$\varrho(x, z) - \varrho(y, z) \leq \varrho(x, y).$$

Ha itt x -et és az y -t felcseréljük, akkor a

$$-(\varrho(x, z) - \varrho(y, z)) = \varrho(y, z) - \varrho(x, z) \leq \varrho(y, x) = \varrho(x, y)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utóbbi két becslés egybevetésével kapjuk a jelzett egyenlőtlenséget.

Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható

$$\varrho : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

távolságfüggvény, ui., pl. a

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \quad ((x, y) \in X^2)$$

leképezés nyilván eleget tesz a fenti, a metrikát meghatározó 1.-4. axiómáknak. Az így definiált (X, ϱ) teret *diszkrét* jelzővel illetjük.

Megmutatható, hogy az 1.-3. axiómák nem függetlenek egymástól, nevezetesen: ha egy

$$\varrho : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény rendelkezik az 1., 2., 4., tulajdonságokkal, akkor a ϱ metrika.

1.1.1 Példák

Soroljunk fel néhány példát amelyek nem csupán az analízisben játszanak fontos szerepet.

1. Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$, és

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

esetén definiáljuk az (x, y) -ban a

$$\varrho_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

függvény helyettesítési értékét a következőképpen:

$$\varrho_p(x, y) := \begin{cases} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p & (p \leq 1) \\ \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Terjesszük ki a ϱ_p értelmezését $p = \infty := +\infty$ -re is az alábbiak szerint:

$$\varrho_\infty(x, y) := \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

Belátható, hogy $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$ metrikus tér. A későbbiekben a ϱ_∞ metrika mellett a \mathbb{K}^n -beli vektorok távolságának a mérésére többnyire a

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (x, y \in \mathbb{K}^n),$$

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (x, y \in \mathbb{K}^n),$$

metrikákat fogjuk használni. Speciálisan az $n = 1$ esetben

$$\varrho_p(x, y) = |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{K}, p \geq 1).$$

2. Tekintsük egy $0 < p < +\infty$ mellett az

$$\ell_p := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

halmazokat. Legyen továbbá $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_p$ esetén

$$\varrho_p(x, y) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p & (0 < p \leq 1) \\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy az így definiált ϱ_p függvény is metrika, azaz (ℓ_p, ϱ_p) metrikus tér. A $p = \infty := +\infty$ -re való "kiterjesztést" a következőképpen kapjuk:

$$\ell_\infty := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty \right\}$$

(más szóval az ℓ_∞ szimbólum a korlátos számsorozatok halmazát jelöli), valamint az ℓ_∞ -beli $x = (x_n), y = (y_n)$ elemekre

$$\varrho_\infty(x, y) := \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

A ϱ_∞ függvény is metrika, tehát $(\ell_\infty, \varrho_\infty)$ is metrikus tér.

3. Valamilyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum esetén $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ esetén jelöljük $C[a, b]$ -vel az $[a, b]$ -n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $0 < p \leq +\infty$, akkor tekintsük az 1., 2. példák alábbi "folytonos" változatait: ha $f, g \in C[a, b]$, akkor

$$\varrho_p(f, g) := \begin{cases} \int_a^b |f - g|^p & (0 < p \leq 1) \\ \left(\int_a^b |f - g|^p \right)^{1/p} & (1 < p < +\infty) \\ \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} & (p = \infty := +\infty). \end{cases}$$

Az előbbi példákhoz hasonlóan látható be, hogy $(C[a, b], \varrho_p)$ is metrikus tér.

Azt mondjuk, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és egy X^2 -en értelmezett

$$\varrho, \sigma : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

metrikák esetén a ϱ és a σ *ekvivalens*, ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot \varrho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C \cdot \varrho(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Könnyű belátni, hogy ha \mathcal{M} jelöli az előbb említett metrikák halmazát, és a $\varrho, \sigma \in \mathcal{M}$ elemekre $\varrho \sim \sigma$ azt jelenti, hogy a ϱ és a σ ekvivalens, akkor az így értelmezett (\mathcal{M}^2 -beli) \sim reláció ekvivalencia.

Pl. a fenti $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$ metrikus terekre a ϱ_p metrikák közül $p \geq 1$ esetén bármelyik kettő ekvivalens. A továbbiakban az

$$X := \mathbb{K}^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

esetben a $\varrho_2, \varrho_1, \varrho_\infty$ metrikák bármelyikét fogjuk használni.

1.2 Normált terek

Tegyük fel, hogy a szóban forgó $X \neq \emptyset$ halmaz lineáris tér a \mathbb{K} felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$$

leképezés *norma*, ha

1. $\|0\| = 0$;
2. ha $x \in X$ és $\|x\| = 0$, akkor $x = 0$;
3. bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
4. tetszőleges $x, y \in X$ elemekre $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Egy $x \in X$ elemre az $\|x\|$ nemnegatív számot az x *hosszának* (vagy *normájának*), az $(X, \|\cdot\|)$ rendezett párt pedig *normált térnek* nevezzük.

A 4. axiómát szintén *háromszög-egyenlőtlenségként* említjük a későbbiekben. Ha pl. X jelöli a

$$\mathbb{K}^n \ (0 < n \in \mathbb{N}), \quad \ell_p \ (0 < p \in \mathbb{R}), \quad C[a, b] \ (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, akkor a vektorok szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve az X lineáris tér a \mathbb{K} , ill. az \mathbb{R} felett. Az említett terekben a nulla-elemet 0-val jelölve azt kapjuk továbbá, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$\|x\|_p := \varrho_p(x, 0) \quad (x \in X)$$

norma, azaz ilyen p -kre

$$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p), (\ell_p, \|\cdot\|_p), (C[a, b], \|\cdot\|_p)$$

normált terek. Tehát

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\} & (p = +\infty) \end{cases} \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n)$$

speciálisan az $n = 1$ esetben

$$\|x\|_p = |x| \quad (x \in \mathbb{K}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

valamint

$$\|y\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \sup\{|y_i| : i \in \mathbb{N}\} & (p = +\infty) \end{cases} \quad (y = (y_n) \in \ell_p)$$

és

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \quad (f \in C[a, b]).$$

Világos, hogy a most mondott példákban

$$\varrho_p(x, y) = \|x - y\|_p \quad (x, y \in X).$$

Sőt, ha most $(X, \|\cdot\|)$ egy tetszőleges normált teret jelöl, akkor a

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \quad ((x, y) \in X^2)$$

függvény metrika, azaz $(X, \|\cdot\|)$ metrikus tér:

$$(X, \varrho) \equiv (X, \|\cdot\|).$$

Ekkor pl. a

$$|\varrho(x, z) - \varrho(y, z)| \leq \varrho(x, y) \quad (x, y, z \in X)$$

háromszög-egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$|\|x - z\| - \|y - z\|| \leq \|x - y\| \quad (x, y, z \in X).$$

Ha itt $z = 0$, akkor

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in X).$$

Azt mondjuk, hogy az X (\mathbb{K} -feletti) vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\|, \|\cdot\|_* : X \rightarrow [0, +\infty)$$

normák *ekvivalensek* (erre is a $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$ jelölést fogjuk használni), ha alkalmas c, C pozitív konstansokkal

$$c \cdot \|x\| \leq \|x\|_* \leq C \cdot \|x\| \quad (x \in X).$$

1.3 Euklideszi terek

A fent bevezetett $\|\cdot\|_p$ norma a $p = 2$ esetben speciális esete egy tágabb (lineáris algebrából jól ismert) normaosztálynak. Legyen ui. X újra egy lineáris tér a \mathbb{K} felett, az

$$\langle \cdot \rangle : X^2 \rightarrow \mathbb{K}$$

függvényről pedig tegyük fel, hogy

1. minden $x, y \in X$ mellett $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (ahol a $\bar{\xi}$ szimbólum a $\xi \in \mathbb{K}$ szám komplex konjugáltját jelöli);
2. bármely $x \in X \setminus \{0\}$ esetén $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ és $\langle x, x \rangle > 0$;
3. ha $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
4. tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekre fennáll a következő egyenlőség:

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Ha $x, y \in X$ akkor az $\langle x, y \rangle$ számot az x, y elemek *skaláris szorzatának*, az $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ rendezett párt pedig *skaláris szorzat-térnek* (vagy *euklideszi-térnek*) nevezzük.

Speciálisan itt minden $x \in X$ esetén

$$\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0,$$

ill.

$$\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0.$$

Tehát

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (azaz $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy ún. *valós euklideszi tér*), akkor

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (x, y \in X).$$

Jelentse pl. X a

$$\mathbb{K}^n \ (1 \leq n \in \mathbb{N}), \quad \ell_2, \quad C[a, b] \ (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, és

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i & (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n & (x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2) \\ \int_a^b xy & (x, y \in C[a, b]). \end{cases}$$

Ekkor $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, továbbá

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X).$$

Ez utóbbi egyenlőségnek sokkal általánosabb háttere van, ui. tetszőleges $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi teret véve

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Itt a háromszög-egyenlőtlenség igazolásában fontos szerep jut az

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in X)$$

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek. Ezt "lefordítva" az előbb említett euklideszi terekre az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \quad (x, y \in \mathbb{K}^n),$$

$$\left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2} \quad (x, y \in \ell_2),$$

$$\left| \int_a^b f g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2} \quad (f, g \in C[a, b]).$$

Az $n = 1$ esetben a $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}$ -ban az előbb értelmezett skaláris szorzás a következő:

$$\langle x, y \rangle = x \bar{y} \quad (x, y \in \mathbb{K}),$$

ill. ekkor

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{|x|^2} = |x| \quad (x \in \mathbb{K}).$$

Nem nehéz belátni, hogy a fenti

$$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

normált terek közül $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ az egyetlen, amelyre a $\|\cdot\|_p$ normát skaláris szorzás "generálja". Másképp fogalmazva az a tény, hogy egy alkalmas $\langle \cdot \rangle$ skaláris szorzással

$$\|x\|_p = \sqrt{\langle x, \cdot \rangle} \quad (x \in \mathbb{K}^n),$$

azzal ekvivalens, hogy $p = 2$. Ha ui. $p = 2$, akkor a fentebb láttuk, hogy a $\|\cdot\|_2$ norma skaláris szorzásból származik. Fordítva pedig mindez az ún. *paralelogramma-szabály* következménye: tetszőleges $(X, \langle \cdot \rangle)$ tér esetén az

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, \cdot \rangle} \quad (x \in X)$$

normára

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x, y \in X).$$

2 Konvergencia metrikus terekben

Eredeti vizsgacím: Konvergens sorozatok metrikus terekben. Konvergencia \mathbb{K}^n -ben, a koordináta-sorozatok szerepe. *Bolzano-Weierstrass*-kiválasztási tétel. Konvergencia a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ térben (függvénysorozatok, az egyenletes, ill. a pontonkénti konvergencia fogalma). Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal. A teljesség fogalma, *Banach-tér*, *Hilbert-tér*. A $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ tér teljessége.

Legyen az (X, ϱ) metrikus tér esetén $b \in X$ és $r > 0$, ekkor a

$$K_r(b) := \{x \in X : \varrho(x, b) < r\}$$

halmazt a b elem r -sugarú környezetének nevezzük. Használni fogjuk a $K(b)$ jelölést is a $K_r(b)$ helyett, ha az adott szituációban a $K_r(b)$ környezet sugara (r) nem játszik szerepet.

Tekintsük a

$$(K^n, \varrho_p) \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}, p = 1, 2, \infty)$$

metrikus tereket. Ekkor $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ és $r > 0$ esetén ezekben a terekben a b vektor r -sugarú $K_r(b)$ környezetei (attól függően, hogy $\varrho = \varrho_1, \varrho_2, \varrho_\infty$) rendre a következők:

$$K_r^{(1)}(b) := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{i=1}^n |x_i - b_i| < r \right\},$$

$$K_r^{(2)}(b) := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - b_i|^2} < r \right\},$$

$$K_r^{(\infty)}(b) := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \max\{|x_j - b_j| : j = 1, \dots, n\} < r \right\},$$

Speciálisan a $\mathbb{K}^n := \mathbb{R}^2$ választással a $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ vektor előbbi környezetei geometriailag (az \mathbb{R}^2 "síkot" egy derékszögű koordináta-rendszerrel reprezentálva) könnyen ellenőrizhetően a következők:

- $K_r^{(1)}$ egy, a

$$(b_1 - r, b_2), (b_1, b_2 + r), (b_1 + r, b_2), (b_1, b_2 - r)$$

pontok (mint csúcspontok) által meghatározott *rombusz* (csúcsára állított négyzet) belseje,

- $K_r^{(2)}$ egy b középpontú és r sugarú *körlemez* belseje,

- $K_r^{(\infty)}$ pedig egy, a

$$(b_1 - r, b_2 - r), (b_1 - r, b_2 + r), (b_1 + r, b_2 + r), (b_1 + r, b_2 - r)$$

pontok (mint csúcspontok) által meghatározott *négyzet* belseje.

Nyilvánvaló, hogy $0 < v \leq r$ esetén

$$K_v(b) \subset K_r(b).$$

Tetszőleges $K_r(a)$ környezet és $b \in K_r(a)$ esetén a

$$0 < v < r - \varrho(b, a)$$

feltételnek eleget tevő v "sugárral"

$$K_v(b) \subset K_r(a).$$

Ha ui. $x \in K_v(b)$, azaz $\varrho(x, b) < v$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\varrho(x, a) \leq \varrho(x, b) + \varrho(b, a) < v + \varrho(b, a) < r.$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in K_r(a)$, tehát a $K_v(b) \subset K_r(a)$ tartalmazás valóban fennáll.

Nevezzük valamilyen $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz esetén az $a \in A$ pontot az A halmaz *belső pontjának*, ha egy alkalmas $K(a)$ környezettel

$$K(a) \subset A$$

teljesül. Az tulajdonságú pontok által alkotott halmaz az A ún. *belseje*, amit az

$$\text{int } A$$

szimbólummal fogunk jelölni. Nyilván $\text{int } X = X$, míg az

$$X := \mathbb{R}, \varrho(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

esetben $\text{int } \{a\} = \emptyset$ ($a \in \mathbb{R}$). Állapodjunk meg abban, hogy

$$\text{int } \emptyset := \emptyset.$$

Tehát bármely $A \subset X$ halmazra

$$\text{int } A \subset A.$$

Könnyű meggondolni ugyanakkor, hogy pl. tetszőleges $K(a)$ környezetre

$$\text{int } K(a) = K(a).$$

Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *nyílt*, ha

$$\text{int } A = A.$$

Így pl. az \emptyset (az üreshalmaz) nyílt halmaz, ill. bármely környezet is az. Más megfogalmazásban tehát egy $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az A minden pontja belső pontja az A -nak:

$$a \in A \implies a \in \text{int } A.$$

Ismételjük el újra, hogy mit is jelent ez: az

$$\emptyset \neq A \subset X$$

halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha tetszőleges $a \in A$ elemének létezik olyan $K(a)$ környezete, hogyá

$$K(a) \subset A.$$

Bármely (X, ϱ) metrikus tér esetén az X "alaphalmaz" nyílt halmaz. Ha pl. (X, ϱ) a diszkrét metrikus tér, amikor is

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \quad (x, y \in X),$$

akkor az X összes részhalmazra nyílt halmaz. Valóban, ekkor (pl.)

$$K_{1/2}(a) = \{a\} \quad (a \in X),$$

következésképpen tetszőleges $\emptyset \neq A \subset X$ halmazra és $a \in A$ pontra

$$K_{1/2}(a) = \{a\} \subset A.$$

Tehát $a \in \text{int } A$. Egyúttal minden $x \in X$ pontra az $\{x\}$ halmaz is nyílt. Ha viszont a ϱ metrika olyan, hogy bármelyik $a \in X$ elemhez és tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $a \neq x \in X$, hogy

$$\varrho(x, a) < r,$$

akkor az X egyelemű részhalmazai közül egyik sem nyílt. Ti. ebben az esetben (az előbbi jelölésekkel) $x \in K_r(a)$, ezért $x \neq a$ miatt $K_r(a)$ nem lehet részhalmaz az $\{a\}$ halmaznak. Ez azt jelenti, hogy $\text{int } \{a\} = \emptyset \neq \{a\}$. Ilyen tulajdonságú metrikus terek pl. a

$$(\mathbb{K}^n, \varrho_p) \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek.

Legyen

$$\mathcal{T}_p(X) := \mathcal{T}_p := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ nyílt}\}.$$

Az X nyílt részhalmazai által meghatározott \mathcal{T}_p halmazrendszert az (X, ϱ_p) metrikus tér *topológiájának* nevezzük.

2.1 Nyílt halmazok uniója és metszete

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \subset X$ $\gamma \in \Gamma$ halmazok valamennyien nyíltak az (X, ϱ) metrikus térben. Ekkor

- az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is nyílt;
- ha a Γ halmaz véges, akkor a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszetük is nyílt.

Bizonyítás. Legyen $a \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Ekkor egy $\nu \in \Gamma$ indexszel $a \in A_\nu$. Mivel az A_ν halmaz nyílt, ezért alkalmaz $K(a)$ környezettel $K(a) \subset A_\nu$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_\nu \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma,$$

így egyúttal

$$K(a) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

is teljesül. Más szóval $a \in \text{int} \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)$, azaz $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ nyílt halmaz.

Most tegyük fel, hogy a Γ halmaz véges, és legyen $a \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma$ mellett $a \in A_\gamma$, következésképpen az A_γ -k nyíltsága miatt egy $r_\gamma > 0$ sugárral

$$K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma.$$

Ha

$$r := \min\{r_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

(ami egy pozitív szám), akkor $r \leq r_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) miatt

$$K_r(a) \subset K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma),$$

így

$$K_r(a) \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma.$$

Tehát $a \in \text{int} \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)$ metszethalmaz nyílt.

Gondoljuk meg, hogy tetszőleges (X, ϱ) metrikus térben minden $A \subset X$ halmazra

$$\text{int } A = \bigcup_{T \in \mathcal{A}} T,$$

ahol \mathcal{A} jelöli az X halmaz összes olyan $T \subset X$ nyílt részhalmazait, amelyekre $T \subset A$.

Az előző tétel miatt az $\text{int } A = \bigcup_{T \in \mathcal{A}} T$ halmaz nyílt, továbbá

$$\text{int } A = \bigcup_{T \in \mathcal{A}} T \subset A.$$

Az is világos, hogy ha $C \subset X$ olyan nyílt halmaz, amelyre $C \subset A$, akkor $C \subset \text{int } A$. Ezért is szokták az $\text{int } A$ halmazt az A *legbővebb nyílt részhalmazának* nevezni. Speciálisan, ha $A \subset X$

nyílt, akkor $A \in \mathcal{A}$ és $A = \text{int } A$.

Tegyük fel, hogy adottak (X, ϱ) , (X, σ) metrikus terek és $\varrho \sim \sigma$ (azaz a ϱ metrika ekvivalens a σ -val). Ekkor

$$\mathcal{T}_\varrho(X) = \mathcal{T}_\sigma(X),$$

tehát a két tér topológiája egybeesik. Más szóval az X nyílt részhalmazai a két metrika szerint ugyanazok.

Valóban, ha a $c, C > 0$ konstansokkal

$$c \cdot \varrho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C \cdot \varrho(x, y) \quad (x, y \in X),$$

akkor tetszőleges $a \in X$, $r > 0$ esetén σ -szerinti

$$K_r^{(\sigma)}(a) := \{x \in X : \sigma(x, a) < r\}$$

környezetre

$$K_{r/C}^{(\varrho)}(a) \subset K_r^{(\sigma)}(a),$$

ahol

$$K_{r/C}^{(\varrho)}(a) := \{x \in X : \varrho(x, a) < r/C\}.$$

Ha ui. $x \in K_{r/C}^{(\varrho)}(a)$, azaz $\varrho(x, a) < r/C$, akkor

$$\sigma(x, a) \leq C \cdot \varrho(x, a) < C \cdot \frac{r}{C} = r,$$

más szóval $x \in K_r^{(\sigma)}(a)$. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$K_{cr}^{(\sigma)}(a) \subset K_r^{(\varrho)}(a).$$

Ha tehát $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ és egy alkalmas $r > 0$ sugárral

$$K_r^{(\sigma)}(a) \subset A,$$

akkor az előbbiek szerint

$$K_{r/C}^{(\varrho)}(a) \subset A$$

is igaz, ill.

$$K_r^{(\varrho)}(a) \subset A$$

esetén

$$K_{cr}^{(\sigma)}(a) \subset A.$$

Következésképpen az a tény, hogy $a \in \text{int } A$, független attól, hogy az (X, ϱ) , vagy az (X, σ) metrikus térben "vagyunk". Így az $\text{int } A = A$ egyenlőség is pontosan akkor teljesül a ϱ metrika értelmében, ha a σ szerint is fennáll. Röviden:

$$A \in \mathcal{T}_\varrho(X) \iff A \in \mathcal{T}_\sigma(X).$$

Az (X, ϱ) metrikus térben az $A \subset X$ halmazt *zárt*nak fogjuk nevezni, ha az $X \setminus A$ (komplement) halmaz nyílt. Világos, hogy pl. az \emptyset, X halmazok zártak, vagy pl. a diszkrét metrikus térben minden halmaz zárt.

Tetszőleges (X, ϱ) metrikus térben minden egyelemű halmaz zárt. Legyen ui. $a \in X$, ekkor bármely $b \in X \setminus \{a\}$ elemre $\varrho(a, b) > 0$. Ha

$$0 < v \leq \varrho(a, b)$$

és $x \in K_v(b)$, akkor

$$\varrho(a, x) \geq \varrho(a, b) - \varrho(x, b) > \varrho(a, b) - v \geq \varrho(a, b) - \varrho(a, b) = 0,$$

azaz $\varrho(a, b) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $x \neq a$, más szóval $x \in X \setminus \{a\}$. Ezért

$$K_v(b) \subset X \setminus \{a\},$$

röviden: az $X \setminus \{a\}$ halmaz nyílt, tehát $\{a\}$ valóban zárt.

Világos, hogy az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az $X \setminus A$ halmaz zárt.

Nyilvánvaló, hogy az ekvivalens metrikákkal kapcsolatban a topológiákra kapott egyenlőség igaz marad az egyes metrikákra nézve zárt halmazok által meghatározott halmazrendszerekre is. Ha tehát $(X, \varrho), (X, \sigma)$ olyan metrikus terek, hogy $\varrho \sim \sigma$, akkor

$$\mathcal{C}_\varrho(X) = \mathcal{C}_\sigma(X),$$

ahol általában egy (X, δ) metrikus tér esetén

$$\mathcal{C}_\delta := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ zárt}\}.$$

Az ismert De Morgan-azonosságokra utalva az előző tételből rögtön következik a

2.2 Zárt halmazok uniója, metszete

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \subset X$ ($\gamma \in \Gamma$) halmazok valamennyien zártak az (X, ϱ) metrikus térben. Ekkor

- a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszetük is zárt;
- ha a Γ halmaz véges, akkor az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is zárt.

Tekintjük az (X, ϱ) metrikus térben az $A \subset X$ halmazt, és jelöljük \mathcal{X} -szel az összes olyan $B \subset X$ zárt halmaz által alkotott halmazrendszert, amelyre $A \subset B$. Világos, hogy $\mathcal{X} \neq \emptyset$, hiszen nyilván $X \in \mathcal{X}$. Az előző tétel szerint az

$$\overline{A} := \bigcap_{B \in \mathcal{X}} B$$

halmaz zárt, és mivel minden $B \in \mathcal{X}$ esetén $A \subset B$, ezért

$$A \subset \overline{A}.$$

Az is világos, hogy ha a $C \subset X$ halmaz zárt és $A \subset C$, akkor $\overline{A} \subset C$, ui. $C \in \mathcal{X}$. (Ezért is szokták az \overline{A} halmazt az A -t lefedő legszűkebb zárt halmazként említeni.)