Taylor-formula

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényre valamilyen $s \in \mathbb{N}$ mellett $f \in D^{s+1}$ teljesül. Ekkor bármely $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ esetén van olyan $c \in [a,\, b]$, hogy

$$f(b) = T_{a,\,s}f(b) + \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\,|i|=s+1} \frac{\partial^i f(c)}{i!} \cdot (b-a)^i.$$

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis III. 123. oldal.

Legyen

$$1 \leq n,\, k \in \mathbb{N},\, f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,\, j = 1,\, \ldots,\, n,$$

és

$$\partial_j^k f(a) := \partial_{j\ldots j} f(a).$$

Ha $i := (i_1,\, \ldots,\, i_n) \in \mathbb{N}^n$, akkor legyen

$$\partial^i f(a) := \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} f(a) = \partial_{1\ldots1\ldots n\ldots n} f(a).$$

Az $i \in \mathbb{N}^n$ *multiindex* esetén i *hosszát* a következőképpen definiáljuk:

$$|i| := ||i||_1 = \sum_{j=1}^n i_j.$$

Legyen az $i = (i_1,\, \ldots,\, i_n) \in \mathbb{N}^n$ multiindex és az $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén

$$i! := \prod_{j=1}^n i_j! = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{i_j} k$$

és

$$x^i := \prod_{j=1}^n x_j^{i_j}$$

az i *faktoriálisa*, ill. az x vektor i-kitevős *hatványa.*

Tekintsük ezek után az

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvényt, és tegyük fel, hogy valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $s \in \mathbb{N}$ mellett $f \in D^s\{a\}$. Ekkor a

$$T_{a,\,s}f(x) := \sum_{k=0}^s \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\,|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

előírással definiált $T_{a,\,s}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény a-hoz tartozó s-edrendű *Taylor-polinomjának* nevezzük.

Lagrange-féle középértéktétel

Tétel. Legyen adott a differenciálható $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, és valamilyen $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ végpontokkal $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor egy alkalmas $c \in (a, b)$ mellett

$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(c), b - a \rangle.$$

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis III. 125. oldal.

Valamilyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ mellett legyen $f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in D$. Tegyük fel, hogy az $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ végpontokkal meghatározott szakaszra $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor minden $i = 1, \dots, m$ mellett egy alkalmas $\xi^{(i)} \in (a, b)$ helyen a

$$h := (h_1, \dots, h_n) := b - a$$

jelöléssel

$$f_i(b) - f_i(a) = \langle \operatorname{grad} f_i(\xi^{(i)}), h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(\xi^{(i)}) \cdot h_j,$$

ezért

$$|f_i(b) - f_i(a)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\xi^{(i)})| \cdot |h_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\xi^{(i)})| \cdot ||h||_\infty \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : x \in (a, b) \right\} \cdot ||h||_\infty.$$

Következésképpen

$$||f(b) - f(a)||_\infty = \max \{ |f_i(b) - f_i(a)| : i = 1, \dots, m \} =$$

$$\max\{ |\langle \operatorname{grad} f_i(\xi^{(i)}), h \rangle| : i = 1, \dots, m \} \leq$$

$$\leq \max \left\{ \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : x \in (a, b) \right\} : i = 1, \dots, m \right\} \cdot ||h||_\infty =$$

$$\leq \sup \left\{ \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : i = 1, \dots, m \right\} : x \in (a, b) \right\} \cdot ||h||_\infty =$$

$$\sup \{ ||f'(x)||_{(\infty)} : x \in (a, b) \} \cdot ||h||_\infty.$$

Ha tehát az $\mathbb{R}^n$-en és az $\mathbb{R}^m$-en is a $||.||_\infty$ vektornormát vezetjük be, akkor az $f'(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$ Jacobi-mátrix által generált $||f'(x)||_\infty$ (sor)normáját tekintve a

$$q := \sup \{ ||f'(x)||_{(\infty)} : x \in (a, b) \}$$

szimbólummal

$$\boxed{||f(b) - f(a)||_\infty \leq q \cdot ||b - a||_\infty}.$$

$$A := \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(\xi^{(1)}) \\ \operatorname{grad} f_2(\xi^{(2)}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\xi^{(m)}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ mátrixszal } f(b) - f(a) = A(b - a).$$

Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f-nek az a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokákis szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektor, hogy

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis IV. 19. oldal.

Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ mátrix rangja m, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ Lagrange-függvényre

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

Másodrendű szükséges feltétel

Tétel. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, és az $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon legyenek adottak az $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ függvények. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ mátrix rangja m, és az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van. Ekkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektor, amellyel az $F := f + \lambda g$ Lagrange-függvényre az alábbiak teljesülnek:

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) szemidefinit.

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

Implicitfüggvény-tétel

Tétel. Adott n, $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a,\, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a,\, b) = 0,\ \det \partial_2 f(a,\, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az $(a,\, b)$ körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x,\, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x,\, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

Inverzfüggvény-tétel I.

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, és az a-beli Jacobi-mátrixa invertálható. Ekkor az f függvény a-ban lokálisan invertálható, és az a-beli lokális inverze folytonos.

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis IV. 16. oldal.

Inverzfüggvény-tétel II.

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n \in \mathbb{N}$, az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható, az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban az $f'(a)$ Jacobi-mátrixra $\det f'(a) \neq 0$ teljesül. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel az $f_{|K(a)}$ leszűkítés invertálható, a $h := (f_{|K(a)})^{-1}$ lokális inverfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = \Big(f'(h(x))\Big)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in \mathcal{D}_f$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti ϕ függvény 1., 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni.

2 Szeparábilis differenciálegyenlet