Analízis 4

Gyakorlati feladatok

Tartalom

1 Gyakorlat

1.1 Emlékeztető

Definíció. Legyen $1 \leq s \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^s$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *nullmértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbb{R}^s$ $(k \in \mathbb{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tekintsük pl. az $I \subset \mathbb{R}^n$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ intervallum esetén az $f \in R(I)$ függvényt, és legyen

$$\operatorname{graf} f := \{(x,\, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}.$$

Ekkor a $\operatorname{graf} f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ halmaz nullmértékű.

Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ értelmezési tartománya korlátos, akkor van olyan $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum, amellyel $\mathcal{D}_f \subset I$. Legyen ekkor

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{D}_f) \\ 0 & (x \in I \setminus \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha $F_I \in R(I)$, akkor $F_J \in R(J)$ minden olyan $J \subset \mathbb{R}^n$ intervallumra, amelyre $\mathcal{D}_f \subset J$ és

$$\int_I F_I = \int_J F_J.$$

Ez ad értelmet a következő definíciónak:

Definíció. A fenti f függvény *Riemann-integrálható*, ha egy alkalmas $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallummal $\mathcal{D}_f \subset I$ és $F_I \in R(I)$. Az utóbbi esetben

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_{\mathcal{D}_f} f := \int_I F_I.$$

Az előző definició olyan függvényekre is kiterjeszthető, amik értelmezési tartománya nem korlátos, viszont a

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \neq 0\}}$$

tartója igen.

Definíció. Legyen az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

az A *karakterisztikus függvénye*. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Jordan-mérhető*, ha a χ_A függvény integrálható, amikor is a

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$$

nemnegatív szám az A halmaz *Jordan-mértéke*.

Tétel. Tekintsük a nyílt halmazon értelmezett és folytonosan differenciálható

$$g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

függvényt. Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathcal{D}_g$ halmaz kompakt intervallum, továbbá az I belsejére való $g_{|_{\operatorname{int} I}}$ leszűkítés injektív függvény. Ekkor az

$$f : g(I) \to \mathbb{R}$$

korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha az

$$I \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható. Az utóbbi esetben

$$\int_I f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|\, dx = \int_{g[I]} f.$$

Speciális esetek.

1. **Síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amire
$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi, \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \big((r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$
Ekkor $g \in C^1$, és
$$\det g'(r,\varphi) = r \qquad \big((r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

2. **Módosított síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amire
$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi, \\ br \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \big((r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi) = abr \quad \big((r,\, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

3. **Térbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ r \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ r \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

   Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, \psi) = -r^2 \cdot \sin\psi \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

4. **Módosított térbeli polárkoordináta-transzformáció (elliptikus koordináták).** Legyen $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ br \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ cr \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

   Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, \psi) = -abcr^2 \cdot \sin\psi \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

5. **Hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

   Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, z) = r \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

6. **Módosított hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi \\ br \cdot \sin\varphi \\ cz \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

   Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, z) = abcr \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. Ekkor Ω-nak valamely $0 \neq e \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú, ill. $a \in \mathbb{R}^3$ pontra illeszkedő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

$$\mathbf{\Theta}_t = \int_\Omega \ell^2(r)\rho(r)\,dr$$

valós szám, ahol $\ell(r)$ jelöli az $r \in \Omega$ pontnak a t tengelytől mért távolságát:

$$\ell(r) := \inf\{\|r - (a + \tau e)\| \in \mathbb{R} : \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Világos, hogy ha $a = 0$ és $e \in \{e_x,\, e_y,\, e_z\}$, akkor Ω-nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\mathbf{\Theta}_{t_x} = \int_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\mathbf{\Theta}_{t_y} = \int_\Omega (x^2 + z^2)\rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\mathbf{\Theta}_{t_z} = \int_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$

Definíció. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test (tömeg)sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. (Ha ρ állandó, akkor a testet homogénnek nevezzük.) Ekkor az

$$m(\Omega) := \int_\Omega \rho$$

számot az Ω test tömegének nevezzük. Az Ω tömegközéppontjának koordinátái:

$$\overline{x} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega x \cdot \rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\overline{y} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega y \cdot \rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\overline{z} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega z \cdot \rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz.$$

1.2 Feladatok

1.2.1 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli testnek a *térfogatát*, amelyet az alábbi egyenletű felületek fognak közre:

$$z = x^2 + y^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2 - y^2.$$

Az egyenletekből kapunk két paraboloidot. Ezek metszetét kell *paraméterezni*. Válasszuk két részre a ponthalmazt. Nézzük meg az $y = 0$ síkban lévő pontokat:

$$z = x^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2.$$

Ez két ellentétes irányba néző parabola, amik metszete

$$x^2 - 1 = 2 - x^2 \quad \iff \quad x_1 := -\sqrt{\frac{3}{2}},\, x_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Azaz az alábbi térbeli pontokban metszi egymást a két paraboloid:

$$p_1 := \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right),\, p_2 := \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Szimmetriai okok miatt, be tudjuk vezetni a következő hengerkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Legyen

$$H_1 := [0,\, \sqrt{3/2}] \times [0,\, 2\pi] \times [1/2,\, 2 - r^2] \subset \mathbb{R}^3,$$

$$H_2 := [0,\, \sqrt{3/2}] \times [0,\, 2\pi] \times [r^2 - 1,\, 1/2] \subset \mathbb{R}^3,$$

Mivel ezek kompakt intervallumok, igaz lesz, hogy

$$\int_{\mathcal{H}} 1 = \int_{H_1} 1 \cdot |r|\, dr\, d\varphi\, dz + \int_{H_2} 1 \cdot |r|\, dr\, d\varphi\, dz,$$

ahol

$$\mathcal{H} := \Phi[H_1] \cup \Phi[H_2].$$

1.2.2 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli T testnek a *térfogatát, tömegét* és a z-tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \text{ és } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal.
Tehát a sűrűségfüggvény adott $\alpha > 0$ mellett

$$\rho(x,\, y,\, z) := \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \big((x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Alkalmazzuk az alábbi térbeli polárkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ r \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ r \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Legyen

$$H := [0,\, 1] \times [0,\, 2\pi] \times [0,\, \pi/4] \subset \mathbb{R}^3,$$

ekkor H kompakt intervallum és

$$\Phi(H) = T.$$

Térfogat:

$$\int_H 1 \cdot |-r^2 \sin\psi| \, dr \, d\varphi \, d\psi,$$

tömeg:

$$\int_H \rho(r\cos\varphi\sin\psi,\, r\sin\varphi\sin\psi,\, r\cos\psi) \cdot |-r^2\sin\psi| \, dr \, d\varphi \, d\psi,$$

tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_H (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\psi) \cdot \rho(r\cos\varphi\sin\psi,\, r\sin\varphi\sin\psi,\, r\cos\psi) \cdot |-r^2\sin\psi| \, dr \, d\varphi \, d\psi.$$

Számoljuk ki a tehetetlenségi nyomatékot. Először írjuk fel tetszőleges $(r,\, \varphi,\, \psi) \in H$ esetén az integrandust (α-val történő osztás után)

$$r^2\big(\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi\big) \cdot r\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi + \cos^2\psi} \cdot r^2\sin\psi =$$

$$r^5\sin^2\psi \cdot \sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi + 1 - \sin^2\psi} \cdot \sin\psi =$$

$$r^5\sin^3\psi \cdot \sqrt{\sin^2\psi\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1\big) + 1} =$$

$$r^5\sin^3\psi.$$

Tehát

$$\frac{\mathbf{\Theta}_{t_x}}{\alpha} = \int_H r^5\sin^3\psi \, dr \, d\varphi \, d\psi =$$

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\sin^3\psi \, dr \, d\varphi \, d\psi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6}\sin^3\psi\right]_{r=0}^{r=1} d\varphi \, d\psi = \frac{1}{6}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \sin^3\psi \, d\varphi \, d\psi =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{\pi/4} [\varphi\sin^3\psi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, d\psi = \frac{2\pi}{6}\int_0^{\pi/4} \sin^3\psi \, d\psi$$

2 Gyakorlat

2.1 Emlékeztető

Megjegyezzük, hogy ha a

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

függvény differenciálható, akkor a

$$\partial_k \Psi := (\partial_k \Psi_1,\, \partial_k \Psi_2,\, \partial_k \Psi_3) \quad (k \in \{1,\, 2\})$$

jelöléssel

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi & \partial_2 \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi_1 & \partial_2 \Psi_1 \\ \partial_1 \Psi_2 & \partial_2 \Psi_2 \\ \partial_1 \Psi_3 & \partial_2 \Psi_3 \end{bmatrix}.$$

Definíció. Valamely $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ halmazt *felületdarabnak* nevezünk, ha alkalmas $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt és Jordan-mérhető halmaz, ill.

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3,\ \Psi \in C^1,\ \mathrm{rang}(\Psi') = 2$$

függvény esetén

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_\Psi = \{\Psi(u,\, v) \in \mathbb{R}^3 : (u,\, v) \in K\}.$$

A Ψ leképezést az adott $\mathcal{F}$ felületdarab *paraméterezésének* nevezzük.

1. A fenti definícióban a Ψ leképezés folytonos differenciálhatóságán azt értjük, hogy van olyan $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, ill.

   $$\hat{\Psi} : U \to \mathbb{R}^3,\ \hat{\Psi} \in C^1$$

   függvény, amelyre $\hat{\Psi}_{|K} = \Psi$.

2. Ha a $\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3$ függvényre $\Psi \in C^1$, akkor a $\mathrm{rang}(\Psi') = 2$ feltétel azt jelenti, hogy a $\partial_1 \Psi$, $\partial_2 \Psi$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz

   $$\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi \neq 0.$$

   Ha a $\Psi : K \to \mathbb{R}^3$ leképezés valamely felületdarab paraméterezése, akkor az

   $$n_\Psi(u,\, v) := \partial_1 \Psi(u,\, v) \times \partial_2 \Psi(u,\, v) \quad \big((u,\, v) \in K\big)$$

   vektor az adott felület $\Psi(u,\, v)$ pontjához tartozó *érintősíkjának* normálvektora.

Definíció. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ felületdarab paraméterezése az

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3$$

függvény: $\mathcal{R}_\Psi = \mathcal{F}$. Ekkor az $\mathcal{F}$ felület *felszínén* az

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \int_K \|n_\Psi\|$$

valós számot értjük.

1. Ha $\mathcal{F}_1 := \mathcal{R}_{\Psi_1}$, ill. $\mathcal{F}_2 := \mathcal{R}_{\Psi_2}$ nullmértékű halmazban (pl. élekben) csatlakozó felületdarabok, akkor

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) = \int_{K_1} \|n_{\Psi_1}\| + \int_{K_2} \|n_{\Psi_2}\|.$$

2.2 Feladatok

2.2.1 Feladat

Legyen $0 < R \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\; z \geq 0$$

félgömbfelületnek az

$$x^2 + y^2 = Rx$$

egyenletű hengerfelület által kimetszett részének (Viviani-féle levél) a felszínét!

A $z \geq 0$ féltérben lévő félgömbfelület paraméterezése:

$$\Psi(u,\, v) := (u,\, v,\, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \quad \big((u,\, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2\big).$$

Ekkor $\Psi \in C^1$, $\operatorname{rang}(\Psi') = 2$, továbbá ($u^2 + v^2 < R$ esetén)

$$\partial_1 \Psi(u,\, v) = \left(1,\, 0,\, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right),$$

$$\partial_2 \Psi(u,\, v) = \left(1,\, 0,\, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right).$$

$$n_\Psi(u,\, v) = \begin{pmatrix} -\partial_1 g(u,\, v) \\ -\partial_2 g(u,\, v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Azaz

$$\|n_\Psi(u,\, v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1} =$$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}.$$

Ha most

$$\Phi(r,\,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \big(\varphi \in [0,\,\pi/2],\, r \in [0,\,R\cos(\varphi)]\big)$$

Akkor a felszínt így kapjuk meg:

$$2R \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{R\cos(\varphi)} \Big\| n_\Psi\big(\Phi(r,\,\varphi)\big)\Big\| \cdot r\, dr\, d\varphi.$$

2.2.2 Feladat

Határozzuk meg az alábbi feltételekkel megadott felület felszínét:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } x^2 + y^2 \le 2ax \quad (a > 0).$$

Legyen

$$f(x,\,y) := (x,\,y,\,\sqrt{x^2+y^2}) \quad \big((x,\,y) \in \Omega\big),$$

ahol $\Omega := \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2ax\}$, f egy Euler-Monge módon megadott paraméterezése a z-tengely irányába felfelé néző körkúp palástjának, *leszűkítve* annak a hengernek a belsejére, aminek alapját az Ω halmaz adja. Egyből írjuk is át az f függvényt a megfelelő polár-transzformációval

$$\Phi(r,\,\varphi) := (r\cos(\varphi),\, r\sin(\varphi)) \quad \big(\varphi \in [-\pi/2,\,\pi/2],\, r \in [0,\,2a\cos(\varphi)]\big).$$

A Φ transzformáció-függvény értelmezési tartományát a Thálész-tétel alkalmazásával könnyedén megkaptuk. Tehát ha $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ a feladatban definiált felület, akkor

$$\Psi(r,\,\varphi) := f \circ \Phi = (r\cos(\varphi),\, r\sin(\varphi),\, r) \quad \big((r,\,\varphi) \in \mathcal{D}_\Phi\big).$$

A felület kiszámításához szükségünk lesz a következőkre:

$$\partial_1\Psi(r,\,\varphi) = (\cos(\varphi),\, \sin(\varphi),\, 1) \quad \big((r,\,\varphi) \in \mathcal{D}_\Phi\big),$$

$$\partial_1\Psi(r,\,\varphi) = (-r\sin(\varphi),\, r\cos(\varphi),\, 0) \quad \big((r,\,\varphi) \in \mathcal{D}_\Phi\big),$$

$$n_\Psi(r,\,\varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 1 \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \quad \big((r,\,\varphi) \in \mathcal{D}_\Phi\big),$$

$$\|n_\Psi(r,\,\varphi)\| = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \quad \big((r,\,\varphi) \in \mathcal{D}_\Phi\big).$$

Tehát a keresett felszín

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{D}_\Phi} \|n_\Psi\| = \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{2a\cos(\varphi)} r\, dr\, d\varphi.$$

3 Gyakorlat

3.1 Emlékeztető

Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, Jordan-mérhető halmaz,

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3,\ \Psi \in C^1,\ \mathrm{rang}(\Psi') = 2,$$

továbbá tegyük fel, hogy $\Psi|_{\mathrm{int}(K)}$ injektív. Ekkor

1. ha $f : \Psi[K] \to \mathbb{R}$, $f \in C$, akkor az f függvény Ψ-re vonatkozó *elsőfajú felületi integráljának* (vagy *felszíni integráljának*) nevezzük az

   $$\int_\Psi f := \int_K (f \circ \Psi) \cdot \|n_\Psi\|$$

   valós számot,

2. ha $f : \Psi[K] \to \mathbb{R}^3$, $f \in C$, akkor az f függvény Ψ-re vonatkozó (*másodfajú*) *felületi integráljának* nevezzük az

   $$\int_\Psi f := \langle f \circ \Psi,\, n_\Psi \rangle$$

   valós számot.

4 Gyakorlat

4.1 Emlékeztető

Valamilyen kompakt $[a, b]$ intervallum $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ és $(\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n)$ $(1 \leq n \in N)$ nyílt halmaz esetén tekintsük az

$$f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvényt. Ha $x \in U$, akkor legyen $f_x : [a, b] \to \mathbb{R}$ az a függvény, amire

$$f_x(t) := f(x, t) \quad (t \in [a, b]).$$

Tegyük fel, hogy minden $x \in U$ esetén az f_x függvény Riemann-integrálható: $f_x \in R[a, b]$, legyen ekkor

$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\,dt := \int_a^b f_x \quad (x \in U).$$

Az így definiált $F : U \to \mathbb{R}$ függvényt az f által meghatározott *paraméteres integrálnak* nevezzük.

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_f = U \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vezessük be $\mathbb{R}^n$-en is és $\mathbb{R}^{n+1}$-en is a $\|.\| := \|.\|_\infty$ normát. Nem fog félreértést okozni, ha $\xi \in \mathbb{R}^n$ és $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén egyaránt a $\|\xi\|$, $\|\eta\|$ jelölést használjuk. Így pl. nyilvánvaló, hogy az

$$(x, t) \in U \times [a, b]$$

vektorra

$$\|(x, t)\| = \max\{\|x\|, |t|\}.$$

Továbbá, ha az

$$f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvény folytonos, akkor tetszőleges $x \in U$ mellett az $f_x : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos. Ui., ha $s \in [a, b]$ és $\xi := (x, s)$, akkor $f \in \mathcal{C}\{\xi\}$ miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amellyel

$$|f(\omega) - f(\xi)| < \varepsilon \quad (\omega \in U \times [a, b], \|\omega - \xi\| < \delta),$$

azaz

$$|f(y, t) - f(x, s)| < \varepsilon \quad ((y, t) \in U \times [a, b], \|(y, t) - (x, s)\| < \delta).$$

Ha itt $y := x$, akkor

$$\|(x, t) - (x, s)\| = \|(0, t - s)\| = |t - s|,$$

ezért

$$|f(x,\,t)-f(x,\,s)|=|f_x(t)-f_x(s)|<\varepsilon(t\in[a,\,b],\,|t-s|<\delta),$$

más szóval $f_x \in \mathcal{C}\{s\}$. Következésképpen $f_x \in C[a,\,b]$, így $f_x \in R[a,\,b]$, létezik tehát a fenti F paraméteres integrál.

Tétel. Tegyük fel, hogy adott az $[a,\,b]\,(a,\,b \in \mathbb{R},\,a<b)$ kompakt intervallum, $1 \le n \in \mathbb{N}$, és $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Ekkor tetszőleges folytonos

$$f : U \times [a,\,b] \to \mathbb{R}$$

függvény esetén az

$$F(x) := \int_a^b f(x,\,t)\,dt \quad (x \in U)$$

paraméteres integrálra az alábbiak igazak:

1. az F függvény folytonos;
2. ha valamilyen $i = 1,\,\ldots,\,n$ indexre létezik és folytonos a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény, akkor létezik a $\partial_i F$ parciális deriváltfüggvény is, és
$$\partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x,\,t)\,dt \quad (x \in U);$$
3. amennyiben az f folytonosan differenciálható, akkor F is.

4.2 Feladatok

4.2.1 Feladat

Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln(y+1) \quad (y \ge 0).$$

Legyen

$$f(y,\,x) := \begin{cases} y & x=0,\,y\in[0,\,+\infty) \\ 0 & x=\pi/2,\,y\in[0,\,+\infty) \\ \dfrac{\operatorname{arctg}(y\cdot\operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} & ((y,\,x)\in[0,\,+\infty)\times(0,\,\pi/2)). \end{cases}$$

Ekkor $f \in C$, ezért a paraméteres integrál is folytonos. Mivel

$$\partial_1 f(y,\,x) := \begin{cases} 0 & x=\pi/2,\,y\in[0,\,+\infty) \\ \dfrac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2(x)} & ((y,\,x)\in[0,\,+\infty)\times[0,\,\pi/2)) \end{cases}$$

$\partial_1 f \in C$, tehát a paraméteres integrál deriválható.

4.3 Feladat

Indokoljuk meg, hogy tetszőleges $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$F(\alpha) := \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \in \mathbb{R},$$

majd mutassuk meg, hogy fennáll az

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} \quad (0 < \alpha \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

Legyen

$$f(\alpha, x) := \begin{cases} \alpha & \alpha \in (0, +\infty),\ x = 0; \\ \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \alpha \in (0, +\infty),\ x \in (0, 1]; \end{cases}$$

akkor $f \in C$, hiszen (Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával)

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{1+\alpha^2 x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \alpha}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \alpha.$$

Tehát $F \in C$ is teljesül. Mivel

$$\partial_1 f(\alpha, x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x} \quad \big((\alpha, x) \in (0, +\infty) \times [0, 1]\big),$$

és $\partial_1 f \in C$, ezért $F \in D$.

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^1 \partial_\alpha \left(\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \right) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2 x}\, dx = \left[\frac{\ln(1+\alpha^2 x)}{\alpha^2} \right]_0^1 =$$

$$\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Tehát

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Számoljuk ki F' határozatlan integrálját:

$$\int F' = \int \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} - \int \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Azaz, mivel

$$F \in \int F',$$

ezért létezik egy $c \in \mathbb{R}$ konstans, amivel

$$F(\alpha) = 2\mathrm{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} + c.$$

Számoljuk ki $F(1)$-et:

$$F(1) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

Ebből

$$F(1) = 2\mathrm{arctg}(1) - \ln(2) = \frac{\pi}{2} - \ln(2),$$

ahonnan $c = 0$, tehát

$$F(\alpha) = 2\mathrm{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}$$

következik.

5 Gyakorlat

5.1 Emlékeztető

Legyenek n, $m \in \mathbb{N}$ természetes számok, ahol $2 \le n$ és $1 \le m < n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m,$$

és ezt következésképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

akkor f-et olyan kétváltozós vetkorfüggvényként tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékekben az argumentum első változójára $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbb{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelmemben valamilyen $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ zérushelye az f-nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a-nak olyan $K(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$ környezete, a b-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbb{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Nyilván $\varphi(a) = b$.

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Adott $n, m \in \mathbb{N}$, $2 \le n$, valamint $1 \le m < n$ mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$ és az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \ \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

5.2 Feladatok

5.3 Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7$$

egyenletből y kifejezhető x implicitfüggvényeként a 2 egy környezetében, majd határozzuk meg így adódó implicitfüggvénynek deriváltját az $x = 2$ helyen, továbbá írjuk fel az érintőegyenesek egyenleteit!

Legyen

$$f(x, y) := x^2 + 2xy - y^2 - 7\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor

$$f(2, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \{1, 3\}.$$

Mivel $f \in C^1$, és

$$\partial_2 f(2, 1) = 2 \neq 0,$$
$$\partial_2 f(2, 3) = -2 \neq 0,$$

így teljesülnek az implicitfüggvényre vonatkozó tétel feltételei. Legyen

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy - y^2 = 7\}.$$

Így valóban léteznek olyan $U =: K(2)$, $V_1 := K(1)$, $V_2 := K(3)$ környezetek, hogy $\varphi_1 : U \to V_1$ és $\varphi_2 : U \to V_2$ folytonosan differenciálható függvények grafikonjai rendre megegyeznek a H halmaz $(2, 1)$, $(2, 3)$ pontban vett környezetével.

$$f(x, \varphi_i(x)) = 0 \quad (x \in U, i = 1, 2).$$

Mivel

$$\partial_1 f(2, 1) = 6, \text{ ill. } \partial_1 f(2, 3) = 10,$$

ezért

$$\varphi_1(2) = 1, \text{ill. a } \varphi_2(2) = 3$$

egyenlőségek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\varphi_1'(2) = -3,\ \varphi_2(2) = 5.$$

A megfelelő érintők egyenlete:

$$y = \varphi_1(2) + \varphi_1'(2)(x - 2) = 7 - 3x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$y = \varphi_2(2) + \varphi_2'(2)(x - 2) = 5x - 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6 Gyakorlat

6.1 Emlékeztető

6.1.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

> határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvény, amelyre igazak a következő állítások:
>
> 1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
> 2. $\varphi \in D$;
> 3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1., 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így ”kibővített” feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni.

6.1.2 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az I, $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \to \mathbb{R},\ h : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad \big((x, y) \in I \times J\big).$$

A $\varphi \in I \to J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

(*Szeparábilis* (vagy más szóval *szétválasztható változójú*) differenciálegyenlet.) Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi.$$

Tétel. Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra (ha az létezik)

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \to \mathbb{R}$ is, és az $1/h : J \to \mathbb{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények, így léteznek a

$$G \in \int g,\ H \in \int \frac{1}{h},$$

$$G : I \to \mathbb{R},\ H : J \to \mathbb{R}$$

primitív függvényeik. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a $\mathcal{D}_\varphi$ is nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen H szigorúan monoton, amiért invertálható. A H^{-1} inverzzel

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz $H(\xi) = G(\tau) + c$, ill.

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}\big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha G, H helyett más primitív függvényeket választunk, akkor ugyanezt az egyenlőséget kapjuk.

Elegendő már csak azt belátni, hogy létezik megoldás. Ld. előadás (implicitfüggvény-tétel megfelelő alkalmazása). ■

6.1.3 Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen $n := 1$, és az I, $J \subset$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \to \mathbb{R} \text{ és } h : I \times J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad ((x, y) \in I \times J).$$

Ekkor a fenti minden φ megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott *d.e. egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \to \mathbb{R}$$

függvénnyel

$$\operatorname{grad} G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g, h).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a φ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

Tétel. Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Valóban, $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt a feltételezett φ megoldásra

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \langle \operatorname{grad} G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle =$$

$$g(x,\, \varphi(x)) + h(x,\, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ halmaz nyílt intervallum, ezért az F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amellyel

$$G(x,\, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(\tau) = \xi$, ezért

$$c = G(\tau,\, \xi).$$

A G-ről feltehetjük, hogy $G(\tau,\, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó kezdetiérték-probléma φ megoldása eleget tesz a

$$G(x,\, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó kezdetiérték-probléma minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau,\, \xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau,\, \xi) = h(\tau,\, \xi) \neq 0,$$

ezért G-re (a $(\tau,\, \xi)$ helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \to J$$

(implicit)függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi,\; G(x,\, \psi(x)) = 0\, (x \in \mathcal{D}_\psi),\; \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x,\, \psi(x))}{\partial_2 G(x,\, \psi(x))} = -\frac{g(x,\, \psi(x))}{h(x,\, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

6.1.4 Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most $n =: 1$ és az $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a

$$g,\, h : I \to \mathbb{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad ((x,\, y) \in I \times \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$ mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot \big(\theta(t) - \psi(t)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben $h \equiv 0$:

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

Tétel. Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Legyen a

$$G : I \to \mathbb{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és $G' = g$ (a g-re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \to \mathbb{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \to \mathbb{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\left(\frac{\chi}{\varphi_0}\right)'(t) = \frac{\chi'(t)\cdot\varphi_0(t) - \chi(t)\cdot\varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} =$$

$$\frac{g(t)\cdot\chi(t)\cdot\varphi_0(t) - \chi(t)\cdot g(t)\cdot\varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0,$$

azaz (lévén a $\mathcal{D}_\chi$ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \to \mathbb{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c\cdot\varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor egy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c\cdot\varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \to \mathbb{R}$$

függvény, hogy az $m\cdot\varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m\cdot\varphi_0)' = g\cdot m\cdot\varphi_0 + h,$$

azaz

$$m'\cdot\varphi_0 + m\cdot\varphi_0' = m'\cdot\varphi_0 + m\cdot g\cdot\varphi_0 = g\cdot m\cdot\varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az m-re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \to \mathbb{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármelyik m primitív függvényét is véve, az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \to \mathbb{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol m egy tetszőleges primitív függvénye a h/φ_0 függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbb{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ezt megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$\varphi'(t) = m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) =$$

$$\frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J).$$

Speciálisan az "egész" I intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbb{R},\, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik φ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c_{|_J}}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \to \mathbb{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden φ, ψ megoldására $\varphi = \psi_{c_{|_{\mathcal{D}_\varphi}}}$ és $\psi = \psi_{c_{|_{\mathcal{D}_\psi}}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

■