Aszimptotika

Dr. Ásványi Tibor jegyzetéből

October 10, 2024

Tartalom

1 Függvények aszimptotikus viselkedése

E fejezet célja, hogy tisztázza a programok hatékonyságának nagyságrendjeivel kapcsolatok alapvető fogalmakat, és az ezekhez kepcsolódó függvényosztályok legfontosabb tulajdonságait.

1. Definíció. *Valamely $P(n)$ tulajdonság elég nagy n-ekre pontosan akkor teljesül, ha*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \textit{hogy}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N : P(n)\ \textit{igaz}.$$

2. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény AP (aszimptotikusan pozitív), ha elég nagy n-ekre $f(n) > 0$.*

Azaz egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény AP pontosan akkor, ha

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : f(n) > 0.$$

Egy tetszőleges helyes program futási ideje és tárigénye is nyilvánvalóan, tetszőleges megfelelő mértékegységben (másodperc, perc Mbyte stb.) mérve pozitív számérték. Amikor (alsó és / vagy felső) becsléseket végzünk a futási időre vagy a tárigényre, legtöbbször az input adatszerkezetek méretének függvényében végezzük a becsléseket. Így a becsléseket leíró függvények természetesen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ típusúak. Megkövetelhetnénk, hogy $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$ típusúak legyenek, de annak érdekében, hogy képleteink minél egyszerűbbek legyenek, általában megelégszünk azzal, hogy a becsléseket leíró függvények aszimptotikusan pozitívak (AP) legyenek.
Legyen

$$\mathrm{P} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f \text{ aszimptotikusan pozitív függvény}\}.$$

3. Definíció. Legyen $g \in \mathrm{P}$. Ekkor legyen $O(g)$ egy függvényhalmaz ami olyan $f \in \mathrm{P}$ függvényekből áll, amiket elég nagy n helyettesítési értékekre, megfelelő $d \in \mathbb{R}^+$ szorzóval felülről becsül a g függvény, azaz

$$O(g) := \{f \in \mathrm{P} : \exists d \in \mathbb{R}^+,\ \text{hogy elég nagy } n\text{-ekre } d \cdot g(n) \geq f(n)\}.$$

4. Definíció. Legyen $g \in \mathrm{P}$. Ekkor legyen $\Omega(g)$ egy függvényhalmaz ami olyan $f \in \mathrm{P}$ függvényekből áll, amiket elég nagy n helyettesítési értékekre, megfelelő $d \in \mathbb{R}^+$ szorzóval alulról becsül a g függvény, azaz

$$\Omega(g) := \{f \in \mathrm{P} : \exists d \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy elég nagy } n\text{-ekre } d \cdot g(n) \leq f(n)\}.$$

5. Definíció. Legyen $g \in \mathrm{P}$. Ekkor legyen

$$\Theta(g) := O(g) \cap \Omega(g).$$

Következmény. Egy $g \in P$ esetén a $\Theta(g)$ függvényhalmaz olyan $f \in P$ függvényekből áll, amiket elég nagy n helyettesítési értékekre, megfelelő pozitív konstans szorzókkal alulról és felülről is becsül a g függvény

$$\Theta(g) = \{f \in P : \exists c, d > 0, \text{ hogy elég nagy } n\text{-ekre} c \cdot g(n) \leq f(n) \leq d \cdot g(n).\}$$