# Analízis III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

*A jegyzet egy az egyben Dr. Simon Péter analízis 3 segédanyagából lett összegyűjtve. Elsősorban magamnak írtam, hogy elősegítse a felkészültést a vizsgára.*

## Tartalom

# 1 Metrikus-, normált-, euklideszi-terek

**Teljes vizsgacím:** Metrikus-, normált-, euklideszi-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz. Torlódási pont, zárt halmaz. Nyílt (zárt) halmazok uniója, metszete. A $(\mathbb{K}^n,\, \varrho_p)$, $(\mathbb{K}^n,\, ||.||_p)$, $(\mathbb{K}^n,\, \langle .\rangle)$, $(C[a,\, b],\, \varrho_p)$, $(C[a,\, b],\, ||.||_p)$, $(0 < n \in \mathbb{N},\, 1 \le p \le +\infty)$ terek.

## 1.1 Metrikus terek

Konkrét példák sokasága vezet el a távolság-fogalom absztakciójához: legyen az $X \neq \emptyset$ egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy a

$$\varrho : X^2 \to [0,\, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. minden $x \in X$ esetén $\varrho(x,\, x) = 0$;
2. ha $x,\, y \in X$ és $\varrho(x,\, y) = 0$, akkor $x = y$;
3. bármely $x,\, y \in X$ választással $\varrho(x,\, y) = \varrho(y,\, x)$;
4. tetszőleges $x,\, y,\, z \in X$ elemekkel $\varrho(x,\, y) \le \varrho(x,\, z) + \varrho(y,\, z)$.

Azt mondjuk, hogy ekkor a $\varrho$ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval *metrika*). Ha $x,\, y \in X$, akkor $\varrho(x,\, y)$ az $x,\, y$ elemek *távolsága*. Az $(X,\, \varrho)$ rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük.

Az $X$-beli elemek távolsága tehát nemnegatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága *nulla* (ld. 1.), továbbá két különböző elem távolsága mindig *pozitív* (ld. 2.). A távolság *szimmetrikus*, azaz két elem távolsága független az illető elemek sorrendjétől (ld. 3.). A 4. tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni.

Mutassuk meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből annak az alábbi változata is következik:

$$|\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z)| \le \varrho(x,\, z) \quad (x,\, y,\, z \in X).$$

Ugyanis a 4. axióma miatt

$$\varrho(x,\, z) \le \varrho(x,\, y) + \varrho(y,\, z),$$

tehát

$$\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z) \le \varrho(x,\, y).$$

Ha itt $x$-et és az $y$-t felcseréljük, akkor a

$$-\Big(\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z)\Big) = \varrho(y,\, z) - \varrho(x,\, z) \le \varrho(y,\, x) = \varrho(x,\, y)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utóbbi két becslés egybevetésével kapjuk a jelzett egyenlőtlenséget.

Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható

$$\varrho : X^2 \to [0,\, +\infty)$$

távolságfüggvény, ui., pl. a

$$\varrho(x,\, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \qquad \big((x,\, y) \in X^2\big)$$

leképezés nyilván eleget tesz a fenti, a metrikát meghatározó 1.-4. axiómáknak. Az így definiált $(X,\, \varrho)$ teret *diszkrét* jelzővel illetjük.

Megmutatható, hogy az 1.-3. axiómák nem függetlenek egymástól, nevezetesen: ha egy

$$\varrho : X^2 \to \mathbb{R}$$

függvény rendelkezik az 1., 2., 4., tulajdonságokkal, akkor a $\varrho$ metrika.

### 1.1.1 Példák

Soroljunk fel néhány példát amelyek nem csupán az analízisben játszanak fontos szerepet.

1. Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$, és

   $$x = (x_1,\, \ldots,\, x_n),\, y = (y_1,\, \ldots,\, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

   esetén definiáljuk az $(x,\, y)$-ban a

   $$\varrho_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0,\, +\infty)$$

   függvény helyettesítési értékét a következőképpen:

   $$\varrho_p(x,\, y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p & (p \leq 1) \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

   Terjesszük ki a $\varrho_p$ értelmezését $p = \infty := +\infty$-re is az alábbiak szerint:

   $$\varrho_\infty(x,\, y) := \max\{|x_i - y_i| : i = 1,\, \ldots,\, n\}.$$

   Belátható, hogy $(\mathbb{K}^n,\, \varrho_p)$ metrikus tér. A későbbiekben a $\varrho_\infty$ metrika mellett a $\mathbb{K}^n$-beli vektorok távolságának a mérésére többnyire a

   $$\varrho_2(x,\, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \quad (x,\, y \in \mathbb{K}^n),$$

   $$\varrho_1(x,\, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad (x,\, y \in \mathbb{K}^n),$$

   metrikákat fogjuk használni. Speciálisan az $n = 1$ esetben

   $$\varrho_p(x,\, y) = |x - y| \quad (x,\, y \in \mathbb{K},\, p \geq 1).$$

2. Tekintsük egy $0 < p < +\infty$ mellett az

$$\ell_p := \left\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\right\}$$

halmazokat. Legyen továbbá $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_p$ esetén

$$\varrho_p(x, y) := \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p & (0 < p \leq 1) \\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy az így definiált $\varrho_p$ függvény is metrika, azaz $(\ell_p, \varrho_p)$ metrikus tér. A $p = \infty := +\infty$-re való ”kiterjeszést” a következőképpen kapjuk:

$$\ell_\infty := \left\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty\right\}$$

(más szóval az $\ell_\infty$ szimbólum a korlátos számsorozatok halmazát jelöli), valamint az $\ell_\infty$-beli $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ elemekre

$$\varrho_\infty(x, y) := \sup\left\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

A $\varrho_\infty$ függvény is metrika, tehát $(\ell_\infty, \varrho_\infty)$ is metrikus tér.

3. Valamilyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum esetén $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ esetén jelöljük $C[a, b]$-vel az $[a, b]$-n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $0 < p \leq +\infty$, akkor tekintsük az 1., 2. példák alábbi ”folytonos” változatait: ha $f, g \in C[a, b]$, akkor

$$\varrho_p(f, g) := \begin{cases} \int\limits_a^b |f - g|^p & (0 < p \leq 1) \\ \left(\int\limits_a^b |f - g|^p\right)^{1/p} & (1 < p < +\infty) \\ \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} & (p = \infty := +\infty). \end{cases}$$

Az előbbi példákhoz hasonlóan látható be, hogy $(C[a, b], \varrho_p)$ is metrikus tér.

Azt mondjuk, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és egy $X^2$-en értelmezett

$$\varrho, \sigma : X^2 \to [0, +\infty)$$

metrikák esetén a $\varrho$ és a $\sigma$ *ekvivalens*, ha alkalmas $c, C$ pozitív számokkal

$$c \cdot \varrho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C \cdot \varrho(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Könnyű belátni, hogy ha $\mathcal{M}$ jelöli az előbb említett metrikák halmazát, és a $\varrho$, $\sigma \in \mathcal{M}$ elemekre $\varrho \sim \sigma$ azt jelenti, hogy a $\varrho$ és a $\sigma$ ekvivalens, akkor az így értelmezett ($\mathcal{M}^2$-beli) $\sim$ reláció ekvivalencia.

Pl. a fenti $(\mathbb{K}^n,\ \varrho_p)$ metrikus terekre a $\varrho_p$ metrikák közül $p \geq 1$ esetén bármelyik kettő ekvivalens. A továbbiakban az

$$X := \mathbb{K}^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

esetben a $\varrho_2$, $\varrho_1$, $\varrho_\infty$ metrikák bármelyikét fogjuk használni.