Analízis alkalmazásai vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1 Vizsgakérdés **3**
1.1 Implicitfüggvény-tétel . . . 5
1.2 Inverzfüggvény-tétel . . . 6

2 Vizsgakérdés **7**
2.1 Elsőrendű szükséges feltétel . . . 8
2.2 Másodrendű elégséges feltétel . . . 11

3 Vizsgakérdés **12**
3.1 Közönséges differenciálegyenletek . . . 12
3.2 Teljes megoldás . . . 13
3.3 Szeparábilis differenciálegyenlet . . . 13
3.4 Rakéta emelkedési ideje . . . 16
3.5 Egzakt differenciálegyenlet . . . 17

4 Vizsgakérdés **19**
4.1 Lineáris differenciálegyenlet . . . 19
4.2 Radioaktív bomlás . . . 23

5 Vizsgakérdés **24**
5.1 Lipschitz-feltétel . . . 24
5.2 Egzisztenciatétel . . . 25

6 Vizsgakérdés **29**
6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszer . . . 29

7 Vizsgakérdés **31**
7.1 Állandók variálásának módszere 31
7.2 Állandó együtthatós diagonalizálható eset 31
7.3 Tetszőleges állandó együtthatós mátrix 33

8 Vizsgakérdés **35**
8.1 "Új" feladat megfogalmazása 35

1 Vizsgakérdés

Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).

Legyenek $n,\, m \in \mathbf{N}$ természetes számok, ahol $2 \leq n$ és $1 \leq m \leq n$. Ha

$$\xi = (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\; y := (\xi_{n-m+1},\, \ldots,\, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x,\, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1,\, \ldots,\, f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m,$$

akkor az f-et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x,\, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a,\, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f-nek:

$$f(a,\, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a-nak egy olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a b-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x,\, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x,\, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x,\, y) = 0.$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az $(a,\, b)$ körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1,\, \ldots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \ldots,\, y_m) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1,\, \ldots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \ldots,\, y_m) & = & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1,\, \ldots,\, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1,\, \ldots,\, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

1.1 Implicitfüggvény-tétel

Tétel. *Adott* $n, m \in \mathbf{N}$, $2 \leq n$, *valamint* $1 \leq m < n$ *mellett az*

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, *és az* $(a, b) \in int\mathcal{D}_f$ *helyen*

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ *környezetekkel létezik az* f *által az* (a, b) *körül meghatározott*

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h_{|_I})^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h_{|_I})^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többáltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

függvény és az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a-ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a-beli *lokális inverzének* nevezzük.

1.2 Inverzfüggvény-tétel

Tétel. *Legyen* $1 \leq n \in \mathbf{N}$, *és* $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. *Tegyük fel, hogy egy* $a \in int\mathcal{D}_f$ *pontban* $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. *Ekkor alkalmas* $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ *környezettel az* $f_{|_{K(a)}}$ *leszűkítés invertálható, a* $g := (f_{|_{K(a)}})^{-1}$ *lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és*

$$h'(x) = \big(f'(h(x))\big)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

2 Vizsgakérdés

Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).

Legyen $1 \leq n$, $m \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, és

$$f : U \to \mathbf{R},\ g = (g_1,\ \ldots,\ g_m) : U \to \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a c-ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az $f(c)$-re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá c-re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre nézve, akkor egy alkalmas $K(c)$ környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

2.1 Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n,\, m \in \mathbf{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, hogy

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő λg függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda,\, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó f függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is.

Bizonyítás. A rangfeltétel szerint a $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrixnak van olyan $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ részmátrixa, amelyre $\det A \neq 0$. Feltehető, hogy az A-t a $g'(c)$ mátrix utolsó m oszlopa határozza meg, amikor is az $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ felbontást úgy képzeljük el, hogy a

$$\xi = (\xi_1,\, \ldots, q, \xi_n) = (x,\, y) \in \mathbf{R}^n$$

vektorokra

$$x := (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\, y := (\xi_{n-m+1},\, \ldots,\, \xi_n) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően $c = (a,\, b)$. Ekkor tehát

$$\det \partial_2 g(a,\, b) = \det A \neq 0.$$

Mivel $g(a,\, b) = 0$, ezért alkalmazható az implicitfüggvény tétel: alkalmas

$$K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m},\, K(b) \subset \mathbf{R}^m$$

környezettel létezik a g függvény által az $(a,\, b)$ körül meghatározott

$$h : K(a) \to K(b)$$

$h \in C^1$ implicitfüggvény:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{g = 0\} = \{(x,\, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -\big(\partial_2 g(x,\, h(x))\big)^{-1} \cdot \partial_1 g(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas $K(c) \subset U$ környezettel (pl.)

$$f(\xi) \leq f(c) \quad \big(\xi = (x,\, y) \in K(c) \cap \{g = 0\}\big).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvényre $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}$ és

$$\Phi(x) \leq f(c) = \Phi(a) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Más szóval a Φ függvénynek az a-ban lokális maximuma van. A Φ differenciálható, ezért

$$\Phi'(a) = \operatorname{grad} \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvénnyel $\Phi = f \circ \varphi$ és $\varphi \in D$, valamint I-vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$-beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times(n-m)} \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Következésképpen

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = f'(a,\, h(a)) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$f'(c) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = \partial_1 f(c) + \partial_2 f(c) \cdot h'(a) =$$

$$\partial_1 f(c) - \partial_2 f(c) \cdot \big(\partial_2 f(c)\big)^{-1} \cdot \partial_1 g(c) = \partial_1 f(c) + \lambda \cdot \partial_1 g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_2 f(c) \cdot \big(\partial_2 g(c)\big)^{-1} \in \mathbf{R}^m.$$

Tehát (a ∂_1 értelmezéséből)

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-m). \tag{1}$$

A λ vektor definíciójából "átszorzással" azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 f(c) + \lambda \cdot g(c) = 0,$$

azaz (a ∂_2 definíciójából)

$$\partial_j f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_j g_l(c) = 0 \quad (j = n-m+1, \ldots, n). \tag{2}$$

A (1), (2) formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

más szóval

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0 =$$

$$\Big(\partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_1 g_l(c), \ldots, \partial_n f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_n g_l(c)\Big) = 0.$$

■

Legyen adott a

$$Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kvadratikus alak, a $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbf{R}^n : Bx = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m < n$, és a B mátrix rangja m. Ekkor azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus alak a B-re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x) > 0$ $(0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;

2. *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x) > 0$ $(0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;

3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0$ $(x \in \mathcal{A}_B)$;

4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0$ $(x \in \mathcal{A}_B)$.

2.2 Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $1 \leq n, m \in \mathbf{N}, m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja m, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. A Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Idézzük fel, hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x, x \rangle \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

3 Vizsgakérdés

A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.

3.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

> határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:
>
> 1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
> 2. $\varphi \in D$;
> 3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik φ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő f függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala.*

3.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges φ, ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$ egy (τ-t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor $\mathcal{M}$ a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \to \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M},\, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x,\, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi_{|\mathcal{D}_\varphi}$.

A Φ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

3.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az I, $J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \to \mathbf{R},\, h : J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x,\, y) \in I \times J).$$

A $\varphi \in I \to J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

Tétel. Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \to \mathbf{R}$ is, és az $1/h : J \to \mathbf{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \to \mathbf{R},\ H : J \to \mathbf{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a $\mathcal{D}_\varphi$ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen a H

függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}\big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek $\tilde{G}$, $\tilde{H}$), akkor alkalmas α, $\beta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha,\ \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi$, $\mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x,\, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I,\, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \to \mathbf{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x,\, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I,\, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x,\, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I,\, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az F függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau,\, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau,\, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az F-re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I$, $K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a $(\tau,\, \xi)$ körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \to K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t,\, \varphi(t))}{\partial_2 F(t,\, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

3.4 Rakéta emelkedési ideje

BEFEJEZNI

3.5 Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen $n := 1$, és az $I,\, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \to \mathbf{R} \text{ és } h : I \times J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x,\, y) := -\frac{g(x,\, y)}{h(x,\, y)} \quad \big((x,\, y) \in I \times J\big).$$

Ekkor a fenti minden φ megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\, \varphi(x))}{h(x,\, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott d.e. *egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x,\, y) \mapsto \big(g(x,\, y),\, h(x,\, y)\big) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \to \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$\operatorname{grad} G = (\partial_1 G,\, \partial_2 G) = (g,\, h).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a φ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

Tétel. Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Valóban, $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt a feltételezett φ megoldásra

$$g(x,\, \varphi(x)) + h(x,\, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x,\, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \big\langle \operatorname{grad} G(x,\, \varphi(x)),\, (1,\, \varphi'(x)) \big\rangle =$$

$$g(x,\, \varphi(x)) + h(x,\, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ halmaz nyílt intervallum, ezért az F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x,\, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(\tau) = \xi$, ezért

$$c = G(\tau,\, \xi).$$

A G-ről feltehetjük, hogy $G(\tau,\, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó k.é.p. φ megoldása eleget tesz a

$$G(x,\, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó k.é.p. minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau,\, \xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau,\, \xi) = h(\tau,\, \xi) \neq 0,$$

ezért a G-re (a $(\tau,\, \xi)$ helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \to J$$

(implicit)függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi,\ G(x,\, \psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi),\ \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x,\, \psi(x))}{\partial_2 G(x,\, \psi(x))} = -\frac{g(x,\, \psi(x))}{h(x,\, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

4 Vizsgakérdés

Lineáris differenciálegyenlet. Az állandók variálásának módszere. A radioaktív bomlás felezési idejének meghatározása.

4.1 Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most $n =: 1$ és az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a

$$g,\, h : I \to \mathbf{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad ((x,\, y) \in I \times \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$ mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot \big(\theta(t) - \psi(t)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben $h \equiv 0$:

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

Tétel. Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Legyen a

$$G : I \to \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és $G' = g$ (a g-re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \to \mathbf{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \to \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\left(\frac{\chi}{\varphi_0}\right)'(t) = \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} =$$

$$\frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0,$$

azaz (lévén a $\mathcal{D}_\chi$ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \to \mathbf{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \to \mathbf{R}$$

függvény, hogy az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az m-re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \to \mathbf{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármelyik m primitív függvényét is véve, az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \to \mathbf{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol m egy tetszőleges primitív függvénye a h/φ_0 függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbf{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ezt megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$\varphi'(t) = m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) =$$

$$\frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J).$$

Speciálisan az "egész" I intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbf{R},\, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik φ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c_{|J}}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \to \mathbf{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden φ, ψ megoldására $\varphi = \psi_{c_{|\mathcal{D}_\varphi}}$ és $\psi = \psi_{c_{|\mathcal{D}_\psi}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

■

4.2 Radioaktív bomlás

BEFEJEZNI

5 Vizsgakérdés

Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása). A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel (bizonyítás nélkül).

5.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;
4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciatétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett az $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt. Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

5.2 Egzisztenciatétel

Tétel (Picard-Lindelöf). *Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.*

Bizonyítás (vázlat). Legyenek a $\delta_1,\, \delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to \Omega : \psi \in C\}.$$

Az $\mathcal{F}$ halmaz a

$$\rho(\phi,\, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi,\, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha $\mathcal{X}$ jelöli a

$$g : I_* \to \mathbf{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \mathbf{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F},\, x \in I_*).$$

Tehát az f függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" $f_1,\, \ldots,\, f_n$ szimbólumokkal jelölve, a ψ, f függvények (és egyúttal az f_i-k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t,\, \psi(t)) \in \mathbf{R} \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

függvények folytonosak. következőképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

integrálóknak, és így a

$$\xi + \int_{\tau}^{x} f(t,\, \psi(t))\, dt := (\xi_1 + d_1,\, \ldots,\, \xi_n + d_n) \in \mathbf{R}^n$$

"integrálvektoroknak". Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x,\, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_{\tau}^{x} f(t,\, \psi(t))\, dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_\mu := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - \xi\|_\infty \le \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x,\, y)\|_\infty : x \in I_*,\, y \in K_\mu\}$$

(ami meg az f folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_\mu$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max\left\{\left|\int_{\tau}^{x} f_i(t,\, \psi(t))\, dt\right| : i = 1,\, \ldots,\, n\right\} \le \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az $\mathcal{F}$ definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to K_\mu : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$-val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1,\, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \le \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is $\mathcal{F}$-beli. (Ha a kiindulásul választott $\delta_1,\, \delta_2$-re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a $\delta_1,\, \delta_2$ helyébe olyan "új" $0 < \tilde{\delta}_1,\, \tilde{\delta}_2$-t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1,\, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2]$$

és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$

legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I_*} := [\tau - \tilde{\delta_1},\, \tau + \tilde{\delta_2}]$ intervallummal az "új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi,\, \psi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\rho(T\psi,\, T\phi) = \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} =$$

$$\max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))\, dt)\right| : i = 1,\, \ldots,\, n\right\} : x \in I_*\right\} \leq$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))| : i = 1,\, \ldots,\, n\}\, dt\right| : x \in I_*\right\} =$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty\, dt\right| : x \in I_*\right\}.$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t,\, y) - f(t,\, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q),$$

speciálisan

$$\|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty \leq$$

$$L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty \leq L_Q \cdot \rho(\psi,\, \phi) \quad (t \in I_*).$$

Ezért

$$\rho(T\psi,\, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi,\, \phi).$$

Tehát a T leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1,\, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2-t, (ezt - az "eddigi" I_*-ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre

$$T\phi = \phi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad \big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\big).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t,\, \varphi(t))\, dt \quad \big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\big).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x,\, \varphi(x)) \quad \big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\big).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A fenti Picard Lindelöf-egzisztenciatételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja.

Tétel. *Az előző tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg, azaz bármely* φ, ψ *megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

6 Vizsgakérdés

A lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata: homogén, inhomogén rendszerek. A megoldáshalmaz szerkezete.

6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Valamilyen $1 \leq n \in N$ és egy nyílt $I \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \to \mathbf{R} \quad (i,\, k = 1,\, \ldots,\, n),\, b = (b_1,\, \ldots,\, b_n) : I \to \mathbf{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := \big(a_{ik}(x)\big)_{i,\, k=1}^{n} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

mátrixfüggvényt. Ha

$$f(x,\, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad ((x,\, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

akkor az f függvény, mint jobb oldal által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ($n > 1$ esetén *lineáris differenciálegyenlet-rendszernek*) nevezzük.

Legyenek a fentieken túl adottak még a $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{K}^n$ értékek, és vizsgáljuk a $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p.-t. Ha $I_* \subset I$, $\tau \in \operatorname{int} I_*$, kompakt intervallum, akkor

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} \in \mathbf{R} \quad (i,\, k = 1,\, \ldots,\, n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} \in \mathbf{R}.$$

Következésképpen

$$\|f(x,\, y) - f(x,\, z)\|_\infty = \|A(x) \cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y - z\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (x \in I_*,\, y,\, z \in \mathbf{K}^n).$$

Továbbá a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\| : x \in I_*\}(\in \mathbf{R})$$

jelöléssel

$$\|f(x, y)\|_\infty = \|A(x) \cdot y + b(x)\|_\infty \leq \|A(x) \cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq q \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I_*, \, y \in \mathbf{K}^n),$$

ezért minden k.é.p. teljes megoldása az I intervallumon van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó d.e. *homogén*, ha $b \equiv 0$, *inhomogén*, ha létezik $x \in I$, hogy $b(x) \neq 0$. Legyenek

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D, \, \psi' = A \cdot \psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D, \, \psi' = A \cdot \psi + b\}.$$

A lineáris d.e.-ek "alaptétele" a következő

Tétel. A bevezetésben mondott feltételek mellett

1. az $\mathcal{M}_h$ halmaz n dimenziós lineáris tér a $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\psi \in \mathcal{M}$ esetén
$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$
3. ha a $\phi_k = (\phi_{k1}, \ldots, \phi_{kn})$ $(k = 1, \ldots, n)$ függvények bázist alkotnak az $\mathcal{M}_h$-ban, akkor léteznek olyan $g_k : I \to \mathbf{K}$ $(k = 1, \ldots, n)$ differenciálható függvények, amelyekkel
$$\psi := \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

7 Vizsgakérdés

Alaprendszer, alapmátrix. Az állandók variálásának a módszere. Alapmátrix előállítása állandó együtthatós diagonalizálható mátrix esetén. Az $n = 2$ eset vizsgálata tetszőlege, állandó együtthatós mátrixra.

7.1 Állandók variálásának módszere

BEFEJEZNI.

7.2 Állandó együtthatós diagonalizálható eset

Legyen most

$$f(x, y) := A \cdot y + b(x) \quad \big((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n\big),$$

ahol $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum mellett

$$A \in \mathbf{R}^{n\times n},\ b : I \to \mathbf{R}^n,\ b \in C.$$

Tegyük fel, hogy A diagonalizálható, azaz létezik $T \in \mathbf{K}^{n\times n}$, $\det T \neq 0$, hogy $T^{-1}AT$ mátrix diagonális: alkalmas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ számokkal

$$\Lambda := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

T invertálhatósága miatt a

$$T = [t_1 \cdots t_n]$$

t_i $(i = 1, \ldots, n)$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$AT = [At_1 \cdots At_n] = T\Lambda = [\lambda_1 \cdot t_1 \cdots \lambda_n \cdots t_n]$$

miatt

$$A \cdot t_i = \lambda_i \cdot t_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Mivel
$$t_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$
ezért mindez röviden azt jelenti, hogy a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számok az A mátrix sajátértékei, a $t_1, \ldots, t_n$ vektorok pedig rendre a megfelelő sajátvektorok. Lévén, a t_i-k lineárisan függetlenek, az A-ra vonatkozó feltételünk úgy fogalmazható, hogy van a $\mathbf{K}^n$-ben (az A sajátvektoraiból álló) sajátvektorbázis.

A homogén egyenlet tehát a következőképpen írható fel:
$$\varphi' = A \cdot \varphi = T\Lambda T^{-1} \cdot \varphi,$$
amiből
$$(T^{-1}\varphi)' = \Lambda \cdot (T^{-1}\varphi)$$
következik. Vegyük észre, hogy ha $\varphi \in \mathcal{M}_h$, akkor a $\psi := T^{-1}\varphi$ függvény megoldása a Λ diagonális mátrix által meghatározott állandó együtthatós homogén lineáris egyenletnek. Ez utóbbit ez előző tétel alapján nem nehéz megoldani. Legyenek iu. a
$$\psi_i : I \to \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \ldots, n)$$
függvények a következők:
$$\psi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n).$$
Világos, hogy $\psi_i \in D$ és
$$\psi_i'(x) = \lambda_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot (\Lambda \cdot e_i) =$$
$$\Lambda \cdot (e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i) = \Lambda \cdot \psi_i(x) \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n).$$
Más szóval a ψ_i-k valóban megoldásai a Λ által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek. Mivel bármely $\tau \in I$ esetén a
$$\psi_i(\tau) = e^{\lambda_i \cdot \tau} \cdot e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$
vektorok nyilván lineárisan függetlenek, ezért az előző tétel bizonyításában mondottak szerint a ψ_i $(i = 1, \ldots, n)$ függvények lineárisan függetlenek. Ha
$$\phi_i := T \cdot \psi_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

akkor nyilván a ϕ_i-k is lineárisan függetlenek,

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n),$$

és minden $i = 1, \ldots, n$ indexre

$$\phi_i' = A \cdot \phi_i.$$

Tehát $\phi_i \in \mathcal{M}_h$ $(i = 1, \ldots, n)$ egy bázis. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

Tétel. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrix diagonalizálható. Legyenek a sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, egy-egy megfelelő sajátvektora pedig $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{K}^n$. Ekkor a

$$\varphi' = A \cdot \varphi$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a

$$\phi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in \mathbf{R},\, i = 1, \ldots, n)$$

függvények lineárisan független megoldásai.

7.3 Tetszőleges állandó együtthatós mátrix

Tekintsük az $n = 2$ esetet, amikor is valamilyen a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ számokkal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a mátrix pontosan akkor nem diagonalizálható, ha

$$(a-d)^2 + 4bc = 0 \text{ és } |b| + |c| > 0.$$

Ekkor egyetlen sajátértéke van az A-nak nevezetesen

$$\lambda := \frac{a+d}{2},$$

legyen a t_1 egy hozzá tartozó sajátvektor:

$$0 \neq t_1 \in \mathbf{R}^2,\ At_1 = \lambda t_1.$$

Egyszerű számolással igazolható olyan $t_2 \in \mathbf{R}^2$ vektor létezése, amelyik lineárisan független a t_1-től és

$$At_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ha mármost a $T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrix oszlopvektorai rendre a t_1, t_2 vektorok: $T := [t_1 t_2]$, akkor

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva könnyen belátható, hogy a

$$\phi_1(x) := e^{\lambda x} \cdot t_1,\ \phi_2(x) := e^{\lambda x} \cdot (t_2 + xt_1) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy alaprendszer. Valóban, $\phi_i \in \mathcal{M}_h \quad (i = 1,\, 2)$, mert egyrészt

$$\phi_1'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_1 = e^{\lambda x} A t_1 = A(e^{\lambda x} \cdot t_1) = A\phi_1(x),$$

másrészt

$$\phi_2'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_2 + e^{\lambda x} \cdot t_1 + \lambda e^{\lambda x} \cdot t_1 = e^{\lambda x}\big((t_1 + \lambda \cdot t_2) + \lambda x \cdot t_1\big) =$$

$$e^{\lambda x}(At_2 + xAt_1) = A\big(e^{\lambda x}(t_2 + x \cdot t_1)\big) = A\phi_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a

$$\phi_1(0) = t_1,\ \phi_2(0) = t_2$$

vektorok lineárisan függetlenek, ezért a ϕ_1, ϕ_2 függvények is lineárisan függetlenek, azaz a ϕ_1, ϕ_2 egy alaprendszer.

8 Vizsgakérdés

Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere.

8.1 "Új" feladat megfogalmazása

Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, az

$$a_k : I \to \mathbf{R} \quad (k = 0, \ldots, n-1),\, c : I \to \mathbf{R}$$

függvényekről tegyük fel, hogy folytonosak. Olyan $\varphi \in I \to \mathbf{K}$ függvényt keresünk, amelyikre

1. $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D^n$;
3. $\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^k(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Ezt a feladatot röviden *n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan φ függvény amelyik eleget tesz az előbbi kívánalmaknak, az illető differenciálegyenlet (egy) *megoldása.*

Tegyük fel, hogy a fentieken túl adottak még a

$$\tau \in I,\, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$$

számok. Ha az előbbi φ megoldástól azt is elvárjuk, hogy

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\, \varphi^{(k)} = \xi_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$,

akkor a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó *kezdetiérték-problémáról* beszélünk.

Ha $n = 1$, akkor egy lineáris differenciálegyenletről van szó, ezért a továbbiakban nyugodtan feltehetjük már, hogy $n \geq 2$.

Az *átviteli elv* segítségével a most megfogalmazott feladat visszavezethető a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatára. (A későbbiekben szereplő állítások is részben ennek az elvnek a segítségével láthatók majd be.) Vezessük be ui. az alábbi jelöléseket: legyen $2 \le n \in N$ és

$$b := (b_1, \ldots, b_n) : I \to \mathbf{R}^n,\ b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(x) \end{pmatrix} \quad (x \in I),$$

$$A := (a_{ik})_{i,\,k=1}^{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} : I \to \mathbf{R}^{n \times n}$$

Ekkor

$$f(x,y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad (x \in I,\ y \in \mathbf{K}^n).$$

Ha tehát a

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in I \to \mathbf{K}^n$$

differenciálható függvény ez utóbbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek (egy) megoldása, akkor $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum, és bármely $x \in \mathcal{D}_\psi$ esetén

$$\psi'(x) = A(x) \cdot \psi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi),$$

azaz

$$\begin{cases} \psi_i'(x) = \psi_{i+1}(x) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \\ \\ \psi_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(x) \cdot \psi_k(x) + c(x). \end{cases} \tag{$\star$}$$

Ennek alapján eléggé nyilvánvaló az alábbi állítás.

8.2 Átviteli elv

Tétel. Ha a φ függvény megoldása a fenti n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek, akkor az

$$I \ni x \mapsto \psi(x) := \big(\varphi(x),\, \varphi'(x),\, \ldots,\, \varphi^{(n-1)}(x)\big) \in \mathbf{K}^n$$

függvényre igazak a $(\star)$ egyenlőségek. Fordítva, ha a $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ függvény eleget tesz a $(\star)$-nak, akkor a $\varphi := \psi_1$ (első) komponensfüggvény megoldása a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek. Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$ kezdeti értékek, és a φ, megoldása a

$$\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

k.é.p.-nak, akkor a $(\star)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszer előbbi ψ megoldása kielégíti a

$$\psi(\tau) = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$$

kezdeti feltételt.

Legyen most

$$\mathcal{M}_h := \Big\{\varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0\Big\}.$$

Az $\mathcal{M}_h$ függvényhalmaz tehát nem más, mint a

$$c(x) := 0 \quad (x \in I)$$

esetnek megfelelő *homogén n-edrendű lineáris differenciálegyenlet* I intervallumon értelmezett megoldásainak a halmaza. Legyen továbbá

$$\mathcal{M} := \Big\{\varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c\Big\}$$

a kiindulási n-edrendű lineáris differenciálegyenlet I-n értelmezett megoldásainak a halmaza. Az utóbbival kapcsolatban már nyilván feltehető, hogy valamilyen $x \in I$ helyen $c(x) \neq 0$, azaz az illető egyenlet *inhomogén.* Ekkor az átviteli elv alapján a következőket mondhatjuk.

8.3 Állandók variálásának módszere

Tétel. Az n-edrendű lineáris differenciálegyenletet illetően

1. az $\mathcal{M}_h$ halmaz n dimenziós lineáris tér a $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan;

2. tetszőleges $\omega \in \mathcal{M}$ esetén

$$\mathcal{M} = \omega + \mathcal{M}_h := \{\omega + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ függvények bázist alkotnak az $\mathcal{M}_h$-ban, akkor léteznek olyan differenciálható $g_k : I \to \mathbf{K} \quad (k = 1, \ldots, n)$ függvények, amelyekkel

$$\omega := \sum_{k=1}^{n} g_k \varphi_k \in \mathcal{M}.$$