

# Analízis 4

## Gyakorlati feladatok

### Tartalomjegyzék

<b>1. Gyakorlat</b>	<b>3</b>
1.1. Emlékeztető . . . . .	3
1.2. Feladatok . . . . .	7
1.2.1. Feladat . . . . .	7
1.2.2. Feladat . . . . .	7
<b>2. Gyakorlat</b>	<b>9</b>
2.1. Emlékeztető . . . . .	9
2.2. Feladatok . . . . .	10
2.2.1. Feladat . . . . .	10
2.2.2. Feladat . . . . .	11
<b>3. Gyakorlat</b>	<b>12</b>
3.1. Emlékeztető . . . . .	12
<b>4. Gyakorlat</b>	<b>13</b>
4.1. Emlékeztető . . . . .	13
4.2. Feladatok . . . . .	14
4.2.1. Feladat . . . . .	14
4.3. Feladat . . . . .	15
<b>5. Gyakorlat</b>	<b>17</b>
5.1. Emlékeztető . . . . .	17
5.2. Feladatok . . . . .	18
5.3. Feladat . . . . .	18
<b>6. Gyakorlat</b>	<b>20</b>
6.1. Emlékeztető . . . . .	20
6.1.1. Közönséges differenciálegyenletek . . . . .	20
6.1.2. Szeparábilis differenciálegyenlet . . . . .	21
6.1.3. Egzakt differenciálegyenlet . . . . .	23
6.1.4. Lineáris differenciálegyenlet . . . . .	24
<b>7. Gyakorlat</b>	<b>29</b>
7.1. Emlékeztető . . . . .	29

7.1.1. Lineáris differenciálegyenlet-rendszer . . . . .	29
---	----

# 1 Gyakorlat

## 1.1. Emlékeztető

**Definíció.** Legyen  $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^s$ . Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz *nullmértékű*, ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számhoz megadható  $I_k \subset \mathbb{R}^s$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tekintsük pl. az  $I \subset \mathbb{R}^n$  ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ) intervallum esetén az  $f \in R(I)$  függvényt, és legyen

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}.$$

Ekkor a  $\text{graf } f \subset \mathbb{R}^{n+1}$  halmaz nullmértékű.

Ha az  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$  értelmezési tartománya korlátos, akkor van olyan  $I \subset \mathbb{R}^n$  intervallum, amellyel  $\mathcal{D}_f \subset I$ . Legyen ekkor

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{D}_f) \\ 0 & (x \in I \setminus \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha  $F_I \in R(I)$ , akkor  $F_J \in R(J)$  minden olyan  $J \subset \mathbb{R}^n$  intervallumra, amelyre  $\mathcal{D}_f \subset J$  és

$$\int_I F_I = \int_J F_J.$$

Ez ad értelmet a következő definíciónak:

**Definíció.** A fenti  $f$  függvény *Riemann-integrálható*, ha egy alkalmas  $I \subset \mathbb{R}^n$  intervallummal  $\mathcal{D}_f \subset I$  és  $F_I \in R(I)$ . Az utóbbi esetben

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_{\mathcal{D}_f} f := \int_I F_I.$$

Az előző definíció olyan függvényekre is kiterjeszthető, amik értelmezési tartománya nem korlátos, viszont a

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \neq 0\}}$$

*tartója* igen.

**Definíció.** Legyen az  $A \subset \mathbb{R}^n$  halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

az  $A$  *karakterisztikus függvénye*. Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz *Jordan-mérhető*, ha a  $\chi_A$  függvény integrálható, amikor is a

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$$

nemnegatív szám az  $A$  halmaz *Jordan-mértéke*.

**Tétel.** Tekintsük a nyílt halmazon értelmezett és folytonosan differenciálható

$$g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvényt. Tegyük fel, hogy az  $I \subset \mathcal{D}_g$  halmaz kompakt intervallum, továbbá az  $I$  belsejére való  $g|_{\text{int } I}$  leszűkítés injektív függvény. Ekkor az

$$f : g(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha az

$$I \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható. Az utóbbi esetben

$$\int_I f(g(x)) \cdot |\det g'(x)| dx = \int_{g[I]} f.$$

**Speciális esetek.**

1. **Síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi, \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi) = r \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

2. **Módosított síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi, \\ br \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi) = abr \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

3. **Térbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ r \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ r \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, \psi) = -r^2 \cdot \sin \psi \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

4. **Módosított térbeli polárkoordináta-transzformáció (elliptikus koordináták).** Legyen  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ br \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ cr \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, \psi) = -abcr^2 \cdot \sin \psi \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

5. **Hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, z) = r \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

6. **Módosított hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi \\ br \cdot \sin \varphi \\ cz \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, z) = abcr \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

**Tétel.** Tegyük fel, hogy valamely  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$  Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható  $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  függvénnyel írható le. Ekkor  $\Omega$ -nak valamely  $0 \neq e \in \mathbb{R}^3$  irányvektorú, ill.  $a \in \mathbb{R}^3$  pontra illeszkedő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

$$\Theta_t = \int_{\Omega} \ell^2(r) \rho(r) dr$$

valós szám, ahol  $\ell(r)$  jelöli az  $r \in \Omega$  pontnak a  $t$  tengelytől mért távolságát:

$$\ell(r) := \inf \{ \|r - (a + \tau e)\| \in \mathbb{R} : \tau \in \mathbb{R} \}.$$

Világos, hogy ha  $a = 0$  és  $e \in \{e_x, e_y, e_z\}$ , akkor  $\Omega$ -nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_{t_x} = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\Theta_{t_y} = \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\Theta_{t_z} = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

**Definíció.** Tegyük fel, hogy valamely  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$  Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test (tömeg)sűrűsége a Riemann-integrálható  $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  függvénnyel írható le. (Ha  $\rho$  állandó, akkor a testet homogénnek nevezzük.) Ekkor az

$$m(\Omega) := \int_{\Omega} \rho$$

számot az  $\Omega$  test tömegének nevezzük. Az  $\Omega$  tömegközéppontjának koordinátái:

$$\bar{x} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\bar{y} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\bar{z} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

## 1.2. Feladatok

### 1.2.1. Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli testnek a *térfogatát*, amelyet az alábbi egyenletű felületek fognak közre:

$$z = x^2 + y^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2 - y^2.$$

Az egyenletekből kapunk két paraboloidot. Ezek metszetét kell *paraméterezni*. Válasszuk két részre a ponthalmazt. Nézzük meg az  $y = 0$  síkban lévő pontokat:

$$z = x^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2.$$

Ez két ellentétes irányba néző parabola, amik metszete

$$x^2 - 1 = 2 - x^2 \iff x_1 := -\sqrt{\frac{3}{2}}, x_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Azaz az alábbi térbeli pontokban metszi egymást a két paraboloid:

$$p_1 := \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right), p_2 := \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Szimmetriai okok miatt, be tudjuk vezetni a következő hengerkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Legyen

$$H_1 := [0, \sqrt{3/2}] \times [0, 2\pi] \times [1/2, 2 - r^2] \subset \mathbb{R}^3,$$

$$H_2 := [0, \sqrt{3/2}] \times [0, 2\pi] \times [r^2 - 1, 1/2] \subset \mathbb{R}^3,$$

Mivel ezek kompakt intervallumok, igaz lesz, hogy

$$\int_{\mathcal{H}} 1 = \int_{H_1} 1 \cdot |r| dr d\varphi dz + \int_{H_2} 1 \cdot |r| dr d\varphi dz,$$

ahol

$$\mathcal{H} := \Phi[H_1] \cup \Phi[H_2].$$

### 1.2.2. Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli  $T$  testnek a *térfogatát*, *tömegét* és a  $z$ -tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \text{ és } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal.

Tehát a sűrűségfüggvény adott  $\alpha > 0$  mellett

$$\rho(x, y, z) := \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Alkalmazzuk az alábbi térbeli polárkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ r \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ r \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

Legyen

$$H := [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/4] \subset \mathbb{R}^3,$$

akkor  $H$  kompakt intervallum és

$$\Phi(H) = T.$$

Térfogat:

$$\int_H 1 \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi,$$

tömeg:

$$\int_H \rho(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi,$$

tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_H (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \cdot \rho(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi.$$

Számoljuk ki a tehetetlenségi nyomatékokat. Először írjuk fel tetszőleges  $(r, \varphi, \psi) \in H$  esetén az integrandust ( $\alpha$ -val történő osztás után)

$$\begin{aligned} r^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi) \cdot r \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + \cos^2 \psi} \cdot r^2 \sin \psi = \\ r^5 \sin^2 \psi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + 1 - \sin^2 \psi} \cdot \sin \psi = \\ r^5 \sin^3 \psi \cdot \sqrt{\sin^2 \psi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 1) + 1} = \\ r^5 \sin^3 \psi. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{t_x}}{\alpha} &= \int_H r^5 \sin^3 \psi dr d\varphi d\psi = \\ \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 \sin^3 \psi dr d\varphi d\psi &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^6}{6} \sin^3 \psi \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi d\psi = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \sin^3 \psi d\varphi d\psi = \\ \frac{1}{6} \int_0^{\pi/4} [\varphi \sin^3 \psi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\psi &= \frac{2\pi}{6} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \psi d\psi \end{aligned}$$



## 2 Gyakorlat

### 2.1. Emlékeztető

Megjegyezzük, hogy ha a

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

függvény differenciálható, akkor a

$$\partial_k \Psi := (\partial_k \Psi_1, \partial_k \Psi_2, \partial_k \Psi_3) \quad (k \in \{1, 2\})$$

jelöléssel

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi & \partial_2 \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi_1 & \partial_2 \Psi_1 \\ \partial_1 \Psi_2 & \partial_2 \Psi_2 \\ \partial_1 \Psi_3 & \partial_2 \Psi_3 \end{bmatrix}.$$

**Definíció.** Valamely  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  halmazt *felületdarabnak* nevezünk, ha alkalmas  $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^2$  kompakt és Jordan-mérhető halmaz, ill.

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \Psi \in C^1, \text{rang}(\Psi') = 2$$

függvény esetén

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_\Psi = \{\Psi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in K\}.$$

A  $\Psi$  leképezést az adott  $\mathcal{F}$  felületdarab *paraméterezésének* nevezzük.

1. A fenti definícióban a  $\Psi$  leképezés folytonos differenciálhatóságán azt értjük, hogy van olyan  $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$  nyílt halmaz, ill.

$$\hat{\Psi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \hat{\Psi} \in C^1$$

függvény, amelyre  $\hat{\Psi}|_K = \Psi$ .

2. Ha a  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  függvényre  $\Psi \in C^1$ , akkor a  $\text{rang}(\Psi') = 2$  feltétel azt jelenti, hogy a  $\partial_1 \Psi, \partial_2 \Psi$  vektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi \neq 0.$$

Ha a  $\Psi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés valamely felületdarab paraméterezése, akkor az

$$n_\Psi(u, v) := \partial_1 \Psi(u, v) \times \partial_2 \Psi(u, v) \quad ((u, v) \in K)$$

vektor az adott felület  $\Psi(u, v)$  pontjához tartozó *érintősíkjának* normálvektora.

**Definíció.** Tegyük fel, hogy az  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  felületdarab paraméterezése az

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

függvény:  $\mathcal{R}_\Psi = \mathcal{F}$ . Ekkor az  $\mathcal{F}$  felület *felszínén* az

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \int_K \|n_\Psi\|$$

valós számot értjük.

1. Ha  $\mathcal{F}_1 := \mathcal{R}_{\Psi_1}$ , ill.  $\mathcal{F}_2 := \mathcal{R}_{\Psi_2}$  nullmértékű halmazban (pl. élekben) csatlakozó felületdarabok, akkor

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) = \int_{K_1} \|n_{\Psi_1}\| + \int_{K_2} \|n_{\Psi_2}\|.$$

## 2.2. Feladatok

### 2.2.1. Feladat

Legyen  $0 < R \in \mathbb{R}$ . Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$$

félgömbfelületnek az

$$x^2 + y^2 = Rx$$

egyenletű hengerfelület által kimetszett részének (Viviani-féle levél) a felszínét!

A  $z \geq 0$  feltérben lévő félgömbfelület paraméterezése:

$$\Psi(u, v) := (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2).$$

Ekkor  $\Psi \in C^1$ ,  $\text{rang}(\Psi') = 2$ , továbbá ( $u^2 + v^2 < R$  esetén)

$$\begin{aligned} \partial_1 \Psi(u, v) &= \left( 1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right), \\ \partial_2 \Psi(u, v) &= \left( 0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right), \\ n_\Psi(u, v) &= \begin{pmatrix} -\partial_1 g(u, v) \\ -\partial_2 g(u, v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Azaz

$$\|n_\Psi(u, v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1} =$$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}.$$

Ha most

$$\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \in [0, \pi/2], r \in [0, R \cos(\varphi)])$$

Akkor a felszínt így kapjuk meg:

$$2R \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \int_0^{R \cos(\varphi)} \|n_{\Psi}(\Phi(r, \varphi))\| \cdot r \, dr \, d\varphi.$$

### 2.2.2. Feladat

Határozzuk meg az alábbi feltételekkel megadott felület felszínét:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } x^2 + y^2 \leq 2ax \quad (a > 0).$$

Legyen

$$f(x, y) := (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

ahol  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2ax\}$ ,  $f$  egy Euler-Monge módon megadott paraméterezése a  $z$ -tengely irányába felfelé néző körkúp palástjának, *leszűkítve* annak a hengernek a belsejére, aminek alapját az  $\Omega$  halmaz adja. Egyből írjuk is át az  $f$  függvényt a megfelelő polár-transzformációval

$$\Phi(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \quad (\varphi \in [-\pi/2, \pi/2], r \in [0, 2a \cos(\varphi)]).$$

A  $\Phi$  transzformáció-függvény értelmezési tartományát a Thálész-tétel alkalmazásával könnyedén megkaptuk. Tehát ha  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  a feladatban definiált felület, akkor

$$\Psi(r, \varphi) := f \circ \Phi = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), r) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}).$$

A felület kiszámításához szükségünk lesz a következőkre:

$$\partial_1 \Psi(r, \varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 1) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$\partial_2 \Psi(r, \varphi) = (-r \sin(\varphi), r \cos(\varphi), 0) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$n_{\Psi}(r, \varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 1 \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$\|n_{\Psi}(r, \varphi)\| = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}).$$

Tehát a keresett felszín

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{D}_{\Phi}} \|n_{\Psi}\| = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi.$$

### 3 Gyakorlat

#### 3.1. Emlékeztető

**Definíció.** Legyen  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompakt, Jordan-mérhető halmaz,

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \Psi \in C^1, \text{rang}(\Psi') = 2,$$

továbbá tegyük fel, hogy  $\Psi|_{\text{int}(K)}$  injektív. Ekkor

1. ha  $f : \Psi[K] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C$ , akkor az  $f$  függvény  $\Psi$ -re vonatkozó *elsőfajú felületi integráljának* (vagy *felszíni integráljának*) nevezzük az

$$\int_{\Psi} f := \int_K (f \circ \Psi) \cdot \|n_{\Psi}\|$$

valós számot,

2. ha  $f : \Psi[K] \rightarrow \mathbb{R}^3, f \in C$ , akkor az  $f$  függvény  $\Psi$ -re vonatkozó (*másodfajú*) *felületi integráljának* nevezzük az

$$\int_{\Psi} f := \langle f \circ \Psi, n_{\Psi} \rangle$$

valós számot.

## 4 Gyakorlat

### 4.1. Emlékeztető

Valamilyen kompakt  $[a, b]$  intervallum ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) és ( $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ ) ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ) nyílt halmaz esetén tekintsük az

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt. Ha  $x \in U$ , akkor legyen  $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  az a függvény, amire

$$f_x(t) := f(x, t) \quad (t \in [a, b]).$$

Tegyük fel, hogy minden  $x \in U$  esetén az  $f_x$  függvény Riemann-integrálható:  $f_x \in R[a, b]$ , legyen ekkor

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt := \int_a^b f_x \quad (x \in U).$$

Az így definiált  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f$  által meghatározott *paraméteres integrálnak* nevezzük.

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_f = U \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vezessük be  $\mathbb{R}^n$ -en is és  $\mathbb{R}^{n+1}$ -en is a  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$  normát. Nem fog félreértést okozni, ha  $\xi \in \mathbb{R}^n$  és  $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$  esetén egyaránt a  $\|\xi\|$ ,  $\|\eta\|$  jelölést használjuk. Így pl. nyilvánvaló, hogy az

$$(x, t) \in U \times [a, b]$$

vektorra

$$\|(x, t)\| = \max\{\|x\|, |t|\}.$$

Továbbá, ha az

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény folytonos, akkor tetszőleges  $x \in U$  mellett az  $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény is folytonos. Ui., ha  $s \in [a, b]$  és  $\xi := (x, s)$ , akkor  $f \in \mathcal{C}\{\xi\}$  miatt bármilyen  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $\delta > 0$ , amellyel

$$|f(\omega) - f(\xi)| < \varepsilon \quad (\omega \in U \times [a, b], \|\omega - \xi\| < \delta),$$

azaz

$$|f(y, t) - f(x, s)| < \varepsilon \quad ((y, t) \in U \times [a, b], \|(y, t) - (x, s)\| < \delta).$$

Ha itt  $y := x$ , akkor

$$\|(x, t) - (x, s)\| = \|(0, t - s)\| = |t - s|,$$

ezért

$$|f(x, t) - f(x, s)| = |f_x(t) - f_x(s)| < \varepsilon (t \in [a, b], |t - s| < \delta),$$

más szóval  $f_x \in \mathcal{C}\{s\}$ . Következésképpen  $f_x \in C[a, b]$ , így  $f_x \in R[a, b]$ , létezik tehát a fenti  $F$  paraméteres integrál.

**Tétel.** Tegyük fel, hogy adott az  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) kompakt intervallum,  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ , és  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz. Ekkor tetszőleges folytonos

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény esetén az

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt \quad (x \in U)$$

paraméteres integrálra az alábbiak igazak:

1. az  $F$  függvény folytonos;
2. ha valamilyen  $i = 1, \dots, n$  indexre létezik és folytonos a  $\partial_i f$  parciális deriváltfüggvény, akkor létezik a  $\partial_i F$  parciális deriváltfüggvény is, és

$$\partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x, t) dt \quad (x \in U);$$

3. amennyiben az  $f$  folytonosan differenciálható, akkor  $F$  is.

## 4.2. Feladatok

### 4.2.1. Feladat

Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctg(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} dx = \frac{\pi}{2} \ln(y+1) \quad (y \geq 0).$$

Legyen

$$f(y, x) := \begin{cases} y & x = 0, y \in [0, +\infty) \\ 0 & x = \pi/2, y \in [0, +\infty) \\ \frac{\arctg(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} & ((y, x) \in [0, +\infty) \times (0, \pi/2)). \end{cases}$$

Ekkor  $f \in C$ , ezért a paraméteres integrál is folytonos. Mivel

$$\partial_1 f(y, x) := \begin{cases} 0 & x = \pi/2, y \in [0, +\infty) \\ \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2(x)} & ((y, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi/2)) \end{cases}$$

$\partial_1 f \in C$ , tehát a paraméteres integrál deriválható.

### 4.3. Feladat

Indokoljuk meg, hogy tetszőleges  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  esetén

$$F(\alpha) := \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \in \mathbb{R},$$

majd mutassuk meg, hogy fennáll az

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} \quad (0 < \alpha \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

Legyen

$$f(\alpha, x) := \begin{cases} \alpha & \alpha \in (0, +\infty), x = 0; \\ \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \alpha \in (0, +\infty), x \in (0, 1]; \end{cases}$$

akkor  $f \in C$ , hiszen (Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{1+\alpha^2 x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \alpha}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \alpha.$$

Tehát  $F \in C$  is teljesül. Mivel

$$\partial_1 f(\alpha, x) = \frac{1}{1 + \alpha^2 x} \quad ((\alpha, x) \in (0, +\infty) \times [0, 1]),$$

és  $\partial_1 f \in C$ , ezért  $F \in D$ .

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^1 \partial_\alpha \left( \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \right) = \int_0^1 \frac{1}{1 + \alpha^2 x} dx = \left[ \frac{\ln(1 + \alpha^2 x)}{\alpha^2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Tehát

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Számoljuk ki  $F'$  határozatlan integrálját:

$$\begin{aligned} \int F' &= \int \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2} d\alpha = -\frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} - \int \left( -\frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha = \\ &= 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} + c \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Azaz, mivel

$$F \in \int F',$$

ezért létezik egy  $c \in \mathbb{R}$  konstans, amivel

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} + c.$$

Számoljuk ki  $F(1)$ -et:

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

Ebből

$$F(1) = 2\operatorname{arctg}(1) - \ln(2) = \frac{\pi}{2} - \ln(2),$$

ahonnan  $c = 0$ , tehát

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha}$$

következik.



## 5 Gyakorlat

### 5.1. Emlékeztető

Legyenek  $n, m \in \mathbb{N}$  természetes számok, ahol  $2 \leq n$  és  $1 \leq m < n$ . Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m,$$

és ezt következképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

akkor  $f$ -et olyan kétváltozós vektorfüggvényként tekintjük, ahol az  $f(x, y)$  helyettesítési értékekben az argumentum első változójára  $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ , a második változójára pedig  $y \in \mathbb{R}^m$  teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelmében valamilyen  $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$  zérushelye az  $f$ -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az  $a$ -nak olyan  $K(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$  környezete, a  $b$ -nek pedig olyan  $K(b) \subset \mathbb{R}^m$  környezete, hogy tetszőleges  $x \in K(a)$  esetén egyértelműen létezik olyan  $y \in K(b)$ , amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a  $\varphi(x) := y$  hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Az előbbi  $\varphi$  függvényt az  $f$  által (az  $(a, b)$  körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Nyilván  $\varphi(a) = b$ .

**Tétel (implicitfüggvény-tétel).** Adott  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq n$ , valamint  $1 \leq m < n$  mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat:  $f \in C^1$  és az  $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$  helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas  $K(a)$ ,  $K(b)$  környezetekkel létezik az  $f$  által az  $(a, b)$  körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

## 5.2. Feladatok

### 5.3. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7$$

egyenletből  $y$  kifejezhető  $x$  implicitfüggvényeként a 2 egy környezetében, majd határozzuk meg így adódó implicitfüggvénynek deriváltját az  $x = 2$  helyen, továbbá írjuk fel az érintőegyenese egyenleteit!

Legyen

$$f(x, y) := x^2 + 2xy - y^2 - 7 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor

$$f(2, y) = 0 \iff y \in \{1, 3\}.$$

Mivel  $f \in C^1$ , és

$$\partial_2 f(2, 1) = 2 \neq 0,$$

$$\partial_2 f(2, 3) = -2 \neq 0,$$

így teljesülnek az implicitfüggvényre vonatkozó tétel feltételei. Legyen

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy - y^2 = 7\}.$$

Így valóban léteznek olyan  $U =: K(2)$ ,  $V_1 := K(1)$ ,  $V_2 := K(3)$  környezetek, hogy  $\varphi_1 : U \rightarrow V_1$  és  $\varphi_2 : U \rightarrow V_2$  folytonosan differenciálható függvények grafikonjai rendre megegyeznek a  $H$  halmaz  $(2, 1)$ ,  $(2, 3)$  pontban vett környezetével.

$$f(x, \varphi_i(x)) = 0 \quad (x \in U, i = 1, 2).$$

Mivel

$$\partial_1 f(2, 1) = 6, \text{ ill. } \partial_1 f(2, 3) = 10,$$

ezért

$$\varphi_1(2) = 1, \text{ ill. a } \varphi_2(2) = 3$$

egyenlőségek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\varphi_1'(2) = -3, \varphi_2(2) = 5.$$

A megfelelő érintők egyenlete:

$$y = \varphi_1(2) + \varphi_1'(2)(x - 2) = 7 - 3x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$y = \varphi_2(2) + \varphi_2'(2)(x - 2) = 5x - 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

## 6 Gyakorlat

### 6.1. Emlékeztető

#### 6.1.1. Közöséges differenciálegyenletek

Legyen  $0 < n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan  $\varphi \in I \rightarrow \Omega$  függvény, amelyre igazak a következő állítások:

1.  $\mathcal{D}_\varphi$  nyílt intervallum;
2.  $\varphi \in D$ ;
3.  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$ .

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közöséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \Omega$  elemek, akkor a fenti  $\varphi$  függvény 1., 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4.  $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$  és  $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban mindegyre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni.

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó k.é.p. *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges  $\varphi$ ,  $\psi$  megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Legyen ekkor  $\mathcal{M}$  a szóban forgó k.é.p. megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcap_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy  $\tau$ -t tartalmazó nyílt intervallum és  $J \subset I$ . Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \rightarrow \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilván,  $\Phi(\tau) = \xi$ ,  $\Phi \in D$  és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy  $\Phi \in \mathcal{M}$ , és bármelyik  $\varphi \in \mathcal{M}$  esetén  $\varphi = \Phi|_{\mathcal{D}_\varphi}$ .

A  $\Phi$  függvényt a k.é.p. *teljes megoldásának* nevezzük.

### 6.1.2. Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen  $n := 1$ , továbbá az  $I, J \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, h : J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x, y) \in I \times J).$$

A  $\varphi \in I \rightarrow J$  megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

(*Szeparábilis* (vagy más szóval *szétválasztható változójú*) differenciálegyenlet.)  
Legyenek még adottak a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$  számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi.$$

**Tétel.** Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen  $\varphi, \psi$  megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Mivel a  $h$  függvény sehol sem nulla, ezért egy  $\varphi$  megoldásra (ha az létezik)

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  is, és az  $1/h : J \rightarrow \mathbb{R}$  is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények, így léteznek a

$$G \in \int g, H \in \int \frac{1}{h},$$

$$G : I \rightarrow \mathbb{R}, H : J \rightarrow \mathbb{R}$$

primitív függvényeik. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a  $\mathcal{D}_\varphi$  is nyílt intervallum) van olyan  $c \in \mathbb{R}$ , hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az  $1/h$  függvény nyilván nem vesz fel 0-t a  $J$  intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a  $H'$  függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a  $H'$  állandó előjelű. Következésképpen  $H$  szigorúan monoton, amiért invertálható. A  $H^{-1}$  inverzzel

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$ , és a  $\varphi$  megoldás eleget tesz a  $\varphi(\tau) = \xi$  kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz  $H(\xi) = G(\tau) + c$ , ill.

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha  $G, H$  helyett más primitív függvényeket választunk, akkor ugyanezt az egyenlőséget kapjuk.

Elegendő már csak azt belátni, hogy létezik megoldás. Ld. előadás (implicitfüggvény-tétel megfelelő alkalmazása). ■

A tétel bizonyításával egyúttal egy módszert ("képletet") is adtunk a

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

szeparábilis egyenletre vonatkozó  $\varphi(\tau) = \xi$  k.é.p. megoldására. Ennek a kulcsmozzanata a  $G, H$  primitív függvények meghatározása:

$$G(x) = \int_{\tau}^x g(t) dt, \quad H(y) = \int_{\xi}^y \frac{dt}{h(t)} \quad (x \in I, y \in J),$$

amiből aztán a  $\varphi$ -re vonatkozó

$$H(\varphi(x)) = \int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = G(x) = \int_{\tau}^x g(t) dt \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz az

$$\int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_{\tau}^x g(t) dt \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

implicit egyenlet adódott.

### 6.1.3. Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen  $n := 1$ , és az  $I, J \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \rightarrow \mathbb{R} \text{ és } h : I \times J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad ((x, y) \in I \times J).$$

Ekkor a fenti minden  $\varphi$  megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott *d.e. egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$$

függvénnyel

$$\text{grad } G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g, h).$$

Ha  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$  és a  $\varphi$  függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

**Tétel.** Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen  $\varphi, \psi$  megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Valóban,  $0 \notin \mathcal{R}_h$  miatt a feltételezett  $\varphi$  megoldásra

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen  $\varphi$  függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges  $x \in \mathcal{D}_\varphi$  helyen

$$F'(x) = \langle \text{grad } G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle =$$

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A  $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$  halmaz nyílt intervallum, ezért az  $F$  konstans függvény, azaz létezik olyan  $c \in \mathbb{R}$ , amellyel

$$G(x, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel  $\varphi(\tau) = \xi$ , ezért

$$c = G(\tau, \xi).$$

A  $G$ -ről feltehetjük, hogy  $G(\tau, \xi) = 0$ , ezért a szóban forgó kezdetiérték-probléma  $\varphi$  megoldása eleget tesz a

$$G(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a  $\varphi$  nem más, mint egy, a  $G$  által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó kezdetiérték-probléma minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján  $G \in C^1$ ,  $G(\tau, \xi) = 0$ , továbbá

$$\partial_2 G(\tau, \xi) = h(\tau, \xi) \neq 0,$$

ezért  $G$ -re (a  $(\tau, \xi)$  helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \rightarrow J$$

(implicit)függvény, amelyre  $\mathcal{D}_\psi \subset I$  nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi, G(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi), \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x, \psi(x))}{\partial_2 G(x, \psi(x))} = -\frac{g(x, \psi(x))}{h(x, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

#### 6.1.4. Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most  $n = 1$  és az  $I \subset \mathbb{R}$  egy nyílt intervallum, valamint a

$$g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$



Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a  $\theta$  függvény is és a  $\psi$  függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és  $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$ . Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot (\theta(t) - \psi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a  $\theta - \psi$  függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben  $h \equiv 0$ :

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő  $h$  függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

**Tétel.** Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges  $\varphi$ ,  $\psi$  megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Legyen a

$$G : I \rightarrow \mathbb{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és  $G' = g$  (a  $g$ -re tett feltételek miatt ilyen  $G$  primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik  $t \in \mathcal{D}_\chi$  helyen

$$\begin{aligned} \left( \frac{\chi}{\varphi_0} \right)'(t) &= \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} = \\ \frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} &= 0, \end{aligned}$$

azaz (lévén a  $\mathcal{D}_\chi$  nyílt intervallum) egy alkalmas  $c \in \mathbb{R}$  számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \rightarrow \mathbb{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ . Nyilván minden ilyen  $\chi$  függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a  $\theta$  függvény is és a  $\psi$  függvény is megoldása és  $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$ , akkor egy alkalmas  $c \in \mathbb{R}$  együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény, hogy az  $m \cdot \varphi_0$  függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az  $m$ -re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen  $m$  függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a  $h/\varphi_0$  függvény bármelyik  $m$  primitív függvényét is véve, az  $m \cdot \varphi_0$  függvény megoldása a lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges  $\varphi \in I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol  $m$  egy tetszőleges primitív függvénye a  $h/\varphi_0$  függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen  $c \in \mathbb{R}$  és  $J \subset I$  nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ezt megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) = \\ &= \frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J). \end{aligned}$$

Speciálisan az "egész"  $I$  intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbb{R}, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik  $\varphi$  megoldásra egy alkalmas  $c \in \mathbb{R}$  mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a  $J := \mathcal{D}_\varphi$  jelöléssel  $\varphi = \psi_{c|_J}$ .

Ha  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , és a  $\varphi(\tau) = \xi$  kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \rightarrow \mathbb{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden  $\varphi, \psi$  megoldására  $\varphi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\varphi}}$  és  $\psi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\psi}}$ , ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

■

A

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

lineáris d.e.-re vonatkozó k.é.p. megoldására "megoldóképletet" is felírhatunk.  
Legyen ui.

$$G(x) := \int_{\tau}^x g(t) dt, \quad m(x) := \int_{\tau}^x \frac{h(t)}{\varphi_0(t)} dt \quad (x \in I),$$

akkor

$$\varphi_0(\tau) = e^{G(\tau)} = 1, \quad m(\tau) = 0,$$

és a szóban forgó k.é.p. "teljes" megoldását jelentő

$$\psi(x) := m(x) \cdot \varphi_0(x) + c \cdot \varphi_0(x) \quad (x \in I)$$

függvényben

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)} = \xi.$$

## 7 Gyakorlat

### 7.1. Emlékeztető

#### 7.1.1. Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Valamilyen  $1 \leq n \in \mathbb{N}$  és egy nyílt  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad b = (b_1, \dots, b_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

*mátrixfüggvényt*. Ha

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbb{K}^n),$$

akkor az  $f$  függvény, mint jobb oldal által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ( $n > 1$  esetén *lineáris differenciálegyenlet-rendszernek*) nevezzük.

Legyenek a fentiekén túl adottak még a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \mathbb{K}^n$  értékek, és vizsgáljuk a  $\varphi(\tau) = \xi$  k.é.p.-t. Ha  $I_* \subset I$ ,  $\tau \in \text{int } I_*$ , kompakt intervallum, akkor

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} \in \mathbb{R} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} \in \mathbb{R}.$$

Következésképpen

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_\infty = \|A(x) \cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y - z\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (x \in I_*, y, z \in \mathbb{K}^n).$$

Továbbá a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\| : x \in I_*\} \in \mathbb{R}$$

jelöléssel

$$\|f(x, y)\|_\infty = \|A(x) \cdot y + b(x)\|_\infty \leq \|A(x) \cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq q \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I_*, y \in \mathbb{K}^n),$$

ezért minden k.é.p. teljes megoldása az  $I$  intervallumon van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó d.e. *homogén*, ha  $b \equiv 0$ , *inhomogén*, ha létezik  $x \in I$ , hogy  $b(x) \neq 0$ . Legyenek

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi + b\}.$$

A lineáris d.e.-ek "alaptétele" a következő

**Tétel.** A bevezetésben mondott feltételek mellett

1. az  $\mathcal{M}_h$  halmaz  $n$  dimenziós lineáris tér a  $\mathbb{K}$ -ra vonatkozóan;
2. tetszőleges  $\psi \in \mathcal{M}$  esetén

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a  $\phi_k = (\phi_{k1}, \dots, \phi_{kn})$  ( $k = 1, \dots, n$ ) függvények bázist alkotnak az  $\mathcal{M}_h$ -ban, akkor léteznek olyan  $g_k : I \rightarrow \mathbb{K}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) differenciálható függvények, amelyekkel

$$\psi := \sum_{k=1}^n g_k \cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

**Bizonyítás.** Az 1. állítás bizonyításához mutassuk meg először is azt, hogy bármilyen  $\psi, \varphi \in \mathcal{M}_h$  és  $c \in \mathbb{K}$  esetén  $\psi + c \cdot \varphi \in \mathcal{M}_h$ :

$$(\psi + c \cdot \varphi)' = \psi' + c \cdot \varphi' = A \cdot \psi + c \cdot A \cdot \varphi = A \cdot (\psi + c \cdot \varphi),$$

amiből a mondott állítás az  $\mathcal{M}_h$  definíciója alapján nyilvánvaló. Tehát az  $\mathcal{M}_h$  lineáris tér a  $\mathbb{K}$  felett.

Most megmutatjuk, hogy ha  $m \in \mathbb{N}$ , és  $\chi_1, \dots, \chi_m \in \mathcal{M}_h$  tetszőleges függvények, akkor az alábbi ekvivalencia igaz:

- a  $\chi_1, \dots, \chi_m$  függvények akkor és csak akkor alkotnak lineárisan független rendszert az  $\mathcal{M}_h$  vektortérben, ha bármilyen  $\tau \in I$  esetén
- a  $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$  vektorok lineárisan függetlenek a  $\mathbb{K}^n$ -ben.

Folytatás később.