# Analízis alkalmazásai vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

## Tartalom

# 1 Vizsgakérdés

*Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).*

Legyenek $n$, $m \in \mathbf{N}$ természetes számok, $1 \le m < n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, \, y := (\xi_{n-m+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m,$$

akkor az $f$-et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az $f$-nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az $a$-nak egy olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a $b$-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x,\, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x,\, y) = 0.$$

Az előbbi $\varphi$ függvényt az $f$ által (az $(a,\, b)$ körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1,\, \ldots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \ldots,\, y_m) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1,\, \ldots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \ldots,\, y_m) & = & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1,\, \ldots,\, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1,\, \ldots,\, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

A $\varphi : K(a) \to K(b)$ implicitfüggvényre a következő igaz:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{f = 0\} = \{(x,\, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}.$$

Geometriai szóhasználattal élve

$$\operatorname{graf} \varphi := \{(x,\, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}$$

(a $\varphi$ függvény "grafikonja", ami a függvény definíciója miatt persze maga a $\varphi$ függvény), tehát az előbbi egyenlőség így néz ki:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{f = 0\} = \operatorname{graf} \varphi = \varphi.$$

## 1.1 Implicitfüggvény-tétel

**Tétel.** Adott $n,\ m \in \mathbf{N}$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a,\ b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a,\ b) = 0,\ \det \partial_2 f(a,\ b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az $f$ által az $(a,\ b)$ körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x,\ \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x,\ \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

A tételben $f \in C^1$, $\partial_2 f(a,\ b) \neq 0$ feltételekből következően a $K(a)$, $K(b)$ környezetekről az is feltehető, hogy

$$\det \partial_2 f(x,\ y) \neq 0 \quad (x \in K(a),\ y \in K(b)),$$

egyúttal

$$\det \partial_2 f(x,\ \varphi(x)) \neq 0 \quad (x \in K(a)).$$

Ezért az $x \in K(a)$ helyeken a $\partial_2 f(x,\ \varphi(x))$ mátrix valóban invertálható.

## 1.2 Inverzfüggvény-tétel

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r,\ a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h_{|_I})^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h_{|_I})^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott ”egyváltozós” állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többáltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

függvény és az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *lokálisan invertálható* az $a$-ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a $g^{-1}$ inverzfüggvényt az $f$ $a$-beli *lokális inverzének* nevezzük.

**Tétel.** Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, és $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Tegyük fel, hogy egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel az $f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható, a $h := (f_{|_{K(a)}})^{-1}$ lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = \big(f'(h(x))\big)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

## 1.3 Hiperkoordinátás parciális deriváltak

Legyen adott $n$, $m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n \in \mathbf{N}$ mellett

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m.$$

Az előbbiek alapján most adott $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k < n$ esetén legyen $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-k} \times \mathbf{R}^k$. Ha $\xi \in \mathcal{D}_f$, akkor legyen $(a,\, b) = \xi$, ahogy eddig. Azaz $f$-et fel lehet fogni egy kétváltozós függvénynek. Tekintsük az alábbi definíciót:

$$\mathcal{D}_1^{(a,\, b)} := \{x \in \mathbf{R}^{n-k} : (x,\, b) \in \mathcal{D}_f\},$$

$$\mathcal{D}_2^{(a,\, b)} := \{y \in \mathbf{R}^{k} : (a,\, y) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Ekkor analóg módon a *szokásos* parciális deriváltakhoz

$$f_{(a,\, b),\, 1} \in \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}^m,$$

$$f_{(a,\, b),\, 2} \in \mathbf{R}^{k} \to \mathbf{R}^m,$$

ahol

$$f_{(a,\,b),\,1}(x) := f(x,\,b) \quad (x \in \mathcal{D}_1^{(a,\,b)}),$$

$$f_{(a,\,b),\,2}(y) := f(a,\,y) \quad (y \in \mathcal{D}_2^{(a,\,b)}).$$

Ebben az esetben a *hiperkoordinátás* alakja a parciális deriváltaknak (amennyiben értelmes a derivált):

$$\partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) := \partial_1 f(a,\,b) := f'_{(a,\,b),\,1}(a),$$

$$\partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) := \partial_2 f(a,\,b) := f'_{(a,\,b),\,2}(b).$$

Azaz egy $(a,\,b)$ helyen lerögzítjük az első vagy második változók és az így kapott függvénynek vesszük a deriváltját. Ha $f$ egy differenciálható függvény az $(a,\,b) \in \mathcal{D}_f$ helyen, akkor

$$f'(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) & \partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,\,b) & \partial_2 f_1(a,\,b) & \cdots & \partial_n f_1(a,\,b) \\ \partial_1 f_2(a,\,b) & \partial_2 f_2(a,\,b) & \cdots & \partial_n f_2(a,\,b) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a,\,b) & \partial_2 f_n(a,\,b) & \cdots & \partial_n f_n(a,\,b) \end{bmatrix},$$

ahol a $\partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) \in \mathbf{R}^{m\times(n-k)}$, $\partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) \in \mathbf{R}^{m\times k}$ mátrixok rendre az $f'(a,\,b) \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix első $n-k$-adik és utolsó $k$-adik oszlopvektorai. Pl. legyen $f \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ $(a,\,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$-ben differenciálható függvény, $k := 2$. Ekkor

$$f \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$$

és

$$f'(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,\,b) & \partial_2 f_1(a,\,b) & \partial_3 f_1(a,\,b) \\ \partial_1 f_2(a,\,b) & \partial_2 f_2(a,\,b) & \partial_3 f_2(a,\,b) \\ \partial_1 f_3(a,\,b) & \partial_2 f_3(a,\,b) & \partial_3 f_3(a,\,b) \\ \partial_1 f_4(a,\,b) & \partial_2 f_4(a,\,b) & \partial_3 f_4(a,\,b) \end{bmatrix},$$

$$\partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,\,b) \\ \partial_1 f_2(a,\,b) \\ \partial_1 f_3(a,\,b) \\ \partial_1 f_4(a,\,b) \end{bmatrix}, \partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_2 f_1(a,\,b) & \partial_3 f_1(a,\,b) \\ \partial_2 f_2(a,\,b) & \partial_3 f_2(a,\,b) \\ \partial_2 f_3(a,\,b) & \partial_3 f_3(a,\,b) \\ \partial_2 f_4(a,\,b) & \partial_3 f_4(a,\,b) \end{bmatrix}.$$

## 2 Vizsgakérdés

*Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).*

Legyen $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, és

$$f : U \to \mathbf{R},\ g = (g_1, \ldots, g_m) : U \to \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az $f$ függvénynek a $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a $c$-ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az $f(c)$-re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá $c$-re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az $f$-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre nézve, akkor egy alkalmas $K(c)$ környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

## 2.1 Elsőrendű szükséges feltétel

**Tétel.** Tegyük fel, hogy $1 \leq n,\, m \in \mathbf{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az $f$-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik $m$-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, hogy

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő $\lambda g$ függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda,\, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó $f$ függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is.

**Bizonyítás.** A rangfeltétel szerint a $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrixnak van olyan $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ részmátrixa, amelyre $\det A \neq 0$. Feltehető, hogy az $A$-t a $g'(c)$ mátrix utolsó $m$ oszlopa határozza meg, amikor is az $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ felbontást úgy képzeljük el, hogy a

$$\xi = (\xi_1,\, \ldots, \xi_n) = (x,\, y) \in \mathbf{R}^n$$

vektorokra

$$x := (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\; y := (\xi_{n-m+1},\, \ldots,\, \xi_n) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően $c = (a,\, b)$. Ekkor tehát

$$\det \partial_2 g(a,\, b) = \det A \neq 0.$$

Mivel $g(a,\, b) = 0$, ezért alkalmazható az implicitfüggvény tétel: alkalmas

$$K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m},\; K(b) \subset \mathbf{R}^m$$

környezettel létezik a $g$ függvény által az $(a,\, b)$ körül meghatározott

$$h : K(a) \to K(b)$$

$h \in C^1$ implicitfüggvény:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{g = 0\} = \{(x,\, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -\big(\partial_2 g(x,\, h(x))\big)^{-1} \cdot \partial_1 g(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas $K(c) \subset U$ környezettel (pl.)

$$f(\xi) \leq f(c) \quad \big(\xi = (x,\, y) \in K(c) \cap \{g = 0\}\big).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvényre $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}$ és

$$\Phi(x) \leq f(c) = \Phi(a) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Más szóval a $\Phi$ függvénynek az $a$-ban lokális maximuma van. A $\Phi$ differenciálható, ezért

$$\Phi'(a) = \operatorname{grad} \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvénnyel $\Phi = f \circ \varphi$ és $\varphi \in D$, valamint $I$-vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$-beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times(n-m)} \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Következésképpen

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = f'(a,\, h(a)) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$f'(c) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = \partial_1 f(c) + \partial_2 f(c) \cdot h'(a) =$$

$$\partial_1 f(c) - \partial_2 f(c) \cdot \big(\partial_2 f(c)\big)^{-1} \cdot \partial_1 g(c) = \partial_1 f(c) + \lambda \cdot \partial_1 g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_2 f(c) \cdot \big(\partial_2 g(c)\big)^{-1} \in \mathbf{R}^m.$$

Tehát (a $\partial_1$ értelmezéséből)

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-m). \tag{1}$$

A $\lambda$ vektor definíciójából "átszorzással" azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 f(c) + \lambda \cdot \partial_2 g(c) = 0,$$

azaz (a $\partial_2$ definíciójából)

$$\partial_j f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_j g_l(c) = 0 \quad (j = n-m+1, \, \ldots, \, n). \tag{2}$$

A (1), (2) formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \, \ldots, \, n),$$

más szóval

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0 =$$
$$\Big(\partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_1 g_l(c), \, \ldots, \, \partial_n f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_n g_l(c)\Big) = 0.$$

■

A fentiekben az $m < n$ feltételezéssel éltünk. Ha $m = n$, akkor pl. az $g'(c) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, és a $\operatorname{rang} g'(c) = m = n$ *rangfeltétel* jelentése az, hogy a

$$g'(c) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} g_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_n(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

Jacobi-mátrix invertálható. Tehát a $\operatorname{grad} g_k(a) \in \mathbf{R}^n \quad (k = 1, \, \ldots, \, n)$ vektorok lineárisan függetlenek, más szóval bázist alkotnak az $\mathbf{R}^n$-ben. Így (egyértelműen) léteznek olyan $\lambda_j \in \mathbf{R} \quad (j = 1, \, \ldots, \, n)$ számok, amelyekkel

$$-\operatorname{grad} f(c) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(c),$$

azaz a $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vektorral $\mathrm{grad}\,(f + \lambda g)(c) = 0$. Röviden: ekkor is igaz a tétel, de az állítása triviális.

Legyen adott a

$$Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kvadratikus alak, a $B \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbf{R}^n : Bx = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m < n$, és a $B$ mátrix rangja $m$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $Q$ kvadratikus alak a $B$-re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x) > 0$ $(0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;
2. *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x) > 0$ $(0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;
3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0$ $(x \in \mathcal{A}_B)$;
4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0$ $(x \in \mathcal{A}_B)$.

## 2.2 Másodrendű elégséges feltétel

**Tétel.** Az $n, m \in \mathbf{N}, 1 \leq m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja $m$, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre

1. $\mathrm{grad}\, F(c) = 0$;
2. A $Q_c^F$ kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az $f$-nek a $c$-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Idézzük fel, hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x,\, x\rangle \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

## 2.3 Másodrendű szükséges feltétel

**Tétel.** Az $n, m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$, $f, g \in D^2$ függvények. Tegyük fel, hogy valamilyen $c \in \{g = 0\}$ helyen $f$-nek lokális minimuma (maximuma) van a $\{g = 0\}$ feltételre vonatkozóan, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik $m$-mel. Ekkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$, hogy az $F := f + \lambda g$ függvényre az alábbiak teljesülnek:

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. a $Q_c^F$ kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) **szemi**definit.

# 3 Vizsgakérdés

*A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.*

## 3.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

> határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:
>
> 1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
> 2. $\varphi \in D$;
> 3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti $\varphi$ függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik $\varphi$ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő $f$ függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala.*

## 3.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges $\varphi$, $\psi$ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ egy ($\tau$-t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor $\mathcal{M}$ a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy $\tau$-t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \to \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M},\, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x,\, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi_{|\mathcal{D}_\varphi}$.

A $\Phi$ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

## 3.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az $I$, $J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \to \mathbf{R},\, h : J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot h(y) \quad \big((x,\, y) \in I \times J\big).$$

A $\varphi \in I \to J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

**Tétel.** Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen $\varphi$, $\psi$ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Mivel a $h$ függvény sehol sem nulla, ezért egy $\varphi$ megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \to \mathbf{R}$ is, és az $1/h : J \to \mathbf{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \to \mathbf{R},\ H : J \to \mathbf{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a $\mathcal{D}_\varphi$ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a $J$ intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a $H'$ függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a $H'$ állandó előjelű. Következésképpen a $H$

függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A $H^{-1}$ inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a $\varphi$ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}\big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a $G$, $H$ helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek $\tilde{G}$, $\tilde{H}$), akkor alkalmas $\alpha$, $\beta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha,\ \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik $G$, $H$ primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a $\psi$ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi$, $\mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy $\tau$-t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a $G$, $H$ primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x,\, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I,\, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \to \mathbf{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x,\, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I,\, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x,\, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I,\, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az $F$ függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau,\, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau,\, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az $F$-re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I$, $K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az $F$ által a $(\tau,\, \xi)$ körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \to K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t,\, \varphi(t))}{\partial_2 F(t,\, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a $\varphi$ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ∎

## 3.4 Rakéta emelkedési ideje

*Egy $m$ tömegű rakétát $v_0$ kezdősebességgel függőlegesen fellövünk (függőleges hajítás). Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő (jelöljük $\alpha$-val a nehézségi gyorsulást) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen $\beta$). Mennyi ideig emelkedik a rakéta?*

Ha $v \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor – feltételezve, hogy $v \in D$, $\mathcal{D}_v$ intervallum és $0 \in \mathcal{D}_v$ – a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika Newton-féle mozgástörvényeit): adott $m$, $\alpha$, $\beta$ pozitív számok mellett olyan differenciálható $v$ függvényt keresünk, amelyre

$$mv'(t) = -m\alpha - \beta v^2(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Világos, hogy $v(0) = v_0$. Azt a $T \in \mathcal{D}_v$ "pillanatot" kell meghatározni, amikor $v(T) = 0$.

$$I := J := \mathbf{R},\ g(x) := -\alpha,\ h(y) := 1 + \frac{\beta y^2}{m\alpha} \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

választással egy szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Legyen $\tau := 0$, $\xi := v_0$, ekkor a

$$G(x) := \int_0^x -\alpha\, dt = -\alpha x \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$H(y) := \int_{v_0}^{y} \frac{1}{1 + \frac{\beta t^2}{m\alpha}}\, dt =$$

$$\sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \cdot \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot y - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (y \in \mathbf{R})$$

függvények eleget tesznek az előbbi tétel bizonyításában mondottaknak. Következésképpen

$$H(v(t)) = G(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v),$$

azaz

$$\operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t) \right) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

A $v(T) = 0$ egyenlőségből a $t := T$ helyettesítéssel – figyelembe véve, hogy $\operatorname{arctg}(0) = 0$ – az adódik, hogy

$$T = \sqrt{\frac{m}{\beta\alpha}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right).$$

## 3.5 Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen $n := 1$, és az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \to \mathbf{R} \text{ és } h : I \times J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad \big((x, y) \in I \times J\big).$$

Ekkor a fenti minden $\varphi$ megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott d.e. *egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto \big(g(x, y), h(x, y)\big) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \to \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$\operatorname{grad} G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g, h).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a $\varphi$ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

**Tétel**. Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen $\varphi$, $\psi$ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Valóban, $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt a feltételezett $\varphi$ megoldásra

$$g(x,\, \varphi(x)) + h(x,\, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen $\varphi$ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x,\, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \left\langle \operatorname{grad} G(x,\, \varphi(x)),\, (1,\, \varphi'(x)) \right\rangle =$$

$$g(x,\, \varphi(x)) + h(x,\, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ halmaz nyílt intervallum, ezért az $F$ konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x,\, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(\tau) = \xi$, ezért

$$c = G(\tau,\, \xi).$$

A $G$-ről feltehetjük, hogy $G(\tau,\, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó k.é.p. $\varphi$ megoldása eleget tesz a

$$G(x,\, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a $\varphi$ nem más, mint egy, a $G$ által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó k.é.p. minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau,\, \xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau,\, \xi) = h(\tau,\, \xi) \neq 0,$$

ezért a $G$-re (a $(\tau, \xi)$ helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \to J$$

(implicit)függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi,\ G(x,\, \psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi),\ \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x,\, \psi(x))}{\partial_2 G(x,\, \psi(x))} = -\frac{g(x,\, \psi(x))}{h(x,\, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

## 3.6 Multiplikátor módszer

Az egzakt differenciálegyenlet definíciójában szereplő $\operatorname{grad} G = (g,\, h)$ feltételből a

$$\partial_1 G = g,\ \partial_2 G = h$$

egyenlőségek következnek. Ha $g,\, h \in D$, akkor $G \in D^2$, így a Young-tétel miatt

$$\partial_{12} G = \partial_2 g = \partial_{21} G = \partial_1 h,$$

azaz ekkor a

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel teljesülése szükséges az "egzaktsághoz".

Azonban, ha $g,\, h \in D$, de ez előző

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel nem teljesül, akkor esetenként alkalmas ekvivalens átalakításokkal a feladat "egzakt alakra hozható". Ezek közül az átalakítások közül az ún. *multiplikátor módszer* a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy a

$$\mu : I \times J \to \mathbf{R}$$

differenciálható függvény (pl.) minden helyen pozitív. Ekkor a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\, \varphi(x))}{h(x,\, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség nyilván ekvivalens a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\, \varphi(x)) \cdot \mu(x,\, \varphi(x))}{h(x,\, \varphi(x)) \cdot \mu(x,\, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel, azaz a $g$, $h$ függvények "kicserélhetők" a $g\mu$, $h\mu$ függvényekre. Ekkor az egzaktságnak az előző megjegyzésben megfogalmazott szükséges feltételéhez a

$$\partial_2(g\mu) = g \cdot \partial_2\mu + \mu \cdot \partial_2 g = \partial_1(h\mu) = h \cdot \partial_1\mu + \mu \cdot \partial_1 h$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük.

# 4 Vizsgakérdés

*Lineáris differenciálegyenlet. Az állandók variálásának módszere. A radioaktív bomlás felezési idejének meghatározása.*

## 4.1 Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most $n := 1$ és az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a

$$g,\, h : I \to \mathbf{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad \big((x,\, y) \in I \times \mathbf{R}\big).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$ mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a $\theta$ függvény is és a $\psi$ függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot \big(\theta(t) - \psi(t)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben $h \equiv 0$:

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő $h$ függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

**Tétel.** Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges $\varphi$, $\psi$ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Legyen a

$$G : I \to \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és $G' = g$ (a $g$-re tett feltételek miatt ilyen $G$ primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \to \mathbf{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \to \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\left(\frac{\chi}{\varphi_0}\right)'(t) = \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} =$$

$$\frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0,$$

azaz (lévén a $\mathcal{D}_\chi$ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \to \mathbf{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen $\chi$ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a $\theta$ függvény is és a $\psi$ függvény is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \to \mathbf{R}$$

függvény, hogy az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az $m$-re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen $m$ függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \to \mathbf{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a $h/\varphi_0$ függvény bármelyik $m$ primitív függvényét is véve, az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \to \mathbf{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol $m$ egy tetszőleges primitív függvénye a $h/\varphi_0$ függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbf{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ez megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$\varphi'(t) = m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) =$$

$$\frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J).$$

Speciálisan az "egész" $I$ intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbf{R},\, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik $\varphi$ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c_{|_J}}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \to \mathbf{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden $\varphi$, $\psi$ megoldására $\varphi = \psi_{c_{|_{\mathcal{D}_\varphi}}}$ és $\psi = \psi_{c_{|_{\mathcal{D}_\psi}}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

■

A tétel bizonyításából a következők is kiderültek: legyen

$$\mathcal{M} := \{\varphi : I \to \mathbf{R} : \varphi \in D,\, \varphi'(t) = g(t)\cdot\varphi(t) + h(t) \quad (t \in I)\},$$

$$\mathcal{M}_h := \{\varphi : I \to \mathbf{R} : \varphi \in D,\, \varphi'(t) = g(t)\cdot\varphi(t) \quad (t \in I)\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{M}_h = \{c\cdot\varphi_0 : c \in \mathbf{R}\}$$

(azaz algebrai nyelven mondva az $\mathcal{M}_h$ egy 1 dimenziós vektortér), és

$$\mathcal{M} = m\cdot\varphi_0 + \mathcal{M}_h := \{\varphi + m\cdot\varphi_0 : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

Itt $m\cdot\varphi_0$ helyébe bármelyik $\psi \in \mathcal{M}$ (ún. *partikuláris megoldás*) írható, így

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h = \{\varphi + \psi : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

## 4.2 Radioaktív bomlás

*Radioaktív anyag bomlik, a bomlási sebesség egyenesen arányos a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. A bomlás kezdetétől számítva mennyi idő alatt bomlik el az anyag fele?*

Legyen $m_0$ az anyag eredeti, $\varphi(t)$ pedig a $t \quad (t \in \mathbf{R})$ időpontban még el nem bomlott anyag mennyisége. A feladatban szereplő arányossági tényező $0 < \alpha \in \mathbf{R}$. Ekkor

$$\varphi'(t) = -\alpha\varphi(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol $\varphi(0) = m_0$. A $T$ *(felezési időt)* keressül, amikor is $\varphi(T) = m_0/2$.

Ez egy homogén lineáris differenciálegyenlet, ahol $g \equiv -\alpha$. Ezért (pl.)

$$G(t) = -\alpha t \quad (t \in I).$$

valamint

$$\varphi_0(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \in I),$$

ill.

$$\varphi(t) = ce^{-\alpha t} \quad (t \in I,\, c \in \mathbf{R}).$$

Mivel

$$m_0 = \varphi(0) = c,$$

ezért

$$\varphi(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (t \in I).$$

A $T$ definíciója alapján

$$\varphi(T) = m_0 e^{-\alpha T} = \frac{m_0}{2},$$

azaz $e^{-\alpha T} = 1/2$. Innen

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

# 5 Vizsgakérdés

*Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása). A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel (bizonyítás nélkül).*

## 5.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;
4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciatétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett az $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt. Az $f$ függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az $f$ (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek.*

## 5.2 Egzisztenciatétel

**Tétel (Picard-Lindelöf).** Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.

**Bizonyítás (vázlat).** Legyenek a $\delta_1$, $\delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to \Omega : \psi \in C\}.$$

Az $\mathcal{F}$ halmaz a

$$\rho(\phi,\, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi,\, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha $\mathcal{X}$ jelöli a

$$g : I_* \to \mathbf{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \mathbf{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F},\, x \in I_*).$$

Tehát az $f$ függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" $f_1, \ldots, f_n$ szimbólumokkal jelölve, a $\psi$, $f$ függvények (és egyúttal az $f_i$-k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t,\, \psi(t)) \in \mathbf{R} \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

függvények folytonosak. Következőképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

integrálóknak, és így a

$$\xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt := (\xi_1 + d_1,\, \dots,\, \xi_n + d_n) \in \mathbf{R}^n$$

"integrálvektoroknak". Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x,\, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az $I_*$ alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_\mu := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - \xi\|_\infty \leq \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen $\mu$ az $\Omega$ nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x,\, y)\|_\infty : x \in I_*,\, y \in K_\mu\}$$

(ami meg az $f$ folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_\mu$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt\right| : i = 1,\, \dots,\, n\right\} \leq \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az $\mathcal{F}$ definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to K_\mu : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$-val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1,\, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \leq \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is $\mathcal{F}$-beli. (Ha a kiindulásul választott $\delta_1,\, \delta_2$-re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a $\delta_1,\, \delta_2$ helyébe olyan "új" $0 < \tilde{\delta}_1,\, \tilde{\delta}_2$-t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1,\, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2]$$

és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$

legyen. Az $I_*$ helyett az $\tilde{I_*} := [\tau - \tilde{\delta_1},\, \tau + \tilde{\delta_2}]$ intervallummal az "új" $M$ az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi,\, \psi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\rho(T\psi,\, T\phi) = \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} =$$

$$\max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))\, dt)\right| : i = 1,\, \ldots,\, n\right\} : x \in I_*\right\} \leq$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))| : i = 1,\, \ldots,\, n\}\, dt\right| : x \in I_*\right\} =$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty\, dt\right| : x \in I_*\right\}.$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t,\, y) - f(t,\, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q),$$

speciálisan

$$\|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty \leq$$

$$L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty \leq L_Q \cdot \rho(\psi,\, \phi) \quad (t \in I_*).$$

Ezért

$$\rho(T\psi,\, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi,\, \phi).$$

Tehát a $T$ leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1,\, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a $\delta_1$, $\delta_2$-t, (ezt - az "eddigi" $I_*$-ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre

$$T\phi = \phi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad \big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\big).$$

A $T$ definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t, \varphi(t))\, dt \quad \big(x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)\big).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\varphi$ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \big(x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)\big).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a $\varphi$ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A fenti Picard-Lindelöf-egzisztenciatételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja.

**Tétel.** Az előző tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg, azaz bármely $\varphi, \psi$ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Legyen az $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ jobb oldal olyan, hogy $\Omega := \mathbf{R}^n$, és (az előző tétel feltételein kívül) valamilyen $\alpha, \beta$ pozitív együtthatókkal

$$\|f(x, y)\|_\infty \leq \alpha \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I,\ y \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor belátható, hogy az $f$ által meghatározott differenciálegyenletre vonatkozó bármelyik k.é.p. teljes megoldása az $I$-n van értelmezve.

# 6 Vizsgakérdés

*A lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata: homogén, inhomogén rendszerek. A megoldáshalmaz szerkezete.*

## 6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és egy nyílt $I \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \to \mathbf{R} \quad (i,\, k = 1,\, \ldots,\, n),\, b = (b_1,\, \ldots,\, b_n) : I \to \mathbf{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := \big(a_{ik}(x)\big)_{i,\, k=1}^{n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

*mátrixfüggvényt.* Ha

$$f(x,\, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad ((x,\, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

akkor az $f$ függvény, mint jobb oldal által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ($n > 1$ esetén *lineáris differenciálegyenlet-rendszernek*) nevezzük.

Legyenek a fentieken túl adottak még a $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{K}^n$ értékek, és vizsgáljuk a $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p.-t. Ha $I_* \subset I$, $\tau \in \operatorname{int} I_*$, kompakt intervallum, akkor

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} \in \mathbf{R} \quad (i,\, k = 1,\, \ldots,\, n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} \in \mathbf{R}.$$

Következésképpen

$$\|f(x,\, y) - f(x,\, z)\|_\infty = \|A(x) \cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y - z\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (x \in I_*,\, y,\, z \in \mathbf{K}^n).$$

Továbbá a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\in \mathbf{R})$$

jelöléssel

$$\|f(x,\, y)\|_\infty = \|A(x)\cdot y + b(x)\|_\infty \le \|A(x)\cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \le$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \le q\cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I_*,\, y \in \mathbf{K}^n),$$

ezért minden k.é.p. teljes megoldása az $I$ intervallumon van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó d.e. *homogén*, ha $b \equiv 0$, *inhomogén*, ha létezik $x \in I$, hogy $b(x) \neq 0$. Legyenek

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D,\, \psi' = A\cdot\psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D,\, \psi' = A\cdot\psi + b\}.$$

## 6.2 Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptétele

**Tétel.** A bevezetésben mondott feltételek mellett

1. az $\mathcal{M}_h$ halmaz $n$ dimenziós lineáris tér a $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\psi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a $\phi_k = (\phi_{k1},\, \ldots,\, \phi_{kn})$ $(k = 1,\, \ldots,\, n)$ függvények bázist alkotnak az $\mathcal{M}_h$-ban, akkor léteznek olyan $g_k : I \to \mathbf{K}$ $(k = 1,\, \ldots,\, n)$ differenciálható függvények, amelyekkel

$$\psi := \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

**Bizonyítás.** Az 1. állítás bizonyításához mutassuk meg először is azt, hogy bármilyen $\psi,\, \varphi \in \mathcal{M}_h$ és $c \in \mathbf{K}$ esetén $\psi + c\cdot\varphi \in \mathcal{M}_h$:

$$(\psi + c\cdot\varphi)' = \psi' + c\cdot\varphi' = A\cdot\psi + c\cdot A\cdot\varphi = A(\psi + c\cdot\varphi),$$

amiből a mondott állítás az $\mathcal{M}_h$ definíciója alapján nyilvánvaló. Tehát az $\mathcal{M}_h$ lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett.

Most megmutatjuk, hogy ha $m \in \mathbf{N}$, és $\chi_1, \ldots, \chi_m \in \mathcal{M}_h$, tetszőleges függvények, akkor az alábbi ekvivalencia igaz:

> a $\chi_1, \ldots, \chi_m$ függvények akkor és csak akkor alkotnak lineárisan független rendszert az $\mathcal{M}_h$ vektortérben, ha bármilyen $\tau \in I$ esetén a $\chi_1(\tau), \ldots, \chi_m(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek a $\mathbf{K}^n$-ben.

Az ekvivalencia egyik fele nyilvánvaló: ha a $\chi_1, \ldots, \chi_m$-ek lineárisan összefüggnek, akkor alkalmas $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{K}$, $|c_1| + \cdots + |c_n| > 0$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k \equiv 0.$$

Speciálisan minden $\tau \in I$ helyen is

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0 \quad (\in \mathbf{K}^n).$$

Így a $\chi_1(\tau), \ldots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggő rendszert alkotnak a $\mathbf{K}^n$-ben.

Fordítva, legyen $\tau \in I$, és tegyük fel, hogy a $\chi_1(\tau), \ldots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggnek. Ekkor az előbbi (nem csupa nulla) $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{K}$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0.$$

Már tudjuk, hogy

$$\phi := \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k \in \mathcal{M}_h,$$

ezért az így definiált $\phi : I \to \mathbf{K}^n$ függvény megoldása a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \, \varphi(\tau) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának. Világos ugyanakkor, hogy a $\Psi \equiv 0$ is a most mondott k.é.p. megoldása az

$I$-n. Azt is tudjuk azonban, hogy (ld. fent) ez a k.é.p. (is) egyértelműen oldható meg, ezért $\phi \equiv \Psi \equiv 0$. Tehát a $\chi_1, \ldots, \chi_m$ függvények is összefüggnek.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy az $\mathcal{M}_h$ vektortér véges dimenziós és a $\dim \mathcal{M}_h$ dimenziója legfeljebb $n$.

Tekintsük most a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \; \varphi(\tau) = e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

kezdetiérték-problémákat, ahol az $e_i \in \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \ldots, n)$ vektorok a $\mathbf{K}^n$ tér "szokásos" (kanonikus) bázisvektorait jelölik. Ha

$$\chi_i : I \to \mathbf{K}^n$$

jelöli az említett k.é.p. teljes megoldását, akkor a

$$\chi_i(\tau) = e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Így az előbbiek alapján a $\chi_1, \ldots, \chi_n$ függvények is azok. Tehát az $\mathcal{M}_h$ dimenziója legalább $n$, azaz a fentiekre tekintettel $\dim \mathcal{M}_h = n$.

A 2. állítás igazolásához legyen $\chi \in \mathcal{M}_h$. Ekkor $\psi + \chi \in D$, és

$$(\psi + \chi)' = \psi' + \chi' = A \cdot \psi + b + A \cdot \chi = A \cdot (\psi + \chi) + b,$$

amiből $\psi + \chi \in \mathcal{M}$ következik. Ha most egy $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényből indulunk ki és $\chi := \varphi - \psi$, akkor $\chi \in D$, és

$$\chi' = \varphi' - \psi' = A \cdot \varphi + b - (A \cdot \psi + b) = A \cdot (\varphi - \psi) = A \cdot \chi,$$

amiből $\chi \in \mathcal{M}_h$ adódik. Tehát $\varphi = \psi + \chi$ a 2.-ben mondott előállítása a $\varphi$ függvénynek.

A tétel 3. részének a bizonyítása érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket, ill. fogalmakat. A

$$\phi_k = (\phi_{k1}, \ldots, \phi_{kn}) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

bázisfüggvények mint oszlopvektor-függvények segítségével tekintsük a

$$\Phi : I \to \mathbf{K}^{n\times n}$$

mátrixfüggvényt:

$$\Phi := \begin{bmatrix}\phi_1 & \cdots & \phi_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{n1}\\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{n2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots & \phi_{nn}\end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\Phi' := \begin{bmatrix}\phi_1' & \cdots & \phi_n'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{11}' & \phi_{21}' & \cdots & \phi_{n1}'\\ \phi_{12}' & \phi_{22}' & \cdots & \phi_{n2}'\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \phi_{1n}' & \phi_{2n}' & \cdots & \phi_{nn}'\end{bmatrix}$$

a $\Phi$ deriváltja. Ekkor könnyen belátható, hogy

$$\Phi' = A \cdot \Phi.$$

Továbbá tetszőleges $g_1, \ldots, g_n : I \to \mathbf{K}$ differenciálgató függvényekkel a

$$g := (g_1, \ldots, g_n) : I \to \mathbf{K}^n$$

vektorfüggvény differenciálható,

$$\psi := \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \phi_k = \Phi \cdot g,$$

és

$$\psi' = \Phi' \cdot g + \Phi \cdot g' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g'.$$

A $\psi \in \mathcal{M}$ tartalmazás nyilván azzal ekvivalens, hogy

$$\psi' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g' = A \cdot \psi + b = A \cdot (\Phi \cdot g) + b = (A \cdot \Phi) \cdot g + b,$$

következésképpen azzal, hogy

$$\Phi \cdot g' = b.$$

A 2. pont alapján tetszőleges $x \in I$ helyen a $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz a $\Phi(x)$ mátrix nem szinguláris. A mátrixok inverzének a kiszámítása alapján egyszerűen adódik, hogy a

$$\Phi^{-1}(x) := \big(\Phi(x)\big)^{-1} \quad (x \in I)$$

definícióval értelmezett

$$\Phi^{-1} : I \to \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény komponens-függvényei is folytonosak. Ezért a

$$(h_1, \ldots, h_n) := \Phi^{-1} \cdot b : I \to \mathbf{K}^n$$

függvény is folytonos. Olyan folytonosan differenciálható

$$g : I \to \mathbf{K}^n$$

függvényt keresünk tehát amelyikre $g' = \Phi^{-1} \cdot b$, azaz

$$g_i' = h_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ilyen $g_i$ létezik, nevezetesen a (folytonos) $h_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ függvények bármelyik primitív függvénye ilyen. ■

# 7 Vizsgakérdés

*Alaprendszer, alapmátrix. Az állandók variálásának a módszere. Alapmátrix előállítása állandó együtthatós diagonalizálható mátrix esetén. Az $n = 2$ eset vizsgálata tetszőleges, állandó együtthatós mátrixra.*

## 7.1 Alaprendszer, alapmátrix

Az $\mathcal{M}_h$ vektortérben minden bázist az illető egyenlet *alaprendszerének* nevezünk. Ha $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$ egy alaprendszer, akkor a

$$\Phi := \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{bmatrix} : I \to \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet (egy) ún. *alapmátrixa.* Tehát

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \phi_k : c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{K} \right\} = \{\Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n\}.$$

Az $\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h$ előállításban minden $\psi \in \mathcal{M}$ függvényt *partikuláris megoldásként* említünk.

## 7.2 Állandók variálásának módszere

Ld. 6.2 alcímben tárgyalt tétel 3. pontjának bizonyítása. A partikuláris megoldás

$$\psi = \Phi \cdot g$$

alakban való előállítása (alkalmas $g : I \to \mathbf{K}^n$ differenciálható függvénnyel) az 6.2 alcímben tárgyalt tétel bizonyításában bemutatott módszer az *állandók variálása.* Tetszőleges $\phi_1, \ldots, \phi_n$ alaprendszerrel és $\psi \in \mathcal{M}$ partikuláris megoldással

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \phi_k : c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{K} \right\}.$$

Ha $\Phi$ egy alapmátrix, akkor ugyanez a következőképpen írható:

$$\mathcal{M} = \{\psi + \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n\} = \{\Phi \cdot (g + c) : c \in \mathbf{K}^n\}.$$

## 7.3 Állandó együtthatós diagonalizálható eset

Legyen most

$$f(x, y) := A \cdot y + b(x) \quad \big((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n\big),$$

ahol $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum mellett

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n},\ b : I \to \mathbf{R}^n,\ b \in C.$$

Tegyük fel, hogy $A$ diagonalizálható, azaz létezik $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$, hogy $T^{-1}AT$ mátrix diagonális: alkalmas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ számokkal

$$\Lambda := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$T$ invertálhatósága miatt a

$$T = [t_1 \cdots t_n]$$

$t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$AT = [At_1 \cdots At_n] = T\Lambda = [\lambda_1 \cdot t_1 \cdots \lambda_n \cdots t_n]$$

miatt

$$A \cdot t_i = \lambda_i \cdot t_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Mivel

$$t_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ezért mindez röviden azt jelenti, hogy a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számok az $A$ mátrix sajátértékei, a $t_1, \ldots, t_n$ vektorok pedig rendre a megfelelő sajátvektorok. Lévén, a $t_i$-k lineárisan függetlenek, az $A$-ra vonatkozó feltételünk úgy fogalmazható, hogy van a $\mathbf{K}^n$-ben (az $A$ sajátvektoraiból álló) sajátvektorbázis.

A homogén egyenlet tehát a következőképpen írható fel:

$$\varphi' = A \cdot \varphi = T\Lambda T^{-1} \cdot \varphi,$$

amiből

$$(T^{-1}\varphi)' = \Lambda \cdot (T^{-1}\varphi)$$

következik. Vegyük észre, hogy ha $\varphi \in \mathcal{M}_h$, akkor a $\psi := T^{-1}\varphi$ függvény megoldása a $\Lambda$ diagonális mátrix által meghatározott állandó együtthatós homogén lineáris egyenletnek. Ez utóbbit ez előző tétel alapján nem nehéz megoldani. Legyenek ui. a

$$\psi_i : I \to \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

függvények a következők:

$$\psi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n).$$

Világos, hogy $\psi_i \in D$ és

$$\psi_i'(x) = \lambda_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot (\Lambda \cdot e_i) =$$
$$\Lambda \cdot (e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i) = \Lambda \cdot \psi_i(x) \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n).$$

Más szóval a $\psi_i$-k valóban megoldásai a $\Lambda$ által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek. Mivel bármely $\tau \in I$ esetén a

$$\psi_i(\tau) = e^{\lambda_i \cdot \tau} \cdot e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

vektorok nyilván lineárisan függetlenek, ezért az előző tétel bizonyításában mondottak szerint a $\psi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények lineárisan függetlenek. Ha

$$\phi_i := T \cdot \psi_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

akkor nyilván a $\phi_i$-k is lineárisan függetlenek,

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n),$$

és minden $i = 1, \ldots, n$ indexre

$$\phi_i' = A \cdot \phi_i.$$

Tehát $\phi_i \in \mathcal{M}_h$ $(i = 1, \ldots, n)$ egy bázis. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrix diagonalizálható. Legyenek a sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, egy-egy megfelelő sajátvektora pedig $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{K}^n$. Ekkor a

$$\varphi' = A \cdot \varphi$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a

$$\phi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in \mathbf{R},\, i = 1, \ldots, n)$$

függvények lineárisan független megoldásai.

## 7.4 Tetszőleges állandó együtthatós mátrix

Tekintsük az $n = 2$ esetet, amikor is valamilyen $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbf{R}$ számokkal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a mátrix pontosan akkor nem diagonalizálható, ha

$$(a-d)^2 + 4bc = 0 \text{ és } |b| + |c| > 0.$$

Ekkor egyetlen sajátértéke van az $A$-nak nevezetesen

$$\lambda := \frac{a+d}{2},$$

legyen a $t_1$ egy hozzá tartozó sajátvektor:

$$0 \neq t_1 \in \mathbf{R}^2,\ At_1 = \lambda t_1.$$

Egyszerű számolással igazolható olyan $t_2 \in \mathbf{R}^2$ vektor létezése, amelyik lineárisan független a $t_1$-től és

$$At_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ha mármost a $T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrix oszlopvektorai rendre a $t_1$, $t_2$ vektorok: $T := [t_1\, t_2]$, akkor

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva könnyen belátható, hogy a

$$\phi_1(x) := e^{\lambda x} \cdot t_1,\ \phi_2(x) := e^{\lambda x} \cdot (t_2 + xt_1) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy alaprendszer. Valóban, $\phi_i \in \mathcal{M}_h \quad (i = 1,\, 2)$, mert egyrészt

$$\phi_1'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_1 = e^{\lambda x} At_1 = A(e^{\lambda x} \cdot t_1) = A\phi_1(x),$$

másrészt

$$\phi_2'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_2 + e^{\lambda x} \cdot t_1 + \lambda e^{\lambda x} x \cdot t_1 = e^{\lambda x}\big((t_1 + \lambda \cdot t_2) + \lambda x \cdot t_1\big) =$$

$$e^{\lambda x}(At_2 + xAt_1) = A\big(e^{\lambda x}(t_2 + x \cdot t_1)\big) = A\phi_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a

$$\phi_1(0) = t_1,\ \phi_2(0) = t_2$$

vektorok lineárisan függetlenek, ezért a $\phi_1$, $\phi_2$ függvények is lineárisan függetlenek, azaz a $\phi_1$, $\phi_2$ egy alaprendszer.

## 7.5 Valós értékű megoldások

Tegyük fel, hogy a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ (diagonalizálható) együtthatómátrixnak egy sajátértéke, a $t_\lambda \in \mathbf{K}^n$ vektor pedig egy $\lambda$-hoz tartozó sajátvektor. Ha a $\lambda$ valós, akkor nyilván a $t_\lambda$ sajátvektor is választható "valósnak", azaz feltehető, hogy $t_\lambda \in \mathbf{R}^n$. Ebben az esetben az $\mathcal{M}_h$-beli

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda \quad (x \in \mathbf{R})$$

bázisfüggvény is "valós" tehát $\phi_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$.

Ha viszont a $\lambda$ (nem valós) komplex szám, azaz

$$\lambda = u + \imath v \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$$

(alkalmas $u \in \mathbf{R}$ és $0 \neq v \in \mathbf{R}$ számokkal), akkor – lévén az $A$ karakterisztikus polinomja valós együtthatós – az $A$-nak egyúttal a

$$\overline{\lambda} = u + \imath v$$

(komplex konjugált) is (ugyanannyiszoros) sajátértéke. Hasonlóan, ha a

$$t_\lambda = S_\lambda + \imath Y_\lambda \in \mathbf{K}^n$$

vektor (alkalmas $S_\lambda, Y_\lambda \in \mathbf{R}^n$ vektorokkal) az $A$-nak a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektora, akkor a

$$\bar{t}_\lambda = S_\lambda - \imath Y_\lambda$$

vektor a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátvektor. Továbbá a megfelelő bázisfüggvények a következők:

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda,\ \phi_{\overline{\lambda}}(x) := e^{\overline{\lambda} x} \cdot \bar{t}_\lambda \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Rövid számolással ellenőrizhető, hogy

$$\phi_{\overline{\lambda}}(x) = \overline{\phi_\lambda(x)} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a homogén egyenlet (teljes) megoldásainak az $\mathcal{M}_h$ halmaza a $\mathbf{K}$ felett vektortér, ezért a

$$\frac{\phi_\lambda + \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Re}\phi_\lambda,\ \frac{\phi_\lambda - \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Im}\phi_\lambda$$

függvények is $\mathcal{M}_h$-beliek. Világos, hogy

$$e^{\lambda x} = e^{ux} \cdot \big(\cos(vx) + \imath \sin(vx)\big) \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt

$$\phi_{\lambda,\,r}(x) := \operatorname{Re}\phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot \big(\cos(vx) \cdot S_\lambda - \sin(vx) \cdot Y_\lambda\big) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\phi_{\lambda,\,i}(x) := \operatorname{Im}\phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot \big(\sin(vx) \cdot S_\lambda + \cos(vx) \cdot Y_\lambda\big) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$\phi_{\lambda,\,r}(0) = S_\lambda = \frac{t_\lambda + \overline{t_\lambda}}{2},$$

$$\phi_{\lambda,\,i}(0) = Y_\lambda = \frac{t_\lambda - \overline{t_\lambda}}{2\imath}.$$

A $t_\lambda$, $\bar{t}_\lambda$ sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért az $S_\lambda$, $Y_\lambda$ vektorok is azok, következésképpen a $\phi_{\lambda,\,r}$, $\phi_{\lambda,\,i}$ függvények is lineárisan függetlenek. Így $\phi_\lambda$, $\phi_{\overline{\lambda}}$ függvényeket kicserélve az előző függvényekre, továbbra is alaprendszert kapunk.

# 8 Vizsgakérdés

*Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere.*

## 8.1 Új feladat megfogalmazása

Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, az

$$a_k : I \to \mathbf{R} \quad (k = 0, \ldots, n-1),\ c : I \to \mathbf{R}$$

függvényekről tegyük fel, hogy folytonosak. Olyan $\varphi \in I \to \mathbf{K}$ függvényt keresünk, amelyikre

1. $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D^n$;
3. $\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^k(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Ezt a feladatot röviden *$n$-edrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan $\varphi$ függvény amelyik eleget tesz az előbbi kívánalmaknak, az illető differenciálegyenlet (egy) *megoldása*.

Tegyük fel, hogy a fentieken túl adottak még a

$$\tau \in I,\ \xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$$

számok. Ha az előbbi $\varphi$ megoldástól azt is elvárjuk, hogy

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$,

akkor a szóban forgó $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó *kezdetiérték-problémáról* beszélünk.

Ha $n = 1$, akkor egy lineáris differenciálegyenletről van szó, ezért a továbbiakban nyugodtan feltehetjük már, hogy $n \geq 2$.

Az *átviteli elv* segítségével a most megfogalmazott feladat visszavezethető a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatára. (A későbbiekben szereplő állítások is részben ennek az elvnek a segítségével láthatók majd be.) Vezessük be ui. az alábbi jelöléseket: legyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$ és

$$b := (b_1, \ldots, b_n) : I \to \mathbf{R}^n,\ b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(x) \end{pmatrix} \quad (x \in I),$$

$$A := (a_{ik})_{i,\,k=1}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} : I \to \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Ekkor

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad (x \in I,\ y \in \mathbf{K}^n).$$

Ha tehát a

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in I \to \mathbf{K}^n$$

differenciálható függvény ez utóbbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek (egy) megoldása, akkor $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum, és bármely $x \in \mathcal{D}_\psi$ esetén

$$\psi'(x) = A(x) \cdot \psi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

Azaz

$$\begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n' \end{pmatrix} = \psi_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_0 \end{pmatrix} + \psi_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \cdots + \psi_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}(-a_{k-1}) \cdot \psi_k + c \end{pmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \psi_i'(x) = \psi_{i+1}(x) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \\ \\ \psi_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-a_{k-1}(x)) \cdot \psi_k(x) + c(x). \end{cases} \tag{$\star$}$$

Ennek alapján eléggé nyilvánvaló az alábbi állítás.

## 8.2 Átviteli elv

**Tétel.** Ha a $\varphi$ függvény megoldása a fenti $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletnek, akkor az

$$I \ni x \mapsto \psi(x) := \big(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\big) \in \mathbf{K}^n$$

függvényre igazak a $(\star)$ egyenlőségek. Fordítva, ha a $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ függvény eleget tesz a $(\star)$-nak, akkor a $\varphi := \psi_1$ (első) komponensfüggvény megoldása a szóban forgó $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletnek. Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$ kezdeti értékek, és a $\varphi$, megoldása a

$$\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

k.é.p.-nak, akkor a $(\star)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszer előbbi $\psi$ megoldása kielégíti a

$$\psi(\tau) = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$$

kezdeti feltételt.

Legyen most

$$\mathcal{M}_h := \left\{\varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0\right\}.$$

Az $\mathcal{M}_h$ függvényhalmaz tehát nem más, mint a

$$c(x) := 0 \quad (x \in I)$$

esetnek megfelelő *homogén $n$-edrendű lineáris differenciálegyenlet* $I$ intervallumon értelmezett megoldásainak a halmaza. Legyen továbbá

$$\mathcal{M} := \left\{\varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c\right\}$$

a kiindulási $n$-edrendű lineáris differenciálegyenlet $I$-n értelmezett megoldásainak a halmaza. Az utóbbival kapcsolatban már nyilván feltehető, hogy valamilyen $x \in I$ helyen $c(x) \neq 0$, azaz az illető egyenlet *inhomogén*. Ekkor az átviteli elv alapján a következőket mondhatjuk.

## 8.3 Állandók variálásának módszere

**Tétel.** Az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletet illetően

1. az $\mathcal{M}_h$ halmaz $n$ dimenziós lineáris tér a $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\omega \in \mathcal{M}$ esetén
$$\mathcal{M} = \omega + \mathcal{M}_h := \{\omega + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$
3. ha a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ függvények bázist alkotnak az $\mathcal{M}_h$-ban, akkor léteznek olyan differenciálható $g_k : I \to \mathbf{K} \quad (k = 1, \ldots, n)$ függvények, amelyekkel
$$\omega := \sum_{k=1}^{n} g_k \varphi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyításképpen elegendő annyit megjegyezni, hogy az $\mathcal{M}_h$-beli

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m : I \to \mathbf{K} \quad (1 \leq m \in \mathbf{N})$$

függvények akkor és csak akkor függetlenek, ha a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j,\, \varphi_j',\, \ldots,\, \varphi_j^{(n-1)}\right) : I \to \mathbf{K}^n \quad (j = 1,\, \ldots,\, m)$$

(vektor)függvények is azok.

Ha $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$ bázis, akkor minden bázist (most is) *alaprendszernek*, az előző tételben szereplő $\omega$ függvényt pedig *partikuláris megoldásnak* nevezünk. Egy partikuláris megoldásnak az előző tétel szerinti előállítását az *állandók variálásaként* említjük,

Tegyük fel tehát, hogy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{M}_h$ alaprendszer, ekkor a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j,\, \varphi_j',\, \ldots,\, \varphi_j^{(n-1)}\right) \quad (j = 1,\, \ldots,\, n)$$

függvények alaprendszert alkotnak az átviteli elvből adódó $(\star)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozóan. Más szóval a

$$\Phi := [\hat{\varphi}_1 \cdots \hat{\varphi}_n] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} : I \to \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény alapmátrixa a $(\star)$-rendszernek. Innen tudjuk, hogy a

$$g = (g_1,\, \ldots,\, g_n) : I \to \mathbf{K}^n$$

jelöléssel a $\Phi \cdot g$ függvény pontosan akkor partikuláris megoldása a $(\star)$-nak (alkalmas differenciálható $g_1, \ldots, g_n : I \to \mathbf{K}$ függvényekkel), ha

$$\Phi \cdot g' = b = (0,\, \ldots,\, 0,\, c).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\Phi \cdot g$ függvény első komponense, azaz az

$$\omega := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot g_k$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldása az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletnek, ha

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varphi_1 \cdot g_1' & + & \varphi_2 \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n \cdot g_n' & = & 0 \\
\varphi_1' \cdot g_1' & + & \varphi_2' \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n' \cdot g_n' & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\varphi_1^{(n-2)} \cdot g_1' & + & \varphi_2^{(n-2)} \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-2)} \cdot g_n' & = & 0 \\
\varphi_1^{(n-1)} \cdot g_1' & + & \varphi_2^{(n-1)} \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-1)} \cdot g_n' & = & c.
\end{array}$$

Ennek a ($g_1', \ldots, g_n'$ függvényekre mint "ismeretlenekre" vonatkozó) lineáris (függvény)egyenletrendszernek a determinánsa (determináns-függvénye), azaz a

$$W(x) := \det\left(\varphi_i^{(k-1)}(x)\right)_{k,\,i=1}^{n} = \det\big(\Phi(x)\big) \quad (x \in I)$$

leképezés (az ún. *Wronski-determináns*) a $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n$ függvények lineáris függetlensége miatt egyetlen $x \in I$ helyen sem tűnik el.

# 9 Vizsgakérdés

*Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítása, a karakterisztikus polinom szerepe (a bizonyítás vázlata).*

Az előzőekben vizsgált

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

$n$-edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásához tehát elegendő az $\mathcal{M}_h$ egy bázisát meghatározni. Ez általában "reménytelen" feladat, általános módszer nem is adható.

Ezért csak abban az esetben tesszük ezt meg, ha az $a_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$ együtthatófüggvények mindegyike konstansfüggvény. Ez az ún. *állandó együtthatós* eset:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

A $c = 0$ (*homogén egyenlet*) választással

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} \equiv 0.$$

Tekintsük ehhez a

$$P(x) := x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad (x \in \mathbf{K})$$

$n$-edfokú polinomot, a differenciálegyenlet *karakterisztikus polinomját.*

Ha a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám a $P$-nek gyöke, akkor az

$$e_\lambda(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

és az $a_n := 1$ jelöléssel

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_\lambda^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot P(\lambda) = 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt az $e_\lambda$ függvény megoldása a szóban forgó homogén differenciálegyenletnek.

Legyen az előbbi $\lambda$ gyök multiplicitása $\nu \geq 2$. Belátjuk, hogy az

$$e_{\lambda,\, j}(x) := x^j e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R},\ j = 0,\, \ldots,\, \nu - 1)$$

függvények is megoldásai a homogén differenciálegyenletnek:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_{\lambda,\, j}^{(k)} \equiv 0.$$

Tegyük fel ui., hogy ezt valamilyen $j \in \mathbf{N}$ mellett minden olyan esetben már tudjuk, amikor (az aktuális differenciálegyenletre) $\nu - 1 \geq j$. Például a $j = 0$ ilyen, hiszen ezt az $e_{\lambda,\, 0} \equiv e_\lambda$ függvényre az előbb láttuk. Vegyük észre, hogy

$$e_{\lambda,\, j+1}(x) = x e_{\lambda,\, j}(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért (ami teljes indukcióval rögtön adódik)

$$e_{\lambda,\, j+1}^{(k)}(x) = x e_{\lambda,\, j}^{(k)}(x) + k e_{\lambda,\, j}^{(k-1)}(x) \quad (x \in \mathbf{R},\ 1 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Így – feltételezve most azt, hogy $\nu - 1 \geq j + 1$ – az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_{\lambda,\, j+1}^{(k)}(x) = x \cdot \sum_{k=0}^{n} e_{\lambda,\, j}^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} k a_k e_{\lambda,\, j}^{(k-1)}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} e_{\lambda,\, j}^{(k)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

A

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \varphi^{(k)} \equiv 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a karakterisztikus polinomja:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}t^k = P'(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol a $\lambda$ a $P'$ (derivált)polinomnak $\mu := \nu - 1$-szeres gyöke. Mivel $\mu - 1 \geq j$, ezért az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}e_{\lambda,\,j}^{(k)} \equiv 0,$$

következésképpen (a fentiekre tekintettel)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_{\lambda,\,j+1}^{(k)} \equiv 0.$$

Tehát az $e_{\lambda,\,j+1}$ függvény is megoldása a homogén egyenletnek.

## 9.1 Alaprendszer

Tegyük fel, hogy a $P$ gyöktényezős előállítása a következő:

$$P(x) = \prod_{l=1}^{k}(x-\lambda_l)^{\nu_l} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

ahol $1 \leq k \in \mathbf{N}$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{K}$ jelöli a $P$ összes, páronként különböző gyökét, $1 \leq \nu_l \in \mathbf{N}$ pedig a $\lambda_l$ gyök multiplicitását ($l = 1, \ldots, k$). Ekkor tehát a

$$\varphi_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\lambda_l x} \quad (x \in I,\ l = 1, \ldots, k \text{ és } j = 0, \ldots, \nu_l - 1)$$

függvények valamennyien $\mathcal{M}_h$-beliek.

Ennél még több is igaz, nevezetesen:

**Tétel.** A fentiekben definiált

$$\varphi_{lj} \quad (l = 1, \ldots, k \text{ és } j = 0, \ldots, \nu_l - 1)$$

függvények a szóban forgó állandó együtthatós $n$-edrendű lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét alkotják.

## 9.2 Valós értékű megoldások

Az előző tétel alapján kapott

$$\varphi_{lj}(x) := x^j e^{\lambda_l x} \quad (x \in I,\, l = 1, \ldots, k;\, j = 0, \ldots, \nu_l)$$

alaprendszerben a $\varphi_{lj}$ $(l = 1, \ldots, k;\, j = 0, \ldots, \nu_l)$ függvények valós értékűek, ha a szóban forgó $n$-edrendű lineáris differenciálegyenlet $P$ karakterisztikus polinomjában a $\lambda_l$ gyök valós szám. Ha viszont valamilyen $l = 1, \ldots, k$ esetén a $\lambda_l$ gyök nem valós komplex szám, akkor a következőket mondhatjuk. Legyen ekkor

$$\lambda_k = u_k + \imath v_l,$$

ahol $u_l,\, v_l \in \mathbf{R}$ és $v_l \neq 0$. Mivel a $P$ polinom valós együtthatós, ezért a

$$\overline{\lambda_l} = u_l + \imath v_l$$

komplex konjugált is $v_l$-szeres gyöke a $P$-nek. Ez azt jelenti, hogy a fenti alaprendszerben a

$$\hat{\varphi}_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\overline{\lambda_l} x} = \overline{\varphi_{lj}(x)} \quad (x \in I,\, j = 0, \ldots, \nu_l - 1)$$

függvények is szerepelnek. Tudjuk, hogy az $\mathcal{M}_h$ halmaz vektortér a $\mathbf{K}$-ra nézve, ezért

$$\phi_{lj} := \frac{\varphi_{lj} + \hat{\varphi}_{lj}}{2} = \operatorname{Re}\varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h \text{ és } \hat{\phi}_{lj} := \frac{\varphi_{lj} - \hat{\varphi}_{lj}}{2i} = \operatorname{Im}\varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h.$$

Itt tetszőleges $j = 0, \ldots, \nu_l - 1$ mellett

$$\phi_{lj}(x) = \operatorname{Re}\varphi_{lj}(x) = \operatorname{Re}\,(x^j \cdot e^{\lambda_l x}) = \operatorname{Re}\,(x^j \cdot e^{u_l x + \imath v_l x}) =$$

$$\operatorname{Re}\big(x^j \cdot e^{u_l x}(\cos(v_l x) + \imath \sin(v_l x)) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \cos(v_l x)\big) \quad (x \in I),$$

és (analóg számolás után)

$$\hat{\phi}_{lj}(x) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \sin(v_l x) \quad (x \in I).$$

Könnyen belátható, hogy ha a fenti $\varphi_{lj}$, $\hat{\varphi}_{lj}$ (összesen $2\nu_l$ darab) függvényt kicseréljük a $\phi_{lj}$, $\hat{\phi}_{lj}$ (ugyancsak $2\nu_l$ darab) függvényre, akkor továbbra is lineárisan független függvényrendszert kapunk. Ha ezt a cserét a $P$ polinom minden nem valós gyökével kapcsolatban megtesszük, akkor az $\mathcal{M}_h$ egy valós értékű függvényekből álló bázisát kapjuk, azaz egy valós függvényekből álló alaprendszert.

# 10 Vizsgakérdés

*Partikuláris megoldás kvázi-polinom jobb oldal esetén (a bizonyítás vázlata). A csillapítás nélküli kényszerrezgés vizsgálata, rezonancia.*

## 10.1 Kvázipolinomok

Az állandó együtthatós

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \tag{$\star$}$$

$n$-edrendű lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az állandók variálásával való előállítása esetenként sok számolást igénylő feladat. Ezért "megbecsülendők" azok a módszerek, amelyek révén (az illető differenciálegyenlettől függően) más úton juthatunk el egy partikuláris megoldáshoz. Ez a más út gyakran a feladat jobb oldala, azaz a $c$ függvény speciális "szerkezete" révén lehetséges. Ilyen függvények pl. az ún. kvázipolinomok. Az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{K}$$

függvényt *kvázipolinomnak* nevezzük, ha egy $R$ (algebrai) polinom és $\lambda \in \mathbf{K}$ szám mellett

$$f(x) = R(x) \cdot e_\lambda(x) = R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

## 10.2 Kvázopolinom jobb oldal

**Tétel.** Tegyük fel, hogy $1 \le n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, és valamilyen $r \in \mathbf{N}$ esetén a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám a

$$P(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinomnak $r$-szeres gyöke. Ha a $Q$ polinom fokszáma $m \in \mathbf{N}$, akkor van olyan legfeljebb $m$-edfokú $R$ polinom, hogy az

$$\omega(x) := x^r \cdot R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

kvázipolinomra

$$\omega^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \omega^{(k)}(x) = Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát a $\varphi := \omega$ függvény (kvázipolinom) a

$$c(x) := Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

jobb oldal (kvázipolinom) esetén eleget tesz a $(\star)$ egyenlőségnek, azaz megoldása az illető differenciálegyenletnek. Ha itt pl. $r = 0$, azaz $P(\lambda) \neq 0$, akkor a keresett $R$ polinommal

$$\omega = R \cdot e_\lambda.$$

Ehhez ui. legyen $a_n := 1$, amikor is azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = Q \cdot e_\lambda.$$

A "binomiális szabályt" alkalmazva

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} \cdot e_\lambda = Q \cdot e_\lambda.$$

Ezért a kívánt $R$ polinom létezése a következő egyenlőséggel ekvivalens:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} = Q. \qquad (\star\star)$$

Világos, hogy ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalán egy-egy polinom áll, így együttható-összehasonlítással azt kell megmutatni, hogy alkalmasan választott $\alpha_j \in \mathbf{K} \quad (j = 0, \ldots, m)$ számokkal az

$$R(x) := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinom eleget tesz a $(\star\star)$ egyenlőségnek. Legyen a $Q$ algebrai alakja a $\beta_j \in \mathbf{R} \quad (j = 0, \ldots, m)$ együtthatókkal az alábbi:

$$Q(x) := \sum_{j=0}^{m} \beta_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K}).$$

Ekkor a $(\star\star)$ bal oldalán a főegyüttható a következő:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \alpha_m \cdot \lambda^k = \alpha_m \cdot P(\lambda),$$

Így az $\alpha_m \cdot P(\lambda) = \beta_m$ egyenlőségnek kell teljesülni. Mivel most $P(\lambda) \neq 0$, ezért az

$$\alpha_m := \frac{\beta_m}{P(\lambda)}$$

választás megfelelő. Az $\alpha_m$ ismeretében az $\alpha_{m-1}$ meghatározása $(\star\star)$ alapján a

$$\beta_{m-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \alpha_{m-1} \cdot \lambda^k + \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot m \cdot \alpha_m \cdot \lambda^{k-1} =$$

$$P(\lambda) \cdot \alpha_{m-1} + m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda)$$

egyenlőségből történhet:

$$\alpha_{m-1} = \frac{\beta_{m-1} - m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Az eljárást analóg módon folytatva kapjuk a keresett $R$ polinom többi együtthatóját is.

## 10.3 Rezgések

Tekintsük a rezgésekre vonatkozó

$$ms'' = F - \alpha \cdot s - \beta \cdot s'$$

másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet, vagy "standard" alakban felírva ugyanez:

$$s'' + \frac{\beta}{m} \cdot s' + \frac{\alpha}{m} \cdot s = \frac{F}{m}.$$

Ennek a karakterisztikus polinomja a következő:

$$P(x) := x^2 + \frac{\beta}{m}x + \frac{\alpha}{m} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

aminek gyökei:

$$\lambda_{1,2} := \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4m\alpha}}{2m}.$$

A fizika "nyelvén" fogalmazva az $F/m$ függvény (a differenciálegyenlet jobb oldala) a "kényszer" (kényszererő). Ha nincs kényszer, azaz $F \equiv 0$, akkor $\beta > 0$ esetén *csillapított rezgőmozgásról*, a $\beta = 0$ esetben pedig *harmonikus rezgőmozgásról* beszélünk.

A tényleges kényszerrezgések között különösen érdekes a periodikus külső kényszer esete:

$$F(x) := A \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $A > 0$ (*amplitúdó*), $\omega > 0$ (*kényszerfrekvencia*) és $\theta \in [0, 2\pi]$ (*fázisszög*). Tekintsünk most el a csillapítástól, azaz legyen $\beta := 0$. Ekkor egy (valós) alaprendszert az

$$\omega_0 := \sqrt{\alpha/m}$$

*sajátfrekvenciával* az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \cos(\omega_0 x),\, \mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(\omega_0 x)$$

függvényrendszer. Egyszerűen megadhatunk egy partikuláris megoldást is. Ez ui. könnyen ellenőrizhetően

1. $\omega \neq \omega_0$ esetén pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta),$$

2. $\omega = \omega_0$ (*rezonancia*) esetén pedig pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto -\frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

függvény, ahol $q := A/m$.

Valóban, ha $\omega \neq \omega_0$, akkor egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldás, ha

$$\varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) = -\gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega x + \theta) + \omega_0^2 \cdot \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) =$$

$$q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mindez azzal egyenértékű, hogy $\gamma \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) = q$, azaz, hogy

$$\gamma = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ha viszont $\omega = \omega_0$, akkor most egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre kell, hogy fennáljon a

$$\varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) =$$

$$-2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) - \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) + \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) =$$

$$-2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) = q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség. Ezért $\gamma = -q/(2\omega)$. A $\omega_0 \neq \omega$ feltétel mellett tehát

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega_0 x) + \delta \cdot \sin(\omega_0 x) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol a $\gamma$, $\delta$ együtthatókat az

$$s(0) = s_0,\ s'(0) = s_0'$$

egyenlőségekből kapjuk. Alkalmas $r > 0$ és $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ segítségével felírhatjuk $s(x)$-et a következő alakban:

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega_0 x + \theta_0) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ami nem más mint két harmonikus rezgés összege.

Ha $\omega_0 = \omega$, akkor

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega x) + \delta \cdot \sin(\omega x) - \frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$s(0) = s_0,\ s'(0) = s'_0.$$

Tehát a 2. esetben megfelelően választott $r > 0$ és $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ paraméterekkel

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega x + \theta_0) - \frac{q}{2\omega} \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Az $\omega$ sajátfrekvenciájú (korlátos) harmonikus rezgésre ekkor nem egy harmonikus rezgés, hanem az

$$x \mapsto -\frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

*aperiodikus* mozgás szuperponálódik.

# 11 Vizsgakérdés

*A függvénysorozat, függvénysor fogalma. Hatványsorok, trigonometrikus sorok, Fourier-sorok. A Dirichlet-féle magfüggvény. Konvergencia, határfüggvény (összegfüggvény), egyenletes konvergencia. A Weierstrass-féle majoráns kritérium.*

## 11.1 Függvénysorozatok, függvénysorok

A függvénysorozatok fogalmával részben találkoztunk már korábban is: az $(f_n)$ sorozatot *függvénysorozatnak* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az $f_n$ függvény. A továbbiakban mindig azzal a feltételezéssel élünk, hogy valamilyen $\neq X$ halmazzal

$$f_n \in X \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

és egy $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal

$$\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Pl. a

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathcal{D} := \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvények egy $(h_n)$ függvénysorozatot határoznak meg.

A fenti $(f_n)$ függvénysorozat által meghatározott $\sum(f_n)$ *függvénysor*:

$$\sum(f_n) := \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right).$$

A $\sum(f_n)$ függvénysor tehát nem más, mint az

$$F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

*részletösszegfüggvények* által meghatározott $(F_n)$ függvénysorozat:

$$\sum(f_n) := (F_n).$$

Így pl. az előbbi

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvények esetén $\sum(h_n) = (H_n)$, ahol az $n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{n} h_k(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} n+1 & (t=1) \\ \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & (t \neq 1) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

## 11.2 Konvergencia, határfüggvény

Tekintsük a fenti $(f_n)$ függvénysorozatot. Ha egy $x \in \mathcal{D}$ elem esetén konvergens a helyettesítési értékeknek az $\big(f_n(x)\big)$ sorozata, akkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)$ függvénysorozat *konvergens* az $x$ helyen. A

$$\mathcal{D}_0 := \big\{x \in \mathcal{D} : \big(f_n(x)\big) \text{ konvergens}\big\}$$

halmaz az $(f_n)$ függvénysorozat *konvergenciatartománya.* Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

definícióval értelmezett

$$f : \mathcal{D}_0 \to \mathbf{K}$$

függvény az $(f_n)$ függvénysorozat *határfüggvénye.* A $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_f$ esetben röviden azt mondjuk, hogy az $(f_n)$ függvénysorozat *pontonként konvergens.*

Pl. az előbbi $(h_n)$ függvénysorozattal $\mathcal{D}_0 = (-1, 1]$, és

$$h(x) := \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

a $(h_n)$ sorozat határfüggvénye.

A függvénysorok "nyelvén" a pontonkénti konvergencia a következőképpen fogalmazható meg: legyen $X \neq \emptyset$, és a $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal adott az

$$f_n : \mathcal{D} \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysor $x$-beli konvergenciája azt jelenti, hogy a részletösszegek $\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)$ sorozata konvergens az $x$ helyen, azaz a $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)$ sorozat konvergens. Nem fog félreértést okozni, ha az ilyen $x \in \mathcal{D}$ elemek összegét fogjuk most $\mathcal{D}_0$-val jelölni. Tehát $\mathcal{D}_0$ most nem más, mint a $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ függvénysorozat konvergenciatartománya. Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor legyen

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

A szóban forgó függvénysor *összegfüggvénye*. Pl. a

$$h_n(x) := x^n \quad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$\sum_{k=0}^{n} h_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & (x=1) \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

miatt a $\sum(h_n)$ függvénysor konvergenciatartománya a $(-1,\, 1)$ intervallum, a $H$ összegfüggvénye pedig a

$$H(x) := \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

függvény.

Emlékeztetünk a hatványsor fogalmára: legyen valamilyen $a \in \mathbf{K}$ *középpont* és egy

$$(a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$$

*együttható-sorozat* esetén

$$f_n(x) := a_n(x-a)^n \quad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a

$$\sum \Big(a_n(x-a)^n\Big) := \sum(f_n)$$

függvénysort neveztük *hatványsornak*. A Cauchy-Hadamard-tétel szerint egyértelműen létezik olyan

$$0 \leq r \leq +\infty$$

(*konvergenciasugár*) amellyel a hatványsor $\mathcal{D}_0$ konvergenciatartományára a $0 < r < +\infty$ esetben
$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_0 \subset \overline{K_r(a)}.$$
Nyilvánvaló, hogy $a \in \mathcal{D}_0$ mindig igaz, és az $a$ helyen a fenti hatványsor összege 0.

## 11.3 Trigonometrikus sorok, Fourier-sorok

A $\sum(f_n)$ függvénysort *trigonometrikus sornak* nevezzük, ha

$$f_0(x) := \alpha_0,\ f_n(x) := \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx) \quad (1 \le n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}),$$

ahol adottak az $\alpha_k \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ és a $\beta_j$ $(1 \le j \in \mathbf{N})$ *együtthatók*. Használni fogjuk minderre a

$$\sum \big(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\big)$$

szimbólumot is. Tehát egy adott trigonometrikus sor $n$-edik részletösszege egy $x \in \mathbf{R}$ helyen az alábbi módon néz ki:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos(x) + \beta_1 \cdot \sin(x) + \cdots + \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx).$$

A szóban forgó $\sum \big(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\big)$ trigonometrikus sor

$$S_n(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)\Big) \quad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvényei *trigonometrikus polinomok*.

Legyen $R_{2\pi}$ az összes olyan $2\pi$ szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvény halmaza, amelyre
$$f \in R[0,\ 2\pi]$$
teljesül. A periodicitás miatt nyilvánvaló, hogy ekkor tetszőleges $2\pi$-hosszúságú kompakt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra is (az előbbi értelemben) $f \in R(I)$.

Legyen továbbá $C_{2\pi}$ az olyan $2\pi$ szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvények halmaza, amelyekre $f \in C$. Ekkor

$$C_{2\pi} \subset R_{2\pi},$$

továbbá $C_{2\pi}$, $R_{2\pi}$ lineáris terek az $\mathbf{R}$-re vonatkozóan, a $C_{2\pi}$ altere az $R_{2\pi}$-nek. Továbbá bármely $f \in R_{2\pi}$ függvény az $f \in R[0, 2\pi]$ integrálhatóság miatt korlátos, azaz

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} < +\infty.$$

Vezessük be az alábbi fogalmakat: $f \in R_{2\pi}$ esetén legyen

$$a_0(f) := a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n(f) := a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$b_n(f) := b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$Sf := \sum \big(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\big) \quad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor az $Sf$ trigonometrikus sor az $f$ *Fourier-sora*, az együtthatói az $f$ *Fourier-együtthatói*, az $S_n f$ $\quad (n \in \mathbf{N})$ trigonometrikus polinom pedig az $f$ függvény $n$-edik *Fourier-részletösszege.*

Ha $f \in R_{2\pi}$, $n \in \mathbf{N}$, akkor a fenti $f$ *Fourier-részletösszegei* a következők:

$$S_0 f(x) = a_0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ill. $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos(kt)\,dt\cdot\cos(kx)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin(kt)\,dt\cdot\sin(kx)\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\sum_{k=1}^{n}\Big(\cos(kt)\cdot\cos(kx)+\sin(kt)\cdot\sin(kx)\Big)\,dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\Big(k(x-t)\Big)\right)\,dt.$$

Ha tehát

$$D_0(z):=\frac{1}{2},\ D_n(z):=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kz)\quad(1\le n\in\mathbf{N},\ z\in\mathbf{R}),$$

akkor

$$S_nf(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot D_n(x-t)\,dt\quad(n\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{R}).$$

A most definiált $D_n$ $(n\in\mathbf{N})$ függvény az $n$-edik *Dirichlet-magfüggvény*. Világos, hogy minden $D_n$ páros függvény, periodikus $2\pi$ szerint, és bármilyen $2\pi$ hosszúságú kompakt $I\subset\mathbf{R}$ intervallumra

$$\int_I D_n=\int_I\frac{1}{2}\,dz+\sum_{k=1}^{n}\int_I\cos(kz)\,dz=\int_I\frac{1}{2}\,dz=\pi\quad(n\in\mathbf{N}).$$

Nem nehéz "zárt" alakra hozni a szóvan forgó magfüggvényeket. Ha ui. $0<u<2\pi$ és $n\in\mathbf{N}$, akkor

$$\sin(z/2)\cdot D_n(z)=\frac{\sin(z/2)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\sin(z/2)\cdot\cos(kz)=$$

$$\frac{\sin(z/2)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\Big((k+1/2)z\Big)-\sin\Big((k-1/2)z\Big)\right)=$$

$$\frac{\sin(z/2)}{2}+\frac{\sin\Big((n+1/2)z-\sin(z/2)\Big)}{2}=\frac{\sin\Big((n+1/2)z\Big)}{2}.$$

Innen az következik, hogy

$$D_n(z) = \frac{\sin\Big((n+1/2)z\Big)}{2 \cdot \sin(z/2)} \quad (0 < z < 2\pi).$$

Tehát a $D_n$ definíciójából adódóan a

$$\frac{\sin\Big((n+1/2)0\Big)}{2 \cdot \sin(0/2)} := D_n(0) = \frac{1}{2} + n$$

megállapodással tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvényre az alábbi integrál-előállítást kapjuk a Fourier-részletösszegekre:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot D_n(x-t)\, dt \quad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

## 11.4 Egyenletes konvergencia

Tekintsük az $(f_n)$ függvénysorozatot, ahol

$$f_n \in X \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\mathcal{D}_{f_n} =: \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\mathcal{D}_0 := \Big\{t \in \mathcal{D} : \big(f_n(x)\big) \text{ konvergens}\Big\} \neq \emptyset$$

az $(f_n)$ konvergenciatartománya, és

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

az $(f_n)$ függvénysorozat határfüggvénye. Tehát $f : \mathcal{D}_0 \to \mathbf{K}$ és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_0$, valamint $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}$, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (N_{x,\varepsilon} < n \in \mathbf{N}).$$

Hangsúlyozni kell, hogy az itt szereplő $N_{x,\varepsilon}$ küszöbindex általában függ az $x$-től is, és az $\varepsilon$-tól is. Elképzelhető ugyanakkor, hogy bizonyos esetekben bármilyen $\varepsilon > 0$ mellett olyan (csak az $\varepsilon$-tól függő)

$$N := N_\varepsilon \in \mathbf{N}$$

is megadható, amelyik az előbbi becslésben egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$ halmaz mellett független az $x \in A$ elemtől. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)$ függvénysorozat az $A$ halmazon *egyenletesen konvergens* az $f$ függvényhez, azaz: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ekkor minden $\emptyset \neq B \subset A$ halmaz esetén is az $(f_n)$ sorozat egyenletesen konvergál a $B$-n az $f$-hez. Ha az egyenletes konvergencia definíciójában $A = \mathcal{D}_0$ írható, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy az $(f_n)$ függvénysorozat *egyenletesen konvergens*.

A $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$ halmazon, ha a részletösszegek $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ sorozata egyenletesen konvergens az $A$-n.

Ez tehát azt jelenti, hogy létezik olyan

$$F : A \to \mathbf{K}$$

függvény és tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

A Cauchy-kritérium miatt ez azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ természetes számmal

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A,\ N < n,\ m \in \mathbf{N},\ n < m)$$

(*egyenletes Cauchy-kritérium*).

## 11.5 Weierstrass-kritérium

**Tétel.** Tegyük fel, hogy valamilyen $\emptyset \neq X$ mellett $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$, és adott az

$$f_n : \mathcal{D} \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(f_n)$ függvénysor. Legyen továbbá egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$ halmazzal és egy $(a_n)$ számsorozattal

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in A\} \leq a_n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysor az $A$ halmazon egyenletesen konvergens.

**Bizonyítás.** Az alábbi becslés a tétel feltételei alapján nyilvánvaló:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k \quad (x \in A,\, n,\, m \in \mathbf{N},\, n < m).$$

Ha az $\varepsilon > 0$ egy pozitív szám, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ feltételezés miatt van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon \quad (n,\, m \in \mathbf{N},\, N < n < m).$$

Ezért

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon \quad (x \in A,\, n,\, m \in \mathbf{N},\, N < n < m).$$

■

# 12 Vizsgakérdés

*A folytonosság, ill. a Riemann-integrálhatóság kérdése konvergens függvénysorozatokkal kapcsolatban. Egyenletesen konvergens függvénysorozat határfüggvényének folytonossága, ill. integrálhatósága. Az integrálás és a határátmenet felcserélhetősége.*

Tekintsük az $(f_n)$ függvénysorozatot, legyen $f$ a határfüggvénye. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az $f_n \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekre fennálló bizonyos tulajdonságok "öröklődnek-e" az $f$ határfüggvényre. Az említett tulajdonságokat illetően a folytonosság, integrálhatóság, deriválhatóság fognak a vizsgálódásaink középpontjában állni.

Az utóbbi kettővel kapcsolatban az is egy "izgalmas" kérdés lesz, hogy ha (pl.) az $f_n \quad (n \in \mathbf{N})$ függvények valamennyien differenciálhatók, és ugyanez igaz az $f$ határfüggvényre is, akkor fennáll-e az

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

egyenlőség? Ugyanez másképpen írva: igaz-e, hogy

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n',$$

azaz, hogy a differenciál- es a limesz-operátor felcserélhető?

Hasonlóan, ha

$$f_n \in R[a,\, b] \quad (n \in \mathbf{N})$$

és az $(f_n)$ függvénysorozat $f$ határfüggvényére is igaz, hogy $f \in R[a,\, b]$, akkor teljesül-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség? Más szóval

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n?$$

Az alábbi nagyon egyszerű példák azt mutatják, hogy a fenti kérdésekre minden további nélkül nem lehet igennel felelni. Legyen ui.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & (0 \le x \le 1/n) \\ 0 & (1/n \le x \le 1) \end{cases} \quad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy $f_n \in C[0,\,1] \quad (n \in \mathbf{N}^+)$, az $(f_n)$ függvénysorozat pontonként konvergens, és az $f$ határfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (1 < x \le 1). \end{cases}$$

Az is nyilvánvaló, hogy $f \notin C\{0\}$.

Legyen most valamilyen $a_n \in \mathbf{R} \quad (0 < n \in \mathbf{N})$ számsorozat mellett

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n & (0 < x < 1/n) \\ 0 & (x \in [0,\,1] \setminus (0,\,1/n)) \end{cases} \quad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$f_n \in R[0,\,1],\ \int_0^1 f_n = \frac{a_n}{n} \quad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

továbbá minden $x \in [0,\,1]$ helyen könnyen beláthatóan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tehát az $(f_n)$ függvénysorozat pontonként konvergens, és az $f$ határfüggvénye a ($[0,\,1]$ intervallumon) az $f \equiv 0$ függvény. Így $f \in R[0,\,1]$ és $\int_0^1 f = 0$. Ugyanakkor az

$$a_n := n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$$

esetben az integrálok $(\int_0^1 f_n)$ sorozata konvergens, de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \lim(1) \ne 0 = \int_0^1 f = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Az

$$a_n := (-1)^n \cdot n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$$

választással az $(\int\limits_0^1 f_n) = \big((-1)^n\big)$ sorozat nem is konvergens.

Az $f$ határfüggvényre (az $f_n \in R[a, b] \quad (0 < n \in \mathbf{N})$ esetben) az sem teljesül "automatikusan", hogy integrálható. Legyen ui. az $(r_k)$ sorozat a $[0, 1]$-beli racionális számok sorozata, és

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, \ldots, r_n\}) \\ 0 & (x \notin \{r_0, \ldots, r_n\}) \end{cases} \quad (x \in [0, 1],\, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in R[0, 1]$ és $\int\limits_0^1 f_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, tehát létezik az integrálsorozat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$$

határértéke, azonban az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \quad (x \in [0, 1])$$

Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható.

A differenciálhatóságot illetően tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) := |x|^{1+1/n} \quad (x \in \mathbf{R},\, 0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in D \quad (0 < n \in \mathbf{N})$, de az

$$f(x) := |x| \quad (x \in \mathbf{R})$$

határfüggvény nem differenciálható a 0-ban.

A folytonosság és a határátmenet kapcsolatát illetően a következőket mondhatjuk:

## 12.1 Folytonosság és a határátmenet

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az

$$f_n \in \mathbf{K} \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $(f_n)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq X \subset \mathbf{K}$ halmazon. Legyen a határfüggvénye az

$$f : X \to \mathbf{K}$$

függvény. Ha $a \in X$ és $f_n \in C\{a\} \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $f \in C\{a\}$.

**Bizonyítás.** Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$|f(x) - f(a)| \leq$$

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \quad (x \in X),$$

ezért

$$|f(x) - f(a)| < 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(a)| \quad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen a továbbiakban egy $N < n \in \mathbf{N}$ index rögzítve. Mivel $f_n \in C\{a\}$, ezért egy alkalmas $\delta > 0$ esetén

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon \quad (x \in X,\ |x - a| < \delta),$$

amiből

$$|f(x) - f(a)| < 3\varepsilon \quad (x \in X,\ |x - a| < \delta),$$

azaz $f \in C\{a\}$. ■

Fogalmazzuk át az előbbi állításunkat a függvénysorok esetére.

**Tétel.** Legyen adott a

$$g_n : X \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(g_n)$ függvénysor, ami egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq X \subset \mathbf{K}$ halmazon. Legyen az összegfüggvénye az

$$G : X \to \mathbf{K}$$

függvény. Ha $a \in X$ és $g_n \in C\{a\} \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $G \in C\{a\}$.

Ha ui.

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor az $(f_n)$ egyenletesen konvergál a $G$-hez. Mivel $f_n \in C\{a\} \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért az első tétel szerint $G \in C\{a\}$ is igaz.

## 12.2 Riemann-integrálhatóság és a határátmenet

**Tétel.** Tekintsük az $[a, b] \quad (a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ intervallumon értelmezett $f_n : [a, b] \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló $(f_n)$ függvénysorozatot, amelyről tegyük fel, hogy egyenletesen konvergens. Ha $f_n \in R[a, b] \quad (n \in \mathbf{N})$ és $f$ jelöli az $(f_n)$ sorozat határfüggvényét, akkor $f \in R[a, b]$, az integrálok $(\int_a^b f_n)$ sorozata konvergens, és

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, ekkor egy $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in [a, b],\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért bármilyen $J \subset [a, b]$ intervallum esetén

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(v)| + |f_n(v) - f(v)| <$$

$$2\varepsilon + |f_n(u) - f_n(v)| \quad (u,\, v \in J,\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$o_J(f) := \sup\{|f(u) - f(v)| : u,\, v \in J\} \leq$$

$$2\varepsilon + \sup\{|f_n(u) - f_n(v)| : u,\, v \in J\} = 2\varepsilon + o_J(f_n) \quad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát bármilyen $\tau \subset [a,\, b]$ felosztásra

$$\omega(f,\, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| \leq \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} 2\varepsilon \cdot |J| + \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f_n) \cdot |J| =$$

$$2(b-a)\varepsilon + \omega(f_n,\, \tau) \quad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen az $N < n \in \mathbf{N}$ rögzítve, ekkor $f_n \in R[a,\, b]$ miatt van olyan $\tau$, hogy $\omega(f_n,\, \tau) < \varepsilon$. Így

$$\omega(f,\, \tau) < (2(b-a) + 1)\varepsilon,$$

ami (szükséges és) elegendő ahhoz, hogy $f \in R[a,\, b]$.

Ha $N < n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq (b-a) \cdot \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

■

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az $[a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R}, a < b)$ intervallumon értelmezett

$$g_n : [a, b] \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló $\sum(g_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens. Ha $g_n \in R[a, b] \quad (n \in \mathbf{N})$ és $G$ jelöli a $\sum(g_n)$ sor összegfüggvényét, akkor $G \in R[a, b]$, az integrálok alkotta $\sum(\int_a^b g_n)$ sor konvergens, valamint

$$\int_a^b G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n.$$

Indoklásképpen elegendő az

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekre alkalmazni a Riemann-integrálhatóság linearitására vonatkozó ismert állítást.

# 13 Vizsgakérdés

*A határfüggvény differenciálhatósága, ill. a deriválás és a határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel.*

## 13.1 Differenciálhatóság és a határátmenet

**Tétel.** Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ korlátos, nyílt intervallum, az

$$f_n : I \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekről pedig tegyük fel, hogy valamennyien differenciálhatók, a deriváltakból álló $(f_n')$ függvénysorozat pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan $a \in I$, hogy az $(f_n(a))$ (helyettesítési értékekből álló) sorozat konvergens, akkor

- az $(f_n)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens
- ha $f$ jelöli az $(f_n)$ sorozat határfüggvényét, akkor $f \in D$ és

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

**Bizonyítás.** Legyen $b \in I$, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Phi_{bn}(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} & (x \neq b) \\ f_n'(b) & (x = b) \end{cases} \qquad (x \in I,\, n \in \mathbf{N}).$$

A $\Phi_{bn}$-ek mind folytonosak. Ez ui. a $b$-től különböző helyeken az $f_n$-ek folytonossága alapján a műveleti szabályok és a folytonosság kapcsolatából következik. A $b$ helyen pedig a

$$\lim_{x\to b} \Phi_{bn}(x) = \lim_{x\to b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = f_n'(b) = \Phi_{bn}(b) \quad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőségből. Azt sem nehéz belátni, hogy a $(\Phi_{bn})$ függvénysorozat egyenletesen konvergens. Ti. legyen ehhez

$$n,\, m \in \mathbf{N},\, b \neq x \in I,$$

ekkor a Lagrange-középértéktétel szerint alkalmasan $b$ és $x$ közötti $\xi_{nm}$-mel

$$\frac{\Big(f_n(x)-f_m(x)\Big)-\Big(f_n(b)-f_m(b)\Big)}{x-b}=(f_n-f_m)'(\xi_{nm})=$$

$$f_n'(\xi_{nm})-f_m'(\xi_{nm}).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\Phi_{bn}(x)-\Phi_{bm}(x)|=\begin{cases}|f_n'(\xi_{nm})-f_m'(\xi_{nm})| & (b\neq x\in I)\\ |f_n'(b)-f_m'(b)| & (x=b)\end{cases}\qquad (n,\,m\in\mathbf{N}).$$

A feltételeink szerint az $(f_n')$ sorozat egyenletesen konvergens, ezért minden $\varepsilon>0$ mellett egy $N\in\mathbf{N}$ indexszel

$$|f_n'(t)-f_m'(t)|<\varepsilon\quad (t\in I,\,N<n,\,m\in\mathbf{N}).$$

Innen világos, hogy

$$|\Phi_{bn}(x)-\Phi_{bm}(x)|<\varepsilon\quad (x\in I,\,N<n,\,m\in\mathbf{N})$$

azaz a $(\Phi_{bn})$ függvénysorozatra teljesül az egyenletesen Cauchy-kritérium: a $(\Phi_{bn})$ sorozat egyenletesen konvergens. Legyen

$$\Phi_b:=\lim_{n\to\infty}\Phi_{bn},$$

ami (ld. előző tétel) folytonos.

Vegyük észre, hogy

$$f_n(x)=(x-a)\cdot\Phi_{an}(x)+f_n(a)\quad (x\in I,\,n\in\mathbf{N}).$$

Tehát a

$$g(x):=x-a,\ h_n(x):=f_n(a)\quad (x\in I,\,n\in\mathbf{N})$$

függvényekkel

$$(f_n)=(g\Phi_{an})+(h_n).$$

Az $I$ intervallum korlátossága miatt a $g$ függvény korlátos, ezért a $(g\Phi_{an})$ sorozat egyenletesen konvergens. Nyilván ugyanez igaz a $(h_n)$

(konstans)sorozatra is, amiből az $(f_n)$ függvénysorozat egyenletesen konvergenciája már következik, legyen

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n.$$

A $(\Phi_{bn})$ $\quad (b \in I)$ sorozat definíciója alapján most már világos, hogy

$$\Phi_b(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{bn}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & (x \neq b) \\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(b) \quad (x = b) \end{cases} \qquad (x \in I,\ n \in \mathbf{N}).$$

Láttuk, hogy a $\Phi_b$ függvény folytonos, így létezik a $\lim\limits_{x\to b} \Phi_b(x)$ határérték és

$$\lim_{x\to b} \Phi_b(x) = \Phi_b(b).$$

Tehát

$$\Phi_b(b) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{bn}(b) = \lim_{x\to b} \Phi_b(x) = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Mindez azt jelenti, hogy $f \in D\{b\}$ és

$$f'(b) = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{n\to\infty} f_n'(b) \quad (b \in I).$$

■

**Tétel.** Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbf{R}$ korlátos és nyílt intervallumon értelmezett

$$g_n : I \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények mindannyian differenciálhatók, a deriváltakból álló $\sum(g_n')$ függvénysor pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan $a \in I$, hogy a $\sum \Big(g_n(a)\Big)$ (helyettesítési értékekből álló) sor konvergens, akkor

- a $\sum(g_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens
- ha $G$ jelöli az $\sum(g_n)$ sor összegfüggvényét, akkor $G \in D$ és

$$G' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'.$$

Ui. a differenciálhatóság, ill. a derivált linearitása miatt az

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények differenciálhatók, és

$$f_n' = \sum_{k=0}^{n} g_k' \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a deriváltakból álló $(f_n')$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, továbbá az $\big(f_n(a)\big)$ sorozat is konvergens. Így a $\sum(g_n) = (f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergál a $G$ függvényhez, $G \in D$, és

$$G' = \lim_{n\to\infty} f_n' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} g_k' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'.$$

Következésképpen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'.$$

# 14 Vizsgakérdés

*A trigonometrikus rendszer ortogonalitása. Egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének a Fourier-sora. Bessel-azonosság, Bessel-egyenlőtlenség.*

## 14.1 Trigonometrikus rendszer

Legyen

$$c_0(x) := 1,\ c_n(x) := \cos(nx),\ s_n(x) := \sin(nx) \quad (x \in \mathbf{R},\ 1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

és

$$\mathcal{R} := \{c_0,\ c_n,\ s_n : 1 \leq n \in \mathbf{N}\}$$

az ún. *trigonometrikus rendszer.*

**Lemma.** A trigonometrikus rendszer ortogonális a következő értelemben: bármely $2\pi$ hosszúságú korlátos és zárt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra

$$\int_I \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (\varphi \neq \psi) \\ 2\pi & (\varphi = \psi = c_0) \\ \pi & (\varphi = \psi \neq c_0) \end{cases} \quad (\varphi,\ \psi \in \mathcal{R}).$$

**Bizonyítás.** Az $\mathcal{R}$ elemeinek a $2\pi$ szerinti periodicitása miatt nyilván feltehető, hogy (pl.) $I = [0,\ 2\pi]$. Ekkor:

$$\int_I c_0^2(x)\, dx = \int_I 1\, dx = 2\pi;$$

$$\int_I c_n^2(x)\, dx = \int_I \cos^2(nx)\, dx = \int_I \frac{1 + \cos(2nx)}{2}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_I 1\, dx + \int_I \cos(2nx)\, dx\right) = \pi \quad (1 \leq n \in \mathbf{N});$$

$$\int_I s_n^2(x)\, dx = \int_I \sin^2(nx)\, dx = \int_I \frac{1 - \cos(2nx)}{2}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_I 1\,dx - \int_I \sin(2nx)\,dx\right) = \pi \quad (1 \le n \in \mathbf{N});$$

$$\int_I s_n(x)\cdot c_k(x)\,dx = \int_I \sin(nx)\cdot\cos(kx)\,dx =$$

$$\int_I \frac{\sin\big((n+k)x\big) + \sin\big((n-k)x\big)}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_I \sin\big((n+k)x\big)\,dx + \int_I \sin\big((n-k)x\big)\,dx\right) = 0 \quad (1 \le n \in \mathbf{N},\, k \in \mathbf{N}).$$

ui. $n = k$ esetén

$$\int_I \sin\big((n-k)x\big)\,dx = 0$$

és

$$\int_I \sin\big((n+k)x\big)\,dx = \int_I \sin(2nx)\,dx = 0,$$

míg $n \neq k$ mellett alkalmas $1 \le m,\, r \in \mathbf{N}$ paraméterekkel

$$\int_I \sin\big((n+k)x\big)\,dx = \int_I \sin(mx)\,dx = 0 =$$

$$\int_I \sin(rx)\,dx = \pm\int_I \sin\big((n-k)x\big)\,dx.$$

■

## 14.2 Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok

Lássuk be, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok együtthatói "kiszámíthatók" a sor összegfüggvényének a segítségével.

**Tétel.** Tegyük fel, hogy a $\sum\big(\alpha_n\cdot\cos(nx) + \beta_n\cdot\sin(nx)\big)$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, legyen

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\cdot\cos(kx) + \beta_k\cdot\sin(kx)\big) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor $f$ Fourier-sora megegyezik a szóban forgó trigonometrikus sorral, azaz

$$\alpha_0 = a_0(f),\ \alpha_n = a_n(f),\ \beta_n = b_n(f) \quad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

**Bizonyítás.** BEFEJEZNI.

# 15 Vizsgakérdés

*Egyenletesen konvergens Fourier-sorok, a trigonometrikus rendszer teljessége* $C_{2\pi}$*-re.*