Matematikai statisztika

October 7, 2024

Tartalom

1 Alapfogalmak

1.1 Kolmogorov-féle axiómarendszer

Definíció. Ω legyen egy halmaz, jelölje a *lehetséges kimenetelek halmazát.* Ekkor legyen $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ a *megfigyelhető események családja*, továbbá egy $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ függvény. A valószínűségszámítás axiómái szerint az $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező* a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden $A \in \mathscr{A}$ esetén $\mathbf{P}(A) \geq 0$.
2. $\Omega \in \mathscr{A}$ és $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
3. Ha $A \in \mathscr{A}$, akkor $A^c \in \mathscr{A}$ is igaz.
4. Ha A_1, A_2, ... legfeljebb megszámlálható sok esemény, akkor
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}.$$
5. Ha A_1, A_2, ... legfeljebb megszámlálható sok páronként diszjunkt esemény, akkor
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

Legyen A_1, A_2, ... legfeljebb megszámlálható sok esemény, ekkor
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k^c)^c = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c.$$
Azaz metszetre is zártak az események.

A valószínűségi mező definíciójából egy sor kézenfekvő tulajdonság vezethető le. Ezek közül tekintsük néhány igen egyszerűt:

1. Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$. Valóban
$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup A^c) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c).$$
2. Ha A, $B \in \mathscr{A}$ és $A \subseteq B$, akkor $\mathbf{P}(A \backslash B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, speciálisan $\mathbf{P}(B \backslash A) \geq 0$ miatt $\mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}(a)$. Valóban
$$(B \backslash A) \cup A = (B \cap A^c) \cup A = (B \cap A^c) \cup (B \cap A) = B \cup (A \cup A^c) = B \cap \Omega = B,$$
ebből
$$\mathbf{P}(B \backslash A) + \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B).$$

Legyen $(A_n) : \mathbb{N} \to \Omega$ egy halmazsorozat. Azt mondjuk, hogy a sorozat határértéke a $\mathscr{H}$