

# Analízis 4

## Gyakorlati feladatok

### Tartalom

<b>1</b>	<b>Gyakorlat</b>	<b>2</b>
1.1	Emlékeztető . . . . .	2
1.2	Feladatok . . . . .	6
1.2.1	Feladat . . . . .	6
1.2.2	Feladat . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Gyakorlat</b>	<b>8</b>
2.1	Emlékeztető . . . . .	8
2.2	Feladatok . . . . .	9
2.2.1	Feladat . . . . .	9
2.2.2	Feladat . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Gyakorlat</b>	<b>11</b>
3.1	Emlékeztető . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Gyakorlat</b>	<b>12</b>
4.1	Emlékeztető . . . . .	12
4.2	Feladatok . . . . .	13
4.2.1	Feladat . . . . .	13
4.3	Feladat . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Gyakorlat</b>	<b>16</b>
5.1	Emlékeztető . . . . .	16

# 1 Gyakorlat

## 1.1 Emlékeztető

**Definíció.** Legyen  $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^s$ . Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz *nullmértékű*, ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számhoz megadható  $I_k \subset \mathbb{R}^s$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tekintsük pl. az  $I \subset \mathbb{R}^n$  ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ) intervallum esetén az  $f \in R(I)$  függvényt, és legyen

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}.$$

Ekkor a  $\text{graf } f \subset \mathbb{R}^{n+1}$  halmaz nullmértékű.

Ha az  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$  értelmezési tartománya korlátos, akkor van olyan  $I \subset \mathbb{R}^n$  intervallum, amellyel  $\mathcal{D}_f \subset I$ . Legyen ekkor

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{D}_f) \\ 0 & (x \in I \setminus \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha  $F_I \in R(I)$ , akkor  $F_J \in R(J)$  minden olyan  $J \subset \mathbb{R}^n$  intervallumra, amelyre  $\mathcal{D}_f \subset J$  és

$$\int_I F_I = \int_J F_J.$$

Ez ad értelmet a következő definíciónak:

**Definíció.** A fenti  $f$  függvény *Riemann-integrálható*, ha egy alkalmas  $I \subset \mathbb{R}^n$  intervallummal  $\mathcal{D}_f \subset I$  és  $F_I \in R(I)$ . Az utóbbi esetben

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_{\mathcal{D}_f} f := \int_I F_I.$$

Az előző definíció olyan függvényekre is kiterjeszthető, amik értelmezési tartománya nem korlátos, viszont a

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \neq 0\}}$$

*tartója* igen.

**Definíció.** Legyen az  $A \subset \mathbb{R}^n$  halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

az  $A$  *karakterisztikus függvénye*. Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz *Jordan-mérhető*, ha a  $\chi_A$  függvény integrálható, amikor is a

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$$

nemnegatív szám az  $A$  halmaz *Jordan-mértéke*.

**Tétel.** Tekintsük a nyílt halmazon értelmezett és folytonosan differenciálható

$$g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvényt. Tegyük fel, hogy az  $I \subset \mathcal{D}_g$  halmaz kompakt intervallum, továbbá az  $I$  belsejére való  $g|_{\text{int } I}$  leszűkítés injektív függvény. Ekkor az

$$f : g(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha az

$$I \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható. Az utóbbi esetben

$$\int_I f(g(x)) \cdot |\det g'(x)| dx = \int_{g[I]} f.$$

**Speciális esetek.**

1. **Síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi, \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi) = r \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

2. **Módosított síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi, \\ br \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi) = abr \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

3. **Térbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ r \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ r \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, \psi) = -r^2 \cdot \sin \psi \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

4. **Módosított térbeli polárkoordináta-transzformáció (elliptikus koordináták).** Legyen  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ br \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ cr \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, \psi) = -abcr^2 \cdot \sin \psi \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

5. **Hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, z) = r \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

6. **Módosított hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés, amire

$$g(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos \varphi \\ br \cdot \sin \varphi \\ cz \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ekkor  $g \in C^1$ , és

$$\det g'(r, \varphi, z) = abcr \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

**Tétel.** Tegyük fel, hogy valamely  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$  Jordan-mérhető pontthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható  $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  függvénnyel írható le. Ekkor  $\Omega$ -nak valamely  $0 \neq e \in \mathbb{R}^3$  irányvektorú, ill.  $a \in \mathbb{R}^3$  pontra illeszkedő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

$$\Theta_t = \int_{\Omega} \ell^2(r) \rho(r) dr$$

valós szám, ahol  $\ell(r)$  jelöli az  $r \in \Omega$  pontnak a  $t$  tengelytől mért távolságát:

$$\ell(r) := \inf \{ \|r - (a + \tau e)\| \mid \tau \in \mathbb{R} \}.$$

Világos, hogy ha  $a = 0$  és  $e \in \{e_x, e_y, e_z\}$ , akkor  $\Omega$ -nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_{t_x} = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\Theta_{t_y} = \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\Theta_{t_z} = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

**Definíció.** Tegyük fel, hogy valamely  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$  Jordan-mérhető pontthalmazzal jellemzett test (tömeg)sűrűsége a Riemann-integrálható  $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  függvénnyel írható le. (Ha  $\rho$  állandó, akkor a testet homogénnek nevezzük.) Ekkor az

$$m(\Omega) := \int_{\Omega} \rho$$

számot az  $\Omega$  test tömegének nevezzük. Az  $\Omega$  tömegközéppontjának koordinátái:

$$\bar{x} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\bar{y} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$\bar{z} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

## 1.2 Feladatok

### 1.2.1 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli testnek a *térfogatát*, amelyet az alábbi egyenletű felületek fognak közre:

$$z = x^2 + y^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2 - y^2.$$

Az egyenletekből kapunk két paraboloidot. Ezek metszetét kell *paraméterezni*. Válasszuk két részre a ponthalmazt. Nézzük meg az  $y = 0$  síkban lévő pontokat:

$$z = x^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2.$$

Ez két ellentétes irányba néző parabola, amik metszete

$$x^2 - 1 = 2 - x^2 \iff x_1 := -\sqrt{\frac{3}{2}}, x_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Azaz az alábbi térbeli pontokban metszi egymást a két paraboloid:

$$p_1 := \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right), p_2 := \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Szimmetriai okok miatt, be tudjuk vezetni a következő hengerkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Legyen

$$H_1 := [0, \sqrt{3/2}] \times [0, 2\pi] \times [1/2, 2 - r^2] \subset \mathbb{R}^3,$$

$$H_2 := [0, \sqrt{3/2}] \times [0, 2\pi] \times [r^2 - 1, 1/2] \subset \mathbb{R}^3,$$

Mivel ezek kompakt intervallumok, igaz lesz, hogy

$$\int_{\mathcal{H}} 1 = \int_{H_1} 1 \cdot |r| dr d\varphi dz + \int_{H_2} 1 \cdot |r| dr d\varphi dz,$$

ahol

$$\mathcal{H} := \Phi[H_1] \cup \Phi[H_2].$$

### 1.2.2 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli  $T$  testnek a *térfogatát*, *tömegét* és a  $z$ -tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \text{ és } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal.

Tehát a sűrűségfüggvény adott  $\alpha > 0$  mellett

$$\rho(x, y, z) := \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Alkalmazzuk az alábbi térbeli polárkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \sin \psi \\ r \cdot \sin \varphi \sin \psi \\ r \cdot \cos \psi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3).$$

Legyen

$$H := [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/4] \subset \mathbb{R}^3,$$

akkor  $H$  kompakt intervallum és

$$\Phi(H) = T.$$

Térfogat:

$$\int_H 1 \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi,$$

tömeg:

$$\int_H \rho(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi,$$

tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_H (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \cdot \rho(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) \cdot |-r^2 \sin \psi| dr d\varphi d\psi.$$

Számoljuk ki a tehetetlenségi nyomatékokat. Először írjuk fel tetszőleges  $(r, \varphi, \psi) \in H$  esetén az integrandust ( $\alpha$ -val történő osztás után)

$$\begin{aligned} r^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi) \cdot r \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + \cos^2 \psi} \cdot r^2 \sin \psi = \\ r^5 \sin^2 \psi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + 1 - \sin^2 \psi} \cdot \sin \psi = \\ r^5 \sin^3 \psi \cdot \sqrt{\sin^2 \psi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 1) + 1} = \\ r^5 \sin^3 \psi. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{t_x}}{\alpha} &= \int_H r^5 \sin^3 \psi dr d\varphi d\psi = \\ \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 \sin^3 \psi dr d\varphi d\psi &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^6}{6} \sin^3 \psi \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi d\psi = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \sin^3 \psi d\varphi d\psi = \\ \frac{1}{6} \int_0^{\pi/4} [\varphi \sin^3 \psi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\psi &= \frac{2\pi}{6} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \psi d\psi \end{aligned}$$

## 2 Gyakorlat

### 2.1 Emlékeztető

Megjegyezzük, hogy ha a

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

függvény differenciálható, akkor a

$$\partial_k \Psi := (\partial_k \Psi_1, \partial_k \Psi_2, \partial_k \Psi_3) \quad (k \in \{1, 2\})$$

jelöléssel

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi & \partial_2 \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi_1 & \partial_2 \Psi_1 \\ \partial_1 \Psi_2 & \partial_2 \Psi_2 \\ \partial_1 \Psi_3 & \partial_2 \Psi_3 \end{bmatrix}.$$

**Definíció.** Valamely  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  halmazt *felületdarabnak* nevezünk, ha alkalmas  $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^2$  kompakt és Jordan-mérhető halmaz, ill.

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \Psi \in C^1, \text{rang}(\Psi') = 2$$

függvény esetén

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_\Psi = \{\Psi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in K\}.$$

A  $\Psi$  leképezést az adott  $\mathcal{F}$  felületdarab *paraméterezésének* nevezzük.

1. A fenti definícióban a  $\Psi$  leképezés folytonos differenciálhatóságán azt értjük, hogy van olyan  $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$  nyílt halmaz, ill.

$$\hat{\Psi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \hat{\Psi} \in C^1$$

függvény, amelyre  $\hat{\Psi}|_K = \Psi$ .

2. Ha a  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  függvényre  $\Psi \in C^1$ , akkor a  $\text{rang}(\Psi') = 2$  feltétel azt jelenti, hogy a  $\partial_1 \Psi, \partial_2 \Psi$  vektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi \neq 0.$$

Ha a  $\Psi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés valamely felületdarab paraméterezése, akkor az

$$n_\Psi(u, v) := \partial_1 \Psi(u, v) \times \partial_2 \Psi(u, v) \quad ((u, v) \in K)$$

vektor az adott felület  $\Psi(u, v)$  pontjához tartozó *érintősíkjának* normálvektora.



**Definíció.** Tegyük fel, hogy az  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  felületdarab paraméterezése az

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

függvény:  $\mathcal{R}_\Psi = \mathcal{F}$ . Ekkor az  $\mathcal{F}$  felület *felszínén* az

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \int_K \|n_\Psi\|$$

valós számot értjük.

1. Ha  $\mathcal{F}_1 := \mathcal{R}_{\Psi_1}$ , ill.  $\mathcal{F}_2 := \mathcal{R}_{\Psi_2}$  nullmértékű halmazban (pl. élekben) csatlakozó felületdarabok, akkor

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) = \int_{K_1} \|n_{\Psi_1}\| + \int_{K_2} \|n_{\Psi_2}\|.$$

## 2.2 Feladatok

### 2.2.1 Feladat

Legyen  $0 < R \in \mathbb{R}$ . Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$$

félgömbfelületnek az

$$x^2 + y^2 = Rx$$

egyenletű hengerfelület által kimetszett részének (Viviani-féle levél) a felszínét!

A  $z \geq 0$  feltérben lévő félgömbfelület paraméterezése:

$$\Psi(u, v) := (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2).$$

Ekkor  $\Psi \in C^1$ ,  $\text{rang}(\Psi') = 2$ , továbbá ( $u^2 + v^2 < R$  esetén)

$$\begin{aligned} \partial_1 \Psi(u, v) &= \left( 1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right), \\ \partial_2 \Psi(u, v) &= \left( 0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right), \\ n_\Psi(u, v) &= \begin{pmatrix} -\partial_1 g(u, v) \\ -\partial_2 g(u, v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Azaz

$$\|n_\Psi(u, v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1} =$$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}.$$

Ha most

$$\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \in [0, \pi/2], r \in [0, R \cos(\varphi)])$$

Akkor a felszínt így kapjuk meg:

$$2R \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \int_0^{R \cos(\varphi)} \|n_{\Psi}(\Phi(r, \varphi))\| \cdot r \, dr \, d\varphi.$$

### 2.2.2 Feladat

Határozzuk meg az alábbi feltételekkel megadott felület felszínét:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } x^2 + y^2 \leq 2ax \quad (a > 0).$$

Legyen

$$f(x, y) := (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

ahol  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2ax\}$ ,  $f$  egy Euler-Monge módon megadott paraméterezése a  $z$ -tengely irányába felfelé néző körkúp palástjának, *leszűkítve* annak a hengernek a belsejére, aminek alapját az  $\Omega$  halmaz adja. Egyből írjuk is át az  $f$  függvényt a megfelelő polár-transzformációval

$$\Phi(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \quad (\varphi \in [-\pi/2, \pi/2], r \in [0, 2a \cos(\varphi)]).$$

A  $\Phi$  transzformáció-függvény értelmezési tartományát a Thálész-tétel alkalmazásával könnyedén megkaptuk. Tehát ha  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  a feladatban definiált felület, akkor

$$\Psi(r, \varphi) := f \circ \Phi = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), r) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}).$$

A felület kiszámításához szükségünk lesz a következőkre:

$$\partial_1 \Psi(r, \varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 1) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$\partial_2 \Psi(r, \varphi) = (-r \sin(\varphi), r \cos(\varphi), 0) \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$n_{\Psi}(r, \varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 1 \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}),$$

$$\|n_{\Psi}(r, \varphi)\| = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \quad ((r, \varphi) \in \mathcal{D}_{\Phi}).$$

Tehát a keresett felszín

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{D}_{\Phi}} \|n_{\Psi}\| = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi.$$

### 3 Gyakorlat

#### 3.1 Emlékeztető

**Definíció.** Legyen  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompakt, Jordan-mérhető halmaz,

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \Psi \in C^1, \text{rang}(\Psi') = 2,$$

továbbá tegyük fel, hogy  $\Psi|_{\text{int}(K)}$  injektív. Ekkor

1. ha  $f : \Psi[K] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C$ , akkor az  $f$  függvény  $\Psi$ -re vonatkozó *elsőfajú felületi integráljának* (vagy *felszíni integráljának*) nevezzük az

$$\int_{\Psi} f := \int_K (f \circ \Psi) \cdot \|n_{\Psi}\|$$

valós számot,

2. ha  $f : \Psi[K] \rightarrow \mathbb{R}^3, f \in C$ , akkor az  $f$  függvény  $\Psi$ -re vonatkozó *(másodfajú) felületi integráljának* nevezzük az

$$\int_{\Psi} f := \langle f \circ \Psi, n_{\Psi} \rangle$$

valós számot.

## 4 Gyakorlat

### 4.1 Emlékeztető

Valamilyen kompakt  $[a, b]$  intervallum ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) és ( $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ ) ( $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ) nyílt halmaz esetén tekintsük az

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt. Ha  $x \in U$ , akkor legyen  $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  az a függvény, amire

$$f_x(t) := f(x, t) \quad (t \in [a, b]).$$

Tegyük fel, hogy minden  $x \in U$  esetén az  $f_x$  függvény Riemann-integrálható:  $f_x \in R[a, b]$ , legyen ekkor

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt := \int_a^b f_x \quad (x \in U).$$

Az így definiált  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f$  által meghatározott *paraméteres integrálnak* nevezzük.

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_f = U \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vezessük be  $\mathbb{R}^n$ -en is és  $\mathbb{R}^{n+1}$ -en is a  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$  normát. Nem fog félreértést okozni, ha  $\xi \in \mathbb{R}^n$  és  $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$  esetén egyaránt a  $\|\xi\|$ ,  $\|\eta\|$  jelölést használjuk. Így pl. nyilvánvaló, hogy az

$$(x, t) \in U \times [a, b]$$

vektorra

$$\|(x, t)\| = \max\{\|x\|, |t|\}.$$

Továbbá, ha az

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény folytonos, akkor tetszőleges  $x \in U$  mellett az  $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény is folytonos. Ui., ha  $s \in [a, b]$  és  $\xi := (x, s)$ , akkor  $f \in \mathcal{C}\{\xi\}$  miatt bármilyen  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $\delta > 0$ , amellyel

$$|f(\omega) - f(\xi)| < \varepsilon \quad (\omega \in U \times [a, b], \|\omega - \xi\| < \delta),$$

azaz

$$|f(y, t) - f(x, s)| < \varepsilon \quad ((y, t) \in U \times [a, b], \|(y, t) - (x, s)\| < \delta).$$

Ha itt  $y := x$ , akkor

$$\|(x, t) - (x, s)\| = \|(0, t - s)\| = |t - s|,$$

ezért

$$|f(x, t) - f(x, s)| = |f_x(t) - f_x(s)| < \varepsilon (t \in [a, b], |t - s| < \delta),$$

más szóval  $f_x \in \mathcal{C}\{s\}$ . Következésképpen  $f_x \in C[a, b]$ , így  $f_x \in R[a, b]$ , létezik tehát a fenti  $F$  paraméteres integrál.

**Tétel.** Tegyük fel, hogy adott az  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) kompakt intervallum,  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ , és  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz. Ekkor tetszőleges folytonos

$$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény esetén az

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt \quad (x \in U)$$

paraméteres integrálra az alábbiak igazak:

1. az  $F$  függvény folytonos;
2. ha valamilyen  $i = 1, \dots, n$  indexre létezik és folytonos a  $\partial_i f$  parciális deriváltfüggvény, akkor létezik a  $\partial_i F$  parciális deriváltfüggvény is, és

$$\partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x, t) dt \quad (x \in U);$$

3. amennyiben az  $f$  folytonosan differenciálható, akkor  $F$  is.

## 4.2 Feladatok

### 4.2.1 Feladat

Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctg(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} dx = \frac{\pi}{2} \ln(y+1) \quad (y \geq 0).$$

Legyen

$$f(y, x) := \begin{cases} y & x = 0, y \in [0, +\infty) \\ 0 & x = \pi/2, y \in [0, +\infty) \\ \frac{\arctg(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} & ((y, x) \in [0, +\infty) \times (0, \pi/2)). \end{cases}$$

Ekkor  $f \in C$ , ezért a paraméteres integrál is folytonos. Mivel

$$\partial_1 f(y, x) := \begin{cases} 0 & x = \pi/2, y \in [0, +\infty) \\ \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2(x)} & ((y, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi/2)) \end{cases}$$

$\partial_1 f \in C$ , tehát a paraméteres integrál deriválható.

### 4.3 Feladat

Indokoljuk meg, hogy tetszőleges  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  esetén

$$F(\alpha) := \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \in \mathbb{R},$$

majd mutassuk meg, hogy fennáll az

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} \quad (0 < \alpha \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

Legyen

$$f(\alpha, x) := \begin{cases} \alpha & \alpha \in (0, +\infty), x = 0; \\ \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \alpha \in (0, +\infty), x \in (0, 1]; \end{cases}$$

akkor  $f \in C$ , hiszen (Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{1+\alpha^2 x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \alpha}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \alpha.$$

Tehát  $F \in C$  is teljesül. Mivel

$$\partial_1 f(\alpha, x) = \frac{1}{1 + \alpha^2 x} \quad ((\alpha, x) \in (0, +\infty) \times [0, 1]),$$

és  $\partial_1 f \in C$ , ezért  $F \in D$ .

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^1 \partial_\alpha \left( \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \right) = \int_0^1 \frac{1}{1 + \alpha^2 x} dx = \left[ \frac{\ln(1 + \alpha^2 x)}{\alpha^2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Tehát

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Számoljuk ki  $F'$  határozatlan integrálját:

$$\begin{aligned} \int F' &= \int \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha^2} d\alpha = -\frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} - \int \left( -\frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha = \\ &= 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} + c \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Azaz, mivel

$$F \in \int F',$$

ezért létezik egy  $c \in \mathbb{R}$  konstans, amivel

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} + c.$$

Számoljuk ki  $F(1)$ -et:

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

Ebből

$$F(1) = 2\operatorname{arctg}(1) - \ln(2) = \frac{\pi}{2} - \ln(2),$$

ahonnan  $c = 0$ , tehát

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha}$$

következik.

## 5 Gyakorlat

### 5.1 Emlékeztető

Legyenek  $n, m \in \mathbb{N}$  természetes számok, ahol  $2 \leq n$  és  $1 \leq m < n$ . Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m,$$

és ezt következésképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

akkor  $f$ -et olyan kétváltozós vektorfüggvényként tekintjük, ahol az  $f(x, y)$  helyettesítési értékekben az argumentum első változójára  $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ , a második változójára pedig  $y \in \mathbb{R}^m$  teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelmében valamilyen  $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$  zérushelye az  $f$ -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az  $a$ -nak olyan  $K(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$  környezete, a  $b$ -nek pedig olyan  $K(b) \subset \mathbb{R}^m$  környezete, hogy tetszőleges  $x \in K(a)$  esetén egyértelműen létezik olyan  $y \in K(b)$ , amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a  $\varphi(x) := y$  hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Az előbbi  $\varphi$  függvényt az  $f$  által (az  $(a, b)$  körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Nyilván  $\varphi(a) = b$ .



**Tétel (implicitfüggvény-tétel).** Adott  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq n$ , valamint  $1 \leq m < n$  mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat:  $f \in C^1$  és az  $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$  helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas  $K(a), K(b)$  környezetekkel létezik az  $f$  által az  $(a, b)$  körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$