

# Analízis IV

1. gyakorlat

Szabó Krisztián

## Tartalom

<b>1</b>	<b>Feladat</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Feladat</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Feladat</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Feladat</b>	<b>7</b>

Mi a transzformációk célja? Amikor akarjuk számítani egy ponthalmaz *térfogatát* azt a Riemann-integrál segítségével megtehetjük. Azonban a Riemann-integrált kompakt intervallumon értelmezett függvények esetén definiáltuk. Tegyük fel, hogy meghatározzunk egy ponthalmazt *implicit* módon, egyenlőtlenségekkel:

$$\mathcal{G}_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Ebben az esetben  $\mathcal{G}_R$  jelöl egy origó középpontú,  $R$  sugarú gömböt. Ahhoz, hogy kiszámítsuk ennek a  $V(\mathcal{G}_R)$ -vel jelölt térfogatát, ahhoz keresünk kell egy kompakt intervallumon értelmezett  $\Phi$  függényt ami tudja a következőt:

$$\mathcal{R}_\Phi = \mathcal{G}_R.$$

A térbeli polárkoordináta transzformációval képesek vagyunk az alábbira:

$$\Phi(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ r \cdot \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], \psi \in [0, \pi]).$$

Az alábbi transzformáció-függvénnyel fennál a következő egyenlőség:  $\mathcal{R}_\Phi = \mathcal{G}_R$ .

## 1 Feladat

Hengerkoordinátákra áttérve számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int \int \int_H (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

ahol  $H$  az alábbi egyenletű felületek által határolt korlátos és zárt térrész:

$$x^2 + y^2 = 2z, \quad \wedge \quad z = 2.$$

Vizsgáljuk meg a  $H$  halmazt geometriailag:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Ha a  $z = 2$  sík berajzolásra kerülne, akkor az alábbi korlátos és zárt térrészt kapjuk:

$$H := \left\{ \left( x, y, \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{2} \leq 2 \right\}.$$

Ahhoz, hogy hengertranszformációt alkalmazzunk, induljunk ki a következő ötletből: a  $z$  értékek fussák be a  $[0, 2]$  intervallumot, majd minden  $z$  pontnál kapjuk az alábbi körlapot:

$$x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2z})^2.$$

Ezekből az információkból rakjuk össze a következő transzformációt:

$$H \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad (z \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{2z}]).$$

Az integráltranszformáció tétele alapján az eredeti integrál a következő alakot ölti:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}z} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\varphi \, dr \, dz$$

.

## 2 Feladat

Határozzuk meg az alábbi  $K$  kúptest *tehetetlenségi nyomatékát* a  $z$  illetve az  $x$  tengelyre nézve, ha a kitöltő anyag sűrűsége minden pontban egyenesen arányos az origótól mért távolság négyzetével:

$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 1 \right\}.$$

### 3 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli  $T$  testnek a *térfogatát*, *tömegét* és a  $z$ -tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal. Jelöljük az alábbi ponthalmazokat, az alábbi módon:

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\},$$

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

A  $K$  halmaz egy kúptest, míg a  $G$  halmaz egy egységsugarú gömböt jelöl. Mi a következő ponthalmaz térfogatát keressük:

$$V := K \cap G.$$

A  $V$  halmaz meghatározott térfogatot két részre bontjuk, egy csonkakúpra és egy gömbszeletre. A csonkakúp térfogatát hengerkoordináta transzformációval az alábbi módon számolhatjuk:

$$\Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix},$$

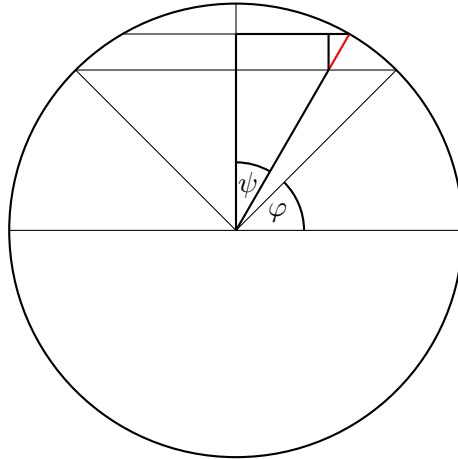
ahol

$$z \in [0, \sqrt{2}/2], \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, z].$$

Tehát

$$V(V_1) := \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{2\pi} \int_0^z 1 \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

A gömbszelet térfogatát térbeli polárkoordináta transzformációval lehet számolni az alábbi módon:



A fenti ábrán két háromszög vastagon kiemelve hasonló. Mi az piros szakasz hosszát keressük, hogy az alábbi térbeli polárkoordináta transzformációt el tudjuk végezni. Jelöljük a piros szakasz hosszát  $\ell$ -lel.

$$\Phi(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ r \cdot \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

ahol

$$\varphi \in [0, 2\pi], \psi \in [0, \pi/4], r \in [1 - \ell, 1].$$

Mivel tudjuk, hogy  $\varphi = \pi/4$  és a gömbünk (körünk) sugara 1, ezért könnyedén kapjuk az alábbi egyenlőséget:

$$\ell = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \cos(\psi)}.$$

Így, a maradék gömbszelet térfogata az alábbi transzformációval kiszámolható:

$$V(V_2) := \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \cos(\psi)}}^1 1 \cdot (-r^2) \cdot \sin(\psi) dr d\psi d\varphi.$$

Így kapjuk, hogy a  $V = K \cap G$  pontthalmaz térfogata  $V_1 + V_2$ .

## 4 Feladat