Analízis 4

Gyakorlati feladatok

Tartalom

1 Gyakorlat

1.1 Emlékeztető

Definíció. Legyen $1 \leq s \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^s$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *nullmértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbb{R}^s$ $(k \in \mathbb{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tekintsük pl. az $I \subset \mathbb{R}^n$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ intervallum esetén az $f \in R(I)$ függvényt, és legyen

$$\operatorname{graf} f := \{(x,\, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}.$$

Ekkor a $\operatorname{graf} f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ halmaz nullmértékű.

Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ értelmezési tartománya korlátos, akkor van olyan $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum, amellyel $\mathcal{D}_f \subset I$. Legyen ekkor

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{D}_f) \\ 0 & (x \in I \setminus \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha $F_I \in R(I)$, akkor $F_J \in R(J)$ minden olyan $J \subset \mathbb{R}^n$ intervallumra, amelyre $\mathcal{D}_f \subset J$ és

$$\int_I F_I = \int_J F_J.$$

Ez ad értelmet a következő definíciónak:

Definíció. A fenti f függvény *Riemann-integrálható*, ha egy alkalmas $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallummal $\mathcal{D}_f \subset I$ és $F_I \in R(I)$. Az utóbbi esetben

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_{\mathcal{D}_f} f := \int_I F_I.$$

Az előző definició olyan függvényekre is kiterjeszthető, amik értelmezési tartománya nem korlátos, viszont a

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \neq 0\}}$$

tartója igen.

Definíció. Legyen az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

az A *karakterisztikus függvénye*. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Jordan-mérhető*, ha a χ_A függvény integrálható, amikor is a

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$$

nemnegatív szám az A halmaz *Jordan-mértéke*.

Tétel. Tekintsük a nyílt halmazon értelmezett és folytonosan differenciálható

$$g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

függvényt. Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathcal{D}_g$ halmaz kompakt intervallum, továbbá az I belsejére való $g_{|_{\operatorname{int} I}}$ leszűkítés injektív függvény. Ekkor az

$$f : g(I) \to \mathbb{R}$$

korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha az

$$I \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható. Az utóbbi esetben

$$\int_I f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|\, dx = \int_{g[I]} f.$$

Speciális esetek.

1. **Síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amire
$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi, \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \big((r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$
Ekkor $g \in C^1$, és
$$\det g'(r,\varphi) = r \quad \big((r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

2. **Módosított síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amire
$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi, \\ br \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \big((r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi) = abr \quad \big((r,\, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

3. **Térbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ r \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ r \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, \psi) = -r^2 \cdot \sin\psi \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

4. **Módosított térbeli polárkoordináta-transzformáció (elliptikus koordináták).** Legyen $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ br \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ cr \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, \psi) = -abcr^2 \cdot \sin\psi \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

5. **Hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, z) = r \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

6. **Módosított hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire

$$g(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi \\ br \cdot \sin\varphi \\ cz \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi,\, z) = abcr \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. Ekkor Ω-nak valamely $0 \neq e \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú, ill. $a \in \mathbb{R}^3$ pontra illeszkedő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

$$\mathbf{\Theta}_t = \int_\Omega \ell^2(r)\rho(r)\,dr$$

valós szám, ahol $\ell(r)$ jelöli az $r \in \Omega$ pontnak a t tengelytől mért távolságát:

$$\ell(r) := \inf\{\|r - (a + \tau e)\| \in \mathbb{R} : \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Világos, hogy ha $a = 0$ és $e \in \{e_x, e_y, e_z\}$, akkor Ω-nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\mathbf{\Theta}_{t_x} = \int_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\mathbf{\Theta}_{t_y} = \int_\Omega (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\mathbf{\Theta}_{t_z} = \int_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

Definíció. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test (tömeg)sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. (Ha ρ állandó, akkor a testet homogénnek nevezzük.) Ekkor az

$$m(\Omega) := \int_\Omega \rho$$

számot az Ω test tömegének nevezzük. Az Ω tömegközéppontjának koordinátái:

$$\overline{x} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega x \cdot \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\overline{y} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega y \cdot \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\overline{z} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega z \cdot \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

1.2 Feladatok

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli testnek a *térfogatát*, amelyet az alábbi egyenletű felületek fognak közre:

$$z = x^2 + y^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2 - y^2.$$

Az egyenletekből kapunk két paraboloidot. Ezek metszetét kell *paraméterezni.* Válasszuk két részre a ponthalmazt. Nézzük meg az $y = 0$ síkban lévő pontokat:

$$z = x^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2.$$

Ez két ellentétes irányba néző parabola, amik metszete

$$x^2 - 1 = 2 - x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 := -\sqrt{\frac{3}{2}},\, x_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Azaz az alábbi térbeli pontokban metszi egymást a két paraboloid:

$$p_1 := \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right),\, p_2 := \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Szimmetriai okok miatt, be tudjuk vezetni a következő hengerkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Legyen

$$H_1 := [0,\, \sqrt{3/2}] \times [0,\, 2\pi] \times [1/2,\, 2 - r^2] \subset \mathbb{R}^3,$$
$$H_2 := [0,\, \sqrt{3/2}] \times [0,\, 2\pi] \times [r^2 - 1,\, 1/2] \subset \mathbb{R}^3,$$

Mivel ezek kompakt intervallumok, igaz lesz, hogy

$$\int_{\mathcal{H}} 1 = \int_{H_1} 1 \cdot |r| \, dr \, d\varphi \, dz + \int_{H_2} 1 \cdot |r| \, dr \, d\varphi \, dz,$$

ahol

$$\mathcal{H} := \Phi[H_1] \cup \Phi[H_2].$$

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli T testnek a *térfogatát, tömegét* és a z-tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \text{ és } x^2+y^2+z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal.
Tehát a sűrűségfüggvény adott $\alpha > 0$ mellett

$$\rho(x,\, y,\, z) := \alpha \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \big((x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Alkalmazzuk az alábbi térbeli polárkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ r \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ r \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Legyen

$$H := [0,\, 1] \times [0,\, 2\pi] \times [0,\, \pi/4] \subset \mathbb{R}^3,$$

ekkor H kompakt intervallum és

$$\Phi(H) = T.$$

Térfogat:

$$\int_H 1 \cdot |-r^2 \sin\psi| \, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

tömeg:

$$\int_H \rho(r\cos\varphi\sin\psi,\, r\sin\varphi\sin\psi,\, r\cos\psi) \cdot |-r^2\sin\psi| \, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_H (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\psi) \cdot \rho(r\cos\varphi\sin\psi,\, r\sin\varphi\sin\psi,\, r\cos\psi) \cdot |-r^2\sin\psi| \, dr\, d\varphi\, d\psi.$$

Számoljuk ki a tehetetlenségi nyomatékot. Először írjuk fel tetszőleges $(r,\, \varphi,\, \psi) \in H$ esetén az integrandust (α-val történő osztás után)

$$r^2\big(\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi\big) \cdot r\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi + \cos^2\psi} \cdot r^2\sin\psi =$$

$$r^5\sin^2\psi \cdot \sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi + 1 - \sin^2\psi} \cdot \sin\psi =$$

$$r^5\sin^3\psi \cdot \sqrt{\sin^2\psi\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1\big) + 1} =$$

$$r^5\sin^3\psi.$$

Tehát

$$\frac{\mathbf{\Theta}_{t_x}}{\alpha} = \int_H r^5 \sin^3\psi \, dr\, d\varphi\, d\psi =$$

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5 \sin^3\psi \, dr\, d\varphi\, d\psi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\sin^3\psi\right]_{r=0}^{r=1} d\varphi\, d\psi = \frac{1}{6}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\, d\varphi\, d\psi =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{\pi/4}[\varphi\sin^3\psi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\, d\psi = \frac{2\pi}{6}\int_0^{\pi/4}\sin^3\psi\, d\psi$$

2 Gyakorlat

2.1 Emlékeztető

Megjegyezzük, hogy ha a

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

függvény differenciálható, akkor a

$$\partial_k \Psi := (\partial_k \Psi_1,\, \partial_k \Psi_2,\, \partial_k \Psi_3) \quad (k \in \{1,\, 2\})$$

jelöléssel

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi & \partial_2 \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi_1 & \partial_2 \Psi_1 \\ \partial_1 \Psi_2 & \partial_2 \Psi_2 \\ \partial_1 \Psi_3 & \partial_2 \Psi_3 \end{bmatrix}.$$

Definíció. Valamely $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ halmazt *felületdarabnak* nevezünk, ha alkalmas $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt és Jordan-mérhető halmaz, ill.

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3,\ \Psi \in C^1,\ \mathrm{rang}(\Psi') = 2$$

függvény esetén

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_\Psi = \{\Psi(u,\, v) \in \mathbb{R}^3 : (u,\, v) \in K\}.$$

A Ψ leképezést az adott $\mathcal{F}$ felületdarab *paraméterezésének* nevezzük.

1. A fenti definícióban a Ψ leképezés folytonos differenciálhatóságán azt értjük, hogy van olyan $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, ill.

   $$\hat{\Psi} : U \to \mathbb{R}^3,\ \hat{\Psi} \in C^1$$

   függvény, amelyre $\hat{\Psi}_{|K} = \Psi$.

2. Ha a $\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3$ függvényre $\Psi \in C^1$, akkor a $\mathrm{rang}(\Psi') = 2$ feltétel azt jelenti, hogy a $\partial_1 \Psi$, $\partial_2 \Psi$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz

   $$\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi \neq 0.$$

   Ha a $\Psi : K \to \mathbb{R}^3$ leképezés valamely felületdarab paraméterezése, akkor az

   $$n_\Psi(u,\, v) := \partial_1 \Psi(u,\, v) \times \partial_2 \Psi(u,\, v) \quad \big((u,\, v) \in K\big)$$

   vektor az adott felület $\Psi(u,\, v)$ pontjához tartozó *érintősíkjának* normálvektora.

Definíció. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ felületdarab paraméterezése az

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3$$

függvény: $\mathcal{R}_\Psi = \mathcal{F}$. Ekkor az $\mathcal{F}$ felület *felszínén* az

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \int_K \|n_\Psi\|$$

valós számot értjük.

1. Ha $\mathcal{F}_1 := \mathcal{R}_{\Psi_1}$, ill. $\mathcal{F}_2 := \mathcal{R}_{\Psi_2}$ nullmértékű halmazban (pl. élekben) csatlakozó felületdarabok, akkor

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) = \int_{K_1} \|n_{\Psi_1}\| + \int_{K_2} \|n_{\Psi_2}\|.$$

2.2 Feladatok

Legyen $0 < R \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0$$

félgömbfelületnek az

$$x^2 + y^2 = Rx$$

egyenletű hengerfelület által kimetszett részének (Viviani-féle levél) a felszínét!

A $z \geq 0$ féltérben lévő félgömbfelület paraméterezése:

$$\Psi(u,\, v) := (u,\, v,\, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \quad \big((u,\, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2\big).$$

Ekkor $\Psi \in C^1$, $\operatorname{rang}(\Psi') = 2$, továbbá ($u^2 + v^2 < R$ esetén)

$$\partial_1 \Psi(u,\, v) = \left(1,\, 0,\, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right),$$

$$\partial_2 \Psi(u,\, v) = \left(1,\, 0,\, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right).$$

$$n_\Psi(u,\, v) = \begin{pmatrix} -\partial_1 g(u,\, v) \\ -\partial_2 g(u,\, v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Azaz

$$\|n_\Psi(u,\, v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}.$$

Ha most

$$\Phi(r,\, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \big(\varphi \in [0,\, \pi/2],\, r \in [0,\, R\cos(\varphi)]\big)$$

Akkor a felszínt így kapjuk meg:

$$2R \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{R\cos(\varphi)} \Big\| n_\Psi\big(\Phi(r,\, \varphi)\big) \Big\| \cdot r\, dr\, d\varphi.$$