Taylor-formula

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényre valamilyen $s \in \mathbb{N}$ mellett $f \in D^{s+1}$ teljesül. Ekkor bármely $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ esetén van olyan $c \in [a,\, b]$, hogy

$$f(b) = T_{a,\,s}f(b) + \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\, |i|=s+1} \frac{\partial^i f(c)}{i!} \cdot (b-a)^i.$$

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis III. 123. oldal.

Legyen

$$1 \leq n,\ k \in \mathbb{N},\ f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,\ j = 1,\ \ldots,\ n,$$

és

$$\partial_j^k f(a) := \partial_{j\ldots j} f(a).$$

Ha $i := (i_1,\ \ldots,\ i_n) \in \mathbb{N}^n$, akkor legyen

$$\partial^i f(a) := \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} f(a) = \partial_{1\ldots1\ldots n\ldots n} f(a).$$

Az $i \in \mathbb{N}^n$ *multiindex* esetén i *hosszát* a következőképpen definiáljuk:

$$|i| := ||i||_1 = \sum_{j=1}^{n} i_j.$$

Legyen az $i = (i_1,\ \ldots,\ i_n) \in \mathbb{N}^n$ multiindex és az $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén

$$i! := \prod_{j=1}^{n} i_j! = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{i_j} k$$

és

$$x^i := \prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}$$

az i *faktoriálisa*, ill. az x vektor i-kitevős *hatványa.*

Tekintsük ezek után az

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvényt, és tegyük fel, hogy valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $s \in \mathbb{N}$ mellett $f \in D^s\{a\}$. Ekkor a

$$T_{a,\,s}f(x) := \sum_{k=0}^{s} \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

előírással definiált $T_{a,\,s}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény a-hoz tartozó s-edrendű *Taylor-polinomjának* nevezzük.

Lagrange-féle középértéktétel

Tétel. Legyen adott a differenciálható $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, és valamilyen $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ végpontokkal $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor egy alkalmas $c \in (a, b)$ mellett

$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(c), b - a \rangle.$$

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis III. 125. oldal.

Valamilyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ mellett legyen $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in D$. Tegyük fel, hogy az $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ végpontokkal meghatározott szakaszra $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor minden $i = 1, \ldots, m$ mellett egy alkalmas $\xi^{(i)} \in (a, b)$ helyen a

$$h := (h_1, \ldots, h_n) := b - a$$

jelöléssel

$$f_i(b) - f_i(a) = \langle \operatorname{grad} f_i(\xi^{(i)}), h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(\xi^{(i)}) \cdot h_j,$$

ezért

$$|f_i(b) - f_i(a)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\xi^{(i)})| \cdot |h_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\xi^{(i)})| \cdot ||h||_\infty \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : x \in (a, b) \right\} \cdot ||h||_\infty.$$

Következésképpen

$$||f(b) - f(a)||_\infty = \max \{ |f_i(b) - f_i(a)| : i = 1, \ldots, m \} =$$

$$\max\{ |\langle \operatorname{grad} f_i(\xi^{(i)}), h \rangle| : i = 1, \ldots, m \} \leq$$

$$\leq \max \left\{ \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : x \in (a, b) \right\} : i = 1, \ldots, m \right\} \cdot ||h||_\infty =$$

$$\leq \sup \left\{ \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : i = 1, \ldots, m \right\} : x \in (a, b) \right\} \cdot ||h||_\infty =$$

$$\sup \{ ||f'(x)||_{(\infty)} : x \in (a, b) \} \cdot ||h||_\infty.$$

Ha tehát az $\mathbb{R}^n$-en és az $\mathbb{R}^m$-en is a $||.||_\infty$ vektornormát vezetjük be, akkor az $f'(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$ Jacobi-mátrix által generált $||f'(x)||_\infty$ (sor)normáját tekintve a

$$q := \sup \{ ||f'(x)||_{(\infty)} : x \in (a, b) \}$$

szimbólummal

$$\boxed{||f(b) - f(a)||_\infty \leq q \cdot ||b - a||_\infty}.$$

$$A := \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(\xi^{(1)}) \\ \operatorname{grad} f_2(\xi^{(2)}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\xi^{(m)}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ mátrixszal } f(b) - f(a) = A(b - a).$$

Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f-nek az a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokákis szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektor, hogy

$$\mathrm{grad}\,(f + \lambda g)(c) = 0.$$

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis IV. 19. oldal.

Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ mátrix rangja m, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ Lagrange-függvényre

1. $\mathrm{grad}\, F(c) = 0$;
2. a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

Másodrendű szükséges feltétel

Tétel. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, és az $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon legyenek adottak az $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ függvények. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ mátrix rangja m, és az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van. Ekkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektor, amellyel az $F := f + \lambda g$ Lagrange-függvényre az alábbiak teljesülnek:

1. $\mathrm{grad}\, F(c) = 0$;
2. a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) szemidefinit.

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

Implicitfüggvény-tétel

Tétel. Adott $n, m \in \mathbb{N}$, $2 \le n$, valamint $1 \le m < n$ mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

Inverzfüggvény-tétel I.

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, és az a-beli Jacobi-mátrixa invertálható. Ekkor az f függvény a-ban lokálisan invertálható, és az a-beli lokális inverze folytonos.

Bizonyítás: Lásd Simon P. - Analízis IV. 16. oldal.

Inverzfüggvény-tétel II.

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \le n \in \mathbb{N}$, az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható, az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban az $f'(a)$ Jacobi-mátrixra $\det f'(a) \neq 0$ teljesül. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel az $f_{|K(a)}$ leszűkítés invertálható, a $h := (f_{|K(a)})^{-1}$ lokális inverfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = \Big(f'(h(x))\Big)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Bizonyítás: Nincs - nehéz.

1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in \mathcal{D}_f$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti ϕ függvény 1., 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni.

2 Szeparábilis differenciálegyenlet

Tétel. *Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Először feltesszük, hogy minden $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre létezik megoldás, azaz egy olyan $\varphi \in I \to J$ függvény, hogy

$$\frac{\varphi'(x)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel g, $1/h$ függvények egy-egy nyílt intervallumon vannak értelmezve és folytonosak, így léteznek a

$$\int g \ni G : I \to \mathbb{R}, \quad \int h \ni H : J \to \mathbb{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a $\mathcal{D}_\varphi$ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. következőképpen a H szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz $H(\xi) = G(\tau) + c$, ill.

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}\Big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\Big) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek $\tilde{G}$, $\tilde{H}$), akkor alkalmas α, $\beta \in \mathbb{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha, \; \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$H^{-1}\Big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\Big) = \tilde{H}^{-1}\Big(\tilde{G}(t) + \tilde{H}(\xi) - \tilde{G}(\tau)\Big) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}\Big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\Big) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van létezik a megoldás. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x, \, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I, \, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \to \mathbb{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x, \, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I, \, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x, \, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I, \, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az F függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau, \, \xi) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau, \, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az F-re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I$, $K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a $(\tau, \, \xi)$ körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \to K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t, \, \varphi(t))}{\partial_2 F(t, \, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának.

3 Gömbi integrál

Mindenek előtt idézzünk fel néhány fontos tulajdonságot, amivel ”kiterjeszthetjük” a Riemann-integrálhatóságot speciális halmazokon értelmezett korlátos függvényekre.

3.1 Nullamértékű halmaz

Definíció. Legyen $1 \leq s \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^s$. Azt mondju, hogy az A halmaz *nullamértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbb{R}^s$ $(k \in \mathbb{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

3.2 Lebesgue-kritérium

Tétel. Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és legyen az f szakadási helyeinek a halmaza

$$\mathcal{A}_f := \{x \in I : f \notin \mathcal{C}\{x\}\}.$$

Ekkor az f Riemann-integrálhatósága, azaz $f \in R(I)$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű.

Definíció. Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény (esetleges) gyökhelyeitől különböző $\mathcal{D}_f$-beli elemek halmazának lezárását, azaz a

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \neq 0\}}$$

halmazt az f függvény tartójának nevezzük. Világos, hogy a $\operatorname{supp} f$ halmaz zárt, és az $x \in \mathcal{D}_f \backslash \operatorname{supp} f$ helyeken $f(x) = 0$. Ha a $\operatorname{supp} f$ halmaz korlátos is, azaz kompakt, akkor egy alkalmas $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallummal $\operatorname{supp} f \subset I$. Legyen ebben az esetben, most

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{D}_f \cap I) \\ 0 & (x \in I \backslash \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Belátható, hogy ha $F_I \in R(I)$, akkor egyúttal $F_J \in R(J)$ minden olyan $J \subset \mathbb{R}^n$ intervallumra, amelyre $\operatorname{supp} f \subset J$, továbbá

$$\int_I F_I = \int_J F_J.$$

Van értelme tehát az alábbi definíciónak:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_{\mathcal{D}_f} := \int_I F_I$$