Analízis IV

2. gyakorlat

Szabó Krisztián

Tartalom

1 Emlékeztető

1.1 Feltételes szélsőérték

Definíció. Legyen $1 \leq n,\, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, és

$$f : U \to \mathbb{R},\; g = (g_1,\, \dots,\, g_m) : U \to \mathbb{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\cap f(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a c-ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az $f(c)$-re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá c-re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

1.2 Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n,\, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektor, hogy

$$\operatorname{grad}\,(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő λg függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda,\, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Más szóval a $\lambda = (\lambda_1,\, \dots,\, \lambda_m)$, $g = (g_1,\, \dots,\, g_m)$ koordinátázással

$$(\lambda g)(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\xi) \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó f függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is. Ezek megfogalmazásához vezessük be a következő definíciót. Legyen adott a

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

kvadratikus alak, a $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbb{R}^n : B \cdot x = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m < n$, és a B mátrix rangja m. Ekkor azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus alak a B-re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x) > 0 \quad (0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;
2. *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x) < 0 \quad (0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;
3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0 \quad (x \in \mathcal{A}_B)$;
4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0 \quad (x \in \mathcal{A}_B)$;

1.3 Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $1 \leq n$, $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy f, $g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ mátrix rangja m, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.