Analízis IV

1. gyakorlat

Szabó Krisztián

Tartalom

1 Feladat

Hengerkoordinátákra áttérve számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int\int\int_H (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

ahol H az alábbi egyenletű felületek által határolt korlátos és zárt térrész:

$$x^2 + y^2 = 2z, \quad \wedge \quad z = 2.$$

Vizsgáljuk meg a H halmazt geometriailag:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Ha a $z = 2$ sík berajzolásra kerülne, akkor az alábbi korlátos és zárt térrészt kapjuk:

$$H := \left\{ \left(x,\, y,\, \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{2} \leq 2 \right\}.$$

Ahhoz, hogy hengertranszformációt alkalmazzunk, induljunk ki a következő ötletből: a z értékek fussák be a $[0,\, 2]$ intervallumot, majd minden z pontnál kapjuk az alábbi körlapot:

$$x^2 + y^2 \leq \left(\sqrt{2z} \right)^2.$$

Ezekből az információkból rakjuk össze a következő transzformációt:

$$H \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \Phi(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad \left(z \in [0,\, 2],\, \varphi \in [0,\, 2\pi],\, r \in [0,\, \sqrt{2z}] \right).$$

Az integráltranszformáció tétele alapján az eredeti integál a következő alakot ölti:

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{2z}} \int\limits_0^{2\pi} r^2 \cdot r\, d\varphi\, dr\, dz$$

.

2 Feladat

Határozzuk meg az alábbi K kúptest *tehetetlenségi nyomatékát* a z illetve az x tengelyre nézve, ha a kitöltő anyag sűrűsége minden pontban egyenesen arányos az origótól mért távolság négyzetével:

$$K := \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 1\right\}.$$

3 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli T testnek a *térfogatát*, *tömegét* és a z-tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal. Jelöljük az alábbi ponthalmazokat, az alábbi módon:

$$K := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z\},$$

$$G := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

A K halmaz egy kúptest, míg a G halmaz egy egységsugarú gömböt jelöl. Mi a következő ponthalmaz térfogatát keressük:

$$V := K \cap G.$$

A V halmaz meghatározott térfogatot két részre bontjuk, egy csonkakúpra és egy gömbszeletre. A csonkakúp térfogatát hengerkoordináta transzformációval az alábbi módon számolhatjuk:

$$\Phi(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix},$$

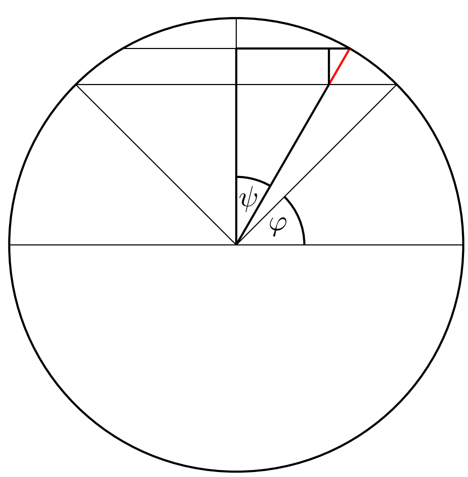
ahol

$$z \in [0,\, \sqrt{2}/2],\, \varphi \in [0,\, 2\pi],\, r \in [0,\, z].$$

Tehát

$$V(V_1) := \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{z} 1 \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

A gömbszelet térfogatát térbeli polárkoordináta transzformációval lehet számolni az alábbi módon:



A fenti ábrán két háromszög vastagon kiemelve hasonlók. Mi az piros szakasz hosszát keressük, hogy az alábbi térbeli polárkoordináta transzformációt el tudjuk végezni. Jelöljük a piros szakasz hosszát ℓ-lel.

$$\Phi(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ r \cdot \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

ahol

$$\varphi \in [0,\, 2\pi],\, \psi \in [0,\, \pi/4],\, r \in [1-\ell,\, 1].$$

Mivel tudjuk, hogy $\varphi = \pi/4$ és a gömbünk (körünk) sugara 1, ezért könnyedén kapjuk az alábbi egyenlőséget:

$$\ell = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \cos(\psi)}.$$

Így, a maradék gömbszelet térfogata az alábbi transzformációval kiszámolható:

$$V(V_2) := \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\cos(\psi)}}^{1} 1 \cdot (-r^2) \cdot \sin(\psi)\, dr\, d\psi\, d\varphi.$$

Így kapjuk, hogy a $V = K \cap G$ ponthalmaz térfogata $V_1 + V_2$.