Analízis III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

Tartalom

1 Konvergens sorozatok metrikus terekben. Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal. Banach- és Hilbert-tér. 2

1.1 Konvergencia metrikus térben . . . 2
1.2 Határérték egyértelműsége . . . 2
1.3 Vektorsorozatok . . . 3
1.4 Koordináta-sorozatok konvergenciája . . . 3
1.5 Függvényterek konvergenciája . . . 5
1.6 Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal . . . 5
1.7 Cauchy-sorozat fogalma . . . 6
1.8 Banach- és Hilbert-tér fogalma . . . 6
1.9 Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel . . . 7
1.10 Függvénytér teljessége . . . 8

2 A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A *Jacobi*-mátrix kiszámítása. 10

2.1 Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata . . . 10

3 Többször differenciálható függvények. Young-tétel. 12

3.1 Többváltozós-valós függvények másodrendű differenciálhatósága . . . 12
3.2 Többváltozós-valós függvények magasabb rendű differenciálhatósága . . . 12
3.3 Többváltozós-vektorfüggvények függvények magasabb rendű differenciálhatósága 13
3.4 Young-tétel . . . 13

1 Konvergens sorozatok metrikus terekben. Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal. Banach- és Hilbert-tér.

Eredeti vizsgacím:
Konvergens sorozatok metrikus terekben. Konvergencia $\mathbb{K}^n$-ben, a koordináta-sorozatok szerepe. *Bolzano-Weierstrass-kiválasztási* tétel. Konvergencia a $\big(C[a,\,b],\,||.||_\infty\big)$ térben (függvénysorozatok, az egyenletes, ill. a pontonkénti konvergencia fogalma). Halmazok zártságának a jellemzése konvergens sorozatokkal. A teljesség fogalma, *Banach*-tér, *Hilber*-tér. A $\big(C[a,\,b],\,||.||_\infty\big)$ tér teljessége.

1.1 Konvergencia metrikus térben

Definíció. Legyen $(X,\,\varrho)$ metrikus tér, és legyen az

$$(x_n) : \mathbb{N} \to X$$

egy, az X elemeiből álló sorozat. Az (x_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $\alpha \in X$, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ "hibakorlát" mellett egy alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexszel igaz a

$$\varrho(x_n,\,\alpha) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N)$$

becslés. Ha ilyen α nincs, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *divergens.*

Például a diszkrét metrikus térben valamely (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha *kvázikonstasn*, azaz létezik olyan $M \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy

$$x_n = x_M \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq M).$$

Ha ui. egy sorozat ilyen, akkor a konvergencia definíciójában az α helyébe az x_M-et, tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett pedig N helyébe M-et írva triviálisan fennáll a

$$\varrho(x_n,\,\alpha) = \varrho(x_n,\,x_M) = \varrho(x_M,\,x_M) = 0 < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq M)$$

egyenlőtlenség.

1.2 Határérték egyértelműsége

Tétel. Legyen valamilyen $(X,\,\varrho)$ metrikus tér esetén az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to X$$

sorozat konvergens. Ekkor a konvergencia definíciójában szereplő $\alpha \in X$ elem egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tételben említett $X \ni \alpha$-n kívül egy $\beta \in X$ elemre is igaz a konvergencia definíciója: bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, \beta) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > M).$$

Ekkor a ϱ metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőlegesen választott

$$n \in \mathbb{N}, n > \max\{N, M\}$$

indexre

$$\varrho(\alpha, \beta) \leq \varrho(\alpha, x_n) + \varrho(x_n, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Következésképpen

$$0 \leq \varrho(\alpha, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Mivel itt az $\varepsilon > 0$ bármilyen (pozitív) szám lehet, ezért csak $\varrho(\alpha, \beta) = 0$ lehetséges. A metrika axiómái szerint innen viszont $\alpha = \beta$ adódik. ∎

1.3 Vektorsorozatok

Legyen most

$$1 \leq s \in \mathbb{N}, 0 < p \leq +\infty, X := \mathbb{K}^s, \varrho := \varrho_p,$$

és tekintsünk egy

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$$

sorozatot. Ha

$$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{ns}) \; (\in \mathbb{K}^s) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor minden $i = 1, \ldots, s$ mellett definiálhatjuk az

$$x^{(i)} := (x_{ni})$$

számsororatot, az x sorozat i-edik *koordináta-sorozatát*. Ekkor az x *vektorsorozat* konvergenciája az alábbiak szerint "kezelhető" a koordináta-sorozatainak a konvergenciája révén.

1.4 Koordináta-sorozatok konvergenciája

Tétel. Az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az előbbi $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ metrikus térben, ha minden $x^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ koordináta-sorozata konvergens. Továbbá

$$\mathbb{K}^s \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \lim_{n\to+\infty} (x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_i = \lim_{n\to+\infty} \left(x^{(i)}\right) \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a tételbeli x sorozat konvergens, legyen

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$$

a határértéke. A ϱ_p metrikak definíciója szerint ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot megadva van olyan $N \in \mathbb{N}$, amellyel az $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ indexekre

$$\varepsilon > \varrho_p(x_n, \alpha) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (p < 1) \\ \left(\sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max\{|x_{ni} - \alpha_i : i = 1, \ldots, s\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

Világos, hogy bármely $i = 1, \ldots, s$ esetén

$$\varrho(x_n, \alpha) \geq \begin{cases} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (0 < p < 1) \\ |x_{ni} - \alpha_i| & (1 \leq p \leq +\infty) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in N,\, n > N,\, p \geq 1)$$

és

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \sqrt[p]{\varepsilon} \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, 0 < p < 1).$$

Mindez pontosan azt jelenti, hogy az $x^(i)$ koordináta-sorozat konvergens és

$$\lim_{n \to +\infty} \left(x^{(i)} \right) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Fordítva, ha minden $x^{(i)}$ koordinátat-sorozat konvergens, akkor legyen

$$\alpha_i := \lim_{n \to +\infty} \left(x^{(i)} \right) \quad (i = 1, \ldots, s)$$

és

$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor minden $i = 1, \ldots, s$ mellett létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N_i).$$

Legyen $N := \max\{N_1, \ldots, N_s\}$, ekkor

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, i = 1, \ldots, s).$$

Ezért

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p < s \cdot \varepsilon^p \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, 0 < p < 1),$$

$$\varrho_p(x_n,\,\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p\right)^{1/p} < s^{1/p}\cdot\varepsilon \quad (n\in\mathbb{N},\, n>N,\, 1\le p<+\infty),$$

$$\varrho_p(x_n,\,\alpha) = \max\{|x_{ni}-\alpha_i| : i=1,\,\ldots,\,s\} < \varepsilon \quad (n\in\mathbb{N},\, n>N,\, 1\le p=\infty).$$

Így minden $0 < p \le +\infty$ esetén az (x_n) sorozat konvergens a $(\mathbb{K}^s,\, \varrho_p)$ metrikus térben, és $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = \alpha$.

■

1.5 Függvényterek konvergenciája

Valamely $-\infty < a < b < +\infty$ mellett tekintsük az $X := C[a,\,b]$ halmazt és a ϱ_∞ metrikát. Ha az

$$f_n \in C[a,\,b] \quad (n\in\mathbb{N})$$

(függvény)sorozat konvergens és

$$f := \lim_{n\to+\infty}(f_n) \in C[a,\,b],$$

akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $n > N$ esetén

$$\varrho_\infty(f_n,\,f) < \varepsilon,$$

azaz

$$\max\big\{|f_n(x) - f(x)| : a\le x\le b\big\} < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens*. Az f az (f_n) határfüggvénye.

Nyilvánvaló, hogy ekkor az előbbi n indexekre bármelyik $x\in[a,\,b]$ helyen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

igaz. Más szóval ez azt jelenti, hogy az $\big(f_n(x)\big)$ (szám)sorozat konvergens és a határértéke $f(x)$. Röviden: az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens*.

1.6 Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal

Tétel. Legyen $(X,\,\varrho)$ metrikus tér. Az $\emptyset \ne A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozatra $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) \in A$.

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az A halmaz zárt, de valamilyen

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

konvergens sorozatra

$$\alpha := \lim_{n\to+\infty}(x_n) \notin A.$$

Ekkor tehát $\alpha \in X \setminus A$, ahol az $X \setminus A$ halmaz nyílt. Így van olyan $K(\alpha)$ környezet, hogy

$$K(\alpha) \subset X \setminus A.$$

Ugyanakkor egy $N \in \mathbb{N}$ indexszel

$$A \ni x_k \in K(\alpha) \subset X \setminus A \quad (N < k \in \mathbb{N}),$$

ami nyilván nem lehet.

Most tegyük fel azt, hogy tetszőleges konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozat határértékére $\lim(x_n) \in A$, és lássuk be, hogy az A halmaz zárt. Legyen ehhez $\alpha \in A'$, ekkor egy alkalmas

$$(z_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozatra $\lim(z_n) = \alpha$. A kiinduló feltételünk szerint ezért $\alpha \in A$, azaz $A' \subset A$ és (egy korábbi tételre hivatkozva) az A zárt. ■

1.7 Cauchy-sorozat fogalma

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér és

$$(x_n) : \mathbb{N} \to X$$

sorozat. Ezt a sorozat *Cauchy-sorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (m, n \in \mathbb{N}, m, n > N).$$

1.8 Banach- és Hilbert-tér fogalma

Legyen adott az $(X, ||.||)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy ez a tér *teljes* (vagy *Banach-tér*), ha a $||.||$ norma által indukált

$$\varrho(x, y) := ||x - y|| \quad (x, y \in X)$$

metrikával az (X, ϱ) metrikus tér teljes. Világos, hogy a

$$(\mathbb{K}^s, ||.||_p) \quad (1 \leq s \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek valamennyien Banach-terek. Hasonlóan: a $(C[a, b], ||.||_\infty)$ tér is Banach-tér.

Azt mondjuk, hogy az $(X, \langle.\rangle)$ euklideszi tér *teljes* (vagy *Hilbert-tér*), ha a $\langle.\rangle$ skaláris szorzás által meghatározott

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in X)$$

normával $(X, ||.||)$ Banach-tér. Így pl. a

$$(\mathbb{K}^s, \langle.\rangle) \quad (1 \leq s \in \mathbb{N})$$

tér Hilbert-tér, ahol

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{s} x_i \overline{y_i} \quad \big(x = (x_1, \ldots, x_s), y = (y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{K}^s\big).$$

1.9 Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel

Tétel. A $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ $(1 \leq s \in \mathbb{N}, 0 < p \leq +\infty)$ metrikus térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Emlékeztetünk egy korábbi tételre, miszerint az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $x^{(i)}$ $i = 1, \ldots, s$ koordináta-sorozata konvergens.

A feltételezésünk szerint most az (x_n) sorozat korlátos. Van tehát olyan $r > 0$ szám, amellyel

$$\varrho(x_n, 0) < r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A ϱ_p metrika definícióját figyelembe véve innen az is rögtön adódik, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$|x_{ni}| < r \quad (n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, s),$$

ill. $0 < p < 1$ mellett

$$|x_{ni}| < r^{1/p} \quad (n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, s),$$

azaz, hogy minden $x^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ koordináta-sorozat (mint számsorozat) is korlátos. A számsorozatokra ismert Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel alapján ezért létezik olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozat, hogy az

$$x^{(1)} \circ \nu^{(1)}$$

részsorozat konvergens. Világos, hogy az $x^{(2)} \circ \nu^{(1)}$ részsorozat is korlátos, ezért van olyan $\nu^{(2)}$ indexsorozat is amelyre az

$$\left(x^{(2)} \circ \nu^{(1)}\right) \circ \nu^{(2)} = x^{(2)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \nu^{(2)}\right)$$

részsorozat is konvergens. A konstrukciót folytatva végül olyan

$$\nu^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, s)$$

indexsorozatokat kapunk, hogy az

$$x^{(i)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \cdots \circ \nu^{(i)}\right) \quad (i = 1, \ldots, s)$$

részsorozatok konvergensek. Legyen

$$\nu := \nu^{(1)} \circ \cdots \circ \nu^{(s)},$$

ekkor a ν sorozat indexsorozat, és minden

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \ldots, s)$$

sorozat részsorozata a konvergens $x^{(i)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \cdots \circ \nu(i)\right)$ sorozatnak. Így az

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \ldots, s)$$

számsorozatok mindegyike konvergens. Ez azt jelenti, hogy az $x \circ \nu$ részsorozat is konvergens.

■

1.10 Függvénytér teljessége

Tétel. A $(C[a, b], \varrho_\infty)$ metrikus tér teljes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az

$$(f_n) : \mathbb{N} \to C[a, b]$$

(függvény)sorozat (a ϱ_∞ metrika értelmében) Cauchy-sorozat. Ez most azt jelenti, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számot is adunk meg, ehhez találunk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, hogy

$$\varrho_\infty(f_n, f_m) =$$
$$\max\left\{|f_n(x) - f_m(x)| : a \leq x \leq b\right\} < \varepsilon \quad (n, m \in \mathbb{N}, n, m > N).$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén egyúttal

$$|f_n(x)-f_m(x)|\varepsilon \quad (n,\, m\in\mathbb{N},\, n,\, m>N) \tag{$\star$}$$

is teljesül, más szóval az $\big(f_n(x)\big)$ számsorozat Cauchy-soroozat. Létezik tehát az

$$f(x):=\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad (x\in[a,\, b])$$

(”pontonkénti”) határérték. Továbbá ($\star$) miatt

$$|f_n(x)-f(x)|=$$

$$\lim_{m\to+\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\le\varepsilon \quad (x\in[a,\, b],\, n\in\mathbb{N},\, n>N). \tag{$\star\star$}$$

Mutassuk meg, hogy az így definiált

$$f:[a,\, b]\to\mathbb{R}$$

függvény folytonos, azaz $f\in C[a,\, b]$. Legyen ehhez valamilyen $\xi\in[a,\, b]$ mellett $\varepsilon>0$ tetszőleges, ekkor az előbbiek szerint bármilyen (rögzített) $n\in\mathbb{N}$, $n>N$ esetén

$$|f(x)-f(\xi)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(\xi)|+|f_n(\xi)-f(\xi)|\le$$

$$2\cdot\xi+|f_n(x)-f_n(\xi)| \quad (x\in[a,\, b]).$$

Mivel $f_n\in C[a,\, b]$, így $f_n\in C\{\xi\}$ is igaz. Következésképpen létezik olyan $\delta>0$ szám, amellyel

$$|f_n(x)-f_n(\xi)|<\varepsilon \quad (x\in[a,\, b],\, |x-\xi|<\delta).$$

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$|f_n(x)-f_n(\xi)|<2\cdot\varepsilon+\varepsilon \quad (x\in[a,\, b],\, |x-\xi|<\delta).$$

Ez nem jelent mást, mint azt, hogy $f\in C\{\xi\}$. Az itt szereplő ξ tetszőleges eleme volt az $[a,\, b]$ intervallumnak, ezért $f\in C[a,\, b]$. Végül, a ($\star\star$) becslés szerint (az ottani szereplőkkel)

$$\varrho_\infty(f_n,\, f)=\max\big\{|f_n(x)-f(x)|: a\le x\le b\big\}\le\varepsilon \quad (n\in\mathbb{N},\, n>N),$$

azaz

$$\varrho_\infty(f_n,\, f)\to 0 \quad (n\to+\infty).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy a $(C[a,\, b],\varrho_\infty)$ metrikus térben az (f_n) sorozat konvergál az f függvényhez. Ezzel beláttuk, hogy a szóban forgó térben minden Cauchy-sorozat konvergens, azaz a $(C[a,\, b],\varrho_\infty)$ teljes metrikus tér.

$\blacksquare$

2 A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A *Jacobi*-mátrix kiszámítása.

2.1 Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel. Legyen $1 \leq n,\, m \in \mathbb{N}$. Az

$$f = (f_1,\, \ldots,\, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen, ha minden $i = 1,\, \ldots,\, m$ esetén az

$$f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

koordináta-függvény differenciálható az a-ban. Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(a) \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először is azt, hogy $f \in D\{a\}$, és jelöljük az $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrix sorvektorait A_i-vel ($i = 1,\, \ldots,\, m$:)

$$f'(a) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor alkalmas

$$\eta = (\eta_1,\, \ldots,\, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$\eta(h) \to 0 \quad (||h|| \to 0)$$

és a

$$h \in \mathbb{R}^n \quad (a + h \in \mathcal{D}_f)$$

helyeken

$$f(a+h) - f(a) = \big(f_1(a+h) - f_1(a),\, \ldots,\, f_m(a+h) - f_m(a)\big) =$$

$$f'(a) \cdot h + \eta(h) \cdot ||h|| =$$

$$\big(\langle A_1,\, h\rangle,\, \ldots,\, \langle A_m,\, h\rangle\big) + \big(\eta_1(h) \cdot ||h||,\, \ldots,\, \eta_m(h) \cdot ||h||\big).$$

Következésképpen minden $i = 1, \ldots, m$ mellett az η függvény

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

koordináta-függvényeivel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle A_i,\, h\rangle + \eta_i(h) \cdot ||h|| \quad (h \in \mathbb{R}^n,\, a+h \in \mathcal{D}_f). \tag{$\star$}$$

Mivel bármely $i = 1, \ldots, m$ indexre

$$\eta_i(h) \to 0 \quad (||h|| \to 0),$$

ezért az előbbi $(\star)$ összefüggés azt jelenti, hogy $f_i \in D\{a\}$ és $A_i = \operatorname{grad} f_i(a) \quad (i = 1, \ldots, m)$. Most azt tegyük fel, hogy $f_i \in D\{a\}$ $(i = 1, \ldots, m)$, amikor is valamilyen

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\, \eta_i \to 0 \; (||h|| \to 0) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

függvényekkel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \left\langle \operatorname{grad} f_i(a),\, h \right\rangle + \eta_i(h) \cdot ||h|| \quad (h \in \mathbb{R}^n,\, a+h \in \mathcal{D}_f,\, i = 1, \ldots, m).$$

Ha tehát

$$A := \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

akkor az

$$\eta := (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \eta(h) \cdot ||h||,$$

ahol $\eta(h) \to 0$ $(||h|| \to 0)$. Ezért $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$.

■

3 Többször differenciálható függvények. Young-tétel.

3.1 Többváltozós-valós függvények másodrendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható* az a-ban ha minden $x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f \in D\{x\}$, és

$$\partial_i f \in D\{a\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ha a fenti feltételek teljesülnek akkor léteznek a

$$\partial_j(\partial_i f)(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

parciális deriváltak. Ehhez persze nem szükséges, hogy a $\partial_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények deriválhatók legyenek az a helyen. Ha tehát a fenti

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvényre $f \in D^2\{a\}$, akkor minden $i, j = 1, \ldots, n$ mellett létezik a $\partial_{ij} f(a)$ másodrendű parciális derivált. Az

$$f''(a) := \left(\partial_{ij} f(a)\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \ldots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \ldots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \ldots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrixot az f függvény a-beli *másodrendű deriváltmátrixnának nevezzük.* A későbbiekben tárgyalandó Young-tétel miatt ez egy szimmetrikus mátrix.

3.2 Többváltozós-valós függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, továbbá egy alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel minden $x \in K(a)$ pontban az f függvény s-szer differenciálható: $f \in D^s\{x\}$. Belátható, hogy ekkor a $K(a)$ pontjaiban az f összes s-edrendű parciális deriváltja létezik. Azt mondjuk, hogy az *f függvény az a-ban $(s+1)$-szer differenciálható*, ha minden s-edrendű parciális deriváltfüggvénye differenciálható az a-ban.

3.3 Többváltozós-vektorfüggvények függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen $1 \leq n,\, m \in \mathbb{N}$ és

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\; a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,$$

ill. $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az f *függvény k-szor differenciálható az a-ban*, ha

$$f_j \in D^k\{a\} \quad (j = 1, \ldots, m).$$

3.4 Young-tétel

Tétel. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ és $f \in D^s\{a\}$. Ekkor tetszőleges $k_1, \ldots, k_s \in \{1, \ldots, n\}$ indexek esetén ezek bármely $j_1, \ldots, j_s$ permutációjára

$$\partial_{k_1 \ldots k_s} f(a) = \partial_{j_1 \ldots j_s} f(a).$$

Bizonyítás. Az s-szerinti teljes indukcióra gondolva elegendő az $s = 2$ esettel foglalkoznunk. Ekkor tehát azt kell belátnunk, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Világos, hogy csak az $i \neq j$ eset az "érdekes". Ezen túl (könnyen meggondolhatóan) azt is feltehetjük, hogy $n = 2$. Más szóval az

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

függvényekre

$$a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,\; f \in D^2\{a\},$$

és ennek alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a).$$

Legyen ehhez $r > 0$ olyan, amellyel ($\mathbb{R}^n$-ben a $||.|| := ||.||_\infty$ normát választva)

$$K(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - a|| < r\} \subset \mathcal{D}_f,$$

és vezessük be az alábbi jelölést: az $u, v \in (-r, r)$ helyeken

$$\Delta(u, v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + v).$$

Ha rögzítjük a $v \in (-r,\, r)$ számot, akkor a

$$\varphi(u) := f(a_1 + u,\, a_2 + v) - f(a_1 + u,\, a_2) \quad \big(u \in (-r,\, r)\big)$$

függvénnyel

$$\Delta(u,\, v) = \varphi(u) - \varphi(0) \quad \big(u \in (-r,\, r)\big).$$

Az $f \in D^2\{a\}$ feltétel miatt az előbbi $K_r(a)$ környezettől azt is megkövetelhetjük, hogy egyrészt minden $x \in K_r(a)$ helyen $f \in D\{x\}$ (így egyúttal léteznek az $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ parciális deriváltak is), másrészt

$$\partial_1 f,\, \partial_2 f \in D\{a\}.$$

Következésképpen a most definiált

$$\varphi : (-r,\, r) \to \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, ezért a Lagrange-középérték-tétel alapján

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot u \quad \big(u \in (-r,\, r)\big),$$

ahol $\xi \in (0,\, u)$ (vagy $\xi \in (u,\, 0)$). A parciális deriváltak definíciójára gondolva

$$\varphi'(u) = \partial_1 f(a_1 + u,\, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + u,\, a_2) \quad \big(u \in (-r,\, r)\big),$$

így

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \big(\partial_1 f(a_1 + \xi,\, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi,\, a_2)\big) \cdot u \quad \big(u \in (-1,\, r)\big).$$

A $\partial_1 f \in D\{a\}$ differenciálhatósági feltételből

$$\operatorname{grad} \partial_1 f(a) = \big(\partial_{11} f(a),\, \partial_{12} f(a)\big),$$

és egy alkalmas

$$\eta \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \eta(z) \to 0 \quad (||z|| \to 0)$$

függvénnyel

$$\begin{gathered}\partial_1 f(a_1 + \xi,\, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi,\, a_2) = \\ \partial_1 f(a_1 + \xi,\, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1,\, a_2) - \big(\partial_1 f(a_1 + \xi,\, a_2) - \partial_1 f(a_1,\, a_2)\big) = \\ \big\langle \operatorname{grad} \partial_1 f(a),\, (\xi,\, v)\big\rangle + \eta(\xi,\, v) \cdot ||(\xi,\, v)|| - \big\langle \operatorname{grad} \partial_1 f(a),\, (\xi,\, 0)\big\rangle - \eta(\xi,\, 0) \cdot ||(\xi,\, 0)|| = \\ \partial_{12} f(a) \cdot v + \eta(\xi,\, v) \cdot ||(\xi,\, v)|| - \eta(\xi,\, 0) \cdot |\xi|.\end{gathered}$$

Speciálisan a $0 \neq u = v \in (-r,\, r)$ választással

$$\Delta(u,\, u) = \varphi(u) - \varphi(0) = \partial_{12} f(a) \cdot u^2 + \eta(\xi,\, u) \cdot ||(\xi,\, u)|| \cdot u - \eta(\xi,\, 0) \cdot |\xi| \cdot u,$$

amiből
$$\frac{\Delta(u,\, u)}{u^2} = \partial_{12} f(a) + \eta(\xi,\, u) \cdot \frac{||(\xi,\, u)||}{u} - \eta(\xi,\, 0) \cdot \frac{|\xi|}{u}$$
következik. Ezért $|\xi| < |u|$ alapján
$$\left| \frac{\Delta(u,\, u)}{u^2} - \partial_{12} f(a) \right| \leq |\eta(\xi,\, u)| + |\eta(\xi,\, 0)| \to 0 \quad (u \to 0),$$
hiszen
$$||(\xi,\, u)||,\, ||(\xi,\, 0)|| \leq |u| \to 0 \quad (u \to 0).$$
Azt kapjuk ezzel, hogy
$$\partial_{12} f(a) = \lim_{u \to 0} \frac{\Delta(u,\, u)}{u^2}. \tag{$\star$}$$
Legyen most rögzített $u \in (-r,\, r)$ mellett
$$\psi(v) := f(a_1 + u,\, a_2 + v) - f(a_1,\, a_2 + v) \quad \big(v \in (-r,\, r)\big).$$
Ekkor
$$\Delta(u,\, v) = \psi(v) - \psi(0) \quad \big(v \in (-r,\, r)\big)$$
és az előbbiekkel analóg módon az adódik, hogy
$$\partial_{21} f(a) = \lim_{v \to 0} \frac{\Delta(v,\, v)}{v^2}.$$
Itt a jobb oldali limesz ugyanaz, mint a ($\star$)-ban. Így $\partial_{21} f(a) = \partial_{12} f(a)$.

$\blacksquare$