Analízis alkalmazásai vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1 Vizsgakérdés

Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).

Legyenek n, $m \in \mathbf{N}$ természetes számok, $1 \leq m < n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m,$$

akkor az f-et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f-nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a-nak egy olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a b-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x,\, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x,\, y) = 0.$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az $(a,\, b)$ körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1,\, \ldots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \ldots,\, y_m) &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_m(x_1,\, \ldots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \ldots,\, y_m) &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1,\, \ldots,\, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1,\, \ldots,\, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

A $\varphi : K(a) \to K(b)$ implicitfüggvényre a következő igaz:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{f = 0\} = \{(x,\, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}.$$

Geometriai szóhasználattal élve

$$\operatorname{graf} \varphi := \{(x,\, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}$$

(a φ függvény "grafikonja", ami a függvény definíciója miatt persze maga a φ függvény), tehát az előbbi egyenlőség így néz ki:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{f = 0\} = \operatorname{graf} \varphi = \varphi.$$

1.1 Implicitfüggvény-tétel

Tétel. Adott $n, m \in \mathbf{N}$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

A tételben $f \in C^1$, $\partial_2 f(a, b) \neq 0$ feltételekből következően a $K(a)$, $K(b)$ környezetekről az is feltehető, hogy

$$\det \partial_2 f(x, y) \neq 0 \quad (x \in K(a),\, y \in K(b)),$$

egyúttal

$$\det \partial_2 f(x, \varphi(x)) \neq 0 \quad (x \in K(a)).$$

Ezért az $x \in K(a)$ helyeken a $\partial_2 f(x, \varphi(x))$ mátrix valóban invertálható.

1.2 Inverzfüggvény-tétel

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R},\, h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r,\, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h_{|_I})^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h_{|_I})^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többáltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

függvény és az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a-ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a-beli *lokális inverzének* nevezzük.

Tétel. Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, és $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Tegyük fel, hogy egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel az $f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható, a $h := (f_{|_{K(a)}})^{-1}$ lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = \big(f'(h(x))\big)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

1.3 Hiperkoordinátás parciális deriváltak

Legyen adott $n,\, m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n \in \mathbf{N}$ mellett

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m.$$

Az előbbiek alapján most adott $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k < n$ esetén legyen $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-k} \times \mathbf{R}^k$. Ha $\xi \in \mathcal{D}_f$, akkor legyen $(a,\, b) = \xi$, ahogy eddig. Azaz f-et fel lehet fogni egy kétváltozós függvénynek. Tekintsük az alábbi definíciót:

$$\mathcal{D}_1^{(a,\,b)} := \{x \in \mathbf{R}^{n-k} : (x,\, b) \in \mathcal{D}_f\},$$

$$\mathcal{D}_2^{(a,\,b)} := \{y \in \mathbf{R}^k : (a,\, y) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Ekkor analóg módon a *szokásos* parciális deriváltakhoz

$$f_{(a,\,b),\,1} \in \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}^m,$$

$$f_{(a,\,b),\,2} \in \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m,$$

ahol

$$f_{(a,\,b),\,1}(x) := f(x,\,b) \quad (x \in \mathcal{D}_1^{(a,\,b)}),$$

$$f_{(a,\,b),\,2}(y) := f(a,\,y) \quad (y \in \mathcal{D}_2^{(a,\,b)}).$$

Ebben az esetben a *hiperkoordinátás* alakja a parciális deriváltaknak (amennyiben értelmes a derivált):

$$\partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) := \partial_1 f(a,\,b) := f'_{(a,\,b),\,1}(a),$$

$$\partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) := \partial_2 f(a,\,b) := f'_{(a,\,b),\,2}(b).$$

Azaz egy $(a,\,b)$ helyen lerögzítjük az első vagy második változók és az így kapott függvénynek vesszük a deriváltját. Ha f egy differenciálható függvény az $(a,\,b) \in \mathcal{D}_f$ helyen, akkor

$$f'(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) & \partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,\,b) & \partial_2 f_1(a,\,b) & \cdots & \partial_n f_1(a,\,b) \\ \partial_1 f_2(a,\,b) & \partial_2 f_2(a,\,b) & \cdots & \partial_n f_2(a,\,b) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a,\,b) & \partial_2 f_n(a,\,b) & \cdots & \partial_n f_n(a,\,b) \end{bmatrix},$$

ahol a $\partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) \in \mathbf{R}^{m\times(n-k)}$, $\partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) \in \mathbf{R}^{m\times k}$ mátrixok rendre az $f'(a,\,b) \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix első $n-k$-adik és utolsó k-adik oszlopvektorai. Pl. legyen $f \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ $(a,\,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$-ben differenciálható függvény, $k := 2$. Ekkor

$$f \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$$

és

$$f'(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,\,b) & \partial_2 f_1(a,\,b) & \partial_3 f_1(a,\,b) \\ \partial_1 f_2(a,\,b) & \partial_2 f_2(a,\,b) & \partial_3 f_2(a,\,b) \\ \partial_1 f_3(a,\,b) & \partial_2 f_3(a,\,b) & \partial_3 f_3(a,\,b) \\ \partial_1 f_4(a,\,b) & \partial_2 f_4(a,\,b) & \partial_3 f_4(a,\,b) \end{bmatrix},$$

$$\partial_{\mathbf{1}} f(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,\,b) \\ \partial_1 f_2(a,\,b) \\ \partial_1 f_3(a,\,b) \\ \partial_1 f_4(a,\,b) \end{bmatrix}, \partial_{\mathbf{2}} f(a,\,b) = \begin{bmatrix} \partial_2 f_1(a,\,b) & \partial_3 f_1(a,\,b) \\ \partial_2 f_2(a,\,b) & \partial_3 f_2(a,\,b) \\ \partial_2 f_3(a,\,b) & \partial_3 f_3(a,\,b) \\ \partial_2 f_4(a,\,b) & \partial_3 f_4(a,\,b) \end{bmatrix}.$$

2 Vizsgakérdés

Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).

Legyen $1 \leq n$, $m \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, és

$$f : U \to \mathbf{R},\ g = (g_1,\ \ldots,\ g_m) : U \to \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a c-ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az $f(c)$-re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá c-re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre nézve, akkor egy alkalmas $K(c)$ környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

2.1 Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n,\ m \in \mathbf{N},\ m < n,\ \emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbf{R},\ g : U \to \mathbf{R}^m$. Ha $f \in D,\ g \in C^1$, az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, hogy

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő λg függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda,\, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó f függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is.

Bizonyítás. A rangfeltétel szerint a $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrixnak van olyan $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ részmátrixa, amelyre $\det A \neq 0$. Feltehető, hogy az A-t a $g'(c)$ mátrix utolsó m oszlopa határozza meg, amikor is az $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ felbontást úgy képzeljük el, hogy a

$$\xi = (\xi_1,\, \ldots, \xi_n) = (x,\, y) \in \mathbf{R}^n$$

vektorokra

$$x := (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1},\, \ldots,\, \xi_n) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően $c = (a,\, b)$. Ekkor tehát

$$\det \partial_2 g(a,\, b) = \det A \neq 0.$$

Mivel $g(a,\, b) = 0$, ezért alkalmazható az implicitfüggvény tétel: alkalmas

$$K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m},\ K(b) \subset \mathbf{R}^m$$

környezettel létezik a g függvény által az $(a,\, b)$ körül meghatározott

$$h : K(a) \to K(b)$$

$h \in C^1$ implicitfüggvény:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{g = 0\} = \{(x,\, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -\big(\partial_2 g(x,\, h(x))\big)^{-1} \cdot \partial_1 g(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas $K(c) \subset U$ környezettel (pl.)

$$f(\xi) \le f(c) \quad \big(\xi = (x,\, y) \in K(c) \cap \{g = 0\}\big).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvényre $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}$ és

$$\Phi(x) \le f(c) = \Phi(a) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Más szóval a Φ függvénynek az a-ban lokális maximuma van. A Φ differenciálható, ezért

$$\Phi'(a) = \operatorname{grad} \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvénnyel $\Phi = f \circ \varphi$ és $\varphi \in D$, valamint I-vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$-beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times(n-m)} \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Következésképpen

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = f'(a,\, h(a)) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$f'(c) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = \partial_1 f(c) + \partial_2 f(c) \cdot h'(a) =$$

$$\partial_1 f(c) - \partial_2 f(c) \cdot \big(\partial_2 f(c)\big)^{-1} \cdot \partial_1 g(c) = \partial_1 f(c) + \lambda \cdot \partial_1 g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_2 f(c) \cdot \big(\partial_2 g(c)\big)^{-1} \in \mathbf{R}^m.$$

Tehát (a ∂_1 értelmezéséből)

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-m). \tag{1}$$

A λ vektor definíciójából "átszorzással" azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 f(c) + \lambda \cdot \partial_2 g(c) = 0,$$

azaz (a ∂_2 definíciójából)

$$\partial_j f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_j g_l(c) = 0 \quad (j = n-m+1, \ \ldots, \ n). \tag{2}$$

A (1), (2) formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \ \ldots, \ n),$$

más szóval

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0 =$$
$$\Big(\partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_1 g_l(c), \ \ldots, \ \partial_n f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \partial_n g_l(c)\Big) = 0.$$

■

A fentiekben az $m < n$ feltételezéssel éltünk. Ha $m = n$, akkor pl. az $g'(c) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, és a $\operatorname{rang} g'(c) = m = n$ *rangfeltétel* jelentése az, hogy a

$$g'(c) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} g_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_n(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

Jacobi-mátrix invertálható. Tehát a $\operatorname{grad} g_k(a) \in \mathbf{R}^n \quad (k = 1, \ \ldots, \ n)$ vektorok lineárisan függetlenek, más szóval bázist alkotnak az $\mathbf{R}^n$-ben. Így (egyértelműen) léteznek olyan $\lambda_j \in \mathbf{R} \quad (j = 1, \ \ldots, \ n)$ számok, amelyekkel

$$-\operatorname{grad} f(c) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(c),$$

azaz a $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vektorral $\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0$. Röviden: ekkor is igaz a tétel, de az állítása triviális.

Legyen adott a

$$Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kvadratikus alak, a $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbf{R}^n : Bx = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m < n$, és a B mátrix rangja m. Ekkor azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus alak a B-re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x) > 0$ $(0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;
2. *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x) > 0$ $(0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;
3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0$ $(x \in \mathcal{A}_B)$;
4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0$ $(x \in \mathcal{A}_B)$.

2.2 Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $n, m \in \mathbf{N}, 1 \leq m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja m, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. A Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Idézzük fel, hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x, x \rangle \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

2.3 Másodrendű szükséges feltétel

Tétel. Az $n, m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$, $f, g \in D^2$ függvények. Tegyük fel, hogy valamilyen $c \in \{g = 0\}$ helyen f-nek lokális minimuma (maximuma) van a $\{g = 0\}$ feltételre vonatkozóan, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m-mel. Ekkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$, hogy az $F := f + \lambda g$ függvényre az alábbiak teljesülnek:

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) **szemi**definit.

3 Vizsgakérdés

A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.

3.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

> határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:
>
> 1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
> 2. $\varphi \in D$;
> 3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik φ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő f függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala.*

3.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges φ, ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ egy (τ-t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor $\mathcal{M}$ a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \to \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M},\, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x,\, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi_{|\mathcal{D}_\varphi}$.

A Φ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

3.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az I, $J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \to \mathbf{R},\, h : J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot h(y) \quad \big((x,\, y) \in I \times J\big).$$

A $\varphi \in I \to J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

Tétel. Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \to \mathbf{R}$ is, és az $1/h : J \to \mathbf{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \to \mathbf{R},\ H : J \to \mathbf{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a $\mathcal{D}_\varphi$ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen a H

függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t)+c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau)+c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}\big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek $\tilde{G}$, $\tilde{H}$), akkor alkalmas α, $\beta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha,\ \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi$, $\mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x,\, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I,\, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \to \mathbf{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x,\, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I,\, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x,\, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I,\, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az F függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau,\, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau,\, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az F-re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I$, $K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a $(\tau,\, \xi)$ körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \to K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t,\, \varphi(t))}{\partial_2 F(t,\, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

3.4 Rakéta emelkedési ideje

Egy m tömegű rakétát v_0 kezdősebességgel függőlegesen fellövünk (függőleges hajítás). Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő (jelöljük α-val a nehézségi gyorsulást) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen β). Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

Ha $v \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor – feltételezve, hogy $v \in D$, $\mathcal{D}_v$ intervallum és $0 \in \mathcal{D}_v$ – a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika Newton-féle mozgástörvényeit): adott m, α, β pozitív számok mellett olyan differenciálható v függvényt keresünk, amelyre

$$mv'(t) = -m\alpha - \beta v^2(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Világos, hogy $v(0) = v_0$. Azt a $T \in \mathcal{D}_v$ "pillanatot" kell meghatározni, amikor $v(T) = 0$.

$$I := J := \mathbf{R},\ g(x) := -\alpha,\ h(y) := 1 + \frac{\beta y^2}{m\alpha} \quad (x,\, y \in \mathbf{R})$$

választással egy szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Legyen $\tau := 0$, $\xi := v_0$, ekkor a

$$G(x) := \int_0^x -\alpha\, dt = -\alpha x \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$H(y) := \int_{v_0}^{y} \frac{1}{1 + \frac{\beta t^2}{m\alpha}}\, dt =$$

$$\sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot y - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (y \in \mathbf{R})$$

függvények eleget tesznek az előbbi tétel bizonyításában mondottaknak. Következésképpen

$$H(v(t)) = G(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v),$$

azaz

$$\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t) \right) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

A $v(T) = 0$ egyenlőségből a $t := T$ helyettesítéssel – figyelembe véve, hogy $\mathrm{arctg}(0) = 0$ – az adódik, hogy

$$T = \sqrt{\frac{m}{\beta\alpha}} \cdot \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right).$$

3.5 Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen $n := 1$, és az $I,\ J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \to \mathbf{R} \text{ és } h : I \times J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x,\, y) := -\frac{g(x,\, y)}{h(x,\, y)} \quad \big((x,\, y) \in I \times J\big).$$

Ekkor a fenti minden φ megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\, \varphi(x))}{h(x,\, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott d.e. *egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x,\, y) \mapsto \big(g(x,\, y),\, h(x,\, y)\big) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \to \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$\mathrm{grad}\, G = (\partial_1 G,\, \partial_2 G) = (g,\, h).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a φ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

Tétel. Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Valóban, $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt a feltételezett φ megoldásra

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \big\langle \operatorname{grad} G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \big\rangle =$$

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ halmaz nyílt intervallum, ezért az F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(\tau) = \xi$, ezért

$$c = G(\tau, \xi).$$

A G-ről feltehetjük, hogy $G(\tau, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó k.é.p. φ megoldása eleget tesz a

$$G(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó k.é.p. minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau, \xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau, \xi) = h(\tau, \xi) \neq 0,$$

ezért a G-re (a $(\tau,\,\xi)$ helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \to J$$

(implicit)függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi,\; G(x,\,\psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi),\; \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x,\,\psi(x))}{\partial_2 G(x,\,\psi(x))} = -\frac{g(x,\,\psi(x))}{h(x,\,\psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

3.6 Multiplikátor módszer

Az egzakt differenciálegyenlet definíciójában szereplő $\operatorname{grad} G = (g,\,h)$ feltételből a

$$\partial_1 G = g,\; \partial_2 G = h$$

egyenlőségek következnek. Ha $g,\,h \in D$, akkor $G \in D^2$, így a Young-tétel miatt

$$\partial_{12} G = \partial_2 g = \partial_{21} G = \partial_1 h,$$

azaz ekkor a

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel teljesülése szükséges az "egzaktsághoz".

Azonban, ha $g,\,h \in D$, de ez előző

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel nem teljesül, akkor esetenként alkalmas ekvivalens átalakításokkal a feladat "egzakt alakra hozható". Ezek közül az átalakítások közül az ún. *multiplikátor módszer* a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy a

$$\mu : I \times J \to \mathbf{R}$$

differenciálható függvény (pl.) minden helyen pozitív. Ekkor a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\,\varphi(x))}{h(x,\,\varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség nyilván ekvivalens a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\, \varphi(x)) \cdot \mu(x,\, \varphi(x))}{h(x,\, \varphi(x)) \cdot \mu(x,\, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel, azaz a g, h függvények "kicserélhetők" a $g\mu$, $h\mu$ függvényekre. Ekkor az egzaktságnak az előző megjegyzésben megfogalmazott szükséges feltételéhez a

$$\partial_2(g\mu) = g \cdot \partial_2\mu + \mu \cdot \partial_2 g = \partial_1(h\mu) = h \cdot \partial_1\mu + \mu \cdot \partial_1 h$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük.

4 Vizsgakérdés

Lineáris differenciálegyenlet. Az állandók variálásának módszere. A radioaktív bomlás felezési idejének meghatározása.

4.1 Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most $n := 1$ és az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a

$$g,\, h : I \to \mathbf{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x,\, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad \big((x,\, y) \in I \times \mathbf{R}\big).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$ mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot \big(\theta(t) - \psi(t)\big) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben $h \equiv 0$:

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

Tétel. Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Legyen a

$$G : I \to \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és $G' = g$ (a g-re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \to \mathbf{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \to \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\left(\frac{\chi}{\varphi_0}\right)'(t) = \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} =$$

$$\frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0,$$

azaz (lévén a $\mathcal{D}_\chi$ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \to \mathbf{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \to \mathbf{R}$$

függvény, hogy az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az m-re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \to \mathbf{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármelyik m primitív függvényét is véve, az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \to \mathbf{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol m egy tetszőleges primitív függvénye a h/φ_0 függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbf{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ez megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$\varphi'(t) = m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) =$$

$$\frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J).$$

Speciálisan az "egész" I intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbf{R},\, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik φ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c_{|J}}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \to \mathbf{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden φ, ψ megoldására $\varphi = \psi_{c_{|\mathcal{D}_\varphi}}$ és $\psi = \psi_{c_{|\mathcal{D}_\psi}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

$\blacksquare$

A tétel bizonyításából a következők is kiderültek: legyen

$$\mathcal{M} := \{\varphi : I \to \mathbf{R} : \varphi \in D,\, \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in I)\},$$

$$\mathcal{M}_h := \{\varphi : I \to \mathbf{R} : \varphi \in D,\, \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in I)\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{M}_h = \{c \cdot \varphi_0 : c \in \mathbf{R}\}$$

(azaz algebrai nyelven mondva az $\mathcal{M}_h$ egy 1 dimenziós vektortér), és

$$\mathcal{M} = m \cdot \varphi_0 + \mathcal{M}_h := \{\varphi + m \cdot \varphi_0 : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

Itt $m \cdot \varphi_0$ helyébe bármelyik $\psi \in \mathcal{M}$ (ún. *partikuláris megoldás*) írható, így

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h = \{\varphi + \psi : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

4.2 Radioaktív bomlás

Radioaktív anyag bomlik, a bomlási sebesség egyenesen arányos a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. A bomlás kezdetétől számítva mennyi idő alatt bomlik el az anyag fele?

Legyen m_0 az anyag eredeti, $\varphi(t)$ pedig a $t \quad (t \in \mathbf{R})$ időpontban még el nem bomlott anyag mennyisége. A feladatban szereplő arányossági tényező $0 < \alpha \in \mathbf{R}$. Ekkor

$$\varphi'(t) = -\alpha\varphi(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol $\varphi(0) = m_0$. A T *(felezési időt)* keressül, amikor is $\varphi(T) = m_0/2$.

Ez egy homogén lineáris differenciálegyenlet, ahol $g \equiv -\alpha$. Ezért (pl.)

$$G(t) = -\alpha t \quad (t \in I).$$

valamint

$$\varphi_0(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \in I),$$

ill.

$$\varphi(t) = ce^{-\alpha t} \quad (t \in I,\, c \in \mathbf{R}).$$

Mivel

$$m_0 = \varphi(0) = c,$$

ezért
$$\varphi(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (t \in I).$$
A T definíciója alapján
$$\varphi(T) = m_0 e^{-\alpha T} = \frac{m_0}{2},$$
azaz $e^{-\alpha T} = 1/2$. Innen
$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

5 Vizsgakérdés

Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása). A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel (bizonyítás nélkül).

5.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;

2. $\varphi \in D$;

3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;

4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciatétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett az $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt. Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

5.2 Egzisztenciatétel

Tétel (Picard-Lindelöf). Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.

Bizonyítás (vázlat). Legyenek a $\delta_1,\, \delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to \Omega : \psi \in C\}.$$

Az $\mathcal{F}$ halmaz a

$$\rho(\phi,\, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi,\, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha $\mathcal{X}$ jelöli a

$$g : I_* \to \mathbf{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \mathbf{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F},\, x \in I_*).$$

Tehát az f függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" $f_1,\, \ldots,\, f_n$ szimbólumokkal jelölve, a ψ, f függvények (és egyúttal az f_i-k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t,\, \psi(t)) \in \mathbf{R} \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

függvények folytonosak. Következőképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

integrálóknak, és így a

$$\xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt := (\xi_1 + d_1,\, \ldots,\, \xi_n + d_n) \in \mathbf{R}^n$$

"integrálvektoroknak". Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x,\, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_\mu := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - \xi\|_\infty \le \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x,\, y)\|_\infty : x \in I_*,\, y \in K_\mu\}$$

(ami meg az f folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_\mu$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt\right| : i = 1,\, \ldots,\, n\right\} \le \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az $\mathcal{F}$ definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to K_\mu : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$-val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1,\, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \le \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is $\mathcal{F}$-beli. (Ha a kiindulásul választott $\delta_1,\, \delta_2$-re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a $\delta_1,\, \delta_2$ helyébe olyan "új" $0 < \tilde{\delta}_1,\, \tilde{\delta}_2$-t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1,\, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2]$$

és
$$M\cdot\max\{\tilde{\delta_1},\,\tilde{\delta_2}\}\le\mu$$
legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I_*}:=[\tau-\tilde{\delta_1},\,\tau+\tilde{\delta_2}]$ intervallummal az "új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M\cdot\max\{\tilde{\delta_1},\,\tilde{\delta_2}\}\le\mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi,\,\psi\in\mathcal{F}$ mellett

$$\rho(T\psi,\,T\phi)=\max\{\|T\psi(x)-T\phi(x)\|_\infty : x\in I_*\}=$$
$$\max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t,\,\psi(t))-f_i(t,\,\phi(t))\,dt)\right| : i=1,\,\ldots,\,n\right\} : x\in I_*\right\}\le$$
$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t,\,\psi(t))-f_i(t,\,\phi(t))| : i=1,\,\ldots,\,n\}\,dt\right| : x\in I_*\right\}=$$
$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t,\,\psi(t))-f(t,\,\phi(t))\|_\infty\,dt\right| : x\in I_*\right\}.$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q:=K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q\ge0$ konstans, amellyel

$$\|f(t,\,y)-f(t,\,z)\|_\infty\le L_Q\cdot\|y-z\|_\infty\quad(t\in I,\,y,\,z\in Q),$$

speciálisan
$$\|f(t,\,\psi(t))-f(t,\,\phi(t))\|_\infty\le$$
$$L_Q\cdot\|\psi(t)-\phi(t)\|_\infty\le L_Q\cdot\rho(\psi,\,\phi)\quad(t\in I_*).$$

Ezért
$$\rho(T\psi,\,T\phi)\le L_Q\cdot\delta\cdot\rho(\psi,\,\phi).$$

Tehát a T leképezés
$$L_Q\cdot\max\{\delta_1,\,\delta_2\}<1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2-t, (ezt - az "eddigi" I_*-ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi\in\mathcal{F}$, amelyre
$$T\phi=\phi.$$

Legyen
$$\varphi(x):=\psi(x)\quad\big(x\in(\tau-\delta_1,\,\tau+\delta_2)\big).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t,\, \varphi(t))\, dt \quad \big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\big).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x,\, \varphi(x)) \quad \big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\big).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A fenti Picard-Lindelöf-egzisztenciatételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja.

Tétel. Az előző tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg, azaz bármely φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Legyen az $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ jobb oldal olyan, hogy $\Omega := \mathbf{R}^n$, és (az előző tétel feltételein kívül) valamilyen α, β pozitív együtthatókkal

$$\|f(x,\, y)\|_\infty \le \alpha \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I,\, y \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor belátható, hogy az f által meghatározott differenciálegyenletre vonatkozó bármelyik k.é.p. teljes megoldása az I-n van értelmezve.

6 Vizsgakérdés

A lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata: homogén, inhomogén rendszerek. A megoldáshalmaz szerkezete.

6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és egy nyílt $I \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \to \mathbf{R} \quad (i,\, k = 1,\, \ldots,\, n),\, b = (b_1,\, \ldots,\, b_n) : I \to \mathbf{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := \big(a_{ik}(x)\big)_{i,\, k=1}^{n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

mátrixfüggvényt. Ha

$$f(x,\, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad ((x,\, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

akkor az f függvény, mint jobb oldal által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ($n > 1$ esetén *lineáris differenciálegyenlet-rendszernek*) nevezzük.

Legyenek a fentieken túl adottak még a $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{K}^n$ értékek, és vizsgáljuk a $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p.-t. Ha $I_* \subset I$, $\tau \in \operatorname{int} I_*$, kompakt intervallum, akkor

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} \in \mathbf{R} \quad (i,\, k = 1,\, \ldots,\, n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} \in \mathbf{R}.$$

Következésképpen

$$\|f(x,\, y) - f(x,\, z)\|_\infty = \|A(x) \cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y - z\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (x \in I_*,\, y,\, z \in \mathbf{K}^n).$$

Továbbá a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\in \mathbf{R})$$

jelöléssel

$$\|f(x,\, y)\|_\infty = \|A(x) \cdot y + b(x)\|_\infty \leq \|A(x) \cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq q \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I_*,\, y \in \mathbf{K}^n),$$

ezért minden k.é.p. teljes megoldása az I intervallumon van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó d.e. *homogén*, ha $b \equiv 0$, *inhomogén*, ha létezik $x \in I$, hogy $b(x) \neq 0$. Legyenek

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D,\, \psi' = A \cdot \psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D,\, \psi' = A \cdot \psi + b\}.$$

6.2 Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptétele

Tétel. A bevezetésben mondott feltételek mellett

1. az $\mathcal{M}_h$ halmaz n dimenziós lineáris tér a $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\psi \in \mathcal{M}$ esetén
$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$
3. ha a $\phi_k = (\phi_{k1},\, \ldots,\, \phi_{kn})$ $(k = 1,\, \ldots,\, n)$ függvények bázist alkotnak az $\mathcal{M}_h$-ban, akkor léteznek olyan $g_k : I \to \mathbf{K}$ $(k = 1,\, \ldots,\, n)$ differenciálható függvények, amelyekkel
$$\psi := \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyítás. Az 1. állítás bizonyításához mutassuk meg először is azt, hogy bármilyen ψ, $\varphi \in \mathcal{M}_h$ és $c \in \mathbf{K}$ esetén $\psi + c \cdot \varphi \in \mathcal{M}_h$:

$$(\psi + c \cdot \varphi)' = \psi' + c \cdot \varphi' = A \cdot \psi + c \cdot A \cdot \varphi = A(\psi + c \cdot \varphi),$$

amiből a mondott állítás az $\mathcal{M}_h$ definíciója alapján nyilvánvaló. Tehát az $\mathcal{M}_h$ lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett.

Most megmutatjuk, hogy ha $m \in \mathbf{N}$, és $\chi_1, \ldots, \chi_m \in \mathcal{M}_h$, tetszőleges függvények, akkor az alábbi ekvivalencia igaz:

> a $\chi_1, \ldots, \chi_m$ függvények akkor és csak akkor alkotnak lineárisan független rendszert az $\mathcal{M}_h$ vektortérben, ha bármilyen $\tau \in I$ esetén a $\chi_1(\tau), \ldots, \chi_m(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek a $\mathbf{K}^n$-ben.

Az ekvivalencia egyik fele nyilvánvaló: ha a $\chi_1, \ldots, \chi_m$-ek lineárisan összefüggnek, akkor alkalmas $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{K}$, $|c_1| + \cdots + |c_n| > 0$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k \equiv 0.$$

Speciálisan minden $\tau \in I$ helyen is

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0 \quad (\in \mathbf{K}^n).$$

Így a $\chi_1(\tau), \ldots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggő rendszert alkotnak a $\mathbf{K}^n$-ben.

Fordítva, legyen $\tau \in I$, és tegyük fel, hogy a $\chi_1(\tau), \ldots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggnek. Ekkor az előbbi (nem csupa nulla) $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{K}$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0.$$

Már tudjuk, hogy

$$\phi := \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k \in \mathcal{M}_h,$$

ezért az így definiált $\phi : I \to \mathbf{K}^n$ függvény megoldása a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \, \varphi(\tau) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának. Világos ugyanakkor, hogy a $\Psi \equiv 0$ is a most mondott k.é.p. megoldása az

I-n. Azt is tudjuk azonban, hogy (ld. fent) ez a k.é.p. (is) egyértelműen oldható meg, ezért $\phi \equiv \Psi \equiv 0$. Tehát a $\chi_1, \ldots, \chi_m$ függvények is összefüggnek.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy az $\mathcal{M}_h$ vektortér véges dimenziós és a $\dim \mathcal{M}_h$ dimenziója legfeljebb n.

Tekintsük most a

$$\varphi' = A \cdot \varphi,\ \varphi(\tau) = e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

kezdetiérték-problémákat, ahol az $e_i \in \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \ldots, n)$ vektorok a $\mathbf{K}^n$ tér "szokásos" (kanonikus) bázisvektorait jelölik. Ha

$$\chi_i : I \to \mathbf{K}^n$$

jelöli az említett k.é.p. teljes megoldását, akkor a

$$\chi_i(\tau) = e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Így az előbbiek alapján a $\chi_1, \ldots, \chi_n$ függvények is azok. Tehát az $\mathcal{M}_h$ dimenziója legalább n, azaz a fentiekre tekintettel $\dim \mathcal{M}_h = n$.

A 2. állítás igazolásához legyen $\chi \in \mathcal{M}_h$. Ekkor $\psi + \chi \in D$, és

$$(\psi + \chi)' = \psi' + \chi' = A \cdot \psi + b + A \cdot \chi = A \cdot (\psi + \chi) + b,$$

amiből $\psi + \chi \in \mathcal{M}$ következik. Ha most egy $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényből indulunk ki és $\chi := \varphi - \psi$, akkor $\chi \in D$, és

$$\chi' = \varphi' - \psi' = A \cdot \varphi + b - (A \cdot \psi + b) = A \cdot (\varphi - \psi) = A \cdot \chi,$$

amiből $\chi \in \mathcal{M}_h$ adódik. Tehát $\varphi = \psi + \chi$ a 2.-ben mondott előállítása a φ függvénynek.

A tétel 3. részének a bizonyítása érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket, ill. fogalmakat. A

$$\phi_k = (\phi_{k1}, \ldots, \phi_{kn}) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

bázisfüggvények mint oszlopvektor-függvények segítségével tekintsük a

$$\Phi : I \to \mathbf{K}^{n\times n}$$

mátrixfüggvényt:

$$\Phi := \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\Phi' := \begin{bmatrix} \phi_1' & \cdots & \phi_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}' & \phi_{21}' & \cdots & \phi_{n1}' \\ \phi_{12}' & \phi_{22}' & \cdots & \phi_{n2}' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1n}' & \phi_{2n}' & \cdots & \phi_{nn}' \end{bmatrix}$$

a Φ deriváltja. Ekkor könnyen belátható, hogy

$$\Phi' = A \cdot \Phi.$$

Továbbá tetszőleges $g_1, \ldots, g_n : I \to \mathbf{K}$ differenciálgató függvényekkel a

$$g := (g_1, \ldots, g_n) : I \to \mathbf{K}^n$$

vektorfüggvény differenciálható,

$$\psi := \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \phi_k = \Phi \cdot g,$$

és

$$\psi' = \Phi' \cdot g + \Phi \cdot g' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g'.$$

A $\psi \in \mathcal{M}$ tartalmazás nyilván azzal ekvivalens, hogy

$$\psi' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g' = A \cdot \psi + b = A \cdot (\Phi \cdot g) + b = (A \cdot \Phi) \cdot g + b,$$

következésképpen azzal, hogy

$$\Phi \cdot g' = b.$$

A 2. pont alapján tetszőleges $x \in I$ helyen a $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz a $\Phi(x)$ mátrix nem szinguláris. A mátrixok inverzének a kiszámítása alapján egyszerűen adódik, hogy a

$$\Phi^{-1}(x) := \big(\Phi(x)\big)^{-1} \quad (x \in I)$$

definícióval értelmezett

$$\Phi^{-1} : I \to \mathbf{K}^{n\times n}$$

mátrixfüggvény komponens-függvényei is folytonosak. Ezért a

$$(h_1, \ldots, h_n) := \Phi^{-1} \cdot b : I \to \mathbf{K}^n$$

függvény is folytonos. Olyan folytonosan differenciálható

$$g : I \to \mathbf{K}^n$$

függvényt keresünk tehát amelyikre $g' = \Phi^{-1} \cdot b$, azaz

$$g_i' = h_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ilyen g_i létezik, nevezetesen a (folytonos) $h_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ függvények bármelyik primitív függvénye ilyen. $\blacksquare$

7 Vizsgakérdés

Alaprendszer, alapmátrix. Az állandók variálásának a módszere. Alapmátrix előállítása állandó együtthatós diagonalizálható mátrix esetén. Az $n = 2$ eset vizsgálata tetszőleges, állandó együtthatós mátrixra.

7.1 Alaprendszer, alapmátrix

Az $\mathcal{M}_h$ vektortérben minden bázist az illető egyenlet *alaprendszerének* nevezünk. Ha $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$ egy alaprendszer, akkor a

$$\Phi := \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{bmatrix} : I \to \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet (egy) ún. *alapmátrixa.* Tehát

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \phi_k : c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{K} \right\} = \{\Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n\}.$$

Az $\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h$ előállításban minden $\psi \in \mathcal{M}$ függvényt *partikuláris megoldásként* említünk.

7.2 Állandók variálásának módszere

Ld. 6.2 alcímben tárgyalt tétel 3. pontjának bizonyítása. A partikuláris megoldás

$$\psi = \Phi \cdot g$$

alakban való előállítása (alkalmas $g : I \to \mathbf{K}^n$ differenciálható függvénnyel) az 6.2 alcímben tárgyalt tétel bizonyításában bemutatott módszer az *állandók variálása.* Tetszőleges $\phi_1, \ldots, \phi_n$ alaprendszerrel és $\psi \in \mathcal{M}$ partikuláris megoldással

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \phi_k : c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{K} \right\}.$$

Ha Φ egy alapmátrix, akkor ugyanez a következőképpen írható:

$$\mathcal{M} = \{\psi + \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n\} = \{\Phi \cdot (g + c) : c \in \mathbf{K}^n\}.$$

7.3 Állandó együtthatós diagonalizálható eset

Legyen most

$$f(x,\, y) := A \cdot y + b(x) \quad \big((x,\, y) \in I \times \mathbf{K}^n\big),$$

ahol $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum mellett

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n},\, b : I \to \mathbf{R}^n,\, b \in C.$$

Tegyük fel, hogy A diagonalizálható, azaz létezik $T \in \mathbf{K}^{n\times n}$, $\det T \neq 0$, hogy $T^{-1}AT$ mátrix diagonális: alkalmas $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n \in \mathbf{K}$ számokkal

$$\Lambda := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

T invertálhatósága miatt a

$$T = [t_1 \cdots t_n]$$

t_i $(i = 1,\, \ldots,\, n)$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$AT = [At_1 \cdots At_n] = T\Lambda = [\lambda_1 \cdot t_1 \cdots \lambda_n \cdots t_n]$$

miatt

$$A \cdot t_i = \lambda_i \cdot t_i \quad (i = 1,\, \ldots,\, n).$$

Mivel

$$t_i \neq 0 \quad (i = 1,\, \ldots,\, n),$$

ezért mindez röviden azt jelenti, hogy a $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n$ számok az A mátrix sajátértékei, a $t_1,\, \ldots,\, t_n$ vektorok pedig rendre a megfelelő sajátvektorok. Lévén, a t_i-k lineárisan függetlenek, az A-ra vonatkozó feltételünk úgy fogalmazható, hogy van a $\mathbf{K}^n$-ben (az A sajátvektoraiból álló) sajátvektorbázis.

A homogén egyenlet tehát a következőképpen írható fel:

$$\varphi' = A \cdot \varphi = T\Lambda T^{-1} \cdot \varphi,$$

amiből

$$(T^{-1}\varphi)' = \Lambda \cdot (T^{-1}\varphi)$$

következik. Vegyük észre, hogy ha $\varphi \in \mathcal{M}_h$, akkor a $\psi := T^{-1}\varphi$ függvény megoldása a Λ diagonális mátrix által meghatározott állandó együtthatós homogén lineáris egyenletnek. Ez utóbbit ez előző tétel alapján nem nehéz megoldani. Legyenek ui. a

$$\psi_i : I \to \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

függvények a következők:

$$\psi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n).$$

Világos, hogy $\psi_i \in D$ és

$$\psi_i'(x) = \lambda_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot (\Lambda \cdot e_i) =$$
$$\Lambda \cdot (e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i) = \Lambda \cdot \psi_i(x) \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n).$$

Más szóval a ψ_i-k valóban megoldásai a Λ által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek. Mivel bármely $\tau \in I$ esetén a

$$\psi_i(\tau) = e^{\lambda_i \cdot \tau} \cdot e_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

vektorok nyilván lineárisan függetlenek, ezért az előző tétel bizonyításában mondottak szerint a ψ_i $(i = 1, \ldots, n)$ függvények lineárisan függetlenek. Ha

$$\phi_i := T \cdot \psi_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

akkor nyilván a ϕ_i-k is lineárisan függetlenek,

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in I,\, i = 1, \ldots, n),$$

és minden $i = 1, \ldots, n$ indexre

$$\phi_i' = A \cdot \phi_i.$$

Tehát $\phi_i \in \mathcal{M}_h$ $(i = 1, \ldots, n)$ egy bázis. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

Tétel. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrix diagonalizálható. Legyenek a sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, egy-egy megfelelő sajátvektora pedig $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{K}^n$. Ekkor a

$$\varphi' = A \cdot \varphi$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a

$$\phi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in \mathbf{R},\, i = 1, \ldots, n)$$

függvények lineárisan független megoldásai.

7.4 Tetszőleges állandó együtthatós mátrix

Tekintsük az $n = 2$ esetet, amikor is valamilyen a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ számokkal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a mátrix pontosan akkor nem diagonalizálható, ha

$$(a-d)^2 + 4bc = 0 \text{ és } |b| + |c| > 0.$$

Ekkor egyetlen sajátértéke van az A-nak nevezetesen

$$\lambda := \frac{a+d}{2},$$

legyen a t_1 egy hozzá tartozó sajátvektor:

$$0 \neq t_1 \in \mathbf{R}^2,\ At_1 = \lambda t_1.$$

Egyszerű számolással igazolható olyan $t_2 \in \mathbf{R}^2$ vektor létezése, amelyik lineárisan független a t_1-től és

$$At_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ha mármost a $T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrix oszlopvektorai rendre a t_1, t_2 vektorok: $T := [t_1\, t_2]$, akkor

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva könnyen belátható, hogy a

$$\phi_1(x) := e^{\lambda x} \cdot t_1,\ \phi_2(x) := e^{\lambda x} \cdot (t_2 + x t_1) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy alaprendszer. Valóban, $\phi_i \in \mathcal{M}_h \quad (i = 1, 2)$, mert egyrészt

$$\phi_1'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_1 = e^{\lambda x} A t_1 = A(e^{\lambda x} \cdot t_1) = A\phi_1(x),$$

másrészt

$$\phi_2'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_2 + e^{\lambda x} \cdot t_1 + \lambda e^{\lambda x} x \cdot t_1 = e^{\lambda x}\big((t_1 + \lambda \cdot t_2) + \lambda x \cdot t_1\big) =$$
$$e^{\lambda x}(At_2 + xAt_1) = A\big(e^{\lambda x}(t_2 + x \cdot t_1)\big) = A\phi_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a

$$\phi_1(0) = t_1,\ \phi_2(0) = t_2$$

vektorok lineárisan függetlenek, ezért a ϕ_1, ϕ_2 függvények is lineárisan függetlenek, azaz a ϕ_1, ϕ_2 egy alaprendszer.

7.5 Valós értékű megoldások

Tegyük fel, hogy a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ (diagonalizálható) együtthatómátrixnak egy sajátértéke, a $t_\lambda \in \mathbf{K}^n$ vektor pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektor. Ha a λ valós, akkor nyilván a t_λ sajátvektor is választható "valósnak", azaz feltehető, hogy $t_\lambda \in \mathbf{R}^n$. Ebben az esetben az $\mathcal{M}_h$-beli

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda \quad (x \in \mathbf{R})$$

bázisfüggvény is "valós" tehát $\phi_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$.

Ha viszont a λ (nem valós) komplex szám, azaz

$$\lambda = u + \imath v \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$$

(alkalmas $u \in \mathbf{R}$ és $0 \neq v \in \mathbf{R}$ számokkal), akkor – lévén az A karakterisztikus polinomja valós együtthatós – az A-nak egyúttal a

$$\overline{\lambda} = u + \imath v$$

(komplex konjugált) is (ugyanannyiszoros) sajátértéke. Hasonlóan, ha a

$$t_\lambda = S_\lambda + \imath Y_\lambda \in \mathbf{K}^n$$

vektor (alkalmas $S_\lambda, Y_\lambda \in \mathbf{R}^n$ vektorokkal) az A-nak a λ-hoz tartozó sajátvektora, akkor a

$$\bar{t}_\lambda = S_\lambda - \imath Y_\lambda$$

vektor a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátvektor. Továbbá a megfelelő bázisfüggvények a következők:

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda,\ \phi_{\overline{\lambda}}(x) := e^{\overline{\lambda} x} \cdot \bar{t}_\lambda \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Rövid számolással ellenőrizhető, hogy

$$\phi_{\overline{\lambda}}(x) = \overline{\phi_\lambda(x)} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a homogén egyenlet (teljes) megoldásainak az $\mathcal{M}_h$ halmaza a $\mathbf{K}$ felett vektortér, ezért a

$$\frac{\phi_\lambda + \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Re}\phi_\lambda,\ \frac{\phi_\lambda - \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Im}\phi_\lambda$$

függvények is $\mathcal{M}_h$-beliek. Világos, hogy

$$e^{\lambda x} = e^{ux} \cdot \big(\cos(vx) + \imath \sin(vx)\big) \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt

$$\phi_{\lambda,r}(x) := \operatorname{Re} \phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot \big(\cos(vx) \cdot S_\lambda - \sin(vx) \cdot Y_\lambda\big) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\phi_{\lambda,i}(x) := \operatorname{Im} \phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot \big(\sin(vx) \cdot S_\lambda + \cos(vx) \cdot Y_\lambda\big) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$\phi_{\lambda,r}(0) = S_\lambda = \frac{t_\lambda + \overline{t_\lambda}}{2},$$

$$\phi_{\lambda,i}(0) = Y_\lambda = \frac{t_\lambda - \overline{t_\lambda}}{2\imath}.$$

A t_λ, $\bar{t}_\lambda$ sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért az S_λ, Y_λ vektorok is azok, következésképpen a $\phi_{\lambda,r}$, $\phi_{\lambda,i}$ függvények is lineárisan függetlenek. Így ϕ_λ, $\phi_{\overline{\lambda}}$ függvényeket kicserélve az előző függvényekre, továbbra is alaprendszert kapunk.

8 Vizsgakérdés

Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere.

8.1 "Új" feladat megfogalmazása

Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, az

$$a_k : I \to \mathbf{R} \quad (k = 0, \ldots, n-1),\ c : I \to \mathbf{R}$$

függvényekről tegyük fel, hogy folytonosak. Olyan $\varphi \in I \to \mathbf{K}$ függvényt keresünk, amelyikre

1. $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D^n$;
3. $\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^k(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Ezt a feladatot röviden *n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan φ függvény amelyik eleget tesz az előbbi kívánalmaknak, az illető differenciálegyenlet (egy) *megoldása*.

Tegyük fel, hogy a fentieken túl adottak még a

$$\tau \in I,\ \xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$$

számok. Ha az előbbi φ megoldástól azt is elvárjuk, hogy

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$,

akkor a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó *kezdetiérték-problémáról* beszélünk.

Ha $n = 1$, akkor egy lineáris differenciálegyenletről van szó, ezért a továbbiakban nyugodtan feltehetjük már, hogy $n \geq 2$.

Az *átviteli elv* segítségével a most megfogalmazott feladat visszavezethető a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatára. (A későbbiekben szereplő állítások is részben ennek az elvnek a segítségével láthatók majd be.) Vezessük be ui. az alábbi jelöléseket: legyen $2 \le n \in \mathbf{N}$ és

$$b := (b_1, \ldots, b_n) : I \to \mathbf{R}^n,\; b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(x) \end{pmatrix} \quad (x \in I),$$

$$A := (a_{ik})_{i,k=1}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} : I \to \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Ekkor

$$f(x,y) := A(x)\cdot y + b(x) \quad (x \in I,\, y \in \mathbf{K}^n).$$

Ha tehát a

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in I \to \mathbf{K}^n$$

differenciálható függvény ez utóbbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek (egy) megoldása, akkor $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum, és bármely $x \in \mathcal{D}_\psi$ esetén

$$\psi'(x) = A(x)\cdot\psi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

Azaz

$$\begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n' \end{pmatrix} = \psi_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_0 \end{pmatrix} + \psi_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \cdots + \psi_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} (-a_{k-1}) \cdot \psi_k + c \end{pmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \psi_i'(x) = \psi_{i+1}(x) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \\ \\ \psi_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-a_{k-1}(x)) \cdot \psi_k(x) + c(x). \end{cases} \tag{$\star$}$$

Ennek alapján eléggé nyilvánvaló az alábbi állítás.

8.2 Átviteli elv

Tétel. Ha a φ függvény megoldása a fenti n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek, akkor az

$$I \ni x \mapsto \psi(x) := \big(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\big) \in \mathbf{K}^n$$

függvényre igazak a $(\star)$ egyenlőségek. Fordítva, ha a $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ függvény eleget tesz a $(\star)$-nak, akkor a $\varphi := \psi_1$ (első) komponensfüggvény megoldása a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek. Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$ kezdeti értékek, és a φ, megoldása a

$$\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

k.é.p.-nak, akkor a $(\star)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszer előbbi ψ megoldása kielégíti a

$$\psi(\tau) = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$$

kezdeti feltételt.

Legyen most

$$\mathcal{M}_h := \left\{\varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0\right\}.$$

Az $\mathcal{M}_h$ függvényhalmaz tehát nem más, mint a

$$c(x) := 0 \quad (x \in I)$$

esetnek megfelelő *homogén n-edrendű lineáris differenciálegyenlet* I intervallumon értelmezett megoldásainak a halmaza. Legyen továbbá

$$\mathcal{M} := \left\{\varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c\right\}$$

a kiindulási n-edrendű lineáris differenciálegyenlet I-n értelmezett megoldásainak a halmaza. Az utóbbival kapcsolatban már nyilván feltehető, hogy valamilyen $x \in I$ helyen $c(x) \neq 0$, azaz az illető egyenlet *inhomogén.* Ekkor az átviteli elv alapján a következőket mondhatjuk.

8.3 Állandók variálásának módszere

Tétel. Az n-edrendű lineáris differenciálegyenletet illetően

1. az $\mathcal{M}_h$ halmaz n dimenziós lineáris tér a $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\omega \in \mathcal{M}$ esetén
$$\mathcal{M} = \omega + \mathcal{M}_h := \{\omega + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$
3. ha a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ függvények bázist alkotnak az $\mathcal{M}_h$-ban, akkor léteznek olyan differenciálható $g_k : I \to \mathbf{K} \quad (k = 1, \ldots, n)$ függvények, amelyekkel
$$\omega := \sum_{k=1}^{n} g_k\varphi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyításképpen elegendő annyit megjegyezni, hogy az $\mathcal{M}_h$-beli

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m : I \to \mathbf{K} \quad (1 \le m \in \mathbf{N})$$

függvények akkor és csak akkor függetlenek, ha a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j,\, \varphi_j',\, \ldots,\, \varphi_j^{(n-1)}\right) : I \to \mathbf{K}^n \quad (j = 1,\, \ldots,\, m)$$

(vektor)függvények is azok.

Ha $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$ bázis, akkor minden bázist (most is) *alaprendszernek*, az előző tételben szereplő ω függvényt pedig *partikuláris megoldásnak* nevezünk. Egy partikuláris megoldásnak az előző tétel szerinti előállítását az *állandók variálásaként* említjük,

Tegyük fel tehát, hogy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{M}_h$ alaprendszer, ekkor a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j,\, \varphi_j',\, \ldots,\, \varphi_j^{(n-1)}\right) \quad (j = 1,\, \ldots,\, n)$$

függvények alaprendszert alkotnak az átviteli elvből adódó $(\star)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozóan. Más szóval a

$$\Phi := [\hat{\varphi}_1 \cdots \hat{\varphi}_n] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} : I \to \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény alapmátrixa a $(\star)$-rendszernek. Innen tudjuk, hogy a

$$g = (g_1,\, \ldots,\, g_n) : I \to \mathbf{K}^n$$

jelöléssel a $\Phi \cdot g$ függvény pontosan akkor partikuláris megoldása a $(\star)$-nak (alkalmas differenciálható $g_1, \ldots, g_n : I \to \mathbf{K}$ függvényekkel), ha

$$\Phi \cdot g' = b = (0,\, \ldots,\, 0,\, c).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\Phi \cdot g$ függvény első komponense, azaz az

$$\omega := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot g_k$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldása az n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek, ha

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varphi_1 \cdot g_1' & + & \varphi_2 \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n \cdot g_n' & = & 0 \\
\varphi_1' \cdot g_1' & + & \varphi_2' \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n' \cdot g_n' & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\varphi_1^{(n-2)} \cdot g_1' & + & \varphi_2^{(n-2)} \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-2)} \cdot g_n' & = & 0 \\
\varphi_1^{(n-1)} \cdot g_1' & + & \varphi_2^{(n-1)} \cdot g_2' & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-1)} \cdot g_n' & = & c.
\end{array}$$

Ennek a ($g_1', \ldots, g_n'$ függvényekre mint "ismeretlenekre" vonatkozó) lineáris (függvény)egyenletrendszernek a determinánsa (determináns-függvénye), azaz a

$$W(x) := \det\left(\varphi_i^{(k-1)}(x)\right)_{k,\, i=1}^{n} = \det\big(\Phi(x)\big) \quad (x \in I)$$

leképezés (az ún. *Wronski-determináns*) a $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n$ függvények lineáris függetlensége miatt egyetlen $x \in I$ helyen sem tűnik el.

9 Vizsgakérdés

Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítása, a karakterisztikus polinom szerepe (a bizonyítás vázlata).

Az előzőekben vizsgált

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

n-edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásához tehát elegendő az $\mathcal{M}_h$ egy bázisát meghatározni. Ez általában "reménytelen" feladat, általános módszer nem is adható.

Ezért csak abban az esetben tesszük ezt meg, ha az $a_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$ együtthatófüggvények mindegyike konstansfüggvény. Ez az ún. *állandó együtthatós* eset:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

A $c = 0$ (*homogén egyenlet*) választással

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} \equiv 0.$$

Tekintsük ehhez a

$$P(x) := x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad (x \in \mathbf{K})$$

n-edfokú polinomot, a differenciálegyenlet *karakterisztikus polinomját.*

Ha a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám a P-nek gyöke, akkor az

$$e_\lambda(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

és az $a_n := 1$ jelöléssel

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_\lambda^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot P(\lambda) = 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt az e_λ függvény megoldása a szóban forgó homogén differenciálegyenletnek.

Legyen az előbbi λ gyök multiplicitása $\nu \geq 2$. Belátjuk, hogy az

$$e_{\lambda,\,j}(x) := x^j e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R},\, j = 0,\, \ldots,\, \nu - 1)$$

függvények is megoldásai a homogén differenciálegyenletnek:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_{\lambda,\,j}^{(k)} \equiv 0.$$

Tegyük fel ui., hogy ezt valamilyen $j \in \mathbf{N}$ mellett minden olyan esetben már tudjuk, amikor (az aktuális differenciálegyenletre) $\nu - 1 \geq j$. Például a $j = 0$ ilyen, hiszen ezt az $e_{\lambda,\,0} \equiv e_\lambda$ függvényre az előbb láttuk. Vegyük észre, hogy

$$e_{\lambda,\,j+1}(x) = x e_{\lambda,\,j}(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért (ami teljes indukcióval rögtön adódik)

$$e_{\lambda,\,j+1}^{(k)}(x) = x e_{\lambda,\,j}^{(k)}(x) + k e_{\lambda,\,j}^{(k-1)}(x) \quad (x \in \mathbf{R},\, 1 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Így – feltételezve most azt, hogy $\nu - 1 \geq j + 1$ – az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_{\lambda,\,j+1}^{(k)}(x) = x \cdot \sum_{k=0}^{n} e_{\lambda,\,j}^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} k a_k e_{\lambda,\,j}^{(k-1)}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} e_{\lambda,\,j}^{(k)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

A

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \varphi^{(k)} \equiv 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a karakterisztikus polinomja:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}t^k = P'(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol a λ a P' (derivált)polinomnak $\mu := \nu - 1$-szeres gyöke. Mivel $\mu - 1 \geq j$, ezért az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}e_{\lambda,\,j}^{(k)} \equiv 0,$$

következésképpen (a fentiekre tekintettel)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e_{\lambda,\,j+1}^{(k)} \equiv 0.$$

Tehát az $e_{\lambda,\,j+1}$ függvény is megoldása a homogén egyenletnek.

9.1 Alaprendszer

Tegyük fel, hogy a P gyöktényezős előállítása a következő:

$$P(x) = \prod_{l=1}^{k}(x-\lambda_l)^{\nu_l} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

ahol $1 \leq k \in \mathbf{N}$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{K}$ jelöli a P összes, páronként különböző gyökét, $1 \leq \nu_l \in \mathbf{N}$ pedig a λ_l gyök multiplicitását ($l = 1, \ldots, k$). Ekkor tehát a

$$\varphi_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\lambda_l x} \quad (x \in I,\ l = 1, \ldots, k \text{ és } j = 0, \ldots, \nu_l - 1)$$

függvények valamennyien $\mathcal{M}_h$-beliek.

Ennél még több is igaz, nevezetesen:

Tétel. A fentiekben definiált

$$\varphi_{lj} \quad (l = 1, \ldots, k \text{ és } j = 0, \ldots, \nu_l - 1)$$

függvények a szóban forgó állandó együtthatós n-edrendű lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét alkotják.

9.2 Valós értékű megoldások

Az előző tétel alapján kapott

$$\varphi_{lj}(x) := x^j e^{\lambda_l x} \quad (x \in I,\, l = 1,\, \ldots,\, k;\, j = 0,\, \ldots,\, \nu_l)$$

alaprendszerben a φ_{lj} $(l = 1, \ldots, k; j = 0, \ldots, \nu_l)$ függvények valós értékűek, ha a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenlet P karakterisztikus polinomjában a λ_l gyök valós szám. Ha viszont valamilyen $l = 1, \ldots, k$ esetén a λ_l gyök nem valós komplex szám, akkor a következőket mondhatjuk. Legyen ekkor

$$\lambda_k = u_k + \imath v_l,$$

ahol u_l, $v_l \in \mathbf{R}$ és $v_l \neq 0$. Mivel a P polinom valós együtthatós, ezért a

$$\overline{\lambda_l} = u_l + \imath v_l$$

komplex konjugált is v_l-szeres gyöke a P-nek. Ez azt jelenti, hogy a fenti alaprendszerben a

$$\hat{\varphi}_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\overline{\lambda_l} x} = \overline{\varphi_{lj}(x)} \quad (x \in I,\, j = 0,\, \ldots,\, \nu_l - 1)$$

függvények is szerepelnek. Tudjuk, hogy az $\mathcal{M}_h$ halmaz vektortér a $\mathbf{K}$-ra nézve, ezért

$$\phi_{lj} := \frac{\varphi_{lj} + \hat{\varphi}_{lj}}{2} = \operatorname{Re} \varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h \text{ és } \hat{\phi}_{lj} := \frac{\varphi_{lj} - \hat{\varphi}_{lj}}{2i} = \operatorname{Im} \varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h.$$

Itt tetszőleges $j = 0, \ldots, \nu_l - 1$ mellett

$$\phi_{lj}(x) = \operatorname{Re} \varphi_{lj}(x) = \operatorname{Re} (x^j \cdot e^{\lambda_l x}) = \operatorname{Re} (x^j \cdot e^{u_l x + \imath v_l x}) =$$

$$\operatorname{Re} \big(x^j \cdot e^{u_l x} (\cos(v_l x) + \imath \sin(v_l x)) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \cos(v_l x)\big) \quad (x \in I),$$

és (analóg számolás után)

$$\hat{\phi}_{lj}(x) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \sin(v_l x) \quad (x \in I).$$

Könnyen belátható, hogy ha a fenti φ_{lj}, $\hat{\varphi}_{lj}$ (összesen $2\nu_l$ darab) függvényt kicseréljük a ϕ_{lj}, $\hat{\phi}_{lj}$ (ugyancsak $2\nu_l$ darab) függvényre, akkor továbbra is lineárisan független függvényrendszert kapunk. Ha ezt a cserét a P polinom minden nem valós gyökével kapcsolatban megtesszük, akkor az $\mathcal{M}_h$ egy valós értékű függvényekből álló bázisát kapjuk, azaz egy valós függvényekből álló alaprendszert.

10 Vizsgakérdés

Partikuláris megoldás kvázi-polinom jobb oldal esetén (a bizonyítás vázlata). A csillapítás nélküli kényszerrezgés vizsgálata, rezonancia.

10.1 Kvázipolinomok

Az állandó együtthatós

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \tag{$\star$}$$

n-edrendű lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az állandók variálásával való előállítása esetenként sok számolást igénylő feladat. Ezért "megbecsülendők" azok a módszerek, amelyek révén (az illető differenciálegyenlettől függően) más úton juthatunk el egy partikuláris megoldáshoz. Ez a más út gyakran a feladat jobb oldala, azaz a c függvény speciális "szerkezete" révén lehetséges. Ilyen függvények pl. az ún. kvázipolinomok. Az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{K}$$

függvényt *kvázipolinomnak* nevezzük, ha egy R (algebrai) polinom és $\lambda \in \mathbf{K}$ szám mellett

$$f(x) = R(x) \cdot e_\lambda(x) = R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

10.2 Kvázopolinom jobb oldal

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, és valamilyen $r \in \mathbf{N}$ esetén a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám a

$$P(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinomnak r-szeres gyöke. Ha a Q polinom fokszáma $m \in \mathbf{N}$, akkor van olyan legfeljebb m-edfokú R polinom, hogy az

$$\omega(x) := x^r \cdot R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

kvázipolinomra

$$\omega^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \omega^{(k)}(x) = Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát a $\varphi := \omega$ függvény (kvázipolinom) a

$$c(x) := Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

jobb oldal (kvázipolinom) esetén eleget tesz a $(\star)$ egyenlőségnek, azaz megoldása az illető differenciálegyenletnek. Ha itt pl. $r = 0$, azaz $P(\lambda) \neq 0$, akkor a keresett R polinommal

$$\omega = R \cdot e_\lambda.$$

Ehhez ui. legyen $a_n := 1$, amikor is azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = Q \cdot e_\lambda.$$

A "binomiális szabályt" alkalmazva

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} \cdot e_\lambda = Q \cdot e_\lambda.$$

Ezért a kívánt R polinom létezése a következő egyenlőséggel ekvivalens:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} = Q. \qquad (\star\star)$$

Világos, hogy ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalán egy-egy polinom áll, így együttható-összehasonlítással azt kell megmutatni, hogy alkalmasan választott $\alpha_j \in \mathbf{K} \quad (j = 0, \ldots, m)$ számokkal az

$$R(x) := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinom eleget tesz a $(\star\star)$ egyenlőségnek. Legyen a Q algebrai alakja a $\beta_j \in \mathbf{R} \quad (j = 0, \ldots, m)$ együtthatókkal az alábbi:

$$Q(x) := \sum_{j=0}^{m} \beta_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K}).$$

Ekkor a $(\star\star)$ bal oldalán a főegyüttható a következő:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \alpha_m \cdot \lambda^k = \alpha_m \cdot P(\lambda),$$

Így az $\alpha_m \cdot P(\lambda) = \beta_m$ egyenlőségnek kell teljesülni. Mivel most $P(\lambda) \neq 0$, ezért az

$$\alpha_m := \frac{\beta_m}{P(\lambda)}$$

választás megfelelő. Az α_m ismeretében az α_{m-1} meghatározása $(\star\star)$ alapján a

$$\beta_{m-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \alpha_{m-1} \cdot \lambda^k + \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot m \cdot \alpha_m \cdot \lambda^{k-1} =$$
$$P(\lambda) \cdot \alpha_{m-1} + m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda)$$

egyenlőségből történhet:

$$\alpha_{m-1} = \frac{\beta_{m-1} - m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Az eljárást analóg módon folytatva kapjuk a keresett R polinom többi együtthatóját is.

10.3 Rezgések

Tekintsük a rezgésekre vonatkozó

$$ms'' = F - \alpha \cdot s - \beta \cdot s'$$

másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet, vagy "standard" alakban felírva ugyanez:

$$s'' + \frac{\beta}{m} \cdot s' + \frac{\alpha}{m} \cdot s = \frac{F}{m}.$$

Ennek a karakterisztikus polinomja a következő:

$$P(x) := x^2 + \frac{\beta}{m}x + \frac{\alpha}{m} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

aminek gyökei:

$$\lambda_{1,\,2} := \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4m\alpha}}{2m}.$$

A fizika "nyelvén" fogalmazva az F/m függvény (a differenciálegyenlet jobb oldala) a "kényszer" (kényszererő). Ha nincs kényszer, azaz $F \equiv 0$, akkor $\beta > 0$ esetén *csillapított rezgőmozgásról*, a $\beta = 0$ esetben pedig *harmonikus rezgőmozgásról* beszélünk.

A tényleges kényszerrezgések között különösen érdekes a periodikus külső kényszer esete:

$$F(x) := A \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $A > 0$ (*amplitúdó*), $\omega > 0$ (*kényszerfrekvencia*) és $\theta \in [0,\, 2\pi]$ (*fázisszög*). Tekintsünk most el a csillapítástól, azaz legyen $\beta := 0$. Ekkor egy (valós) alaprendszert az

$$\omega_0 := \sqrt{\alpha/m}$$

sajátfrekvenciával az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \cos(\omega_0 x),\, \mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(\omega_0 x)$$

függvényrendszer. Egyszerűen megadhatunk egy partikuláris megoldást is. Ez ui. könnyen ellenőrizhetően

1. $\omega \neq \omega_0$ esetén pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta),$$

2. $\omega = \omega_0$ (*rezonancia*) esetén pedig pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto -\frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

függvény, ahol $q := A/m$.

Valóban, ha $\omega \neq \omega_0$, akkor egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldás, ha

$$\varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) = -\gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega x + \theta) + \omega_0^2 \cdot \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) =$$

$$q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mindez azzal egyenértékű, hogy $\gamma \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) = q$, azaz, hogy

$$\gamma = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ha viszont $\omega = \omega_0$, akkor most egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre kell, hogy fennáljon a

$$\varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) =$$

$$-2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) - \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) + \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) =$$

$$-2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) = q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség. Ezért $\gamma = -q/(2\omega)$. A $\omega_0 \neq \omega$ feltétel mellett tehát

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega_0 x) + \delta \cdot \sin(\omega_0 x) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol a γ, δ együtthatókat az

$$s(0) = s_0,\ s'(0) = s_0'$$

egyenlőségekből kapjuk. Alkalmas $r > 0$ és $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ segítségével felírhatjuk $s(x)$-et a következő alakban:

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega_0 x + \theta_0) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ami nem más mint két harmonikus rezgés összege.

Ha $\omega_0 = \omega$, akkor

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega x) + \delta \cdot \sin(\omega x) - \frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$s(0) = s_0,\ s'(0) = s'_0.$$

Tehát a 2. esetben megfelelően választott $r > 0$ és $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ paraméterekkel

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega x + \theta_0) - \frac{q}{2\omega} \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Az ω sajátfrekvenciájú (korlátos) harmonikus rezgésre ekkor nem egy harmonikus rezgés, hanem az

$$x \mapsto -\frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

aperiodikus mozgás szuperponálódik.

11 Vizsgakérdés

A függvénysorozat, függvénysor fogalma. Hatványsorok, trigonometrikus sorok, Fourier-sorok. A Dirichlet-féle magfüggvény. Konvergencia, határfüggvény (összegfüggvény), egyenletes konvergencia. A Weierstrass-féle majoráns kritérium.

11.1 Függvénysorozatok, függvénysorok

A függvénysorozatok fogalmával részben találkoztunk már korábban is: az (f_n) sorozatot *függvénysorozatnak* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az f_n függvény. A továbbiakban mindig azzal a feltételezéssel élünk, hogy valamilyen $\neq X$ halmazzal

$$f_n \in X \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

és egy $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal

$$\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Pl. a

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathcal{D} := \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvények egy (h_n) függvénysorozatot határoznak meg.

A fenti (f_n) függvénysorozat által meghatározott $\sum(f_n)$ *függvénysor*:

$$\sum(f_n) := \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right).$$

A $\sum(f_n)$ függvénysor tehát nem más, mint az

$$F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvények által meghatározott (F_n) függvénysorozat:

$$\sum(f_n) := (F_n).$$

Így pl. az előbbi

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvények esetén $\sum(h_n) = (H_n)$, ahol az $n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{n} h_k(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} n+1 & (t=1) \\ \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & (t \neq 1) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

11.2 Konvergencia, határfüggvény

Tekintsük a fenti (f_n) függvénysorozatot. Ha egy $x \in \mathcal{D}$ elem esetén konvergens a helyettesítési értékeknek az $\big(f_n(x)\big)$ sorozata, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *konvergens* az x helyen. A

$$\mathcal{D}_0 := \big\{x \in \mathcal{D} : \big(f_n(x)\big) \text{ konvergens}\big\}$$

halmaz az (f_n) függvénysorozat *konvergenciatartománya.* Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

definícióval értelmezett

$$f : \mathcal{D}_0 \to \mathbf{K}$$

függvény az (f_n) függvénysorozat *határfüggvénye.* A $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_f$ esetben röviden azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens.*

Pl. az előbbi (h_n) függvénysorozattal $\mathcal{D}_0 = (-1, 1]$, és

$$h(x) := \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

a (h_n) sorozat határfüggvénye.

A függvénysorok "nyelvén" a pontonkénti konvergencia a következőképpen fogalmazható meg: legyen $X \neq \emptyset$, és a $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal adott az

$$f_n : \mathcal{D} \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysor x-beli konvergenciája azt jelenti, hogy a részletösszegek $\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)$ sorozata konvergens az x helyen, azaz a $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)$ sorozat konvergens. Nem fog félreértést okozni, ha az ilyen $x \in \mathcal{D}$ elemek összegét fogjuk most $\mathcal{D}_0$-val jelölni. Tehát $\mathcal{D}_0$ most nem más, mint a $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ függvénysorozat konvergenciatartománya. Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor legyen

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

A szóban forgó függvénysor *összegfüggvénye*. Pl. a

$$h_n(x) := x^n \quad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$\sum_{k=0}^{n} h_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & (x = 1) \\ \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & (x \neq 1) \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

miatt a $\sum(h_n)$ függvénysor konvergenciatartománya a $(-1,\, 1)$ intervallum, a H összegfüggvénye pedig a

$$H(x) := \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

függvény.

Emlékeztetünk a hatványsor fogalmára: legyen valamilyen $a \in \mathbf{K}$ *középpont* és egy

$$(a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$$

együttható-sorozat esetén

$$f_n(x) := a_n(x-a)^n \quad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a

$$\sum \Big(a_n(x-a)^n\Big) := \sum (f_n)$$

függvénysort neveztük *hatványsornak*. A Cauchy-Hadamard-tétel szerint egyértelműen létezik olyan

$$0 \leq r \leq +\infty$$

(*konvergenciasugár*) amellyel a hatványsor $\mathcal{D}_0$ konvergenciatartományára a $0 < r < +\infty$ esetben

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_0 \subset \overline{K_r(a)}.$$

Nyilvánvaló, hogy $a \in \mathcal{D}_0$ mindig igaz, és az a helyen a fenti hatványsor összege 0.

11.3 Trigonometrikus sorok, Fourier-sorok

A $\sum(f_n)$ függvénysort *trigonometrikus sornak* nevezzük, ha

$$f_0(x) := \alpha_0,\ f_n(x) := \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx) \quad (1 \le n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}),$$

ahol adottak az $\alpha_k \in \mathbf{R}\quad (k \in \mathbf{N})$ és a $\beta_j\quad (1 \le j \in \mathbf{N})$ *együtthatók*. Használni fogjuk minderre a

$$\sum \big(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\big)$$

szimbólumot is. Tehát egy adott trigonometrikus sor n-edik részletösszege egy $x \in \mathbf{R}$ helyen az alábbi módon néz ki:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos(x) + \beta_1 \cdot \sin(x) + \cdots + \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx).$$

A szóban forgó $\sum \big(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\big)$ trigonometrikus sor

$$S_n(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)\Big) \quad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvényei *trigonometrikus polinomok*.

Legyen $R_{2\pi}$ az összes olyan 2π szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvény halmaza, amelyre

$$f \in R[0,\, 2\pi]$$

teljesül. A periodicitás miatt nyilvánvaló, hogy ekkor tetszőleges 2π-hosszúságú kompakt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra is (az előbbi értelemben) $f \in R(I)$.

Legyen továbbá $C_{2\pi}$ az olyan 2π szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvények halmaza, amelyekre $f \in C$. Ekkor

$$C_{2\pi} \subset R_{2\pi},$$

továbbá $C_{2\pi}$, $R_{2\pi}$ lineáris terek az $\mathbf{R}$-re vonatkozóan, a $C_{2\pi}$ altere az $R_{2\pi}$-nek. Továbbá bármely $f \in R_{2\pi}$ függvény az $f \in R[0, 2\pi]$ integrálhatóság miatt korlátos, azaz

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} < +\infty.$$

Vezessük be az alábbi fogalmakat: $f \in R_{2\pi}$ esetén legyen

$$a_0(f) := a_0 := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n(f) := a_n := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx \quad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

$$b_n(f) := b_n := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \quad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

$$Sf := \sum \big(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\big) \quad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor az Sf trigonometrikus sor az f *Fourier-sora*, az együtthatói az f *Fourier-együtthatói*, az $S_nf \quad (n \in \mathbf{N})$ trigonometrikus polinom pedig az f függvény n-edik *Fourier-részletösszege.*

Ha $f \in R_{2\pi}$, $n \in \mathbf{N}$, akkor a fenti f *Fourier-részletösszegei* a következők:

$$S_0 f(x) = a_0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ill. $1 \le n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\, dt +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos(kt)\,dt\cdot\cos(kx)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin(kt)\,dt\cdot\sin(kx)\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\sum_{k=1}^{n}\Big(\cos(kt)\cdot\cos(kx)+\sin(kt)\cdot\sin(kx)\Big)\,dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\Big(k(x-t)\Big)\right)\,dt.$$

Ha tehát

$$D_0(z):=\frac{1}{2},\ D_n(z):=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kz)\quad(1\le n\in\mathbf{N},\ z\in\mathbf{R}),$$

akkor

$$S_nf(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot D_n(x-t)\,dt\quad(n\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{R}).$$

A most definiált D_n $(n\in\mathbf{N})$ függvény az n-edik *Dirichlet-magfüggvény.* Világos, hogy minden D_n páros függvény, periodikus 2π szerint, és bármilyen 2π hosszúságú kompakt $I\subset\mathbf{R}$ intervallumra

$$\int_I D_n=\int_I\frac{1}{2}\,dz+\sum_{k=1}^{n}\int_I\cos(kz)\,dz=\int_I\frac{1}{2}\,dz=\pi\quad(n\in\mathbf{N}).$$

Nem nehéz ”zárt” alakra hozni a szóvan forgó magfüggvényeket. Ha ui. $0<u<2\pi$ és $n\in\mathbf{N}$, akkor

$$\sin(z/2)\cdot D_n(z)=\frac{\sin(z/2)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\sin(z/2)\cdot\cos(kz)=$$

$$\frac{\sin(z/2)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\Big((k+1/2)z\Big)-\sin\Big((k-1/2)z\Big)\right)=$$

$$\frac{\sin(z/2)}{2}+\frac{\sin\Big((n+1/2)z-\sin(z/2)\Big)}{2}=\frac{\sin\Big((n+1/2)z\Big)}{2}.$$

Innen az következik, hogy

$$D_n(z) = \frac{\sin\Big((n+1/2)z\Big)}{2 \cdot \sin(z/2)} \quad (0 < z < 2\pi).$$

Tehát a D_n definíciójából adódóan a

$$\frac{\sin\Big((n+1/2)0\Big)}{2 \cdot \sin(0/2)} := D_n(0) = \frac{1}{2} + n$$

megállapodással tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvényre az alábbi integrál-előállítást kapjuk a Fourier-részletösszegekre:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot D_n(x-t)\, dt \quad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

11.4 Egyenletes konvergencia

Tekintsük az (f_n) függvénysorozatot, ahol

$$f_n \in X \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\mathcal{D}_{f_n} =: \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\mathcal{D}_0 := \Big\{ t \in \mathcal{D} : \big(f_n(x)\big) \text{ konvergens} \Big\} \neq \emptyset$$

az (f_n) konvergenciatartománya, és

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

az (f_n) függvénysorozat határfüggvénye. Tehát $f : \mathcal{D}_0 \to \mathbf{K}$ és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_0$, valamint $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}$, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (N_{x,\varepsilon} < n \in \mathbf{N}).$$

Hangsúlyozni kell, hogy az itt szereplő $N_{x,\varepsilon}$ küszöbindex általában függ az x-től is, és az ε-tól is. Elképzelhető ugyanakkor, hogy bizonyos esetekben bármilyen $\varepsilon > 0$ mellett olyan (csak az ε-tól függő)

$$N := N_\varepsilon \in \mathbf{N}$$

is megadható, amelyik az előbbi becslésben egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$ halmaz mellett független az $x \in A$ elemtől. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az A halmazon *egyenletesen konvergens* az f függvényhez, azaz: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ekkor minden $\emptyset \neq B \subset A$ halmaz esetén is az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál a B-n az f-hez. Ha az egyenletes konvergencia definíciójában $A = \mathcal{D}_0$ írható, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens*.

A $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$ halmazon, ha a részletösszegek $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ sorozata egyenletesen konvergens az A-n.

Ez tehát azt jelenti, hogy létezik olyan

$$F : A \to \mathbf{K}$$

függvény és tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

A Cauchy-kritérium miatt ez azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ természetes számmal

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A,\ N < n,\ m \in \mathbf{N},\ n < m)$$

(*egyenletes Cauchy-kritérium*).

11.5 Weierstrass-kritérium

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\emptyset \neq X$ mellett $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$, és adott az

$$f_n : \mathcal{D} \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(f_n)$ függvénysor. Legyen továbbá egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$ halmazzal és egy (a_n) számsorozattal

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in A\} \leq a_n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysor az A halmazon egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Az alábbi becslés a tétel feltételei alapján nyilvánvaló:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k \quad (x \in A,\, n,\, m \in \mathbf{N},\, n < m).$$

Ha az $\varepsilon > 0$ egy pozitív szám, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ feltételezés miatt van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon \quad (n,\, m \in \mathbf{N},\, N < n < m).$$

Ezért

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon \quad (x \in A,\, n,\, m \in \mathbf{N},\, N < n < m).$$

■