Analízis IV

1. gyakorlat

Szabó Krisztián

Tartalom

1 Feladat

Hengerkoordinátákra áttérve számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int\int\int_H (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

ahol H az alábbi egyenletű felületek által határolt korlátos és zárt térrész:

$$x^2+y^2=2z, \quad \wedge \quad z=2.$$

Vizsgáljuk meg a H halmazt geometriailag:

$$z=\frac{x^2+y^2}{2}$$

Ha a $z=2$ sík berajzolásra kerülne, akkor az alábbi korlátos és zárt térrészt kapjuk:

$$H:=\left\{\left(x,\,y,\,\frac{x^2+y^2}{2}\right)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2+y^2}{2}\leq 2\right\}.$$

Ahhoz, hogy hengertranszformációt alkalmazzunk, induljunk ki a következő ötletből: a z értékek fussák be a $[0,\,2]$ intervallumot, majd minden z pontnál kapjuk az alábbi körlapot:

$$x^2+y^2\leq\left(\sqrt{2z}\right)^2.$$

Ezekből az információkból rakjuk össze a következő transzformációt:

$$H\ni\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\sim\Phi(r,\,\varphi,\,z):=\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi)\\r\cdot\sin(\varphi)\\z\end{pmatrix}\quad\left(z\in[0,\,2],\,\varphi\in[0,\,2\pi],\,r\in[0,\,\sqrt{2z}]\right).$$

Az integráltranszformáció tétele alapján az eredeti integál a következő alakot ölti:

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2z}}\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\,d\varphi\,dr\,dz$$

.

2 Feladat

Határozzuk meg az alábbi K kúptest *tehetetlenségi nyomatékát* a z illetve az x tengelyre nézve, ha a kitöltő anyag sűrűsége minden pontban egyenesen arányos az origótól mért távolság négyzetével:

$$K := \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 1\right\}.$$