

ANALÍZIS III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

Tartalom

1	A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A <i>Jacobi</i>-mátrix kiszámítása.	2
1.1	Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata	2
2	Többször differenciálható függvények. Young-tétel.	4
2.1	$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények másodrendű differenciálhatósága	4
2.2	$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények magasabb rendű differenciálhatósága	4
2.3	$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvények magasabb rendű differenciálhatósága	5
2.4	Young-tétel	5

1 A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A *Jacobi*-mátrix kiszámítása.

1.1 Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$. Az

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ helyen, ha minden $i = 1, \dots, m$ esetén az

$$f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

koordináta-függvény differenciálható az a -ban. Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először is azt, hogy $f \in D\{a\}$, és jelöljük az $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrix sorvektorait A_i -vel ($i = 1, \dots, m$):

$$f'(a) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor alkalmas

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$\eta(h) \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0)$$

és a

$$h \in \mathbb{R}^n \quad (a + h \in \mathcal{D}_f)$$

helyeken

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (f_1(a+h) - f_1(a), \dots, f_m(a+h) - f_m(a)) = \\ &= f'(a) \cdot h + \eta(h) \cdot \|h\| = \\ &= (\langle A_1, h \rangle, \dots, \langle A_m, h \rangle) + (\eta_1(h) \cdot \|h\|, \dots, \eta_m(h) \cdot \|h\|). \end{aligned}$$

Következésképpen minden $i = 1, \dots, m$ mellett az η függvény

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

koordináta-függvényeivel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle A_i, h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f). \quad (\star)$$

Mivel bármely $i = 1, \dots, m$ indexre

$$\eta_i(h) \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0),$$

ezért az előbbi (\star) összefüggés azt jelenti, hogy $f_i \in D\{a\}$ és $A_i = \text{grad } f_i(a)$ ($i = 1, \dots, m$). Most azt tegyük fel, hogy $f_i \in D\{a\}$ ($i = 1, \dots, m$), amikor is valamilyen

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \eta_i \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0) \quad (i = 1, \dots, m)$$

függvényekkel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle \text{grad } f_i(a), h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f, i = 1, \dots, m).$$

Ha tehát

$$A := \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

akkor az

$$\eta := (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \eta(h) \cdot \|h\|,$$

ahol $\eta(h) \rightarrow 0$ ($\|h\| \rightarrow 0$). Ezért $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

2 Többször differenciálható függvények. Young-tétel.

2.1 $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények másodrendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható* az a -ban ha minden $x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f \in D\{x\}$, és

$$\partial_i f \in D\{a\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ha a fenti feltételek teljesülnek akkor léteznek a

$$\partial_j(\partial_i f)(a) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

parciális deriváltak. Ehhez persze nem szükséges, hogy a $\partial_i f$ ($i = 1, \dots, n$) függvények deriválhatók legyenek az a helyen. Ha tehát a fenti

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre $f \in D^2\{a\}$, akkor minden $i, j = 1, \dots, n$ mellett létezik a $\partial_{ij} f(a)$ másodrendű parciális derivált. Az

$$f''(a) := (\partial_{ij} f(a))_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \dots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \dots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \dots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrixot az f függvény a -beli *másodrendű deriváltmátrixának* nevezzük. A későbbiekben tárgyalandó Young-tétel miatt ez egy szimmetrikus mátrix.

2.2 $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, továbbá egy alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel minden $x \in K(a)$ pontban az f függvény s -szer differenciálható: $f \in D^s\{x\}$. Belátható, hogy ekkor a $K(a)$ pontjaiban az f összes s -edrendű parciális deriváltja létezik. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a -ban $(s+1)$ -szer differenciálható, ha minden s -edrendű parciális deriváltfüggvénye differenciálható az a -ban.

2.3 $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ és

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \text{int } \mathcal{D}_f,$$

ill. $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény k -szor differenciálható az a -ban, ha

$$f_j \in D^k\{a\} \quad (j = 1, \dots, m).$$

2.4 Young-tétel

Tétel. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ és $f \in D^s\{a\}$. Ekkor tetszőleges $k_1, \dots, k_s \in \{1, \dots, n\}$ indexek esetén ezek bármely j_1, \dots, j_s permutációjára

$$\partial_{k_1 \dots k_s} f(a) = \partial_{j_1 \dots j_s} f(a).$$

Bizonyítás. Az s -szerinti teljes indukcióra gondolva elegendő az $s = 2$ esettel foglalkoznunk. Ekkor tehát azt kell belátnunk, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Világos, hogy csak az $i \neq j$ eset az "érdekes". Ezen túl (könnyen meggondolhatóan) azt is feltehetjük, hogy $n = 2$. Más szóval az

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényekre

$$a = (a_1, a_2) \in \text{int } \mathcal{D}_f, f \in D^2\{a\},$$

és ennek alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a).$$

Legyen ehhez $r > 0$ olyan, amellyel $(\mathbb{R}^n$ -ben a $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ normát választva)

$$K(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\} \subset \mathcal{D}_f,$$

és vezessük be az alábbi jelölést: az $u, v \in (-r, r)$ helyeken

$$\Delta(u, v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + v).$$

Ha rögzítjük a $v \in (-r, r)$ számot, akkor a

$$\varphi(u) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) \quad (u \in (-r, r))$$

függvénnyel

$$\Delta(u, v) = \varphi(u) - \varphi(0) \quad (u \in (-r, r)).$$

Az $f \in D^2\{a\}$ feltétel miatt az előbbi $K_r(a)$ környezettől azt is megkövetelhetjük, hogy egyrészt minden $x \in K_r(a)$ helyen $f \in D\{x\}$ (így egyúttal léteznek az $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ parciális deriváltak is), másrészt

$$\partial_1 f, \partial_2 f \in D\{a\}.$$

Következésképpen a most definiált

$$\varphi : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, ezért a Lagrange-középérték-tétel alapján

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot u \quad (u \in (-r, r)),$$

ahol $\xi \in (0, u)$ (vagy $\xi \in (u, 0)$). A parciális deriváltak definíciójára gondolva

$$\varphi'(u) = \partial_1 f(a_1 + u, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + u, a_2) \quad (u \in (-r, r)),$$

így

$$\varphi(u) - \varphi(0) = (\partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2)) \cdot u \quad (u \in (-1, r)).$$

A $\partial_1 f \in D\{a\}$ differenciálhatósági feltételből

$$\text{grad } \partial_1 f(a) = (\partial_{11} f(a), \partial_{12} f(a)),$$

és egy alkalmas

$$\eta \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \eta(z) \rightarrow 0 \quad (\|z\| \rightarrow 0)$$

függvénnyel

$$\begin{aligned} & \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2) = \\ & \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1, a_2) - (\partial_1 f(a_1 + \xi, a_2) - \partial_1 f(a_1, a_2)) = \\ & \langle \text{grad } \partial_1 f(a), (\xi, v) \rangle + \eta(\xi, v) \cdot \|(\xi, v)\| - \langle \text{grad } \partial_1 f(a), (\xi, 0) \rangle - \eta(\xi, 0) \cdot \|(\xi, 0)\| = \\ & \partial_{12} f(a) \cdot v + \eta(\xi, v) \cdot \|(\xi, v)\| - \eta(\xi, 0) \cdot |\xi|. \end{aligned}$$

Speciálisan a $0 \neq u = v \in (-r, r)$ választással

$$\Delta(u, u) = \varphi(u) - \varphi(0) = \partial_{12} f(a) \cdot u^2 + \eta(\xi, u) \cdot \|(\xi, u)\| \cdot u - \eta(\xi, 0) \cdot |\xi| \cdot u,$$

amiből

$$\frac{\Delta(u, u)}{u^2} = \partial_{12}f(a) + \eta(\xi, u) \cdot \frac{||(\xi, u)||}{u} - \eta(\xi, 0) \cdot \frac{|\xi|}{u}$$

következik. Ezért $|\xi| < |u|$ alapján

$$\left| \frac{\Delta(u, u)}{u^2} - \partial_{12}f(a) \right| \leq |\eta(\xi, u)| + |\eta(\xi, 0)| \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0),$$

hiszen

$$||(\xi, u)||, ||(\xi, 0)|| \leq |u| \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0).$$

Azt kapjuk ezzel, hogy

$$\partial_{12}f(a) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Delta(u, u)}{u^2}. \quad (\star)$$

Legyen most rögzített $u \in (-r, r)$ mellett

$$\psi(v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1, a_2 + v) \quad (v \in (-r, r)).$$

Ekkor

$$\Delta(u, v) = \psi(v) - \psi(0) \quad (v \in (-r, r))$$

és az előbbiekkal analóg módon az adódik, hogy

$$\partial_{21}f(a) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Delta(v, v)}{v^2}.$$

Itt a jobb oldali limesz ugyanaz, mint a (\star) -ban. Így $\partial_{21}f(a) = \partial_{12}f(a)$. ■