Legyen

$$\mathrm{P} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \text{ esetén } f(n) > 0\}.$$

Más szavakkal $f \in \mathrm{P}$ pontosan akkor, ha f egy $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ típusú függvény (sorozat) és f *majdnem minden (m.m.) n-re* pozitív értékeket vesz fel. P az *aszimptotikusan pozitív* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények (sorozatok) halmaza.

Definíció. Legyen $g \in \mathrm{P}$, és az $O(g)$, $\Omega(g)$ szimbólumok jelöljék a alábbi függvényhalmazokat.

$$O(g) := \{f \in \mathrm{P} : \exists d > 0, \text{ hogy } d \cdot g(n) \geq f(n) \text{ m.m. } n\text{-re}\}.$$

Azaz ha $f \in O(g)$, akkor létezik egy $d > 0$ pozitív szám, hogy majdnem minden n-re f alulról becsüli $d \cdot g$-t.

$$\Omega(g) := \{f \in \mathrm{P} : \exists c > 0, \text{ hogy } c \cdot g(n) \leq f(n) \text{ m.m. } n\text{-re}\}.$$

Azaz ha $f \in \Omega(g)$, akkor létezik egy $c > 0$ pozitív szám, hogy majdnem minden n-re f felülről becsüli $c \cdot g$-t.

Legyen adott egy $g \in \mathrm{P}$ aszimptotikusan pozitív függvény és legyen

$$\mathscr{U} := O(g) \setminus \Omega(g).$$

Azaz $\mathscr{U}$ egy olyan halmaz, amiben olyan $f \in \mathrm{P}$ függvények vannak, amik benne vannak $O(g)$-ben, azaz

$$\exists d > 0, \text{ hogy } d \cdot g(n) \geq f(n) \quad (\text{m.m. } \mathbb{N} \ni n\text{-re}),$$

de nincsenek benne $\Omega(g)$-ben, azaz

$$\forall c > 0 \text{ esetén } c \cdot g(n) > f(n) \quad (\text{m.m. } \mathbb{N} \ni n\text{-re}).$$

Minden az jelenti, hogy

$$\boxed{\mathscr{U} = \{f \in \mathrm{P} : \forall c > 0 \text{ esetén } c \cdot g(n) > f(n) \text{ m.m. } n\text{-re}\}}.$$

Definíció. Adott $g \in \mathrm{P}$ függvény esetén legyen

$$o(g) := \left\{ f \in \mathrm{P} : \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \right\}.$$

Az előző definícióban, mivel $g \in \mathrm{P}$ aszimptotikusan pozitív függvény, ezért fel lehet tenni, hogy elég nagy n-ek esetén az $\frac{f}{g}$ hányados értelmes. Azt akarjuk belátni, hogy akármilyen $g \in \mathrm{P}$ függvényt veszünk, akkor

$$o(g) = \mathscr{U}.$$

Legyen adott egy $f \in o(g)$, ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N).$$

Mivel f, $g \in \mathrm{P}$, ezért N-ről az is feltehető, hogy f, g értékei pozitívak

$$f(n) < \varepsilon \cdot g(n) \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N).$$

Azaz

$$\forall c > 0 \text{ esetén } c \cdot g(n) > f(n) \quad (\text{m.m. } n\text{-re}).$$

Tehát valóban, ha $f \in o(g)$, akkor $f \in \mathscr{U}$ is igaz.

Most azt tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{U}$, azaz

$$\forall c > 0 \text{ esetén } c \cdot g(n) > f(n) \quad (\text{m.m. } n\text{-re}).$$

Mivel $g \in \mathrm{P}$ ezért m.m. n-re g pozitív, tehát

$$\forall c > 0 \text{ esetén } c > \frac{f(n)}{g(n)} \quad (\text{m.m. } n\text{-re}).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, azaz $f \in o(g)$.