

Programtervező informatikus BSC

Az analízis alkalmazásai

vizsgatematika

2024-25. év 1. félév

1. Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és a inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).
- [2.] Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).
- [3.] A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (*Cauchy*-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.
- [4.] Lineáris differenciálegyenlet. Az állandók variálásának a módszere. A radioaktív bomlás felezési idejének a meghatározása.
- [5.] *Lipschitz*-feltétel. A *Picard-Lindelöf*-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása). A k.é.p. megoldásának az egyértelmősége, unicitási tétel (bizonyítás nélkül).
6. A lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata: homogén, inhomogén rendszerek. A megoldáshalmaz szerkezete.
- [7.] Alaprendszer, alaplátrix. Az állandók variálásának a módszere. Alaplátrix előállítása állandó együtthatós, diagonalizálható mátrix esetén. Az $n = 2$ eset vizsgálata tetszőleges, állandó együtthatós mátrixra.
8. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere.
9. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítása, a karakterisztikus polinom szerepe (a bizonyítás vázlata).
- [10.] Partikuláris megoldás kvázi-polinom jobb oldal esetén (a bizonyítás vázlata). A csillapítás nélküli kényszerrezgés vizsgálata, rezonancia.
11. A függvénytörz, függvénytör fogalma. Hatványtörök, trigonometrikus török, *Fourier*-török. A *Dirichlet*-féle magfüggvény. Konvergencia, határfüggvény (összegfüggvény), egyenletes konvergencia. A *Weierstrass*-féle majoráns kritérium.
- [12.] A folytonosság, ill. a *Riemann*-integrálhatóság kérdése konvergens függvénytörökkel kapcsolatban. Egyenletesen konvergens függvénytörök határfüggvényének a folytonossága, ill. integrálhatósága. Az integrálás és a határátmenet felcserélhetősége.
- [13.] A határfüggvény differenciálhatóságára, ill. a deriválás és a határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel.
14. A trigonometrikus rendszer ortogonalitása. Egyenletesen konvergens trigonometrikus tör az összegfüggvényének a *Fourier*-tör. *Bessel*-azonosság, *Bessel*-egyenlőtlenség.
- [15.] Egyenletesen konvergens *Fourier*-török, a trigonometrikus rendszer teljessége $C_{2\pi}$ -re.
- [16.] Kétszer folytonosan differenciálható függvények *Fourier*-tör. Az $f \in C_{2\pi}$, $f(x) := (x - \pi)^2$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) függvény *Fourier*-tör, a $\pi^2/6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ egyenlőség.
- [17.] A $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cdot \sin(kx)$ ($x \in \mathbf{R}$) tör konvergenciája, összegfüggvénye. A rezgő húr problémája.

A vizsgán minden hallgató a fentiekből két tételt kap. Saját döntése alapján az egyikről részletesen (bizonyításokkal), a másikról vázlatosan (bizonyítások nélkül) beszél. A két tételből az egyik a [...] jelzésűek közül kerül ki.

Irodalom:

Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe II.* Egyetemi jegyzet. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016, 1-571.