

Analízis III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

Tartalom

1	Metrikus-, normált-, euklidesz-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz.	2
1.1	Metrika, metrikus tér fogalma	2
1.2	Diszkrét metrikus tér	3
1.3	(\mathbb{K}^n, ϱ) metrikus tér	3
1.4	$(C[a, b], \varrho_p)$ metrikus tér	3
1.5	Metrikák ekvivalenciája	4
1.6	Normált terek	4
1.7	Normák ekvivalenciája	5
1.8	Euklideszi terek	6
2	Konvergens sorozatok metrikus terekben. Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal. Banach- és Hilbert-tér.	8
2.1	Konvergenca metrikus térben	8
2.2	Határérték egyértelműsége	8
2.3	Vektorsorozatok	9
2.4	Koordináta-sorozatok konvergenciája	9
2.5	Függvényterek konvergenciája	11
2.6	Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal	11
2.7	Cauchy-sorozat fogalma	12
2.8	Banach- és Hilbert-tér fogalma	12
2.9	Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel	13
2.10	Függvénytér teljessége	14
3	A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A <i>Jacobi</i>-mátrix kiszámítása.	16
3.1	Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata	16
4	Többször differenciálható függvények. Young-tétel.	18
4.1	Többször differenciálható függvények másodrendű differenciálhatósága	18
4.2	Többször differenciálható függvények magasabb rendű differenciálhatósága	18
4.3	Többször differenciálható vektorfüggvények magasabb rendű differenciálhatósága	19
4.4	Young-tétel	19

1 Metrikus-, normált-, euklidesz-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz.

Eredeti vizsgacím: Metrikus-, normált-, euklideszi-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz. Torlódási pont, zárt halmaz. Nyílt (zárt) halmazok uniója, metszete. A $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(C[a, b], \varrho_p)$, $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ ($0 < n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$) terek.

1.1 Metrika, metrikus tér fogalma

Definíció. (Axióma) Legyen az $X \neq \emptyset$ egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy a

$$\varrho : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. minden $x \in X$ esetén $\varrho(x, x) = 0$;
2. ha $x, y \in X$ és $\varrho(x, y) = 0$, akkor $x = y$;
3. bármely $x, y \in X$ választással $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;
4. tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekkel $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, z)$.

Azt mondjuk, hogy ekkor a ϱ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval metrika). Ha $x, y \in X$, akkor $\varrho(x, y)$ az x, y elemek *távolsága*. Az (X, ϱ) rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük. Az X -beli elemek távolsága tehát nemnegatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága nulla, továbbá két különböző elem távolsága mindig pozitív. A távolság szimmetrikus, azaz két elem távolsága független az illető eleme sorrendjétől. A 4. tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni.

Mutassuk meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből annak az alábbi változata is következik:

$$|\varrho(x, z) - \varrho(y, z)| \leq \varrho(x, y) \quad (x, y, z \in X).$$

Ui. a 4. axióma miatt

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$$

tehát

$$\varrho(x, z) - \varrho(y, z) \leq \varrho(x, y).$$

Ha itt az x -et és az y -t felcseréljük, akkor a

$$-(\varrho(x, z) - \varrho(y, z)) = \varrho(y, z) - \varrho(x, z) \leq \varrho(y, x) = \varrho(x, y)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utóbbi két becslés egybevetésével kapjuk a jelzett egyenlőtlenséget.

1.2 Diszkrét metrikus tér

Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható

$$\varrho : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

távolságfüggvény, ui. pl. a

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \quad ((x, y) \in X^2)$$

leképezés nyilván eleget tesz a fenti, a metrikát meghatározó axiómáknak. Az így definiált (X, ϱ) terek a *diszkrét* jelzővel illetjük.

1.3 (\mathbb{K}^n, ϱ) metrikus tér

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$, és

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

esetén definiáljuk az (x, y) -ban a

$$\varrho_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

függvény helyettesítési értékét a következőképpen:

$$\varrho_p(x, y) := \begin{cases} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p & (p \leq 1) \\ \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Terjesszük ki a ϱ_p értelmezését $p = \infty := +\infty$ -re is az alábbiak szerint:

$$\varrho_\infty(x, y) := \max \{ |x_i - y_i| : i = 1, \dots, n \}.$$

Belátható, hogy $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$ metrikus tér.

1.4 $(C[a, b], \varrho_p)$ metrikus tér

Valamilyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) esetén jelöljük $C[a, b]$ -vel az $[a, b]$ -n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $0 < p \leq +\infty$, akkor tekintsük az előbbi példa "folytonos" változatát: ha $f, g \in C[a, b]$, akkor

$$\varrho_p(f, g) := \begin{cases} \int_a^b |f - g|^p & (0 < p \leq 1) \\ \left(\int_a^b |f - g|^p \right)^{1/p} & (1 < p < +\infty) \\ \max \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \} & (p = \infty := +\infty). \end{cases}$$

Az előbbi példákhoz hasonlóan látható be, hogy $(C[a, b], \varrho_p)$ is metrikus tér.

1.5 Metrikák ekvivalenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és az X^2 -en értelmezett

$$\varrho, \sigma : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

metrikák esetén a ϱ és a σ *ekvivalens*, ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot \varrho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C \cdot \varrho(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Könnyű belátni, hogy ha \mathcal{M} jelöli az előbb említett metrikák halmazát, és a $\varrho, \sigma \in \mathcal{M}$ elemekre $\varrho \sim \sigma$ azt jelenti, hogy a ϱ és σ ekvivalens, akkor az így értelmezett $(\mathcal{M}^2\text{-beli}) \sim$ reláció ekvivalencia.

Pl. a fenti $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$ metrikus terekre a ϱ_p metrikák közül $p \geq 1$ esetén bármelyik kettő ekvivalens. A továbbiakban az

$$X := \mathbb{K}^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

esetben a $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_\infty$ metrikák valamelyikét fogjuk használni.

1.6 Normált terek

Definíció. (Axióma) Tegyük fel, hogy a szóban forgó $X \neq \emptyset$ halmaz *vektortér* a \mathbb{K} felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$$

leképezés *norma*, ha

1. $\|0\| = 0$;
2. ha $x \in X$ és $\|x\| = 0$, akkor $x = 0$;
3. bármely $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$ esetén $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
4. tetszőleges $x, y \in X$ elemekre $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A 4. axiómát szintén *háromszög-egyenlőtlenségként* említjük a későbbiekben. Ha pl. X jelöli a

$$\mathbb{K}^n \quad (0 < n \in \mathbb{N}), \quad C[a, b] \quad (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok bármelyikét, akkor a vektorok (függvények) szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve az X lineáris tér a \mathbb{K} , ill. az \mathbb{R} felett. Az említett terekben a nulla-elemet 0-val felölve azt kapjuk továbbá, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$\|x\|_p := \varrho(x, 0) \quad (x \in X)$$

norma, azaz ilyen p -kre

$$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p), (C[a, b], \|\cdot\|_p)$$

normált terek. Tehát

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max \{|x_i| : i = 1, \dots, n\} & (p = +\infty) \end{cases} \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n),$$

speciálisan az $n = 1$ esetben

$$\|x\|_p = |x| \quad (x \in \mathbb{K}, 1 \leq p \leq +\infty),$$

valamint

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max \{|f(x)| : x \in [a, b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \quad (f \in C[a, b]).$$

Világos, hogy a most mondott példákban

$$\varrho_p(x, y) = \|x - y\|_p \quad (x, y \in X).$$

Sőt, ha most $(X, \|\cdot\|)$ egy tetszőleges normált teret jelöl, akkor a

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \quad ((x, y) \in X^2)$$

függvény metrika, azaz (X, ϱ) metrikus tér:

$$(X, \varrho) \equiv (X, \|\cdot\|).$$

1.7 Normák ekvivalenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X (\mathbb{K} -feletti) vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\|, \|\cdot\|_* : X \rightarrow [0, +\infty)$$

normák *ekvivalensek* (erre is a $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$ jelölést fogjuk használni), ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot \|x\| \leq \|x\|_* \leq C \cdot \|x\| \quad (x \in X).$$

1.8 Euklideszi terek

A fent bevezetett $\|\cdot\|_p$ norma a $p = 2$ esetben speciális esete egy tágabb normaosztálynak.

Definíció. (Axióma) Legyen X egy vektortér a \mathbb{K} felett, az

$$\langle \cdot \rangle : X \rightarrow \mathbb{K}$$

függvényről pedig tegyük fel, hogy

1. minden $x, y \in X$ mellett $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (ahol a $\bar{\xi}$ szimbólum a $\xi \in \mathbb{K}$ szám komplex konjugáltját jelöli);
2. bármely $x \in X \setminus \{0\}$ esetén $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ és $\langle x, x \rangle > 0$;
3. ha $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$;
4. tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Ha $x, y \in X$, akkor az

$$\langle x, y \rangle$$

számot az x, y elemek *skaláris szorzatának*, az $(X, \langle \cdot \rangle)$ párt pedig *skaláris szorzat-térnek* (vagy *euklideszi térnek*) nevezzük.

Jelentse pl. X a

$$\mathbb{K}^n, (1 \leq n \in \mathbb{N}), C[a, b] (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, és

$$\langle x, y \rangle := \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i & (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n) \\ \int_a^b xy & (x, y \in C[a, b]). \end{cases}$$

Ekkor $(X, \langle \cdot \rangle)$ euklideszi tér, továbbá

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Ez utóbbi egyenlőségnek sokkal általánosabb háttere van, ui. tetszőleges $(X, \langle \cdot \rangle)$ euklideszi teret véve

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Itt a háromszög-egyenlőtlenség igazolásában fontos szerep jut a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in X)$$

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek. Ezt "lefordítva" az előbbi említett euklideszi terekre az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \quad (x, y \in \mathbb{K}^n),$$

$$\left| \int_a^b f g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2} \quad (f, g \in C[a, b]).$$

2 Konvergens sorozatok metrikus terekben. Halmazok zártóságának jellemzése konvergens sorozatokkal. Banach- és Hilbert-tér.

Eredeti vizsgacím:

Konvergens sorozatok metrikus terekben. Konvergenca \mathbb{K}^n -ben, a koordináta-sorozatok szerepe. Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel. Konvergenca a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ térben (függvénysorozatok, az egyenletes, ill. a pontonkénti konvergenca fogalma). Halmazok zártóságának a jellemzése konvergens sorozatokkal. A teljesség fogalma, Banach-tér, Hilbert-tér. A $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ tér teljessége.

2.1 Konvergenca metrikus térben

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér, és legyen az

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$$

egy, az X elemeiből álló sorozat. Az (x_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $\alpha \in X$, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ "hibakorlát" mellett egy alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexszel igaz a

$$\varrho(x_n, \alpha) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N)$$

becslés. Ha ilyen α nincs, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *divergens*.

Például a diszkrét metrikus térben valamely (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha *kvázikonstans*, azaz létezik olyan $M \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy

$$x_n = x_M \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq M).$$

Ha ui. egy sorozat ilyen, akkor a konvergenca definíciójában az α helyébe az x_M -et, tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett pedig N helyébe M -et írva triviálisan fennáll a

$$\varrho(x_n, \alpha) = \varrho(x_n, x_M) = \varrho(x_M, x_M) = 0 < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq M)$$

egyenlőtlenség.

2.2 Határérték egyértelműsége

Tétel. Legyen valamilyen (X, ϱ) metrikus tér esetén az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$$

sorozat konvergens. Ekkor a konvergenca definíciójában szereplő $\alpha \in X$ elem egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tételben említett $X \ni \alpha$ -n kívül egy $\beta \in X$ elemre is igaz a konvergencia definíciója: bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, \beta) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > M).$$

Ekkor a ϱ metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőlegesen választott

$$n \in \mathbb{N}, n > \max\{N, M\}$$

indexre

$$\varrho(\alpha, \beta) \leq \varrho(\alpha, x_n) + \varrho(x_n, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Következésképpen

$$0 \leq \varrho(\alpha, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Mivel itt az $\varepsilon > 0$ bármilyen (pozitív) szám lehet, ezért csak $\varrho(\alpha, \beta) = 0$ lehetséges. A metrika axiómái szerint innen viszont $\alpha = \beta$ adódik. ■

2.3 Vektorsorozatok

Legyen most

$$1 \leq s \in \mathbb{N}, 0 < p \leq +\infty, X := \mathbb{K}^s, \varrho := \varrho_p,$$

és tekintsünk egy

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^s$$

sorozatot. Ha

$$x_n = (x_{n1}, \dots, x_{ns}) \in \mathbb{K}^s \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor minden $i = 1, \dots, s$ mellett definiálhatjuk az

$$x^{(i)} := (x_{ni})$$

számsorozatot, az x sorozat i -edik *koordináta-sorozatát*. Ekkor az x *vektorsorozat* konvergenciája az alábbiak szerint "kezelhető" a koordináta-sorozatainak a konvergenciája révén.

2.4 Koordináta-sorozatok konvergenciája

Tétel. Az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az előbbi $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ metrikus térben, ha minden $x^{(i)}$ ($i = 1, \dots, s$) koordináta-sorozata konvergens. Továbbá

$$\mathbb{K}^s \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \iff \alpha_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, s).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a tételbeli x sorozat konvergens, legyen

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$$

a határértéke. A ϱ_p metrikák definíciója szerint ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot megadva van olyan $N \in \mathbb{N}$, amellyel az $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ indexekre

$$\varepsilon > \varrho_p(x_n, \alpha) = \begin{cases} \sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p & (p < 1) \\ \left(\sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max \{|x_{ni} - \alpha_i| : i = 1, \dots, s\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

Világos, hogy bármely $i = 1, \dots, s$ esetén

$$\varrho(x_n, \alpha) \geq \begin{cases} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (0 < p < 1) \\ |x_{ni} - \alpha_i| & (1 \leq p \leq +\infty) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, p \geq 1)$$

és

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \sqrt[p]{\varepsilon} \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 0 < p < 1).$$

Mindez pontosan azt jelenti, hogy az $x^{(i)}$ koordináta-sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x^{(i)}) = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, s).$$

Fordítva, ha minden $x^{(i)}$ koordinátat-sorozat konvergens, akkor legyen

$$\alpha_i := \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, s)$$

és

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor minden $i = 1, \dots, s$ mellett létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N_i).$$

Legyen $N := \max \{N_1, \dots, N_s\}$, ekkor

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, i = 1, \dots, s).$$

Ezért

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p < s \cdot \varepsilon^p \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 0 < p < 1),$$

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^s |x_{ni} - \alpha_i|^p \right)^{1/p} < s^{1/p} \cdot \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 1 \leq p < +\infty),$$

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \max \{|x_{ni} - \alpha_i| : i = 1, \dots, s\} < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N, 1 \leq p = \infty).$$

Így minden $0 < p \leq +\infty$ esetén az (x_n) sorozat konvergens a $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ metrikus térben, és $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \alpha$. ■

2.5 Függvényterek konvergenciája

Valamely $-\infty < a < b < +\infty$ mellett tekintsük az $X := C[a, b]$ halmazt és a ϱ_∞ metrikát. Ha az

$$f_n \in C[a, b] \quad (n \in \mathbb{N})$$

(függvény)sorozat konvergens és

$$f := \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n) \in C[a, b],$$

akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén

$$\varrho_\infty(f_n, f) < \varepsilon,$$

azaz

$$\max \{|f_n(x) - f(x)| : a \leq x \leq b\} < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens*. Az f az (f_n) határfüggvénye.

Nyilvánvaló, hogy ekkor az előbbi n indexekre bármelyik $x \in [a, b]$ helyen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

igaz. Más szóval ez azt jelenti, hogy az $(f_n(x))$ (szám)sorozat konvergens és a határértéke $f(x)$. Röviden: az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens*.

2.6 Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal

Tétel. Legyen (X, ϱ) metrikus tér. Az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

sorozatra $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \in A$.

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az A halmaz zárt, de valamilyen

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

konvergens sorozatra

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \notin A.$$

Ekkor tehát $\alpha \in X \setminus A$, ahol az $X \setminus A$ halmaz nyílt. Így van olyan $K(\alpha)$ környezet, hogy

$$K(\alpha) \subset X \setminus A.$$

Ugyanakkor egy $N \in \mathbb{N}$ indexszel

$$A \ni x_k \in K(\alpha) \subset X \setminus A \quad (N < k \in \mathbb{N}),$$

ami nyilván nem lehet.

Most tegyük fel azt, hogy tetszőleges konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

sorozat határértékére $\lim(x_n) \in A$, és lássuk be, hogy az A halmaz zárt. Legyen ehhez $\alpha \in A'$, ekkor egy alkalmas

$$(z_n) : \mathbb{N} \rightarrow A$$

sorozatra $\lim(z_n) = \alpha$. A kiinduló feltételünk szerint ezért $\alpha \in A$, azaz $A' \subset A$ és (egy korábbi tételre hivatkozva) az A zárt. ■

2.7 Cauchy-sorozat fogalma

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér és

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$$

sorozat. Ezt a sorozat *Cauchy-sorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (m, n \in \mathbb{N}, m, n > N).$$

2.8 Banach- és Hilbert-tér fogalma

Legyen adott az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy ez a tér *teljes* (vagy *Banach-tér*), ha a $\|\cdot\|$ norma által indukált

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

metrikával az (X, ϱ) metrikus tér teljes. Világos, hogy a

$$(\mathbb{K}^s, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leq s \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek valamennyien Banach-terek. Hasonlóan: a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ tér is Banach-tér.

Azt mondjuk, hogy az $(X, \langle \cdot \rangle)$ euklideszi tér *teljes* (vagy *Hilbert-tér*), ha a $\langle \cdot \rangle$ skaláris szorzás által meghatározott

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

normával $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér. Így pl. a

$$(\mathbb{K}^s, \langle \cdot \rangle) \quad (1 \leq s \in \mathbb{N})$$

tér Hilbert-tér, ahol

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^s x_i \overline{y_i} \quad (x = (x_1, \dots, x_s), y = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{K}^s).$$

2.9 Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel

Tétel. A $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ $(1 \leq s \in \mathbb{N}, 0 < p \leq +\infty)$ metrikus térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Emlékeztetünk egy korábbi tételre, miszerint az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $x^{(i)}$ $i = 1, \dots, s$ koordináta-sorozata konvergens.

A feltételezésünk szerint most az (x_n) sorozat korlátos. Van tehát olyan $r > 0$ szám, amellyel

$$\varrho(x_n, 0) < r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A ϱ_p metrika definícióját figyelembe véve innen az is rögtön adódik, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$|x_{ni}| < r \quad (n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, s),$$

ill. $0 < p < 1$ mellett

$$|x_{ni}| < r^{1/p} \quad (n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, s),$$

azaz, hogy minden $x^{(i)}$ $(i = 1, \dots, s)$ koordináta-sorozat (mint számsorozat) is korlátos. A számsorozatokra ismert Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel alapján ezért létezik olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozat, hogy az

$$x^{(1)} \circ \nu^{(1)}$$

részsorozat konvergens. Világos, hogy az $x^{(2)} \circ \nu^{(1)}$ részsorozat is korlátos, ezért van olyan $\nu^{(2)}$ indexsorozat is amelyre az

$$(x^{(2)} \circ \nu^{(1)}) \circ \nu^{(2)} = x^{(2)} \circ (\nu^{(1)} \circ \nu^{(2)})$$

részsorozat is konvergens. A konstrukciót folytatva végül olyan

$$\nu^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s)$$

indexsorozatokat kapunk, hogy az

$$x^{(i)} \circ (\nu^{(1)} \circ \dots \circ \nu^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, s)$$

részsorozatok konvergenssek. Legyen

$$\nu := \nu^{(1)} \circ \dots \circ \nu^{(s)},$$

akkor a ν sorozat indexsorozat, és minden

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \dots, s)$$

sorozat részsorozata a konvergens $x^{(i)} \circ (\nu^{(1)} \circ \dots \circ \nu^{(i)})$ sorozatnak. Így az

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \dots, s)$$

számsorozatok mindegyike konvergens. Ez azt jelenti, hogy az $x \circ \nu$ részsorozat is konvergens. ■

2.10 Függvénytér teljessége

Tétel. A $(C[a, b], \varrho_\infty)$ metrikus tér teljes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az

$$(f_n) : \mathbb{N} \rightarrow C[a, b]$$

(függvény)sorozat (a ϱ_∞ metrika értelmében) Cauchy-sorozat. Ez most azt jelenti, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számot is adunk meg, ehhez találunk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, hogy

$$\begin{aligned} \varrho_\infty(f_n, f_m) = \\ \max \{ |f_n(x) - f_m(x)| : a \leq x \leq b \} < \varepsilon \quad (n, m \in \mathbb{N}, n, m > N). \end{aligned}$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén egyúttal

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad (n, m \in \mathbb{N}, n, m > N) \quad (\star)$$

is teljesül, más szóval az $(f_n(x))$ számsorozat Cauchy-sorozat. Létezik tehát az

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad (x \in [a, b])$$

(”pontenkénti”) határérték. Továbbá (\star) miatt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \varepsilon \quad (x \in [a, b], n \in \mathbb{N}, n > N). \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Mutassuk meg, hogy az így definiált

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény folytonos, azaz $f \in C[a, b]$. Legyen ehhez valamilyen $\xi \in [a, b]$ mellett $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az előbbiek szerint bármilyen (rögzített) $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f(\xi)| \leq \\ &2 \cdot \varepsilon + |f_n(x) - f_n(\xi)| \quad (x \in [a, b]). \end{aligned}$$

Mivel $f_n \in C[a, b]$, így $f_n \in C\{\xi\}$ is igaz. Következésképpen létezik olyan $\delta > 0$ szám, amellyel

$$|f_n(x) - f_n(\xi)| < \varepsilon \quad (x \in [a, b], |x - \xi| < \delta).$$

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$|f_n(x) - f(\xi)| < 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon \quad (x \in [a, b], |x - \xi| < \delta).$$

Ez nem jelent mást, mint azt, hogy $f \in C\{\xi\}$. Az itt szereplő ξ tetszőleges eleme volt az $[a, b]$ intervallumnak, ezért $f \in C[a, b]$. Végül, a $(\star\star)$ becslés szerint (az ottani szereplőkkel)

$$\varrho_\infty(f_n, f) = \max \{|f_n(x) - f(x)| : a \leq x \leq b\} \leq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}, n > N),$$

azaz

$$\varrho_\infty(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy a $(C[a, b], \varrho_\infty)$ metrikus térben az (f_n) sorozat konvergál az f függvényhez. Ezzel beláttuk, hogy a szóban forgó térben minden Cauchy-sorozat konvergens, azaz a $(C[a, b], \varrho_\infty)$ teljes metrikus tér.

■

3 A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A *Jacobi*-mátrix kiszámítása.

3.1 Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$. Az

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ helyen, ha minden $i = 1, \dots, m$ esetén az

$$f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

koordináta-függvény differenciálható az a -ban. Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először is azt, hogy $f \in D\{a\}$, és jelöljük az $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrix sorvektorait A_i -vel ($i = 1, \dots, m$):

$$f'(a) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor alkalmas

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$\eta(h) \rightarrow 0 \quad (||h|| \rightarrow 0)$$

és a

$$h \in \mathbb{R}^n \quad (a + h \in \mathcal{D}_f)$$

helyeken

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= (f_1(a + h) - f_1(a), \dots, f_m(a + h) - f_m(a)) = \\ &= f'(a) \cdot h + \eta(h) \cdot ||h|| = \\ &= (\langle A_1, h \rangle, \dots, \langle A_m, h \rangle) + (\eta_1(h) \cdot ||h||, \dots, \eta_m(h) \cdot ||h||). \end{aligned}$$

Következésképpen minden $i = 1, \dots, m$ mellett az η függvény

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

koordináta-függvényeivel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle A_i, h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f). \quad (\star)$$

Mivel bármely $i = 1, \dots, m$ indexre

$$\eta_i(h) \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0),$$

ezért az előbbi (\star) összefüggés azt jelenti, hogy $f_i \in D\{a\}$ és $A_i = \text{grad } f_i(a)$ ($i = 1, \dots, m$). Most azt tegyük fel, hogy $f_i \in D\{a\}$ ($i = 1, \dots, m$), amikor is valamilyen

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \eta_i \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0) \quad (i = 1, \dots, m)$$

függvényekkel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle \text{grad } f_i(a), h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f, i = 1, \dots, m).$$

Ha tehát

$$A := \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

akkor az

$$\eta := (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \eta(h) \cdot \|h\|,$$

ahol $\eta(h) \rightarrow 0$ ($\|h\| \rightarrow 0$). Ezért $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

4 Többször differenciálható függvények. Young-tétel.

4.1 Többváltozós-valós függvények másodrendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható* az a -ban ha minden $x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f \in D\{x\}$, és

$$\partial_i f \in D\{a\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ha a fenti feltételek teljesülnek akkor léteznek a

$$\partial_j(\partial_i f)(a) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

parciális deriváltak. Ehhez persze nem szükséges, hogy a $\partial_i f$ ($i = 1, \dots, n$) függvények deriválhatók legyenek az a helyen. Ha tehát a fenti

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre $f \in D^2\{a\}$, akkor minden $i, j = 1, \dots, n$ mellett létezik a $\partial_{ij} f(a)$ másodrendű parciális derivált. Az

$$f''(a) := (\partial_{ij} f(a))_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \dots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \dots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \dots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrixot az f függvény a -beli *másodrendű deriváltmátrixának* nevezzük. A későbbiekben tárgyalandó Young-tétel miatt ez egy szimmetrikus mátrix.

4.2 Többváltozós-valós függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, továbbá egy alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel minden $x \in K(a)$ pontban az f függvény s -szer differenciálható: $f \in D^s\{x\}$. Belátható, hogy ekkor a $K(a)$ pontjaiban az f összes s -edrendű parciális deriváltja létezik. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a -ban $(s+1)$ -szer differenciálható, ha minden s -edrendű parciális deriváltfüggvénye differenciálható az a -ban.

4.3 Többváltozós-vektorfüggvények függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ és

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \text{int } \mathcal{D}_f,$$

ill. $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény k -szor differenciálható az a -ban, ha

$$f_j \in D^k\{a\} \quad (j = 1, \dots, m).$$

4.4 Young-tétel

Tétel. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ és $f \in D^s\{a\}$. Ekkor tetszőleges $k_1, \dots, k_s \in \{1, \dots, n\}$ indexek esetén ezek bármely j_1, \dots, j_s permutációjára

$$\partial_{k_1 \dots k_s} f(a) = \partial_{j_1 \dots j_s} f(a).$$

Bizonyítás. Az s -szerinti teljes indukcióra gondolva elegendő az $s = 2$ esettel foglalkoznunk. Ekkor tehát azt kell belátnunk, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Világos, hogy csak az $i \neq j$ eset az "érdekes". Ezen túl (könnyen meggondolhatóan) azt is feltehetjük, hogy $n = 2$. Más szóval az

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényekre

$$a = (a_1, a_2) \in \text{int } \mathcal{D}_f, f \in D^2\{a\},$$

és ennek alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a).$$

Legyen ehhez $r > 0$ olyan, amellyel $(\mathbb{R}^n$ -ben a $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ normát választva)

$$K(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\} \subset \mathcal{D}_f,$$

és vezessük be az alábbi jelölést: az $u, v \in (-r, r)$ helyeken

$$\Delta(u, v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + v).$$

Ha rögzítjük a $v \in (-r, r)$ számot, akkor a

$$\varphi(u) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) \quad (u \in (-r, r))$$

függvénnyel

$$\Delta(u, v) = \varphi(u) - \varphi(0) \quad (u \in (-r, r)).$$

Az $f \in D^2\{a\}$ feltétel miatt az előbbi $K_r(a)$ környezettől azt is megkövetelhetjük, hogy egyrészt minden $x \in K_r(a)$ helyen $f \in D\{x\}$ (így egyúttal léteznek az $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ parciális deriváltak is), másrészt

$$\partial_1 f, \partial_2 f \in D\{a\}.$$

Következésképpen a most definiált

$$\varphi : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, ezért a Lagrange-középérték-tétel alapján

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot u \quad (u \in (-r, r)),$$

ahol $\xi \in (0, u)$ (vagy $\xi \in (u, 0)$). A parciális deriváltak definíciójára gondolva

$$\varphi'(u) = \partial_1 f(a_1 + u, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + u, a_2) \quad (u \in (-r, r)),$$

így

$$\varphi(u) - \varphi(0) = (\partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2)) \cdot u \quad (u \in (-1, r)).$$

A $\partial_1 f \in D\{a\}$ differenciálhatósági feltételből

$$\text{grad } \partial_1 f(a) = (\partial_{11} f(a), \partial_{12} f(a)),$$

és egy alkalmas

$$\eta \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \eta(z) \rightarrow 0 \quad (||z|| \rightarrow 0)$$

függvénnyel

$$\begin{aligned} & \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2) = \\ & \partial_1 f(a_1 + \xi, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1, a_2) - (\partial_1 f(a_1 + \xi, a_2) - \partial_1 f(a_1, a_2)) = \\ & \langle \text{grad } \partial_1 f(a), (\xi, v) \rangle + \eta(\xi, v) \cdot ||(\xi, v)|| - \langle \text{grad } \partial_1 f(a), (\xi, 0) \rangle - \eta(\xi, 0) \cdot ||(\xi, 0)|| = \\ & \partial_{12} f(a) \cdot v + \eta(\xi, v) \cdot ||(\xi, v)|| - \eta(\xi, 0) \cdot |\xi|. \end{aligned}$$

Speciálisan a $0 \neq u = v \in (-r, r)$ választással

$$\Delta(u, u) = \varphi(u) - \varphi(0) = \partial_{12} f(a) \cdot u^2 + \eta(\xi, u) \cdot ||(\xi, u)|| \cdot u - \eta(\xi, 0) \cdot |\xi| \cdot u,$$

amiből

$$\frac{\Delta(u, u)}{u^2} = \partial_{12}f(a) + \eta(\xi, u) \cdot \frac{||(\xi, u)||}{u} - \eta(\xi, 0) \cdot \frac{|\xi|}{u}$$

következik. Ezért $|\xi| < |u|$ alapján

$$\left| \frac{\Delta(u, u)}{u^2} - \partial_{12}f(a) \right| \leq |\eta(\xi, u)| + |\eta(\xi, 0)| \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0),$$

hiszen

$$||(\xi, u)||, ||(\xi, 0)|| \leq |u| \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0).$$

Azt kapjuk ezzel, hogy

$$\partial_{12}f(a) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Delta(u, u)}{u^2}. \quad (\star)$$

Legyen most rögzített $u \in (-r, r)$ mellett

$$\psi(v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1, a_2 + v) \quad (v \in (-r, r)).$$

Ekkor

$$\Delta(u, v) = \psi(v) - \psi(0) \quad (v \in (-r, r))$$

és az előbbiekkal analóg módon az adódik, hogy

$$\partial_{21}f(a) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Delta(v, v)}{v^2}.$$

Itt a jobb oldali limesz ugyanaz, mint a (\star) -ban. Így $\partial_{21}f(a) = \partial_{12}f(a)$. ■