Analízis alkalmazásai

1. gyakorlat

Szabó Krisztián

Tartalom

1 Emlékeztető

1.1 Paraméteres integrál

Valamilyen kompakt $[a, b]$ intervallum ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) és $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ ($1 \leq n \in \mathbb{N}$) nyílt halmaz esetén tekintsük az

$$f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvényt. Ha $x \in U$, akkor legyen $f_x : [a, b] \to \mathbb{R}$ az a függvény, amire

$$f_x(t) := f(x, t) \quad (t \in [a, b]).$$

Tegyük fel, hogy minden $x \in U$ esetén az f_x függvény Riemann-integrálható: $f_x \in R[a, b]$, legyen ekkor

$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\, dt := \int_a^b f_x \quad (x \in U).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy adott az $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) kompakt intervallum, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, és $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Ekkor tetszőleges folytonos

$$f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvény esetén az

$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\, dt \quad (x \in U)$$

paraméteres integrálra az alábbiak igazak:

1. az F függvény folytonos;
2. ha valamilyen $i = 1, \ldots, n$ indexre létezik és folytonos a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény, akkor létezik a $\partial_i F$ parciális deriváltfüggvény is, és

$$\partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x, t)\, dt \quad (x \in U);$$

3. amennyiben az f folytonosan differenciálható, azaz $f \in C^1$, akkor $F \in C^1$.

Bizonyítás. Az F függvény valamely $x \in U$ pontbeli folytonosságához az

$$F(x) - F(y) = \int_a^b \Big(f(x, t) - f(y, t)\Big) \quad (y \in U)$$

különbséget, azaz az

$$f(x, t) - f(y, t) \quad (t \in [a, b])$$

megváltozoást kell "kezelni". Legyen ehhez tehát adotot az $x \in U$ vektor, ekkor az U halmaz nyíltsága miatt egy alkalmas $r > 0$ számmal

$$G_r := \{y \in U : ||x - y|| \le r\} \subset U.$$

A G_r halmaz könnyen láthatóan zárt, ezért az

$$A := G_r \times [a,\, b]\, (\subset U \times [a,\, b] = \mathcal{D}_f)$$

halmaz is zárt. Mivel az A nyilván korlátos is, így kompakt. A Heine-tétel alapján az $f_{|A}$ leszűkítés egyenletesen folytonos, tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(\xi) - f(\zeta)| < \varepsilon \quad (\xi,\, \zeta \in A,\, ||\xi - \zeta|| < \delta).$$