

Analízis alkalmazásai vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1	Vizsgakérdés	4
1.1	Implicitfüggvény-tétel	6
1.2	Inverzfüggvény-tétel	6
1.3	Hiperkoordinátás parciális deriváltak	7
2	Vizsgakérdés	9
2.1	Elsőrendű szükséges feltétel	10
2.2	Másodrendű elégséges feltétel	13
2.3	Másodrendű szükséges feltétel	14
3	Vizsgakérdés	15
3.1	Közönséges differenciálegyenletek	15
3.2	Teljes megoldás	16
3.3	Szeparábilis differenciálegyenlet	16
3.4	Rakéta emelkedési ideje	20
3.5	Egzakt differenciálegyenlet	21
3.6	Multiplikátor módszer	23
4	Vizsgakérdés	25
4.1	Lineáris differenciálegyenlet	25
4.2	Radioaktív bomlás	29
5	Vizsgakérdés	31
5.1	Lipschitz-feltétel	31
5.2	Egzisztenciátétel	32

6	Vizsgakérdés	36
6.1	Lineáris differenciálegyenlet-rendszer	36
6.2	Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptétele	37
7	Vizsgakérdés	42
7.1	Alaprendszer, alapmátrix	42
7.2	Állandók variálásának módszere	42
7.3	Állandó együtthatós diagonalizálható eset	43
7.4	Tetszőleges állandó együtthatós mátrix	45
7.5	Valós értékű megoldások	46
8	Vizsgakérdés	48
8.1	Új feladat megfogalmazása	48
8.2	Átviteli elv	50
8.3	Állandók variálásának módszere	51
9	Vizsgakérdés	54
9.1	Alaprendszer	56
9.2	Valós értékű megoldások	57
10	Vizsgakérdés	58
10.1	Kvázipolinomok	58
10.2	Kvázopolinom jobb oldal	59
10.3	Rezgések	61
11	Vizsgakérdés	64
11.1	Függvénysorozatok, függvénysorok	64
11.2	Konvergenca, határfüggvény	65
11.3	Trigonometrikus sorok, Fourier-sorok	67
11.4	Egyenletes konvergenca	70
11.5	Weierstrass-kritérium	72
12	Vizsgakérdés	73
12.1	Folytonosság és a határátmenet	76
12.2	Riemann-integrálhatóság és a határátmenet	77
13	Vizsgakérdés	80
13.1	Differenciálhatóság és a határátmenet	80

14 Vizsgakérdés	84
14.1 Trigonometrikus rendszer	84
14.2 Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok	85
14.3 Bessel - Parseval	87
15 Vizsgakérdés	89
15.1 Teljesség	89
16 Vizsgakérdés	94
16.1 Függöny függvény Fourier-sora	95
17 Vizsgakérdés	97
17.1 A $\sum (\sin(nx)/n)$ trigonometrikus sor	97
17.2 Rezgő húr	98

1 Vizsgakérdés

Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).

Legyenek $n, m \in \mathbf{N}$ természetes számok, $1 \leq m < n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

akkor az f -et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a -nak egy olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a b -nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x, y) = 0.$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1, \dots, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1, \dots, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

A $\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$ implicitfüggvényre a következő igaz:

$$(K(a) \times K(b)) \cap \{f = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}.$$

Geometria szóhasználatával élve

$$\text{graf } \varphi := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}$$

(a φ függvény "grafikonja", ami a függvény definíciója miatt persze maga a φ függvény), tehát az előbbi egyenlőség így néz ki:

$$(K(a) \times K(b)) \cap \{f = 0\} = \text{graf } \varphi = \varphi.$$

1.1 Implicitfüggvény-tétel

Tétel. Adott $n, m \in \mathbf{N}$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

A tételben $f \in C^1$, $\partial_2 f(a, b) \neq 0$ feltételekből következően a $K(a)$, $K(b)$ környezetekről az is feltehető, hogy

$$\det \partial_2 f(x, y) \neq 0 \quad (x \in K(a), y \in K(b)),$$

egyúttal

$$\det \partial_2 f(x, \varphi(x)) \neq 0 \quad (x \in K(a)).$$

Ezért az $x \in K(a)$ helyeken a $\partial_2 f(x, \varphi(x))$ mátrix valóban invertálható.

1.2 Inverzfüggvény-tétel

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h|_I)^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h|_I)^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többváltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény és az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a -ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f|_{K(a)}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a -beli *lokális inverzének* nevezzük.

Tétel. Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, és $f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Tegyük fel, hogy egy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel az $f|_{K(a)}$ leszűkítés invertálható, a $h := (f|_{K(a)})^{-1}$ lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = (f'(h(x)))^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

1.3 Hiperkoordinátás parciális deriváltak

Legyen adott $n, m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n \in \mathbf{N}$ mellett

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m.$$

Az előbbieket alapján most adott $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k < n$ esetén legyen $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-k} \times \mathbf{R}^k$. Ha $\xi \in \mathcal{D}_f$, akkor legyen $(a, b) = \xi$, ahogy eddig. Azaz f -et fel lehet fogni egy kétváltozós függvénynek. Tekintsük az alábbi definíciót:

$$\mathcal{D}_1^{(a,b)} := \{x \in \mathbf{R}^{n-k} : (x, b) \in \mathcal{D}_f\},$$

$$\mathcal{D}_2^{(a,b)} := \{y \in \mathbf{R}^k : (a, y) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Ekkor analóg módon a *szokásos* parciális deriváltakhoz

$$f_{(a,b),1} \in \mathbf{R}^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

$$f_{(a,b),2} \in \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

ahol

$$f_{(a,b),1}(x) := f(x, b) \quad (x \in \mathcal{D}_1^{(a,b)}),$$

$$f_{(a,b),2}(y) := f(a, y) \quad (y \in \mathcal{D}_2^{(a,b)}).$$

Ebben az esetben a *hiperkoordinátás* alakja a parciális deriváltaknak (amennyiben értelmes a derivált):

$$\partial_1 f(a, b) := \partial_1 f(a, b) := f'_{(a,b),1}(a),$$

$$\partial_2 f(a, b) := \partial_2 f(a, b) := f'_{(a,b),2}(b).$$

Azaz egy (a, b) helyen lerögzítjük az első vagy második változók és az így kapott függvénynek vesszük a deriváltját. Ha f egy differenciálható függvény az $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ helyen, akkor

$$f'(a, b) = [\partial_1 f(a, b) \quad \partial_2 f(a, b)] = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a, b) & \partial_2 f_1(a, b) & \cdots & \partial_n f_1(a, b) \\ \partial_1 f_2(a, b) & \partial_2 f_2(a, b) & \cdots & \partial_n f_2(a, b) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a, b) & \partial_2 f_n(a, b) & \cdots & \partial_n f_n(a, b) \end{bmatrix},$$

ahol a $\partial_1 f(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times (n-k)}$, $\partial_2 f(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times k}$ mátrixok rendre az $f'(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mátrix első $n - k$ -edik és utolsó k -edik oszlopvektorai. Pl. legyen $f \in \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ -ben differenciálható függvény, $k := 2$. Ekkor

$$f \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$$

és

$$f'(a, b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a, b) & \partial_2 f_1(a, b) & \partial_3 f_1(a, b) \\ \partial_1 f_2(a, b) & \partial_2 f_2(a, b) & \partial_3 f_2(a, b) \\ \partial_1 f_3(a, b) & \partial_2 f_3(a, b) & \partial_3 f_3(a, b) \\ \partial_1 f_4(a, b) & \partial_2 f_4(a, b) & \partial_3 f_4(a, b) \end{bmatrix},$$

$$\partial_1 f(a, b) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a, b) \\ \partial_1 f_2(a, b) \\ \partial_1 f_3(a, b) \\ \partial_1 f_4(a, b) \end{bmatrix}, \partial_2 f(a, b) = \begin{bmatrix} \partial_2 f_1(a, b) & \partial_3 f_1(a, b) \\ \partial_2 f_2(a, b) & \partial_3 f_2(a, b) \\ \partial_2 f_3(a, b) & \partial_3 f_3(a, b) \\ \partial_2 f_4(a, b) & \partial_3 f_4(a, b) \end{bmatrix}.$$

2 Vizsgakérdés

Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).

Legyen $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, és

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}, g = (g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan *feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a c -ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az $f(c)$ -re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá c -re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az f -nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre nézve, akkor egy alkalmas $K(c)$ környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \quad (\xi \in \{g = 0\} \cap K(c))$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \quad (\xi \in \{g = 0\} \cap K(c))$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

2.1 Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n$, $m \in \mathbf{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f -nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m -mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, hogy

$$\text{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő λg függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó f függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is.

Bizonyítás. A rangfeltétel szerint a $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrixnak van olyan $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ részmátrixa, amelyre $\det A \neq 0$. Feltehető, hogy az A -t a $g'(c)$ mátrix utolsó m oszlopa határozza meg, amikor is az $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ felbontást úgy képzeljük el, hogy a

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x, y) \in \mathbf{R}^n$$

vektorokra

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően $c = (a, b)$. Ekkor tehát

$$\det \partial_2 g(a, b) = \det A \neq 0.$$

Mivel $g(a, b) = 0$, ezért alkalmazható az implicitfüggvény tétel: alkalmas

$$K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}, K(b) \subset \mathbf{R}^m$$

környezettel létezik a g függvény által az (a, b) körül meghatározott

$$h : K(a) \rightarrow K(b)$$

$h \in C^1$ implicitfüggvény:

$$(K(a) \times K(b)) \cap \{g = 0\} = \{(x, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -(\partial_2 g(x, h(x)))^{-1} \cdot \partial_1 g(x, h(x)) \quad (x \in K(a)).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas $K(c) \subset U$ környezettel (pl.)

$$f(\xi) \leq f(c) \quad (\xi = (x, y) \in K(c) \cap \{g = 0\}).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x, h(x)) \quad (x \in K(a))$$

függvényre $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \rightarrow \mathbf{R}$ és

$$\Phi(x) \leq f(c) = \Phi(a) \quad (x \in K(a)).$$

Más szóval a Φ függvénynek az a -ban lokális maximuma van. A Φ differenciálható, ezért

$$\Phi'(a) = \text{grad } \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x, h(x)) \quad (x \in K(a))$$

függvénnyel $\Phi = f \circ \varphi$ és $\varphi \in D$, valamint I -vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ -beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times (n-m)} \quad (x \in K(a)).$$

Következésképpen

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = f'(a, h(a)) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$f'(c) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = \partial_1 f(c) + \partial_2 f(c) \cdot h'(a) =$$

$$\partial_1 f(c) - \partial_2 f(c) \cdot (\partial_2 f(c))^{-1} \cdot \partial_1 g(c) = \partial_1 f(c) + \lambda \cdot \partial_1 g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_2 f(c) \cdot (\partial_2 g(c))^{-1} \in \mathbf{R}^m.$$

Tehát (a ∂_1 értelmezéséből)

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-m). \quad (1)$$

A λ vektor definíciójából "átszorzással" azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 f(c) + \lambda \cdot \partial_2 g(c) = 0,$$

azaz (a ∂_2 definíciójából)

$$\partial_j f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_j g_l(c) = 0 \quad (j = n-m+1, \dots, n). \quad (2)$$

A (1), (2) formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

más szóval

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + \lambda g)(c) &= 0 = \\ \left(\partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_1 g_l(c), \dots, \partial_n f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_n g_l(c) \right) &= 0. \end{aligned}$$

■

A fentiekben az $m < n$ feltételezéssel éltünk. Ha $m = n$, akkor pl. az $g'(c) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, és a rang $g'(c) = m = n$ rangfeltétel jelentése az, hogy a

$$g'(c) = \begin{bmatrix} \text{grad } g_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad } g_n(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

Jacobi-mátrix invertálható. Tehát a $\text{grad } g_k(a) \in \mathbf{R}^n$ ($k = 1, \dots, n$) vektorok lineárisan függetlenek, más szóval bázist alkotnak az \mathbf{R}^n -ben. Így (egyértelműen) léteznek olyan $\lambda_j \in \mathbf{R}$ ($j = 1, \dots, n$) számok, amelyekkel

$$-\text{grad } f(c) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{grad } g_j(c),$$

azaz a $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vektorral $\text{grad}(f + \lambda g)(c) = 0$. Röviden: ekkor is igaz a tétel, de az állítása triviális.

Legyen adott a

$$Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

kvadratikus alak, a $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbf{R}^n : Bx = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m < n$, és a B mátrix rangja m . Ekkor azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus alak a B -re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x) > 0$ ($0 \neq x \in \mathcal{A}_B$);
2. *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x) < 0$ ($0 \neq x \in \mathcal{A}_B$);
3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0$ ($x \in \mathcal{A}_B$);
4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0$ ($x \in \mathcal{A}_B$).

2.2 Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $n, m \in \mathbf{N}, 1 \leq m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \rightarrow \mathbf{R}, g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2, c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja m , továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre

1. $\text{grad } F(c) = 0$;
2. A Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f -nek a c -ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Idézzük fel, hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x, x \rangle \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

2.3 Másodrendű szükséges feltétel

Tétel. Az $n, m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$, $f, g \in D^2$ függvények. Tegyük fel, hogy valamilyen $c \in \{g = 0\}$ helyen f -nek lokális minimuma (maximuma) van a $\{g = 0\}$ feltételre vonatkozóan, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m -mel. Ekkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$, hogy az $F := f + \lambda g$ függvényre az alábbiak teljesülnek:

1. $\text{grad } F(c) = 0$;
2. a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) **szemidefinit**.

3 Vizsgakérdés

A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.

3.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1. \mathcal{D}_φ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban mindegyre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik φ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő f függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala*.

3.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* egyértelműen oldható meg, ha tetszőleges φ, ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ egy $(\tau$ -t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor \mathcal{M} a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy τ -t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \rightarrow \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi|_{\mathcal{D}_\varphi}$.

A Φ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

3.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \rightarrow \mathbf{R}, h : J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x, y) \in I \times J).$$

A $\varphi \in I \rightarrow J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

Tétel. Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ is, és az $1/h : J \rightarrow \mathbf{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}, H : J \rightarrow \mathbf{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a \mathcal{D}_φ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen a H

függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek \tilde{G}, \tilde{H}), akkor alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha, \quad \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy τ -t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az F függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az F -re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I, K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a (τ, ξ) körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \rightarrow K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t, \varphi(t))}{\partial_2 F(t, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

3.4 Rakéta emelkedési ideje

Egy m tömegű rakétát v_0 kezdősebességgel függőlegesen fellövünk (függőleges hajítás). Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő (jelöljük α -val a nehézségi gyorsulást) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen β). Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

Ha $v \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor – feltételezve, hogy $v \in D$, \mathcal{D}_v intervallum és $0 \in \mathcal{D}_v$ – a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika Newton-féle mozgástörvényeit): adott m, α, β pozitív számok mellett olyan differenciálható v függvényt keresünk, amelyre

$$mv'(t) = -m\alpha - \beta v^2(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Világos, hogy $v(0) = v_0$. Azt a $T \in \mathcal{D}_v$ "pillanatot" kell meghatározni, amikor $v(T) = 0$.

$$I := J := \mathbf{R}, g(x) := -\alpha, h(y) := 1 + \frac{\beta y^2}{m\alpha} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

választással egy szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Legyen $\tau := 0$, $\xi := v_0$, ekkor a

$$G(x) := \int_0^x -\alpha dt = -\alpha x \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$H(y) := \int_{v_0}^y \frac{1}{1 + \frac{\beta t^2}{m\alpha}} dt =$$

$$\sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot y - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (y \in \mathbf{R})$$

függvények eleget tesznek az előbbi tétel bizonyításában mondottaknak. Következésképpen

$$H(v(t)) = G(t) \quad (t \in \mathcal{D}_v),$$

azaz

$$\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t) \right) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0 \right) \quad (t \in \mathcal{D}_v).$$

A $v(T) = 0$ egyenlőségből a $t := T$ helyettesítéssel – figyelembe véve, hogy $\arctg(0) = 0$ – az adódik, hogy

$$T = \sqrt{\frac{m}{\beta\alpha}} \cdot \arctg\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right).$$

3.5 Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen $n := 1$, és az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \text{ és } h : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad ((x, y) \in I \times J).$$

Ekkor a fenti minden φ megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott d.e. *egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y)) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$\text{grad } G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g, h).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a φ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

Tétel. Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Valóban, $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt a feltételezett φ megoldásra

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \langle \text{grad } G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle =$$

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ halmaz nyílt intervallum, ezért az F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(\tau) = \xi$, ezért

$$c = G(\tau, \xi).$$

A G -ről feltehetjük, hogy $G(\tau, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó k.é.p. φ megoldása eleget tesz a

$$G(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó k.é.p. minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletből határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau, \xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau, \xi) = h(\tau, \xi) \neq 0,$$

ezért a G -re (a (τ, ξ) helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \rightarrow J$$

(implicit)függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi, G(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi), \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x, \psi(x))}{\partial_2 G(x, \psi(x))} = -\frac{g(x, \psi(x))}{h(x, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

3.6 Multiplikátor módszer

Az egzakt differenciálegyenlet definíciójában szereplő $\text{grad } G = (g, h)$ feltételből a

$$\partial_1 G = g, \partial_2 G = h$$

egyenlőségek következnek. Ha $g, h \in D$, akkor $G \in D^2$, így a Young-tétel miatt

$$\partial_{12} G = \partial_2 g = \partial_{21} G = \partial_1 h,$$

azaz ekkor a

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel teljesülése szükséges az "egzaktsághoz".

Azonban, ha $g, h \in D$, de ez előző

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel nem teljesül, akkor esetenként alkalmas ekvivalens átalakításokkal a feladat "egzakt alakra hozható". Ezek közül az átalakítások közül az ún. *multiplikátor módszer* a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy a

$$\mu : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

differenciálható függvény (pl.) minden helyen pozitív. Ekkor a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség nyilván ekvivalens a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x)) \cdot \mu(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x)) \cdot \mu(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel, azaz a g , h függvények "kicserélhetők" a $g\mu$, $h\mu$ függvényekre. Ekkor az egzaktságnak az előző megjegyzésben megfogalmazott szükséges feltételéhez a

$$\partial_2(g\mu) = g \cdot \partial_2\mu + \mu \cdot \partial_2g = \partial_1(h\mu) = h \cdot \partial_1\mu + \mu \cdot \partial_1h$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük.

4 Vizsgakérdés

*Lineáris differenciálegyenlet. Az állandók variálásának módszere.
A radioaktív bomlás felezési idejének meghatározása.*

4.1 Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most $n := 1$ és az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a

$$g, h : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$ mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot (\theta(t) - \psi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben $h \equiv 0$:

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

Tétel. Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Legyen a

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és $G' = g$ (a g -re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\chi}{\varphi_0} \right)'(t) &= \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} = \\ &= \frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0, \end{aligned}$$

azaz (lévén a \mathcal{D}_χ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény, hogy az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (az *állandók variálásának módszere*). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az m -re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármelyik m primitív függvényét is véve, az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a

lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \rightarrow \mathbf{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol m egy tetszőleges primitív függvénye a h/φ_0 függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbf{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ez megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) = \\ &= \frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J). \end{aligned}$$

Speciálisan az "egész" I intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbf{R}, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik φ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c|_J}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden φ , ψ megoldására $\varphi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\varphi}}$ és $\psi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\psi}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

A tétel bizonyításából a következők is kiderültek: legyen

$$\mathcal{M} := \{\varphi : I \rightarrow \mathbf{R} : \varphi \in D, \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in I)\},$$

$$\mathcal{M}_h := \{\varphi : I \rightarrow \mathbf{R} : \varphi \in D, \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in I)\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{M}_h = \{c \cdot \varphi_0 : c \in \mathbf{R}\}$$

(azaz algebrai nyelven mondva az \mathcal{M}_h egy 1 dimenziós vektortér), és

$$\mathcal{M} = m \cdot \varphi_0 + \mathcal{M}_h := \{\varphi + m \cdot \varphi_0 : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

Itt $m \cdot \varphi_0$ helyébe bármelyik $\psi \in \mathcal{M}$ (ún. *partikuláris megoldás*) írható, így

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h = \{\varphi + \psi : \varphi \in \mathcal{M}_h\}.$$

4.2 Radioaktív bomlás

Radioaktív anyag bomlik, a bomlási sebesség egyenesen arányos a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. A bomlás kezdetétől számítva mennyi idő alatt bomlik el az anyag fele?

Legyen m_0 az anyag eredeti, $\varphi(t)$ pedig a t ($t \in \mathbf{R}$) időpontban még el nem bomlott anyag mennyisége. A feladatban szereplő arányossági tényező $0 < \alpha \in \mathbf{R}$. Ekkor

$$\varphi'(t) = -\alpha\varphi(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol $\varphi(0) = m_0$. A T (felezési időt) keressük, amikor is $\varphi(T) = m_0/2$.

Ez egy homogén lineáris differenciálegyenlet, ahol $g \equiv -\alpha$. Ezért (pl.)

$$G(t) = -\alpha t \quad (t \in I).$$

valamint

$$\varphi_0(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \in I),$$

ill.

$$\varphi(t) = ce^{-\alpha t} \quad (t \in I, c \in \mathbf{R}).$$

Mivel

$$m_0 = \varphi(0) = c,$$

ezért

$$\varphi(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (t \in I).$$

A T definíciója alapján

$$\varphi(T) = m_0 e^{-\alpha T} = \frac{m_0}{2},$$

azaz $e^{-\alpha T} = 1/2$. Innen

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

5 Vizsgakérdés

Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása). A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel (bizonyítás nélkül).

5.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. \mathcal{D}_φ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;
4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciátétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett az $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt. Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

5.2 Egzisztenciátétel

Tétel (Picard-Lindelöf). Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.

Bizonyítás (vázlat). Legyenek a $\delta_1, \delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow \Omega : \psi \in C\}.$$

Az \mathcal{F} halmaz a

$$\rho(\phi, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha \mathcal{X} jelöli a

$$g : I_* \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t)) dt \in \mathbf{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F}, x \in I_*).$$

Tehát az f függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" f_1, \dots, f_n szimbólumokkal jelölve, a ψ, f függvények (és egyúttal az f_i -k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t, \psi(t)) \in \mathbf{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények folytonosak. Következésképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t, \psi(t)) dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

integráloknak, és így a

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt := (\xi_1 + d_1, \dots, \xi_n + d_n) \in \mathbf{R}^n$$

”integrálvektoroknak”. Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_{\mu} := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - \xi\|_{\infty} \leq \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x, y)\|_{\infty} : x \in I_*, y \in K_{\mu}\}$$

(ami meg az f folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_{\mu}$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max \left\{ \left| \int_{\tau}^x f_i(t, \psi(t)) dt \right| : i = 1, \dots, n \right\} \leq \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az \mathcal{F} definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow K_{\mu} : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$ -val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \leq \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is \mathcal{F} -beli. (Ha a kiindulásul választott δ_1, δ_2 -re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a δ_1, δ_2 helyébe olyan ”új” $0 < \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ -t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2]$$

és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I}_* := [\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2]$ intervallummal az "új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\begin{aligned} \rho(T\psi, T\phi) &= \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} = \\ \max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))) dt\right| : i = 1, \dots, n\right\} : x \in I_*\right\} &\leq \\ \max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))| : i = 1, \dots, n\} dt\right| : x \in I_*\right\} &= \\ \max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty dt\right| : x \in I_*\right\}. \end{aligned}$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q),$$

speciálisan

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty &\leq \\ L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty &\leq L_Q \cdot \rho(\psi, \phi) \quad (t \in I_*). \end{aligned}$$

Ezért

$$\rho(T\psi, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi, \phi).$$

Tehát a T leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2 -t, (ezt - az "eddig" I_* -ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre

$$T\psi = \psi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_{\tau}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A fenti Picard-Lindelöf-egzisztenciátételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja.

Tétel. Az előző tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg, azaz bármely φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_{\varphi} \cap \mathcal{D}_{\psi}).$$

Legyen az $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ jobb oldal olyan, hogy $\Omega := \mathbf{R}^n$, és (az előző tétel feltételein kívül) valamilyen α, β pozitív együtthatókkal

$$\|f(x, y)\|_{\infty} \leq \alpha \cdot \|y\|_{\infty} + \beta \quad (x \in I, y \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor belátható, hogy az f által meghatározott differenciálegyenletre vonatkozó bármelyik k.é.p. teljes megoldása az I -n van értelmezve.

6 Vizsgakérdés

A lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata: homogén, inhomogén rendszerek. A megoldáshalmaz szerkezete.

6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és egy nyílt $I \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad b = (b_1, \dots, b_n) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

mátrixfüggvényt. Ha

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

akkor az f függvény, mint jobb oldal által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ($n > 1$ esetén *lineáris differenciálegyenlet-rendszernek*) nevezzük.

Legyenek a fentiekén túl adottak még a $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{K}^n$ értékek, és vizsgáljuk a $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p.-t. Ha $I_* \subset I$, $\tau \in \text{int } I_*$, kompakt intervallum, akkor

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} \in \mathbf{R} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} \in \mathbf{R}.$$

Következésképpen

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_\infty = \|A(x) \cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y - z\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (x \in I_*, y, z \in \mathbf{K}^n).$$

Továbbá a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\in \mathbf{R})$$

jelöléssel

$$\|f(x, y)\|_\infty = \|A(x) \cdot y + b(x)\|_\infty \leq \|A(x) \cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq q \cdot \|y\|_\infty + \beta \quad (x \in I_*, y \in \mathbf{K}^n),$$

ezért minden k.é.p. teljes megoldása az I intervallumon van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a szóban forgó d.e. *homogén*, ha $b \equiv 0$, *inhomogén*, ha létezik $x \in I$, hogy $b(x) \neq 0$. Legyenek

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \rightarrow \mathbf{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \rightarrow \mathbf{K}^n : \psi \in D, \psi' = A \cdot \psi + b\}.$$

6.2 Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptétele

Tétel. A bevezetésben mondott feltételek mellett

1. az \mathcal{M}_h halmaz n dimenziós lineáris tér a \mathbf{K} -ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\psi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a $\phi_k = (\phi_{k1}, \dots, \phi_{kn})$ ($k = 1, \dots, n$) függvények bázist alkotnak az \mathcal{M}_h -ban, akkor léteznek olyan $g_k : I \rightarrow \mathbf{K}$ ($k = 1, \dots, n$) differenciálható függvények, amelyekkel

$$\psi := \sum_{k=1}^n g_k \cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyítás. Az 1. állítás bizonyításához mutassuk meg először is azt, hogy bármilyen $\psi, \varphi \in \mathcal{M}_h$ és $c \in \mathbf{K}$ esetén $\psi + c \cdot \varphi \in \mathcal{M}_h$:

$$(\psi + c \cdot \varphi)' = \psi' + c \cdot \varphi' = A \cdot \psi + c \cdot A \cdot \varphi = A(\psi + c \cdot \varphi),$$

amiből a mondott állítás az \mathcal{M}_h definíciója alapján nyilvánvaló. Tehát az \mathcal{M}_h lineáris tér a \mathbf{K} felett.

Most megmutatjuk, hogy ha $m \in \mathbf{N}$, és $\chi_1, \dots, \chi_m \in \mathcal{M}_h$, tetszőleges függvények, akkor az alábbi ekvivalencia igaz:

a χ_1, \dots, χ_m függvények akkor és csak akkor alkotnak lineárisan független rendszert az \mathcal{M}_h vektortérben, ha bármilyen $\tau \in I$ esetén a $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek a \mathbf{K}^n -ben.

Az ekvivalencia egyik fele nyilvánvaló: ha a χ_1, \dots, χ_m -ek lineárisan összefüggnek, akkor alkalmas $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{K}$, $|c_1| + \dots + |c_m| > 0$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k \equiv 0.$$

Speciálisan minden $\tau \in I$ helyen is

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0 \quad (\in \mathbf{K}^n).$$

Így a $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggő rendszert alkotnak a \mathbf{K}^n -ben.

Fordítva, legyen $\tau \in I$, és tegyük fel, hogy a $\chi_1(\tau), \dots, \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggnek. Ekkor az előbbi (nem csupa nulla) $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{K}$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0.$$

Már tudjuk, hogy

$$\phi := \sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_k \in \mathcal{M}_h,$$

ezért az így definiált $\phi : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ függvény megoldása a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \varphi(\tau) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának. Világos ugyanakkor, hogy a $\Psi \equiv 0$ is a most mondott k.é.p. megoldása az

I -n. Azt is tudjuk azonban, hogy (ld. fent) ez a k.é.p. (is) egyértelműen oldható meg, ezért $\phi \equiv \Psi \equiv 0$. Tehát a χ_1, \dots, χ_m függvények is összefüggnek.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy az \mathcal{M}_h vektortér véges dimenziós és a $\dim \mathcal{M}_h$ dimenziója legfeljebb n .

Tekintsük most a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \varphi(\tau) = e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

kezdetiérték-problémákat, ahol az $e_i \in \mathbf{K}^n$ ($i = 1, \dots, n$) vektorok a \mathbf{K}^n tér "szokásos" (kanonikus) bázisvektorait jelölik. Ha

$$\chi_i : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

jelöli az említett k.é.p. teljes megoldását, akkor a

$$\chi_i(\tau) = e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Így az előbbiek alapján a χ_1, \dots, χ_n függvények is azok. Tehát az \mathcal{M}_h dimenziója legalább n , azaz a fentiekre tekintettel $\dim \mathcal{M}_h = n$.

A 2. állítás igazolásához legyen $\chi \in \mathcal{M}_h$. Ekkor $\psi + \chi \in D$, és

$$(\psi + \chi)' = \psi' + \chi' = A \cdot \psi + b + A \cdot \chi = A \cdot (\psi + \chi) + b,$$

amiből $\psi + \chi \in \mathcal{M}$ következik. Ha most egy $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényből indulunk ki és $\chi := \varphi - \psi$, akkor $\chi \in D$, és

$$\chi' = \varphi' - \psi' = A \cdot \varphi + b - (A \cdot \psi + b) = A \cdot (\varphi - \psi) = A \cdot \chi,$$

amiből $\chi \in \mathcal{M}_h$ adódik. Tehát $\varphi = \psi + \chi$ a 2.-ben mondott előállítás a φ függvénynek.

A tétel 3. részének a bizonyítása érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket, ill. fogalmakat. A

$$\phi_k = (\phi_{k1}, \dots, \phi_{kn}) \quad (k = 1, \dots, n)$$

bázisfüggvények mint oszlopvektor-függvények segítségével tekintsük a

$$\Phi : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvényt:

$$\Phi := [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\Phi' := [\phi'_1 \quad \cdots \quad \phi'_n] = \begin{bmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{21} & \cdots & \phi'_{n1} \\ \phi'_{12} & \phi'_{22} & \cdots & \phi'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi'_{1n} & \phi'_{2n} & \cdots & \phi'_{nn} \end{bmatrix}$$

a Φ deriváltja. Ekkor könnyen belátható, hogy

$$\Phi' = A \cdot \Phi.$$

Továbbá tetszőleges $g_1, \dots, g_n : I \rightarrow \mathbf{K}$ differenciálható függvényekkel a

$$g := (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

vektorfüggvény differenciálható,

$$\psi := \sum_{k=1}^n g_k \cdot \phi_k = \Phi \cdot g,$$

és

$$\psi' = \Phi' \cdot g + \Phi \cdot g' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g'.$$

A $\psi \in \mathcal{M}$ tartalmazás nyilván azzal ekvivalens, hogy

$$\psi' = (A \cdot \Phi) \cdot g + \Phi \cdot g' = A \cdot \psi + b = A \cdot (\Phi \cdot g) + b = (A \cdot \Phi) \cdot g + b,$$

következésképpen azzal, hogy

$$\Phi \cdot g' = b.$$

A 2. pont alapján tetszőleges $x \in I$ helyen a $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz a $\Phi(x)$ mátrix nem szinguláris. A mátrixok inverzének a kiszámítása alapján egyszerűen adódik, hogy a

$$\Phi^{-1}(x) := (\Phi(x))^{-1} \quad (x \in I)$$

definícióval értelmezett

$$\Phi^{-1} : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény komponens-függvényei is folytonosak. Ezért a

$$(h_1, \dots, h_n) := \Phi^{-1} \cdot b : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

függvény is folytonos. Olyan folytonosan differenciálható

$$g : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

függvényt keresünk tehát amelyekre $g' = \Phi^{-1} \cdot b$, azaz

$$g'_i = h_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ilyen g_i létezik, nevezetesen a (folytonos) h_i ($i = 1, \dots, n$) függvények bármelyik primitív függvénye ilyen. ■

7 Vizsgakérdés

Alaprendszer, alaplátrix. Az állandók variálásának a módszere. Alaplátrix előállítású állandó együtthatos diagonalizálható mátrix esetén. Az $n = 2$ eset vizsgálata tetszőleges, állandó együtthatos mátrixra.

7.1 Alaprendszer, alaplátrix

Az \mathcal{M}_h vektortérben minden bázist az illető egyenlet *alaprendszerének* nevezünk. Ha $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$ egy alaprendszer, akkor a

$$\Phi := [\phi_1 \ \cdots \ \phi_n] : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet (egy) ún. *aplátrixa*. Tehát

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k \cdot \phi_k : c_1, \dots, c_n \in \mathbf{K} \right\} = \{ \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n \}.$$

Az $\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h$ előállításban minden $\psi \in \mathcal{M}$ függvényt *partikuláris megoldásként* említünk.

7.2 Állandók variálásának módszere

Ld. 6.2 alcímbe tárgyalt tétel 3. pontjának bizonyítása. A partikuláris megoldás

$$\psi = \Phi \cdot g$$

alakban való előállítású (alkalmas $g : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ differenciálható függvény) az 6.2 alcímbe tárgyalt tétel bizonyításában bemutatott módszer az *állandók variálása*. Tetszőleges ϕ_1, \dots, ϕ_n alaprendszerrel és $\psi \in \mathcal{M}$ partikuláris megoldással

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi + \sum_{k=1}^n c_k \cdot \phi_k : c_1, \dots, c_n \in \mathbf{K} \right\}.$$

Ha Φ egy alaplátrix, akkor ugyanez a következőképpen írható:

$$\mathcal{M} = \{ \psi + \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n \} = \{ \Phi \cdot (g + c) : c \in \mathbf{K}^n \}.$$

7.3 Állandó együtthatós diagonalizálható eset

Legyen most

$$f(x, y) := A \cdot y + b(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n),$$

ahol $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum mellett

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbf{R}^n, b \in C.$$

Tegyük fel, hogy A diagonalizálható, azaz létezik $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$, hogy $T^{-1}AT$ mátrix diagonális: alkalmas $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ számokkal

$$\Lambda := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

T invertálhatósága miatt a

$$T = [t_1 \cdots t_n]$$

t_i ($i = 1, \dots, n$) oszlopvektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$AT = [At_1 \cdots At_n] = T\Lambda = [\lambda_1 \cdot t_1 \cdots \lambda_n \cdots t_n]$$

miatt

$$A \cdot t_i = \lambda_i \cdot t_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Mivel

$$t_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

ezért mindez röviden azt jelenti, hogy a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ számok az A mátrix sajátértékei, a t_1, \dots, t_n vektorok pedig rendre a megfelelő sajátvektorok. Lévéen, a t_i -k lineárisan függetlenek, az A -ra vonatkozó feltételünk úgy fogalmazható, hogy van a \mathbf{K}^n -ben (az A sajátvektoraiból álló) sajátvektorbázis.

A homogén egyenlet tehát a következőképpen írható fel:

$$\varphi' = A \cdot \varphi = T\Lambda T^{-1} \cdot \varphi,$$

amiből

$$(T^{-1}\varphi)' = \Lambda \cdot (T^{-1}\varphi)$$

következik. Vegyük észre, hogy ha $\varphi \in \mathcal{M}_h$, akkor a $\psi := T^{-1}\varphi$ függvény megoldása a Λ diagonális mátrix által meghatározott állandó együtthatós homogén lineáris egyenletnek. Ez utóbbit az előző tétel alapján nem nehéz megoldani. Legyenek ui. a

$$\psi_i : I \rightarrow \mathbf{K}^n \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények a következők:

$$\psi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i \quad (x \in I, i = 1, \dots, n).$$

Világos, hogy $\psi_i \in D$ és

$$\begin{aligned} \psi_i'(x) &= \lambda_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot (\Lambda \cdot e_i) = \\ \Lambda \cdot (e^{\lambda_i \cdot x} \cdot e_i) &= \Lambda \cdot \psi_i(x) \quad (x \in I, i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Más szóval a ψ_i -k valóban megoldásai a Λ által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek. Mivel bármely $\tau \in I$ esetén a

$$\psi_i(\tau) = e^{\lambda_i \cdot \tau} \cdot e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

vektorok nyilván lineárisan függetlenek, ezért az előző tétel bizonyításában mondottak szerint a ψ_i ($i = 1, \dots, n$) függvények lineárisan függetlenek. Ha

$$\phi_i := T \cdot \psi_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

akkor nyilván a ϕ_i -k is lineárisan függetlenek,

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in I, i = 1, \dots, n),$$

és minden $i = 1, \dots, n$ indexre

$$\phi_i' = A \cdot \phi_i.$$

Tehát $\phi_i \in \mathcal{M}_h$ ($i = 1, \dots, n$) egy bázis. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

Tétel. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrix diagonalizálható. Legyenek a sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, egy-egy megfelelő sajátvektora pedig $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{K}^n$. Ekkor a

$$\varphi' = A \cdot \varphi$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a

$$\phi_i(x) := e^{\lambda_i \cdot x} \cdot t_i \quad (x \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n)$$

függvények lineárisan független megoldásai.

7.4 Tetszőleges állandó együtthatós mátrix

Tekintsük az $n = 2$ esetet, amikor is valamilyen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ számokkal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a mátrix pontosan akkor nem diagonalizálható, ha

$$(a - d)^2 + 4bc = 0 \text{ és } |b| + |c| > 0.$$

Ekkor egyetlen sajátértéke van az A -nak nevezetesen

$$\lambda := \frac{a + d}{2},$$

legyen a t_1 egy hozzá tartozó sajátvektor:

$$0 \neq t_1 \in \mathbf{R}^2, At_1 = \lambda t_1.$$

Egyszerű számolással igazolható olyan $t_2 \in \mathbf{R}^2$ vektor létezése, amelyik lineárisan független a t_1 -től és

$$At_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ha mármost a $T \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ mátrix oszlopvektorai rendre a t_1, t_2 vektorok: $T := [t_1 \ t_2]$, akkor

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva könnyen belátható, hogy a

$$\phi_1(x) := e^{\lambda x} \cdot t_1, \phi_2(x) := e^{\lambda x} \cdot (t_2 + xt_1) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy alaprendszer. Valóban, $\phi_i \in \mathcal{M}_h$ ($i = 1, 2$), mert egyrészt

$$\phi_1'(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot t_1 = e^{\lambda x} At_1 = A(e^{\lambda x} \cdot t_1) = A\phi_1(x),$$

másrészt

$$\begin{aligned} \phi_2'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \cdot t_2 + e^{\lambda x} \cdot t_1 + \lambda e^{\lambda x} x \cdot t_1 = e^{\lambda x} ((t_1 + \lambda \cdot t_2) + \lambda x \cdot t_1) = \\ &= e^{\lambda x} (At_2 + xAt_1) = A(e^{\lambda x} (t_2 + x \cdot t_1)) = A\phi_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Mivel a

$$\phi_1(0) = t_1, \phi_2(0) = t_2$$

vektorok lineárisan függetlenek, ezért a ϕ_1, ϕ_2 függvények is lineárisan függetlenek, azaz a ϕ_1, ϕ_2 egy alaprendszer.

7.5 Valós értékű megoldások

Tegyük fel, hogy a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám az $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ (diagonalizálható) együtthatómátrixnak egy sajátértéke, a $t_\lambda \in \mathbf{K}^n$ vektor pedig egy λ -hoz tartozó sajátvektor. Ha a λ valós, akkor nyilván a t_λ sajátvektor is választható "valósnak", azaz feltehető, hogy $t_\lambda \in \mathbf{R}^n$. Ebben az esetben az \mathcal{M}_h -beli

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda \quad (x \in \mathbf{R})$$

bázisfüggvény is "valós" tehát $\phi_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Ha viszont a λ (nem valós) komplex szám, azaz

$$\lambda = u + iv \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$$

(alkalmas $u \in \mathbf{R}$ és $0 \neq v \in \mathbf{R}$ számokkal), akkor – lévén az A karakterisztikus polinomja valós együtthatós – az A -nak egyúttal a

$$\bar{\lambda} = u - iv$$

(komplex konjugált) is (ugyanannyiszoros) sajátértéke. Hasonlóan, ha a

$$t_\lambda = S_\lambda + iY_\lambda \in \mathbf{K}^n$$

vektor (alkalmas $S_\lambda, Y_\lambda \in \mathbf{R}^n$ vektorokkal) az A -nak a λ -hoz tartozó sajátvektora, akkor a

$$\bar{t}_\lambda = S_\lambda - iY_\lambda$$

vektor a $\bar{\lambda}$ -hoz tartozó sajátvektor. Továbbá a megfelelő bázisfüggvények a következők:

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \cdot t_\lambda, \quad \phi_{\bar{\lambda}}(x) := e^{\bar{\lambda} x} \cdot \bar{t}_\lambda \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Rövid számolással ellenőrizhető, hogy

$$\phi_{\bar{\lambda}}(x) = \overline{\phi_\lambda(x)} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a homogén egyenlet (teljes) megoldásainak az \mathcal{M}_h halmaza a \mathbf{K} felett vektortér, ezért a

$$\frac{\phi_\lambda + \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Re} \phi_\lambda, \quad \frac{\phi_\lambda - \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Im} \phi_\lambda$$

függvények is \mathcal{M}_h -beliek. Világos, hogy

$$e^{\lambda x} = e^{ux} \cdot (\cos(vx) + \imath \sin(vx)) \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt

$$\phi_{\lambda,r}(x) := \operatorname{Re} \phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot (\cos(vx) \cdot S_\lambda - \sin(vx) \cdot Y_\lambda) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\phi_{\lambda,i}(x) := \operatorname{Im} \phi_\lambda(x) = e^{ux} \cdot (\sin(vx) \cdot S_\lambda + \cos(vx) \cdot Y_\lambda) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá

$$\phi_{\lambda,r}(0) = S_\lambda = \frac{t_\lambda + \bar{t}_\lambda}{2},$$

$$\phi_{\lambda,i}(0) = Y_\lambda = \frac{t_\lambda - \bar{t}_\lambda}{2\imath}.$$

A $t_\lambda, \bar{t}_\lambda$ sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért az S_λ, Y_λ vektorok is azok, következésképpen a $\phi_{\lambda,r}, \phi_{\lambda,i}$ függvények is lineárisan függetlenek. Így $\phi_\lambda, \phi_{\bar{\lambda}}$ függvényeket kicserélve az előző függvényekre, továbbra is alaprendszert kapunk.

8 Vizsgakérdés

Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere.

8.1 Új feladat megfogalmazása

Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, az

$$a_k : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (k = 0, \dots, n-1), c : I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényekről tegyük fel, hogy folytonosak. Olyan $\varphi \in I \rightarrow \mathbf{K}$ függvényt keresünk, amelyekre

1. $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D^n$;
3. $\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^k(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Ezt a feladatot röviden *n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan φ függvény amelyik eleget tesz az előbbi kívánalmaknak, az illető differenciálegyenlet (egy) *megoldása*.

Tegyük fel, hogy a fentiekén túl adottak még a

$$\tau \in I, \xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$$

számok. Ha az előbbi φ megoldástól azt is elvárjuk, hogy

$$4. \tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

akkor a szóban forgó *n-edrendű lineáris differenciálegyenletre* vonatkozó *kezdetiérték-problémáról* beszélünk.

Ha $n = 1$, akkor egy lineáris differenciálegyenletről van szó, ezért a továbbiakban nyugodtan feltehetjük már, hogy $n \geq 2$.

Az *átviteli elv* segítségével a most megfogalmazott feladat visszavezethető a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatára. (A későbbiekben szereplő állítások is részben ennek az elvnek a segítségével láthatók majd be.) Vezessük be ui. az alábbi jelöléseket: legyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$ és

$$b := (b_1, \dots, b_n) : I \rightarrow \mathbf{R}^n, b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(x) \end{pmatrix} \quad (x \in I),$$

$$A := (a_{ik})_{i,k=1}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Ekkor

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \quad (x \in I, y \in \mathbf{K}^n).$$

Ha tehát a

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

differenciálható függvény ez utóbbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek (egy) megoldása, akkor $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum, és bármely $x \in \mathcal{D}_\psi$ esetén

$$\psi'(x) = A(x) \cdot \psi(x) + b(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

Azaz

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \vdots \\ \psi'_n \end{pmatrix} = \psi_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_0 \end{pmatrix} + \psi_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \cdots + \psi_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (-a_{k-1}) \cdot \psi_k + c \end{pmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \psi'_i(x) = \psi_{i+1}(x) & (i = 1, \dots, n-1) \\ \psi'_n(x) = \sum_{k=1}^n (-a_{k-1}(x)) \cdot \psi_k(x) + c(x). \end{cases} \quad (\star)$$

Ennek alapján eléggé nyilvánvaló az alábbi állítás.

8.2 Átviteli elv

Tétel. Ha a φ függvény megoldása a fenti n -edrendű lineáris differenciálegyenletnek, akkor az

$$I \ni x \mapsto \psi(x) := (\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathbf{K}^n$$

függvényre igazak a (\star) egyenlőségek. Fordítva, ha a $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ függvény eleget tesz a (\star) -nak, akkor a $\varphi := \psi_1$ (első) komponensfüggvény megoldása a szóban forgó n -edrendű lineáris differenciálegyenletnek. Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$ kezdeti értékek, és a φ , megoldása a

$$\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

k.é.p.-nak, akkor a (\star) lineáris differenciálegyenlet-rendszer előbbi ψ megoldása kielégíti a

$$\psi(\tau) = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$$

kezdeti feltételt.

Legyen most

$$\mathcal{M}_h := \left\{ \varphi : I \rightarrow \mathbf{K} : \varphi \in D^n, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0 \right\}.$$

Az \mathcal{M}_h függvényhalmaz tehát nem más, mint a

$$c(x) := 0 \quad (x \in I)$$

esetnek megfelelő *homogén n -edrendű lineáris differenciálegyenlet* I intervallumon értelmezett megoldásainak a halmaza. Legyen továbbá

$$\mathcal{M} := \left\{ \varphi : I \rightarrow \mathbf{K} : \varphi \in D^n, \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c \right\}$$

a kiindulási n -edrendű lineáris differenciálegyenlet I -n értelmezett megoldásainak a halmaza. Az utóbbival kapcsolatban már nyilván feltehető, hogy valamilyen $x \in I$ helyen $c(x) \neq 0$, azaz az illető egyenlet *inhomogén*. Ekkor az átviteli elv alapján a következőket mondhatjuk.

8.3 Állandók variálásának módszere

Tétel. Az n -edrendű lineáris differenciálegyenletet illetően

1. az \mathcal{M}_h halmaz n dimenziós lineáris tér a \mathbf{K} -ra vonatkozóan;
2. tetszőleges $\omega \in \mathcal{M}$ esetén

$$\mathcal{M} = \omega + \mathcal{M}_h := \{\omega + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3. ha a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ függvények bázist alkotnak az \mathcal{M}_h -ban, akkor léteznek olyan differenciálható $g_k : I \rightarrow \mathbf{K}$ ($k = 1, \dots, n$) függvények, amelyekkel

$$\omega := \sum_{k=1}^n g_k \varphi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyításképpen elegendő annyit megjegyezni, hogy az \mathcal{M}_h -beli

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m : I \rightarrow \mathbf{K} \quad (1 \leq m \in \mathbf{N})$$

függvények akkor és csak akkor függetlenek, ha a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j, \varphi'_j, \dots, \varphi_j^{(n-1)} \right) : I \rightarrow \mathbf{K}^n \quad (j = 1, \dots, m)$$

(vektor)függvények is azok.

Ha $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{M}_h$ bázis, akkor minden bázist (most is) *alaprendszernek*, az előző tételben szereplő ω függvényt pedig *partikuláris megoldásnak* nevezünk. Egy partikuláris megoldásnak az előző tétel szerinti előállítását az *állandók variálásaként* említjük,

Tegyük fel tehát, hogy $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{M}_h$ alaprendszer, ekkor a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j, \varphi'_j, \dots, \varphi_j^{(n-1)} \right) \quad (j = 1, \dots, n)$$

függvények alaprendszert alkotnak az átviteli elvből adódó (\star) lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozóan. Más szóval a

$$\Phi := [\hat{\varphi}_1 \cdots \hat{\varphi}_n] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} : I \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény alaplátrixa a (\star) -rendszernek. Innen tudjuk, hogy a

$$g = (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow \mathbf{K}^n$$

jelöléssel a $\Phi \cdot g$ függvény pontosan akkor partikuláris megoldása a (\star) -nak (alkalmas differenciálható $g_1, \dots, g_n : I \rightarrow \mathbf{K}$ függvényekkel), ha

$$\Phi \cdot g' = b = (0, \dots, 0, c).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\Phi \cdot g$ függvény első komponense, azaz az

$$\omega := \sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot g_k$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldása az n -edrendű lineáris differenciálegyenletnek, ha

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varphi_1 \cdot g'_1 & + & \varphi_2 \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi_n \cdot g'_n & = & 0 \\
\varphi'_1 \cdot g'_1 & + & \varphi'_2 \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi'_n \cdot g'_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\varphi_1^{(n-2)} \cdot g'_1 & + & \varphi_2^{(n-2)} \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-2)} \cdot g'_n & = & 0 \\
\varphi_1^{(n-1)} \cdot g'_1 & + & \varphi_2^{(n-1)} \cdot g'_2 & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-1)} \cdot g'_n & = & c.
\end{array}$$

Ennek a $(g'_1, \dots, g'_n$ függvényekre mint "ismeretlenekre" vonatkozó) lineáris (függvény)egyenletrendszernek a determinánsa (determináns-függvénye), azaz a

$$W(x) := \det \left(\varphi_i^{(k-1)}(x) \right)_{k,i=1}^n = \det (\Phi(x)) \quad (x \in I)$$

leképezés (az ún. *Wronski-determináns*) a $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n$ függvények lineáris függetlensége miatt egyetlen $x \in I$ helyen sem tűnik el.

9 Vizsgakérdés

Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítás, a karakterisztikus polinom szerepe (a bizonyítás vázlata).

Az előzőekben vizsgált

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

n -edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásához tehát elegendő az \mathcal{M}_h egy bázisát meghatározni. Ez általában "reménytelen" feladat, általános módszer nem is adható.

Ezért csak abban az esetben tesszük ezt meg, ha az a_k ($k = 0, \dots, n-1$) együtthatófüggvények mindegyike konstansfüggvény. Ez az ún. *állandó együtthatós* eset:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

A $c = 0$ (*homogén egyenlet*) választással

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} \equiv 0.$$

Tekintsük ehhez a

$$P(x) := x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad (x \in \mathbf{K})$$

n -edfokú polinomot, a differenciálegyenlet *karakterisztikus polinomját*.

Ha a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám a P -nek gyöke, akkor az

$$e_\lambda(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

és az $a_n := 1$ jelöléssel

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda}^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot P(\lambda) = 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

miatt az e_{λ} függvény megoldása a szóban forgó homogén differenciálegyenletnek.

Legyen az előbbi λ gyök multiplicitása $\nu \geq 2$. Belátjuk, hogy az

$$e_{\lambda,j}(x) := x^j e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}, j = 0, \dots, \nu - 1)$$

függvények is megoldásai a homogén differenciálegyenletnek:

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda,j}^{(k)} \equiv 0.$$

Tegyük fel ui., hogy ezt valamilyen $j \in \mathbf{N}$ mellett minden olyan esetben már tudjuk, amikor (az aktuális differenciálegyenletre) $\nu - 1 \geq j$. Például a $j = 0$ ilyen, hiszen ezt az $e_{\lambda,0} \equiv e_{\lambda}$ függvényre az előbb láttuk. Vegyük észre, hogy

$$e_{\lambda,j+1}(x) = x e_{\lambda,j}(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért (ami teljes indukcióval rögtön adódik)

$$e_{\lambda,j+1}^{(k)}(x) = x e_{\lambda,j}^{(k)}(x) + k e_{\lambda,j}^{(k-1)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}, 1 \leq k \in \mathbf{N}).$$

Így – feltételezve most azt, hogy $\nu - 1 \geq j + 1$ – az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda,j+1}^{(k)}(x) = x \cdot \sum_{k=0}^n e_{\lambda,j}^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^n k a_k e_{\lambda,j}^{(k-1)}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} e_{\lambda,j}^{(k)}(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

A

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \varphi^{(k)} \equiv 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a karakterisztikus polinomja:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}t^k = P'(t) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol a λ a P' (derivált)polinomnak $\mu := \nu - 1$ -szeres gyöke. Mivel $\mu - 1 \geq j$, ezért az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}e_{\lambda,j}^{(k)} \equiv 0,$$

következésképpen (a fentiekre tekintettel)

$$\sum_{k=0}^n a_k e_{\lambda,j+1}^{(k)} \equiv 0.$$

Tehát az $e_{\lambda,j+1}$ függvény is megoldása a homogén egyenletnek.

9.1 Alaprendszer

Tegyük fel, hogy a P gyöktényezős előállítás a következő:

$$P(x) = \prod_{l=1}^k (x - \lambda_l)^{\nu_l} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

ahol $1 \leq k \in \mathbf{N}$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$ jelöli a P összes, páronként különböző gyökét, $1 \leq \nu_l \in \mathbf{N}$ pedig a λ_l gyök multiplicitását ($l = 1, \dots, k$). Ekkor tehát a

$$\varphi_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\lambda_l x} \quad (x \in I, l = 1, \dots, k \text{ és } j = 0, \dots, \nu_l - 1)$$

függvények valamennyien \mathcal{M}_h -beliek.

Ennél még több is igaz, nevezetesen:

Tétel. A fentiekben definiált

$$\varphi_{lj} \quad (l = 1, \dots, k \text{ és } j = 0, \dots, \nu_l - 1)$$

függvények a szóban forgó állandó együtthatós n -edrendű lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét alkotják.

9.2 Valós értékű megoldások

Az előző tétel alapján kapott

$$\varphi_{lj}(x) := x^j e^{\lambda_l x} \quad (x \in I, l = 1, \dots, k; j = 0, \dots, \nu_l)$$

alaprendszerben a φ_{lj} ($l = 1, \dots, k; j = 0, \dots, \nu_l$) függvények valós értékűek, ha a szóban forgó n -edrendű lineáris differenciálegyenlet P karakterisztikus polinomjában a λ_l gyök valós szám. Ha viszont valamilyen $l = 1, \dots, k$ esetén a λ_l gyök nem valós komplex szám, akkor a következőket mondhatjuk. Legyen ekkor

$$\lambda_k = u_k + \imath v_l,$$

ahol $u_l, v_l \in \mathbf{R}$ és $v_l \neq 0$. Mivel a P polinom valós együtthatós, ezért a

$$\overline{\lambda_l} = u_l - \imath v_l$$

komplex konjugált is v_l -szeres gyöke a P -nek. Ez azt jelenti, hogy a fenti alaprendszerben a

$$\hat{\varphi}_{lj}(x) := x^j \cdot e^{\overline{\lambda_l} x} = \overline{\varphi_{lj}(x)} \quad (x \in I, j = 0, \dots, \nu_l - 1)$$

függvények is szerepelnek. Tudjuk, hogy az \mathcal{M}_h halmaz vektortér a \mathbf{K} -ra nézve, ezért

$$\phi_{lj} := \frac{\varphi_{lj} + \hat{\varphi}_{lj}}{2} = \operatorname{Re} \varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h \text{ és } \hat{\phi}_{lj} := \frac{\varphi_{lj} - \hat{\varphi}_{lj}}{2\imath} = \operatorname{Im} \varphi_{lj} \in \mathcal{M}_h.$$

Itt tetszőleges $j = 0, \dots, \nu_l - 1$ mellett

$$\phi_{lj}(x) = \operatorname{Re} \varphi_{lj}(x) = \operatorname{Re} (x^j \cdot e^{\lambda_l x}) = \operatorname{Re} (x^j \cdot e^{u_l x + \imath v_l x}) =$$

$$\operatorname{Re} (x^j \cdot e^{u_l x} (\cos(v_l x) + \imath \sin(v_l x))) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \cos(v_l x) \quad (x \in I),$$

és (analóg számolás után)

$$\hat{\phi}_{lj}(x) = x^j \cdot e^{u_l x} \cdot \sin(v_l x) \quad (x \in I).$$

Könnyen belátható, hogy ha a fenti $\varphi_{lj}, \hat{\varphi}_{lj}$ (összesen $2\nu_l$ darab) függvényt kicseréljük a $\phi_{lj}, \hat{\phi}_{lj}$ (ugyancsak $2\nu_l$ darab) függvényre, akkor továbbra is lineárisan független függvényrendszert kapunk. Ha ezt a cserét a P polinom minden nem valós gyökével kapcsolatban meg tesszük, akkor az \mathcal{M}_h egy valós értékű függvényekből álló bázisát kapjuk, azaz egy valós függvényekből álló alaprendszert.

10 Vizsgakérdés

Partikuláris megoldás kvázi-polinom jobb oldal esetén (a bizonyítás vázlata). A csillapítás nélküli kényszerrezgés vizsgálata, rezonancia.

10.1 Kvázipolinomok

Az állandó együtthatós

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad (\star)$$

n -edrendű lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az állandók variálásával való előállítása esetenként sok számolást igénylő feladat. Ezért "megbecsülendők" azok a módszerek, amelyek révén (az illető differenciálegyenlettől függően) más úton juthatunk el egy partikuláris megoldáshoz. Ez a más út gyakran a feladat jobb oldala, azaz a c függvény speciális "szerkezete" révén lehetséges. Ilyen függvények pl. az ún. kvázipolinomok. Az

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}$$

függvényt *kvázipolinomnak* nevezzük, ha egy R (algebrai) polinom és $\lambda \in \mathbf{K}$ szám mellett

$$f(x) = R(x) \cdot e_\lambda(x) = R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

10.2 Kvázopolinom jobb oldal

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, és valamilyen $r \in \mathbf{N}$ esetén a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám a

$$P(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinomnak r -szeres gyöke. Ha a Q polinom fokszáma $m \in \mathbf{N}$, akkor van olyan legfeljebb m -edfokú R polinom, hogy az

$$\omega(x) := x^r \cdot R(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

kvázipolinomra

$$\omega^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \omega^{(k)}(x) = Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Tehát a $\varphi := \omega$ függvény (kvázipolinom) a

$$c(x) := Q(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

jobb oldal (kvázipolinom) esetén eleget tesz a (\star) egyenlőségnek, azaz megoldása az illető differenciálegyenletnek. Ha itt pl. $r = 0$, azaz $P(\lambda) \neq 0$, akkor a keresett R polinommal

$$\omega = R \cdot e_\lambda.$$

Ehhez ui. legyen $a_n := 1$, amikor is azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = Q \cdot e_\lambda.$$

A "binomiális szabályt" alkalmazva

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} \cdot e_\lambda = Q \cdot e_\lambda.$$

Ezért a kívánt R polinom létezése a következő egyenlőséggel ekvivalens:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} = Q. \quad (\star\star)$$

Világos, hogy ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalán egy-egy polinom áll, így együttható-összehasonlítással azt kell megmutatni, hogy alkalmasan választott $\alpha_j \in \mathbf{K}$ ($j = 0, \dots, m$) számokkal az

$$R(x) := \sum_{j=0}^m \alpha_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K})$$

polinom eleget tesz a $(\star\star)$ egyenlőségnek. Legyen a Q algebrai alakja a $\beta_j \in \mathbf{R}$ ($j = 0, \dots, m$) együtthatókkal az alábbi:

$$Q(x) := \sum_{j=0}^m \beta_j \cdot x^j \quad (x \in \mathbf{K}).$$

Ekkor a $(\star\star)$ bal oldalán a főegyüttható a következő:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot \alpha_m \cdot \lambda^k = \alpha_m \cdot P(\lambda),$$

Így az $\alpha_m \cdot P(\lambda) = \beta_m$ egyenlőségnek kell teljesülni. Mivel most $P(\lambda) \neq 0$, ezért az

$$\alpha_m := \frac{\beta_m}{P(\lambda)}$$

választás megfelelő. Az α_m ismeretében az α_{m-1} meghatározása $(\star\star)$ alapján a

$$\begin{aligned} \beta_{m-1} &= \sum_{k=0}^n a_k \cdot \alpha_{m-1} \cdot \lambda^k + \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot m \cdot \alpha_m \cdot \lambda^{k-1} = \\ &P(\lambda) \cdot \alpha_{m-1} + m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda) \end{aligned}$$

egyenlőségből történhet:

$$\alpha_{m-1} = \frac{\beta_{m-1} - m \cdot \alpha_m \cdot P'(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Az eljárást analóg módon folytatva kapjuk a keresett R polinom többi együtthatóját is.

10.3 Rezgések

Tekintsük a rezgésekre vonatkozó

$$ms'' = F - \alpha \cdot s - \beta \cdot s'$$

másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet, vagy "standard" alakban felírva ugyanez:

$$s'' + \frac{\beta}{m} \cdot s' + \frac{\alpha}{m} \cdot s = \frac{F}{m}.$$

Ennek a karakterisztikus polinomja a következő:

$$P(x) := x^2 + \frac{\beta}{m}x + \frac{\alpha}{m} \quad (x \in \mathbf{K}),$$

aminek gyökei:

$$\lambda_{1,2} := \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4m\alpha}}{2m}.$$

A fizika "nyelvén" fogalmazva az F/m függvény (a differenciálegyenlet jobb oldala) a "kényszer" (kényszererő). Ha nincs kényszer, azaz $F \equiv 0$, akkor $\beta > 0$ esetén *csillapított rezgőmozgásról*, a $\beta = 0$ esetben pedig *harmonikus rezgőmozgásról* beszélünk.

A tényleges kényszerrezgések között különösen érdekes a periodikus külső kényszer esete:

$$F(x) := A \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $A > 0$ (*amplitúdó*), $\omega > 0$ (*kényszerfrekvencia*) és $\theta \in [0, 2\pi]$ (*fázisszög*). Tekintsünk most el a csillapítástól, azaz legyen $\beta := 0$. Ekkor egy (valós) alarendszert az

$$\omega_0 := \sqrt{\alpha/m}$$

sajátfrekvenciával az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \cos(\omega_0 x), \quad \mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(\omega_0 x)$$

függvényrendszer. Egyszerűen megadhatunk egy partikuláris megoldást is. Ez ui. könnyen ellenőrizhetően

1. $\omega \neq \omega_0$ esetén pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta),$$

2. $\omega = \omega_0$ (*rezonancia*) esetén pedig pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto -\frac{q}{2\omega}x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

függvény, ahol $q := A/m$.

Valóban, ha $\omega \neq \omega_0$, akkor egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldás, ha

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) &= -\gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega x + \theta) + \omega_0^2 \cdot \gamma \cdot \sin(\omega x + \theta) = \\ &= q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Mindez azzal egyenértékű, hogy $\gamma \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) = q$, azaz, hogy

$$\gamma = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ha viszont $\omega = \omega_0$, akkor most egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma \cdot x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre kell, hogy fennáljon a

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2 \varphi_\gamma(x) &= \\ -2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) - \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) + \gamma \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega x + \theta) &= \\ -2\gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega x + \theta) &= q \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

egyenlőség. Ezért $\gamma = -q/(2\omega)$. A $\omega_0 \neq \omega$ feltétel mellett tehát

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega_0 x) + \delta \cdot \sin(\omega_0 x) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol a γ, δ együtthatókat az

$$s(0) = s_0, s'(0) = s'_0$$

egyenlőségekből kapjuk. Alkalmas $r > 0$ és $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ segítségével felírhatjuk $s(x)$ -et a következő alakban:

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega_0 x + \theta_0) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ami nem más mint két harmonikus rezgés összege.

Ha $\omega_0 = \omega$, akkor

$$s(x) = \gamma \cdot \cos(\omega x) + \delta \cdot \sin(\omega x) - \frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$s(0) = s_0, \quad s'(0) = s'_0.$$

Tehát a 2. esetben megfelelően választott $r > 0$ és $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ paraméterekkel

$$s(x) = r \cdot \sin(\omega x + \theta_0) - \frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Az ω sajátfrekvenciájú (korlátos) harmonikus rezgésre ekkor nem egy harmonikus rezgés, hanem az

$$x \mapsto -\frac{q}{2\omega} x \cdot \cos(\omega x + \theta)$$

aperiodikus mozgás szuperponálódik.

11 Vizsgakérdés

A függvénysorozat, függvénysor fogalma. Hatványsorok, trigonometrikus sorok, Fourier-sorok. A Dirichlet-féle magfüggvény. Konvergencia, határfüggvény (összegfüggvény), egyenletes konvergencia. A Weierstrass-féle majoráns kritérium.

11.1 Függvénysorozatok, függvénysorok

A függvénysorozatok fogalmával részben találkoztunk már korábban is: az (f_n) sorozatot *függvénysorozatnak* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az f_n függvény. A továbbiakban mindig azzal a feltételezéssel élünk, hogy valamilyen $\neq X$ halmazzal

$$f_n \in X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

és egy $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal

$$\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Pl. a

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathcal{D} := \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvények egy (h_n) függvénysorozatot határoznak meg.

A fenti (f_n) függvénysorozat által meghatározott $\sum(f_n)$ *függvénysor*:

$$\sum(f_n) := \left(\sum_{k=0}^n f_k \right).$$

A $\sum(f_n)$ függvénysor tehát nem más, mint az

$$F_n := \sum_{k=0}^n f_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvények által meghatározott (F_n) függvénysorozat:

$$\sum(f_n) := (F_n).$$

Így pl. az előbbi

$$h_n(t) := t^n \quad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvények esetén $\sum(h_n) = (H_n)$, ahol az $n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^n h_k(t) = \sum_{k=0}^n t^k = \begin{cases} n+1 & (t=1) \\ \frac{1-t^{n+1}}{1-t} & (t \neq 1) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

11.2 Konvergencia, határfüggvény

Tekintsük a fenti (f_n) függvénysorozatot. Ha egy $x \in \mathcal{D}$ elem esetén konvergens a helyettesítési értékeknek az $(f_n(x))$ sorozata, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *konvergens* az x helyen. A

$$\mathcal{D}_0 := \{x \in \mathcal{D} : (f_n(x)) \text{ konvergens}\}$$

halmaz az (f_n) függvénysorozat *konvergenciatartománya*. Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor az

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

definícióval értelmezett

$$f : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény az (f_n) függvénysorozat *határfüggvénye*. A $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_f$ esetben röviden azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens*.

Pl. az előbbi (h_n) függvénysorozattal $\mathcal{D}_0 = (-1, 1]$, és

$$h(x) := \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

a (h_n) sorozat határfüggvénye.

A függvénysorok "nyelvén" a pontonkénti konvergencia a következőképpen fogalmazható meg: legyen $X \neq \emptyset$, és a $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal adott az

$$f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat. Ekkor a $\sum_n (f_n)$ függvénysor x -beli konvergenciája azt jelenti, hogy a részletösszegek $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$ sorozata konvergens az x helyen, azaz

a $\left(\sum_{k=0}^n f_k(x)\right)$ sorozat konvergens. Nem fog félreértést okozni, ha az ilyen $x \in \mathcal{D}$ elemek összegét fogjuk most \mathcal{D}_0 -val jelölni. Tehát \mathcal{D}_0 most nem más, mint a $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$ függvénysorozat konvergenciatartománya. Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor legyen

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

A szóban forgó függvénysor *összegfüggvénye*. Pl. a

$$h_n(x) := x^n \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$\sum_{k=0}^n h_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & (x=1) \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & (x \neq 1) \end{cases} \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

miatt a $\sum(h_n)$ függvénysor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum, a H összegfüggvénye pedig a

$$H(x) := \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

függvény.

Emlékeztetünk a hatványsor fogalmára: legyen valamilyen $a \in \mathbf{K}$ *középpont* és egy

$$(a_n) : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{K}$$

együttható-sorozat esetén

$$f_n(x) := a_n(x-a)^n \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a

$$\sum \left(a_n(x-a)^n \right) := \sum (f_n)$$

függvénysort nevezük *hatványsornak*. A Cauchy-Hadamard-tétel szerint egyértelműen létezik olyan

$$0 \leq r \leq +\infty$$

(*konvergenciasugár*) amellyel a hatványsor \mathcal{D}_0 konvergenciatartományára a $0 < r < +\infty$ esetben

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_0 \subset \overline{K_r(a)}.$$

Nyilvánvaló, hogy $a \in \mathcal{D}_0$ mindig igaz, és az a helyen a fenti hatványsor összege 0.

11.3 Trigonometrikus sorok, Fourier-sorok

A $\sum(f_n)$ függvényt *trigonometrikus sornak* nevezzük, ha

$$f_0(x) := \alpha_0, f_n(x) := \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}),$$

ahol adottak az $\alpha_k \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{N}$) és a β_j ($1 \leq j \in \mathbf{N}$) *együtthatók*. Használni fogjuk mindegyikre a

$$\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$$

szimbólumot is. Tehát egy adott trigonometrikus sor n -edik részletösszege egy $x \in \mathbf{R}$ helyen az alábbi módon néz ki:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos(x) + \beta_1 \cdot \sin(x) + \cdots + \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx).$$

A szóban forgó $\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$ trigonometrikus sor

$$S_n(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvényei *trigonometrikus polinomok*.

Legyen $R_{2\pi}$ az összes olyan 2π szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény halmaza, amelyre

$$f \in R[0, 2\pi]$$

teljesül. A periodicitás miatt nyilvánvaló, hogy ekkor tetszőleges 2π -hosszúságú kompakt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra is (az előbbi értelemben) $f \in R(I)$.

Legyen továbbá $C_{2\pi}$ az olyan 2π szerint periodikus

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

függvények halmaza, amelyekre $f \in C$. Ekkor

$$C_{2\pi} \subset R_{2\pi},$$

továbbá $C_{2\pi}$, $R_{2\pi}$ lineáris terek az \mathbf{R} -re vonatkozóan, a $C_{2\pi}$ altere az $R_{2\pi}$ -nek. Továbbá bármely $f \in R_{2\pi}$ függvény az $f \in R[0, 2\pi]$ integrálhatóság miatt korlátos, azaz

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} < +\infty.$$

Vezessük be az alábbi fogalmakat: $f \in R_{2\pi}$ esetén legyen

$$a_0(f) := a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n(f) := a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$b_n(f) := b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$Sf := \sum (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor az Sf trigonometrikus sor az f *Fourier-sora*, az együtthatói az f *Fourier-együtthatói*, az $S_n f$ ($n \in \mathbf{N}$) trigonometrikus polinom pedig az f függvény n -edik *Fourier-részletösszege*.

Ha $f \in R_{2\pi}$, $n \in \mathbf{N}$, akkor a fenti f *Fourier-részletösszegei* a következők:

$$S_0 f(x) = a_0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ill. $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt \cdot \cos(kx) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt \cdot \sin(kx) \right) = \\
& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sum_{k=1}^n \left(\cos(kt) \cdot \cos(kx) + \sin(kt) \cdot \sin(kx) \right) dt = \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(x-t)) \right) dt.
\end{aligned}$$

Ha tehát

$$D_0(z) := \frac{1}{2}, \quad D_n(z) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kz) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot D_n(x-t) dt \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

A most definiált D_n ($n \in \mathbf{N}$) függvény az n -edik *Dirichlet-magfüggvény*. Világos, hogy minden D_n páros függvény, periodikus 2π szerint, és bármilyen 2π hosszúságú kompakt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra

$$\int_I D_n = \int_I \frac{1}{2} dz + \sum_{k=1}^n \int_I \cos(kz) dz = \int_I \frac{1}{2} dz = \pi \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Nem nehéz "zárt" alakra hozni a szóvan forgó magfüggvényeket. Ha ui. $0 < u < 2\pi$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
\sin(z/2) \cdot D_n(z) &= \frac{\sin(z/2)}{2} + \sum_{k=1}^n \sin(z/2) \cdot \cos(kz) = \\
&= \frac{\sin(z/2)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\sin((k+1/2)z) - \sin((k-1/2)z) \right) = \\
&= \frac{\sin(z/2)}{2} + \frac{\sin((n+1/2)z) - \sin(z/2)}{2} = \frac{\sin((n+1/2)z)}{2}.
\end{aligned}$$

Innen az következik, hogy

$$D_n(z) = \frac{\sin\left((n+1/2)z\right)}{2 \cdot \sin(z/2)} \quad (0 < z < 2\pi).$$

Tehát a D_n definíciójából adódóan a

$$\frac{\sin\left((n+1/2)0\right)}{2 \cdot \sin(0/2)} := D_n(0) = \frac{1}{2} + n$$

megállapodással tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvényre az alábbi integrál-előállítást kapjuk a Fourier-részletösszegekre:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot D_n(x-t) dt \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

11.4 Egyenletes konvergencia

Tekintsük az (f_n) függvénysorozatot, ahol

$$f_n \in X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\mathcal{D}_{f_n} =: \mathcal{D} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\mathcal{D}_0 := \left\{ t \in \mathcal{D} : (f_n(x)) \text{ konvergens} \right\} \neq \emptyset$$

az (f_n) konvergenciatartománya, és

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}_0)$$

az (f_n) függvénysorozat határfüggvénye. Tehát $f : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbf{K}$ és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_0$, valamint $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}$, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (N_{x,\varepsilon} < n \in \mathbf{N}).$$

Hangsúlyozni kell, hogy az itt szereplő $N_{x,\varepsilon}$ küszöbindex általában függ az x -től is, és az ε -tól is. Elképzelhető ugyanakkor, hogy bizonyos esetekben bármilyen $\varepsilon > 0$ mellett olyan (csak az ε -tól függő)

$$N := N_\varepsilon \in \mathbf{N}$$

is megadható, amelyik az előbbi becslésben egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$ halmaz mellett független az $x \in A$ elemtől. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az A halmazon *egyenletesen konvergens* az f függvényhez, azaz: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in A, N < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ekkor minden $\emptyset \neq B \subset A$ halmaz esetén is az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál a B -n az f -hez. Ha az egyenletes konvergencia definíciójában $A = \mathcal{D}_0$ írható, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens*.

A $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$ halmazon, ha a részletösszegek $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$ sorozata egyenletesen konvergens az A -n.

Ez tehát azt jelenti, hogy létezik olyan

$$F : A \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény és tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A, N < n \in \mathbf{N}).$$

A Cauchy-kritérium miatt ez azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ természetes számmal

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A, N < n, m \in \mathbf{N}, n < m)$$

(*egyenletes Cauchy-kritérium*).

11.5 Weierstrass-kritérium

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\emptyset \neq X$ mellett $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$, és adott az

$$f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(f_n)$ függvénysor. Legyen továbbá egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$ halmazzal és egy (a_n) számsorozattal

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in A\} \leq a_n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysor az A halmazon egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Az alábbi becslés a tétel feltételei alapján nyilvánvaló:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k \quad (x \in A, n, m \in \mathbf{N}, n < m).$$

Ha az $\varepsilon > 0$ egy pozitív szám, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ feltételezés miatt van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\sum_{k=n+1}^m a_k < \varepsilon \quad (n, m \in \mathbf{N}, N < n < m).$$

Ezért

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in A, n, m \in \mathbf{N}, N < n < m).$$

■

12 Vizsgakérdés

A folytonosság, ill. a Riemann-integrálhatóság kérdése konvergens függvénysorozatokkal kapcsolatban. Egyenletesen konvergens függvénysorozat határfüggvényének folytonossága, ill. integrálhatósága. Az integrálás és a határátmenet felcserélhetősége.

Tekintsük az (f_n) függvénysorozatot, legyen f a határfüggvénye. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az f_n ($n \in \mathbf{N}$) függvényekre fennálló bizonyos tulajdonságok "öröklődnek-e" az f határfüggvényre. Az említett tulajdonságokat illetően a folytonosság, integrálhatóság, deriválhatóság fognak a vizsgálódásaink középpontjában állni.

Az utóbbi kettővel kapcsolatban az is egy "izgalmas" kérdés lesz, hogy ha (pl.) az f_n ($n \in \mathbf{N}$) függvények valamennyien differenciálhatók, és ugyanez igaz az f határfüggvényre is, akkor fennáll-e az

$$f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

egyenlőség? Ugyanez másképpen írva: igaz-e, hogy

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n,$$

azaz, hogy a differenciál- és a limesz-operátor felcserélhető?

Hasonlóan, ha

$$f_n \in R[a, b] \quad (n \in \mathbf{N})$$

és az (f_n) függvénysorozat f határfüggvényére is igaz, hogy $f \in R[a, b]$, akkor teljesül-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség? Más szóval

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n?$$

Az alábbi nagyon egyszerű példák azt mutatják, hogy a fenti kérdésekre minden további nélkül nem lehet igennel felelni. Legyen ui.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & (0 \leq x \leq 1/n) \\ 0 & (1/n \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy $f_n \in C[0, 1]$ ($n \in \mathbf{N}^+$), az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, és az f határfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (1 < x \leq 1). \end{cases}$$

Az is nyilvánvaló, hogy $f \notin C\{0\}$.

Legyen most valamilyen $a_n \in \mathbf{R}$ ($0 < n \in \mathbf{N}$) számsorozat mellett

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n & (0 < x < 1/n) \\ 0 & (x \in [0, 1] \setminus (0, 1/n)) \end{cases} \quad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$f_n \in R[0, 1], \quad \int_0^1 f_n = \frac{a_n}{n} \quad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

továbbá minden $x \in [0, 1]$ helyen könnyen beláthatóan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Tehát az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, és az f határfüggvénye a $([0, 1]$ intervallumon) az $f \equiv 0$ függvény. Így $f \in R[0, 1]$ és $\int_0^1 f = 0$.

Ugyanakkor az

$$a_n := n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$$

esetben az integrálok $(\int_0^1 f_n)$ sorozata konvergens, de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \lim(1) \neq 0 = \int_0^1 f = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Az

$$a_n := (-1)^n \cdot n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$$

választással az $(\int_0^1 f_n) = ((-1)^n)$ sorozat nem is konvergens.

Az f határfüggvényre (az $f_n \in R[a, b]$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ esetben) az sem teljesül "automatikusan", hogy integrálható. Legyen ui. az (r_k) sorozat a $[0, 1]$ -beli racionális számok sorozata, és

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, \dots, r_n\}) \\ 0 & (x \notin \{r_0, \dots, r_n\}) \end{cases} \quad (x \in [0, 1], n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in R[0, 1]$ és $\int_0^1 f_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, tehát létezik az integrálsorozat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = 0$$

határértéke, azonban az

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \quad (x \in [0, 1])$$

Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható.

A differenciálhatóságot illetően tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) := |x|^{1+1/n} \quad (x \in \mathbf{R}, 0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in D$ $(0 < n \in \mathbf{N})$, de az

$$f(x) := |x| \quad (x \in \mathbf{R})$$

határfüggvény nem differenciálható a 0-ban.

A folytonosság és a határátmenet kapcsolatát illetően a következőket mondhatjuk:

12.1 Folytonosság és a határátmenet

Tétel. Tegyük fel, hogy az

$$f_n \in \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq X \subset \mathbf{K}$ halmazon. Legyen a határfüggvénye az

$$f : X \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény. Ha $a \in X$ és $f_n \in C\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $f \in C\{a\}$.

Bizonyítás. Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in X, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$|f(x) - f(a)| \leq$$

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \quad (x \in X),$$

ezért

$$|f(x) - f(a)| < 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(a)| \quad (x \in X, N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen a továbbiakban egy $N < n \in \mathbf{N}$ index rögzítve. Mivel $f_n \in C\{a\}$, ezért egy alkalmas $\delta > 0$ esetén

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon \quad (x \in X, |x - a| < \delta),$$

amiből

$$|f(x) - f(a)| < 3\varepsilon \quad (x \in X, |x - a| < \delta),$$

azaz $f \in C\{a\}$. ■

Fogalmazzuk át az előbbi állításunkat a függvénysorok esetére.

Tétel. Legyen adott a

$$g_n : X \rightarrow \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(g_n)$ függvénysor, ami egyenletesen konvergens az $\emptyset \neq X \subset \mathbf{K}$ halmazon. Legyen az összegfüggvénye az

$$G : X \rightarrow \mathbf{K}$$

függvény. Ha $a \in X$ és $g_n \in C\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $G \in C\{a\}$.

Ha ui.

$$f_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor az (f_n) egyenletesen konvergál a G -hez. Mivel $f_n \in C\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért az első tétel szerint $G \in C\{a\}$ is igaz.

12.2 Riemann-integrálhatóság és a határátmenet

Tétel. Tekintsük az $[a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R}, a < b)$ intervallumon értelmezett $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló (f_n) függvénysorozatot, amelyről tegyük fel, hogy egyenletesen konvergens. Ha $f_n \in R[a, b]$ $(n \in \mathbf{N})$ és f jelöli az (f_n) sorozat határfüggvényét, akkor $f \in R[a, b]$, az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens, és

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, ekkor egy $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in [a, b], N < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért bármilyen $J \subset [a, b]$ intervallum esetén

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(v)| + |f_n(v) - f(v)| <$$

$$2\varepsilon + |f_n(u) - f_n(v)| \quad (u, v \in J, N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$o_J(f) := \sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in J\} \leq$$

$$2\varepsilon + \sup\{|f_n(u) - f_n(v)| : u, v \in J\} = 2\varepsilon + o_J(f_n) \quad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát bármilyen $\tau \subset [a, b]$ felosztásra

$$\omega(f, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| \leq \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} 2\varepsilon \cdot |J| + \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f_n) \cdot |J| =$$

$$2(b-a)\varepsilon + \omega(f_n, \tau) \quad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen az $N < n \in \mathbf{N}$ rögzítve, ekkor $f_n \in R[a, b]$ miatt van olyan τ , hogy $\omega(f_n, \tau) < \varepsilon$. Így

$$\omega(f, \tau) < (2(b-a) + 1)\varepsilon,$$

ami (szükséges és) elegendő ahhoz, hogy $f \in R[a, b]$.

Ha $N < n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b-a) \cdot \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

■

Tétel. Tegyük fel, hogy az $[a, b]$ ($a, b \in \mathbf{R}, a < b$) intervallumon értelmezett

$$g_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló $\sum(g_n)$ függvénytör egyenletesen konvergens. Ha $g_n \in R[a, b]$ ($n \in \mathbf{N}$) és G jelöli a $\sum(g_n)$ sor összegfüggvényét, akkor $G \in R[a, b]$, az integrálok alkotta $\sum(\int_a^b g_n)$ sor konvergens, valamint

$$\int_a^b G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n.$$

Indoklásképpen elegendő az

$$f_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekre alkalmazni a Riemann-integrálhatóság linearitására vonatkozó ismert állítást.

13 Vizsgakérdés

A határfüggvény differenciálhatósága, ill. a deriválás és a határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel.

13.1 Differenciálhatóság és a határátmenet

Tétel. Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ korlátos, nyílt intervallum, az

$$f_n : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekről pedig tegyük fel, hogy valamennyien differenciálhatók, a deriváltakból álló (f'_n) függvény sorozat pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan $a \in I$, hogy az $(f_n(a))$ (helyettesítési értékekből álló) sorozat konvergens, akkor

- az (f_n) függvény sorozat egyenletesen konvergens
- ha f jelöli az (f_n) sorozat határfüggvényét, akkor $f \in D$ és

$$f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

Bizonyítás. Legyen $b \in I$, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Phi_{bn}(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} & (x \neq b) \\ f'_n(b) & (x = b) \end{cases} \quad (x \in I, n \in \mathbf{N}).$$

A Φ_{bn} -ek mind folytonosak. Ez ui. a b -től különböző helyeken az f_n -ek folytonossága alapján a műveleti szabályok és a folytonosság kapcsolatából következik. A b helyen pedig a

$$\lim_{x \rightarrow b} \Phi_{bn}(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = f'_n(b) = \Phi_{bn}(b) \quad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőségből. Azt sem nehéz belátni, hogy a (Φ_{bn}) függvény sorozat egyenletesen konvergens. Ti. legyen ehhez

$$n, m \in \mathbf{N}, b \neq x \in I,$$

ekkor a Lagrange-középértéktétel szerint alkalmasan b és x közötti ξ_{nm} -mel

$$\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(b) - f_m(b))}{x - b} = (f_n - f_m)'(\xi_{nm}) = f'_n(\xi_{nm}) - f'_m(\xi_{nm}).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\Phi_{bn}(x) - \Phi_{bm}(x)| = \begin{cases} |f'_n(\xi_{nm}) - f'_m(\xi_{nm})| & (b \neq x \in I) \\ |f'_n(b) - f'_m(b)| & (x = b) \end{cases} \quad (n, m \in \mathbf{N}).$$

A feltételeink szerint az (f'_n) sorozat egyenletesen konvergens, ezért minden $\varepsilon > 0$ mellett egy $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \varepsilon \quad (t \in I, N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Innen világos, hogy

$$|\Phi_{bn}(x) - \Phi_{bm}(x)| < \varepsilon \quad (x \in I, N < n, m \in \mathbf{N})$$

azaz a (Φ_{bn}) függvénysorozatra teljesül az egyenletesen Cauchy-kritérium: a (Φ_{bn}) sorozat egyenletesen konvergens. Legyen

$$\Phi_b := \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{bn},$$

ami (ld. előző tétel) folytonos.

Vegyük észre, hogy

$$f_n(x) = (x - a) \cdot \Phi_{an}(x) + f_n(a) \quad (x \in I, n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a

$$g(x) := x - a, \quad h_n(x) := f_n(a) \quad (x \in I, n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$(f_n) = (g\Phi_{an}) + (h_n).$$

Az I intervallum korlátossága miatt a g függvény korlátos, ezért a $(g\Phi_{an})$ sorozat egyenletesen konvergens. Nyilván ugyanez igaz a (h_n)

(konstans)sorozatra is, amiből az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergenciája már következik, legyen

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

A (Φ_{bn}) $(b \in I)$ sorozat definíciója alapján most már világos, hogy

$$\Phi_b(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{bn}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} & (x \neq b) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(b) & (x = b) \end{cases} \quad (x \in I, n \in \mathbf{N}).$$

Láttuk, hogy a Φ_b függvény folytonos, így létezik a $\lim_{x \rightarrow b} \Phi_b(x)$ határérték és

$$\lim_{x \rightarrow b} \Phi_b(x) = \Phi_b(b).$$

Tehát

$$\Phi_b(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{bn}(b) = \lim_{x \rightarrow b} \Phi_b(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Mindez azt jelenti, hogy $f \in D\{b\}$ és

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(b) \quad (b \in I).$$

■

Tétel. Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbf{R}$ korlátos és nyílt intervallumon értelmezett

$$g_n : I \rightarrow \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények mindannyian differenciálhatók, a deriváltakból álló $\sum(g'_n)$ függvénysor pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan $a \in I$, hogy a $\sum(g_n(a))$ (helyettesítési értékekből álló) sor konvergens, akkor

- a $\sum(g_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens
- ha G jelöli az $\sum(g_n)$ sor összegfüggvényét, akkor $G \in D$ és

$$G' = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n.$$

Ui. a differenciálhatóság, ill. a derivált linearitása miatt az

$$f_n := \sum_{k=0}^n g_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények differenciálhatók, és

$$f'_n = \sum_{k=0}^n g'_k \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a deriváltakból álló (f'_n) függvénsorozat egyenletesen konvergens, továbbá az $(f_n(a))$ sorozat is konvergens. Így a $\sum(g_n) = (f_n)$ függvénsor egyenletesen konvergál a G függvényhez, $G \in D$, és

$$G' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n g'_k = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n.$$

Következésképpen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n.$$

14 Vizsgakérdés

A trigonometrikus rendszer ortogonalitása. Egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvényének a Fourier-sora. Bessel-azonosság, Bessel-egyenlőtlenség.

14.1 Trigonometrikus rendszer

Legyen

$$c_0(x) := 1, c_n(x) := \cos(nx), s_n(x) := \sin(nx) \quad (x \in \mathbf{R}, 1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

és

$$\mathcal{R} := \{c_0, c_n, s_n : 1 \leq n \in \mathbf{N}\}$$

az ún. *trigonometrikus rendszer*.

Lemma. A trigonometrikus rendszer ortogonális a következő értelemben: bármely 2π hosszúságú korlátos és zárt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra

$$\int_I \varphi \cdot \psi = \begin{cases} 0 & (\varphi \neq \psi) \\ 2\pi & (\varphi = \psi = c_0) \\ \pi & (\varphi = \psi \neq c_0) \end{cases} \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{R}).$$

Bizonyítás. Az \mathcal{R} elemeinek a 2π szerinti periodicitása miatt nyilván feltehető, hogy (pl.) $I = [0, 2\pi]$. Ekkor:

$$\begin{aligned} \int_I c_0^2(x) dx &= \int_I 1 dx = 2\pi; \\ \int_I c_n^2(x) dx &= \int_I \cos^2(nx) dx = \int_I \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_I 1 dx + \int_I \cos(2nx) dx \right) = \pi \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}); \\ \int_I s_n^2(x) dx &= \int_I \sin^2(nx) dx = \int_I \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_I 1 \, dx - \int_I \sin(2nx) \, dx \right) &= \pi \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}); \\ \int_I s_n(x) \cdot c_k(x) \, dx &= \int_I \sin(nx) \cdot \cos(kx) \, dx = \\ &= \int_I \frac{\sin((n+k)x) + \sin((n-k)x)}{2} \, dx \\ \frac{1}{2} \left(\int_I \sin((n+k)x) \, dx + \int_I \sin((n-k)x) \, dx \right) &= 0 \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

ui. $n = k$ esetén

$$\int_I \sin((n-k)x) \, dx = 0$$

és

$$\begin{aligned} \int_I \sin((n+k)x) \, dx &= \int_I \sin(2nx) \, dx = 0, \\ \text{míg } n \neq k \text{ mellett alkalmas } 1 \leq m, r \in \mathbf{N} \text{ paraméterekkel} \\ \int_I \sin((n+k)x) \, dx &= \int_I \sin(mx) \, dx = 0 = \\ \int_I \sin(rx) \, dx &= \pm \int_I \sin((n-k)x) \, dx. \end{aligned}$$

■

14.2 Egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok

Lássuk be, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok együtthatói "kiszámíthatók" a sor összegfüggvényének a segítségével.

Tétel. Tegyük fel, hogy a $\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, legyen

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor f Fourier-sora megegyezik a szóban forgó trigonometrikus sorral, azaz

$$\alpha_0 = a_0(f), \alpha_n = a_n(f), \beta_n = b_n(f) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Bizonyítás. A tagonkénti integrálhatóságból

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \\ \int_0^{2\pi} \alpha_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx + \beta_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx \right) &= \\ \int_0^{2\pi} \alpha_0 dx &= 2\pi \cdot \alpha_0. \end{aligned}$$

Mivel a \cos , \sin függvények korlátosak, ezért $1 \leq N$ esetén a

$$\begin{aligned} \sum \left(\cos(nx)(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \right), \\ \sum \left(\sin(nx)(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \right), \end{aligned}$$

sorok is egyenletesen konvergensek. Megint csak a tagonkénti integrálhatóság és a trigonometrikus rendszer ortogonalitása miatt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx &= \alpha_0 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(nx) dx + \beta_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \cos(nx) dx \right) &= \\ \alpha_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx &= \pi \alpha_n, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx &= \alpha_0 \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx + \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \sin(nx) dx + \beta_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(nx) dx \right) &= \end{aligned}$$

$$\beta_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \cdot \beta_n,$$

amiből az állításunk már következik. ■

Tehát: ha a

$$\sum \left(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \right)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens és

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \right) \quad (x \in \mathbf{R})$$

az összegfüggvénye, akkor $f \in C_{2\pi}$, és a szóban forgó trigonometrikus sor az f függvény Fourier-sora. Azt is mondjuk ilyenkor, hogy az f függvény *Fourier-sorba fejthető*.

14.3 Bessel - Parseval

Legyenek $f \in R_{2\pi}$ esetén

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$S_n f(x) := a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx) \right) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R})$$

az f függvény Fourier-együtthatói, n -edik Fourier-részletösszege, és

$$\|f\| := \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

Továbbá adott

$$\alpha_k \in \mathbf{R} \quad (k \in \mathbf{N}) \text{ és } \beta_j \in \mathbf{R} \quad (1 \leq j \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal

$$T_n(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx) \right) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor (a trigonometrikus rendszer ortogonalitása miatt)

$$\begin{aligned} \|f - T_n\|^2 &= \int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 = \int_0^{2\pi} f^2 - 2 \cdot \int_0^{2\pi} f T_n + \int_0^{2\pi} T_n^2 = \\ &= \int_0^{2\pi} f^2 - 2 \left(2\pi a_0 \alpha_0 + \pi \cdot \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right) + 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2). \end{aligned}$$

Speciálisan (*Bessel-azonosság*)

$$\|f - S_n f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2 - \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$$

(*Bessel-egyenlőtlenség*).

Belátható, hogy a fenti Bessel-egyenlőtlenségben valójában egyenlőség van:

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$$

(*Parseval-egyenlőtlenség*).

15 Vizsgakérdés

Egyenletesen konvergens Fourier-sorok, a trigonometrikus rendszer teljessége $C_{2\pi}$ -re.

15.1 Teljesség

Emlékeztető: ha a

$$\sum (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens és

$$F(x) := \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)) \quad (x \in \mathbf{R})$$

az összegfüggvénye, akkor $F \in C_{2\pi}$, a szóban forgó trigonometrikus sor pedig az F függvény Fourier-sora.

Legyen most $f \in C_{2\pi}$, és tegyük fel, hogy az Sf Fourier-sora egyenletesen konvergens. Ha az Sf trigonometrikus sor összegfüggvényét g -vel jelöljük, akkor joggal vetődik fel a kérdés: mi köze van egymáshoz az f és a g függvénynek? Az előbbiek szerint $Sf = Sg$, azaz

$$a_0(f) = a_0(g), \quad a_n(f) = a_n(g), \quad b_n(f) = b_n(g) \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ha

$$h := f - g,$$

akkor egyrészt $h \in C_{2\pi}$, másrészt a Fourier-együtthatók definíciója alapján rögtön adódik az, hogy

$$a_0(h) = a_0(f) - a_0(g) = 0$$

és

$$a_n(h) = a_n(f) - a_n(g) = 0, \quad b_n(h) = b_n(f) - b_n(g) = 0 \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy mindebből $h \equiv 0$ következik, azaz $f = g$.

Ehhez szükségünk lesz az alábbi, önmagában is fontos állításra.

Tétel. Ha a $h \in C_{2\pi}$ függvény valamennyi Fourier-együtthatója nulla, akkor a h az azonosan nulla függvény.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen $a \in \mathbf{R}$ esetén $h(a) \neq 0$. Nyugodtan feltehetjük a továbbiakban, hogy

$$a = 0 \text{ és } h(0) > 1.$$

Figyelembe véve, hogy a h függvény folytonos, van olyan $0 < \delta < \pi/2$, amellyel

$$h(x) > 1 \quad (|x| \leq \delta).$$

Vegyük észre, hogy bármilyen

$$T(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)) \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

trigonometrikus polinomra

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T(x) dx = \\ & \alpha_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \cos(kx) dx + \beta_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \sin(kx) dx \right) = \\ & 2\pi \cdot \alpha_0 \cdot a_0(h) + \pi \cdot \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot a_k(h) + \beta_k \cdot b_k(h)) = 0. \end{aligned} \quad (\star)$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ennek ellenére egy alkalmas T trigonometrikus polinommal

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T(x) dx \neq 0.$$

Legyen ehhez

$$T_n(x) := (\cos x + 1 - \cos \delta)^n \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén a T_n függvény egy trigonometrikus polinom. Továbbá

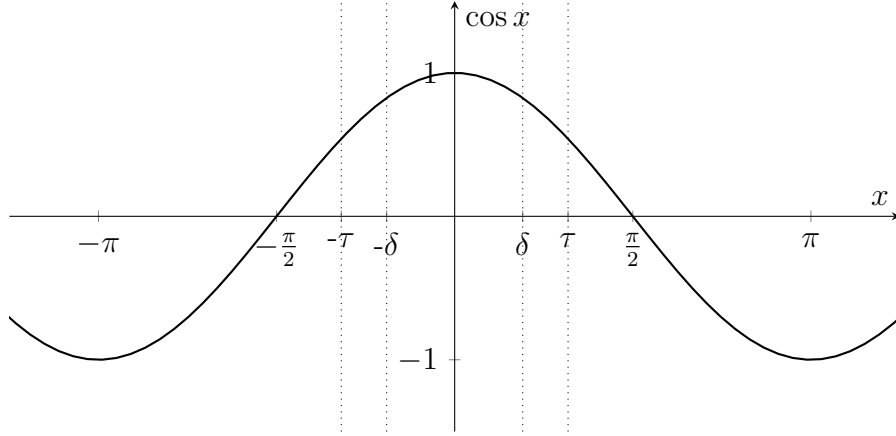
$$\cos x + 1 - \cos \delta \geq 1 \quad (|x| \leq \delta),$$

valamint bármilyen $\delta < \tau < \pi/2$ választással

$$q_\tau := \max\{|\cos x + 1 - \cos \delta| : x \in [-\pi, -\tau] \cup [\tau, \pi]\} < 1$$

és

$$|\cos x + 1 - \cos \delta| \leq 1 \quad (x \in [-\tau, -\delta] \cup [\delta, \tau]).$$



Ekkor a

$$J_1 := [-\pi, -\tau], J_2 := [-\tau, -\delta], J_3 := [-\delta, \delta], J_4 := [\delta, \tau], J_5 := [\tau, \pi]$$

intervallumokkal minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^5 \int_{J_i} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| \geq \left| \int_{-\delta}^{\delta} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| - \sum_{3 \neq i=1}^5 \int_{J_i} |h(x) \cdot T_n(x)| dx.$$

Az előzményekre tekintettel itt a

$$C := \max \{|h(x)| : |x| \leq \pi\} \quad (< +\infty)$$

jelöléssel

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| = \int_{-\delta}^{\delta} h(x) \cdot T_n(x) dx \geq \int_{-\delta}^{\delta} 1 dx = 2\delta,$$

valamint

$$\int_{J_1} |h(x) \cdot T_n(x)| dx, \int_{J_5} |h(x) \cdot T_n(x)| dx \leq C \cdot q_\tau^n \cdot \tau$$

és

$$\int_{J_2} |h(x) \cdot T_n(x)| dx, \int_{J_4} |h(x) \cdot T_n(x)| dx \leq C \cdot (\tau - \delta).$$

Következésképpen

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| \geq 2\delta - (2C \cdot q_\tau^n \cdot \pi + 2C \cdot (\tau - \delta)).$$

A τ (az eddigieken túl) nyilván megválasztható úgy is, hogy

$$2C \cdot (\tau - \delta) < \delta/2$$

teljesüljön. Ekkor

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_n(x) dx \right| > 3\pi/2 - 2C \cdot q_\tau^n \cdot \pi.$$

Mivel $0 < q_\tau < 1$, ezért

$$q_\tau^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$2C \cdot q_\tau^N \cdot \pi < \delta/2$$

amikor is

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_N(x) dx \right| > \delta.$$

Tehát

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T_N(x) \neq 0,$$

azaz a $T := T_N$ választás ellentmond a (\star) egyenlőségnek. ■

Az előzményekre is tekintettel igaz az alábbi tétel:

Tétel. Ha az $f \in C_{2\pi}$ függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens, akkor az Sf Fourier-sor összegfüggvénye megegyezik az f -fel, azaz

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \right) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

16 Vizsgakérdés

Kétszer folytonosan differenciálható függvények Fourier-sora. Az $f \in C_{2\pi}$, $f(x) := (x - \pi)^2$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) függvény Fourier-sora, a $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ egyenlőség.

A Weierstrass-kritérium nyilvánvaló következményeként kapjuk az alábbi állítást is: ha az (a_n) , (b_n) számsorozatokra

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

akkor az általuk meghatározott $\sum (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens. Ui.

$$|a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

Ez a helyzet pl. akkor, ha az előbbi a_n , b_n együtthatók egy $f \in C_{2\pi}$ függvény Fourier-együtthatói, és az f kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor ui. $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett (kétszeri parciális integrálással)

$$\begin{aligned} \pi \cdot a_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \cdot \sin(nx) dx = -\frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} f''(x) \cdot \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

Az f'' függvény (folytonos lévén) korlátos, mondjuk egy alkalmas C számmal $|f''| \leq C$, így

$$|\pi \cdot a_n| \leq \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} |f''(x)| dx \leq \frac{2C\pi}{n^2}.$$

Tehát

$$|a_n| \leq \frac{2C}{n^2}.$$

Analóg módon járhatunk el a "szinuszos" együtthatók becslésénél:

$$|b_n| \leq \frac{2C}{n^2} \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Mindebből már nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty.$$

16.1 Függöny függvény Fourier-sora

Tekintsük az alábbi $f \in C_{2\pi}$ függvényt:

$$f(x) := \frac{(x - \pi)^2}{2} \quad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ekkor az f páros függvény, ezért tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x) \cdot \sin(nx)$$

függvény páratlan, és emiatt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) = \pi \cdot b_n = 0,$$

azaz

$$b_n = 0 \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{\pi^2}{6},$$

valamint az $1 \leq n \in \mathbf{N}$ indexekre (parciálisan integrálva)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{n^2}.$$

Tehát

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Alkalmazható a Weierstrass-kritérium, miszerint az f Fourier-sora egyenletesen konvergens, így

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Speciálisan

$$\frac{\pi^2}{6} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(x - \pi)^2}{2} \quad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ha itt $x = 0$ -t írunk, akkor

$$\frac{\pi^2}{6} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2},$$

amiből rögtön adódik a (nem triviális) sorösszeg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

17 Vizsgakérdés

A $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cdot \sin(nx)$ ($x \in \mathbf{R}$) sor konvergenciája, összegfüggvénye.
A rezgő húr problémája.

17.1 A $\sum (\sin(nx)/n)$ trigonometrikus sor

Megmutatjuk, hogy igaz a

Tétel. Tetszőleges $x \in (0, 2\pi)$ helyen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2},$$

és ez a szinusz-sor minden $\delta \in (0, \pi)$ mellett egyenletesen konvergens a $[\delta, 2\pi - \delta]$ intervallumon.

Bizonyítás. Legyen $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, ekkor az $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ helyeken

$$\begin{aligned} \sin(x/2) \cdot \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin(kx) \cdot \sin(x/2)}{k} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\cos((k-1/2)x) - \cos((k+1/2)x)}{k} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \cdot c_k(x) + \frac{c_n(x)}{n} - \frac{c_m(x)}{m+1} \right| \leq \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m+1} \right) = \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

Így

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{1}{(m+1) \cdot \sin(x/2)} \leq \frac{1}{(m+1) \cdot \sin(\delta/2)}.$$

Innen az egyenletes Cauchy-kritérium teljesülése nyilvánvaló.

Így a $\sum (\sin(nx)/n)$ trigonometrikus sor minden kompakt

$$[u, v] \subset (0, 2\pi)$$

intervallumon egyenletesen konvergens. Vegyük észre, hogy az egyenletesen konvergens

$$\sum (\cos(nx)/n^2)$$

sor (formális) tagonkénti deriválásával a

$$\sum (-\sin(nx)/n)$$

sort kapjuk, ami tehát az előbbi (u, v) intervallumon egyenletesen konvergens. Következésképpen (ld. korábbi tételeket) az

$$f_{uv}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(x - \pi)^2}{2} - \frac{\pi^2}{12} \quad (x \in (u, v))$$

előírással definiált f_{uv} függvény differenciálható, és

$$f'_{uv}(x) = \frac{x - \pi}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad (x \in (u, v)).$$

Mivel itt $[u, v] \subset (0, 2\pi)$ tetszőleges volt, ezért egyúttal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

is igaz. ■

17.2 Rezgő húr

A két végén kifizített homogén, rezgő húr alakjának a meghatározása a feladat. Feltesszük, hogy az l (> 0) hosszúságú húr transzverzális síkrezgést végez. Megfelelő koordináta-rendszert választva a húr alakját egy

$$u \in \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény írja le. (Az $u(x, t) \in \mathbf{R}$ ($x \in [0, l]$, $t \in \mathbf{R}$) helyettesítési érték a húr x abszcisszájú pontjának a kitérését adja meg a t időpillanatban.) Ha $u \in D^2$, akkor (fizikai megfontolások alapján) egy pozitív q együtthatóval

$$\partial_{22}u = q \cdot \partial_{11}u,$$

ami egy (speciális) *parciális differenciálegyenlet*. Megadva a húr kezdeti alakját és a sebességét ($u(x, 0)$ -t, ill. $\partial_2 u(x, 0)$ -t ($x \in [0, l]$)), az u függvény meghatározható.

A közönséges differenciálegyenletekre nyert eredmények esetenként sikerrel alkalmazhatók a parciális differenciálegyenletek megoldása során is. Ilyen a rezgő húr mozgását modellező fenti egyenlet is. Legyen a keresett

$$u : [0, l] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható, amire adott

$$f, g \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

függvények az alábbi *perem*-, ill. *kezdeti feltételek* teljesülnek:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \in [0, +\infty)),$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, l]),$$

$$\partial_2 u(x, 0) = g(x) \quad (x \in [0, l]).$$

Euler, Lagrange, D'Alembert, D. Bernoulli és végül Fourier munkássága nyomán kristályosodott ki (a más feladatokra is alkalmazható) alábbi módszer. Ennek az alapötlete a következő: keressük az u megoldást

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t) \quad (x \in [0, l], t \in [0, +\infty))$$

alakban (*Fourier-módszer*), ahol

$$F, G \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

kétszer folytonosan differenciálható (alkalmas) függvények. Ekkor az

$$x \in [0, l], t \in [0, +\infty)$$

helyeken

$$\partial_{22}u(x, t) = G''(t)F(x)$$

és

$$\partial_{11}u(x, t) = F''(x)G(t),$$

azaz

$$\partial_{22}u = q \cdot \partial_{11}u$$

miatt teljesülnie kell a

$$G'''(t)F(x) = q \cdot F''(x)G(t) \quad (x \in [0, l], t \in [0, +\infty))$$

egyenlőségnek. Világos, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egy megfelelő $\lambda \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$G''(t) = \lambda G(t) \quad (t \in [0, +\infty))$$

és

$$F''(x) = \frac{\lambda}{q}F(x) \quad (x \in [0, l]).$$

Mindez nem más, mint (két) homogén lineáris állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenlet.

Ha itt $\lambda = 0$, akkor $G'' \equiv F'' \equiv 0$, azaz valamilyen $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$G(t) = c_1 + c_2t \quad (t \in \mathbf{R})$$

és

$$F(x) = c_3 + c_4x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$u(x, t) = (c_1 + c_2t)(c_3 + c_4x) \quad (x \in [0, l], t \geq 0).$$

Mivel

$$u(0, t) = c_3(c_1 + c_2t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

ezért $c_3 = 0$, vagy

$$c_1 + c_2t = 0 \quad (t \geq 0),$$

azaz

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Az utóbbi esetben $u \equiv 0$. Ha $|c_1| + |c_2| > 0$, akkor tehát $c_3 = 0$, és

$$u(l, t) = c_4 l(c_1 + c_2 t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

amiből $c_4 = 0$ következik. Így ismét csak (a feladat szempontjából érdektelen) $u \equiv 0$ adódik.

Tegyük fel most, hogy $\lambda > 0$. Ekkor a magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásáról mondottak alapján

$$G(t) = \alpha \cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta \cdot e^{-t\sqrt{\lambda}} \quad (t \geq 0)$$

és

$$F(x) = \gamma \cdot e^{x\sqrt{\lambda/q}} + \delta \cdot e^{-x\sqrt{\lambda/q}} \quad (x \in \mathbf{R})$$

(ahol $\lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ alkalmas együtthatók). Ismét figyelembe véve a peremfeltételeket

$$u(0, t) = (\gamma + \delta) \cdot (\alpha \cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta \cdot e^{-t\sqrt{\lambda}}) = 0 \quad (t \geq 0),$$

ezért

$$\alpha \cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta \cdot e^{-t\sqrt{\lambda}} = 0 \quad (t \geq 0),$$

vagy

$$\gamma + \delta = 0.$$

Az első eset (könnyen beláthatóan) csak az $\alpha = \beta = 0$ együtthatókkal állhat fenn, ekkor $u \equiv 0$. Ha tehát $|\alpha| + |\beta| > 0$, akkor $\gamma + \delta = 0$. Továbbá

$$u(l, t) = (\gamma \cdot e^{l\sqrt{\lambda/q}} + \delta \cdot e^{-l\sqrt{\lambda/q}}) (\alpha \cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta \cdot e^{-t\sqrt{\lambda}}) = 0 \quad (t \geq 0),$$

amiből

$$\gamma \cdot e^{l\sqrt{\lambda/q}} + \delta \cdot e^{-l\sqrt{\lambda/q}} = \gamma \cdot (e^{l\sqrt{\lambda/q}} - e^{-l\sqrt{\lambda/q}}) = 0$$

következik. Ez azt jelenti, hogy vagy $\gamma = 0$, azaz egyúttal $\delta = 0$, vagy

$$e^{l\sqrt{\lambda/q}} - e^{-l\sqrt{\lambda/q}} = 0.$$

Az utóbbi egyenlőségéből $e^{2l\sqrt{\lambda/q}} = 1$, ami csak $\lambda = 0$ esetén állhat fenn. Mivel most $\lambda > 0$, ezért $\gamma = \delta = 0$, más szóval ismét $u \equiv 0$.

Vizsgáljuk végül a $\lambda < 0$ esetet. Ismét magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek valós megoldásaira vonatkozó ismereteink szerint

$$G(t) = a \cdot \cos(t\sqrt{|\lambda|}) + b \cdot \sin(t\sqrt{|\lambda|}) \quad (t \geq 0)$$

és

$$F(x) = c \cdot \cos(x\sqrt{|\lambda|/q}) + d \cdot \sin(x\sqrt{|\lambda|/q}) \quad (x \in \mathbf{R})$$

(valamilyen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ együtthatókkal). Az

$$u(0, t) = c \cdot (a \cdot \cos(t\sqrt{|\lambda|}) + b \cdot \sin(t\sqrt{|\lambda|})) = 0 \quad (t \geq 0)$$

feltételből az előbbiekkal analóg módon kapjuk az $a = b = 0$ egyenlőséget, amikor is $u \equiv 0$, vagy

$$|a| + |b| > 0 \text{ és } c = 0,$$

így

$$u(l, t) = d \cdot \sin(l\sqrt{|\lambda|/q}) \cdot (a \cos(t\sqrt{|\lambda|}) + b \sin(t\sqrt{|\lambda|})) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Innen vagy $d = 0$, azaz ismét $u \equiv 0$ következik, vagy

$$\sin(l\sqrt{|\lambda|/q}) = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség viszont azzal ekvivalens, hogy valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ számmal

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{\sqrt{q}\pi}{l} \cdot n.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és $a_n, b_n, d_n \in \mathbf{R}$ paraméterekkel az

$$u_n(x, t) := d_n \cdot \sin(\pi n x / l) \cdot (a_n \cdot \cos(\pi \sqrt{q} n t / l) + b_n \cdot \sin(\pi \sqrt{q} n t / l)) \quad (x \in [0, l], t \geq 0)$$

függvények megoldások.

A részletek mellőzésével jegyezzük meg, hogy alkalmas feltételek mellett az

$$u(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (x \in [0, l], t \geq 0)$$

(függvénysor-)összegfüggvény létezik, szintén megoldás, és a kezdeti feltételek a következő alakúak:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_n \cdot \sin(\pi n x / l) = f(x) \quad (x \in [0, l]),$$

$$\partial_2 u(x, 0) = \frac{\pi \sqrt{q}}{l} \sum_{n=0}^{\infty} b_n d_n \cdot n \cdot \sin(\pi n x / l) = g(x) \quad (x \in [0, l]).$$

Ezek az egyenlőségek tehát az f , ill. a g függvény Fourier-sorba (speciálisan szinusz-sorba) fejtését jelentik.