

# Analízis 4 vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

## Tartalom

<b>1</b>	<b>Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel. (a bizonyítás vázlata)</b>	<b>2</b>
1.1	Az implicitfüggvény fogalma . . . . .	2
1.2	Implicitfüggvény-tétel . . . . .	3
1.3	Lokális invertálhatóság . . . . .	4
<b>2</b>	<b>A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.</b>	<b>8</b>
2.1	Közönséges differenciálegyenletek . . . . .	8
2.2	Teljes megoldás . . . . .	8
2.3	Szeparábilis differenciálegyenlet . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel. A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel.</b>	<b>14</b>
3.1	Lipschitz-feltétel . . . . .	14
3.2	Egzisztenciátétel . . . . .	15

# 1 Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel. (a bizonyítás vázlata)

## 1.1 Az implicitfüggvény fogalma

Legyenek  $n, m \in \mathbb{N}$  természetes számok, ahol  $2 \leq n$  és  $1 \leq m \leq n$ . Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

akkor az  $f$ -et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az  $f(x, y)$  helyettesítési értékben az argumentum első változójára  $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ , a második változójára pedig  $y \in \mathbb{R}^m$  teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen  $(a, b) \in \mathcal{D}_f$  zérushelye az  $f$ -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az  $a$ -nak egy olyan  $K(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$  környezete, a  $b$ -nek pedig olyan  $K(b) \subset \mathbb{R}^m$  környezete, hogy tetszőleges  $x \in K(a)$  esetén egyértelműen létezik olyan  $y \in K(b)$ , amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a  $\varphi(x) := y$  hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden  $x \in K(a)$  mellett az  $y = \varphi(x)$  az egyetlen olyan  $y \in K(b)$  hely amelyre

$$f(x, y) = 0.$$

Az előbbi  $\varphi$  függvényt az  $f$  által (az  $(a, b)$  körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden  $x = (x_1, \dots, x_{n-m}) \in K(a)$  mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1, \dots, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván  $\varphi(a) = b$ .

## 1.2 Implicitfüggvény-tétel

**Tétel (implicitfüggvény-tétel).** Adott  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq n$ , valamint  $1 \leq m < n$  mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat:  $f \in C^1$ , és az  $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$  helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas  $K(a)$ ,  $K(b)$  környezetekkel létezik az  $f$  által az  $(a, b)$  körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

### 1.3 Lokális invertálhatóság

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h \in C^1\{a\}$$

és  $h'(a) \neq 0$ , akkor egy alkalmas  $r > 0$  mellett

$$I := (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a  $(h|_I)^{-1}$  inverzfüggvény, a  $g := (h|_I)^{-1}$  függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többváltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen  $1 \leq n \in \mathbb{N}$  mellett adott az

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény és az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pont. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény *lokálisan invertálható* az  $a$ -ban, ha létezik olyan  $K(a) \subset \mathcal{D}_f$  környezet, hogy a  $g := f|_{K(a)}$  leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a  $g^{-1}$  inverzfüggvényt az  $f$   $a$ -beli *lokális inverzének* nevezzük.

**Tétel.** Legyen  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tegyük fel, hogy egy  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban  $f \in C^1\{a\}$  és  $\det f'(a) \neq 0$ . Ekkor az  $f$  függvény az  $a$ -ban lokálisan invertálható, és az  $a$ -beli lokális inverze folytonos.

**Bizonyítás (vázlat).** Feltehető, hogy

$$a = f(a) = 0 \in \mathbb{R}^n, f'(0) = (v_{ik})_{i,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

pedig az  $n \times n$ -es egységmátrix:

$$v_{ii} = 1, v_{ik} = 0 \quad (i, k \in \{1, \dots, n\}, i \neq k).$$

Legyen  $y \in \mathbb{R}^n$  és

$$\Phi_y(x) := x - f(x) + y =: g(x) + y \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor  $g \in C^1\{0\}$  és

$$g'(0) = \Theta := (0)_{i,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(az  $n \times n$ -es nullmátrix). Ha tehát

$$g = (g_1, \dots, g_n),$$

akkor egy  $K_r(0) \subset \mathcal{D}_f$  ( $r > 0$ ) környezet minden pontjában a  $g$  függvény differenciálható, a  $g_k$  koordinátafüggvények  $\partial_i g_k$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ) parciális deriváltfüggvényei valamennyien folytonosak a 0-ban, és

$$\partial_i g_k(0) = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Válasszuk a  $q > 0$  számot úgy, hogy  $n \cdot q < 1/2$ , ekkor az előbbiek szerint a  $K_r(0)$  környezetről az is feltehető, hogy

$$G_r(0) := \overline{K_r(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq r\} \subset \mathcal{D}_f$$

és

$$|\partial_i g_k(x)| < q \quad (x \in G_r(0), i, k = 1, \dots, n).$$

Ezért

$$\|g'(x)\|_{(\infty)} = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |\partial_i g_k(x)| : k = 1, \dots, n \right\} < n \cdot q < \frac{1}{2} \quad (x \in G_r(0)).$$

Így azt mondhatjuk, hogy

$$\|g(x) - g(t)\| \leq$$

$$\sup \left\{ \|g'(\xi)\|_{(\infty)} : \xi \in G_r(0) \right\} \cdot \|x - t\|_\infty \leq \frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \quad (x, t \in G_r(0)).$$

Tehát egyúttal

$$\|\Phi_y(x) - \Phi_y(t)\|_\infty = \|g(x) - g(t)\|_\infty \leq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^n, x, t \in G_r(0)),$$

speciálisan tetszőleges  $y \in K_{r/2}(0)$  mellett

$$\|\Phi_y(x)\|_\infty \leq \|g(x)\|_\infty + \|y\|_\infty = \|g(x) - g(0)\|_\infty + \|y\|_\infty \leq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \|x\|_\infty + \|y\|_\infty < r \quad (x \in G_r(0)),$$

azaz  $\Phi_y(x) \in K_r(0)$ . Mindez azt jelenti, hogy bármelyik  $y \in K_{r/2}(0)$  esetén a

$$\Phi_y : G_r(0) \rightarrow K_r(0) \quad (\subset G_r(0))$$

leképezés kontrakció. A fixponttétel alkalmazásával ezért  $y \in K_{r/2}(0)$  mellett egyértelműen létezik olyan  $x_y \in G_r(0)$ , ami fixpontja a  $\Phi_y$ -nak:

$$\Phi_y(x_y) = x_y.$$

Definiálhatunk tehát egy

$$\varphi : K_{r/2}(0) \rightarrow G_r(0)$$

leképezést, amelyre

$$\varphi(y) := x_y \quad (y \in K_{r/2}(0)),$$

azaz

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) \quad (y \in K_{r/2}(0)).$$

Más szóval

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) - f(\varphi(y)) + y = g(\varphi(y)) + y = \varphi(y) \quad (y \in K_{r/2}(0)),$$

amiből

$$f(\varphi(y)) = y \quad (y \in K_{r/2}(0))$$

is rögtön következik. Az eddigieket figyelembe véve

$$\|\varphi(y)\|_\infty = \|\Phi_y(\varphi(y))\|_\infty < r \quad (y \in K_{r/2}(0))$$

miatt

$$\varphi : K_{r/2}(0) \rightarrow K_r(0).$$

Világos, hogy  $\varphi(0) = 0$ , hiszen  $\Phi_0(0) = -f(0) + 0 = 0$ , azaz  $y = 0$ -ra a  $0 \in G_r(0)$  fixpontja a  $\Phi_0$ -nak.

Mutassuk meg, hogy a  $\varphi$  függvény folytonos. Ha ui.  $y, z \in K_{r/2}(0)$ , akkor

$$\varphi(y) = \Phi_y(\varphi(y)) + y, \quad \varphi(z) = \Phi_z(\varphi(z)) + z$$

amiből

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \leq \|g(\varphi(y)) - g(\varphi(z))\|_\infty + \|y - z\|_\infty \leq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty + \|y - z\|_\infty,$$

ezért

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \leq 2 \cdot \|y - z\|_\infty.$$

Innen már világos, hogy a  $\varphi$  (egyenletesen) folytonos. ■

**Tétel (inverzfüggvény-tétel).** Legyen  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ , és  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tegyük fel, hogy egy  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban  $f \in C^1\{a\}$ ,  $\det f'(a) \neq 0$ . Ekkor alkalmas  $K(a) \subset \mathcal{D}_f$  környezettel az  $f|_{K(a)}$  leszűkítés invertálható, a  $g := (f|_{K(a)})^{-1}$  lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = \left(f'(h(x))\right)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

**2 A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.**

### 2.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen  $0 < n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan  $\varphi \in I \rightarrow \Omega$  függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1.  $\mathcal{D}_\varphi$  nyílt intervallum;
2.  $\varphi \in \mathcal{D}_f$ ;
3.  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$ .

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \Omega$  elemek, akkor a fenti  $\varphi$  függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4.  $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$  és  $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban mindegyike a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik  $\varphi$  függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő  $f$  függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala*.

### 2.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges  $\varphi, \psi$  megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$



(Mivel  $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$ , ezért  $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\phi$  egy  $(\tau$ -t tartalmazó) nyílt intervallum.)  
Legyen ekkor  $\mathcal{M}$  a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy  $\tau$ -t tartalmazó nyílt intervallum és  $J \subset I$ . Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \rightarrow \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy  $\Phi(\tau) = \xi$ ,  $\Phi \in D$  és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy  $\Phi \in \mathcal{M}$ , és (ld. a  $\mathcal{D}_\Phi = J$  definícióját) bármelyik  $\varphi \in \mathcal{M}$  esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden  $\varphi = \Phi|_{\mathcal{D}_\varphi}$ .

A  $\Phi$  függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

## 2.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen  $n := 1$ , továbbá az  $I, J \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, h : J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x, y) \in I \times J).$$

A  $\varphi \in I \rightarrow J$  megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$  számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

**Tétel.** *Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen  $\varphi, \psi$  megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_\psi).$$

**Bizonyítás.** Mivel a  $h$  függvény sehol sem nulla, ezért egy  $\varphi$  megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  is, és az  $1/h : J \rightarrow \mathbb{R}$  is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \rightarrow \mathbb{R}, H : J \rightarrow \mathbb{R}$$

primitív függvényeik:  $G' = g$  és  $H' = 1/h$ . Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a  $\mathcal{D}_\varphi$  is egy nyílt intervallum) van olyan  $c \in \mathbb{R}$ , hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az  $1/h$  függvény nyilván nem vesz fel 0-t a  $J$  intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a  $H'$  függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a  $H'$  állandó előjelű. Következésképpen a  $H$  függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A  $H^{-1}$  inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha  $\tau \in I$ ,  $\xi \in J$ , és a  $\varphi$  megoldás eleget tesz a  $\varphi(\tau) = \xi$  kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a  $G, H$  helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek  $\tilde{G}, \tilde{H}$ ), akkor alkalmas  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha, \quad \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen  $\tilde{c} \in \mathbb{R}$  konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a  $t := \tau$  helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik  $G, H$  primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a  $\psi$  függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a  $\mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\psi$  értelmezési tartományok mindegyike egy-egy  $\tau$ -t tartalmazó nyílt intervallum, ezért  $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$  is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a  $G, H$  primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az  $F$  függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az  $F$ -re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas  $K(\tau) \subset I$ ,  $K(\xi) \subset J$  környezetekkel létezik az  $F$  által a  $(\tau, \xi)$  körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \rightarrow K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire  $\varphi(\tau) = \xi$  és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t, \varphi(t))}{\partial_2 F(t, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a  $\varphi$  implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának.

■

A tétel bizonyítása során egyúttal egy módszert ("képletet") is adtunk a

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

szeparábilis egyenletre vonatkozó  $\varphi(\tau) = \xi$  kezdetiérték-probléma megoldására.

Ennek a kulcsmozzanata a  $G$ ,  $H$  primitív függvények meghatározása:

$$G(x) = \int_\tau^x g(t) dt, \quad H(y) = \int_\xi^y \frac{dt}{h(t)} \quad (x \in I, y \in J),$$

amiből aztán a  $\varphi$ -re vonatkozó

$$H(\varphi(x)) = \int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = G(x) = \int_{\tau}^x g(t) dt \quad (x \in \mathcal{D}_{\varphi}),$$

azaz

$$\int_{\xi}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_{\tau}^x g(t) dt \quad (x \in \mathcal{D}_{\varphi})$$

implicit egyenlet adódott.

### 3 Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztenciátétel. A k.é.p. megoldásának az egyértelmősége, unicitási tétel.

#### 3.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan  $\varphi \in I \rightarrow \Omega$  függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1.  $\mathcal{D}_\varphi$  nyílt intervallum;
2.  $\varphi \in D$ ;
3.  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$ ;
4. adott  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \Omega$  mellett  $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$  és  $\varphi(\tau) = \xi$ .

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciátétel).

Legyenek tehát  $0 < n \in \mathbb{N}$  mellett az  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \Omega$  esetén keressük a fenti differenciálható  $\varphi \in I \rightarrow \Omega$  függvényt. Az  $f$  függvényről feltesszük, hogy minden kompakt  $\emptyset \neq Q \subset \Omega$  halmazhoz létezik olyan  $L_Q \geq 0$  konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az  $f$  (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

## 3.2 Egzisztenciátétel

**Tétel (Picard-Lindelöf).** *Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.*

**Bizonyítás (vázlat).** Legyenek a  $\delta_1, \delta_2 > 0$  olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow \Omega : \psi \in C\}.$$

Az  $\mathcal{F}$  halmaz a

$$\rho(\phi, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha  $\mathcal{X}$  jelöli a

$$g : I_* \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t)) dt \in \mathbb{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F}, x \in I_*).$$

Tehát az  $f$  függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos"  $f_1, \dots, f_n$  szimbólumokkal jelölve, a  $\psi, f$  függvények (és egyúttal az  $f_i$ -k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t, \psi(t)) \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények folytonosak. következőképpen (minden  $x \in I_*$  esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t, \psi(t)) dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

integráloknak, és így a

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt := (\xi_1 + d_1, \dots, \xi_n + d_n) \in \mathbb{R}^n$$

”integrálvektoroknak”. Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a  $T\psi$  függvény folytonos, minden  $x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)$  helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az  $I_*$  alkalmas megválasztásával minden  $\psi \in \mathcal{F}$  függvényre  $T\psi \in \mathcal{F}$ , azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a  $\mu > 0$  számot úgy, hogy a

$$K_{\mu} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - \xi\|_{\infty} \leq \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen  $\mu$  az  $\Omega$  nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x, y)\|_{\infty} : x \in I_*, y \in K_{\mu}\}$$

(ami meg az  $f$  folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az  $I_* \times K_{\mu}$  halmaz kompakt). A jelzett  $T\psi \in \mathcal{F}$  tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max \left\{ \left| \int_{\tau}^x f_i(t, \psi(t)) dt \right| : i = 1, \dots, n \right\} \leq \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az  $\mathcal{F}$  definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow K_{\mu} : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető  $M \cdot \delta$ -val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Így  $M \cdot \delta \leq \mu$  esetén a fenti  $T\psi$  is  $\mathcal{F}$ -beli. (Ha a kiindulásul választott  $\delta_1, \delta_2$ -re  $M \cdot \delta > \mu$ , akkor írjunk a  $\delta_1, \delta_2$  helyébe olyan ”új”  $0 < \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ -t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2]$$



és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

legyen. Az  $I_*$  helyett az  $\tilde{I}_* := [\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2]$  intervallummal az "új"  $M$  az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  leképezést, amelyre tetszőleges  $\phi, \psi \in \mathcal{F}$  mellett

$$\begin{aligned} \rho(T\psi, T\phi) &= \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} = \\ &= \max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))) dt\right| : i = 1, \dots, n\right\} : x \in I_*\right\} \leq \\ &= \max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))| : i = 1, \dots, n\} dt\right| : x \in I_*\right\} = \\ &= \max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty dt\right| : x \in I_*\right\}. \end{aligned}$$

A Lipschitz-feltétel miatt a  $Q := K_\mu$  (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan  $L_Q \geq 0$  konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q),$$

speciálisan

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty &\leq \\ L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty &\leq L_Q \cdot \rho(\psi, \phi) \quad (t \in I_*). \end{aligned}$$

Ezért

$$\rho(T\psi, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi, \phi).$$

Tehát a  $T$  leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a  $\delta_1, \delta_2$ -t, (ezt - az "eddig"  $I_*$ -ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan  $\psi \in \mathcal{F}$ , amelyre

$$T\psi = \psi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

A  $T$  definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_{\tau}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Ez azt jelenti, hogy a  $\varphi$  függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért  $\varphi \in D$  és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Világos, hogy a  $\varphi(\tau) = \xi$ , más szóval a  $\varphi$  megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■