Analízis alkalmazásai vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1 Vizsgakérdés

Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).

Legyenek n, $m \in \mathbf{N}$ természetes számok, ahol $2 \le n$ és $1 \le m \le n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m,$$

akkor az f-et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f-nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a-nak egy olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a b-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x,\, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x,\, y) = 0.$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az $(a,\, b)$ körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1,\, \dots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \dots,\, y_m) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1,\, \dots,\, x_{n-m},\, y_1,\, \dots,\, y_m) & = & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1,\, \dots,\, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1,\, \dots,\, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

1.1 Implicitfüggvény-tétel

Tétel. *Adott* $n,\, m \in \mathbf{N}$, $2 \leq n$, *valamint* $1 \leq m < n$ *mellett az*

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, *és az* $(a,\, b) \in int\mathcal{D}_f$ *helyen*

$$f(a,\, b) = 0,\, \det \partial_2 f(a,\, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ *környezetekkel létezik az* f *által az* $(a,\, b)$ *körül meghatározott*

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x,\, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x,\, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R},\, h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r,\, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h_{|_I})^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h_{|_I})^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többáltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

függvény és az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a-ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a-beli *lokális inverzének* nevezzük.

1.2 Inverzfüggvény-tétel

Tétel. *Legyen* $1 \leq n \in \mathbf{N}$, *és* $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. *Tegyük fel, hogy egy* $a \in int\mathcal{D}_f$ *pontban* $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. *Ekkor alkalmas* $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ *környezettel az* $f_{|_{K(a)}}$ *leszűkítés invertálható, a* $g := (f_{|_{K(a)}})^{-1}$ *lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és*

$$h'(x) = \big(f'(h(x))\big)^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

2 Vizsgakérdés

Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).

Legyen $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, és

$$f : U \to \mathbf{R},\ g = (g_1,\ \dots,\ g_m) : U \to \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a c-ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az $f(c)$-re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá c-re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre nézve, akkor egy alkalmas $K(c)$ környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \quad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

2.1 Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n$, $m \in \mathbf{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, hogy

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő λg függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó f függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is.

Bizonyítás. A rangfeltétel szerint a $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrixnak van olyan $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ részmátrixa, amelyre $\det A \neq 0$. Feltehető, hogy az A-t a $g'(c)$ mátrix utolsó m oszlopa határozza meg, amikor is az $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ felbontást úgy képzeljük el, hogy a

$$\xi = (\xi_1, \ldots, q, \xi_n) = (x, y) \in \mathbf{R}^n$$

vektorokra

$$x := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően $c = (a, b)$. Ekkor tehát

$$\det \partial_2 g(a, b) = \det A \neq 0.$$

Mivel $g(a, b) = 0$, ezért alkalmazható az implicitfüggvény tétel: alkalmas

$$K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m},\ K(b) \subset \mathbf{R}^m$$

környezettel létezik a g függvény által az (a, b) körül meghatározott

$$h : K(a) \to K(b)$$

$h \in C^1$ implicitfüggvény:

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{g = 0\} = \{(x,\, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -\big(\partial_2 g(x,\, h(x))\big)^{-1} \cdot \partial_1 g(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas $K(c) \subset U$ környezettel (pl.)

$$f(\xi) \le f(c) \quad \big(\xi = (x,\, y) \in K(c) \cap \{g = 0\}\big).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvényre $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}$ és

$$\Phi(x) \le f(c) = \Phi(a) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Más szóval a Φ függvénynek az a-ban lokális maximuma van. A Φ differenciálható, ezért

$$\Phi'(a) = \operatorname{grad} \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x,\, h(x)) \quad \big(x \in K(a)\big)$$

függvénnyel $\Phi = f \circ \varphi$ és $\varphi \in D$, valamint I-vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$-beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times(n-m)} \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Következésképpen

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = f'(a,\, h(a)) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$f'(c) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = \partial_1 f(c) + \partial_2 f(c) \cdot h'(a) =$$

$$\partial_1 f(c) - \partial_2 f(c)\cdot\big(\partial_2 f(c)\big)^{-1}\cdot\partial_1 g(c) = \partial_1 f(c) + \lambda\cdot\partial_1 g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_2 f(c)\cdot\big(\partial_2 g(c)\big)^{-1}\in\mathbf{R}^m.$$

Tehát (a ∂_1 értelmezéséből)

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\partial_k g_l(c) = 0 \quad (k=1,\ldots,n-m). \tag{1}$$

A λ vektor definíciójából "átszorzással" azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 f(c) + \lambda\cdot g(c) = 0,$$

azaz (a ∂_2 definíciójából)

$$\partial_j f(c) + \sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\partial_j g_l(c) = 0 \quad (j=n-m+1,\,\ldots,\,n). \tag{2}$$

A (1), (2) formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\partial_k g_l(c) = 0 \quad (k=1,\,\ldots,\,n),$$

más szóval

$$\operatorname{grad}(f+\lambda g)(c) = 0 =$$
$$\Big(\partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\partial_1 g_l(c),\,\ldots,\,\partial_n f(c) + \sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\partial_n g_l(c)\Big) = 0.$$

■

Legyen adott a

$$Q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

kvadratikus alak, a $B\in\mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x\in\mathbf{R}^n : Bx = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m<n$, és a B mátrix rangja m. Ekkor azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus alak a B-re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x)>0$ $(0\neq x\in\mathcal{A}_B)$;
2. *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x)>0$ $(0\neq x\in\mathcal{A}_B)$;
3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x)\geq 0$ $(x\in\mathcal{A}_B)$;
4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x)\leq 0$ $(x\in\mathcal{A}_B)$.

2.2 Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $1 \leq n, m \in \mathbf{N}, m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy f, $g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja m, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre

1. $\operatorname{grad} F(c) = 0$;
2. A Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Idézzük fel, hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x, x \rangle \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$