Analízis 4

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1 Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel. A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége, unicitási tétel.

1.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;
4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciatétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbb{N}$ mellett az $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt. Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

1.2 Egzisztenciatétel

Tétel (Picard-Lindelöf). *Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.*

Bizonyítás (vázlat). Legyenek a $\delta_1,\, \delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to \Omega : \psi \in C\}.$$

Az $\mathcal{F}$ halmaz a

$$\rho(\phi,\, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi,\, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha $\mathcal{X}$ jelöli a

$$g : I_* \to \mathbb{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \mathbb{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F},\, x \in I_*).$$

Tehát az f függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" $f_1,\, \ldots,\, f_n$ szimbólumokkal jelölve, a $\psi,\, f$ függvények (és egyúttal az f_i-k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t,\, \psi(t)) \in \mathbb{R} \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

függvények folytonosak. következőképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt \quad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

integráloknak, és így a

$$\xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt := (\xi_1 + d_1,\, \dots,\, \xi_n + d_n) \in \mathbb{R}^n$$

"integrálvektoroknak". Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x,\, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_\tau^x f(t,\, \psi(t))\, dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_\mu := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - \xi\|_\infty \le \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x,\, y)\|_\infty : x \in I_*,\, y \in K_\mu\}$$

(ami meg az f folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_\mu$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x f_i(t,\, \psi(t))\, dt\right| : i = 1,\, \dots,\, n\right\} \le \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az $\mathcal{F}$ definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to K_\mu : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$-val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1,\, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \le \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is $\mathcal{F}$-beli. (Ha a kiindulásul választott δ_1, δ_2-re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a δ_1, δ_2 helyébe olyan "új" $0 < \tilde{\delta_1}$, $\tilde{\delta_2}$-t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta_1},\, \tau + \tilde{\delta_2}] \subset [\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2]$$

és
$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$
legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I_*} := [\tau - \tilde{\delta_1},\, \tau + \tilde{\delta_2}]$ intervallummal az "új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta_1},\, \tilde{\delta_2}\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi,\, \psi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\rho(T\psi,\, T\phi) = \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} =$$

$$\max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))\, dt)\right| : i = 1,\, \ldots,\, n\right\} : x \in I_*\right\} \leq$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t,\, \psi(t)) - f_i(t,\, \phi(t))| : i = 1,\, \ldots,\, n\}\, dt\right| : x \in I_*\right\} =$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty\, dt\right| : x \in I_*\right\}.$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t,\, y) - f(t,\, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I,\, y,\, z \in Q),$$

speciálisan
$$\|f(t,\, \psi(t)) - f(t,\, \phi(t))\|_\infty \leq$$
$$L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty \leq L_Q \cdot \rho(\psi,\, \phi) \quad (t \in I_*).$$

Ezért
$$\rho(T\psi,\, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi,\, \phi).$$

Tehát a T leképezés
$$L_Q \cdot \max\{\delta_1,\, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2-t, (ezt - az "eddigi" I_*-ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre
$$T\phi = \phi.$$

Legyen
$$\varphi(x) := \psi(x) \quad \big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\big).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t,\, \varphi(t))\, dt \quad \Big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\Big).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x,\, \varphi(x)) \quad \Big(x \in (\tau - \delta_1,\, \tau + \delta_2)\Big).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■
$\psi : I_* \to \Omega$, $\psi \in C$

$$F(t) := (t, \psi(t)) \quad (t \in I_*)$$