Analízis III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

A jegyzet egy az egyben Dr. Simon Péter analízis 3 segédanyagából lett összegyűjtve. Elsősorban magamnak írtam, hogy elősegítse a felkészültést a vizsgára.

Tartalom

1 Metrikus-, normált-, euklideszi-terek

Teljes vizsgacím: Metrikus-, normált-, euklideszi-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz. Torlódási pont, zárt halmaz. Nyílt (zárt) halmazok uniója, metszete. A $(\mathbb{K}^n,\, \varrho_p)$, $(\mathbb{K}^n,\, ||.||_p)$, $(\mathbb{K}^n,\, \langle . \rangle)$, $(C[a,\, b],\, \varrho_p)$, $(C[a,\, b],\, ||.||_p)$, $(0 < n \in \mathbb{N},\, 1 \le p \le +\infty)$ terek.

1.1 Metrikus terek

Konkrét példák sokasága vezet el a távolság-fogalom absztakciójához: legyen az $X \neq \emptyset$ egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy a

$$\varrho : X^2 \to [0,\, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. minden $x \in X$ esetén $\varrho(x,\, x) = 0$;
2. ha $x,\, y \in X$ és $\varrho(x,\, y) = 0$, akkor $x = y$;
3. bármely $x,\, y \in X$ választással $\varrho(x,\, y) = \varrho(y,\, x)$;
4. tetszőleges $x,\, y,\, z \in X$ elemekkel $\varrho(x,\, y) \le \varrho(x,\, z) + \varrho(y,\, z)$.

Azt mondjuk, hogy ekkor a ϱ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval *metrika*). Ha $x,\, y \in X$, akkor $\varrho(x,\, y)$ az $x,\, y$ elemek *távolsága*. Az $(X,\, \varrho)$ rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük.

Az X-beli elemek távolsága tehát nemnegatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága *nulla* (ld. 1.), továbbá két különböző elem távolsága mindig *pozitív* (ld. 2.). A távolság *szimmetrikus*, azaz két elem távolsága független az illető elemek sorrendjétől (ld. 3.). A 4. tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni.

Mutassuk meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből annak az alábbi változata is következik:

$$|\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z)| \le \varrho(x,\, z) \quad (x,\, y,\, z \in X).$$

Ugyanis a 4. axióma miatt

$$\varrho(x,\, z) \le \varrho(x,\, y) + \varrho(y,\, z),$$

tehát

$$\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z) \le \varrho(x,\, y).$$

Ha itt x-et és az y-t felcseréljük, akkor a

$$-\Big(\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z)\Big) = \varrho(y,\, z) - \varrho(x,\, z) \le \varrho(y,\, x) = \varrho(x,\, y)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utóbbi két becslés egybevetésével kapjuk a jelzett egyenlőtlenséget.

Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható

$$\varrho : X^2 \to [0,\, +\infty)$$

távolságfüggvény, ui., pl. a

$$\varrho(x,\, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \qquad \big((x,\, y) \in X^2\big)$$

leképezés nyilván eleget tesz a fenti, a metrikát meghatározó 1.-4. axiómáknak. Az így definiált $(X,\, \varrho)$ teret *diszkrét* jelzővel illetjük.

Megmutatható, hogy az 1.-3. axiómák nem függetlenek egymástól, nevezetesen: ha egy

$$\varrho : X^2 \to \mathbb{R}$$

függvény rendelkezik az 1., 2., 4., tulajdonságokkal, akkor a ϱ metrika.

1.1.1 Példák

Soroljunk fel néhány példát amelyek nem csupán az analízisben játszanak fontos szerepet.

1. Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$, és

   $$x = (x_1,\, \ldots,\, x_n),\, y = (y_1,\, \ldots,\, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

   esetén definiáljuk az $(x,\, y)$-ban a

   $$\varrho_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0,\, +\infty)$$

   függvény helyettesítési értékét a következőképpen:

   $$\varrho_p(x,\, y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p & (p \leq 1) \\ \displaystyle\left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

   Terjesszük ki a ϱ_p értelmezését $p = \infty := +\infty$-re is az alábbiak szerint:

   $$\varrho_\infty(x,\, y) := \max\{|x_i - y_i| : i = 1,\, \ldots,\, n\}.$$

   Belátható, hogy $(\mathbb{K}^n,\, \varrho_p)$ metrikus tér. A későbbiekben a ϱ_∞ metrika mellett a $\mathbb{K}^n$-beli vektorok távolságának a mérésére többnyire a

   $$\varrho_2(x,\, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (x,\, y \in \mathbb{K}^n),$$

   $$\varrho_1(x,\, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (x,\, y \in \mathbb{K}^n),$$

   metrikákat fogjuk használni. Speciálisan az $n = 1$ esetben

   $$\varrho_p(x,\, y) = |x - y| \quad (x,\, y \in \mathbb{K},\, p \geq 1).$$

2. Tekintsük egy $0 < p < +\infty$ mellett az

$$\ell_p := \left\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\right\}$$

halmazokat. Legyen továbbá $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_p$ esetén

$$\varrho_p(x,\, y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p & (0 < p \le 1) \\ \displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy az így definiált ϱ_p függvény is metrika, azaz $(\ell_p,\, \varrho_p)$ metrikus tér. A $p = \infty := +\infty$-re való ”kiterjeszést” a következőképpen kapjuk:

$$\ell_\infty := \left\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty\right\}$$

(más szóval az ℓ_∞ szimbólum a korlátos számsorozatok halmazát jelöli), valamint az ℓ_∞-beli $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ elemekre

$$\varrho_\infty(x,\, y) := \sup\Big\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

A ϱ_∞ függvény is metrika, tehát $(\ell_\infty,\, \varrho_\infty)$ is metrikus tér.

3. Valamilyen $[a,\, b]$ korlátos és zárt intervallum esetén $(a,\, b \in \mathbb{R},\, a < b)$ esetén jelöljük $C[a,\, b]$-vel az $[a,\, b]$-n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $0 < p \le +\infty$, akkor tekintsük az 1., 2. példák alábbi ”folytonos” változatait: ha $f,\, g \in C[a,\, b]$, akkor

$$\varrho_p(f,\, g) := \begin{cases} \displaystyle\int_a^b |f - g|^p & (0 < p \le 1) \\ \displaystyle\left(\int_a^b |f - g|^p\right)^{1/p} & (1 < p < +\infty) \\ \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,\, b]\} & (p = \infty := +\infty). \end{cases}$$

Az előbbi példákhoz hasonlóan látható be, hogy $(C[a,\, b],\, \varrho_p)$ is metrikus tér.

Azt mondjuk, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és egy X^2-en értelmezett

$$\varrho,\, \sigma : X^2 \to [0,\, +\infty)$$

metrikák esetén a ϱ és a σ *ekvivalens*, ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot \varrho(x,\, y) \le \sigma(x,\, y) \le C \cdot \varrho(x,\, y) \quad (x,\, y \in X).$$

Könnyű belátni, hogy ha $\mathcal{M}$ jelöli az előbb említett metrikák halmazát, és a ϱ, $\sigma \in \mathcal{M}$ elemekre $\varrho \sim \sigma$ azt jelenti, hogy a ϱ és a σ ekvivalens, akkor az így értelmezett ($\mathcal{M}^2$-beli) $\sim$ reláció ekvivalencia.

Pl. a fenti $(\mathbb{K}^n,\, \varrho_p)$ metrikus terekre a ϱ_p metrikák közül $p \geq 1$ esetén bármelyik kettő ekvivalens. A továbbiakban az

$$X := \mathbb{K}^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

esetben a ϱ_2, ϱ_1, ϱ_∞ metrikák bármelyikét fogjuk használni.

1.2 Normált terek

Tegyük fel, hogy a szóban forgó $X \neq \emptyset$ halmaz lineáris tér a $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy a

$$||.||X \to [0,\, +\infty)$$

leképezés *norma*, ha

1. $||0|| = 0$;
2. ha $x \in X$ és $||x|| = 0$, akkor $x = 0$;
3. bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ esetén $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
4. tetszőleges x, $y \in X$ elemekre $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Egy $x \in X$ elemre az $||x||$ nemnegatív számot az x *hosszának* (vagy *normájának*), az $(X,\, ||.||)$ rendezett párt pedig *normált térnek* nevezzük.

A 4. axiómát szintén *háromszög-egyenlőtlenségként* említjük a későbbiekben. Ha pl. X jelöli a

$$\mathbb{K}^n\,(0 < n \in \mathbb{N}), \quad \ell_p\,(0 < p \in \mathbb{R}), \quad C[a,\, b]\,(-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, akkor a vektorok szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve az X lineáris tér a $\mathbb{K}$, ill. az $\mathbb{R}$ felett. Az említett terekben a nulla-elemet 0-val jelölve azt kapjuk továbbá, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$||x||_p := \varrho_p(x,\, 0) \quad (x \in X)$$

norma, azaz ilyen p-kre

$$(\mathbb{K}^n,\, ||.||_p),\ (\ell_p,\, ||.||_p),\ (C[a,\, b],\, ||.||_p)$$

normált terek. Tehát

$$||x||_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max\{|x_i| : i = 1,\, \ldots,\, n\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \Big(x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{K}^n\Big)$$

speciálisan az $n = 1$ esetben

$$||x||_p = |x| \quad (x \in \mathbb{K},\, 1 \leq p \leq +\infty)$$

valamint

$$||y||_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \sup\{|y_i| : i \in \mathbb{N}\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \Big(y = (y_n) \in \ell_p\Big)$$

és

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \max\{|f(x)| : x \in [a,\, b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \Big(f \in C[a,\, b]\Big).$$

Világos, hogy a most mondott példákban

$$\varrho_p(x,\, y) = ||x - y||_p \quad (x,\, y \in X).$$

Sőt, ha most $(X,\, ||.||)$ egy tetszőleges normált teret jelöl, akkor a

$$\varrho(x,\, y) := ||x - y|| \quad \Big((x,\, y) \in X^2\Big)$$

függvény metrika, azaz $(X,\, ||.||)$ metrikus tér:

$$(X,\, \varrho) \equiv (X,\, ||.||).$$

Ekkor pl. a

$$|\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z)| \le \varrho(x,\, y) \quad (x,\, y,\, z \in X)$$

háromszög-egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$\Big|\,||x - z|| - ||y - z||\,\Big| \le ||x - y|| \quad (x,\, y,\, z \in X).$$

Ha itt $z = 0$, akkor

$$\Big|\,||x|| - ||y||\,\Big| \le ||x - y|| \quad (x,\, y \in X).$$

Azt mondjuk, hogy az X ($\mathbb{K}$-feletti) vektortéren értelmezett

$$||.||,\, ||.||_* : X \to [0,\, +\infty)$$

normák *ekvivalensek* (erre is a $||.|| \sim ||.||_*$ jelölést fogjuk használni), ha alkalmas c, C pozitív konstansokkal

$$c \cdot ||x|| \le ||x||_* \le C \cdot ||x|| \quad (x \in X).$$

1.3 Euklideszi terek

A fent bevezetett $||.||_p$ norma a $p = 2$ esetben speciális esete egy tágabb (lineáris algebrából jól ismert) normaosztálynak. Legyen ui. X újra egy lineáris tér a $\mathbb{K}$ felett, az

$$\langle . \rangle : X^2 \to \mathbb{K}$$

függvényről pedig tegyük fel, hogy

1. minden $x,\, y \in X$ mellett $\langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$ (ahol a $\overline{\xi}$ szimbólum a $\xi \in \mathbb{K}$ szám komplex konjugáltját jelöli);

2. bármely $x \in X\ \{0\}$ esetén $\langle x,\, x\rangle \in \mathbb{R}$ és $\langle x,\, x\rangle > 0$;

3. ha $x,\, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\langle \lambda x,\, y\rangle = \lambda\langle x,\, y\rangle$;

4. tetszőleges $x,\, y,\, z \in X$ elemekre fennáll a következő egyenlőség:

$$\langle x + y,\, z\rangle = \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle.$$

Ha $x,\, y \in X$ akkor az $\langle x,\, y\rangle$ számot az $x,\, y$ elemek *skaláris szorzatának*, az $(X,\, \langle .\rangle)$ rendezett párt pedig *skaláris szorzat-térnek* (vagy *euklideszi-térnek*) nevezzük.

Speciálisan itt minden $x \in X$ esetén

$$\langle 0,\, x\rangle = \langle x,\, 0\rangle = 0,$$

ill.

$$\langle x,\, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Tehát

$$\langle x,\, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (azaz $(X,\, \langle .\rangle)$ egy ún. *valós euklideszi tér*), akkor

$$\langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle \quad (x,\, y \in X).$$

Jelentse pl. X a

$$\mathbb{K}^n\, (1 \leq n \in \mathbb{N}), \quad \ell_2, \quad C[a,\, b]\, (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, és

$$\langle x,\, y\rangle = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} & \Big(x = (x_1,\, \ldots,\, x_n),\, y = (y_1,\, \ldots,\, y_n) \in \mathbb{K}^n\Big) \\ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_n\overline{y_n} & \Big(x = (x_n),\, y = (y_n) \in \ell_2\Big) \\ \int\limits_a^b xy & (x,\, y \in C[a,\, b]). \end{cases}$$

Ekkor $(X,\, \langle .\rangle)$ euklideszi tér, továbbá

$$||x||_2 = \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \quad (x \in X).$$

Ez utóbbi egyenlőségnek sokkal általánosabb háttere van, ui. tetszőleges $(X,\, \langle .\rangle)$ euklideszi teret véve

$$||x|| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Itt a háromszög-egyenlőtlenség igazolásában fontos szerep jut az

$$|\langle x,\, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x,\, y \in X)$$

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek. Ezt "lefordítva" az előbb említett euklideszi terekre az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2} \quad (x,\, y \in \mathbb{K}^n),$$

$$\left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i\overline{y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty}|y_i|^2} \quad (x,\, y \in \ell_2),$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2} \quad (f,\, g \in C[a,\, b]).$$

Az $n = 1$ esetben a $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}$-ban az előbb értelmezett skaláris szorzás a kötvetkező:

$$\langle x,\, y\rangle = x\overline{y} \quad (x,\, y \in \mathbb{K}),$$

ill. ekkor

$$||x|| = ||x||_2 = \sqrt{\langle x,\, x\rangle} = \sqrt{|x|^2} = |x| \quad (x \in \mathbb{K}).$$

Nem nehéz belátni, hogy a fenti

$$(\mathbb{K}^n,\, ||.||_p) \quad (1 \leq n \in \mathbb{N},\, 1 \leq p \leq +\infty)$$

normált terek közül $(\mathbb{K}^n,\, ||.||_2)$ az egyetlen, amelyre a $||.||_p$ normát skaláris szorzás "generálja". Másképp fogalmazva az a tény, hogy egy alkalmas $\langle .\rangle$ skaláris szorzással

$$||x||_p = \sqrt{\langle x,\, \rangle} \quad (x \in \mathbb{K}^n),$$

azzal ekvivalens, hogy $p = 2$. Ha ui. $p = 2$, akkor a fentebb láttuk, hogy a $||.||_2$ norma skaláris szorásból származik. Fordítva pedig mindez az ún. *paralelogramma-szabály* következménye: tetszőleges $(X,\, \langle .\rangle)$ tér esetén az

$$||x|| := \sqrt{\langle x,\, \rangle} \quad (x \in X)$$

normára

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \quad (x,\, y \in X).$$

2 Konvergencia metrikus terekben

Eredeti vizsgacím: Konvergens sorozatok metrikus terekben. Konvergencia $\mathbb{K}^n$-ben, a koordináta-sorozatok szerepe. *Bolzano-Weierstrass*-kiválasztási tétel. Konvergencia a $(C[a,\, b],\, ||.||_\infty)$ térben (függvénysorozatok, az egyenletes, ill. a pontonkénti konvergencia fogalma). Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal. A teljesség fogalma, *Banach-tér*, *Hilbert-tér*. A $(C[a,\, b],\, ||.||_\infty)$ tér teljessége.

Legyen az $(X,\, \varrho)$ metrikus tér esetén $b \in X$ és $r > 0$, ekkor a

$$K_r(b) := \{x \in X : \varrho(x,\, b) < r\}$$

halmazt a b elem *r-sugarú környezetének* nevezzük. Használni fogjuk a $K(b)$ jelölést is a $K_r(b)$ helyett, ha az adott szituációban a $K_r(b)$ *környezet sugara* (r) nem játszik szerepet.

Tekintsük a

$$(K^n,\, \varrho_p) \quad (1 \leq n \in \mathbb{N},\, p = 1,\, 2,\, \infty)$$

metrikus tereket. Ekkor $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ és $r > 0$ esetén ezekben a terekben a b vektor r-sugarú $K_r(b)$ környezetei (attól függően, hogy $\varrho = \varrho_1,\, \varrho_2,\, \varrho_\infty$) rendre a következők:

$$K_r^{(1)}(b) := \left\{x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_j - b_j| < r\right\},$$

$$K_r^{(2)}(b) := \left\{x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_j - b_j|^2} < r\right\},$$

$$K_r^{(\infty)}(b) := \left\{x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{K}^n : \max\{|x_j - b_j| : j = 1,\, \ldots,\, n\} < r\right\},$$

Speciálisan a $\mathbb{K}^n := \mathbb{R}^2$ választással a $b = (b_1,\, b_2) \in \mathbb{R}^2$ vektor előbbi környezetei geometriailag (az $\mathbb{R}^2$ "síkot" egy derékszögű koordináta-rendszerrel reprezentálva) könnyen ellenőrihetően a következők:

- $K_r^{(1)}$ egy, a
$$(b_1 - r,\, b_2),\, (b_1,\, b_2 + r),\, (b_1 + r,\, b_2),\, (b_1,\, b_2 - r)$$
pontok (mint csúcspontok) által meghatározott *rombusz* (csúcsára állított négyzet) belseje,
- $K_r^{(2)}$ egy b középpontú és r sugarú *körlemez* belseje,
- $K_r^{(\infty)}$ pedig egy, a
$$(b_1 - r,\, b_2 - r),\, (b_1 - r,\, b_2 + r),\, (b_1 + r,\, b_2 + r),\, (b_1 + r,\, b_2 - r)$$
pontok (mint csúcspontok) által meghatározott *négyzet* belseje.

Nyilvánvaló, hogy $0 < v \leq r$ esetén

$$K_v(b) \subset K_r(b).$$

Tetszőleges $K_r(a)$ környezet és $b \in K_r(a)$ esetén a

$$0 < v < r - \varrho(b,\, a)$$

feltételnek eleget tevő v ”sugárral”

$$K_v(b) \subset K_r(a).$$

Ha ui. $x \in K_v(b)$, azaz $\varrho(x,\, b) < v$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\varrho(x,\, a) \leq \varrho(x,\, b) + \varrho(b,\, a) < v + \varrho(b,\, a) < r.$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in K_r(a)$, tehát a $K_v(b) \subset K_r(a)$ tartalmazás valóban fennáll.

Nevezzük valamilyen $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz esetén az $a \in A$ pontot az A halmaz *belső pontjának*, ha egy alkalmas $K(a)$ környezettel

$$K(a) \subset A$$

teljesül. Az tulajdonságú pontok által alkotott halmaz az A ún. *belseje*, amit az

$$\operatorname{int} A$$

szimbólummal fogunk jelölni. Nyilván $\operatorname{int} X = X$, míg az

$$X := \mathbb{R},\ \varrho(x,\, y) := |x - y| \quad (x,\, y \in \mathbb{R})$$

esetben $\operatorname{int}\{a\} = \emptyset\,(a \in \mathbb{R})$. Állapodjuk meg abban, hogy

$$\operatorname{int} \emptyset := \emptyset.$$

Tehát bármely $A \subset X$ halmazra

$$\operatorname{int} A \subset A.$$

Könnyű meggondolni ugyanakkor, hogy pl. tetszőleges $K(a)$ környezetre

$$\operatorname{int} K(a) = K(a).$$

Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *nyílt*, ha

$$\operatorname{int} A = A.$$

Így pl. az $\emptyset$ (az üreshalmaz) nyílt halmaz, ill. bármely környezet is az. Más megfogalmazásban tehát egy $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az A minden pontja belső pontja az A-nak:

$$a \in A \Longrightarrow a \in \operatorname{int} A.$$

Ismételjük el újra, hogy mit is jelent ez: az

$$\emptyset \neq A \subset X$$

halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha tetszőleges $a \in A$ elemének létezik olyan $K(a)$ környezete, hogyá

$$K(a) \subset A.$$

Bármely (X, ϱ) metrikus tér esetén az X "alaphalmaz" nyílt halmaz. Ha pl. (X, ϱ) a diszkrét metrikus tér, amikor is

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \quad (x, y \in X),$$

akkor az X összes részhalmaza nyílt halmaz. Valóban, ekkor (pl.)

$$K_{1/2}(a) = \{a\} \quad (a \in X),$$

következésképpen tetszőleges $\emptyset \neq A \subset X$ halmazra és $a \in A$ pontra

$$K_{1/2}(a) = \{a\} \subset A.$$

Tehát $a \in \operatorname{int} A$. Egyúttal minden $x \in X$ pontra az $\{x\}$ halmaz is nyílt. Ha viszont a ϱ metrika olyan, hogy bármelyik $a \in X$ elemhez és tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $a \neq x \in X$, hogy

$$\varrho(x, a) < r,$$

akkor az X egyelemű részhalmazai közül egyik sem nyílt. Ti. ebben az esetben (az előbbi jelölésekkel) $x \in K_r(a)$, ezért $x \neq a$ miatt $K_r(a)$ nem lehet részhalmaza az $\{a\}$ halmaznak. Ez azt jelenti, hogy $\int\{a\} = \emptyset \neq \{a\}$. Ilyen tulajdonságú metrikus terek pl. a

$$(\mathbb{K}^n, \varrho_p) \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek.

Legyen

$$\mathcal{T}_p(X) := \mathcal{T}_p := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ nyílt}\}.$$

Az X nyílt részhalmazai által meghatározott $\mathcal{T}_p$ halmazrendszert az (X, ϱ_p) metrikus tér *topológiájának* nevezzük.

2.1 Nyílt halmazok uniója és metszete

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \subset X$ $\gamma \in \Gamma$ halmazok valamennyien nyíltak az (X, ϱ) metrikus térben. Ekkor

- az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is nyílt;
- ha a Γ halmaz véges, akkor a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszetük is nyílt.

Bizonyítás. Legyen $a \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Ekkor egy $\nu \in \Gamma$ indexszel $a \in A_\nu$. Mivel az A_ν halmaz nyílt, ezért alkalmaz $K(a)$ környezettel $K(a) \subset A_\nu$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_\nu \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma,$$

így egyúttal

$$K(a) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$$

is teljesül. Más szóval $a \in \operatorname{int}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$, azaz $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ nyílt halmaz.

Most tegyük fel, hogy a Γ halmaz véges, és legyen $a \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma$ mellett $a \in A_\gamma$, következésképpen az A_γ-k nyíltsága miatt egy $r_\gamma > 0$ sugárral

$$K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma.$$

Ha

$$r := \min\{r_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

(ami egy pozitív szám), akkor $r \leq r_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ miatt

$$K_r(a) \subset K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma),$$

így

$$K_r(a) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma.$$

Tehát $a \in \operatorname{int}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$ metszethalmaz nyílt.

Gondoljuk meg, hogy tetszőleges (X, ϱ) metrikus térben minden $A \subset X$ halmazra

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T,$$

ahol $\mathcal{A}$ jelöli az X halmaz összes olyan $T \subset X$ nyílt részhalmaza által alkotott halmazrendszert, amelyre $T \subset A$.

Az előző tétel miatt az $\operatorname{int} A = \bigcup_{T\in\mathcal{A}}$ halmaz nyílt, továbbá

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{T\in\mathcal{A}} \subset A.$$

Az is világos, hoyg ha $C \subset X$ olyan nyílt halmaz, amelyre $C \subset A$, akkor $C \subset \operatorname{int} A$. Ezért is szokták az int A halmazt az A *legbővebb nyílt részhalmazának nevezni.* Speciálisan, ha $A \subset X$

nyílt, akkor $A \in \mathcal{A}$ és $A = \operatorname{int} A$.

Tegyük fel, hogy adottak (X, ϱ), (X, σ) metrikus terek és $\varrho \sim \sigma$ (azaz a ϱ metrika ekvivalens a σ-val). Ekkor

$$\mathcal{T}_\varrho(X) = \mathcal{T}_\sigma(X),$$

tehát a két tér topológiája egybeesik. Más szóval az X nyílt részhalmazai a két metrika szerint ugyanazok.

Valóban, ha a c, $C > 0$ konstansokkal

$$c \cdot \varrho(x, y) \le \sigma(x, y) \le C \cdot \varrho(x, y) \quad (x, y \in X),$$

akkor tetszőleges $a \in X$, $r > 0$ esetén σ-szerinti

$$K_r^{(\sigma)}(a) := \{x \in X : \sigma(x, a) < r\}$$

környezetre

$$K_{r/C}^{(\varrho)}(a) \subset K_r^{(\sigma)}(a),$$

ahol

$$K_{r/C}^{(\varrho)}(a) := \{x \in X : \varrho(x, a) < r/C\}.$$

Ha ui. $x \in K_{r/C}^{(\varrho)}(a)$, azaz $\varrho(x, a) < r/C$, akkor

$$\sigma(x, a) \le C \cdot \varrho(x, a) < C \cdot \frac{r}{c} = r,$$

más szóval $x \in K_r^{(\sigma)}(a)$. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$K_{cr}^{(\sigma)}(a) \subset K_r^{(\varrho)}(a).$$

Ha tehát $\emptyset \ne A \subset X$, $a \in A$ és egy alkalmas $r > 0$ sugárral

$$K_r^{(\sigma)}(a) \subset A,$$

akkor az előbbiek szerint

$$K_{r/C}^{(\varrho)}(a) \subset A$$

is igaz, ill.

$$K_r^{(\varrho)}(a) \subset A$$

esetén

$$K_{cr}^{(\sigma)}(a) \subset A.$$

Következésképpen az a tény, hoyg $a \in \operatorname{int} A$, független attól, hogy az (X, ϱ), vagy az (X, σ) metrikus térben "vagyunk". így az $\operatorname{int} A = A$ egyenlőség is pontosan akkor teljesül a ϱ metrika értelmében, ha a σ szerint is fennáll. Röviden:

$$A \in \mathcal{T}_\varrho(X) \Longleftarrow A \in \mathcal{T}_\sigma(X).$$

Az (X, ϱ) metrikus térben az $A \subset X$ halmazt *zártnak* fogjuk nevezni, ha az $X \setminus A$ (komplementer) halmaz nyílt. Világos, hogy pl. az $\emptyset$, X halmazok zártak, vagy pl. a diszkrét metrikus térben minden halmaz zárt.

Tetszőleges (X, ϱ) metrikus térben minden egyelemű halmaz zárt. Legyen ui. $a \in X$, ekkor bármely $b \in X \setminus \{a\}$ elemre $\varrho(a, b) > 0$. Ha

$$0 < v \leq \varrho(a, b)$$

és $x \in K_v(b)$, akkor

$$\varrho(a, x) \geq \varrho(a, b) - \varrho(x, b) > \varrho(a, b) - v \geq \varrho(a, b) - \varrho(a, b) = 0,$$

azaz $\varrho(a, b) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $x \neq a$, más szóval $x \in X \setminus \{a\}$. Ezért

$$K_v(b) \subset X \setminus \{a\},$$

röviden: az $X \setminus \{a\}$ halmaz nyílt, tehát $\{a\}$ valóban zárt.

Világos, hogy az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az $X \setminus A$ halmaz zárt.

Nyilvánvaló, hogy az ekvivalens metrikákkal kapcsolatban a topológiákra kapott egyenlőség igaz marad az egyes metrikákra nézve zárt halmazok által meghatározott halmazrendszerekre is. Ha tehát (X, ϱ), (X, σ) olyan metrikus terek, hogy $\varrho \sim \sigma$, akkor

$$\mathcal{C}_\varrho(X) = \mathcal{C}_\sigma(X),$$

ahol általában egy (X, δ) metrikus tér esetén

$$\mathcal{C}_\delta := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ zárt } \}.$$

Az ismert De Morgan-azonosságokra utalva az előző tételből rögtön következik a

2.2 Zárt halmazok uniója, metszete

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \subset X$ $(\gamma \in \Gamma)$ halmazok valamennyien zártak az (X, ϱ) metrikus térben. Ekkor

- a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszetük is zárt;
- ha a Γ halmaz véges, akkor az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is zárt.

Tekinstük az (X, ϱ) metrikus térben az $A \subset X$ halmazt, és jelöljük $\mathcal{X}$-szel az összes olyan $B \subset X$ zárt halmaz által alkotott halmazrendszert, amelyre $A \subset B$. Világos, hogy $\mathcal{X} \neq \emptyset$, hiszen nyilván $X \in \mathcal{X}$. Az előző tétel szerint az

$$\overline{A} := \bigcap_{B \in \mathcal{X}} B$$

halmaz zárt, és mive minden $B \in \mathcal{X}$ esetén $A \subset B$, ezért

$$A \subset \overline{A}.$$

Az is világos, hogy ha a $C \subset X$ halmaz zárt és $A \subset C$, akkor $\overline{A} \subset C$, ui. $C \in \mathcal{X}$. (Ezért is szokták az $\overline{A}$ halmazt az A-t lefedő legszűkebb zárt halmazként említeni.)