

Analízis alkalmazásai vizsgatematika

Dr. Simon Péter jegyzetéből

Tartalom

1	Vizsgakérdés	2
1.1	Implicitfüggvény-tétel	4
1.2	Inverzfüggvény-tétel	5
2	Vizsgakérdés	6
2.1	Elsőrendű szükséges feltétel	7
2.2	Másodrendű elégséges feltétel	10
3	Vizsgakérdés	11
3.1	Közönséges differenciálegyenletek	11
3.2	Teljes megoldás	12
3.3	Szeparábilis differenciálegyenlet	12
3.4	Rakéta emelkedési ideje	15
3.5	Egzakt differenciálegyenlet	16
4	Vizsgakérdés	18
4.1	Lineáris differenciálegyenlet	18
4.2	Radioaktív bomlás	22
5	Vizsgakérdés	23
5.1	Lipschitz-feltétel	23
5.2	Egzisztenciátétel	24

1 Vizsgakérdés

Az implicitfüggvény fogalma, kapcsolata a feltételes szélsőérték problémával és az inverzfüggvénnyel. Implicitfüggvény-tétel, inverzfüggvény-tétel (a bizonyítás vázlata).

Legyenek $n, m \in \mathbf{N}$ természetes számok, ahol $2 \leq n$ és $1 \leq m \leq n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és ezt következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

akkor az f -et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f -nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a -nak egy olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a b -nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Itt minden $x \in K(a)$ mellett az $y = \varphi(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely amelyre

$$f(x, y) = 0.$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1, \dots, x_{n-m}) \in K(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1, \dots, y_m) = \varphi(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $\varphi(a) = b$.

1.1 Implicitfüggvény-tétel

Tétel. Adott $n, m \in \mathbf{N}$, $2 \leq n$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, és az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a, b) = 0, \det \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a), K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \rightarrow K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in K(a)).$$

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultakat. Ha pl.

$$h \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h \in C^1\{a\}$$

és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$I := (a - r, a + r) \subset \mathcal{D}_h,$$

létezik a $(h|_I)^{-1}$ inverzfüggvény, a $g := (h|_I)^{-1}$ függvény differenciálható és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

A továbbiakban a most megfogalmazott "egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többváltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az

$$f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény és az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a -ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f|_{K(a)}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a -beli *lokális inverzének* nevezzük.

1.2 Inverzfüggvény-tétel

Tétel. Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, és $f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Tegyük fel, hogy egy $a \in \text{int}\mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$, $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel az $f|_{K(a)}$ leszűkítés invertálható, a $g := (f|_{K(a)})^{-1}$ lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$h'(x) = (f'(h(x)))^{-1} \quad (x \in \mathcal{D}_h).$$

2 Vizsgakérdés

Feltételes szélsőérték, szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).

Legyen $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, és

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}, g = (g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan *feltételes lokális maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \quad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a c -ben lokális maximuma (minimuma) van. Feltesszük, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

Használjuk az $f(c)$ -re a *feltételes lokális maximum (minimum)*, ill. *szélsőérték*, továbbá c -re a *feltételes lokális maximumhely (minimumhely)*, ill. *szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az f -nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre nézve, akkor egy alkalmas $K(c)$ környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \quad (\xi \in \{g = 0\} \cap K(c))$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \quad (\xi \in \{g = 0\} \cap K(c))$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

2.1 Elsőrendű szükséges feltétel

Tétel. Tegyük fel, hogy $1 \leq n$, $m \in \mathbf{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f -nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja megegyezik m -mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, hogy

$$\text{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

A tételben szereplő λg függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda, g(\xi) \rangle \quad (\xi \in U).$$

Ez tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó f függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan.

Ez az analógia megmarad a másodrendű feltételeket illetően is.

Bizonyítás. A rangfeltétel szerint a $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrixnak van olyan $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ részmátrixa, amelyre $\det A \neq 0$. Feltehető, hogy az A -t a $g'(c)$ mátrix utolsó m oszlopa határozza meg, amikor is az $\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ felbontást úgy képzeljük el, hogy a

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x, y) \in \mathbf{R}^n$$

vektorokra

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, y := (\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően $c = (a, b)$. Ekkor tehát

$$\det \partial_2 g(a, b) = \det A \neq 0.$$

Mivel $g(a, b) = 0$, ezért alkalmazható az implicitfüggvény tétel: alkalmas

$$K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}, K(b) \subset \mathbf{R}^m$$

környezettel létezik a g függvény által az (a, b) körül meghatározott

$$h : K(a) \rightarrow K(b)$$

$h \in C^1$ implicitfüggvény:

$$(K(a) \times K(b)) \cap \{g = 0\} = \{(x, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -(\partial_2 g(x, h(x)))^{-1} \cdot \partial_1 g(x, h(x)) \quad (x \in K(a)).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas $K(c) \subset U$ környezettel (pl.)

$$f(\xi) \leq f(c) \quad (\xi = (x, y) \in K(c) \cap \{g = 0\}).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x, h(x)) \quad (x \in K(a))$$

függvényre $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \rightarrow \mathbf{R}$ és

$$\Phi(x) \leq f(c) = \Phi(a) \quad (x \in K(a)).$$

Más szóval a Φ függvénynek az a -ban lokális maximuma van. A Φ differenciálható, ezért

$$\Phi'(a) = \text{grad } \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x, h(x)) \quad (x \in K(a))$$

függvénnyel $\Phi = f \circ \varphi$ és $\varphi \in D$, valamint I -vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ -beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times (n-m)} \quad (x \in K(a)).$$

Következésképpen

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = f'(a, h(a)) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$f'(c) \cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = \partial_1 f(c) + \partial_2 f(c) \cdot h'(a) =$$

$$\partial_1 f(c) - \partial_2 f(c) \cdot (\partial_2 f(c))^{-1} \cdot \partial_1 g(c) = \partial_1 f(c) + \lambda \cdot \partial_1 g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_2 f(c) \cdot (\partial_2 g(c))^{-1} \in \mathbf{R}^m.$$

Tehát (a ∂_1 értelmezéséből)

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-m). \quad (1)$$

A λ vektor definíciójából "átszorzással" azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 f(c) + \lambda \cdot g(c) = 0,$$

azaz (a ∂_2 definíciójából)

$$\partial_j f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_j g_l(c) = 0 \quad (j = n-m+1, \dots, n). \quad (2)$$

A (1), (2) formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_k g_l(c) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

más szóval

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + \lambda g)(c) &= 0 = \\ \left(\partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_1 g_l(c), \dots, \partial_n f(c) + \sum_{l=1}^m \lambda_l \cdot \partial_n g_l(c) \right) &= 0. \end{aligned}$$

■

Legyen adott a

$$Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

kvadratikus alak, a $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbf{R}^n : Bx = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m < n$, és a B mátrix rangja m . Ekkor azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus alak a B -re nézve

1. *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x) > 0$ ($0 \neq x \in \mathcal{A}_B$);
2. *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x) < 0$ ($0 \neq x \in \mathcal{A}_B$);
3. *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0$ ($x \in \mathcal{A}_B$);
4. *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0$ ($x \in \mathcal{A}_B$).

2.2 Másodrendű elégséges feltétel

Tétel. Az $1 \leq n, m \in \mathbf{N}, m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \rightarrow \mathbf{R}, g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2, c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ Jacobi-mátrix rangja m , továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre

1. $\text{grad } F(c) = 0$;
2. A Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.

Ekkor az f -nek a c -ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Idézzük fel, hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x, x \rangle \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

3 Vizsgakérdés

A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma. Kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat). Egzakt egyenlet, szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.

3.1 Közönséges differenciálegyenletek

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ egy-egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

1. \mathcal{D}_φ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény 1. 2. és 3. mellett tegyen eleget a

4. $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így "kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban mindegyike a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az 1., 2., 3. feltételeknek (ill. az 1., 2., 3., 4. feltételeknek) eleget tevő bármelyik φ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük. A fenti definícióban szereplő f függvény az illető *d.e.* ún. *jobb oldala*.

3.2 Teljes megoldás

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó *k.é.p.* egyértelműen oldható meg, ha tetszőleges φ, ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ egy $(\tau$ -t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor \mathcal{M} a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Ez egy τ -t tartalmazó nyílt intervallum és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a

$$\Phi : J \rightarrow \Omega$$

függvényt az alábbiak szerint:

$$\Phi(x) := \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$ és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \quad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi|_{\mathcal{D}_\varphi}$.

A Φ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

3.3 Szeparábilis differenciálegyenlet

Legyen $n := 1$, továbbá az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \rightarrow \mathbf{R}, h : J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := g(x) \cdot h(y) \quad ((x, y) \in I \times J).$$

A $\varphi \in I \rightarrow J$ megoldásra tehát

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Legyenek még adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ számok, amikor is

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi$$

(kezdetiérték-probléma).

Tétel. Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért egy φ megoldásra

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ is, és az $1/h : J \rightarrow \mathbf{R}$ is egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek a

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}, H : J \rightarrow \mathbf{R}$$

primitív függvényeik: $G' = g$ és $H' = 1/h$. Az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = (H \circ \varphi)'(t) = g(t) = G'(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Tehát (mivel a \mathcal{D}_φ is egy nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen a H

függvény szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor

$$\xi = H^{-1}(G(\tau) + c),$$

azaz

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Így

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha a G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek \tilde{G}, \tilde{H}), akkor alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$\tilde{G} = G + \alpha, \quad \tilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\tilde{H}(\varphi(t)) - \tilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}(G(t) + H(\xi) - G(\tau)) \quad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy τ -t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy van megoldás. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitív függvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x, y) := H(y) - G(x) \quad (x \in I, y \in J).$$

Ekkor az

$$F : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x, y) = -G'(x) = -g(x) \quad (x \in I, y \in J),$$

$$\partial_2 F(x, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \quad (x \in I, y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. Ez azt jelenti, hogy az F függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau, \xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az F -re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel, miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I, K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a (τ, ξ) körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \rightarrow K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amire $\varphi(\tau) = \xi$ és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t, \varphi(t))}{\partial_2 F(t, \varphi(t))} = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \quad (t \in K(\tau)).$$

Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

3.4 Rakéta emelkedési ideje

BEFEJEZNI

3.5 Egzakt differenciálegyenlet

Speciálisan legyen $n := 1$, és az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \text{ és } h : I \times J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x, y) := -\frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad ((x, y) \in I \times J).$$

Ekkor a fenti minden φ megoldásra

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy az így kapott d.e. *egzakt differenciálegyenlet*, ha az

$$I \times J \ni (x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y)) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható

$$G : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

függvénnyel

$$\text{grad } G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g, h).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a φ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor igaz az

Tétel. Tetszőleges egzakt differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma megoldható, és ennek bármilyen φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Valóban, $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt a feltételezett φ megoldásra

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$\begin{aligned} F'(x) &= \langle \text{grad } G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle = \\ &g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0. \end{aligned}$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ halmaz nyílt intervallum, ezért az F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(\tau) = \xi$, ezért

$$c = G(\tau, \xi).$$

A G -ről feltehetjük, hogy $G(\tau, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó k.é.p. φ megoldása eleget tesz a

$$G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó k.é.p. minden megoldása (ha létezik) a fenti implicitfüggvény-egyenletről határozható meg.

Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau, \xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau, \xi) = h(\tau, \xi) \neq 0,$$

ezért a G -re (a (τ, ξ) helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható

$$\psi \in I \rightarrow J$$

(implicit)függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum,

$$\tau \in \mathcal{D}_\psi, G(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\psi), \psi(\tau) = \xi,$$

és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x, \psi(x))}{\partial_2 G(x, \psi(x))} = -\frac{g(x, \psi(x))}{h(x, \psi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

■

4 Vizsgakérdés

*Lineáris differenciálegyenlet. Az állandók variálásának módszere.
A radioaktív bomlás felezési idejének meghatározása.*

4.1 Lineáris differenciálegyenlet

Legyen most $n =: 1$ és az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a

$$g, h : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos függvények segítségével

$$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad ((x, y) \in I \times \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$ mellett

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémáról beszélünk.

Tegyük fel, hogy a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása a lineáris d.e.-nek és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot (\theta(t) - \psi(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Így a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelyben $h \equiv 0$:

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*, ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

Tétel. Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges φ, ψ megoldásaira

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Legyen a

$$G : I \rightarrow \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyik differenciálható és $G' = g$ (a g -re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \quad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\varphi_0'(t) = G'(t) \cdot e^{G(t)} = g(t) \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in I).$$

Tegyük fel most azt, hogy a

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény is megoldása a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t) \cdot \chi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \rightarrow \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\chi}{\varphi_0} \right)'(t) &= \frac{\chi'(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} = \\ &= \frac{g(t) \cdot \chi(t) \cdot \varphi_0(t) - \chi(t) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0, \end{aligned}$$

azaz (lévén a \mathcal{D}_χ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \quad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik

$$\chi \in I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható

$$m : I \rightarrow \mathbf{R}$$

függvény, hogy az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (az állandók variálásának módszere). Ehhez azt kell "biztosítani", hogy

$$(m \cdot \varphi_0)' = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m' \cdot \varphi_0 + m \cdot \varphi_0' = m' \cdot \varphi_0 + m \cdot g \cdot \varphi_0 = g \cdot m \cdot \varphi_0 + h.$$

Innen szükséges feltételként az adódik az m -re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a

$$\frac{h}{\varphi_0} : I \rightarrow \mathbf{R}$$

folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás "megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármelyik m primitív függvényét is véve, az $m \cdot \varphi_0$ függvény megoldása a

lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \rightarrow \mathbf{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol m egy tetszőleges primitív függvénye a h/φ_0 függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbf{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ezt megint csak egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= m'(t) \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot \varphi_0'(t) = \\ &= \frac{h(t)}{\varphi_0(t)} \cdot \varphi_0(t) + (c + m(t)) \cdot g(t) \cdot \varphi_0(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \quad (t \in J). \end{aligned}$$

Speciálisan az "egész" I intervallumon értelmezett

$$\psi_c(t) := m(t) \cdot \varphi_0(t) + c \cdot \varphi_0(t) \quad (c \in \mathbf{R}, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik φ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c|_J}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$c := \frac{\xi - m(\tau) \cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma

$$\psi_c : I \rightarrow \mathbf{R}$$

megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján a szóban forgó k.é.p. minden φ , ψ megoldására $\varphi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\varphi}}$ és $\psi = \psi_{c|_{\mathcal{D}_\psi}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

■

4.2 Radioaktív bomlás

BEFEJEZNI

5 Vizsgakérdés

Lipschitz-feltétel. A Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása). A k.é.p. megoldásának az egyértelmősége, unicitási tétel (bizonyítás nélkül).

5.1 Lipschitz-feltétel

Az előzőekben definiáltuk a *k.é.p.* fogalmát: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt, amelyre (a korábban bevezetett jelölésekkel) igazak a következő állítások:

1. \mathcal{D}_φ nyílt intervallum;
2. $\varphi \in D$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$;
4. adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ mellett $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$.

Értelmeztünk a megoldást, az egyértelműen való megoldhatóságot, a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottuk a gyakorlat számára is fontos kezdetiérték-problémákat. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztenciátétel).

Legyenek tehát $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett az $I \subset \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ nyílt intervallumok, az

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvény pedig legyen folytonos. A $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén keressük a fenti differenciálható $\varphi \in I \rightarrow \Omega$ függvényt. Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*.

5.2 Egzisztenciátétel

Tétel (Picard-Lindelöf). *Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.*

Bizonyítás (vázlat). Legyenek a $\delta_1, \delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow \Omega : \psi \in C\}.$$

Az \mathcal{F} halmaz a

$$\rho(\phi, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \quad (\phi, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha \mathcal{X} jelöli a

$$g : I_* \rightarrow \mathbf{R}^n$$

függvények összességét, akkor definiáljuk a

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$$

leképezést a következőképpen:

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t)) dt \in \mathbf{R}^n \quad (\psi \in \mathcal{F}, x \in I_*).$$

Tehát az f függvény koordinátafüggvényeit a "szokásos" f_1, \dots, f_n szimbólumokkal jelölve, a ψ, f függvények (és egyúttal az f_i -k) folytonossága miatt

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t, \psi(t)) \in \mathbf{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

függvények folytonosak. következőképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t, \psi(t)) dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

integráloknak, és így a

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt := (\xi_1 + d_1, \dots, \xi_n + d_n) \in \mathbf{R}^n$$

”integrálvektoroknak”. Továbbá az integrálfüggvények tulajdonságai miatt a $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz ekkor

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_{\tau}^x f(t, \psi(t)) dt \in \Omega \quad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_{\mu} := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - \xi\|_{\infty} \leq \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennáljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{\|f(x, y)\|_{\infty} : x \in I_*, y \in K_{\mu}\}$$

(ami meg az f folytonossága és a Weierstrass-tétel miatt létezik, ti. az $I_* \times K_{\mu}$ halmaz kompakt). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max \left\{ \left| \int_{\tau}^x f_i(t, \psi(t)) dt \right| : i = 1, \dots, n \right\} \leq \mu \quad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az \mathcal{F} definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \rightarrow K_{\mu} : \psi \in C\}.$$

Ekkor az előbbi maximum becsülhető $M \cdot \delta$ -val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Így $M \cdot \delta \leq \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is \mathcal{F} -beli. (Ha a kiindulásul választott δ_1, δ_2 -re $M \cdot \delta > \mu$, akkor írjunk a δ_1, δ_2 helyébe olyan ”új” $0 < \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ -t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2]$$

és

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I}_* := [\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2]$ intervallummal az "új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az

$$M \cdot \max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \leq \mu$$

becslés nem "romlik" el.) Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\begin{aligned} \rho(T\psi, T\phi) &= \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} = \\ \max \left\{ \max \left\{ \left| \int_\tau^x (f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))) dt \right| : i = 1, \dots, n \right\} : x \in I_* \right\} &\leq \\ \max \left\{ \left| \int_\tau^x \max\{|f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))| : i = 1, \dots, n\} dt \right| : x \in I_* \right\} &= \\ \max \left\{ \left| \int_\tau^x \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty dt \right| : x \in I_* \right\}. \end{aligned}$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \quad (t \in I, y, z \in Q),$$

speciálisan

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty &\leq \\ L_Q \cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty &\leq L_Q \cdot \rho(\psi, \phi) \quad (t \in I_*). \end{aligned}$$

Ezért

$$\rho(T\psi, T\phi) \leq L_Q \cdot \delta \cdot \rho(\psi, \phi).$$

Tehát a T leképezés

$$L_Q \cdot \max\{\delta_1, \delta_2\} < 1$$

esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2 -t, (ezt - az "eddig" I_* -ot legfeljebb újra leszűkítve - megtehetjük), és alkalmazzuk a fixpont-tételt, miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre

$$T\psi = \psi.$$

Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_{\tau}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$ és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)).$$

Világos, hogy a $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ■

A fenti Picard Lindelöf-egzisztenciátételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja.

Tétel. *Az előző tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg, azaz bármely φ, ψ megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_{\varphi} \cap \mathcal{D}_{\psi}).$$