Analízis 4

Gyakorlati feladatok

Tartalom

1 Gyakorlat

1.1 Emlékeztető

Definíció. Legyen $1 \leq s \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^s$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *nullmértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbb{R}^s$ $(k \in \mathbb{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tekintsük pl. az $I \subset \mathbb{R}^n$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ intervallum esetén az $f \in R(I)$ függvényt, és legyen

$$\operatorname{graf} f := \{(x,\, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}.$$

Ekkor a $\operatorname{graf} f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ halmaz nullmértékű.

Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ értelmezési tartománya korlátos, akkor van olyan $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum, amellyel $\mathcal{D}_f \subset I$. Legyen ekkor

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{D}_f) \\ 0 & (x \in I \setminus \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha $F_I \in R(I)$, akkor $F_J \in R(J)$ minden olyan $J \subset \mathbb{R}^n$ intervallumra, amelyre $\mathcal{D}_f \subset J$ és

$$\int_I F_I = \int_J F_J.$$

Ez ad értelmet a következő definíciónak:

Definíció. A fenti f függvény *Riemann-integrálható*, ha egy alkalmas $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallummal $\mathcal{D}_f \subset I$ és $F_I \in R(I)$. Az utóbbi esetben

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_{\mathcal{D}_f} f := \int_I F_I.$$

Az előző definició olyan függvényekre is kiterjeszthető, amik értelmezési tartománya nem korlátos, viszont a

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \neq 0\}}$$

tartója igen.

Definíció. Legyen az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

az A *karakterisztikus függvénye*. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Jordan-mérhető*, ha a χ_A függvény integrálható, amikor is a

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$$

nemnegatív szám az A halmaz *Jordan-mértéke*.

Tétel. Tekintsük a nyílt halmazon értelmezett és folytonosan differenciálható

$$g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

függvényt. Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathcal{D}_g$ halmaz kompakt intervallum, továbbá az I belsejére való $g_{|_{\operatorname{int} I}}$ leszűkítés injektív függvény. Ekkor az

$$f : g(I) \to \mathbb{R}$$

korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha az

$$I \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható. Az utóbbi esetben

$$\int_I f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|\, dx = \int_{g[I]} f.$$

Speciális esetek.

1. **Síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amire
$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi, \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \big((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$
Ekkor $g \in C^1$, és
$$\det g'(r, \varphi) = r \quad \big((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

2. **Módosított síkbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amire
$$g(r, \varphi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi, \\ br \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \big((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor $g \in C^1$, és

$$\det g'(r,\, \varphi) = abr \quad \big((r,\, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

3. **Térbeli polárkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire
$$g(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ r \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ r \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$
Ekkor $g \in C^1$, és
$$\det g'(r,\, \varphi,\, \psi) = -r^2 \cdot \sin\psi \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

4. **Módosított térbeli polárkoordináta-transzformáció (elliptikus koordináták).** Legyen $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire
$$g(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ br \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ cr \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$
Ekkor $g \in C^1$, és
$$\det g'(r,\, \varphi,\, \psi) = -abcr^2 \cdot \sin\psi \quad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

5. **Hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire
$$g(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$
Ekkor $g \in C^1$, és
$$\det g'(r,\, \varphi,\, z) = r \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

6. **Módosított hengerkoordináta-transzformáció.** Legyen $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amire
$$g(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} ar \cdot \cos\varphi \\ br \cdot \sin\varphi \\ cz \end{pmatrix} \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$
Ekkor $g \in C^1$, és
$$\det g'(r,\, \varphi,\, z) = abcr \quad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. Ekkor Ω-nak valamely $0 \neq e \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú, ill. $a \in \mathbb{R}^3$ pontra illeszkedő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

$$\mathbf{\Theta}_t = \int_\Omega \ell^2(r)\rho(r)\,dr$$

valós szám, ahol $\ell(r)$ jelöli az $r \in \Omega$ pontnak a t tengelytől mért távolságát:

$$\ell(r) := \inf\{\|r - (a + \tau e)\| \in \mathbb{R} : \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Világos, hogy ha $a = 0$ és $e \in \{e_x,\, e_y,\, e_z\}$, akkor Ω-nak a koordináta-tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\mathbf{\Theta}_{t_x} = \int_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\mathbf{\Theta}_{t_y} = \int_\Omega (x^2 + z^2)\rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\mathbf{\Theta}_{t_z} = \int_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$

Definíció. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-mérhető ponthalmazzal jellemzett test (tömeg)sűrűsége a Riemann-integrálható $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ függvénnyel írható le. (Ha ρ állandó, akkor a testet homogénnek nevezzük.) Ekkor az

$$m(\Omega) := \int_\Omega \rho$$

számot az Ω test tömegének nevezzük. Az Ω tömegközéppontjának koordinátái:

$$\overline{x} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega x \cdot \rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\overline{y} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega y \cdot \rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\overline{z} := \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega z \cdot \rho(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz.$$

1.2 Feladatok

1.2.1 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli testnek a *térfogatát*, amelyet az alábbi egyenletű felületek fognak közre:

$$z = x^2 + y^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2 - y^2.$$

Az egyenletekből kapunk két paraboloidot. Ezek metszetét kell *paraméterezni*. Válasszuk két részre a ponthalmazt. Nézzük meg az $y = 0$ síkban lévő pontokat:

$$z = x^2 - 1 \text{ és } z = 2 - x^2.$$

Ez két ellentétes irányba néző parabola, amik metszete

$$x^2 - 1 = 2 - x^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 := -\sqrt{\frac{3}{2}},\, x_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Azaz az alábbi térbeli pontokban metszi egymást a két paraboloid:

$$p_1 := \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right),\, p_2 := \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Szimmetriai okok miatt, be tudjuk vezetni a következő hengerkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r,\, \varphi,\, z) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \big((r,\, \varphi,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Legyen

$$H_1 := [0,\, \sqrt{3/2}] \times [0,\, 2\pi] \times [1/2,\, 2 - r^2] \subset \mathbb{R}^3,$$

$$H_2 := [0,\, \sqrt{3/2}] \times [0,\, 2\pi] \times [r^2 - 1,\, 1/2] \subset \mathbb{R}^3,$$

Mivel ezek kompakt intervallumok, igaz lesz, hogy

$$\int_{\mathcal{H}} 1 = \int_{H_1} 1 \cdot |r|\, dr\, d\varphi\, dz + \int_{H_2} 1 \cdot |r|\, dr\, d\varphi\, dz,$$

ahol

$$\mathcal{H} := \Phi[H_1] \cup \Phi[H_2].$$

1.2.2 Feladat

Számítsuk ki annak a korlátos és zárt térbeli T testnek a *térfogatát, tömegét* és a z-tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*, amelyet az alábbi egyenlőtlenségek definiálnak:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \text{ és } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

illetve a kitöltő anyag pontonkénti sűrűsége egyenesen arányos az origótól mért távolsággal.
Tehát a sűrűségfüggvény adott $\alpha > 0$ mellett

$$\rho(x,\, y,\, z) := \alpha \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \big((x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Alkalmazzuk az alábbi térbeli polárkoordináta-transzformációt:

$$\Phi(r,\, \varphi,\, \psi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \sin\psi \\ r \cdot \sin\varphi \sin\psi \\ r \cdot \cos\psi \end{pmatrix} \qquad \big((r,\, \varphi,\, \psi) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Legyen

$$H := [0,\, 1] \times [0,\, 2\pi] \times [0,\, \pi/4] \subset \mathbb{R}^3,$$

ekkor H kompakt intervallum és

$$\Phi(H) = T.$$

Térfogat:

$$\int_H 1 \cdot |-r^2 \sin\psi|\, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

tömeg:

$$\int_H \rho(r\cos\varphi\sin\psi,\, r\sin\varphi\sin\psi,\, r\cos\psi) \cdot |-r^2 \sin\psi|\, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_H (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\psi) \cdot \rho(r\cos\varphi\sin\psi,\, r\sin\varphi\sin\psi,\, r\cos\psi) \cdot |-r^2 \sin\psi|\, dr\, d\varphi\, d\psi.$$

Számoljuk ki a tehetetlenségi nyomatékot. Először írjuk fel tetszőleges $(r,\, \varphi,\, \psi) \in H$ esetén az integrandust (α-val történő osztás után)

$$r^2\big(\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi\big) \cdot r\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi + \cos^2\psi} \cdot r^2\sin\psi =$$

$$r^5\sin^2\psi \cdot \sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi + 1 - \sin^2\psi} \cdot \sin\psi =$$

$$r^5\sin^3\psi \cdot \sqrt{\sin^2\psi\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1\big) + 1} =$$

$$r^5\sin^3\psi.$$

Tehát

$$\frac{\mathbf{\Theta}_{t_x}}{\alpha} = \int_H r^5 \sin^3\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi =$$

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\sin^3\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6}\sin^3\psi\right]_{r=0}^{r=1} d\varphi\, d\psi = \frac{1}{6}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \sin^3\psi\, d\varphi\, d\psi =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{\pi/4} [\varphi\sin^3\psi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\, d\psi = \frac{2\pi}{6}\int_0^{\pi/4} \sin^3\psi\, d\psi$$

2 Gyakorlat

2.1 Emlékeztető

Megjegyezzük, hogy ha a

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

függvény differenciálható, akkor a

$$\partial_k \Psi := (\partial_k \Psi_1,\, \partial_k \Psi_2,\, \partial_k \Psi_3) \quad (k \in \{1,\, 2\})$$

jelöléssel

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi & \partial_2 \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \Psi_1 & \partial_2 \Psi_1 \\ \partial_1 \Psi_2 & \partial_2 \Psi_2 \\ \partial_1 \Psi_3 & \partial_2 \Psi_3 \end{bmatrix}.$$

Definíció. Valamely $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ halmazt *felületdarabnak* nevezünk, ha alkalmas $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt és Jordan-mérhető halmaz, ill.

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3,\, \Psi \in C^1,\, \mathrm{rang}(\Psi') = 2$$

függvény esetén

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_\Psi = \{\Psi(u,\, v) \in \mathbb{R}^3 : (u,\, v) \in K\}.$$

A Ψ leképezést az adott $\mathcal{F}$ felületdarab *paraméterezésének* nevezzük.

1. A fenti definícióban a Ψ leképezés folytonos differenciálhatóságán azt értjük, hogy van olyan $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, ill.

   $$\hat{\Psi} : U \to \mathbb{R}^3,\, \hat{\Psi} \in C^1$$

   függvény, amelyre $\hat{\Psi}_{|K} = \Psi$.

2. Ha a $\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3$ függvényre $\Psi \in C^1$, akkor a $\mathrm{rang}(\Psi') = 2$ feltétel azt jelenti, hogy a $\partial_1 \Psi,\, \partial_2 \Psi$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz

   $$\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi \neq 0.$$

   Ha a $\Psi : K \to \mathbb{R}^3$ leképezés valamely felületdarab paraméterezése, akkor az

   $$n_\Psi(u,\, v) := \partial_1 \Psi(u,\, v) \times \partial_2 \Psi(u,\, v) \quad \big((u,\, v) \in K\big)$$

   vektor az adott felület $\Psi(u,\, v)$ pontjához tartozó *érintősíkjának* normálvektora.

Definíció. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ felületdarab paraméterezése az

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3$$

függvény: $\mathcal{R}_\Psi = \mathcal{F}$. Ekkor az $\mathcal{F}$ felület *felszínén* az

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \int_K \|n_\Psi\|$$

valós számot értjük.

1. Ha $\mathcal{F}_1 := \mathcal{R}_{\Psi_1}$, ill. $\mathcal{F}_2 := \mathcal{R}_{\Psi_2}$ nullmértékű halmazban (pl. élekben) csatlakozó felületdarabok, akkor

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{F}_2) = \int_{K_1} \|n_{\Psi_1}\| + \int_{K_2} \|n_{\Psi_2}\|.$$

2.2 Feladatok

2.2.1 Feladat

Legyen $0 < R \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\, z \geq 0$$

félgömbfelületnek az

$$x^2 + y^2 = Rx$$

egyenletű hengerfelület által kimetszett részének (Viviani-féle levél) a felszínét!

A $z \geq 0$ féltérben lévő félgömbfelület paraméterezése:

$$\Psi(u,\, v) := (u,\, v,\, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \quad \big((u,\, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2\big).$$

Ekkor $\Psi \in C^1$, $\operatorname{rang}(\Psi') = 2$, továbbá ($u^2 + v^2 < R$ esetén)

$$\partial_1 \Psi(u,\, v) = \left(1,\, 0,\, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right),$$

$$\partial_2 \Psi(u,\, v) = \left(1,\, 0,\, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right).$$

$$n_\Psi(u,\, v) = \begin{pmatrix} -\partial_1 g(u,\, v) \\ -\partial_2 g(u,\, v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Azaz

$$\|n_\Psi(u,\, v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1} =$$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}.$$

Ha most

$$\Phi(r,\,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \big(\varphi\in[0,\,\pi/2],\, r\in[0,\,R\cos(\varphi)]\big)$$

Akkor a felszínt így kapjuk meg:

$$2R\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{R\cos(\varphi)}\Big\|n_\Psi\big(\Phi(r,\,\varphi)\big)\Big\|\cdot r\,dr\,d\varphi.$$

2.2.2 Feladat

Határozzuk meg az alábbi feltételekkel megadott felület felszínét:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\text{ és }x^2+y^2\le 2ax \quad (a>0).$$

Legyen

$$f(x,\,y) := (x,\,y,\,\sqrt{x^2+y^2}) \quad \big((x,\,y)\in\Omega\big),$$

ahol $\Omega := \{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2ax\}$, f egy Euler-Monge módon megadott paraméterezése a z-tengely irányába felfelé néző körkúp palástjának, *leszűkítve* annak a hengernek a belsejére, aminek alapját az Ω halmaz adja. Egyből írjuk is át az f függvényt a megfelelő polár-transzformációval

$$\Phi(r,\,\varphi) := (r\cos(\varphi),\,r\sin(\varphi)) \quad \big(\varphi\in[-\pi/2,\,\pi/2],\,r\in[0,\,2a\cos(\varphi)]\big).$$

A Φ transzformáció-függvény értelmezési tartományát a Thálész-tétel alkalmazásával könnyedén megkaptuk. Tehát ha $\mathcal{F}\subset\mathbb{R}^3$ a feladatban definiált felület, akkor

$$\Psi(r,\,\varphi) := f\circ\Phi = (r\cos(\varphi),\,r\sin(\varphi),\,r) \quad \big((r,\,\varphi)\in\mathcal{D}_\Phi\big).$$

A felület kiszámításához szükségünk lesz a következőkre:

$$\partial_1\Psi(r,\,\varphi) = (\cos(\varphi),\,\sin(\varphi),\,1) \quad \big((r,\,\varphi)\in\mathcal{D}_\Phi\big),$$

$$\partial_1\Psi(r,\,\varphi) = (-r\sin(\varphi),\,r\cos(\varphi),\,0) \quad \big((r,\,\varphi)\in\mathcal{D}_\Phi\big),$$

$$n_\Psi(r,\,\varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 1 \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \quad \big((r,\,\varphi)\in\mathcal{D}_\Phi\big),$$

$$\|n_\Psi(r,\,\varphi)\| = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \quad \big((r,\,\varphi)\in\mathcal{D}_\Phi\big).$$

Tehát a keresett felszín

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{D}_\Phi}\|n_\Psi\| = \sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{2a\cos(\varphi)} r\,dr\,d\varphi.$$

3 Gyakorlat

3.1 Emlékeztető

Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, Jordan-mérhető halmaz,

$$\Psi = (\Psi_1,\, \Psi_2,\, \Psi_3) : K \to \mathbb{R}^3,\ \Psi \in C^1,\ \mathrm{rang}(\Psi') = 2,$$

továbbá tegyük fel, hogy $\Psi|_{\mathrm{int}(K)}$ injektív. Ekkor

1. ha $f : \Psi[K] \to \mathbb{R}$, $f \in C$, akkor az f függvény Ψ-re vonatkozó *elsőfajú felületi integráljának* (vagy *felszíni integráljának*) nevezzük az

   $$\int_\Psi f := \int_K (f \circ \Psi) \cdot \|n_\Psi\|$$

   valós számot,

2. ha $f : \Psi[K] \to \mathbb{R}^3$, $f \in C$, akkor az f függvény Ψ-re vonatkozó (*másodfajú*) *felületi integráljának* nevezzük az

   $$\int_\Psi f := \langle f \circ \Psi,\, n_\Psi \rangle$$

   valós számot.

4 Gyakorlat

4.1 Emlékeztető

Valamilyen kompakt $[a, b]$ intervallum $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ és $(\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n)$ $(1 \leq n \in N)$ nyílt halmaz esetén tekintsük az

$$f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvényt. Ha $x \in U$, akkor legyen $f_x : [a, b] \to \mathbb{R}$ az a függvény, amire

$$f_x(t) := f(x, t) \quad (t \in [a, b]).$$

Tegyük fel, hogy minden $x \in U$ esetén az f_x függvény Riemann-integrálható: $f_x \in R[a, b]$, legyen ekkor

$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\, dt := \int_a^b f_x \quad (x \in U).$$

Az így definiált $F : U \to \mathbb{R}$ függvényt az f által meghatározott *paraméteres integrálnak* nevezzük.

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_f = U \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vezessük be $\mathbb{R}^n$-en is és $\mathbb{R}^{n+1}$-en is a $\|.\| := \|.\|_\infty$ normát. Nem fog félreértést okozni, ha $\xi \in \mathbb{R}^n$ és $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén egyaránt a $\|\xi\|$, $\|\eta\|$ jelölést használjuk. Így pl. nyilvánvaló, hogy az

$$(x, t) \in U \times [a, b]$$

vektorra

$$\|(x, t)\| = \max\{\|x\|, |t|\}.$$

Továbbá, ha az

$$f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvény folytonos, akkor tetszőleges $x \in U$ mellett az $f_x : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos. Ui., ha $s \in [a, b]$ és $\xi := (x, s)$, akkor $f \in \mathcal{C}\{\xi\}$ miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amellyel

$$|f(\omega) - f(\xi)| < \varepsilon \quad (\omega \in U \times [a, b], \|\omega - \xi\| < \delta),$$

azaz

$$|f(y, t) - f(x, s)| < \varepsilon \quad ((y, t) \in U \times [a, b], \|(y, t) - (x, s)\| < \delta).$$

Ha itt $y := x$, akkor

$$\|(x, t) - (x, s)\| = \|(0, t - s)\| = |t - s|,$$

ezért

$$|f(x,\,t) - f(x,\,s)| = |f_x(t) - f_x(s)| < \varepsilon (t \in [a,\,b],\,|t-s| < \delta),$$

más szóval $f_x \in \mathcal{C}\{s\}$. Következésképpen $f_x \in C[a,\,b]$, így $f_x \in R[a,\,b]$, létezik tehát a fenti F paraméteres integrál.

Tétel. Tegyük fel, hogy adott az $[a,\,b]\,(a,\,b \in \mathbb{R},\, a < b)$ kompakt intervallum, $1 \le n \in \mathbb{N}$, és $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Ekkor tetszőleges folytonos

$$f : U \times [a,\,b] \to \mathbb{R}$$

függvény esetén az

$$F(x) := \int_a^b f(x,\,t)\,dt \quad (x \in U)$$

paraméteres integrálra az alábbiak igazak:

1. az F függvény folytonos;
2. ha valamilyen $i = 1,\,\ldots,\,n$ indexre létezik és folytonos a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény, akkor létezik a $\partial_i F$ parciális deriváltfüggvény is, és
$$\partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x,\,t)\,dt \quad (x \in U);$$
3. amennyiben az f folytonosan differenciálható, akkor F is.

4.2 Feladatok

4.2.1 Feladat

Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln(y+1) \quad (y \ge 0).$$

Legyen

$$f(y,\,x) := \begin{cases} y & x = 0,\, y \in [0,\,+\infty) \\ 0 & x = \pi/2,\, y \in [0,\,+\infty) \\ \dfrac{\operatorname{arctg}(y \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} & ((y,\,x) \in [0,\,+\infty) \times (0,\,\pi/2)). \end{cases}$$

Ekkor $f \in C$, ezért a paraméteres integrál is folytonos. Mivel

$$\partial_1 f(y,\,x) := \begin{cases} 0 & x = \pi/2,\, y \in [0,\,+\infty) \\ \dfrac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2(x)} & ((y,\,x) \in [0,\,+\infty) \times [0,\,\pi/2)) \end{cases}$$

$\partial_1 f \in C$, tehát a paraméteres integrál deriválható.

4.3 Feladat

Indokoljuk meg, hogy tetszőleges $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$F(\alpha) := \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \in \mathbb{R},$$

majd mutassuk meg, hogy fennáll az

$$F(\alpha) = 2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} \quad (0 < \alpha \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

Legyen

$$f(\alpha, x) := \begin{cases} \alpha & \alpha \in (0, +\infty),\ x = 0; \\ \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \alpha \in (0, +\infty),\ x \in (0, 1]; \end{cases}$$

akkor $f \in C$, hiszen (Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával)

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{1+\alpha^2 x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \alpha}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \alpha.$$

Tehát $F \in C$ is teljesül. Mivel

$$\partial_1 f(\alpha, x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x} \quad \big((\alpha, x) \in (0, +\infty) \times [0, 1]\big),$$

és $\partial_1 f \in C$, ezért $F \in D$.

$$F'(\alpha) = \int_0^1 \partial_\alpha \left(\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2 x}\, dx = \left[\frac{\ln(1+\alpha^2 x)}{\alpha^2} \right]_0^1 =$$

$$\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Tehát

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Számoljuk ki F' határozatlan integrálját:

$$\int F' = \int \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} - \int \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$2\operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Azaz, mivel
$$F \in \int F',$$
ezért létezik egy $c \in \mathbb{R}$ konstans, amivel
$$F(\alpha) = 2\mathrm{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} + c.$$
Számoljuk ki $F(1)$-et:
$$F(1) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$
Ebből
$$F(1) = 2\mathrm{arctg}(1) - \ln(2) = \frac{\pi}{2} - \ln(2),$$
ahonnan $c = 0$, tehát
$$F(\alpha) = 2\mathrm{arctg}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}$$
következik.

5 Gyakorlat

5.1 Emlékeztető

Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ természetes számok, ahol $2 \leq n$ és $1 \leq m < n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m,$$

és ezt következésképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden:

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

azaz

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

akkor f-et olyan kétváltozós vetkorfüggvényként tekintjük, ahol az $f(x, y)$ helyettesítési értékekben az argumentum első változójára $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbb{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelmemben valamilyen $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ zérushelye az f-nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a-nak olyan $K(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$ környezete, a b-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbb{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel

$$f(x, y) = 0.$$

Definiáljuk ekkor a $\varphi(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \big(x \in K(a)\big).$$

Az előbbi φ függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Nyilván $\varphi(a) = b$.

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Adott $n,\, m \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$, valamint $1 \leq m < n$ mellett az

$$f \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$ és az $(a,\, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen

$$f(a,\, b) = 0,\ \det \partial_2 f(a,\, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az $(a,\, b)$ körül meghatározott

$$\varphi : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény, ami folytonosan differenciálható, és

$$\varphi'(x) = -\partial_2 f(x,\, \varphi(x))^{-1} \cdot \partial_1 f(x,\, \varphi(x)) \quad \big(x \in K(a)\big).$$

5.2 Feladatok

5.3 Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7$$

egyenletből y kifejezhető x implicitfüggvényeként a 2 egy környezetében, majd határozzuk meg így adódó implicitfüggvénynek deriváltját az $x = 2$ helyen, továbbá írjuk fel az érintőegyenesek egyenleteit!

Legyen

$$f(x,\, y) := x^2 + 2xy - y^2 - 7\big((x,\, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor

$$f(2,\, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \{1,\, 3\}.$$

Mivel $f \in C^1$, és

$$\partial_2 f(2,\, 1) = 2 \neq 0,$$
$$\partial_2 f(2,\, 3) = -2 \neq 0,$$

így teljesülnek az implicitfüggvényre vonatkozó tétel feltételei. Legyen

$$H := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy - y^2 = 7\}.$$

Így valóban léteznek olyan $U =: K(2)$, $V_1 := K(1)$, $V_2 := K(3)$ környezetek, hogy $\varphi_1 : U \to V_1$ és $\varphi_2 : U \to V_2$ folytonosan differenciálható függvények grafikonjai rendre megegyeznek a H halmaz $(2,\, 1)$, $(2,\, 3)$ pontban vett környezetével.

$$f(x,\, \varphi_i(x)) = 0 \quad (x \in U,\, i = 1,\, 2).$$

Mivel

$$\partial_1 f(2,\, 1) = 6, \text{ ill. } \partial_1 f(2,\, 3) = 10,$$

ezért
$$\varphi_1(2) = 1, \text{ill. a } \varphi_2(2) = 3$$
egyenlőségek felhasználásával azt kapjuk, hogy
$$\varphi_1'(2) = -3,\ \varphi_2(2) = 5.$$
A megfelelő érintők egyenlete:
$$y = \varphi_1(2) + \varphi_1'(2)(x-2) = 7 - 3x \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$y = \varphi_2(2) + \varphi_2'(2)(x-2) = 5x - 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$$