Analízis III

Vizsga jegyzet

Szabó Krisztián

Tartalom

1 Metrikus-, normált-, euklidesz-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz.

Eredeti vizsgacím: Metrikus-, normált-, euklideszi-terek. Környezet, belső pont, nyílt halmaz. Torlódási pont, zárt halmaz. Nyílt (zárt) halmazok uniója, metszete. A $(\mathbb{K}^n,\, \varrho_p)$, $(\mathbb{K}^n,\, ||.||_p)$, $(\mathbb{K}^n,\, \langle . \rangle)$, $(C[a,\, b],\, \varrho_p)$, $(C[a,\, b],\, ||.||_p)$ $(0 < n \in \mathbb{N},\, 1 \leq p \leq +\infty)$ terek.

1.1 Metrika, metrikus tér fogalma

Definíció. (Axióma) Legyen az $X \neq \emptyset$ egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy a

$$\varrho : X^2 \to [0,\, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. minden $x \in X$ esetén $\varrho(x,\, x) = 0$;
2. ha $x,\, y \in X$ és $\varrho(x,\, y) = 0$, akkor $x = y$;
3. bármely $x,\, y \in X$ válaszással $\varrho(x,\, y) = \varrho(y,\, x)$;
4. tetszőleges $x,\, y,\, z \in X$ elemekkel $\varrho(x,\, y) \leq \varrho(x,\, z) + \varrho(y,\, z)$.

Azt mondjuk, hogy ekkor a ϱ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval metrika). Ha $x,\, y \in X$, akkor $\varrho(x,\, y)$ az x, y elemek *távolsága.* Az $(X,\, \varrho)$ rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük. Az X-beli elemek távolsága tehát nemnegatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága nulla, továbbá két különböző elem távolsága mindig pozitív. A távolság szimmetrikus, azaz két elem távolsága független az illető eleme sorrendjétől. A 4. tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni.

Mutassuk meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből annak az alábbi változata is következik:

$$|\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z)| \leq \varrho(x,\, y) \quad (x,\, y,\, z \in X).$$

Ui. a 4. axióma miatt

$$\varrho(x,\, z) \leq \varrho(x,\, y) + \varrho(y,\, z),$$

tehát

$$\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z) \leq \varrho(x,\, y).$$

Ha itt az x-et és az y-t felcseréljük, akkor a

$$-\big(\varrho(x,\, z) - \varrho(y,\, z)\big) = \varrho(y,\, z) - \varrho(x,\, z) \leq \varrho(y,\, x) = \varrho(x,\, y)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utóbbi két becslés egybevetésével kapjuk a jelzett egyenlőtlenséget.

1.2 Diszkrét metrikus tér

Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható

$$\varrho : X^2 \to [0, +\infty)$$

távolságfüggvény, ui. pl. a

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \big((x, y) \in X^2\big)$$

leképezés nyilván eleget tesz a fenti, a metrikát meghatározó axiómáknak. Az így definiált (X, ϱ) terek a *diszkrét* jelzővel illetjük.

1.3 $(\mathbb{K}^n, \varrho)$ metrikus tér

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$, és

$$x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

esetén definiáljuk az (x, y)-ban a

$$\varrho_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0, +\infty)$$

függvény helyettesítési értékét a következőképpen:

$$\varrho_p(x, y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p & (p \leq 1) \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Terjesszük ki a ϱ_p értelmezését $p = \infty := +\infty$-re is az alábbiak szerint:

$$\varrho_\infty(x, y) := \max\big\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\big\}.$$

Belátható, hogy $(\mathbb{K}^n, \varrho_p)$ metrikus tér.

1.4 $(C[a, b], \varrho_p)$ metrikus tér

Valamilyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) esetén jelöljük $C[a, b]$-vel az $[a, b]$-n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $0 < p \leq +\infty$, akkor tekintsük az előbbi példa "folytonos" változatát: ha $f, g \in C[a, b]$, akkor

$$\varrho_p(f, g) := \begin{cases} \displaystyle\int_a^b |f - g|^p & (0 < p \leq 1) \\ \left(\displaystyle\int_a^b |f - g|^p\right)^{1/p} & (1 < p < +\infty) \\ \max\big\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\big\} & (p = \infty := +\infty). \end{cases}$$

Az előbbi példákhoz hasonlóan látható be, hogy $(C[a, b], \varrho_p)$ is metrikus tér.

1.5 Metrikák ekvivalenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és az X^2-en értelmezett

$$\varrho,\, \sigma : X^2 \to [0,\, +\infty)$$

metrikák esetén a ϱ és a σ *ekvivalens*, ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot \varrho(x,\, y) \leq \sigma(x,\, y) \leq C \cdot \varrho(x,\, y) \quad (x,\, y \in X).$$

Könnyű belátni, hogy ha $\mathcal{M}$ jelöji az előbb említett metrikák halmazát, és a $\varrho,\, \sigma \in \mathcal{M}$ elemekre $\varrho \sim \sigma$ azt jelenti, hogy a ϱ és σ ekvivalens, akkor az így értelmezett ($\mathcal{M}^2$-beli) $\sim$ reláció ekvivalencia.

Pl. a fenti $(\mathbb{K}^n,\, \varrho_p)$ metrikus terekre a ϱ_p metrikák közül $p \geq 1$ esetén bármelyik kettő ekvivalens. A továbbiakban az

$$X := \mathbb{K}^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

esetben a ϱ_1, ϱ_2, ϱ_∞ metrikák valamelyikét fogjuk használni.

1.6 Normált terek

Definíció. (Axióma) Tegyük fel, hogy a szóban forgó $X \neq \emptyset$ halmaz *vektortér* a $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy a

$$||.|| : X \to [0,\, +\infty)$$

leképezés *norma*, ha

1. $||0|| = 0$;
2. ha $x \in X$ és $||x|| = 0$, akkor $x = 0$;
3. bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ esetén $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
4. tetszőleges $x,\, y \in X$ elemekre $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

A 4. axiómát szintén *háromszög-egyenlőtlenségként* említjük a későbbiekben. Ha pl. X jelöli a

$$\mathbb{K}^n \ (0 < n \in \mathbb{N}),\ C[a,\, b] \ (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok bármelyikét, akkor a vektorok (függvények) szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve az X lineáris tér a $\mathbb{K}$, ill. az $\mathbb{R}$ felett. Az említett terekben a nulla-elemet 0-val felölve aazt kapjuk továbbá, hogy $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$||x||_p := \varrho(x,\, 0) \quad (x \in X)$$

norma, azaz ilyen p-kre

$$(\mathbb{K}^n,\, ||.||_p),\ (C[a,\, b],\, ||.||_p)$$

normált terek. Tehát

$$||x||_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \max\left\{|x_i| : i = 1,\, \dots,\, n\right\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \big(x = (x_1,\, \dots,\, x_n) \in \mathbb{K}^n\big),$$

speciálisan az $n = 1$ esetben

$$||x||_p = |x| \quad (x \in \mathbb{K},\, 1 \le p \le +\infty),$$

valamint

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \max\left\{|f(x)| : x \in [a,\, b]\right\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \big(f \in C[a,\, b]\big).$$

Világos, hogy a most mondott példákban

$$\varrho_p(x,\, y) = ||x - y||_p \quad (x,\, y \in X).$$

Sőt, ha most $(X,\, ||.||)$ egy tetszőleges normált teret jelöl, akkor a

$$\varrho(x,\, y) := ||x - y|| \quad \big((x,\, y) \in X^2\big)$$

függvény metrika, azaz $(X,\, \varrho)$ metrikus tér:

$$(X,\, \varrho) \equiv (X,\, ||.||).$$

1.7 Normák ekvivalenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X ($\mathbb{K}$-feletti) vektortéren értelmezett

$$||.||,\, ||.||_\star : X \to [0,\, +\infty)$$

normák *ekvivalensek* (erre is a $||.|| \sim ||.||_\star$ jelölést fogjuk használni), ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c \cdot ||x|| \le ||x||_\star \le C \cdot ||x|| \quad (x \in X).$$

1.8 Euklideszi terek

A fent bevezetett $||.||_p$ norma a $p = 2$ esetben speciális esete egy tágabb normaosztálynak.

Definíció. (Axióma) Legyen X egy vektortér a $\mathbb{K}$ felett, az

$$\langle . \rangle : X \to \mathbb{K}$$

függvényről pedig tegyük fel, hogy

1. minden $x,\, y \in X$ mellett $\langle x,\, y\rangle = \overline{\langle x,\, y\rangle}$ (ahol a $\overline{\xi}$ szimbólum a $\xi \in \mathbb{K}$ szám komplex konjugáltját jelöli);
2. bármely $x \in X \setminus \{0\}$ esetén $\langle x,\, x\rangle \in \mathbb{R}$ és $\langle x,\, x\rangle > 0$;
3. ha $x,\, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\langle \lambda \cdot x,\, y\rangle = \lambda \cdot \langle x,\, y\rangle$;
4. tetszőleges $x,\, y,\, z \in X$ elemekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\langle x + y,\, z\rangle = \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle.$$

Ha $x,\, y \in X$, akkor az

$$\langle x,\, y\rangle$$

számot az $x,\, y$ elemek *skaláris szorzatának*, az $(X,\, \langle . \rangle)$ párt pedig *skaláris szorzat-térnek* (vagy *euklideszi térnek*) nevezzük.

Jelentse pl. X a

$$\mathbb{K}^n,\ (1 \leq n \in \mathbb{N}),\ C[a,\, b]\,(-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, és

$$\langle x,\, y\rangle := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} & \big(x = (x_1,\, \ldots,\, x_n),\ y = (y_1,\, \ldots,\, y_n) \in \mathbb{K}^n\big) \\ \displaystyle\int_a^b xy & \big(x,\, y \in C[a,\, b]\big). \end{cases}$$

Ekkor $(X,\, \langle . \rangle)$ euklideszi tér, továbbá

$$||x||_2 = \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Ez utóbbi egyenlőségnek sokkal általánosabb háttere van, ui. tetszőleges $(X,\, \langle . \rangle)$ euklideszi teret véve

$$||x|| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \quad (x \in X)$$

norma. Itt a háromszög-egyenlőtlenség igazolásában fontos szerep jut a

$$\big|\langle x,\, y\rangle\big| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x,\, y \in X)$$

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek. Ezt "lefordítva" az előbbi említett euklideszi terekre az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2} \quad (x,\, y\in\mathbb{K}^n),$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2} \quad (f,\, g\in C[a,\, b]).$$

1.9 Környezet fogalma

Definíció. Legyen $(X,\, \varrho)$ metrikus tér. Ha $b\in X$ és $r>0$, akkor a

$$K_r(b) := \{x\in X : \varrho(x,\, b) < r\}$$

halmaz a b elem *r-sugarú környezete.* Használjuk a $K(b)$ jelölést is a $K_r(b)$ helyett, ha az adott szituációban a $K_r(b)$ környezet sugara nem játszik szerepet.

Nyilvánvaló, hogy $0 < v \le r$ esetén

$$K_v(b)\subset K_r(b).$$

Tetszőleges $K_r(a)$ környezet és $b\in K_r(a)$ esetén

$$0 < v < r - \varrho(b,\, a)$$

feltételnek eleget tevő v "sugárral"

$$K_v(b)\subset K_r(a).$$

Ha ui. $x\in K_v(b)$, azaz $\varrho(x,\, b) < v$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\varrho(x,\, a) \le \varrho(x,\, b) + \varrho(b,\, a) < v + \varrho(b,\, a) < r.$$

1.10 Belső pont fogalma

Definíció. Nevezzük valamilyen $\emptyset\ne A\subset X$ halmaz esetén az $a\in A$ pontot az A halmaz *belső pontjának*, ha egy alkalmas $K(a)$ környezettel

$$K(a)\subset A$$

teljesül. Az ilyen tulajdonságú pontok által alkotott halmaz az A ún. *belseje*, amit az

$$\operatorname{int} A$$

szimbólummal fogunk jelölni.

Nyilván $\operatorname{int} X = X$, míg az

$$X := \mathbb{R},\ \varrho(x,\, y) := |x - y| \quad (x,\, y \in \mathbb{R})$$

esetben $\operatorname{int} \{a\} = \emptyset$ $(a \in \mathbb{R})$. Állapodjunk meg abban, hogy

$$\operatorname{int} \emptyset := \emptyset.$$

Tehát bármely $A \subset X$ halmazra

$$\operatorname{int} A \subset A.$$

Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *nyílt*, ha

$$\operatorname{int} A = A.$$

Így pl. az $\emptyset$ (az üreshalmaz) nyílt halmaz, ill. bármely környezet is az. Más megfogalmazásban tehát egy $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az A minden pontja belső pontja az A-nak:

$$a \in A \Longrightarrow a \in \operatorname{int} A.$$

Ismételjük el újra, hogy mit is jelent ez: az

$$\emptyset \neq A \subset X$$

halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha tetszőleges $a \in A$ elemének létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy

$$K(a) \subset A.$$

1.11 Metrikus tér topológiája

Definíció. Legyen $(X,\, \varrho)$ metrikus tér és

$$\mathcal{T}_\varrho(X) := \mathcal{T}_\varrho := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ nyílt}\}.$$

Az X nyílt részhalmazai által meghatározott $\mathcal{T}_\varrho$ halmazrendszert az $(X,\, \varrho)$ metrikus tér *topológiájának* nevezzük.

1.12 Nyílt halmazok uniója és metszete

Tétel. Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \in X$ $(\gamma \in \Gamma)$ halmazok valamennyien nyíltak az $(X,\, \varrho)$ metrikus térben. Ekkor

1. az $\displaystyle\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is nyílt;
2. ha a Γ véges, akkor a $\displaystyle\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszetük is nyílt.

Bizonyítás. Legyen $a \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Ekkor egy $\nu \in \Gamma$ indexszel $a \in A_\nu$. Mivel az A_ν halmaz nyílt, ezért egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset A_\nu$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_\nu \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma,$$

így egyúttal

$$K(a) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$$

is teljesül. Más szóval $a \in \operatorname{int}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$, azaz $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ nyílt halmaz.

Most tegyük fel, hogy a Γ halmaz véges, és legyen $a \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma$ mellett $a \in A_\gamma$, következésképpen az A_γ-k nyíltsága miatt egy $r_\gamma > 0$ sugárral

$$K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma.$$

Ha

$$r := \min\{r_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

(ami egy pozitív szám), akkor $r \leq r_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ miatt

$$K_r(a) \subset K_{r_\gamma} \subset A_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma),$$

így

$$K_r(a) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma.$$

Tehát $a \in \operatorname{int}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$, ezért a $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ metszethalmaz nyílt.

■

2 Konvergens sorozatok metrikus terekben. Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal. Banach- és Hilbert-tér.

Eredeti vizsgacím:
Konvergens sorozatok metrikus terekben. Konvergencia $\mathbb{K}^n$-ben, a koordináta-sorozatok szerepe. *Bolzano-Weierstrass-kiválasztási* tétel. Konvergencia a $\big(C[a,\, b],\, ||.||_\infty\big)$ térben (függvénysorozatok, az egyenletes, ill. a pontonkénti konvergencia fogalma). Halmazok zártságának a jellemzése konvergens sorozatokkal. A teljesség fogalma, *Banach*-tér, *Hilber*-tér. A $\big(C[a,\, b],\, ||.||_\infty\big)$ tér teljessége.

2.1 Konvergencia metrikus térben

Definíció. Legyen $(X,\, \varrho)$ metrikus tér, és legyen az

$$(x_n) : \mathbb{N} \to X$$

egy, az X elemeiből álló sorozat. Az (x_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $\alpha \in X$, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ "hibakorlát" mellett egy alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexszel igaz a

$$\varrho(x_n,\, \alpha) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N)$$

becslés. Ha ilyen α nincs, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *divergens.*

Például a diszkrét metrikus térben valamely (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha *kvázikonstasn*, azaz létezik olyan $M \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy

$$x_n = x_M \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq M).$$

Ha ui. egy sorozat ilyen, akkor a konvergencia definíciójában az α helyébe az x_M-et, tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett pedig N helyébe M-et írva triviálisan fennáll a

$$\varrho(x_n,\, \alpha) = \varrho(x_n,\, x_M) = \varrho(x_M,\, x_M) = 0 < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq M)$$

egyenlőtlenség.

2.2 Határérték egyértelműsége

Tétel. Legyen valamilyen $(X,\, \varrho)$ metrikus tér esetén az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to X$$

sorozat konvergens. Ekkor a konvergencia definíciójában szereplő $\alpha \in X$ elem egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tételben említett $X \ni \alpha$-n kívül egy $\beta \in X$ elemre is igaz a konvergencia definíciója: bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, \beta) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > M).$$

Ekkor a ϱ metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőlegesen választott

$$n \in \mathbb{N},\, n > \max\{N,\, M\}$$

indexre

$$\varrho(\alpha, \beta) \leq \varrho(\alpha, x_n) + \varrho(x_n, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Következésképpen

$$0 \leq \varrho(\alpha, \beta) < 2 \cdot \varepsilon.$$

Mivel itt az $\varepsilon > 0$ bármilyen (pozitív) szám lehet, ezért csak $\varrho(\alpha, \beta) = 0$ lehetséges. A metrika axiómái szerint innen viszont $\alpha = \beta$ adódik.

■

2.3 Vektorsorozatok

Legyen most

$$1 \leq s \in \mathbb{N},\, 0 < p \leq +\infty,\, X := \mathbb{K}^s,\, \varrho := \varrho_p,$$

és tekintsünk egy

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$$

sorozatot. Ha

$$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{ns})\ (\in \mathbb{K}^s) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor minden $i = 1, \ldots, s$ mellett definiálhatjuk az

$$x^{(i)} := (x_{ni})$$

számsororatot, az x sorozat i-edik *koordináta-sorozatát*. Ekkor az x *vektorsorozat* konvergenciája az alábbiak szerint "kezelhető" a koordináta-sorozatainak a konvergenciája révén.

2.4 Koordináta-sorozatok konvergenciája

Tétel. Az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az előbbi $(\mathbb{K}^s, \varrho_p)$ metrikus térben, ha minden $x^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ koordináta-sorozata konvergens. Továbbá

$$\mathbb{K}^s \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \lim_{n\to+\infty}(x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_i = \lim_{n\to+\infty}\left(x^{(i)}\right) \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a tételbeli x sorozat konvergens, legyen

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$$

a határértéke. A ϱ_p metrikak definíciója szerint ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot megadva van olyan $N \in \mathbb{N}$, amellyel az $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ indexekre

$$\varepsilon > \varrho_p(x_n, \alpha) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (p < 1) \\ \left(\sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \max\{|x_{ni} - \alpha_i : i = 1, \ldots, s\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

Világos, hogy bármely $i = 1, \ldots, s$ esetén

$$\varrho(x_n, \alpha) \geq \begin{cases} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (0 < p < 1) \\ |x_{ni} - \alpha_i| & (1 \leq p \leq +\infty) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in N,\, n > N,\, p \geq 1)$$

és

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \sqrt[p]{\varepsilon} \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, 0 < p < 1).$$

Mindez pontosan azt jelenti, hogy az $x^(i)$ koordináta-sorozat konvergens és

$$\lim_{n \to +\infty} \left(x^{(i)} \right) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Fordítva, ha minden $x^{(i)}$ koordinátat-sorozat konvergens, akkor legyen

$$\alpha_i := \lim_{n \to +\infty} \left(x^{(i)} \right) \quad (i = 1, \ldots, s)$$

és

$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor minden $i = 1, \ldots, s$ mellett létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N_i).$$

Legyen $N := \max\{N_1, \ldots, N_s\}$, ekkor

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, i = 1, \ldots, s).$$

Ezért

$$\varrho_p(x_n, \alpha) = \sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p < s \cdot \varepsilon^p \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, 0 < p < 1),$$

$$\varrho_p(x_n,\, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p\right)^{1/p} < s^{1/p} \cdot \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, 1 \leq p < +\infty),$$

$$\varrho_p(x_n,\, \alpha) = \max\{|x_{ni} - \alpha_i| : i = 1,\, \ldots,\, s\} < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N,\, 1 \leq p = \infty).$$

Így minden $0 < p \leq +\infty$ esetén az (x_n) sorozat konvergens a $(\mathbb{K}^s,\, \varrho_p)$ metrikus térben, és $\lim_{n\to+\infty}(x_n) = \alpha$.

■

2.5 Függvényterek konvergenciája

Valamely $-\infty < a < b < +\infty$ mellett tekintsük az $X := C[a,\, b]$ halmazt és a ϱ_∞ metrikát. Ha az

$$f_n \in C[a,\, b] \quad (n \in \mathbb{N})$$

(függvény)sorozat konvergens és

$$f := \lim_{n\to+\infty}(f_n) \in C[a,\, b],$$

akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén

$$\varrho_\infty(f_n,\, f) < \varepsilon,$$

azaz

$$\max\Big\{|f_n(x) - f(x)| : a \leq x \leq b\Big\} < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens*. Az f az (f_n) határfüggvénye.

Nyilvánvaló, hogy ekkor az előbbi n indexekre bármelyik $x \in [a,\, b]$ helyen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

igaz. Más szóval ez azt jelenti, hogy az $\big(f_n(x)\big)$ (szám)sorozat konvergens és a határértéke $f(x)$. Röviden: az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens*.

2.6 Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal

Tétel. Legyen $(X,\, \varrho)$ metrikus tér. Az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozatra $\lim_{n\to+\infty}(x_n) \in A$.

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az A halmaz zárt, de valamilyen

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

konvergens sorozatra

$$\alpha := \lim_{n\to+\infty}(x_n) \notin A.$$

Ekkor tehát $\alpha \in X \setminus A$, ahol az $X \setminus A$ halmaz nyílt. Így van olyan $K(\alpha)$ környezet, hogy

$$K(\alpha) \subset X \setminus A.$$

Ugyanakkor egy $N \in \mathbb{N}$ indexszel

$$A \ni x_k \in K(\alpha) \subset X \setminus A \quad (N < k \in \mathbb{N}),$$

ami nyilván nem lehet.

Most tegyük fel azt, hogy tetszőleges konvergens

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozat határértékére $\lim(x_n) \in A$, és lássuk be, hogy az A halmaz zárt. Legyen ehhez $\alpha \in A'$, ekkor egy alkalmas

$$(z_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozatra $\lim(z_n) = \alpha$. A kiinduló feltételünk szerint ezért $\alpha \in A$, azaz $A' \subset A$ és (egy korábbi tételre hivatkozva) az A zárt. ■

2.7 Cauchy-sorozat fogalma

Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér és

$$(x_n) : \mathbb{N} \to X$$

sorozat. Ezt a sorozat *Cauchy-sorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (m, n \in \mathbb{N}, m, n > N).$$

2.8 Banach- és Hilbert-tér fogalma

Legyen adott az $(X, ||.||)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy ez a tér *teljes* (vagy *Banach-tér*), ha a $||.||$ norma által indukált

$$\varrho(x, y) := ||x - y|| \quad (x, y \in X)$$

metrikával az $(X,\, \varrho)$ metrikus tér teljes. Világos, hogy a

$$(\mathbb{K}^s,\, ||.||_p) \quad (1 \le s \in \mathbb{N},\, 1 \le p \le +\infty)$$

terek valamennyien Banach-terek. Hasonlóan: a $(C[a,\, b],\, ||.||_\infty)$ tér is Banach-tér.

Azt mondjuk, hogy az $(X,\, \langle . \rangle)$ euklideszi tér *teljes* (vagy *Hilbert-tér*), ha a $\langle . \rangle$ skaláris szorzás által meghatározott

$$||x|| := \sqrt{\langle x,\, x \rangle} \quad (x \in X)$$

normával $(X,\, ||.||)$ Banach-tér. Így pl. a

$$(\mathbb{K}^s,\, \langle . \rangle) \quad (1 \le s \in \mathbb{N})$$

tér Hilbert-tér, ahol

$$\langle x,\, y \rangle = \sum_{i=1}^{s} x_i \overline{y_i} \quad \big(x = (x_1,\, \ldots,\, x_s),\, y = (y_1,\, \ldots,\, y_s) \in \mathbb{K}^s\big).$$

2.9 Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel

Tétel. A $(\mathbb{K}^s,\, \varrho_p)$ $(1 \le s \in \mathbb{N},\, 0 < p \le +\infty)$ metrikus térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Emlékeztetünk egy korábbi tételre, miszerint az

$$x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $x^{(i)}$ $i = 1,\, \ldots,\, s$ koordináta-sorozata konvergens.

A feltételezésünk szerint most az (x_n) sorozat korlátos. Van tehát olyan $r > 0$ szám, amellyel

$$\varrho(x_n,\, 0) < r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A ϱ_p metrika definícióját figyelembe véve innen az is rögtön adódik, hogy $1 \le p \le +\infty$ esetén

$$|x_{ni}| < r \quad (n \in \mathbb{N},\, i = 1,\, \ldots,\, s),$$

ill. $0 < p < 1$ mellett

$$|x_{ni}| < r^{1/p} \quad (n \in \mathbb{N},\, i = 1,\, \ldots,\, s),$$

azaz, hogy minden $x^{(i)}$ $(i = 1,\, \ldots,\, s)$ koordináta-sorozat (mint számsorozat) is korlátos. A számsorozatokra ismert Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel alapján ezért létezik olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozat, hogy az

$$x^{(1)} \circ \nu^{(1)}$$

részsorozat konvergens. Világos, hogy az $x^{(2)} \circ \nu^{(1)}$ részsorozat is korlátos, ezért van olyan $\nu^{(2)}$ indexsorozat is amelyre az

$$\left(x^{(2)} \circ \nu^{(1)}\right) \circ \nu^{(2)} = x^{(2)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \nu^{(2)}\right)$$

részsorozat is konvergens. A konstrukciót folytatva végül olyan

$$\nu^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, s)$$

indexsorozatokat kapunk, hogy az

$$x^{(i)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \cdots \circ \nu^{(i)}\right) \quad (i = 1, \ldots, s)$$

részsorozatok konvergensek. Legyen

$$\nu := \nu^{(1)} \circ \cdots \circ \nu^{(s)},$$

ekkor a ν sorozat indexsorozat, és minden

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \ldots, s)$$

sorozat részsorozata a konvergens $x^{(i)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \cdots \circ \nu(i)\right)$ sorozatnak. Így az

$$x^{(i)} \circ \nu \quad (i = 1, \ldots, s)$$

számsorozatok mindegyike konvergens. Ez azt jelenti, hogy az $x \circ \nu$ részsorozat is konvergens.

■

2.10 Függvénytér teljessége

Tétel. A $(C[a, b], \varrho_\infty)$ metrikus tér teljes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az

$$(f_n) : \mathbb{N} \to C[a, b]$$

(függvény)sorozat (a ϱ_∞ metrika értelmében) Cauchy-sorozat. Ez most azt jelenti, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számot is adunk meg, ehhez találunk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, hogy

$$\varrho_\infty(f_n, f_m) =$$
$$\max\left\{|f_n(x) - f_m(x)| : a \leq x \leq b\right\} < \varepsilon \quad (n, m \in \mathbb{N}, n, m > N).$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén egyúttal

$$|f_n(x) - f_m(x)|\varepsilon \quad (n,\, m \in \mathbb{N},\, n,\, m > N) \tag{$\star$}$$

is teljesül, más szóval az $\big(f_n(x)\big)$ számsorozat Cauchy-soroozat. Létezik tehát az

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad (x \in [a,\, b])$$

(”pontonkénti”) határérték. Továbbá ($\star$) miatt

$$|f_n(x) - f(x)| =$$

$$\lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in [a,\, b],\, n \in \mathbb{N},\, n > N). \tag{$\star\star$}$$

Mutassuk meg, hogy az így definiált

$$f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

függvény folytonos, azaz $f \in C[a,\, b]$. Legyen ehhez valamilyen $\xi \in [a,\, b]$ mellett $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az előbbiek szerint bármilyen (rögzített) $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f(\xi)| \leq$$

$$2 \cdot \xi + |f_n(x) - f_n(\xi)| \quad (x \in [a,\, b]).$$

Mivel $f_n \in C[a,\, b]$, így $f_n \in C\{\xi\}$ is igaz. Következésképpen létezik olyan $\delta > 0$ szám, amellyel

$$|f_n(x) - f_n(\xi)| < \varepsilon \quad (x \in [a,\, b],\, |x - \xi| < \delta).$$

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$|f_n(x) - f_n(\xi)| < 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon \quad (x \in [a,\, b],\, |x - \xi| < \delta).$$

Ez nem jelent mást, mint azt, hogy $f \in C\{\xi\}$. Az itt szereplő ξ tetszőleges eleme volt az $[a,\, b]$ intervallumnak, ezért $f \in C[a,\, b]$. Végül, a ($\star\star$) becslés szerint (az ottani szereplőkkel)

$$\varrho_\infty(f_n,\, f) = \max\big\{|f_n(x) - f(x)| : a \leq x \leq b\big\} \leq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N},\, n > N),$$

azaz

$$\varrho_\infty(f_n,\, f) \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy a $(C[a,\, b], \varrho_\infty)$ metrikus térben az (f_n) sorozat konvergál az f függvényhez. Ezzel beláttuk, hogy a szóban forgó térben minden Cauchy-sorozat konvergens, azaz a $(C[a,\, b], \varrho_\infty)$ teljes metrikus tér.

■

3 A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban. A *Jacobi*-mátrix kiszámítása.

3.1 Koordináta-függvények és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$. Az

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen, ha minden $i = 1, \ldots, m$ esetén az

$$f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

koordináta-függvény differenciálható az a-ban. Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(a) \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először is azt, hogy $f \in D\{a\}$, és jelöljük az $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrix sorvektorait A_i-vel ($i = 1, \ldots, m$:)

$$f'(a) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor alkalmas

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$\eta(h) \to 0 \quad (||h|| \to 0)$$

és a

$$h \in \mathbb{R}^n \quad (a + h \in \mathcal{D}_f)$$

helyeken

$$f(a+h) - f(a) = \big(f_1(a+h) - f_1(a), \ldots, f_m(a+h) - f_m(a)\big) =$$

$$f'(a) \cdot h + \eta(h) \cdot ||h|| =$$

$$\big(\langle A_1, h\rangle, \ldots, \langle A_m, h\rangle\big) + \big(\eta_1(h) \cdot ||h||, \ldots, \eta_m(h) \cdot ||h||\big).$$

Következésképpen minden $i = 1, \ldots, m$ mellett az η függvény

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

koordináta-függvényeivel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle A_i, h\rangle + \eta_i(h) \cdot ||h|| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f). \tag{$\star$}$$

Mivel bármely $i = 1, \ldots, m$ indexre

$$\eta_i(h) \to 0 \quad (||h|| \to 0),$$

ezért az előbbi ($\star$) összefüggés azt jelenti, hogy $f_i \in D\{a\}$ és $A_i = \operatorname{grad} f_i(a) \quad (i = 1, \ldots, m)$. Most azt tegyük fel, hogy $f_i \in D\{a\}$ $(i = 1, \ldots, m)$, amikor is valamilyen

$$\eta_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \eta_i \to 0 \ (||h|| \to 0) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

függvényekkel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \big\langle \operatorname{grad} f_i(a), h \big\rangle + \eta_i(h) \cdot ||h|| \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in \mathcal{D}_f, i = 1, \ldots, m).$$

Ha tehát

$$A := \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

akkor az

$$\eta := (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \eta(h) \cdot ||h||,$$

ahol $\eta(h) \to 0$ $(||h|| \to 0)$. Ezért $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$.

$\blacksquare$

4 Az összetett függvény differenciálhatósága.

4.1 Az összetett függvény differenciálhatósága

Tétel. Adott $1 \le n,\ m,\ s \in \mathbb{N}$ mellett tekintsük a

$$g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$$

függvényeket. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathcal{D}_g$ pontban $g(a) \in \mathcal{D}_f$, valamint $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

A bizonyítás előtt jegyezzük meg, hogy a tétel állításában szereplő $f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$ mátrix az $f'\big(g(a)\big) \in \mathbb{R}^{s \times m}$ és a $g'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix szorzata, és mint ilyen, $\mathbb{R}^{s \times n}$-beli. Ezt is "várjuk", hiszen

$$f \circ g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$$

miatt (ha $f \circ g \in D\{y\}$ valamilyen $y \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ helyen)

$$(f \circ g)'(y) \in \mathbb{R}^{s \times n}.$$

Bizonyítás. Mivel $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$, $g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, következésképpen megadhatók olyan $r,\ \delta > 0$ számok, amelyekkel

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_g,\ K_\delta\big(g(a)\big) \subset \mathcal{D}_f.$$

A g függvény folytonos is az a-ban, ezért az előbbi $r > 0$ sugárról az is feltehető, hogy

$$g\big[K_r(a)\big] \subset K_\delta\big(g(a)\big).$$

Tehát egyúttal $g\big[K_r(a)\big] \subset \mathcal{D}_f$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $K_r(a) \subset \mathcal{D}_{f \circ g}$, más szóval $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Írjuk fel a g, ill. az f megváltozását az a, ill. a $g(a)$ pont körül a differenciálhatósági feltételeknek megfelelően:

$$g(a+x) - g(a) = g'(a) \cdot x + \eta(x) \cdot ||x|| \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ a + x \in \mathcal{D}_g),$$

$$f\big(g(a)+y\big) - f\big(g(a)\big) = f'\big(g(a)\big) \cdot y + \tilde{\eta}(y) \cdot ||y|| \quad (y \in \mathbb{R}^m,\ g(a) + y \in \mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\eta(x) \to \eta(0) = 0 \quad (||x|| \to 0)$$

és

$$\tilde{\eta}(y) \to \tilde{\eta}(0) = 0 \quad (||y|| \to 0).$$

Speciálisan az

$$y := g(a+x) - g(a) \quad \big(x \in K_r(0)\big)$$

választással

$$(f \circ g)(a+x) - (f \circ g)(a) = f\big(g(a+x)\big) - f\big(g(a)\big) =$$

$$f'\big(g(a)\big)\big(g(a+x) - g(a)\big) + \tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big) \cdot ||g(a+x) - g(a)|| =$$

$$f'\big(g(a)\big)\big(g'(a) \cdot x + \eta(x) \cdot ||x||\big) + \tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big) \cdot ||g'(a) \cdot x + ||x|| \cdot \eta(x)|| =$$

$$f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a) \cdot x + f'\big(g(a)\big) \cdot \eta(x) \cdot ||x|| + \tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big) \cdot ||g'(a) \cdot x + ||x|| \cdot \eta(x)||.$$

Legyen

$$\varphi(x) :=$$

$$f'\big(g(a)\big) \cdot \eta(x) + \frac{\tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big) \cdot ||g'(a) \cdot x + ||x|| \cdot \eta(x)||}{||x||} \quad \big(0 \neq x \in K_r(0)\big),$$

ekkor

$$(f \circ g)(a+x) - (f \circ g)(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a) \cdot x + \varphi(x) \cdot ||x|| \quad \big(0 \neq x \in K_r(0)\big).$$

Megmutatjuk, hogy $\varphi(x) \to 0$ $(||x|| \to 0)$. Ui. $\eta(x) \to 0$ $(||x|| \to 0)$ miatt

$$\Big|\Big|f'\big(g(a)\big) \cdot \eta(x)\Big|\Big| \leq q \cdot ||\eta(x)|| \to 0 \quad (||x|| \to 0),$$

ahol q jelenti az $f'\big(g(a)\big)$ mátrix normáját. Továbbá a g folytonos (is) az a-ban ezért

$$g(a+x) - g(a) \to 0 \quad (||x|| \to 0),$$

amiből $\tilde{\eta}(y) \to \tilde{\eta}(0) = 0$ $(||y|| \to 0)$ miatt

$$\tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big) \to 0 \quad (||x|| \to 0)$$

következik. Végül

$$\frac{\Big|\Big|\tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big)\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|g'(a) \cdot x + ||x|| \cdot \eta(x)\Big|\Big|}{||x||} \leq$$

$$\frac{\Big|\Big|\tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big)\Big|\Big| \cdot \big(||g'(a) \cdot x|| + ||x|| \cdot ||\eta(x)||\big)}{||x||} \leq$$

$$\Big|\Big|\tilde{\eta}\big(g(a+x) - g(a)\big)\Big|\Big| \cdot \big(Q + ||\eta(x)||\big) \to 0 \quad (||x|| \to 0),$$

ahol Q a $g'(a)$ mátrix normáját jelöli. Mindez azt jelenti, hogy

$$\varphi(x) \to 0 \quad (||x|| \to 0)$$

valóban teljesül. Ezért azt

$$(f \circ g)(a + x) - (f \circ g)(a)$$

megváltozásra kapott előbbi egyenlőség szerint $f \circ g \in D\{a\}$, és

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

$\blacksquare$

5 Többször differenciálható függvények. Young-tétel.

5.1 Többváltozós-valós függvények másodrendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható* az a-ban ha minden $x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f \in D\{x\}$, és

$$\partial_i f \in D\{a\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ha a fenti feltételek teljesülnek akkor léteznek a

$$\partial_j(\partial_i f)(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

parciális deriváltak. Ehhez persze nem szükséges, hogy a $\partial_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények deriválhatók legyenek az a helyen. Ha tehát a fenti

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvényre $f \in D^2\{a\}$, akkor minden $i, j = 1, \ldots, n$ mellett létezik a $\partial_{ij} f(a)$ másodrendű parciális derivált. Az

$$f''(a) := \big(\partial_{ij} f(a)\big)_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \ldots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \ldots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \ldots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrixot az f függvény a-beli *másodrendű deriváltmátrixnának nevezzük.* A későbbiekben tárgyalandó Young-tétel miatt ez egy szimmetrikus mátrix.

5.2 Többváltozós-valós függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, továbbá egy alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel minden $x \in K(a)$ pontban az f függvény s-szer differenciálható: $f \in D^s\{x\}$. Belátható, hogy ekkor a $K(a)$ pontjaiban az f összes s-edrendű parciális deriváltja létezik. Azt mondjuk, hogy az f *függvény az a-ban $(s+1)$-szer differenciálható*, ha minden s-edrendű parciális deriváltfüggvénye differenciálható az a-ban.

5.3 Többváltozós-vektorfüggvények függvények magasabb rendű differenciálhatósága

Definíció. Legyen $1 \leq n,\, m \in \mathbb{N}$ és

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\; a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,$$

ill. $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az *f függvény k-szor differenciálható az a-ban*, ha

$$f_j \in D^k\{a\} \quad (j = 1, \ldots, m).$$

5.4 Young-tétel

Tétel. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ és $f \in D^s\{a\}$. Ekkor tetszőleges $k_1, \ldots, k_s \in \{1, \ldots, n\}$ indexek esetén ezek bármely $j_1, \ldots, j_s$ permutációjára

$$\partial_{k_1 \ldots k_s} f(a) = \partial_{j_1 \ldots j_s} f(a).$$

Bizonyítás. Az s-szerinti teljes indukcióra gondolva elegendő az $s = 2$ esettel foglalkoznunk. Ekkor tehát azt kell belátnunk, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Világos, hogy csak az $i \neq j$ eset az "érdekes". Ezen túl (könnyen meggondolhatóan) azt is feltehetjük, hogy $n = 2$. Más szóval az

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

függvényekre

$$a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,\; f \in D^2\{a\},$$

és ennek alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a).$$

Legyen ehhez $r > 0$ olyan, amellyel ($\mathbb{R}^n$-ben a $||.|| := ||.||_\infty$ normát választva)

$$K(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - a|| < r\} \subset \mathcal{D}_f,$$

és vezessük be az alábbi jelölést: az $u, v \in (-r, r)$ helyeken

$$\Delta(u, v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + v).$$

Ha rögzítjük a $v \in (-r,\, r)$ számot, akkor a

$$\varphi(u) := f(a_1+u,\, a_2+v) - f(a_1+u,\, a_2) \quad \big(u \in (-r,\, r)\big)$$

függvénnyel

$$\Delta(u,\, v) = \varphi(u) - \varphi(0) \quad \big(u \in (-r,\, r)\big).$$

Az $f \in D^2\{a\}$ feltétel miatt az előbbi $K_r(a)$ környezettől azt is megkövetelhetjük, hogy egyrészt minden $x \in K_r(a)$ helyen $f \in D\{x\}$ (így egyúttal léteznek az $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ parciális deriváltak is), másrészt

$$\partial_1 f,\, \partial_2 f \in D\{a\}.$$

Következésképpen a most definiált

$$\varphi : (-r,\, r) \to \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, ezért a Lagrange-középérték-tétel alapján

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot u \quad \big(u \in (-r,\, r)\big),$$

ahol $\xi \in (0,\, u)$ (vagy $\xi \in (u,\, 0)$). A parciális deriváltak definíciójára gondolva

$$\varphi'(u) = \partial_1 f(a_1+u,\, a_2+v) - \partial_1 f(a_1+u,\, a_2) \quad \big(u \in (-r,\, r)\big),$$

így

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \big(\partial_1 f(a_1+\xi,\, a_2+v) - \partial_1 f(a_1+\xi,\, a_2)\big) \cdot u \quad \big(u \in (-1,\, r)\big).$$

A $\partial_1 f \in D\{a\}$ differenciálhatósági feltételből

$$\operatorname{grad} \partial_1 f(a) = \big(\partial_{11} f(a),\, \partial_{12} f(a)\big),$$

és egy alkalmas

$$\eta \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, \eta(z) \to 0 \quad (||z|| \to 0)$$

függvénnyel

$$\partial_1 f(a_1+\xi,\, a_2+v) - \partial_1 f(a_1+\xi,\, a_2) =$$
$$\partial_1 f(a_1+\xi,\, a_2+v) - \partial_1 f(a_1,\, a_2) - \big(\partial_1 f(a_1+\xi,\, a_2) - \partial_1 f(a_1,\, a_2)\big) =$$
$$\big\langle \operatorname{grad} \partial_1 f(a),\, (\xi,\, v)\big\rangle + \eta(\xi,\, v) \cdot ||(\xi,\, v)|| - \big\langle \operatorname{grad} \partial_1 f(a),\, (\xi,\, 0)\big\rangle - \eta(\xi,\, 0) \cdot ||(\xi,\, 0)|| =$$
$$\partial_{12} f(a) \cdot v + \eta(\xi,\, v) \cdot ||(\xi,\, v)|| - \eta(\xi,\, 0) \cdot |\xi|.$$

Speciálisan a $0 \neq u = v \in (-r,\, r)$ választással

$$\Delta(u,\, u) = \varphi(u) - \varphi(0) = \partial_{12} f(a) \cdot u^2 + \eta(\xi,\, u) \cdot ||(\xi,\, u)|| \cdot u - \eta(\xi,\, 0) \cdot |\xi| \cdot u,$$

amiből

$$\frac{\Delta(u,\,u)}{u^2} = \partial_{12}f(a) + \eta(\xi,\,u)\cdot\frac{||(\xi,\,u)||}{u} - \eta(\xi,\,0)\cdot\frac{|\xi|}{u}$$

következik. Ezért $|\xi| < |u|$ alapján

$$\left|\frac{\Delta(u,\,u)}{u^2} - \partial_{12}f(a)\right| \le |\eta(\xi,\,u)| + |\eta(\xi,\,0)| \to 0 \quad (u \to 0),$$

hiszen

$$||(\xi,\,u)||,\ ||(\xi,\,0)|| \le |u| \to 0 \quad (u \to 0).$$

Azt kapjuk ezzel, hogy

$$\partial_{12}f(a) = \lim_{u\to 0}\frac{\Delta(u,\,u)}{u^2}. \tag{$\star$}$$

Legyen most rögzített $u \in (-r,\,r)$ mellett

$$\psi(v) := f(a_1 + u,\, a_2 + v) - f(a_1,\, a_2 + v) \quad \big(v \in (-r,\,r)\big).$$

Ekkor

$$\Delta(u,\,v) = \psi(v) - \psi(0) \quad \big(v \in (-r,\,r)\big)$$

és az előbbiekkel analóg módon az adódik, hogy

$$\partial_{21}f(a) = \lim_{v\to 0}\frac{\Delta(v,\,v)}{v^2}.$$

Itt a jobb oldali limesz ugyanaz, mint a ($\star$)-ban. Így $\partial_{21}f(a) = \partial_{12}f(a)$.

■

6 Taylor-formula Lagrange (Peano)-maradéktaggal.

Eredeti vizsgacím:
Taylor-formula Lagrange (Peano)-maradéktaggal, Lagrange-középérték-tétel. A kétszer differenciálható függvények vizsgálata.

Az alábbi jelöléseket fogjuk használni (feltételezve egyeben az azokban szereplő parciális deriváltak létezését). Legyen

$$1 \leq n,\ k \in \mathbb{N},\ f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,\ j = 1, \ldots, n,$$

és

$$\partial_j^k f(a) := \partial_{j \ldots j} f(a)$$

(ahol a "$j \ldots j$" rövidítés k darab j-t jelöl). Speciálisan $\partial_j^1 f(a) = \partial_j f(a)$. Állapodjunk meg abban, hogy

$$\partial_j^0 f(a) := f(a).$$

Ha $i := (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, akkor legyen

$$\partial^i f(a) := \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} f(a).$$

Az $i \in \mathbb{N}^n$ *multiindex* esetén az i *hosszát* a következőképpen definiáljuk:

$$|i| := ||i||_1 = \sum_{j=1}^{n} i_j.$$

A korábban mondottak szerint pl. $f \in D^{|i|}\{a\}$ elégséges ahhoz, hogy létezzen az $|i|$-edrendá $\partial^i f(a)$ parciális derivált, és ekkor a Young-tétel miatt az $|i|$ hosszúságú $1 \ldots 1 \ldots n \ldots n$ jelsorozat bármely $\nu_1 \ldots{}_n\, u_{|i|}$ permutációjára

$$\partial^i f(a) = \partial_{1 \ldots 1 \ldots n \ldots n} f(a) = \partial_{\nu_1 \ldots \nu_{|i|}} f(a).$$

Legyen az $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ multiindex és az $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén

$$i! := \prod_{j=1}^{n} i_j! = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{i_j} k$$

és

$$x^i := \prod_{j=1}^{n} {x_j}^{i_j}$$

az i *faktoriálisa*, ill. az x vektor i-kitevős *hatványa*. Nyilvánvaló, hogy ha $n = 1$, akkor $i = i_1 \in \mathbb{N}$ és $|i| = i$, ill.

$$i! = \prod_{j=1}^{i} j,$$

az x^i $(x \in \mathbb{R})$ pedig a "megszokott" hatvány.

Ha $a\, b \in \mathbb{R}^n$, akkor az a és b végpontú zárt, ill. $a \neq b$ esetén nyílt *szakaszt* az

$$[a,\, b] := \big\{a + t(b-a) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq 0\big\},$$

ill.

$$(a,\, b) := \big\{a + t(b-a) \in \mathbb{R}^n : 0 < t < 1\big\}$$

módon definiáljuk.

6.1 Taylor-polinom fogalma

Definíció. Tekintsük ezek után az

$$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvényt, és tegyük fel, hogy valamilyen

$$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,\ s \in \mathbb{N}$$

mellett $f \in D^s\{a\}$ (ahol - mint korábban is - a $D^0\{a\} := C\{a\}$ megállapodással élünk). Ekkor a

$$T_{a,\,s} f(x) := \sum_{k=0}^{s} \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

előírással definiált

$$T_{a,\,s} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvényt azt f függvény a-hoz tartozó s-edrendű *Taylor-polinomjának* nevezzük.

Világos, hogy $T_{a,\,0} f \equiv f(a)$, ill. $T_{a,\,s} f(a) \equiv f(a)$.

6.2 Taylor-formula

Tétel. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényre valamilyen $s \in \mathbb{N}$ mellett $f \in D^{s+1}$ teljesük. Ekkor bármely $[a,\, b] \subset \mathcal{D}_f$ esetén van olyan $c \in [a,\, b]$, hogy

$$f(b) = T_{a,\,s} f(b) + \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\, |i|=s+1} \frac{\partial^i f(c)}{i!} \cdot (b-a)^i.$$

Bizonyítás (vázlat). Feltehető, hogy $a \neq b$, legyen ekkor $h := b - a$ és

$$F(t) := f(a + th) \quad (t \in \mathbb{R},\, a + th \in \mathcal{D}_f).$$

Az $[a,\, b] \subset \mathcal{D}_f$ feltétel miatt $[0,\, 1] \subset \mathcal{D}_F$. Mivel a

$$g(t) := a + th \quad (t \in \mathbb{R},\, a + th \in \mathcal{D}_f)$$

függvényre $g \in D^{s+1}$ triviális módon igaz, így

$$F = f \circ g \in D^{s+1}$$

következik. Ezért az $F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre alkalmazható az "egyváltozós" Taylor-formula, miszerint egy alkalmas $\xi \in (0,\, 1)$ helyen

$$f(b) = F(1) = \sum_{k=0}^{s} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}.$$

Elég tehát azt megmutatni, hogy

$$\frac{F^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\, |i| = k} \frac{\partial^i f(a + th)}{i!} \cdot h^i \quad (t \in \mathcal{D}_F,\, k = 0,\, \ldots,\, s + 1), \tag{$\star$}$$

amiből következően a $c := a + \xi \cdot h$ pont megfelel az állításunknak.

Ha itt $k = 0$, akkor

$$\frac{F^{(0)}(t)}{0!} = F(t) = f(a + th) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\, |i| = 0} \frac{\partial^i f(a + th)}{i!} \cdot h^i \quad (t \in \mathcal{D}_F)$$

nyilván igaz.

NINCS BEFEJEZVE