Elektrotechnika példatár

Langer Ingrid

Tartalomjegyzék

Előszó

A példatár az Óbudai Egyetem Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai mérnöki Karán a Mechatronikai mérnök BSc képzésen oktatott Elektrotechnika tárgy egyenáramú és váltakozó áramú hálózatok számításával kapcsolatos anyagának elsajátításához szeretne segítséget nyújtani. A tantermi gyakorlatok nem mindig elegendőek ahhoz, hogy a hallgatók a számítási módszereket első hallásra megértsék, illetve levelező tagozaton idő hiányában a részletes magyarázatok gyakran elmaradnak. A példatár ezért sok, részletesen kidolgozott feladatot is tartalmaz, amelyben a számítás menetét lépésről lépésre követni lehet, de minden témakörhöz tartoznak olyan gyakorló feladatok is, amelyeket önállóan kell megoldani, segítségként csak a végeredmény van megadva.

Remélem, hasznos segítség lesz a zárthelyi dolgozatokra és a vizsgára való felkészülésben.

2013. augusztus

A szerző

1. EGYENÁRAMÚ HÁLÓZATOK

1.1. Alapfogalmak

1.1.1. *Villamos áram (jele: I)*

Egységnyi felületen egységnyi idő alatt átahaladó töltésmennyiséget áramnak nevezzük:

$$I = \frac{dQ}{dt}\ [A]$$

ahol Q – töltésmennyiség [C]

t – idő [s]

1.1.2. *Villamos feszültség (jele: U)*

A tér két pontja közötti potenciálkülönbség.

Elektromos potenciál: egységnyi töltésnek a tér egyik pontjából a másikba mozgatásához szükséges energia:

$$W_{AB} = \int_A^B Q \cdot Edl = Q \int_A^B Edl = Q \cdot U_{AB}$$

$$U_{AB} = \int_A^B Edl = \frac{W_{AB}}{Q}\ \ [\frac{J}{C} = V]$$

ahol W_{AB} – Q töltésmennyiség A pontból B pontba mozgatásához szükséges munka [J]

E – elektromos térerősség [N/C]

1.1.3. *Ellenállás (jele: R)*

Fém vezető ellenállása:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}\ [\Omega]$$

ahol ρ – a fajlagos ellenállás [$\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$]

l – a vezető hossza [m]

A – a vezet keresztmetszete [mm^2]

(A fajlagos ellenállás hőmérsékletfüggő, a hőmérséklet növekedésével a fém vezetők ellenállása nő.)

Villamos áramkörökben az ellenállások árama és feszültsége közötti kapcsolatot az Ohm-törvény írja le:

$$R = \frac{U}{I}$$

(Az ellenállás reciprokát vezetőképességnek hívjuk, jele G, mértékegysége S (Siemens)

$G = \frac{1}{R}$)

1.1.4. Villamos *áramkörök*

Az egyenáramú villamos áramkörök aktív elemekből, azaz energiaforrásokból (feszültség vagy áramgenerátorokból), passzív elemekből, azaz fogyasztókból (ellenállásokból) és az őket összekötő vezetékekből állnak.

A generátorok villamos energia előállítására alkalmas készülékek. (Villamos energiát számos energiafajta átalakításával előállítható, pl. vegyi energia (galvánelemek, akkumulátorok), fényenergia (napelemek), mechanikai energia (egyen- és váltakozó áramú generátorok) átalakításával.
Ideális feszültséggenerátor: Kapcsai között a feszültség a rá kapcsolt fogyasztóktól függetlenül állandó.
Ideális áramgenerátor: Árama a rá kapcsolt fogyasztóktól függetlenül állandó.

Jelölések:

Ideális feszültséggenerátor ***Ideális áramgenerátor***

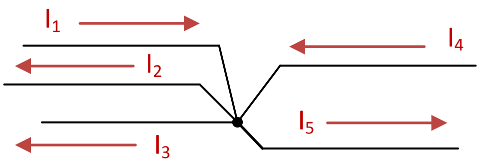
1-1. ábra

1.1.5. Kirchhoff törvények

a) Kirchhoff csomóponti törvénye:

Csomópont definíciója a villamos hálózatban: Kettőnél több vezeték találkozási pontja.

Villamos hálózat csomópontjába befolyó és kifolyó áramok előjeles összege nulla.



$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

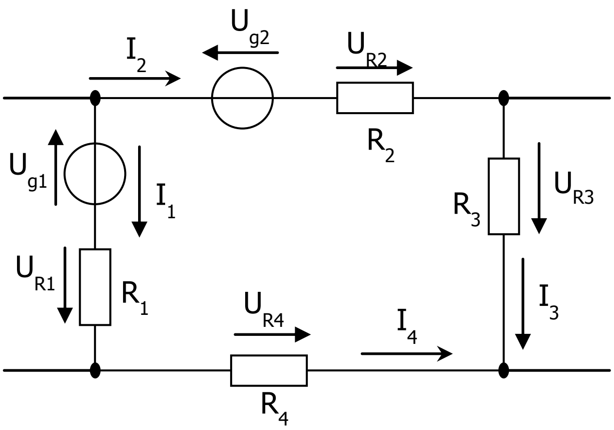
$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

1-2. ábra

b) Kirchhoff hurok törvénye:

Hurok definíciója a villamos hálózatban: A hálózat azon ágainak összessége, melyeken végighaladva úgy érhetünk vissza a kiindulási pontba, hogy minden ágon csak egyszer haladtunk végig.

Villamos hálózatban bármely zárt hurokban a generátorok és fogyasztók feszültségeinek előjeles összege nulla.



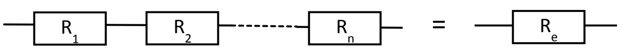
$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

$$U_{g1} - U_{g2} + U_{R2} + U_{R3} - U_{R4} - U_{R1} = 0$$

1-3. ábra

1.1.6. Ellenállások kapcsolása

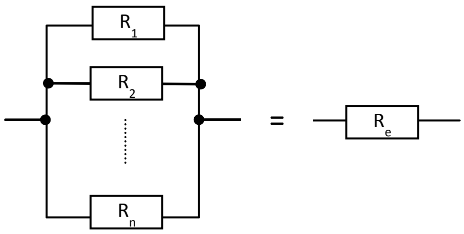
a. Ellenállások soros kapcsolása



$$R_e = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

1-4. ábra

b. Ellenállások párhuzamos kapcsolása



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

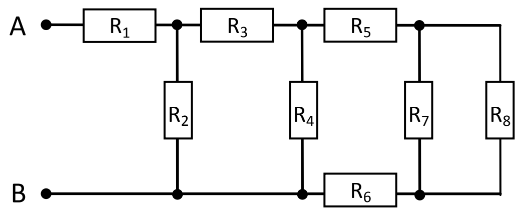
jelölésben: $R_e = R_1 \times R_2 \times \ldots . . \times R_n$

(Az ×-szel jelölt művelet elnevezése ***replusz***, jelentése: reciprok értékek összegének a reciproka)

1-5. ábra

1.2. Példák passzív hálózatok eredő ellenállásának kiszámítására

1.2.1. *A* és *B* pontok között számítsa ki az eredő ellenállást!

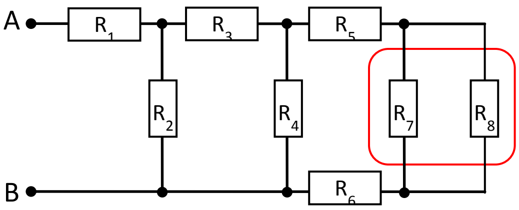


R_1=4Ω
R_2=3Ω
R_3=3,6Ω
R_4=4Ω
R_5=1,8 Ω
R_6=3 Ω
R_7=2 Ω
R_8=3 Ω

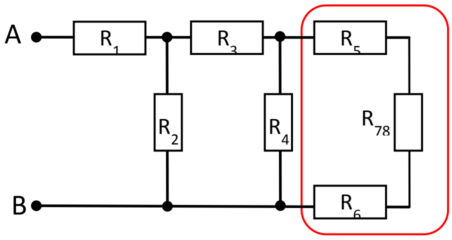
1-6. ábra

A megoldás menete:

Keressünk sorba vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállásokat és cseréljük ki ezek eredőjével az eredeti ellenállásokat!

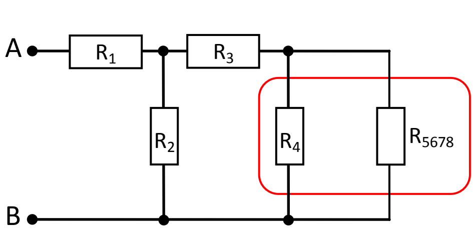


$$R_{78} = R_7 \times R_8 = \frac{R_7 \cdot R_8}{R_7 + R_8} = \frac{2 \cdot 3}{2+3} = 1{,}2\Omega$$

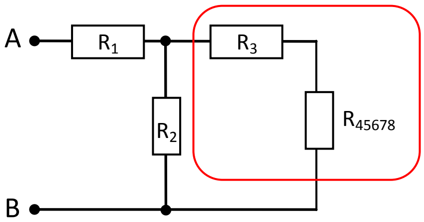


$$R_{5678} = R_5 + R_6 + R_{78} = 1{,}8 + 3 + 1{,}2 = 6\ \Omega$$

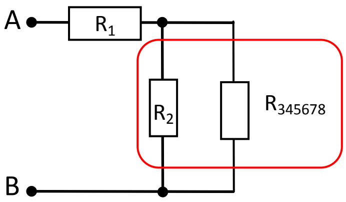
1-7. ábra



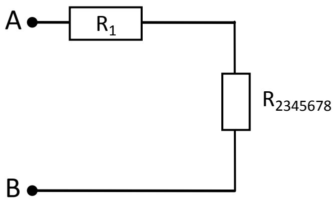
$$R_{45678} = R_{5678} \times R_4 = \frac{6 \cdot 4}{10} = 2{,}4\Omega$$



$$R_{345678} = R_3 + R_{45678} = 3{,}6 + 2{,}4 = 6\ \Omega$$



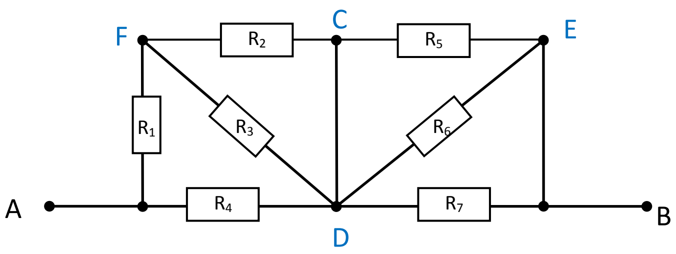
$$R_{2345678} = R_{345678} \times R_2 = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2\ \Omega$$



$$R_{AB} = R_{12345678} = R_1 + R_{2345678} = 2 + 4 = 6\ \Omega$$

1-8. ábra

1.2.2. Számítsa ki az ellenállás hálózat eredőjét *A* és *B* pontok között!

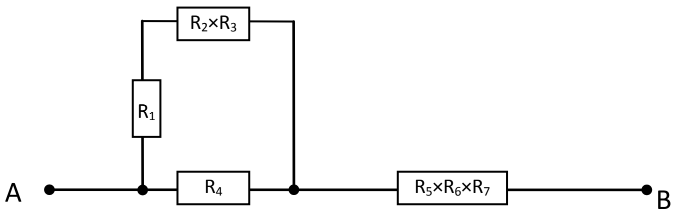


$R_1=1{,}8\Omega$
$R_2=2\Omega$
$R_3=3\Omega$
$R_4=7\Omega$
$R_5=3\ \Omega$
$R_6=6\ \Omega$
$R_7=2\ \Omega$

1-9. ábra

Megoldás:

A *C-D* pontok és a *B-E* pontok egy-egy ellenállás nélküli vezetékdarabbal vannak összekötve (rövidre vannak zárva), ezért a két csomópont összevonható. Így látható, hogy az R_5 R_6 és R_7 ellenállások a *B-D* pontok között párhuzamosan vannak kapcsolva. Ugyanez igaz az R_2 és R_3 ellenállásokra a *D-F* pontok között:



1-10. ábra

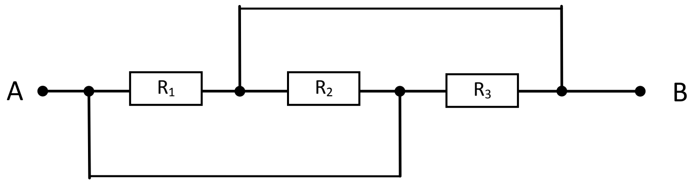
Az R_1 és az R_{23} ellenállások egymással sorban, ketten együtt az R_4-gyel párhuzamosan vannak kapcsolva. Eredőjük pedig az R_{567}-tel sorba kapcsolódik.

Így *AB* között az eredő ellenállás:

$$R_{AB} = \{R_4 \times [(R_2 \times R_3) + R_1]\} + (R_5 \times R_6 \times R_7)$$

$$R_{AB} = \{7 \times [(2 \times 3) + 1{,}8]\} + (3 \times 6 \times 2) = \left[7 \times \left(\frac{2 \cdot 3}{2+3} + 1{,}8\right)\right] + \left(\frac{3 \cdot 6}{3+6} \times 2\right)$$
$$= \frac{7 \cdot 3}{7+3} + \frac{2 \cdot 2}{2+2} = 3{,}1\ \Omega$$

1.2.3. *A* és *B* pontok között számítsa ki az eredő ellenállást!



$R_1=8\ \Omega$

$R_2=20\Omega$

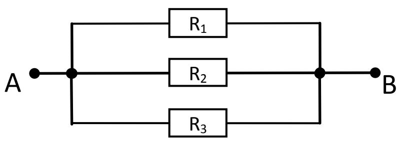
$R_3=30\Omega$

1-11. ábra

Megoldás:

Vegyük észre, hogy a rövidre záró vezetékek miatt mindhárom ellenállás *A* és *B* pontok közé van bekötve, vagyis a három ellenállás *A* és *B* pontok között párhuzamosan kapcsolódik egymáshoz.

A kapcsolás átrajzolva:

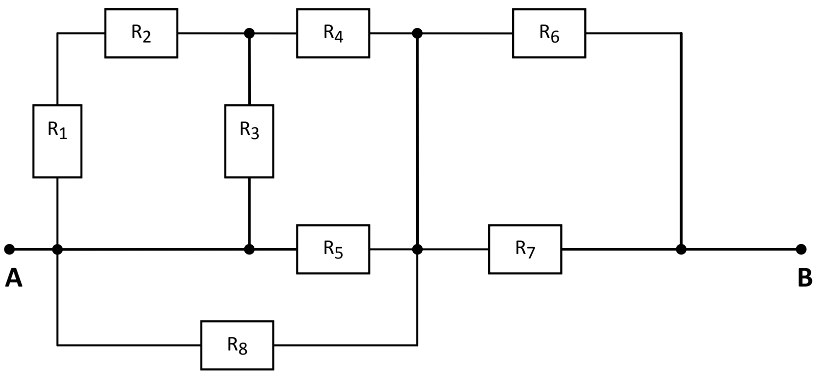


$$R_{AB} = R_1 \times R_2 \times R_3$$

$$R_{AB} = \frac{8 \cdot 20 \cdot 30}{8 \cdot 20 + 8 \cdot 30 + 20 \cdot 30} = 4{,}8\Omega$$

1-12. ábra

1.2.4. *A* és *B* pontok között számítsa ki az eredő ellenállást!



$R_1=20\ \Omega$

$R_2=40\ \Omega$

$R_3=30\ \Omega$

$R_4=10\ \Omega$

$R_5=60\ \Omega$

$R_6=70\ \Omega$

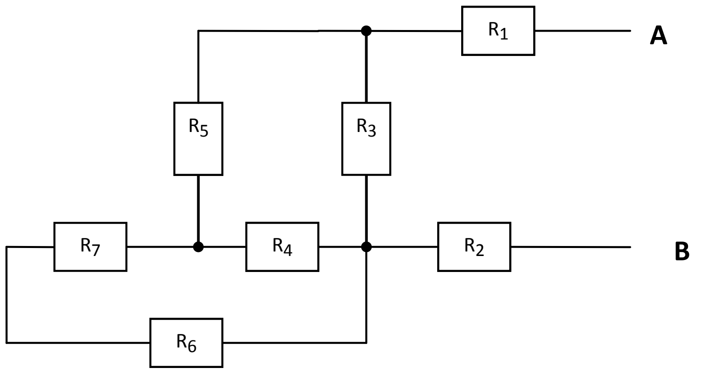
$R_7=30\ \Omega$

$R_8=20\ \Omega$

1-13. ábra

(Megoldás: $R_{AB} = (\{[(R_1 + R_2) \times R_3] + R_4\} \times R_5 \times R_8) + (R_6 \times R_7) = 31\Omega$

1.2.5. Számítsa ki az ellenállás hálózat eredőjét *A* és *B* pont között!

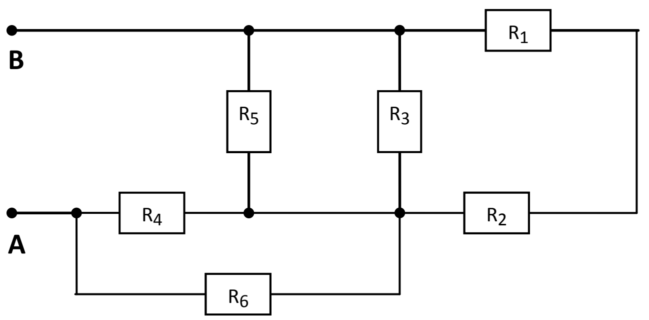


$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 6\Omega$
$R_3 = 3\ \Omega$
$R_4 = 3\ \Omega$
$R_5 = 5\ \Omega$
$R_6 = 2\Omega$
$R_7 = 4\ \Omega$

1-14. ábra

(Megoldás: $R_{AB} = R_1 + R_2 + (R_3 \times \{R_5 + [R_4 \times (R_6 + R_7)]\}) = 9{,}1\Omega$*)*

1.2.6. Számítsa ki *A* és *B* pont között az eredő ellenállást!

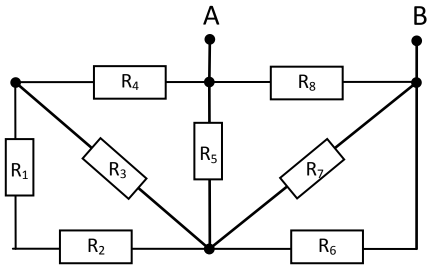


$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 4\Omega$
$R_3 = 6\ \Omega$
$R_4 = 3\ \Omega$
$R_5 = 5\ \Omega$
$R_6 = 7\ \Omega$

1-15. ábra

(Megoldás: $R_{AB} = \{[(R_1 + R_2) \times R_3] \times R_5\} + (R_4 \times R_6) = 3{,}975\Omega$*)*

1.2.7. Számítsa ki *A* és *B* pont között az eredő ellenállást!

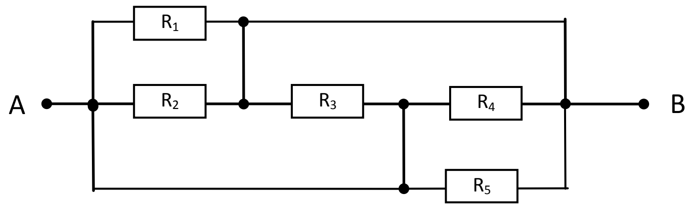


R_1=10 Ω
R_2=30 Ω
R_3=10 Ω
R_4=12 Ω
R_5=80 Ω
R_6=40 Ω
R_7=60 Ω
R_8=60 Ω

1-16. ábra

(Megoldás: $R_{AB} = [(\{[(R_1 + R_2) \times R_3] + R_4\} \times R_5) + (R_6 \times R_7)] \times R_8 = 24\Omega$

1.2.8. Számítsa ki *A* és *B* pont között az eredő ellenállást!

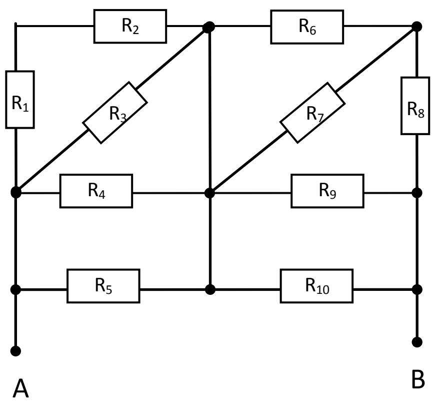


R_1=6 Ω
R_2=30Ω
R_3=30Ω
R_4=30 Ω
R_5=90 Ω

1-17. ábra

(Megoldás: $R_{AB} = R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5 = 3{,}6\Omega$*)*

1.2.9. Számítsa ki *A* és *B* pont között az eredő ellenállást!



R_1=15 Ω
R_2=25 Ω
R_3=20 Ω
R_4=30 Ω
R_5=60 Ω
R_6=40 Ω
R_7=60 Ω
R_8=16 Ω
R_9=40 Ω
R_{10}=30 Ω

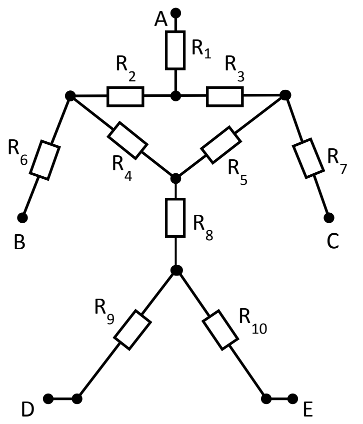
1-18. ábra

(Megoldás: $R_{AB} = [(R_1 + R_2) \times R_3 \times R_4 \times R_5] + \{[(R_6 \times R_7) + R_8] \times R_9 \times R_{10}\} = 20\Omega$*)*

1.2.10. Az ábrán az emberi test ellenállásának egyszerűsített modellje látható. Számítsa ki 150 V egyenfeszültség hatására a testen átfolyó áramot, ha a feszültség a(z)

a) A-B
b) B-C
c) B-E
d) A-E

pontok között hat.



R_1=40 Ω
R_2=35 Ω
R_3=35 Ω
R_4=120 Ω
R_5=120 Ω
R_6=480 Ω
R_7=460 Ω
R_8=20 Ω
R_9=800 Ω
R_{10}=850 Ω

1-19. ábra

(Megoldás: $a)\ R_{AB} = R_1 + R_6 + (R_2 \times (R_3 + R_4 + R_5)) = 551\Omega,\qquad I_a = 0{,}27A$

$b)\ R_{BC} = R_6 + R_7 + [(R_2 + R_3) \times (R_4 + R_5)] = 994{,}2\Omega,\qquad I_a = 0{,}15A$

$c)\ R_{BE} = R_6 + (R_4 \times (R_2 + R_3 + R_5)) + R_8 + R_{10} = 1423{,}6\Omega,\qquad I_a = 0{,}11A$

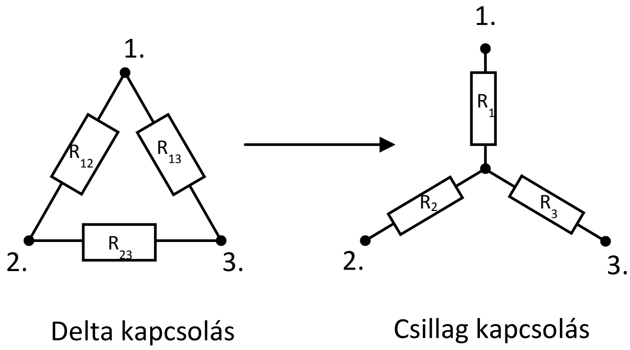
$d)\ R_{AE} = R_1 + [R_2 + R_4) \times (R_3 + R_5)] + R_8 + R_{10} = 987{,}5\Omega,\qquad I_a = 0{,}15A$)

1.3. Impedanciahű átalakítások

Nem minden kapcsolás bontható fel soros és párhuzamos kapcsolások sorozatára. Ilyen esetben segítséget jelenthet a *delta-csillag* vagy a *csillag-delta* átalakítás: a hálózat egy részét kicseréljük más ellenállás-kombinációra oly módon, hogy a hálózat többi részében semmi változás ne történjen és az eredő impedancia a hálózat bármely két pontja felöl nézve változatlan maradjon. Ezt a hálózat *impedanciahű átalakításának* nevezzük.

a. Delta-csillag átalakítás

Az 1-2-3 pontok közé ún. delta (Δ) kapcsolásba kötött ellenállásokat cseréljük ki ugyanezen pontok közé csillag (Y) kapcsolásba kötött ellenállásokkal úgy, hogy bármely két pont felöl nézve az eredő ellenállás a Δ és a Y kapcsolásban megegyezzen.



1-20. ábra

Az 1-2 pontok között az ellenállás, ha a 3. pont nincs csatlakoztatva:

$$(1)\ R_1 + R_2 = R_{12} \times (R_{23} + R_{13})$$

Az 2-3. pontok között az ellenállás, ha az 1. pont nincs csatlakoztatva:

$$(2)\ R_2 + R_3 = R_{23} \times (R_{12} + R_{13})$$

Az 1-3. pontok között az ellenállás, ha a 2. pont nincs csatlakoztatva:

$$(3)\ R_1 + R_3 = R_{13} \times (R_{12} + R_{23})$$

Az (1) és (3) egyenletek összegéből kivonva a (2) egyenletet:

$$2 \cdot R_1 = \frac{R_{12} \cdot (R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} + \frac{R_{13} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} - \frac{R_{23} \cdot (R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$2 \cdot R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13} + R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} + \frac{R_{13} \cdot R_{12} + R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} - \frac{R_{23} \cdot R_{13} + R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Így a Y kapcsolás R_1 ellenállása:

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$$

Az (1) és (2) egyenletek összegéből levonva a (3) egyenletet, megkapjuk a Y kapcsolás R_2 ellenállását:

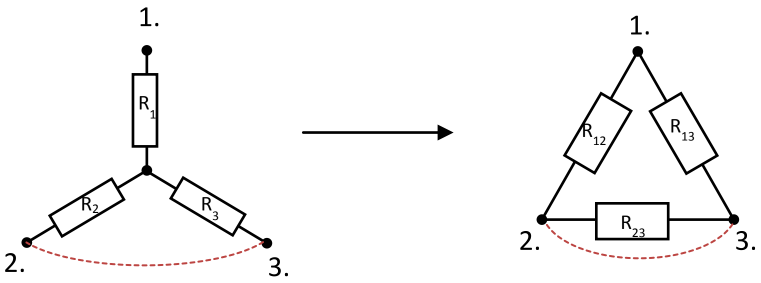
$$\boxed{R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$$

És végül a (2) és (3) egyenletek összegéből levonva az (1) egyenletet, megkapjuk a Y kapcsolás R_3 ellenállását:

$$\boxed{R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$$

b. Csillag-delta átalakítás

Az 1-2-3 pontok közé csillag (Y) kapcsolásba kötött ellenállásokat cseréljük ki ugyanezek pontok közé delta (Δ) kapcsolásba kötött ellenállásokkal úgy, hogy bármely két pont felől nézve az eredő ellenállás a Y és a Δ kapcsolásban megegyezzen.



Csillag kapcsolás

Delta kapcsolás

1-21. ábra

Az átalakítás képletének levezetéséhez képzeletben kössük össze (zárjuk rövidre) a 2 és 3 pontot. Impedanciahű átalakítás esetén a csillag kapcsolásban az 1 és a 2-3 pontok közötti eredő ellenállás meg kell, hogy egyezzen a delta kapcsolásban az 1. és a szintén összekötött 2-3 pontok közötti ellenállással. Ez csillag kapcsolásban a R_1 soros kapcsolását jelenti R_2 és R_3 párhuzamos eredőjével. Delta kapcsolásban a rövidzár miatt R_{23} ellenállás nem szól bele az eredő ellenállásba, ami így az R_{12} és R_{13} ellenállások párhuzamos eredőjével lesz egyenlő:

$$(1)\ \ R_{13} \times R_{12} \ = R_1 + (R_2 \times R_3)$$

a "replusz" jelölést képletként felírva:

$$(1)\quad \frac{1}{\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{12}}} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

A fenti gondolatmenetet követve az 1 és a 3 pontok összekötésével az eredő ellenállás a 2 és 1-3 pontok között csillag és delta kapcsolásban:

$$(2)\ \ R_{12} \times R_{23} = \ R_2 + (R_1 \times R_3)$$

a "replusz" műveletet képletben felírva:

$$(2)\ \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}}} = R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}}$$

Végül az 1 és a 2 pontok összekötésével a 3 és az 1-2 pontok között az eredő ellenállás csillag és delta kapcsolásban:

$$(3)\ \ R_{13} \times R_{23} = R_3 + (R_1 \times R_2)$$

azaz

$$(3)\quad \frac{1}{\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{23}}} = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

A fenti összefüggésekben az ellenállásokat cseréljük ki reciprok értékükkel, vezessük be a $G = 1/R$ jelölést. (G a *vezetőképesség* jele, mértékegysége Siemens, [S])

Az (1) egyenlet így a következőképpen írható:

$$(1)\quad \frac{1}{G_{13}+G_{12}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2+G_3}$$

$$G_{13}+G_{12} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2+G_2}} = \frac{G_1(G_2+G_3)}{G_1+G_2+G_3}$$

A fenti összefüggés formailag nagyon hasonlít a delta-csillag átalakításnál az ellenállásokra felírt összefüggésre.

Az (1) egyenlet mintájára a (2) és a (3) egyenletek a következőképpen írhatók:

$$(2)\quad G_{12}+G_{23} = \frac{G_2(G_1+G_3)}{G_1+G_2+G_3}$$

$$(3)\quad G_{13}+G_{23} = \frac{G_3(G_1+G_2)}{G_1+G_2+G_3}$$

Az (1) és (2) egyenletek összegéből kivonva a (3) egyenletet:

$$2 \cdot G_{12} = \frac{G_1(G_2+G_3)}{G_1+G_2+G_3} + \frac{G_2(G_1+G_3)}{G_1+G_2+G_3} - \frac{G_3(G_1+G_2)}{G_1+G_2+G_3}$$

$$2 \cdot G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2 + G_1 \cdot G_3}{G_1+G_2+G_3} + \frac{G_1 \cdot G_2 + G_2 \cdot G_3}{G_1+G_2+G_3} - \frac{G_1 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_3}{G_1+G_2+G_3}$$

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1+G_2+G_3}$$

Visszaírva R-eket a képletbe:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$R_{12} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}) R_1 R_2$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3} \cdot R_1 R_2$$

$$\boxed{R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}}$$

A (2) és (3) egyenletek összegéből kivonva a (1) egyenletet:

$$2 \cdot G_{23} = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{G_1+G_2+G_3} + \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1+G_2+G_3} - \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1+G_2+G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Visszaírva R-eket a képletbe:

$$\boxed{R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}}$$

Végül az (1) és (3) egyenletek összegéből kivonva a (2) egyenletet:

$$2 \cdot G_{13} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1+G_2+G_3} + \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1+G_2+G_3} - \frac{G_2(G_1 + G_3)}{G_1+G_2+G_3}$$

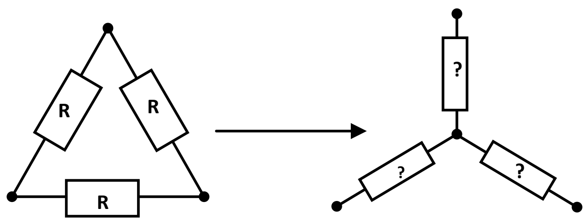
$$G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Visszaírva R-eket a képletbe:

$$\boxed{R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}}$$

1.3.1. Számítsuk ki három azonos nagyságú…

a) …deltába kapcsolt R ellenállással egyenértékű csillag kapcsolás ellenállásainak értékeit!



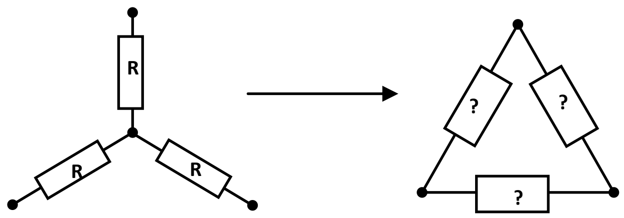
1-22. ábra

Alkalmazzuk a delta-csillag átalakítás képlet három azonos nagyságú ellenállásra. Behelyettesítve R-t mindhárom ellenállás helyére látjuk, hogy elég a csillag kapcsolás egyetlen ellenállásának kiszámolása, hiszen az átalakítás után is mindhárom ellenállás azonos nagyságú lesz:

$$R_Y = \frac{R \cdot R}{R + R + R} = \frac{R}{3}$$

Tehát egy R ellenállásokból álló delta kapcsolás R/3 nagyságú ellenállásokból álló csillag kapcsolással helyettesíthető.

b) …csillagba kapcsolt R ellenállással egyenértékű delta kapcsolás ellenállásainak értékeit!

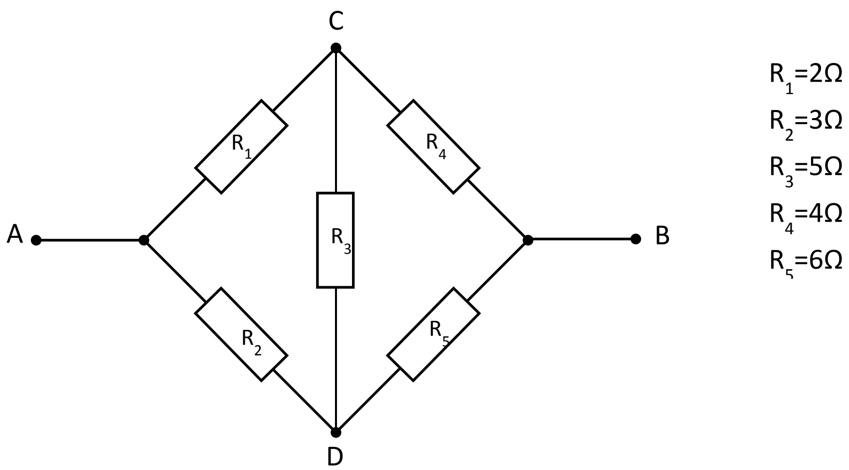


1-23. ábra

$$R_\Delta = R + R + \frac{R \cdot R}{R} = 3R$$

Tehát egy R ellenállásokból álló csillag kapcsolás 3R nagyságú ellenállásokból álló delta kapcsolással helyettesíthető.

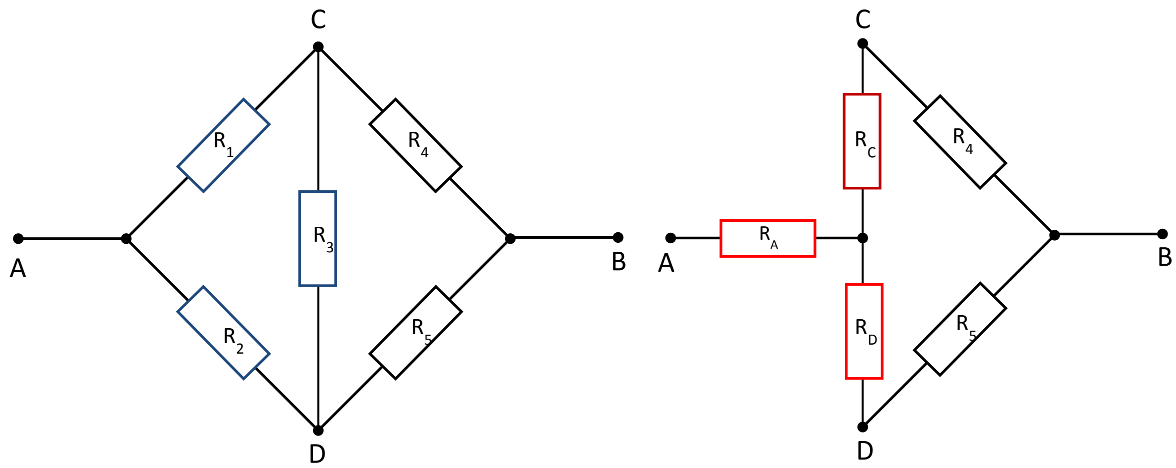
1.3.2. Számítsa ki *A* és *B* pont között az eredő ellenállást!



1-24. ábra

1.3.2.1. Megoldás delta-csillag átalakítással

Cseréljük ki *ACD* pontok között a delta kapcsolású R_1, R_2, R_3 ellenállásokat a velük egyenértékű csillag kapcsolású R_A, R_C, R_D ellenállásokra!



1-25. ábra

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3 + 5} = 0{,}6\Omega$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 5}{2 + 3 + 5} = 1\Omega$$

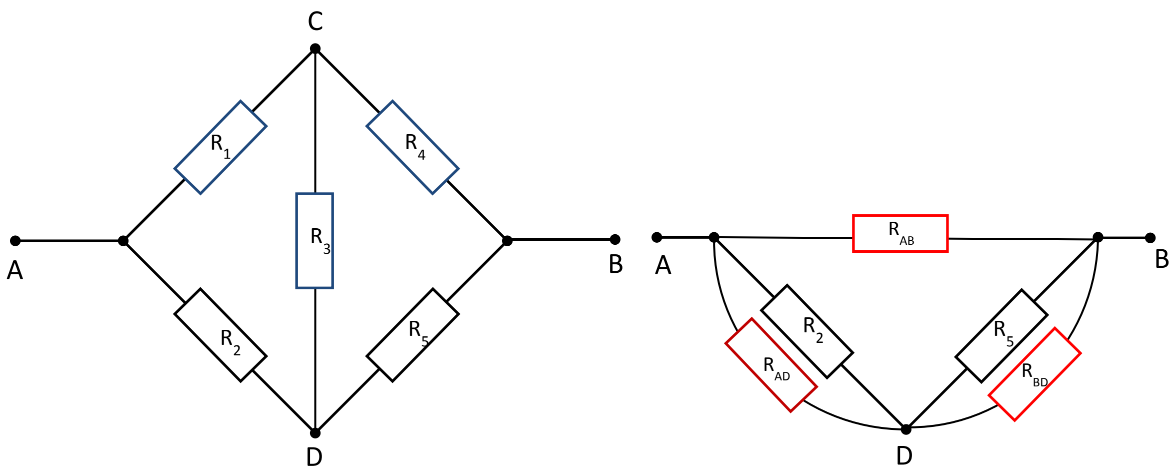
$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 5}{2 + 3 + 5} = 1{,}5\Omega$$

$$R_{AB} = R_A + [(R_C + R_4) \times (R_D + R_5)] = 0{,}6 + [(1 + 4) \times (1{,}5 + 6)] = 0{,}6 + \frac{5 \cdot 7{,}5}{5 + 7{,}5}$$

$$R_{A-B} = 3{,}6\ \Omega$$

1.3.2.2. Megoldás csillag-delta átalakítással

Cseréljük ki *ADB* pontok között a csillag kapcsolású R_1, R_3, R_3 ellenállásokat a velük egyenértékű delta kapcsolású R_{AB}, R_{AD}, R_{BD} ellenállásokra! *(Megjegyzés: C pont az R_1, R_3, R_3 ellenállások csillagpontja, ami az átalakítás után eltűnik)*



1-26. ábra

$$R_{AD} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_4} = 2 + 5 + \frac{2 \cdot 5}{4} = 9{,}5\Omega$$

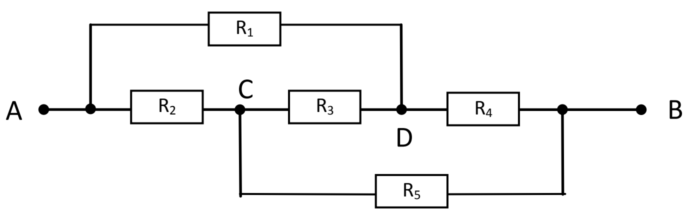
$$R_{BD} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_1} = 5 + 4 + \frac{5 \cdot 4}{2} = 19\Omega$$

$$R_{AB} = R_1 + R_4 + \frac{R_1 \cdot R_4}{R_3} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{5} = 7{,}6\Omega$$

$$R_{A-B} = R_{AB} \times [(R_{AD} \times R_2) + (R_{BD} \times R_5)] = 7{,}6 \times [(9{,}5 \times 3) + (19 \times 6)]$$

$$= 7{,}6 \times \left[\frac{9{,}5 \cdot 3}{12{,}5} + \frac{19 \cdot 6}{25}\right] = 7{,}6 \times 6{,}84 = \frac{7{,}6 \cdot 6{,}84}{7{,}6 + 6{,}84} = 3{,}6\Omega$$

1.3.3. Számítsa ki *A* és *B* pont között az eredő ellenállást!



$R_1=1\Omega$

$R_2=3\Omega$

$R_3=4\Omega$

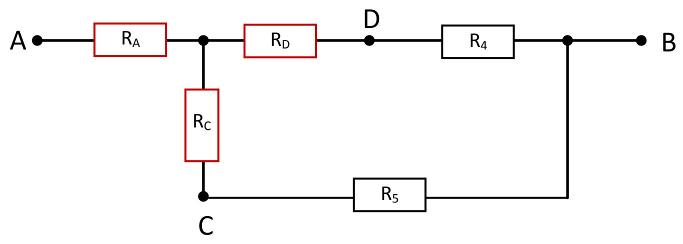
$R_4=2{,}5\Omega$

$R_5=4{,}5\Omega$

1-27. ábra

1.3.3.1. Megoldás delta-csillag átalakítással

Az *ACD* pontok között R_1 R_2 R_3 ellenállások delta kapcsolásban vannak kötve. Cseréljük ki ezt a három ellenállást három csillag kapcsolású ellenállásra!



1-28. ábra

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3 + 4} = 0{,}375\Omega$$

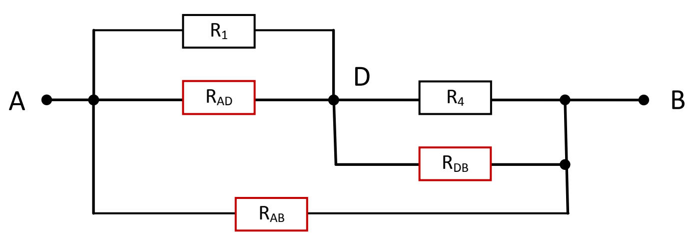
$$R_D = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1 \cdot 4}{1 + 3 + 4} = 0{,}5\Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 4}{1 + 3 + 4} = 1{,}5\Omega$$

Az eredő ellenállás A-B pontok között:

$$R_{A-B} = R_A + [(R_D + R_4) \times (R_C + R_5)] = 0{,}375 + [(0{,}5 + 2{,}5) \times (1{,}5 + 4{,}5)]$$
$$= 2{,}375\Omega$$

1.3.3.2. Megoldás csillag-delta átalakítással



1-29. ábra

Az R_2, R_3, R_5 ellenállások *A-D-B* pontok között csillagba vannak kapcsolva. Cseréljük ki ezeket R_{AD}, R_{AB}, R_{DB} delta kapcsolású ellenállásokra. A *C* pont (csillagpont) az átalakítás során eltűnik.

$$R_{AD} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_5} = 3 + 4 + \frac{3 \cdot 4}{4{,}5} = 9{,}667\Omega$$

$$R_{DB} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 \cdot R_5}{R_2} = 4 + 4{,}5 + \frac{4 \cdot 4{,}5}{3} = 14{,}5\Omega$$

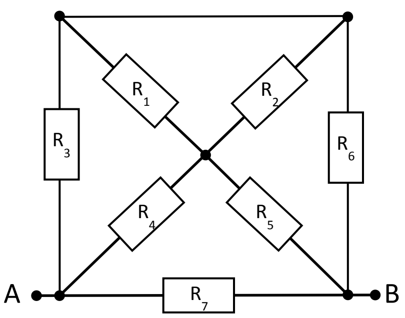
$$R_{AB} = R_2 + R_5 + \frac{R_2 \cdot R_5}{R_3} = 3 + 4{,}5 + \frac{3 \cdot 4{,}5}{4} = 10{,}875\Omega$$

$$R_{A-B} = R_{AB} \times [(R_{AD} \times R_1) + (R_{DB} \times R_4)] = 10{,}875 \times [(9{,}667 \times 1) + (14{,}5 \times 2{,}5)]$$

$$= 10{,}875 \times \left[\frac{9{,}667 \cdot 1}{10{,}667} + \frac{14{,}5 \cdot 2{,}5}{17}\right]$$

$$= 10{,}875 \times 3{,}0386 \frac{10{,}875 \cdot 3{,}0386}{10{,}875 + 3{,}386} = 2{,}375\Omega$$

1.3.4. Számítsa ki A-B pontok között az eredő ellenállást!

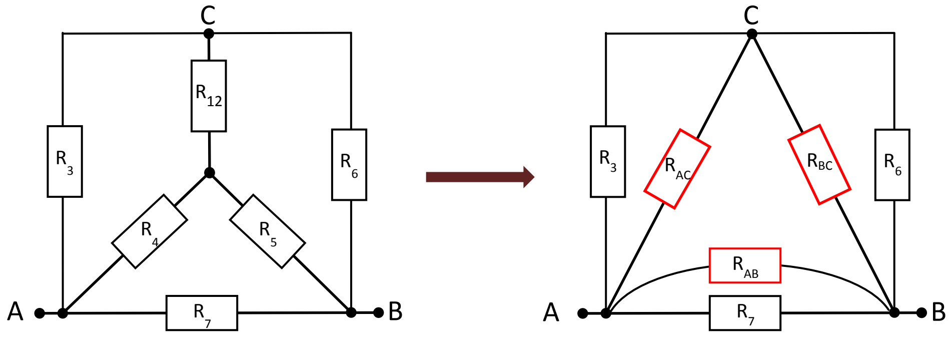


$R_1=6\Omega$
$R_2=3\Omega$
$R_3=3\Omega$
$R_4=4\Omega$
$R_5=8\Omega$
$R_6=6\Omega$
$R_7=12\Omega$

1-30. ábra

1.3.4.1. Megoldás csillag-delta átalakítással

R_1 és R_2 ellenállások párhuzamosan vannak kapcsolva, ezért helyettesíthetők egyetlen $R_{12}=R_1\times R_2$ ellenállással. Az így kapott csillagba kapcsolt R_{12}, R_4, R_5 ellenállásokat helyettesítsük a deltába kapcsolta R_{AC}, R_{BC}, R_{AB}, ellenállásokkal!



1-31. ábra

$$R_{12} = R_1 \times R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 3}{6+3} = 2\Omega$$

$$R_{AC} = R_{12} + R_4 + \frac{R_{12} \cdot R_4}{R_5} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{8} = 7\Omega$$

$$R_{AB} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_{12}} = 4 + 8 + \frac{4 \cdot 8}{2} = 28\Omega$$

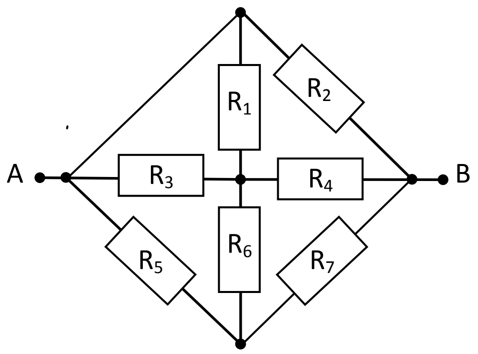
$$R_{BC} = R_{12} + R_5 + \frac{R_{12} \cdot R_5}{R_4} = 2 + 8 + \frac{2 \cdot 8}{4} = 14\Omega$$

$$R_{A-B} = [R_7 \times R_{AB}] \times [(R_3 \times R_{AC}) + (R_{BC} \times R_6)] = [12 \times 28] \times [(3 \times 7) + (14 \times 6)]$$

$$= 8{,}4 \times (2{,}1 + 4{,}2) = 3{,}6\Omega$$

1.3.4.2. Oldja meg a feladatot delta-csillag átalakítással! (Pl. R_{12}, R_3, R_4 delta kapcsolás csillaggá alakításával.)

1.3.5. Számítsa ki *A-B* pontok között az eredő ellenállást!



$R_1=9\Omega$

$R_2=9\Omega$

$R_3=4{,}5\Omega$

$R_4=1\Omega$

$R_5=3\Omega$

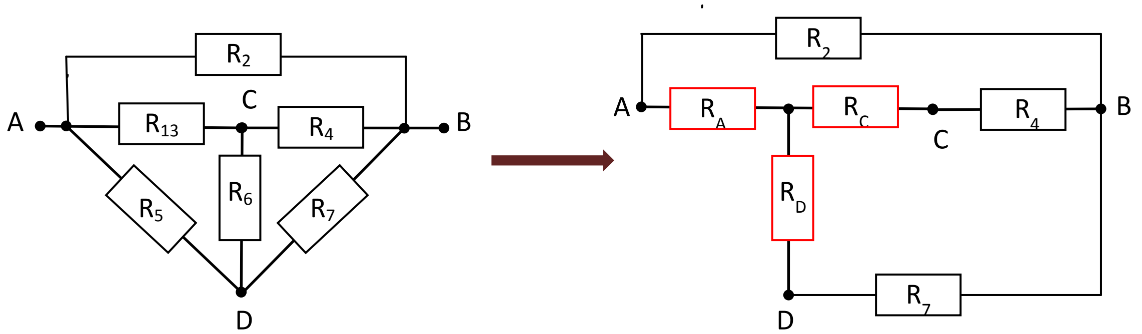
$R_6=6\Omega$

$R_7=6\Omega$

1-32. ábra

1.3.5.1. Megoldás delta-csillag átalakítással

R_1 és R_3 ellenállások párhuzamosan vannak kapcsolva, ezért helyettesíthetők egyetlen $R_{13}=R_1\times R_3$ ellenállással. Az így kapott deltába kapcsolt R_{13}, R_5, R_6 ellenállásokat helyettesítsük a csillagba kapcsolt R_A, R_C, R_D, ellenállásokkal!



1-33. ábra

$$R_{13} = R_1 \times R_3 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{9 \cdot 4{,}5}{9 + 4{,}5} = 3\Omega$$

$$R_A = \frac{R_{13} \cdot R_5}{R_{13} + R_5 + R_6} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3 + 6} = 0{,}75\Omega$$

$$R_C = \frac{R_{13} \cdot R_6}{R_{13} + R_5 + R_6} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 3 + 6} = 1{,}5\Omega$$

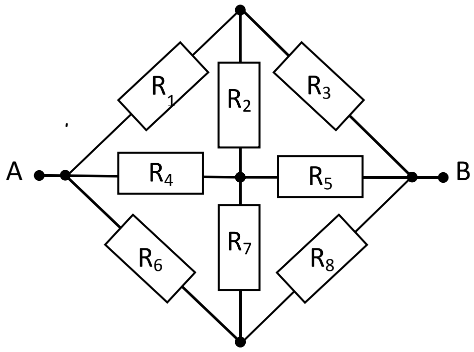
$$R_D = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_{13} + R_5 + R_6} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 3 + 6} = 1{,}5\Omega$$

$$R_{A-B} = \{R_A + [(R_D + R_7) \times (R_C + R_4)]\} \times R_2 = \{0{,}75 + [(1{,}5 + 6) \times (1{,}5 + 1)]\} \times 9$$

$$= \left(0{,}75 + \frac{7{,}5 \cdot 2{,}5}{10}\right) \times 9 = 2{,}625 \times 9 = 2{,}03\Omega$$

1.3.5.2. Oldja meg a feladatot csillag-delta átalakítással! (Pl. R_{13}, R_4, R_6 delta kapcsolás csillaggá alakításával.)

1.3.6. Számítsa ki *A-B* pontok között az eredő ellenállást!



$R_1=3\Omega$
$R_2=2\Omega$
$R_3=6\Omega$
$R_4=6\Omega$
$R_5=12\Omega$
$R_6=4\Omega$
$R_7=2\Omega$
$R_8=8\Omega$

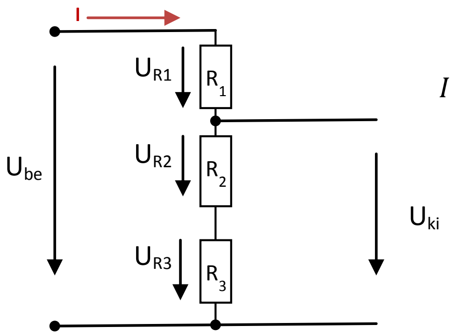
1-34. ábra

(Megoldás: Pl. R_1 R_2 R_3 és R_6 R_7 R_8 csillag kapcsolások delta kapcsolássá alakításával $R_{AB}=4\Omega$)

1.4. A feszültség és az áramosztás törvénye

a) A feszültségosztás törvénye

Sorba kapcsolt ellenálláslánc elemei a rájuk kapcsolt feszültséget az ellenállások arányában osztják le. A soros ellenálláslánc minden tagján ugyanaz az áram folyik keresztül, ezért:



$$I=\frac{U_{be}}{R_1+R_2+R_3}=\frac{U_{R1}}{R_1}=\frac{U_{R2}}{R_2}=\frac{U_{R3}}{R_3}=\frac{U_{ki}}{R_2+R_3}$$

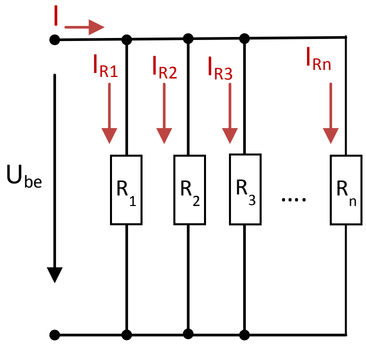
$$U_{R1}=U_{be}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

$$U_{ki}=U_{be}\cdot\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

1-35. ábra

b) Az áramosztás törvénye

Egy áramkör párhuzamosan kapcsolt ágainak áramai fordítottan arányosak az egyes ágak ellenállásaival. A párhuzamos ágakon eső feszültségek megegyeznek, ezért:



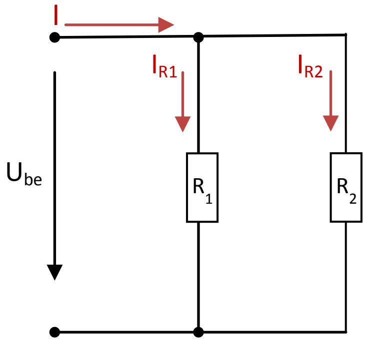
$$U_{be} = I_{R1} \cdot R_1 = I_{R2} \cdot R_2 = I_{R3} \cdot R_3 = \dots = I_{Rn} \cdot R_n = I \cdot R_e$$

$$R_e = R_1 \times R_2 \times R_3 \times \dots \times R_n = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

$$I_{Rn} = I \cdot \frac{R_e}{R_n}$$

1-36. ábra

Speciális eset: két párhuzamosan kötött ellenállás esetén az áramosztás törvénye:



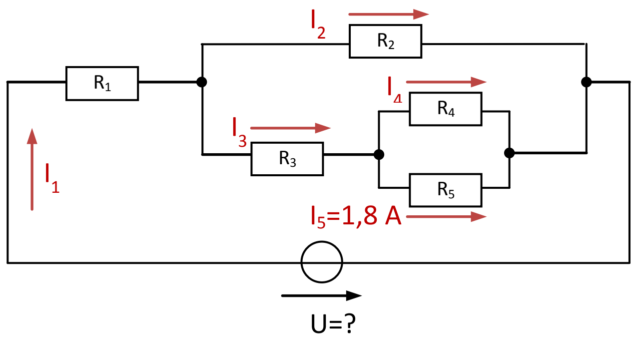
$$U_{be} = I_{R1} \cdot R_1 = I_{R2} \cdot R_2 = I \cdot R_e$$

$$R_e = R_1 \times R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{R1} = I \cdot \frac{R_e}{R_1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad I_{R2} = I \cdot \frac{R_e}{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

1-37. ábra

1.4.1. Az áramosztás törvényének segítségével számítsa ki a feszültséggenerátor feszültségét, ha az R_5 ellenálláson *1,8 A* áram folyik keresztül.



R_1=6Ω

R_2=60Ω

R_3=28Ω

R_4=30Ω

R_5=20Ω

1-38. ábra

Az áramosztás törvényét I_5 áramra és a csomópontba befolyó I_3 áramra felírva:

$$I_5 = I_3 \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_5} \Rightarrow I_3 = I_5 \cdot \frac{R_4 + R_5}{R_4} = 1{,}8 \cdot \frac{30 + 20}{30} = 3\ A$$

I_1 és I_3 áramra felírva:

$$I_3 = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_{345}} = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + (R_4 \times R_5)}$$

R_{345} az R_2 ellenállással párhuzamosan kapcsolt ág eredő ellenállása

$$I_1 = I_3 \cdot \frac{R_2 + R_3 + (R_4 \times R_5)}{R_2} = 3 \cdot \frac{60 + 28 + (30 \times 20)}{60} = 5A$$

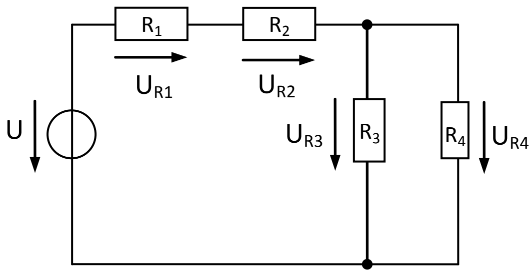
A feszültséggenerátor feszültsége:

$$U = R_e \cdot I_1 = 30 \cdot 5 = 150\,V$$

R_e az egész áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_1 + [R_2 \times (R_3 + (R_4 \times R_5))] = 6 + \left[60 \times \left(28 + (30 \times 20)\right)\right] = 30\Omega$$

1.4.2. Számítsa ki az alábbi áramkör ellenállásain eső feszültségeket!



R_1=2Ω

R_2=4Ω

R_3=6Ω

R_4=9Ω

U=12V

1-39. ábra

A feszültségosztás törvényét felírva az egyes ellenállásokra:

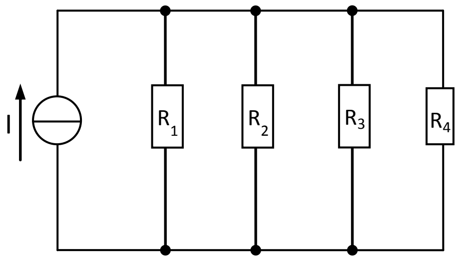
$$U_{R1} = U \cdot \frac{R_1}{R_e} = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + (R_3 \times R_4)} = 12 \cdot \frac{2}{2 + 4 + (6 \times 9)} = 12 \cdot \frac{2}{9{,}6} = 2{,}5\,V$$

$$U_{R2} = U \cdot \frac{R_2}{R_e} = 12 \cdot \frac{4}{9{,}6} = 5\,V$$

$$U_{R3} = U_{R4} = U \cdot \frac{R_3 \times R_4}{R_e} = 12 \cdot \frac{6 \times 9}{9{,}6} = 12 \cdot \frac{3{,}6}{9{,}6} = 4{,}5\,V$$

(U_{R3}(=U_{R4}) értékét természetesen az $U_{R3} = U - U_1 - U_2 = 12 - 2{,}5 - 5 = 4{,}5\,V$ összefüggésből is megkaphattuk volna.)

1.4.3. Számítsa ki az alábbi áramkör egyes ágaiban folyó áramokat!



R_1=1Ω

R_2=2Ω

R_3=3Ω

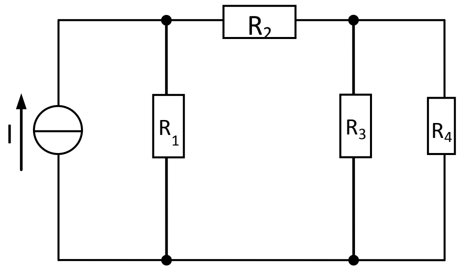
R_4=4Ω

I=24A

1-40. ábra

(Megoldás: $I_1 = 11{,}52\ A, I_2 = 5{,}76\ A, I_3 = 3{,}84\ A, I_4 = 2{,}88\ A$)

1.4.4. Számítsa ki az alábbi áramkör áramgenerátorának és R_3 ellenállásának áramát, ha az R_2 ellenállás árama *5 A*.



R_1=5Ω

R_2=8Ω

R_3=7Ω

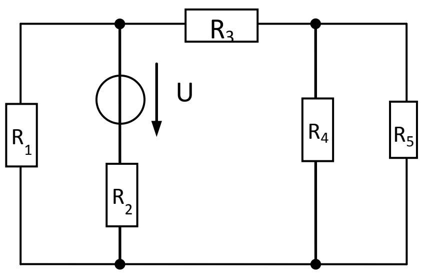
R_4=3Ω

I_{R2}=5A

1-41. ábra

(Megoldás: I=10,1 A, I_{R3}=1,5 A)

1.4.5. Számítsa ki a feszültséggenerátor feszültségét, ha az R_3 ellenálláson eső feszültség *18 V*!



R_1=3Ω

R_2=2Ω

R_3=6Ω

R_4=2Ω

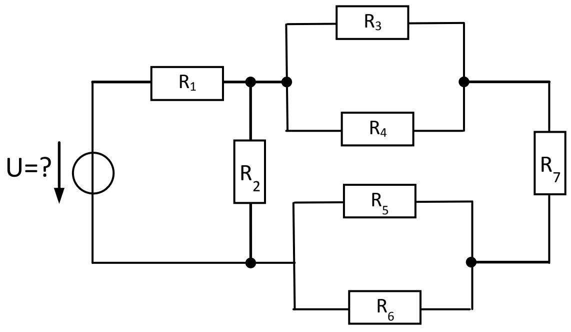
R_5=3Ω

U_{R3}=18V

1-42. ábra

(Megoldás: U=42V)

1.4.6. Számítsa ki az alábbi áramkör feszültséggenerátorának feszültségét, és R_7 ellenállásának áramát, ha az R_2 ellenállás árama *1,5 A*!



$R_1=6\Omega$

$R_2=6\Omega$

$R_3=4\Omega$

$R_4=6\Omega$

$R_5=2\Omega$

$R_6=8\Omega$

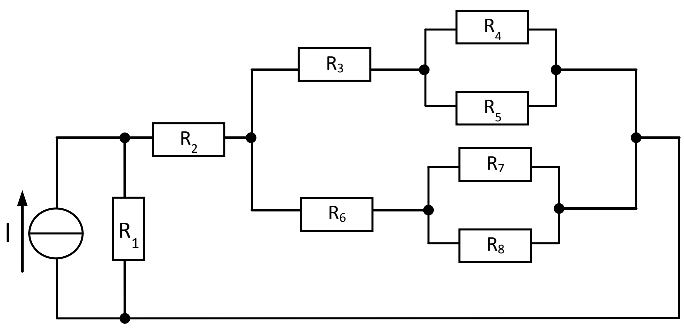
$R_7=5\Omega$

$I_{R2}=1{,}5$ A

1-43. ábra

(Megoldás: U=24 V, I_{R7}=1 A)

1.4.7. Számítsa ki az áramgenerátor áramát, ha az R_6 ellenállás árama *4 A*!



$R_1=12\Omega$

$R_2=4{,}8\Omega$

$R_3=1{,}2\Omega$

$R_4=1\Omega$

$R_5=4\Omega$

$R_6=1{,}8\Omega$

$R_7=2\Omega$

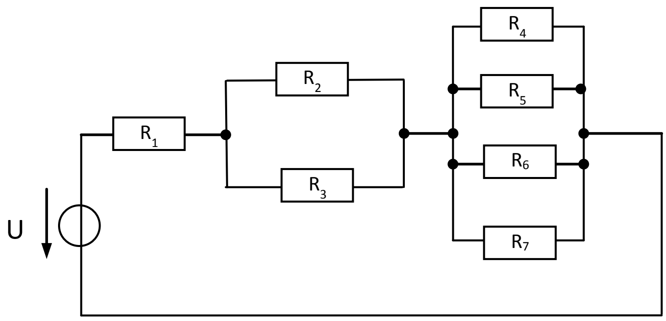
$R_8=3\Omega$

$I_{R6}=4$ A

1-44. ábra

(Megoldás: I=15 A)

1.4.8. Számítsa ki a feszültséggenerátor feszültségét és az R_6 ellenállás áramát, ha az R_1 ellenálláson eső feszültség *21 V*!



$R_1=14\Omega$
$R_2=2\Omega$
$R_3=3\Omega$
$R_4=10\Omega$
$R_5=20\Omega$
$R_6=30\Omega$
$R_7=40\Omega$
$U_{R1}=21$ V

1-45. ábra

(Megoldás: U=30 V, I_{R6}=0,24 A)

1.5. A Thévenin és a Norton tétel

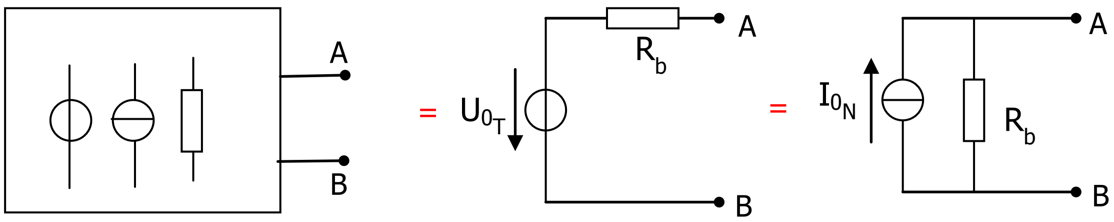
A *Thévenin tétel* szerint minden, fogyasztókat és generátorokat tartalmazó villamos hálózat bármely két pontja felöl helyettesíthető egyetlen *ideális feszültséggenerátorral (U_0)* és egy vele sorba kapcsolt *belső ellenállással (R_b)*.

A helyettesítő feszültséggenerátor forrásfeszültségét úgy kapjuk, hogy a helyettesítendő részt leválasztva az eredeti hálózatból kiszámoljuk a felnyitott kapcsok közötti feszültségét. A belső ellenállást megkapjuk, ha a helyettesítendő áramkör rész minden feszültséggenerátorát rövidre zárjuk, minden áramgenerátorának áramkörét megszakítjuk, majd az így kapott passzív hálózat eredő ellenállását a felnyitott kapcsok felöl kiszámítjuk. (1.47. ábra)

A *Norton tétel* szerint minden, fogyasztókat és generátorokat tartalmazó villamos hálózat bármely két pontja felöl helyettesíthető egyetlen *ideális áramgenerátorral (I_0)* és egy vele párhuzamosan kapcsolt *belső ellenállással (R_b)*.

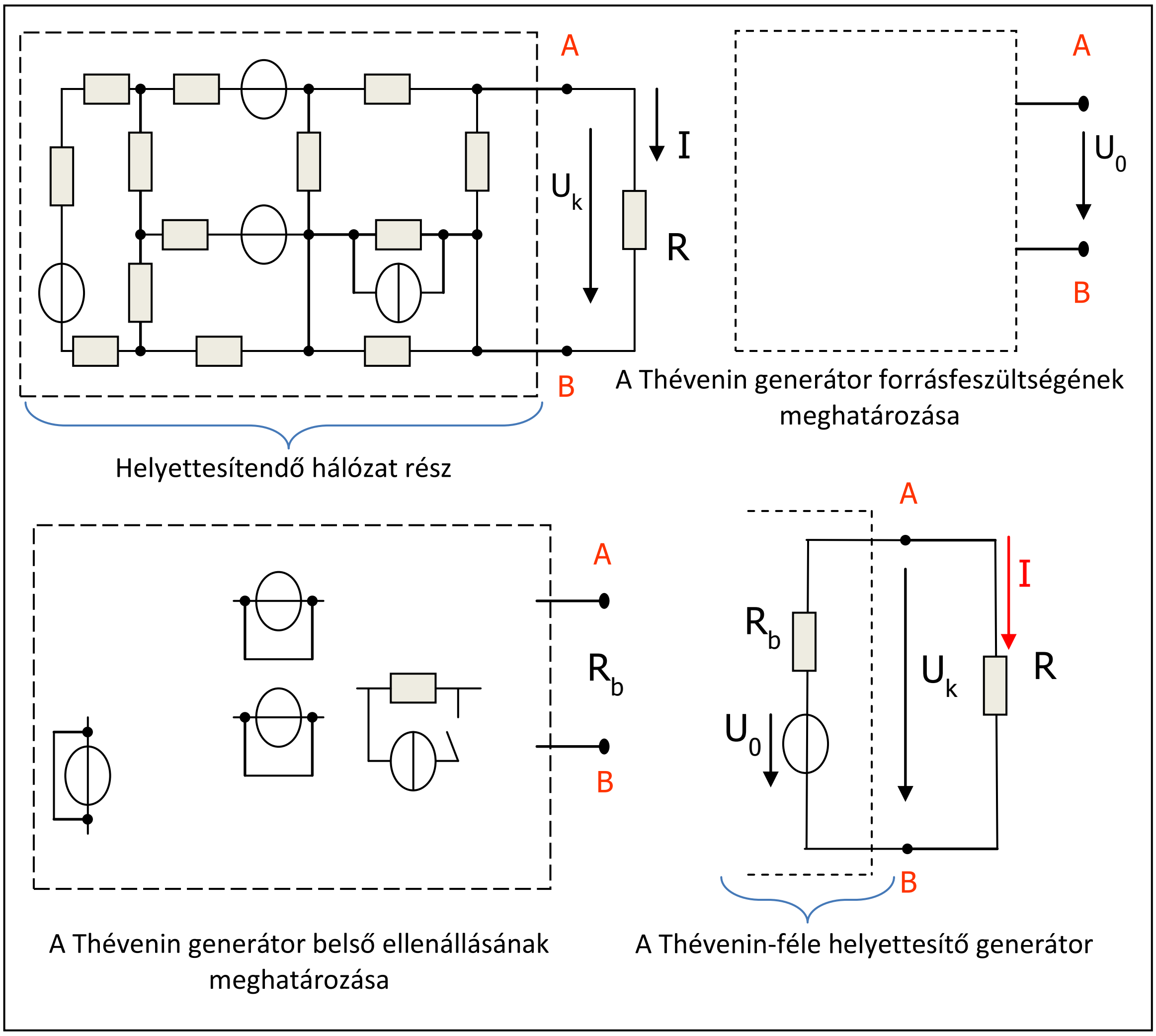
Az helyettesítő áramgenerátor forrásáramát úgy kapjuk, hogy a helyettesítendő részt leválasztva az eredeti hálózatból kiszámoljuk a rövidre zárt kapcsok között folyó áramot. A belső ellenállást megkapjuk, ha a helyettesítendő áramkör rész minden feszültséggenerátorát rövidre zárjuk, minden áramgenerátorának áramkörét megszakítjuk, majd az így kapott passzív hálózat eredő ellenállását a felnyitott kapcsok felöl kiszámítjuk. (1.48. ábra) (A Norton és a Thévenin generátor belső ellenállása megegyezik)

Az összefüggés a Norton és Thévenin generátor között (1.46. ábra):

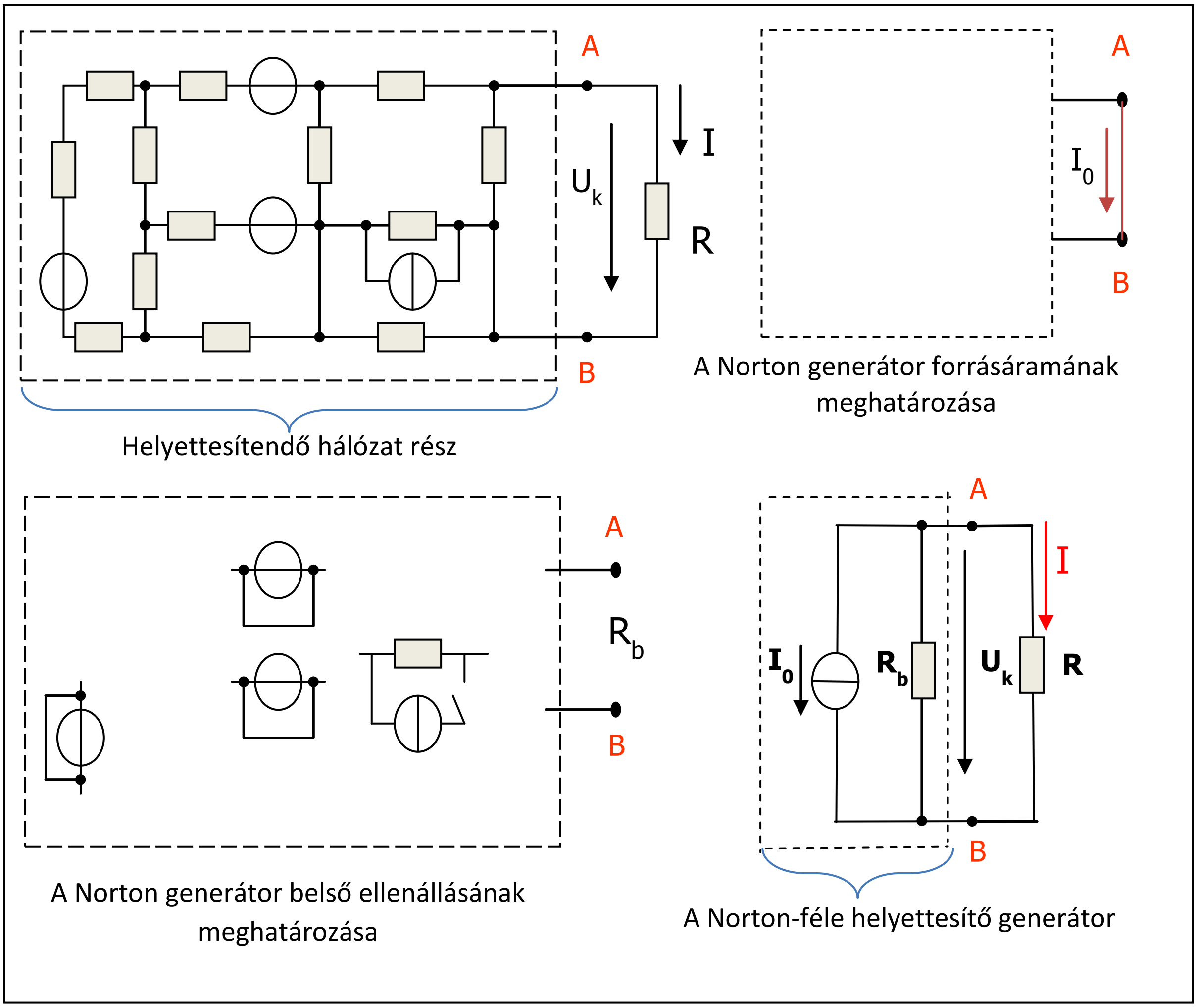


$$U_{0_{Thévenin}} = I_{0_{Norton}} \cdot R_b$$

1-46. ábra



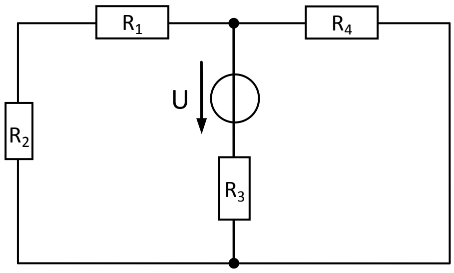
1-47. ábra



Kidolgozott példák a Thévenin és a Norton tétel alkalmazására

Az alábbi példákat gyakorlásként mindkét tétel alkalmazásával kiszámoljuk, bár látni fogjuk, hogy a példától függően hol az egyik, hol a másik tétel alkalmazása ad egyerűbb megoldást. Ezért a példa megoldása előtt érdemes átgondolni, melyik módszerrel lehet egyszerűbben, kevesebb számolással megkapni az eredményt.

1.5.1. A Thévenin és a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_1 ellenállásának áramát és feszültségét!



$R_1=10\Omega$

$R_2=20\Omega$

$R_3=30\Omega$

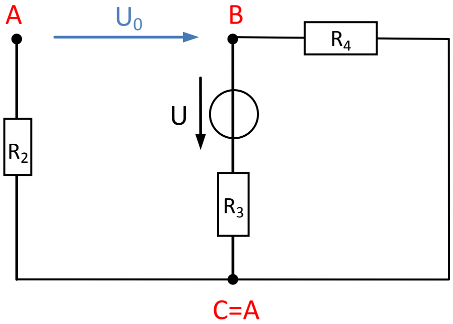
$R_4=60\Omega$

$U=30V$

1-49. ábra

1.5.1.1. Megoldás a Thévenin tétel segítségével

a) Először távolítsuk el R_1 ellenállást az áramkörből, majd a visszamaradó hálózatrészben számítsuk ki *a feszültséget a felnyitott A-B kapcsok között*. Ez a feszültség lesz a Thévenin generátor forrásfeszültsége:

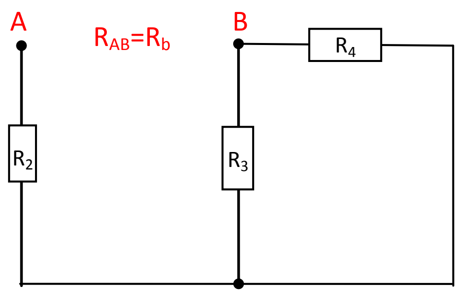


1-50. ábra

A felnyitott ág miatt R_2 ellenálláson nem folyik áram, így rajta nem esik feszültség, ezért U_0 feszültség megegyezik az R_4 ellenálláson eső feszültséggel. (Ami pedig egyenlő U feszültségforrás és az R_3 ellenálláson eső feszültség különbségével. (*ld. Kirchhoff hurok tv.*) A feszültségosztás törvényét felírva R_4 ellenállásra:

$$U_0 = U \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 30 \cdot \frac{60}{30 + 60} = 20\ V$$

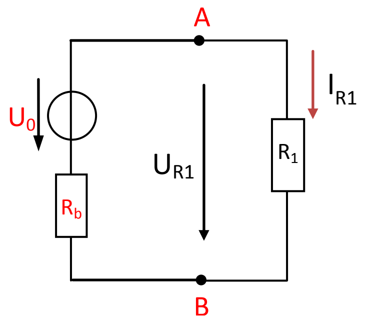
b) Zárjuk rövidre U feszültségforrást, majd számítsuk ki A és B pontok között az eredő ellenállást. Ez lesz a Thévenin generátor belső ellenállása:



1-51. ábra

$$R_b = R_2 + (R_3 \times R_4) = R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 20 + \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 40\ \Omega$$

c) Rajzoljuk fel a Thévenin-féle feszültséggenerátort, a kapcsaira csatlakoztassuk R_1 ellenállást, majd számoljuk ki R_1 áramát és feszültségét:



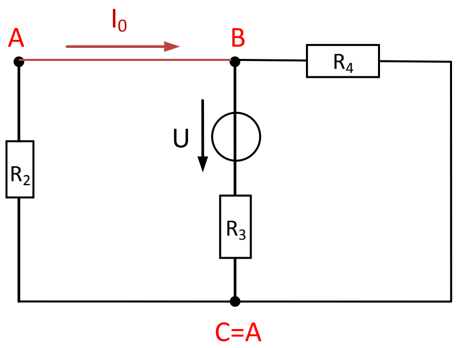
1-52. ábra

$$U_{R1} = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_b} = 20 \cdot \frac{10}{10 + 40} = 4\ V$$

$$I_{R1} = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{4}{10} = 0{,}4\ A$$

1.5.1.2. Megoldás a Norton tétel segítségével

a) Először távolítsuk el R_1 ellenállást az áramkörből, majd a visszamaradó hálózatrészben számítsuk ki *az áramot a rövidre zárt A-B kapcsok között*. Ez az áram lesz a Norton generátor forrásárama:



1-53. ábra

Az 1-53. áramkör eredő ellenállása:

$R_e = R_3 + (R_2 \times R_4) = 30 + (20 \times 60) = 45\ \Omega$

Árama:

$I = \frac{U}{R_e} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} = 0{,}667\ A$

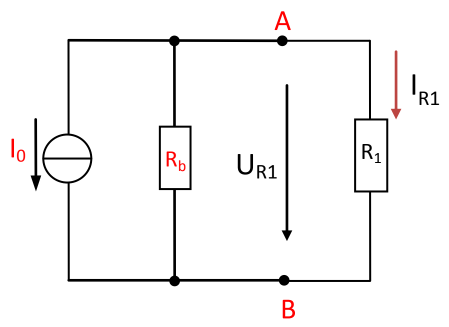
I_0 áramra az áramosztás törvényét felírva:

$$I_0 = I \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{60}{20 + 60} = 0{,}5\ A$$

b) A belső ellenállás kiszámítása megegyezik a Thévenin generátor belső ellenállásának kiszámításával. Zárjuk rövidre U feszültségforrást, majd számítsuk ki A és B pontok között az eredő ellenállást. Ez lesz a Norton generátor belső ellenállása (ld. 1-51. ábra):

$$R_b = R_2 + (R_3 \times R_4) = R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 20 + \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 40\ \Omega$$

c) Végül rajzoljuk fel a Norton-féle áramgenerátort (1-54.ábra), a kapcsaira csatlakoztassuk R_1 ellenállást, majd számoljuk ki R_1 áramát és feszültségét:



1-54. ábra

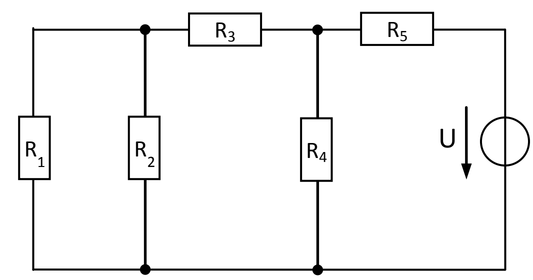
Az áramosztás törvénye I_{R1} áramra:

$$I_{R1} = I \cdot \frac{R_b}{R_b + R_1} = 0{,}5 \cdot \frac{40}{40 + 10} = 0{,}4\ A$$

Végül U_{R1} feszültség:

$$U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 0{,}4 \cdot 10 = 4\ V$$

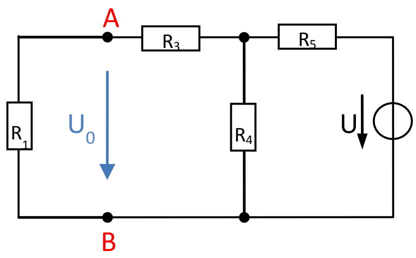
1.5.2. A Thévenin és a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_2 ellenállásának áramát és feszültségét!



R_1=4Ω
R_2=6 Ω
R_3=2Ω
R_4=3Ω
R_5=6Ω
U=24V

1-55. ábra

1.5.2.1. Megoldás a Thévenin tétel segítségével



1-56. ábra

Az 1-56. áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_5 + \big(R_4 \times (R_1 + R_3)\big) = 6 + \big(3 \times (4 + 2)\big) = 8\,\Omega$$

Az 1-56. áramkör árama:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{24}{8} = 3\,A$$

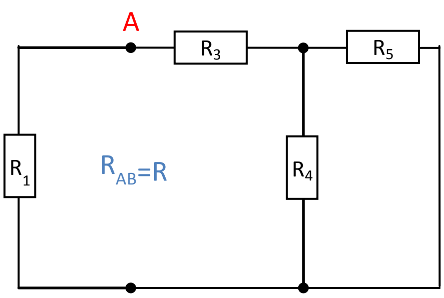
R_1 és R_3 ellenállásokon folyó áram az áramosztás törvényéből:

$$I_{R13} = I \cdot \frac{R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = 3 \cdot \frac{3}{4 + 2 + 3} = 1\,A$$

A Thévenin generátor U_0 forrásfeszültsége egyenlő az R_1 ellenálláson eső feszültséggel, így:

$$U_0 = R_1 \cdot I_{R13} = 4 \cdot 1 = 4\,V$$

A Thévenin generátor belső ellenállását U feszültségforrás rövidre zárása után az A-

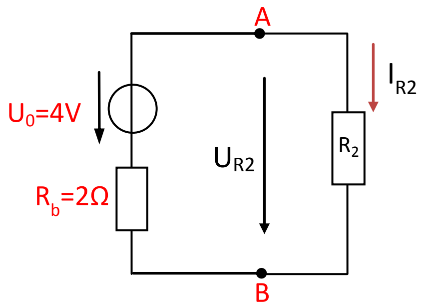


1-57. ábra

B pontok közötti ellenállás kiszámításával kapjuk:

$$R_b = R_1 \times [R_3 + (R_4 \times R_5)] = 4 \times [2 + (3 \times 6)] = 2\,\Omega$$

Rajzoljuk fel a Thévenin-féle feszültséggenerátort, a kapcsaira csatlakoztassuk R_2 ellenállást, majd számoljuk ki R_2 áramát és feszültségét:



1-58. ábra

$$U_{R2} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_b} = 4 \cdot \frac{6}{6+2} = 3\,V$$

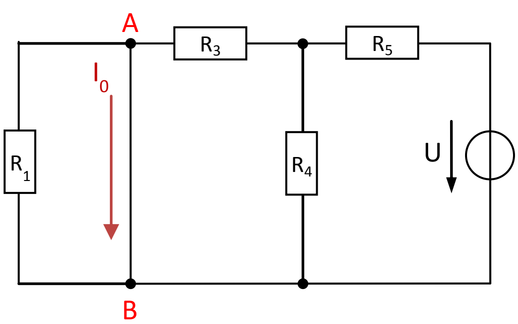
$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{3}{6} = 0{,}5\,A$$

Mielőtt megoldanánk a feladatot a Norton tétel alkalmazásával, a Thévenin generátor adataiból a Norton generátor adatai egyszerűen kiszámíthatóak. A Norton generátor forrásárama:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_b} = \frac{4}{2} = 2\,A$$

A belsőellenállás mindkét helyettesítő generátornál ugyanaz.

1.5.2.2. Megoldás a Norton tétel segítségével



1-59. ábra

I_0 forrásfeszültség kiszámításához R_2 ellenállás eltávolítása után rövidre zárjuk a visszamaradó áramkört A és B pontok között. I_0 egyenlő az A és B pontok között folyó árammal. A rövidzár miatt R_1 ellenálláson nem folyik áram, az áramkör árama a két párhuzamosan kapcsolt R_3 és R_4 ellenállás között oszlik meg.

Írjuk fel a feszültségosztás törvényét R_5 és a két párhuzamosan kapcsolt ellenállás, R_3 és R_4 eredőjére. A párhuzamos ágak feszültsége:

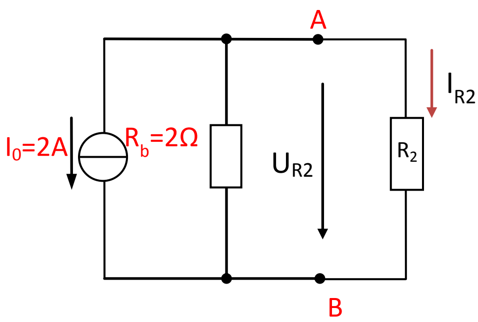
$$U_{R34} = U \cdot \frac{R_3 \times R_4}{R_5 + (R_3 \times R_4)} = 24 \cdot \frac{2 \times 3}{6 + (2 \times 3)} = 4\,V$$

R_3 ellenállás árama:

$$I_0 = \frac{U_{R34}}{R_3} = \frac{4}{2} = 2\,A$$

A belső ellenállás kiszámítása megegyezik a Thévenin generátornál leírtakkal (1-57. ábra), így R_b=2Ω.

Rajzoljuk fel a Norton-féle áramgenerátort (1-60.ábra), a kapcsaira csatlakoztassuk R_2 ellenállást, majd számoljuk ki R_2 áramát és feszültségét:



1-60. ábra

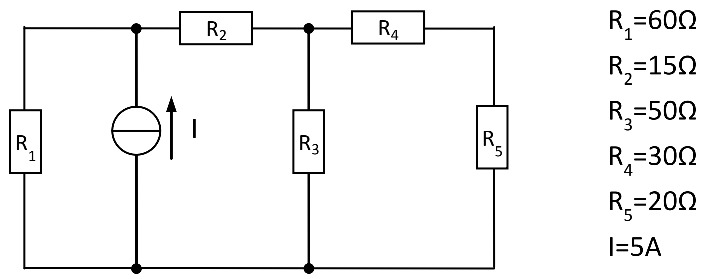
Az áramosztás törvénye I_{R2} áramra:

$$I_{R2} = I \cdot \frac{R_b}{R_b + R_2} = 2 \cdot \frac{2}{2+6} = 0{,}5\,A$$

Végül U_{R2} feszültség:

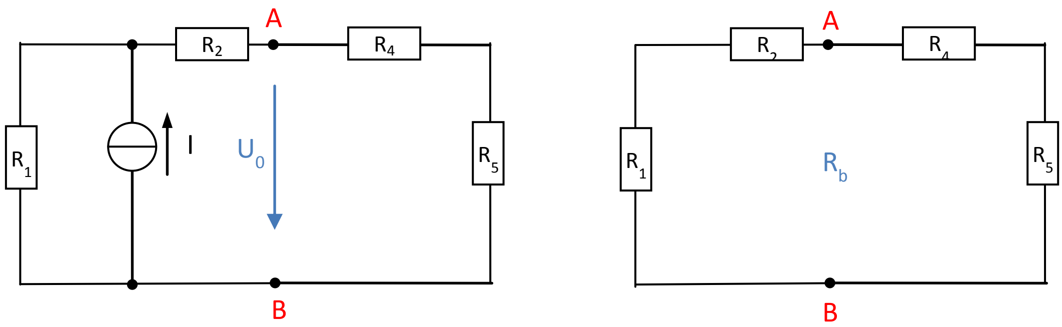
$$U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2 = 0{,}5 \cdot 6 = 3\,V$$

1.5.3. A Thévenin és a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_3 ellenállásának áramát és feszültségét!



1-61. ábra

1.5.3.1. Megoldás a Thévenin tétel segítségével



1-62. ábra

R_3 eltávolítása után a visszamaradó áramkör két párhuzamos ágat tartalmaz (1-62. ábra). Az egyik ágban R_1, a másikban a sorba kapcsolt R_2, R_4 és R_5 található. Az áramgenerátor I árama e két ág között az áramosztás törvényének megfelelően oszlik meg:

$$I_{R245} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = 5 \cdot \frac{60}{60 + 15 + 30 + 20} = 2{,}4\ A$$

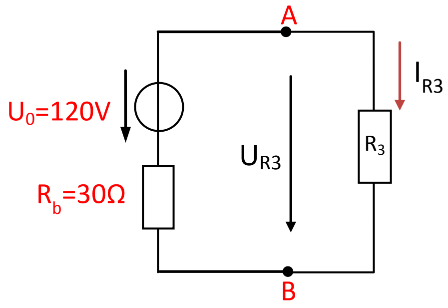
A Thévenin generátor U_0 forrásfeszültsége az R_4 és R_5 ellenállásokon eső feszültségek összegével egyenlő:

$$U_0 = I_{R245} \cdot (R_4 + R_5) = 2{,}4 \cdot (30 + 20) = 120\ V$$

A Thévenin generátor belső ellenállását az áramgenerátor áramkörének megszakításával A és B pontok közötti ellenállás kiszámításával kapjuk (1-62. ábra)

$$R_b = (R_1 + R_2) \times (R_4 + R_5) = (60 + 15) \times (30 + 20) = 30\Omega$$

Rajzoljuk fel a Thévenin-féle feszültséggenerátort, a kapcsaira csatlakoztassuk R_3 ellenállást, majd számoljuk ki R_3 áramát és feszültségét:

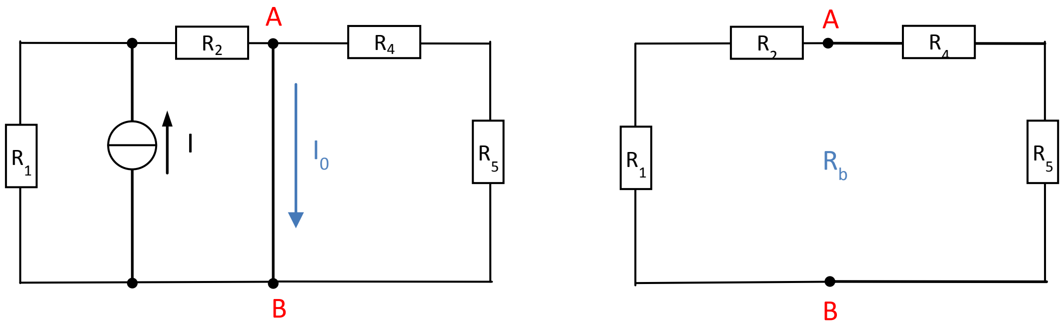


1-63. ábra

$$U_{R3} = U_0 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_b} = 120 \cdot \frac{50}{50 + 30} = 75\ V$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{75}{50} = 1{,}5\ A$$

1.5.3.2. Megoldás a Norton tétel segítségével



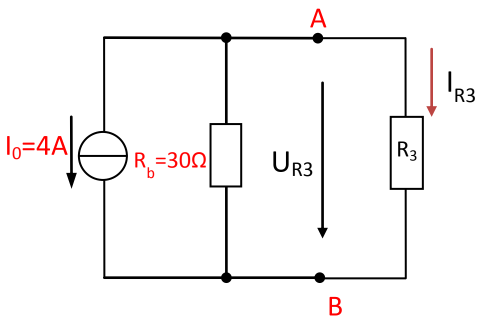
1-64. ábra

R_3 ellenállás eltávolítása után a visszamaradó áramkört A és B pontok között rövidre zárjuk. Az itt folyó áram lesz a Norton generátor forrásárama. A rövidre zárás miatt R_4 és R_5 ellenállásokon nem folyik áram, ezért I áram a párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 között oszlik meg. I_0 áram az R_2 ellenállás áramával egyenlő:

$$I_0 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 5 \cdot \frac{60}{60 + 15} = 4\ A$$

A belső ellenállás kiszámítás a 1.5.3.1. pontban leírttal megegyező módon történik, így R_b=30 Ω.

Rajzoljuk fel a Norton-féle áramgenerátort (1-65.ábra), a kapcsaira csatlakoztassuk R_3 ellenállást, majd számoljuk ki R_3 áramát és feszültségét:



1-65. ábra

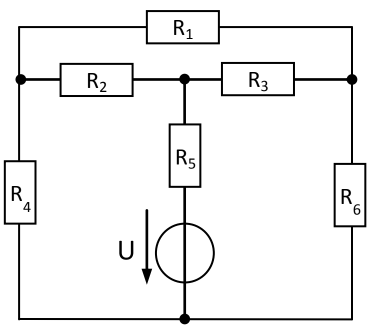
Az áramosztás törvénye I_{R3} áramra:

$$I_{R3} = I \cdot \frac{R_b}{R_b + R_3} = 4 \cdot \frac{30}{30 + 50} = 1{,}5\ A$$

Végül U_{R3} feszültség:

$$U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 1{,}5 \cdot 6 = 75\ V$$

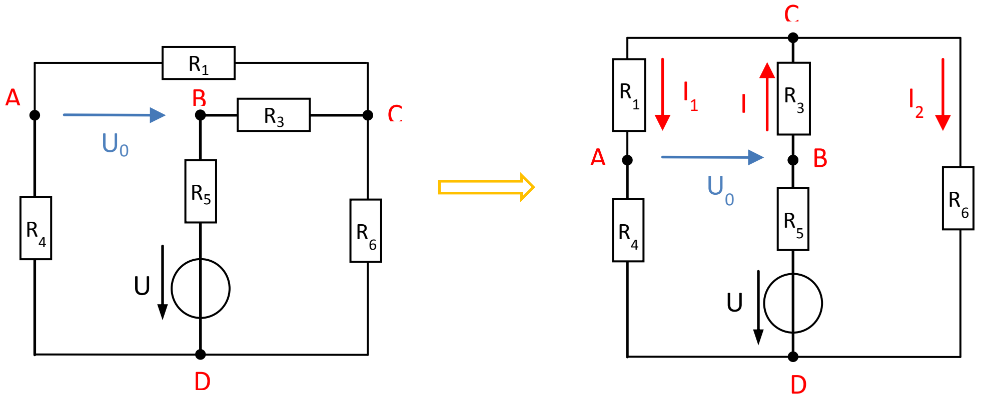
1.5.4. A Thévenin és a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_2 ellenállásának áramát és feszültségét!



R_1=6Ω
R_2=6Ω
R_3=6Ω
R_4=2Ω
R_5=2Ω
R_6=2Ω
U=30 V

1-66. ábra

1.5.4.1. Megoldás a Thévenin tétel segítségével



1-67. ábra

A Thévenin féle helyettesítő generátor U_0 forrásfeszültségét úgy kapjuk, hogy az R_2 ellenállás eltávolítása után a visszamaradó áramkör felnyitott A és B pontjai között kiszámítjuk a feszültséget. Az 1-67. ábrán mindkét rajz ugyanazt az áramkört ábrázolja, csak a jobb oldali ábra jobban áttekinthető.

Az 1-67. ábrán lévő áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_3 + R_5 + \left(R_6 \times (R_1 + R_4)\right) = 2 + 6 + \left(2 \times (6 + 2)\right) = 9{,}6\ \Omega$$

Az áramkör árama:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{30}{9{,}6} = 3{,}125\ A$$

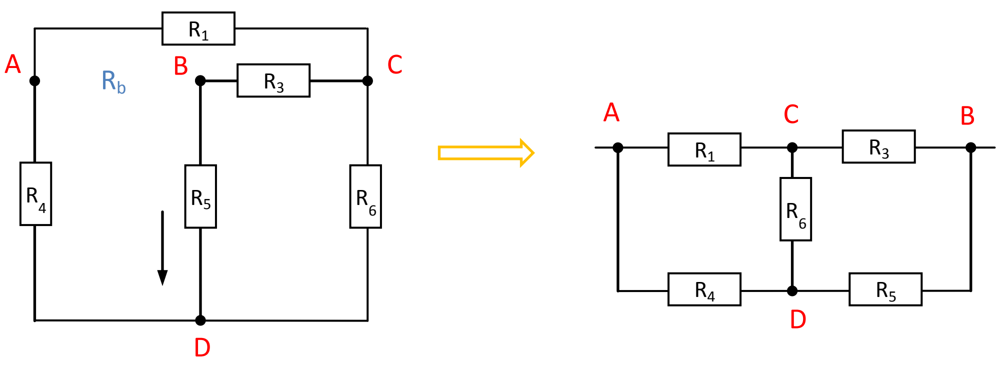
I_1 áramra az áramosztás törvényét felírva:

$$I_1 = I \cdot \frac{R_6}{R_6 + R_1 + R_4} = 3{,}125 \cdot \frac{2}{2 + 6 + 2} = 0{,}625\ A$$

Az 1-67. ábrán látjuk, hogy A és B pontok közötti feszültséget, (ami egyben a Thévenin generátor forrásfeszültsége), az alábbi módon tudjuk felírni:

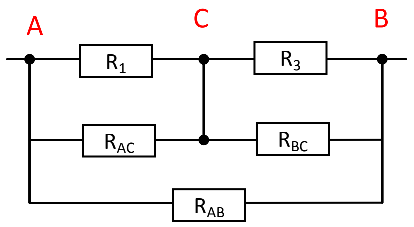
$$U_0 = I \cdot R_3 + I_1 \cdot R_1 = 3{,}125 \cdot 6 + 0{,}625 \cdot 6 = 22{,}5\ V$$

A Thévenin generátor belső ellenállásának kiszámításához az 1-67. ábra áramkörének feszültséggenerátorát rövidre zárjuk, majd kiszámítjuk A és B pontok között az ellenállást.



1-68. ábra

Az 1-68. ábrán mindkét rajz ugyanazt az ellenállás hálózatot ábrázolja. A jobboldali ábrából jól látszik, hogy az eredő ellenállás kiszámításához csillag-delta vagy delta-csillag átalakításra van szükség. Például az R_4, R_5, R_6 ellenállások alkotta csillag kapcsolást átalakítsuk át delta kapcsolássá.



1-69. ábra

$$R_{AC} = R_4 + R_6 + \frac{R_4 \cdot R_6}{R_5} = 2 + 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 6\Omega,$$

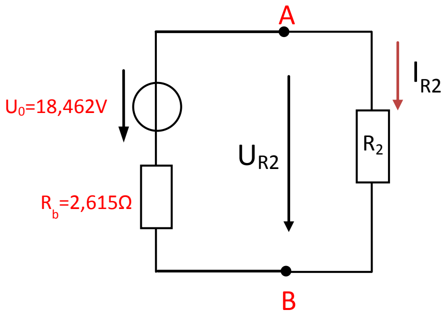
$$R_{BC} = R_5 + R_6 + \frac{R_5 \cdot R_6}{R_4} = 2 + 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 6\Omega,$$

$$R_{AB} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_6} = 2 + 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 6\ \Omega,$$

Most már fel tudjuk írni A és B pontok között az eredő ellenállást:

$$R_b = [(R_1 \times R_{AC}) + (R_3 \times R_{BC})] \times R_{AB} = [(6 \times 6) + (6 \times 6)] \times 6 = 3\ \Omega$$

Végül rajzoljuk fel a Thévenin-féle feszültséggenerátort, a kapcsaira csatlakoztassuk R_2 ellenállást, majd számoljuk ki R_2 áramát és feszültségét:

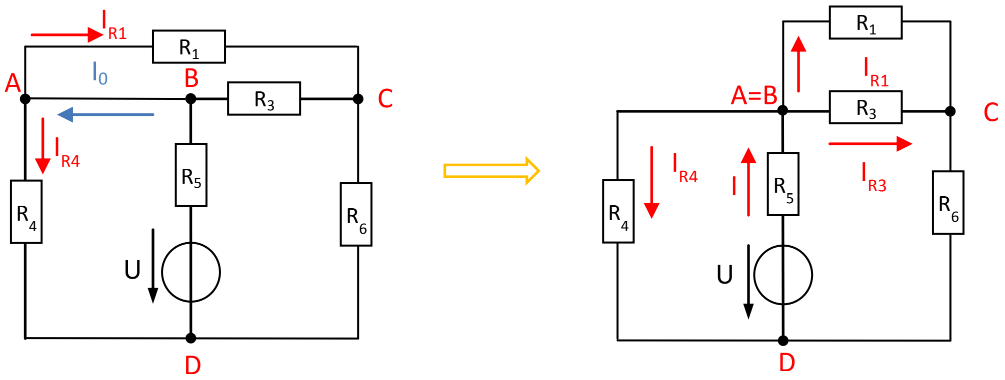


1-70. ábra

$$U_{R2} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_b} = 22{,}5 \cdot \frac{6}{6+3} = 15\ V$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{15}{6} = 2{,}5\ A$$

1.5.4.2. Megoldás a Norton tétel segítségével



1-71. ábra

Az 1-71. áramkör eredő ellenállása:

$$R_e = R_5 + (R_4 \times [(R_1 \times R_3) + R_6]) = 2 + (2 \times [(6 \times 6) + 2]) = \frac{24}{7}\ \Omega$$

Az áramkör árama:

$$I = \frac{U}{R_e} = 30 \cdot \frac{7}{24} = 8{,}75\ A$$

Az 1-71. ábra bal oldali áramkörénél az A pontra felírt Kirchhoff csomóponti egyenletből a Norton generátor I_0 forrásáramára a következő egyenletet kapjuk:

$$I_0 = I_{R1} + I_{R4}$$

Ebből I_{R4} áram:

$$I_{R4} = I \cdot \frac{(R_1 \times R_3) + R_6}{(R_1 \times R_3) + R_6 + R_4} = 8{,}75 \cdot \frac{(6 \times 6) + 2}{(6 \times 6) + 2 + 2} = 8{,}75 \cdot \frac{5}{7} = 6{,}25\ A$$

A maradék áram R_1 és R_3 ellenállásokon oszlik meg. Mivel R_1 és R_3 azonos nagyságú, a rajtuk átfolyó áram is azonos nagyságú lesz.

$$I_{R1} + I_{R3} = I - I_{R4} = 8{,}75 - 6{,}25 = 2{,}5\ A$$

Az áramosztás törvénye I_{R1} áramra:

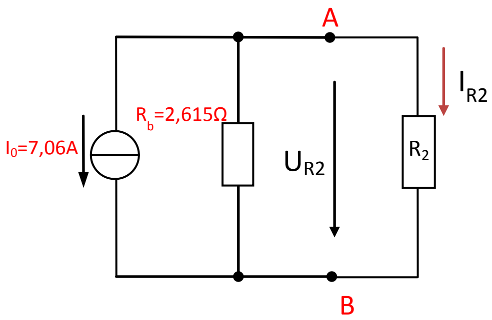
$$I_{R1} = (I_{R1} + I_{R3}) \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 2{,}5 \cdot \frac{6}{6 + 6} = 1{,}25\ A$$

A Norton generátor I_0 forrásáramára tehát:

$$I_0 = I_{R1} + I_{R4} = 1{,}25 + 6{,}25 = 7{,}5\ A$$

A Norton generátor belső ellenállásának meghatározása a Thévenin tételes számításnál az 1.5.4.1. pontban megtalálható.

Végül rajzoljuk fel a Norton-féle áramgenerátort (1-72.ábra), a kapcsaira csatlakoztassuk R_2 ellenállást, majd számoljuk ki R_2 áramát és feszültségét:



1-72. ábra

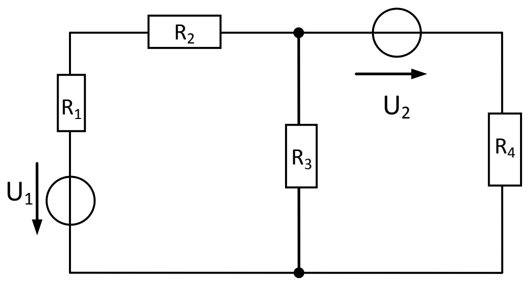
Az áramosztás törvénye I_{R2} áramra:

$$I_{R2} = I \cdot \frac{R_b}{R_b + R_2} = 7{,}5 \cdot \frac{3}{3 + 6} = 2{,}5\ A$$

Végül U_{R2} feszültség:

$$U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2 = 2{,}5 \cdot 6 = 15V$$

1.5.5. Számítsa ki az alábbi áramkör R_3 ellenálláson kívüli részének Thévenin és Norton féle helyettesítő generátorának paramétereit, majd ennek segítségével számítsa ki R_3 ellenállás feszültségét és áramát!



$R_1=2\Omega$

$R_2=3\Omega$

$R_3=8\Omega$

$R_4=5\Omega$

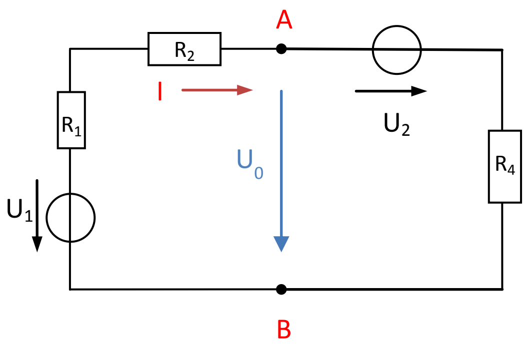
$U_1=120V$

$U_2=90V$

1-73. ábra

1.5.5.1. Megoldás a Thévenin tétel segítségével

R_3 ellenállás eltávolítása után számítsuk ki az *A* és *B* pontok közötti feszültséget, ami a Thévenin generátor forrásfeszültségével lesz egyenlő.



1-74. ábra

Írjuk fel Kirchhoff hurokegyenletét 1-74. ábrán látható áramkör áramának kiszámításához:

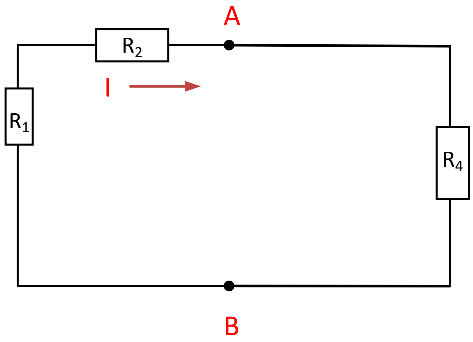
$$I \cdot (R_1 + R_2 + R_4) + U_2 - U_1 = 0$$

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{120 - 90}{2 + 3 + 5} = 3\ A$$

A Thévenin generátor U_0 forrásfeszültsége:

$$U_0 = U_1 - I \cdot (R_1 + R_2) = 120 - 3 \cdot 5 = 105\ V\ \ (vagy\ \ U_0 = U_2 + I \cdot R_4 = 105\ V)$$

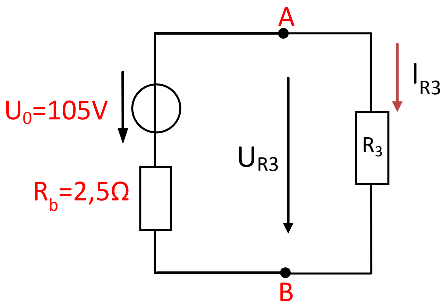
A Thévenin generátor belső ellenállásának meghatározásához mindkét feszültséggenerátort rövidre zárjuk, majd kiszámítjuk *A* és *B* pontok között az eredő ellenállást:



1-75. ábra

$$R_b = (R_1 + R_2) \times R_4 = (2 + 3) \times 5 = 2{,}5\Omega$$

Végül rajzoljuk fel a Thévenin-féle feszültséggenerátort, a kapcsaira csatlakoztassuk R_3 ellenállást, majd számoljuk ki R_3 áramát és feszültségét:



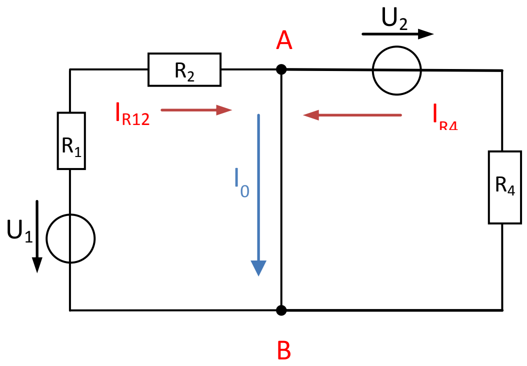
1-76. ábra

$$U_{R3} = U_0 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_b} = 105 \cdot \frac{8}{8 + 2{,}5} = 80\ V$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{80}{8} = 10\ A$$

1.5.5.2. Megoldás a Norton tétel segítségével

Az R_3 ellenállás eltávolítása után zárjuk rövidre az áramkört *A* és *B* pontok között, majd számítsuk ki az *A-B* pontok között folyó áramot:



1-77. ábra

A rövidzár miatt U_1 feszültségforrás teljes feszültsége R_1 és R_2 ellenállásokon esik, U_2 feszültségforrás teljes feszültsége pedig R_4 ellenálláson.

$$I_{R12} = \frac{U_1}{R_1 + R_2} = \frac{120}{2+3} = 24\ A$$

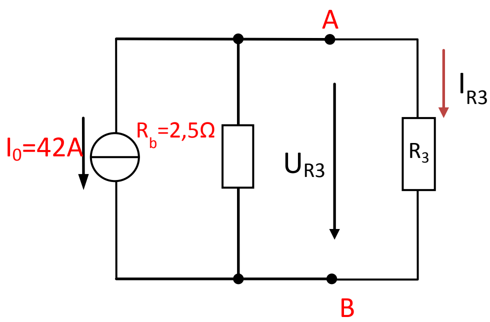
$$I_{R4} = \frac{U_2}{R_4} = \frac{90}{5} = 18\ A$$

Kirchhoff csomóponti törvényét felírva az *A* csomópontra a Norton generátor I_0 forrásárama:

$$I_0 = I_{R12} + I_{R4} = 42\ A$$

A belső ellenállás kiszámítása megegyezik az 1.5.5.1. pontban leírtakkal, így R_b=2,5Ω.

Rajzoljuk fel a Norton-féle áramgenerátort (1-78.ábra), a kapcsaira csatlakoztassuk R_3 ellenállást, majd számoljuk ki R_3 áramát és feszültségét:



1-78. ábra

Az áramosztás törvénye I_{R3} áramra:

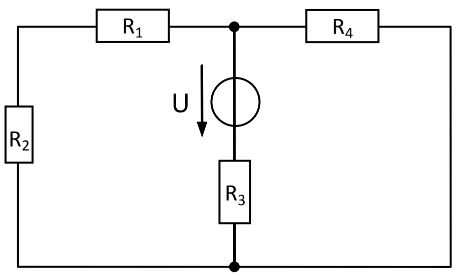
$$I_{R3} = I \cdot \frac{R_b}{R_b + R_3} = 42 \cdot \frac{2{,}5}{2{,}5 + 8} = 10\ A$$

Végül U_{R3} feszültség:

$U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 10 \cdot 8 = 80V$

Gyakorló példák a Thévenin és a Norton tétel alkalmazására

1.5.6. A Thévenin vagy a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_4 ellenállásának áramát és feszültségét!



R_1=10Ω

R_2=20Ω

R_3=30Ω

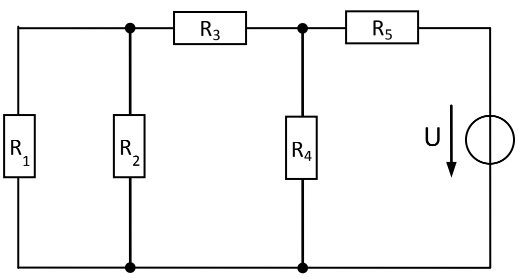
R_4=60Ω

U=30V

1-79. ábra

(Megoldás: U_0=15 V, I_0=1 A, R_b=15 Ω, U_{R4}=12 V, I_{R4}=0,2 A)

1.5.7. A Thévenin vagy a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_3 ellenállásának áramát és feszültségét!

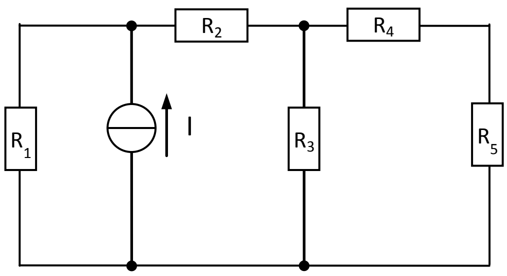


R_1=4Ω
R_2=6Ω
R_3=2Ω
R_4=3Ω
R_5=6Ω
U=24V

1-80. ábra

(Megoldás: U_0=8 V, I_0=1,818 A, R_b=4,4 Ω, U_{R3}=2,5 V, I_{R3}=1,25 A)

1.5.8. A Thévenin vagy a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_4 ellenállásának áramát és feszültségét!

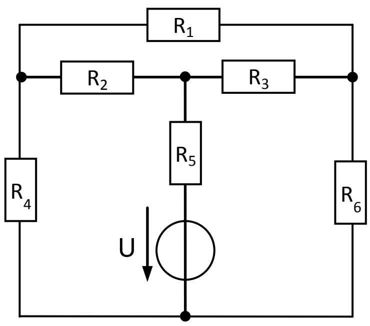


R_1=60Ω
R_2=15Ω
R_3=50Ω
R_4=30Ω
R_5=20Ω
I=5A

1-81. ábra

(Megoldás: U_0=120 V, I_0=4 A, R_b=50 Ω, U_{R4}=60 V, I_{R4}=2 A)

1.5.9. A Thévenin vagy a Norton tétel segítségével számítsa ki az alábbi áramkör R_1 ellenállásának áramát és feszültségét!

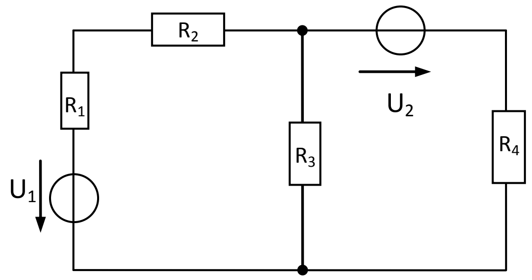


R_1=6Ω
R_2=6Ω
R_3=2Ω
R_4=2Ω
R_5=2Ω
R_6=6Ω
U=30 V

1-82. ábra

(Megoldás: U_0=10 V, I_0=3 A, R_b=3,333 Ω, U_{R1}=6,429 V, I_{R1}=1,071 A)

1.5.10. Számítsa ki az alábbi áramkör R_2 ellenálláson kívüli részének Thévenin vagy Norton féle helyettesítő generátorának paramétereit, majd ennek segítségével számítsa ki R_2 ellenállás feszültségét és áramát!



$R_1=2\Omega$

$R_2=3\Omega$

$R_3=8\Omega$

$R_4=2\Omega$

$U_1=120V$

$U_2=90V$

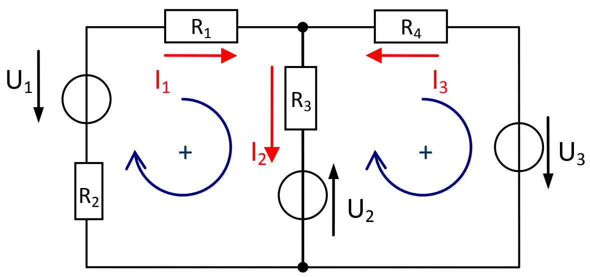
1-83. ábra

(Megoldás: U_0=48 V, I_0=13,33 A, R_b=3,6 Ω, U_{R2}=21,818 V, I_{R2}=7,272 A)

1.6. Módszerek több generátort és fogyasztót tartalmazó elágazó hálózatok ágaiban folyó áramok kiszámítására

Az alábbiakban négy módszer, a *Kirchhoff-törvények*, a *szuperpozíció tétel*, a *csomóponti potenciálok* és a *hurokáramok módszere* alkalmazásával ismerkedünk meg. A módszerek ismertetése példákon keresztül történik, az első három példánál mind a négyfajta megoldás bemutatásra kerül, hogy lássuk, hogy példánként változik, hogy melyik megoldási mód vezet kevesebb számolással gyorsabb eredményre.

1.6.1. Számítsuk ki az alábbi áramkör egyes ágaiban folyó áramokat!



$R_1=1\Omega$

$R_2=2\Omega$

$R_3=3\Omega$

$R_4=4\Omega$

$U_1=35V$

$U_2=14V$

$U_3=16V$

1-84. ábra

1.6.1.1. Megoldás *Kirchhoff törvények* segítségével

a) Jelöljük be az ágak áramait! (I_1, I_2, I_3) Az áramirányok felvétele önkényes, ha a valós áramirány a feltételezettel ellentétes, eredményként negatív értéket fogunk kapni.

b) Jelöljük be a hurkokban a pozitív körüljárás irányát!

c) A három ismeretlen ágáram meghatározásához három független egyenletből álló egyenletrendszer felírása szükséges. Ez esetünkben két hurok és egy csomóponti egyenletet jelent.

Hurok egyenletek (Az ellenállásokon eső feszültségek iránya a rajtuk átfolyó áram irányával megegyező.):

(1) $R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_2 - U_2 + R_2 \cdot I_1 - U_1 = 0$

(2) $-R_4 \cdot I_3 + U_2 + U_3 - R_3 \cdot I_2 = 0$

Csomóponti egyenlet:

(3) $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

Behelyettesítve a megadott értékeket:

(1) $I_1 + 3 \cdot I_2 + 2 \cdot I_1 = 14 + 35$

(2) $-4 \cdot I_3 - 3 \cdot I_2 = -14 - 16$

(3) $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

---

(1) $3 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 = 49$

(2) $4 \cdot I_3 + 3 \cdot I_2 = 30$

(3) $I_1 = I_2 - I_3$

---

(1) $3 \cdot (I_2 - I_3) + 3 \cdot I_2 = 49$

(2) $4 \cdot I_3 + 3 \cdot I_2 = 30$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ 6 \cdot I_2 - 3 \cdot I_3 = 49 \\ &(2)\ 3 \cdot I_2 + 4 \cdot I_3 = 30 \end{aligned}\right\}$$

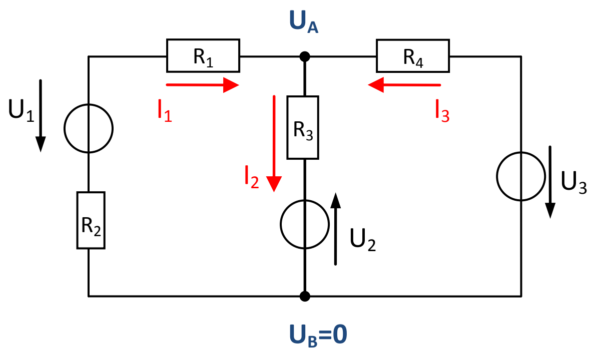
$11 \cdot I_3 = 11$

$I_3 = 1A$

$$I_2 = \frac{30 - 4 \cdot 1}{3} = \frac{26}{3} = 8{,}67\ A$$

$$I_1 = \frac{26 - 3}{3} = \frac{23}{3} = 7{,}67A$$

1.6.1.2. Megoldás a *csomóponti potenciálok* módszerével



R_1=1Ω

R_2=2Ω

R_3=3Ω

R_4=4Ω

U_1=35V

U_2=14V

U_3=16V

1-85. ábra

Az ágak áramai az ágak két végpontja közötti potenciálkülönbségtől függnek. Az ábrán mindhárom ág egyik végpontja U_A, másik végpontja U_B potenciálon van. Mivel az áram szempontjából csak a két potenciál *különbsége* számít, az egyik értékét tekinthetjük nullának. Legyen U_B=0.

Az ágáramok a csomóponti potenciálok segítségével kifejezhetők:

$$(1)\ U_A - U_B = -R_1 \cdot I_1 + U_1 - R_2 \cdot I_1 \quad \xRightarrow{mivel\ U_B=0} \quad I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R_1 + R_2}$$

$$(2)\ U_A - U_B = R_3 \cdot I_2 - U_2 \quad \xRightarrow{mivel\ U_B=0} \quad I_2 = \frac{U_A + U_2}{R_3}$$

$$(3)\ U_A - U_B = -R_4 \cdot I_3 + U_3 \quad \xRightarrow{mivel\ U_B=0} \quad I_3 = \frac{U_3 - U_A}{R_4}$$

Így mindhárom ágáram csak U_A csomóponti potenciáltól függ. U_A kiszámításához pedig elég egyetlen *Kirchhoff csomóponti egyenlet* felírása.

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Behelyettesítve a csomóponti potenciálokkal kifejezett áram értékeket:

$$\frac{U_1 - U_A}{R_1 + R_2} - \frac{U_A - U_2}{R_3} + \frac{U_3 - U_A}{R_4} = 0$$

$$\frac{35 - U_A}{3} - \frac{U_A - 14}{3} + \frac{16 - U_A}{4} = 0$$

$$4(35 - U_A) - 4(U_A - 14) + 3(16 - U_A) = 0$$

$$11U_A = 132$$

$$U_A = 12\ V$$

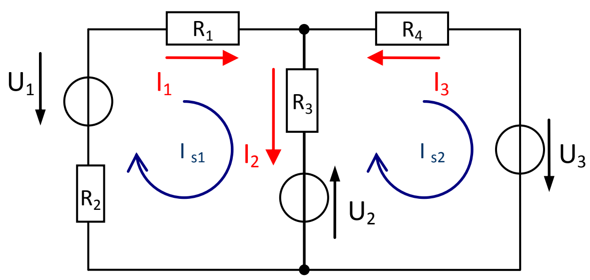
Visszahelyettesítve U_A értékét (1), (2), (3) egyenletekbe:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R_1 + R_2} = \frac{35 - 12}{3} = \frac{23}{3} = 7{,}67\ A$$

$$I_2 = \frac{U_A - U_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 + 14}{3} = \frac{26}{3} = 8{,}67\ A$$

$$I_3 = \frac{U_3 - U_A}{R_4} = \frac{16 - 12}{4} = 1\ A$$

1.6.1.3. Megoldás a *hurokáramok* módszerével



$R_1=1\Omega$

$R_2=2\Omega$

$R_3=3\Omega$

$R_4=4\Omega$

$U_1=35V$

$U_2=14V$

$U_3=16V$

1-86. ábra

A hurokáramok módszerénél feltételezzük, hogy az ágak áramait az áramkör egyes zárt hurkaiban folyó ún. „hurokáramok” eredője hozza létre, vagyis azon ágak áramai, melyek két hurokhoz is tartoznak, kiszámíthatók a hurokáramok előjeles összegéből. Ez által az ismeretlenek száma a független hurokegyenletek számára csökken. Ez ennél a példánál azt jelenti, hogy két Kirchhoff hurokegyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert kell megoldani.

1. Jelöljük be az ágak áramait! (I_1,I_2,I_3) Az áramirányok felvétele önkényes, ha a valós áramirány a feltételezettel ellentétes, eredményként negatív értéket fogunk kapni.
2. Jelöljük be a hurkokáramok irányát minden hurokban!
3. Írjuk fel a valós ágáramok és a fiktív hurokáramok közötti az összefüggéseket! Amelyik ág csak egy hurokhoz tartozik, ott az ágáram és a hurokáram nagysága megegyezik, de az előjelre itt is figyelni kell!

$I_1 = I_{s1}$

$I_2 = I_{s1} - I_{s2}$

$I_3 = -I_{s2}$

4. Írjuk fel Kirchhoff hurokegyenleteit I_{s1} és I_{s2} segítségével:

   (1) $R_1 \cdot I_{s1} + R_3 \cdot (I_{s1} - I_{s2}) - U_2 + R_2 \cdot I_{s1} - U_1 = 0$

   (2) $R_4 \cdot I_{s2} + U_2 + U_3 + R_3 \cdot (I_{s2} - I_{s1}) = 0$

---

   (1) $(R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_{s1} - R_3 \cdot I_{s2} = U_2 + U_1$

   (2) $-R_3 \cdot I_{s1} + (R_4 + R_3) \cdot I_{s2} = -U_2 - U_3$

---

   (1) $6 \cdot I_{s1} - 3 \cdot I_{s2} = 49$

   (2) $-3 \cdot I_{s1} + 7 \cdot I_{s2} = -30$

   $11 \cdot I_{s2} = -11$

   $I_{s2} = -1\ A$

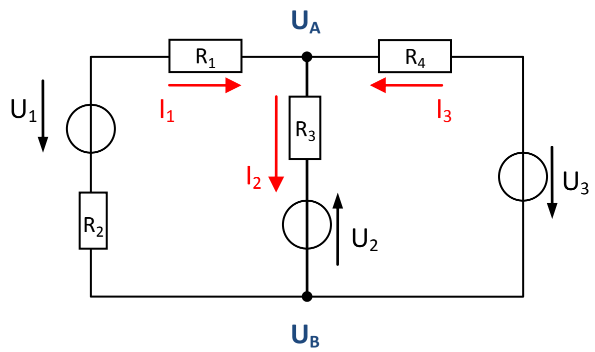
   $I_{s1} = \frac{7 \cdot I_{s2} + 30}{3} = \frac{23}{3} = 7{,}67\ A$

Így a valódi ágáramok:

$$I_1 = I_{s1} = 7{,}67\ A, \quad I_2 = I_{s1} - I_{s2} = 7{,}67 - (-1) = 8{,}67\ A, \quad I_3 = -I_{s2} = -(-1) = 1\ A$$

1.6.1.4. Megoldás a *szuperpozíció tétel* segítségével

Több feszültség és/vagy áramgenerátort tartalmazó hálózat bármely ágának árama egyenlő azon áramok összegével, amelyet a csak egy-egy generátor hozna létre, ha a többi áram- és/vagy feszültségforrást kiiktatnánk, vagyis a feszültséggenerátorokat rövidre zárnánk, az áramgenerátorok áramkörét megszakítanánk.



$R_1 = 1\Omega$

$R_2 = 2\Omega$

$R_3 = 3\Omega$

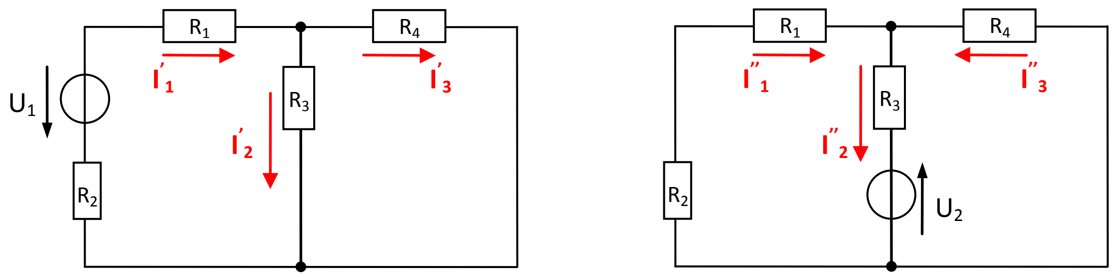
$R_4 = 4\Omega$

$U_1 = 35V$

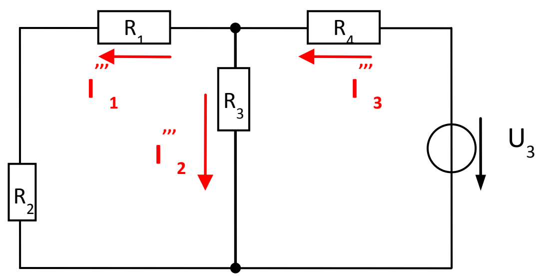
$U_2 = 14V$

$U_3 = 16V$

1-87. ábra



1-88. ábra



1-89. ábra

1. Jelöljük be az ágak áramait! (I_1,I_2,I_3) Az áramirányok felvétele önkényes, ha a valós áramirány a feltételezettel ellentétes, eredményként negatív értéket fogunk kapni.
2. Rajzoljuk fel az egyenként a három rész áramkört, melyeket egy feszültséggenerátor meghagyásával, a két másik kiiktatásával kapunk. Jelöljük be az áramirányokat! Ezeknek az áramoknak az iránya már nem vehető fel tetszőlegesen, mert a feszültséggenerátorok feszültségei által adottak!
3. Számítsuk ki egyenként a három áramkör ágaiban folyó áramokat!

$$\boldsymbol{R_e' = R_1 + R_2 + (R_3 \times R_4) = 1 + 2 + \frac{3 \cdot 4}{3+4} = 4,714\,\Omega}$$

$$\mathbf{I_1' = \frac{U_1}{R_e'} = \frac{35}{4,714} = 7,424\,A}$$

$$I_2' = I_1' \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 4{,}242\ A, \quad I_3' = I_1' - I_2' = 7{,}424 - 4{,}242 = 3{,}182\ A$$

a) $R_e^{''} = R_3 + [(R_1 + R_2) \times R_4] = 3 + \frac{(1+2)\cdot 4}{1+2+4} = 4{,}714\ \Omega$

$$\mathbf{I_2^{''} = \frac{U_2}{R_e^{''}} = \frac{14}{4,714} = 2,9697\,A}$$

$$I_1^{''} = I_2^{''} \cdot \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = 1{,}697\ A, \quad I_3^{''} = I_2^{''} - I_1^{''} = 2{,}9697 - 1{,}697 = 1{,}273\ A$$

b) $R_e''' = R_4 + [(R_1 + R_2) \times R_3] = 4 + \frac{(1+2)\cdot 3}{1+2+3} = 5{,}5\ \Omega$

$$\mathbf{I_3''' = \frac{U_3}{R_e'''} = \frac{16}{5,5} = 2,909\,A}$$

$$I_1''' = I_3''' \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1{,}4545\ A, \quad I_2''' = I_3''' - I_1''' = 2{,}909 - 1{,}4545 = 1{,}4545\ A$$

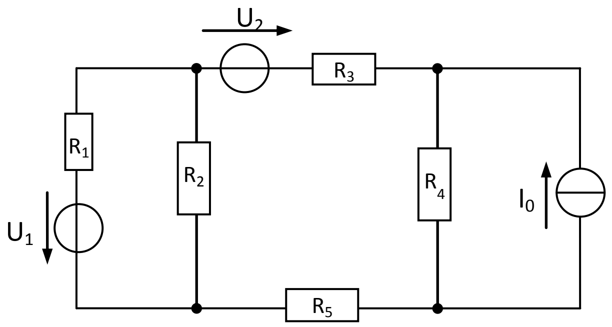
4. A kapott eredményekből írjuk fel az eredeti áramkör áramait!

$$I_1 = I_1' + I_1'' - I_1''' = 7{,}424 + 1{,}6969 - 1{,}4545 = 7{,}67\ A$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = 4{,}242 + 2{,}969 + 1{,}4545 = 8{,}67\ A$$

$$I_3 = -I_3' + I_3'' + I_3''' = -3{,}182 + 1{,}2727 + 2{,}0909 = 1\ A$$

1.6.2. Számítsa ki az alábbi áramkör egyes ágaiban folyó áramokat!

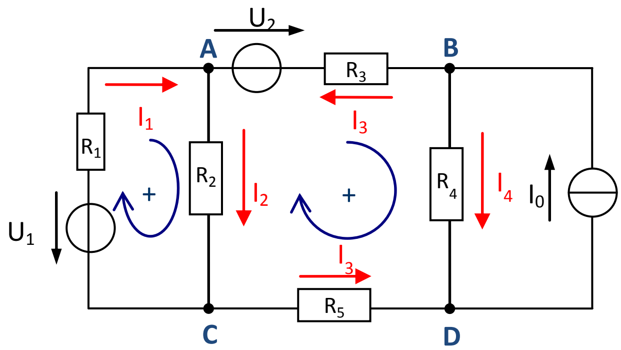


$R_1=10\Omega$
$R_2=10\Omega$
$R_3=5\Omega$
$R_4=15\Omega$
$R_5=20\Omega$
$U_1=90V$
$U_2=45V$
$I_0=6A$

1-90. ábra

1.6.2.1. Megoldás a *Kirchhoff törvények* alkalmazásával

A kapcsolási rajzon jelöljük be az ismeretlen ágáramokat! Az áramok irányát tetszőlegesen felvehetjük, ha a számítások végén negatív előjelet kapunk, az azt jelenti, hogy a tényleges áramirány a feltételezettel ellentétes irányú.



1-91. ábra

Az ábrából látszik, hogy négy ismeretlen ágáramot kell meghatározni. Ehhez egy négy egyenletből álló négy ismeretlenes egyenletrendszerre van szükség. (R_3 és R_5 ellenállások áramai megegyeznek, hiszen a B és a D csomópontba a befutó ágak közül kettő azonos, így a harmadik ág áramának is azonosnak kell lenni.)

A négy egyenlet két csomóponti és két hurokegyenletet jelent. Csomóponti egyenletet írhatunk fel pl. az A és a B csomópontra, hurokegyenletet pl. az ábrán bejelölt két hurokra:

Hurok egyenletek:

(1) $R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - U_1 = 0$

(2) $U_2 - R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_3 - R_2 \cdot I_2 = 0$

Csomóponti egyenletek:

(3) $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

(4) $I_0 - I_3 - I_4 = 0$

---

(1) $R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = U_1$

(2) $-R_2 \cdot I_2 - (R_3 + R_5) \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 = -U_2$

(3) $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

(4) $I_3 + I_4 = I_0$

Az egyenletrendszer megoldása tetszőleges módszerrel történhet, egyik lehetőség pl. a Gauss elimináció alkalmazása.

Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & -(R_3+R_5) & R_4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \\ 0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -25 & 15 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ -45 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A bővített mátrix:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 10 & 10 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & -10 & -25 & 15 & -45 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

A Gauss elimináció lépései:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 10 & 10 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & -10 & -25 & 15 & -45 \\ 0 & 20 & -10 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 10 & 10 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & -10 & -25 & 15 & -45 \\ 0 & 0 & -60 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 10 & 10 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & -10 & -25 & 15 & -45 \\ 0 & 0 & -60 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & 360 \end{array}\right]$$

Az utolsó lépésként kapott mátrixból felírható:

$90 \cdot I_4 = 360$

$I_4 = 4\ A$

$-60 \cdot I_3 + 30 \cdot 4 = 0$

$I_3 = 2\ A$

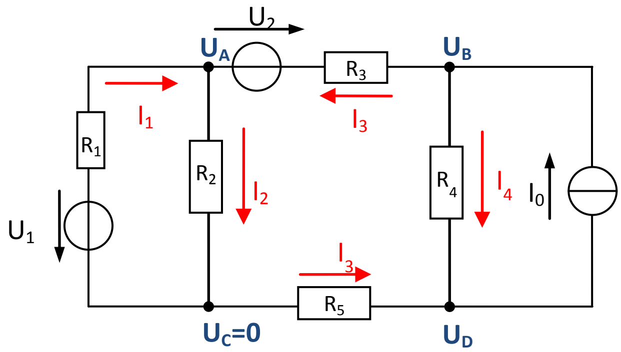
$-10 \cdot I_2 - 25 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = -45$

$I_2 = 5{,}5\ A$

$10 \cdot I_1 + 10 \cdot 5{,}5 = 90$

$I_1 = 3{,}5\ A$

1.6.2.2. Megoldás a *csomóponti potenciálok* módszerével



1-92. ábra

Ha megnézzük az 1-92. ábrát, látjuk, hogy négy különböző potenciálú csomópont található a kapcsolásban, amelyikből egynek a potenciálját 0-nak vehetjük, de így is marad 3 ismeretlen csomóponti potenciál. Az előzőekben, amikor a Kirchhoff-törvények segítségével oldottuk meg a feladatot, láttuk, hogy csak 2 egymástól független csomóponti egyenlet írható fel, márpedig a csomóponti potenciálok módszerénél a csomóponti egyenletek számával megegyező egyenletet tudunk felírni az ismeretlenek kiszámításához. A látszólagos ellentmondást az okozza, hogy a kapcsolás 2 ágában is I_3 áram folyik, vagyis I_3 kifejezhető nemcsak U_A és U_B, hanem U_C és U_D csomóponti potenciálok segítségével is, vagyis ha U_C-t nullának vesszük, U_D kifejezhető U_A és U_B segítségével.

Fejezzük ki az ágáramokat!

(1) $U_A = U_1 - R_1 \cdot I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R_1}$

(2) $U_A = R_2 \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{U_A}{R_2}$

(3) $U_A - U_B = U_2 - R_3 \cdot I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3}$

(4) $U_B - U_C = R_4 \cdot I_4 \qquad \Rightarrow \; I_4 = \frac{U_B - U_C}{R_4}$

(5) $U_D = -R_5 \cdot I_3 \qquad \Rightarrow \; I_3 = -\frac{U_D}{R_5}$

A (3) és az (5) egyenletekből U_D kifejezhető:

$$I_3 = \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} = -\frac{U_D}{R_5} \;\Rightarrow U_D = -\frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} \cdot R_5$$

U_D behelyettesítve a (4) egyenletbe I_4 kifejezhető:

(4) $U_B + \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} \cdot R_5 = R_4 \cdot I_4 \quad \Rightarrow \quad I_4 = \frac{U_B}{R_4} + \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3 \cdot R_4} \cdot R_5$

Írjuk fel a csomóponti egyenleteket A és B csomópontra!

(A) $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

(B) $I_0 - I_3 - I_4 = 0$

(A) $\frac{U_1 - U_A}{R_1} - \frac{U_A}{R_2} + \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} = 0$

(B) $I_0 - \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} - \frac{U_B}{R_4} - \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3 \cdot R_4} \cdot R_5 = 0$

(A) $\frac{90 - U_A}{10} - \frac{U_A}{10} + \frac{45 - U_A + U_B}{5} = 0$

(B) $6 - \frac{45 - U_A + U_B}{5} - \frac{U_B}{15} - \frac{45 - U_A + U_B}{5 \cdot 15} \cdot 20 = 0$

(A) $90 - U_A - U_A + 90 - 2 \cdot U_A + 2 \cdot U_B = 0$

(B) $90 - 135 + 3 \cdot U_A - 3 \cdot U_B - U_B - 180 + 4 \cdot U_A - 4 \cdot U_B = 0$

(A) $-4 \cdot U_A + 2 \cdot U_B = -180$

(B) $7 \cdot U_A - 8 \cdot U_B = 225$

(A) $-16 \cdot U_A + 8 \cdot U_B = -720$

$(B)\ \ 7 \cdot U_A - 8 \cdot U_B = 225$

$(A)+(B)$

$-9 \cdot U_A = -495$

$U_A = 55\ V$

$U_B = -90 + 2 \cdot U_A$

$U_B = 20\ V$

Az eredményeket behelyettesítjük az ágáramokra felírt összefüggésekbe:

$(1)\ I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R_1} = \frac{90-55}{10} = 3{,}5\ A$

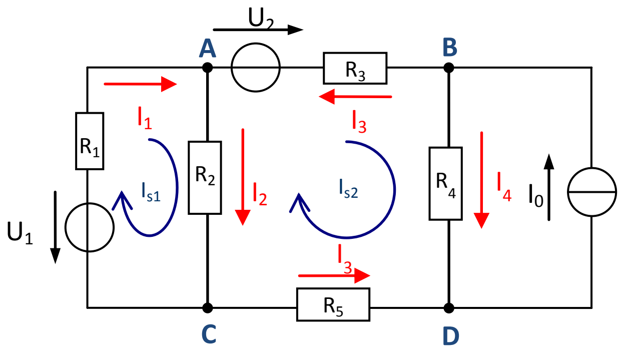
$(2)\ I_2 = \frac{U_A}{R_2} = \frac{55}{10} = 5{,}5\ A$

$(3)\ I_3 = \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} = \frac{45-55+20}{5} = 2\ A$

$(4)\ I_4 = \frac{U_B - U_D}{R_4} = \frac{45 - U_D}{R_4} = \frac{20+40}{15} = 4\ A$

$(5)\ I_3 = -\frac{U_D}{R_5} \Rightarrow U_D = -R_5 \cdot I_3 = -20 \cdot 2 = -40\ V$

1.6.2.3. Megoldás a *hurokáramok* módszerével



1-93. ábra

Először írjuk fel a hurokáramok és a tényleges ágáramok közötti összefüggéseket!

$(1)\ I_1 = I_{s1}$

$(2)\ I_2 = I_{s1} - I_{s2}$

$(3)\ I_3 = -I_{s2}$

$(4)\ I_4 = I_{s2} + I_0$

A két ismeretlen hurokáram az 1-93. ábrán bejelölt két hurokra felírt hurokegyenletekből kiszámítható:

(1) $R_1 \cdot I_{s1} + R_2 \cdot (I_{s1} - I_{s2}) - U_1 = 0$

(2) $U_2 + R_3 \cdot I_{s2} + R_4 \cdot (I_{s2} + I_0) + R_5 I_{s2} + R_2 \cdot (I_{s2} - I_{s1}) = 0$

---

(1) $(R_1 + R_2) \cdot I_{s1} - R_2 \cdot I_{s2} = U_1$

(2) $-R_2 \cdot I_{s1} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{s2} = -U_2 - R_4 \cdot I_0$

---

(1) $20 \cdot I_{s1} - 10 \cdot I_{s2} = 90$

(2) $-10 \cdot I_{s1} + 50 \cdot I_{s2} = -135$

---

(1)+2·*(2):*

$90 I_{s2} = -180$

$I_{s2} = -2\ A$

$$I_{s1} = \frac{90 + 10 \cdot (-2)}{20} = 3{,}5\ A$$

A fenti eredmények segítségével megkapjuk a valós ágáramokat

(1) $I_1 = I_{s1} = 3{,}5\ A$

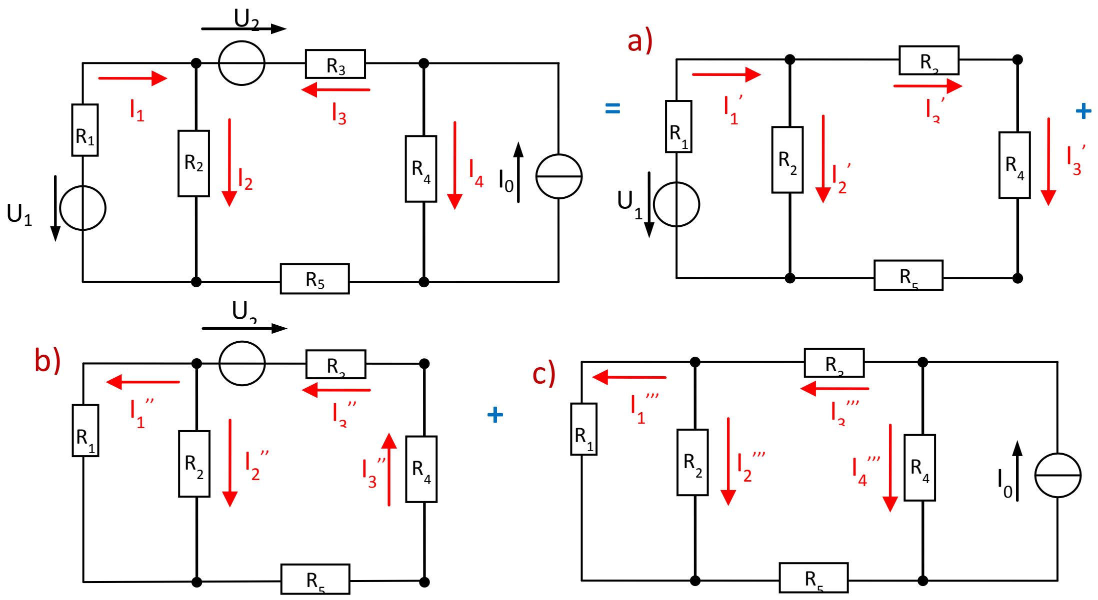
(2) $I_2 = I_{s1} - I_{s2} = 3{,}5 - (-2) = 5{,}5\ A$

(3) $I_3 = -I_{s2} = -(-2) = 2\ A$

(4) $I_4 = I_{s2} + I_0 = -2 + 6 = 4\ A$

1.6.2.4. Megoldás a *szuperpozíció tételével*

Az áramkör két feszültség- és egy áramgenerátort tartalmaz, a megoldáshoz három rész áramkörre bontjuk a kapcsolást.



1-94. ábra

A rész áramkörök áramainak kiszámítása:

a)

$$R'_e = R_1 + (R_2 \times (R_3 + R_4 + R_5)) = 10 + (10 \times (5 + 15 + 20) = 18\ \Omega$$

$$I'_1 = \frac{U_1}{R'_e} = \frac{90}{18} = 5\ A$$

$$I'_2 = I'_1 \cdot \frac{R_3 + R_4 + R_5}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 5 \cdot \frac{5 + 15 + 20}{10 + 5 + 15 + 20} = 4\ A$$

$$I'_3 = I'_1 - I'_2 = 5 - 4 = 1\ A$$

b)

$$R''_e = (R_1 \times R_2) + R_3 + R_4 + R_5 = (10 \times 10) + 5 + 15 + 20 = 45\ \Omega$$

$$I''_3 = \frac{U_2}{R''_e} = \frac{45}{45} = 1A$$

$$I''_2 = I''_3 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 1 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 0{,}5\ A$$

$$I''_1 = I''_3 - I''_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5\ A$$

c)

$$I'''_4 = I_0 \cdot \frac{R_3 + R_5 + (R_1 \times R_2)}{R_3 + R_5 + (R_1 \times R_2) + R_4} = 6 \cdot \frac{5 + 20 + (10 \times 10)}{5 + 20 + (10 \times 10) + 15} = 4\ A$$

$I_3''' = I_0 - I_4''' = 6 - 4 = 2\ A$

$I_2''' = I_3''' \cdot \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = 2 \cdot \dfrac{10}{10 + 10} = 1\ A$

$I_1''' = I_3''' - I_2''' = 2 - 1 = 1\ A$

A rész áramkörök áramainak összegzésével megkapjuk a valódi ágáramokat. Az összegzés során figyeljünk az áramirányokra! (A feladatot a rossz előjelekkel lehet legkönnyebben elrontani, ezért a végén mindig érdemes a végeredményt a Kirchhoff csomóponti egyenletekkel ellenőrizni)

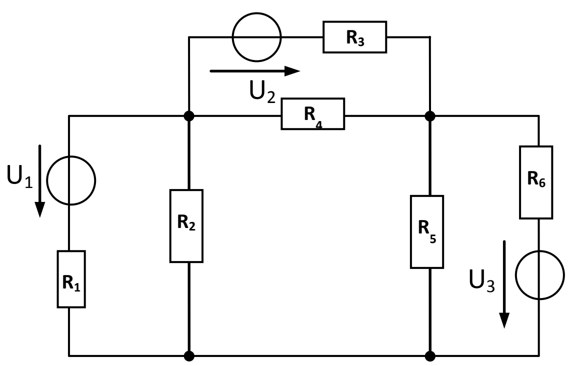
$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''' = 5 - 0{,}5 - 1 = 3{,}5\ A$

$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = 4 + 0{,}5 + 1 = 5{,}5\ A$

$I_3 = -I_3' + I_3'' + I_3''' = -1 + 1 + 2 = 2\ A$

$I_4 = I_3' - I_3'' + I_4''' = -1 + 1 + 4 = 4\ A$

1.6.3. Számítsa ki az alábbi áramkör egyes ágaiban folyó áramokat!

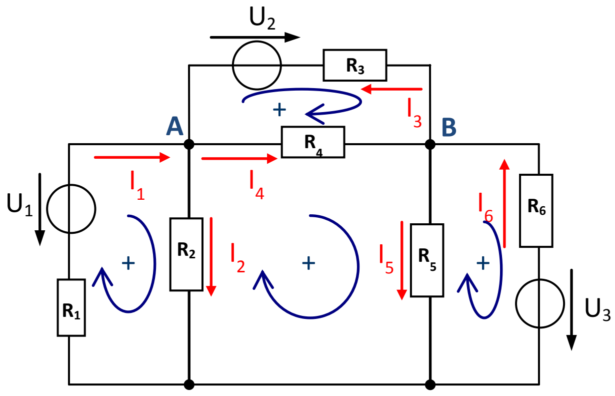


$R_1=2{,}5\Omega$
$R_2=10\Omega$
$R_3=3\Omega$
$R_4=6\Omega$
$R_5=8\Omega$
$R_6=8\Omega$
$U_1=25V$
$U_2=40V$
$U_3=64V$

1-95. ábra

1.6.3.1. Megoldás a *Kirchhoff törvények* alkalmazásával

Jelöljük be az áramokat (az áramirányok felvétele tetszőleges, ha a végén negatív értéket kapunk, akkor az azt jelenti, hogy a berajzolttal ellentétes a valódi áramirány):



1-96. ábra

A hat ismeretlen ágáram kiszámításához a Kirchhoff törvények segítségével hat egyenletet, 2 csomóponti- és 4 hurokegyenletet lehet felírni:

Hurok egyenletek:

(1) $R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - U_1 = 0$

(2) $-R_2 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 = 0$

(3) $U_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = 0$

(4) $U_3 - R_5 \cdot I_5 - R_6 \cdot I_6 = 0$

Csomóponti egyenletek:

(5) $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$

(6) $-I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0$

Mátrixos formába rendezve az egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & R_4 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Írjuk be a megadott értékeket a paraméterek helyébe:

$$\begin{bmatrix} 2{,}5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 40 \\ 64 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy az együttható mátrix főátlójában a 4. sorban nulla van, ezért cseréljük fel a 4. és az 5. sort és a Gauss elimináció elvégzéséhez a bővített mátrixot már így írjuk fel. Ezek után végezzük el a főátló alatti helyek „kinullázását”:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2{,}5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 40 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 64 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 2{,}5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 12{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 64 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2{,}5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 64 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 2{,}5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 3 & 40 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2{,}5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -6 & -10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 2{,}5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 154 \end{array}\right]$$

Az utolsó mátrix *6. sorából* felírható:

$24 \cdot I_6 = 154$

$I_6 = \dfrac{154}{24} = 6{,}4167\ A$

Az *5. sorból*:

$I_5 + I_6 = 8$

$I_5 = 8 - 6{,}4167 = 1{,}5833\ A$

A *4. sorból*:

$18 \cdot I_4 + 12 \cdot I_5 = 70$

$$I_4 = \frac{70 - 12 \cdot 1{,}5833}{18} = 2{,}833\ A$$

A *3. sorból*:

$$3 \cdot I_3 + 6 \cdot I_4 = 40$$

$$I_3 = \frac{40 - 6 \cdot 2{,}833}{3} = 7{,}667\ A$$

A *2. sorból*:

$$-10 \cdot I_2 + 6 \cdot I_6 + 4 \cdot I_4 = 0$$

$$I_2 = \frac{3 \cdot 2{,}833 + 4 \cdot 1{,}5833}{5} = 2{,}9667\ A$$

Az *1. sorból*:

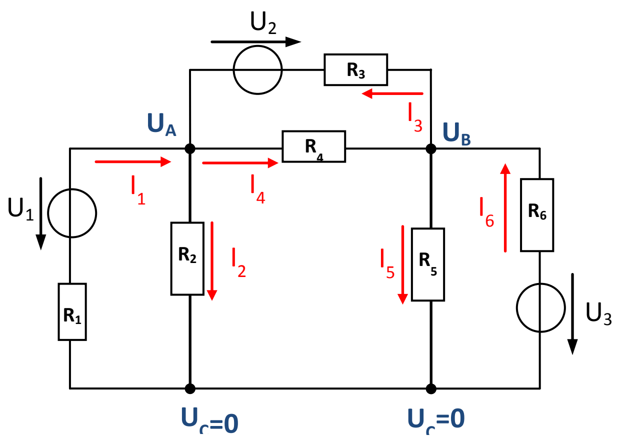
$$2{,}5 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 = 25$$

$$I_1 = \frac{25 - 10 \cdot 2{,}9667}{2{,}5} = -1{,}8667\ A$$

Az I_1-re negatív értéket kaptunk, tehát az áram iránya az ábrába berajzolttal ellentétes. (A többi áram irányát jól vettük fel.)

1.6.3.2. Megoldás a *csomóponti potenciálok* módszerével

Az előző (1.6.3.1) megoldásnál láttuk, hogy az áramkörre két csomóponti egyenlet írható fel. Ez azt jelenti, hogy a csomóponti potenciálok módszerének alkalmazásával a hat ismeretlenes egyenletrendszer két ismeretlenesre egyszerűsödik. Így ennél a példánál valószínűleg ez a módszer adja a legegyszerűbb megoldást.



1-97. ábra

Jelöljük be a csomóponti potenciálokat! Az alsó két csomópont azonos potenciálon van, válasszuk ennek az értékét 0-nak.

Fejezzük ki az ágáramokat a csomóponti potenciálok segítségével:

(1) $U_A = U_1 - R_1 \cdot I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R_1}$

(2) $U_A = R_2 \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{U_A}{R_2}$

(3) $U_A - U_B = U_2 - R_3 \cdot I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3}$

(4) $U_A - U_B = R_4 \cdot I_4 \quad \Rightarrow \quad I_4 = \frac{U_A - U_B}{R_4}$

(5) $U_B = R_5 \cdot I_5 \quad \Rightarrow \quad I_5 = \frac{U_B}{R_5}$

(6) $U_B = U_3 - R_6 \cdot I_6 \quad \Rightarrow \quad I_6 = \frac{U_3 - U_B}{R_6}$

Írjuk fel a csomóponti egyenleteket *A* és *B* csomópontra!

(A) $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$

(B) $-I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0$

(A) $\frac{U_1 - U_A}{R_1} - \frac{U_A}{R_2} + \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} - \frac{U_A - U_B}{R_4} = 0$

(B) $-\frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} + \frac{U_A - U_B}{R_4} - \frac{U_B}{R_5} + \frac{U_3 - U_B}{R_6} = 0$

(A) $\frac{25 - U_A}{2{,}5} - \frac{U_A}{10} + \frac{40 - U_A + U_B}{3} - \frac{U_A - U_B}{6} = 0$

(B) $-\frac{40 - U_A + U_B}{3} + \frac{U_A - U_B}{6} - \frac{U_B}{8} + \frac{64 - U_B}{8} = 0$

(A) $12 \cdot (25 - U_A) - 3 \cdot U_B + 400 - 10 \cdot U_A + 10 \cdot U_B - 5 \cdot U_A + 5 \cdot U_B = 0$

(B) $-320 + 8 \cdot U_A - 8 \cdot U_B + 4 \cdot U_A - 4 \cdot U_B - 3 \cdot U_B + 192 - 3 \cdot U_B = 0$

(A) $-30 \cdot U_A + 15 \cdot U_B = -700$

(B) $12 \cdot U_A - 18 \cdot U_B = 128$

(A) $-6 \cdot U_A + 3 \cdot U_B = -140$

(B) $6 \cdot U_A - 9 \cdot U_B = 64$

(A)+(B)

$$-6 \cdot U_B = -76$$

$$U_B = \frac{76}{6} = \frac{38}{3} = 12{,}667\ V$$

3(A)+(B)

$$-12 \cdot U_A = -356$$

$$U_A = \frac{356}{12} = \frac{89}{3} = 29{,}667\ V$$

Az eredményeket behelyettesítjük az ágáramokra felírt összefüggésekbe:

$$(1)\ I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R_1} = \frac{25 - \frac{89}{3}}{2{,}5} = -1{,}8667\ A$$

$$(2)\ I_2 = \frac{U_A}{R_2} = \frac{\frac{89}{3}}{10} = 2{,}9667\ A$$

$$(3)\ I_3 = \frac{U_2 - U_A + U_B}{R_3} = \frac{40 - \frac{89}{3} + \frac{38}{3}}{3} = 7{,}667 A$$

$$(4)\ I_4 = \frac{U_A - U_B}{R_4} = \frac{\frac{89-38}{3}}{6} = 2{,}833\ A$$

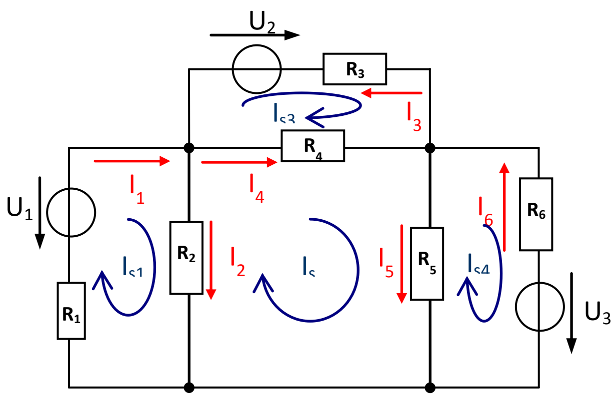
$$(5)\ I_5 = \frac{U_B}{R_5} = \frac{\frac{38}{3}}{8} = 1{,}5833\ V$$

$$(6)\ I_6 = \frac{U_3 - U_B}{R_6} = \frac{64 - \frac{38}{3}}{8} = 6{,}41667\ A$$

Az eredmények megegyeznek az 1.6.3.1. pontban kapott értékekkel.

1.6.3.3. Megoldás a *hurokáramok* módszerével

Ezzel a módszerrel most négy hurokegyenletből álló négy ismeretlenes egyenletrendszert kell megoldanunk.



1-98. ábra

Először írjuk fel a hurokáramok és a tényleges ágáramok közötti összefüggéseket! (Amelyik ág csak egy hurokhoz tartozik, annak árama (figyelembe véve a berajzolt áramirányokat) az hurokárammal megegyezik, amelyik ág két hurokhoz tartozik, annak árama a hurokáramok előjeles összegével egyenlő.)

(1) $I_1 = I_{s1}$

(2) $I_2 = I_{s1} - I_{s2}$

(3) $I_3 = -I_{s3}$

(4) $I_4 = I_{s2} - I_{s3}$

(5) $I_5 = I_{s2} - I_{s4}$

(6) $I_6 = -I_{s4}$

Írjuk fel a hurokegyenleteket az 1-98. ábrán bejelölt négy hurokra:

(1) $R_1 \cdot I_{s1} + R_2 \cdot (I_{s1} - I_{s2}) - U_1 = 0$

(2) $R_2 \cdot (I_{s2} - I_{s1}) + R_4 \cdot (I_{s2} - I_{s3}) + R_5 \cdot (I_{s2} - I_{s4}) = 0$

(3) $R_4 \cdot (I_{s3} - I_{s2}) + U_2 + R_3 \cdot I_{s3} = 0$

(4) $R_6 \cdot I_{s4} + U_3 + R_5 \cdot (I_{s4} - I_{s2}) = 0$

---

(1) $(R_1 + R_2) \cdot I_{s1} - R_2 \cdot I_{s2} = U_1$

(2) $-R_2 \cdot I_{s1} + (R_2 + R_4 + R_5) \cdot I_{s2} - R_4 \cdot I_{s3} - R_5 \cdot I_{s4} = 0$

(3) $-R_4 \cdot I_{s2} + (R_3 + R_4) \cdot I_{s3} = -U_2$

(4) $-R_5 \cdot I_{s2} + (R_5 + R_6) \cdot I_{s4} = -U_3$

Mátrixos alakba írva az egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & (R_2 + R_4 + R_5) & -R_4 & -R_5 \\ 0 & -R_4 & (R_3 + R_4) & 0 \\ 0 & -R_5 & 0 & (R_5 + R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \\ I_{s4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ -U_2 \\ -U_3 \end{bmatrix}$$

Írjuk be a megadott értékeket:

$$\begin{bmatrix} 12{,}5 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 24 & -6 & -8 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \\ I_{s4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ -40 \\ -64 \end{bmatrix}$$

A Gauss- eliminációhoz írjuk fel a bővített mátrixot, majd végezzük el az együttható mátrix főátló alatti értékeinek kinullázását!

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 12,5 & -10 & 0 & 0 & 25 \\ -10 & 24 & -6 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & -40 \\ 0 & -8 & 0 & 16 & -64 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 12,5 & -10 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 8 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & -40 \\ 0 & -8 & 0 & 16 & -64 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 12,5 & -10 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 8 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 27 & -12 & -130 \\ 0 & 0 & -3 & 12 & -54 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 12,5 & -10 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 8 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 27 & -12 & -130 \\ 0 & 0 & 0 & 96 & -616 \end{array}\right]$$

Az utolsó mátrix *4. sorából* felírható:

$$96 \cdot I_{s4} = -616$$

$$I_{s4} = -\frac{616}{96} = -6,4167\ A$$

A *3. sorból*:

$$27 \cdot I_{s3} - 12 \cdot I_{s4} = -130$$

$$I_{s3} = \frac{12 \cdot (-6,4167) - 130}{27} = -7,667\ A$$

A *2. sorból*:

$$8 \cdot I_{s2} - 3 \cdot I_{s3} - 4 \cdot I_{s4} = 10$$

$$I_{s2} = \frac{10 + 3 \cdot (-7,667) + 4 \cdot (-6,4167\ )}{8} = -4,833\ A$$

Az *1. sorból*:

$$12,5 \cdot I_{s1} - 10 \cdot I_{s2} = 25$$

$$I_{s1} = \frac{25 + 10 \cdot (-4,833)}{12,5} = -1,8667\ A$$

A hurokáramokból felírhatjuk a valódi ágáramokat:

(1) $I_1 = I_{s1} = -1,8667\ A$

(2) $I_2 = -1,8667 - (-4,833) = 2,9667\ A$

(3) $I_3 = -I_{s3} = 7,667\ A$

(4) $I_4 = I_{s2} - I_{s3} = -4,833 - (-7,667) = 2,833\ A$

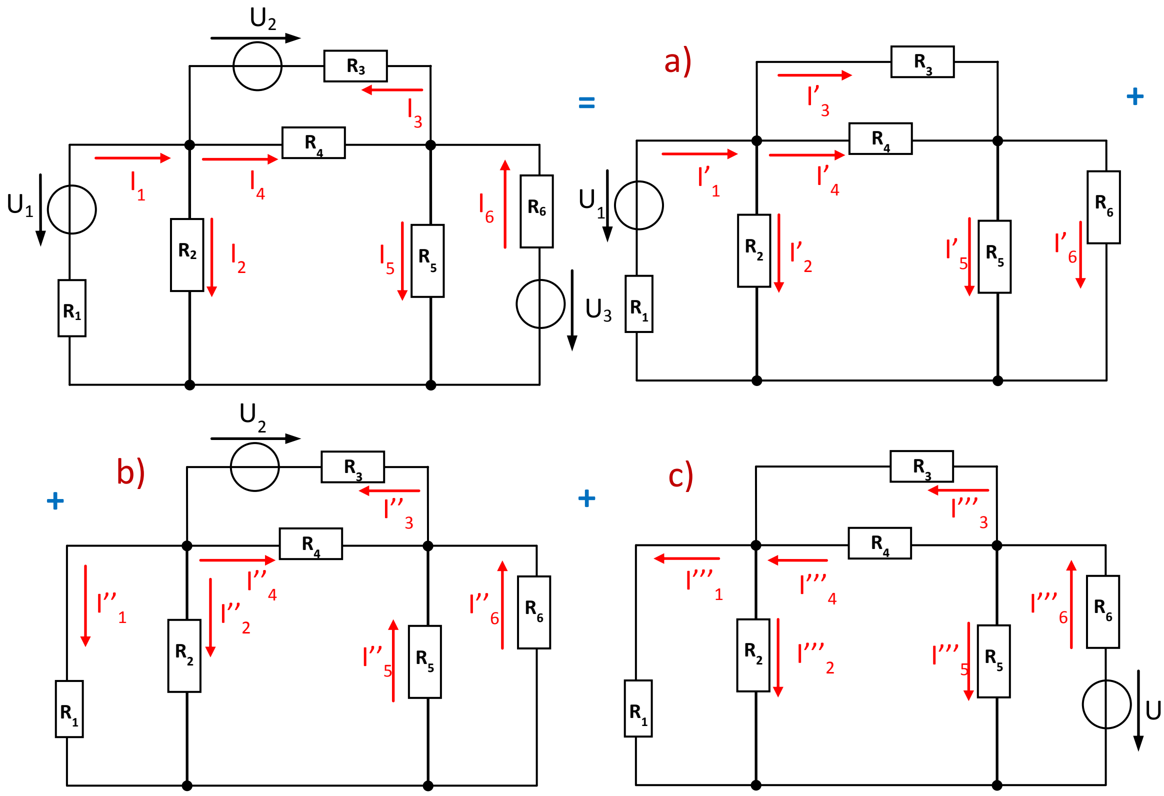
(5) $I_5 = I_{s2} - I_{s4} = -4,833 - (-6,4167) = 1,5833\ A$

(6) $I_6 = -I_{s4} = 6,4167\ A$

Az eredmények megegyeznek az 1.6.3.1. és 1.6.3.2. pontban kapott értékekkel.

1.6.3.4. Megoldás a *szuperpozíció tétel* használatával

Ezzel a módszerrel három, egy feszültségforrással rendelkező áramkör ágaiban kell meghatározni, majd a végén összegezni az áramokat. Előny, hogy nem kell több ismeretlenes egyenletrendszerek megoldásával bajlódni, a három „rész áramkör” áramai nagyon hasonló, viszonylag egyszerű számolási műveletekkel meghatározhatók, hátrány viszont, hogy a 6 különböző ágáramot háromszor is ki kell számolni.



1-99. ábra

A rész áramkörök áramainak kiszámítása:

a)

$$R_e' = R_1 + (R_2 \times [(R_3 \times R_4) + (R_5 \times R_6)]) = 2{,}5 + (10 \times [(6 \times 3) + (8 \times 8)]) = 6{,}25\ \Omega$$

$$I_1' = \frac{U_1}{R_e'} = \frac{25}{6{,}25} = 4\ A$$

Az áramosztás törvényét I_2’ áramra felírva

$$I_2' = I_1' \cdot \frac{(R_3 \times R_4) + (R_5 \times R_6)}{R_2 + (R_3 \times R_4) + (R_5 \times R_6)} = 4 \cdot \frac{(3 \times 6) + (8 \times 8)}{10 + (3 \times 6) + (8 \times 8)} = 4 \cdot \frac{6}{16} = 1{,}5\ A$$

A csomóponti törvény értelmében $I_1' = I_2' + I_3' + I_4'$, és $I_3' + I_4' = I_5' + I_6'$, vagyis $I_1' - I_2' = I_3' + I_4' = I_5' + I_6'$ áram oszlik meg az áramosztás törvényének megfelelő arányban R_3, R_4 valamint R_5, R_6 ellenállások ágai között.

$$I_3' + I_4' = I_1' - I_2' = 4 - 1{,}5 = 2{,}5\ A$$

$$I_3' = (I_1' - I_2') \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 2{,}5 \cdot \frac{6}{3+6} = 1{,}667\ A$$

$$I_4' = I_1' - I_2' - I_3' = 2{,}5 - 1{,}667 = 0{,}833\ A$$

$$I_5' = (I_1' - I_2') \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6} = 2{,}5 \cdot \frac{8}{8+8} = 1{,}25\ A$$

$$I_6' = I_1' - I_2' - I_5' = 2{,}5 - 1{,}25 = 1{,}25\ A$$

b)

$$R_e'' = R_3 + (R_4 \times [(R_1 \times R_2) + (R_5 \times R_6)]) = 3 + (6 \times [(2{,}5 \times 10) + (8 \times 8)]) = 6\ \Omega$$

$$I_3'' = \frac{U_2}{R_e''} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} = 6{,}667 A$$

Az áramosztás törvényét I_4'' áramra felírva:

$$I_4'' = I_3'' \cdot \frac{(R_1 \times R_2) + (R_5 \times R_6)}{R_4 + (R_1 \times R_2) + (R_5 \times R_6)} = \frac{20}{3} \cdot \frac{(2{,}5 \times 10) + (8 \times 8)}{6 + (2{,}5 \times 10) + (8 \times 8)} = \frac{20}{3} \cdot \frac{6}{12} = 3{,}33\ A$$

A csomóponti törvény értelmében $I_3'' = I_1'' + I_2'' + I_4''$, és $I_1'' + I_2'' = I_5'' + I_6''$, vagyis $I_3'' - I_4'' = I_1'' + I_2'' = I_5'' + I_6''$ áram oszlik meg az áramosztás törvényének megfelelő arányban R_1, R_2 valamint R_5, R_6 ellenállások ágai között.

$$I_1'' + I_2'' = I_3'' - I_4'' = 6{,}667 - 3{,}333 = 3{,}333\ A$$

$$I_1'' = (I_3'' - I_4'') \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3{,}333 \cdot \frac{10}{2{,}5 + 10} = 2{,}667\ A$$

$$I_2'' = I_3'' - I_4'' - I_1'' = 3{,}333 - 2{,}667 = 0{,}667\ A$$

$$I_5'' = (I_3'' - I_4'') \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6} = 3{,}333 \cdot \frac{8}{8+8} = 1{,}667\ A$$

$$I_6'' = I_3'' - I_4'' - I_5'' = 3{,}333 - 1{,}667 = 1{,}667\ A$$

c)

$$R_e''' = R_6 + (R_5 \times [(R_3 \times R_4) + (R_1 \times R_2)]) = 8 + (8 \times [(3 \times 6) + (2{,}5 \times 10)]) = \frac{32}{3}\ \Omega$$

$$I_6''' = \frac{U_3}{R_e'''} = \frac{64}{\frac{32}{3}} = 6\ A$$

Az áramosztás törvényét I_5''' áramra felírva:

$$I_5''' = I_6''' \cdot \frac{(R_3 \times R_4) + (R_1 \times R_2)}{R_5 + (R_3 \times R_4) + (R_1 \times R_2)} = 6 \cdot \frac{(3 \times 6) + (2{,}5 \times 10)}{8 + (2{,}5 \times 10) + (8 \times 8)} = 6 \cdot \frac{4}{12} = 2\ A$$

A csomóponti törvény értelmében $I_6''' = I_3''' + I_4''' + I_5'''$, és $I_1''' + I_2''' = I_3''' + I_4'''$, vagyis $I_6''' - I_5''' = I_1''' + I_2''' = I_3''' + I_4'''$ áram oszlik meg az áramosztás törvényének megfelelő arányban R_1, R_2 valamint R_3, R_4 ellenállások ágai között.

$$I_6''' - I_5''' = I_1''' + I_2''' = 6 - 2 = 4\,A$$

$$I_1''' = (I_6''' - I_5''') \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4 \cdot \frac{10}{2{,}5 + 10} = 3{,}2A$$

$$I_2''' = I_6''' - I_5''' - I_1''' = 4 - 3{,}2 = 0{,}8\,A$$

$$I_3''' = (I_6''' - I_5''') \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 4 \cdot \frac{6}{3 + 6} = 2{,}667\,A$$

$$I_4''' = I_6''' - I_5''' - I_3''' = 4 - 2{,}667 = 1{,}333\,A$$

A rész áramok összegzésével, a berajzolt áramirányok figyelembe vételével számoljuk ki a teljes áramkör ágáramait:

$$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''' = 4 - 2{,}667 - 3{,}2 = -1{,}867\,A$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = 1{,}5 + 0{,}667 + 0{,}8 = 2{,}967\,A$$

$$I_3 = -I_3' + I_3'' + I_3''' = -1{,}667 + 6{,}667 + 2{,}667 = 7{,}667\,A$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' - I_4''' = 0{,}833 + 3{,}333 - 1{,}333 = 2{,}833A$$

$$I_5 = I_5' - I_5'' + I_5''' = 1{,}25 - 1{,}667 + 2 = 1{,}583\,A$$

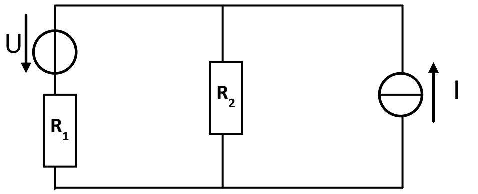
$$I_6 = -I_6' + I_6'' + I_6''' = -1{,}25 + 1{,}667 + 6 = 6{,}417\,A$$

Az eredmények megegyeznek az 1.6.3.1., 1.6.3.2. és 1.6.3.3. pontban kapott értékekkel.

Gyakorló példák

Az alábbi példák az előző pontokban bemutatott módszerek mindegyikével megoldhatók. Minden példánál egyfajta megoldás ki van dolgozva, de ajánlott gyakorlásként a ***többi módszerrel*** is elvégezni a számításokat.

1.6.4. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!



R_1=30 Ω

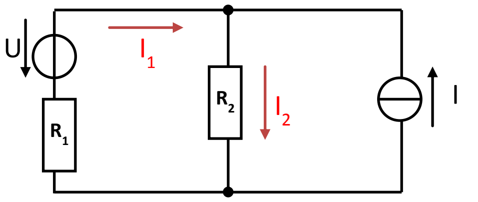
R_2=70 Ω

U=100 V

I=5 A

1-100. ábra

1.6.4.1. Megoldás a Kirchhoff törvények segítségével



R_1=30 Ω

R_2=70 Ω

U=100 V

I=5 A

1-101. ábra

Csomóponti egyenlet:

$(1) I_1 - I_2 + I = 0$

Hurok egyenlet:

$(2)\ R_1 \cdot I_1 - U + R_2 \cdot I_2 = 0$

$(1) -I_1 + I_2 = 5$

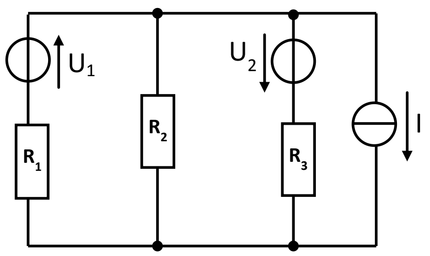
$(2)\ 30 \cdot I_1 + 70 \cdot I_2 = 100$

$100 \cdot I_2 = 250$

$I_2 = 2{,}5\ A$

$I_1 = I_2 - 5 = -2{,}5\ A$

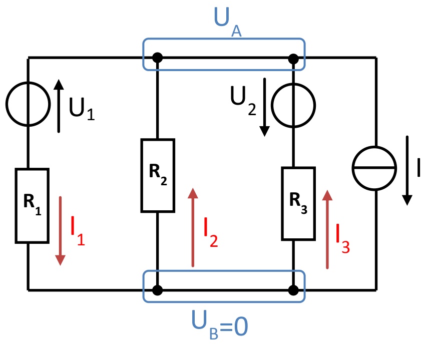
1.6.5. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!



R_1=20 Ω
R_2=10 Ω
R_3=15 Ω
U_1=60 V
U_2=10 V
I=2 A

1-102. ábra

1.6.5.1. Megoldás a *csomóponti potenciálok módszerével*



1-103. ábra

Az áramkör három ismeretlen áramára két hurok és egy csomóponti egyenlet írható fel. A csomóponti potenciálok módszerével elég U_A-ra egyetlen egy ismeretlenes egyenletet felírni, U_A-ból mindhárom ismeretlen ágáram kiszámítható:

(1) $U_A = -U_1 + R_1 \cdot I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_1+U_A}{R_1}$

(2) $U_A = -R_2 \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -\frac{U_A}{R_2}$

(3) $U_A = U_2 - R_3 \cdot I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{U_2-U_A}{R_3}$

A csomóponti egyenlet:

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I = 0$$

$$-\frac{U_1 + U_A}{R_1} - \frac{U_A}{R_2} + \frac{U_2 - U_A}{R_3} - I = 0$$

$$-\frac{60 + U_A}{20} - \frac{U_A}{10} + \frac{10 - U_A}{15} = 2$$

$$-180 - 3 \cdot U_A - 6 \cdot U_A + 40 - 4 \cdot U_A = 120$$

$$-13 \cdot U_A = 260$$

$$U_A = -20\ V$$

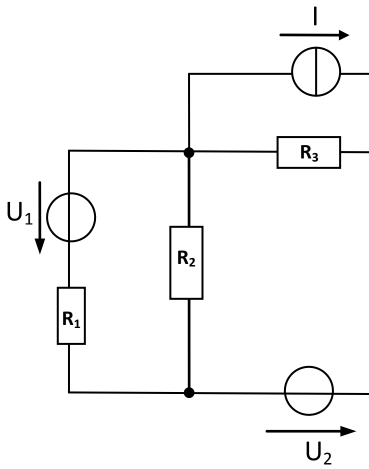
U_A-t behelyettesítve megkapjuk az áramokat:

$$I_1 = \frac{U_1 + U_A}{R_1} = \frac{60 - 20}{20} = 2\,A$$

$$I_2 = -\frac{U_A}{R_2} = -\frac{-20}{10} = 2\,A$$

$$I_3 = \frac{10 - (-20)}{15} = 2\,A$$

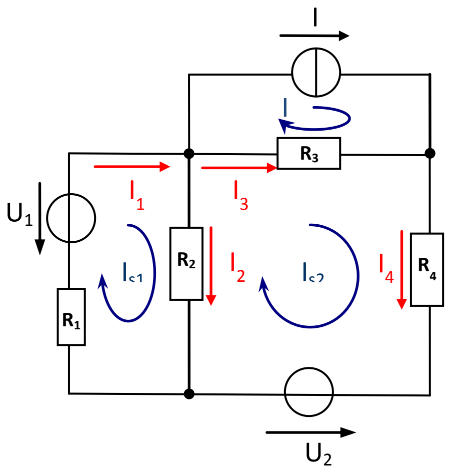
1.6.6. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!



R_1=4 Ω
R_2=10 Ω
R_3=8 Ω
R_4=2 Ω
U_1=3 V
U_2=4 V
I=1 A

1-104. ábra

1.6.6.1. Megoldás a *hurokáramok* módszerével



1-105. ábra

A négy ismeretlen áram kiszámításához két hurok és két csomóponti egyenlet írható fel. A hurokegyenletek módszerével a két hurokegyenlettel egy két ismeretlenes egyenletrendszer megoldásával az ismeretlenek meghatározhatók.

Az 1-103. ábrán berajzoltuk a hurokáramokat. A hurokáramok és a valódi ágáramok közötti összefüggések:

(1) $I_1 = I_{s1}$

(2) $I_2 = I_{s1} - I_{s2}$

(3) $I_3 = I_{s2} - I$

(4) $I_4 = I_{s2}$

Hurokegyenletek I_{s1} és I_{s2} hurokáramokkal:

(1) $R_1 \cdot I_{s1} + R_2 \cdot (I_{s1} - I_{s2}) - U_1 = 0$

(2) $R_2 \cdot (I_{s2} - I_{s1}) + R_3 \cdot (I_{s2} - I) + R_4 \cdot I_{s2} - U_2 = 0$

---

(1) $(R_1 + R_2) \cdot I_{s1} - R_2 \cdot I_{s2} = U_1$

(2) $-R_2 \cdot I_{s1} + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_{s2} = R_3 \cdot I + U_2$

---

(1) $14 \cdot I_{s1} - 10 \cdot I_{s2} = 3$

(2) $-10 \cdot I_{s1} + 25 \cdot I_{s2} = 8 + 4$

5(1)+2(2):

$$50 \cdot I_{s1} = 39$$

$$I_{s1} = 0{,}78\ A$$

$$25 \cdot I_{s2} = 10 \cdot I_{s1} + 12$$

$$I_{s2} = \frac{10 \cdot 0{,}78 + 12}{20} = 0{,}792\ A$$

Az ágáramok:

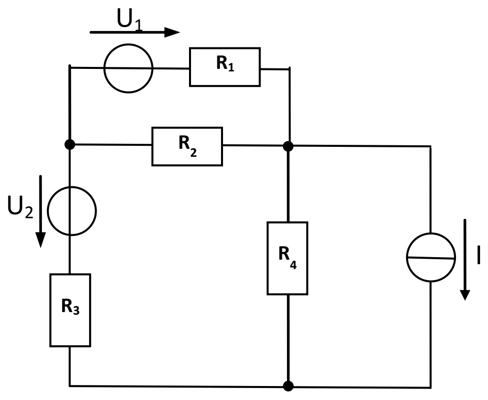
(1) $I_1 = I_{s1}$=0,78 A

(2) $I_2 = I_{s1} - I_{s2} = 0{,}78 - 0{,}792 = -0{,}012\ A$

(3) $I_3 = I_{s2} - I = 0{,}792 - 1 = -0{,}208\ A$

(4) $I_4 = I_{s2}$=0,792 A

1.6.7. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!

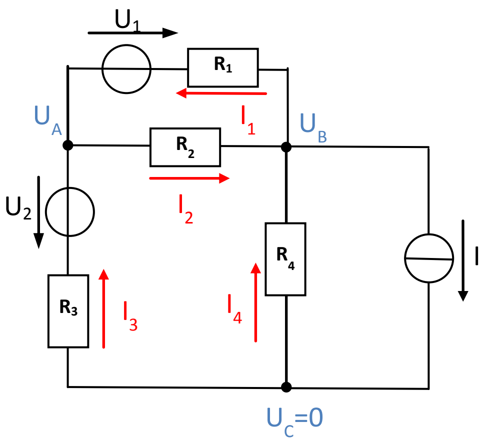


$R_1=10\ \Omega$
$R_2=20\ \Omega$
$R_3=10\ \Omega$
$R_4=5\ \Omega$
$U_1=40\ V$
$U_2=20\ V$
$I=2\ A$

1-106. ábra

1.6.7.1. Megoldás a *csomóponti potenciálok* módszerével

Az áramkör négy ismeretlen áramára két hurok és két csomóponti egyenlet írható fel. U_A-ból és U_B-ből mindhárom ismeretlen ágáram kiszámítható:



1-107. ábra

(1) $U_A - U_B = U_1 - R_1 \cdot I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1}$

(2) $U_A - U_B = R_2 \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{U_A - U_B}{R_2}$

(3) $U_A = U_2 - R_3 \cdot I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{U_2 - U_A}{R_3}$

(4) $U_B = -R_4 \cdot I_4 \quad \Rightarrow \quad I_4 = -\frac{U_B}{R_4}$

A csomóponti egyenletek:

(A) $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

(B) $-I_1 + I_2 + I_4 - I = 0$

(A) $\frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1} - \frac{U_A - U_B}{R_2} + \frac{U_2 - U_A}{R_3} = 0$

(B) $-\frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1} + \frac{U_A - U_B}{R_2} - \frac{U_B}{R_4} - I = 0$

(A) $\frac{40 - U_A + U_B}{10} - \frac{U_A - U_B}{20} + \frac{20 - U_A}{10} = 0$

(B) $-\frac{40 - U_A + U_B}{10} + \frac{U_A - U_B}{20} - \frac{U_B}{5} - 2 = 0$

(A) $80 - 2 \cdot U_A + 2 \cdot U_B - U_A + U_B + 40 - 2 \cdot U_A = 0$

(B) $-80 + 2 \cdot U_A - 2 \cdot U_B + U_A - U_B - 4 \cdot U_B = 40$

(A) $-5 \cdot U_A + 3 \cdot U_B = -120$

(B) $3 \cdot U_A - 7 \cdot U_B = 120$

(A) $-15 \cdot U_A + 9 \cdot U_B = -360$

(B) $15 \cdot U_A - 35 \cdot U_B = 600$

$-26 \cdot U_B = 240$

$$U_B = -\frac{240}{26} = -9{,}23\ V$$

$$U_A = \frac{120 - 7 \cdot U_B}{3} = 18{,}46\ V$$

Végül helyettesítsük be U_A és U_B értékeket az áramokra felírt összefüggésekbe:

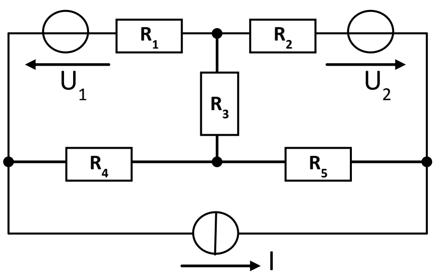
$$I_1 = \frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1} = \frac{40 - 18{,}46 + 9{,}23}{10} = 1{,}23\ A$$

$$I_2 = \frac{U_A - U_B}{R_2} = \frac{18{,}46 + 9{,}23}{20} = 1{,}3845\ A$$

$$I_3 = \frac{U_2 - U_A}{R_3} = \frac{20 - 18{,}46}{10} = 0{,}154\ A$$

$$I_4 = -\frac{U_B}{R_4} = \frac{9{,}23}{5} = 1{,}846\ A$$

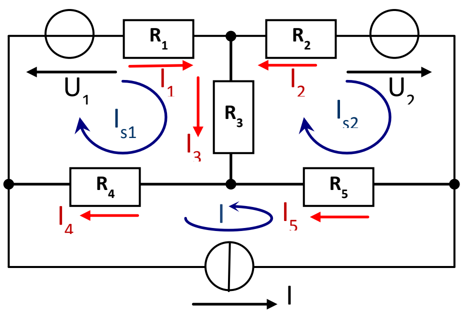
1.6.8. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!



R_1=10 Ω
R_2=20 Ω
R_3=30 Ω
R_4=20 Ω
R_5=10 Ω
U_1=60 V
U_2=90 V
I=5 A

1-108. ábra

1.6.8.1. Megoldás a *hurokáramok* módszerével



1-109. ábra

Az öt ismeretlen áramra két hurok és három csomóponti egyenlet írható fel. A hurokáramok módszerével egy két ismeretlenes egyenletrendszerből a hurokáramok, a hurokáramokból az ágáramok meghatározhatók.

Összefüggések a hurokáramok és az ágáramok között:

(1) $I_1 = I_{s1}$

(2) $I_2 = -I_{s2}$

(3) $I_3 = I_{s2} - I_{s2}$

(4) $I_4 = I + I_{s1}$

(5) $I_5 = I + I_{s2}$

Hurokegyenletek I_{s1} és I_{s2} hurokáramokkal:

(1) $-U_1 + R_1 \cdot I_{s1} + R_3 \cdot (I_{s1} - I_{s2}) + (I + I_{s1}) \cdot R_4 = 0$

(2) $R_2 \cdot I_{s2} + U_2 + R_5 \cdot (I_{s2} + I) + R_3 \cdot (I_{s2} - I_{s1}) = 0$

---

(1) $(R_1 + R_3 + R_4) \cdot I_{s1} - R_3 \cdot I_{s2} = U_1 - R_4 \cdot I$

(2) $-R_3 \cdot I_{s1} + (R_2 + R_3 + R_5) \cdot I_{s2} = -R_5 \cdot I - U_2$

---

(1) $60 \cdot I_{s1} - 30 \cdot I_{s2} = 60 - 5 \cdot 20$

(2) $-30 \cdot I_{s1} + 60 \cdot I_{s2} = -5 \cdot 10 - 90$

$9 \cdot I_{s1} = -22$

$I_{s1} = -2{,}444\ A$

$9 \cdot I_{s2} = -32$

$I_{s2} = -3{,}555 A$

$I_1 = I_{s1} = -2{,}444\ A$

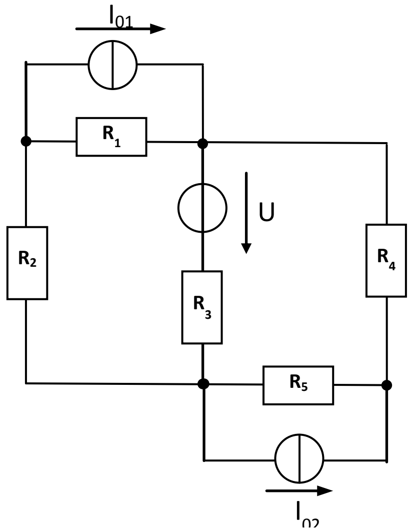
$I_2 = -I_{s2} = 3{,}555\ A$

$I_3 = I_{s1} - I_{s2} = 1{,}111\ A$

$I_4 = I + I_{s1} = 2{,}555\ A$

$I_5 = I + I_{s2} = 1{,}444\ A$

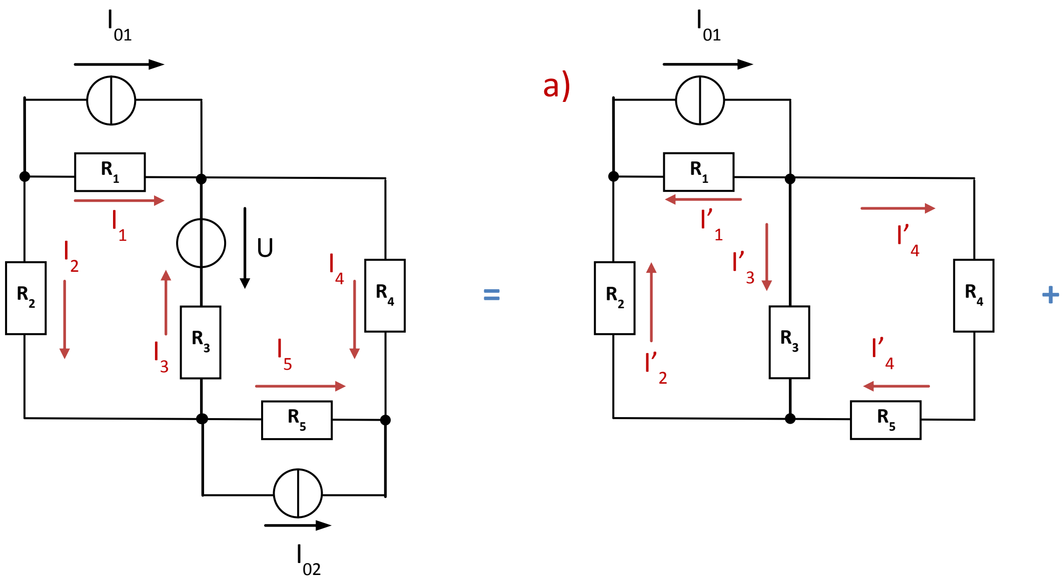
1.6.9. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!



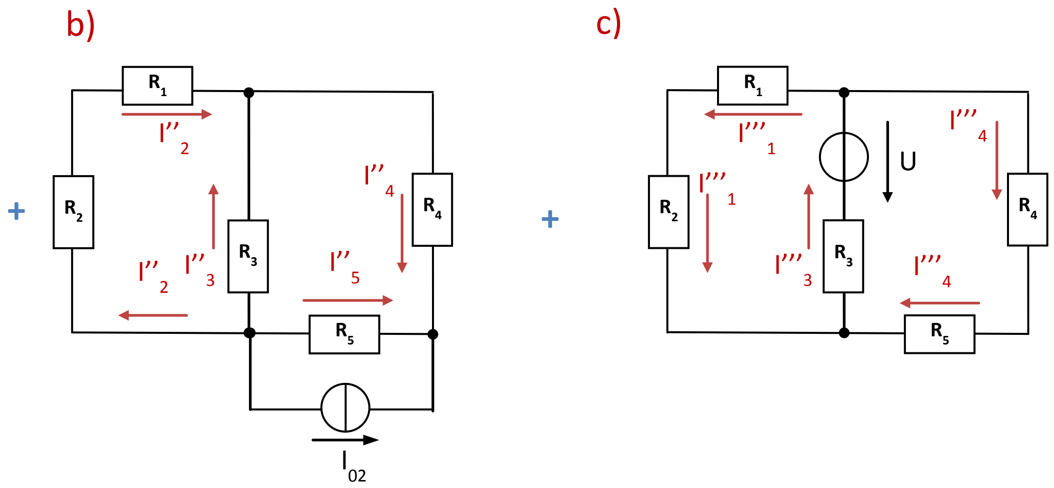
$R_1=4\ \Omega$
$R_2=2\ \Omega$
$R_3=2\ \Omega$
$R_4=1\ \Omega$
$R_5=5\ \Omega$
$U=10\ V$
$I_{01}=3\ A$
$I_{02}=6\ A$

1-110. ábra

1.6.9.1. Megoldás a *szuperpozíció tétellel*



1-111/a. ábra



1-112/b. ábra

a)

$$I_1' = I_{01} \cdot \frac{R_2 + [R_3 \times (R_4 + R_5)]}{R_1 + R_2 + [R_3 \times (R_4 + R_5)]} = 3 \cdot \frac{2 + (2 \times 6)}{4 + 2 + (2 \times 6)} = 1{,}4\ A$$

$$I_2' = I_{01} - I_1' = 3 - 1{,}4 = 1{,}6\ A$$

$$I_3' = I_2' \cdot \frac{R_4 + R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 1{,}6 \cdot \frac{1 + 5}{2 + 1 + 5} = 1{,}2\ A$$

$$I_4' = I_2' - I_3' = 1{,}6 - 1{,}2 = 0{,}4\ A$$

$$I_5' = I_4' = 0{,}4\ A$$

b)

$$I_5'' = I_{02} \cdot \frac{R_4 + [R_3 \times (R_1 + R_2)]}{R_5 + R_4 + [R_3 \times (R_1 + R_2)]} = 6 \cdot \frac{1 + (2 \times 6)}{5 + 1 + (2 \times 6)} = 2\ A$$

$$I_4'' = I_{02} - I_5'' = 6 - 2 = 4\ A$$

$$I_3'' = I_4'' \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_1 + R_2} = 4 \cdot \frac{6}{8} = 3\ A$$

$$I_2'' = I_4'' - I_3'' = 4 - 3 = 1\ A$$

$$I_1'' = I_2'' = 1\ A$$

c)

$$R_e''' = R_3 + [(R_4 + R_5) \times (R_1 + R_2)] = 2 + (6 \times 6) = 5\Omega$$

$$I_3''' = \frac{U}{R_e'''} = \frac{10}{5} = 2\ A$$

$$I_1''' = I_2''' = I_3''' \cdot \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = 2 \cdot \frac{6}{12} = 1\ A$$

$$I_4''' = I_5''' = 1\ A$$

$$I_1 = -I_1' + I_1'' - I_1''' = -1{,}4 + 1 - 1 = -1{,}4\ A$$

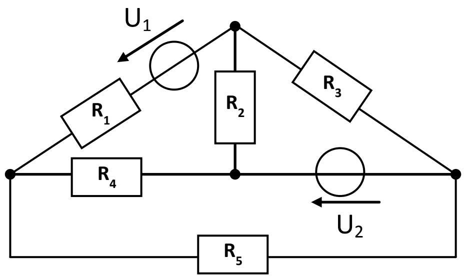
$$I_2 = -I_2' - I_2'' + I_2''' = -1{,}6 - 1 + 1 = -1{,}6\ A$$

$$I_3 = -I_3' + I_3'' + I_3''' = -1{,}2 + 3 + 2 = 3{,}8\ A$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' + I_4''' = 0{,}4 + 4 + 1 = 5{,}4\ A$$

$$I_5 = -I_5' + I_5'' - I_5''' = -0{,}4 + 2 - 1 = 0{,}6\ A$$

1.6.10. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!

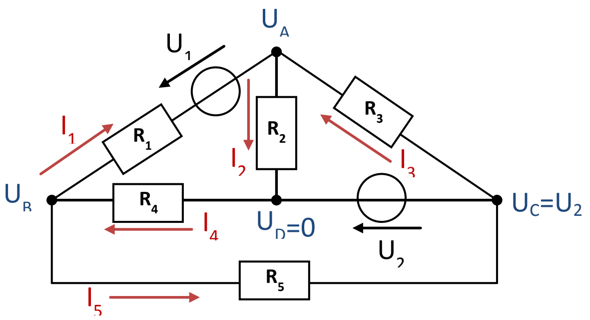


R_1=2 Ω
R_2=4 Ω
R_3=5 Ω
R_4=3 Ω
R_5=6 Ω
U_1=15 V
U_2=20 V

1-113. ábra

1.6.10.1.Megoldás a *csomóponti potenciálok* módszerével

Az áramkörben öt ismeretlen ágáramot kell kiszámítani. Az 1-111. ábrán látható, hogy a kapcsolás négy csomópontjához négy különböző csomóponti potenciál tartozik. Ebből az egyiket választhatjuk 0-nak. Ha U_D-t 0-nak vesszük, U_C csomópont potenciálja U_2-vel lesz egyenlő, így a két ismeretlen, U_A és U_B kiszámításával mind az 5 ismeretlen ágáram kiszámítható:



1-114. ábra

$$(1)\ U_A - U_B = U_1 - R_1 \cdot I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1}$$

$$(2)\ U_A = R_2 \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{U_A}{R_2}$$

$$(3)\ U_A - U_2 = -R_3 \cdot I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{U_2 - U_A}{R_3}$$

$$(4)\ U_B = -R_4 \cdot I_4 \quad \Rightarrow \quad I_4 = -\frac{U_B}{R_4}$$

$$(5)\ U_B - U_2 = R_5 \cdot I_5 \quad \Rightarrow \quad I_5 = \frac{U_B - U_2}{R_5}$$

A csomóponti egyenletek:

$$(A)\ I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$(B)\ -I_1 + I_4 - I_5 = 0$$

$$(A)\ \frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1} - \frac{U_A}{R_2} + \frac{U_2 - U_A}{R_3} = 0$$

$$(B)\ -\frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1} + \frac{U_B}{R_4} - \frac{U_B - U_2}{R_5} = 0$$

$$(A)\ \frac{15 - U_A + U_B}{2} - \frac{U_A}{4} + \frac{20 - U_A}{5} = 0$$

$$(B)\ -\frac{15 - U_A + U_B}{2} - \frac{U_B}{3} - \frac{U_B - 20}{6} = 0$$

$$(A)\ 150 - 10 \cdot U_A + 10 \cdot U_B - 5 \cdot U_A + 80 - 4 \cdot U_A = 0$$

(B) $-45 + 3 \cdot U_A - 3 \cdot U_B - 2 \cdot U_B - U_B + 20 = 0$

(A) $-19 \cdot U_A + 10 \cdot U_B = -230$

(B) $3 \cdot U_A - 6 \cdot U_B = 25$

(A) $-57 \cdot U_A + 30 \cdot U_B = -690$

(B) $15 \cdot U_A - 30 \cdot U_B = 125$

$-42 \cdot U_A =-565$

$U_A = 13{,}452\ V$

$U_B = \dfrac{3 \cdot 13{,}452 - 25}{6} = 2{,}559\ V$

Végül helyettesítsük be U_A és U_B értékeket az áramokra felírt összefüggésekbe:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_A + U_B}{R_1} = \frac{15 - 13{,}452 + 2{,}559}{2} = 2{,}053\ A$$

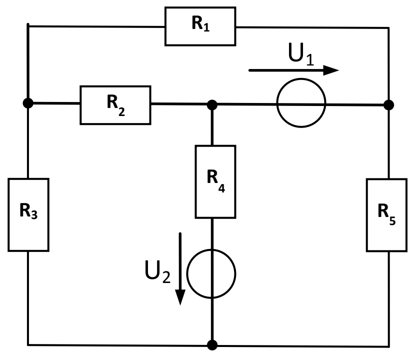
$$I_2 = \frac{U_A}{R_2} = \frac{13{,}452}{4} = 3{,}363\ A$$

$$I_3 = \frac{U_2 - U_A}{R_3} = \frac{20 - 13{,}452}{5} = 1{,}3096\ A$$

$$I_4 = -\frac{U_B}{R_4} = -\frac{2{,}559}{3} = -0{,}853\ A$$

$$I_5 = \frac{U_B - U_2}{R_5} = \frac{2{,}559 - 20}{6} = -2{,}9068\ A$$

1.6.11. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!



R_1=3 Ω

R_2=6 Ω

R_3=4 Ω

R_4=2 Ω

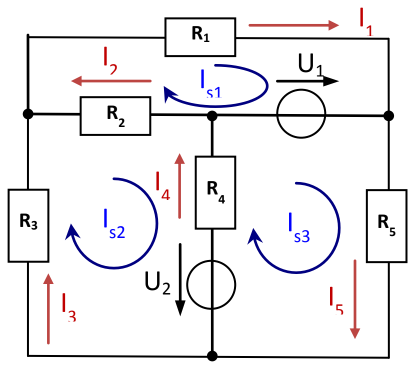
R_5=6 Ω

U_1=60 V

U_2=90 V

1-115. ábra

1.6.11.1.Megoldás a *hurokáramok* módszerével



1-116. ábra

Az öt ismeretlen áram kiszámításához három hurok és két csomóponti egyenlet írható fel. A hurokegyenletek módszerével, a három hurokegyenlettel egy három ismeretlenes egyenletrendszer megoldásával az ismeretlenek meghatározhatók.

Az 1-115. ábrán berajzoltuk a hurokáramokat. A hurokáramok és a valódi ágáramok közötti összefüggések:

(1) $I_1 = I_{s1}$

(2) $I_2 = I_{s1} - I_{s2}$

(3) $I_3 = I_{s2}$

(4) $I_4 = I_{s3} - I_{s2}$

(5) $I_5 = I_{s3}$

Hurokegyenletek I_{s1}, I_{s2} és I_{s3} hurokáramokkal:

(1) $R_1 \cdot I_{s1} + R_2 \cdot (I_{s1} - I_{s2}) - U_1 = 0$

(2) $R_2 \cdot (I_{s2} - I_{s1}) + R_4 \cdot (I_{s2} - I_{s3}) + R_3 \cdot I_{s2} + U_2 = 0$

(3) $R_4 \cdot (I_{s3} - I_{s2}) + U_1 + R_5 \cdot I_{s3} - U_2 = 0$

---

(1) $(R_1 + R_2) \cdot I_{s1} - R_2 \cdot I_{s2} = U_1$

(2) $-R_2 \cdot I_{s1} + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_{s2} - R_4 \cdot I_{s3} = -U_2$

(3) $-R_4 \cdot I_{s2} + (R_4 + R_5) \cdot I_{s3} = U_2 - U_1$

Az egyenletrendszert mátrixos alakba rendezve:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \\ U_2 - U_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -90 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert a *Crammer-szabály* használatával:

Az együttható mátrix determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 540$$

Képezzük D_i determinánsokat az együttható mátrix i. oszlopába az eredménymátrixot illesztve:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 60 & -6 & 0 \\ -90 & 12 & -2 \\ 30 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 1560$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 9 & 60 & 0 \\ -6 & -90 & -2 \\ 0 & 30 & 8 \end{vmatrix} = -3060$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & -6 & 90 \\ -6 & 12 & -90 \\ 0 & -2 & 30 \end{vmatrix} = 1260$$

A Crammer-szabály értelmében az ismeretlen hurokáramok:

$$I_{s1} = \frac{D_1}{D} = \frac{1560}{540} = 2{,}889\ A$$

$$I_{s2} = \frac{D_2}{D} = \frac{-3060}{540} = -5{,}667\ A$$

$$I_{s3} = \frac{D_3}{D} = \frac{1260}{540} = 2{,}333\ A$$

Végül írjuk fel a valódi ágáramokat:

(1) $I_1 = I_{s1}$=2,889 A

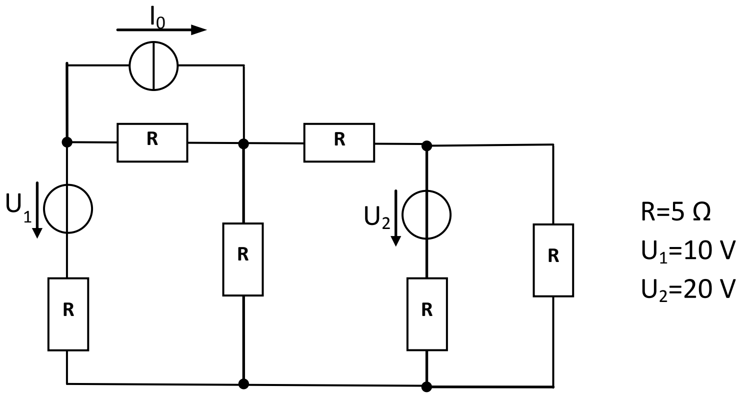
(2) $I_2 = I_{s1} - I_{s2} = 2{,}889 - (-5{,}667)$ =8,556 A

(3) $I_3 = I_{s2} = -5{,}667\ A$

(4) $I_4 = I_{s3} - I_{s2} = 2{,}333 - (-5{,}667) = 8\ A$

(5) $I_5 = I_{s3} = 2{,}333\ A$

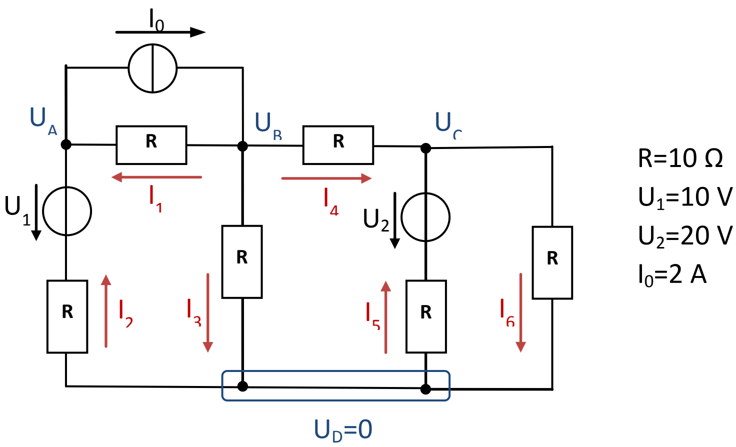
1.6.12. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!



1-117. ábra

1.6.12.1.Megoldás a *csomóponti potenciálok* módszerével

Az áramkör hat ismeretlen áramára három hurok és három csomóponti egyenlet írható fel. A csomóponti potenciálok módszerével a négy különböző potenciálú csomópontból egynek az értékét 0-nak választva megmaradó három ismeretlen csomóponti potenciállal a hat ismeretlen ágáram kifejezhető, a három csomóponti egyenlettel a három csomóponti potenciál kiszámítható.



1-118. ábra

$$(1)\ U_A - U_B = -R \cdot I_1 \qquad \Rightarrow\ I_1 = \frac{U_B - U_A}{R}$$

$$(2)\ U_A = U_1 - R \cdot I_2 \qquad \Rightarrow\ I_2 = \frac{U_1 - U_A}{R}$$

$$(3)\ U_B = R \cdot I_3 \qquad \Rightarrow\ I_3 = \frac{U_B}{R}$$

$$(4)\ U_B - U_C = R \cdot I_4 \qquad \Rightarrow\ I_4 = \frac{U_B - U_C}{R}$$

$$(5)\ U_C = U_2 - R \cdot I_5 \qquad \Rightarrow\ I_5 = \frac{U_2 - U_C}{R}$$

(6) $U_C = R \cdot I_6 \quad \Rightarrow \quad I_6 = \frac{U_C}{R}$

A csomóponti egyenletek:

(A) $I_1 + I_2 - I_0 = 0$

(B) $I_0 - I_1 - I_3 - I_4 = 0$

(C) $I_4 + I_5 - I_6 = 0$

(A) $\frac{U_B - U_A}{R} + \frac{U_1 - U_A}{R} = I_0$

(B) $I_0 - \frac{U_B - U_A}{R} - \frac{U_B}{R} - \frac{U_B - U_C}{R} = 0$

(C) $\frac{U_B - U_C}{R} + \frac{U_2 - U_C}{R} - \frac{U_C}{R} = 0$

(A) $U_B - U_A + U_1 - U_A = I_0 \cdot R$

(B) $U_B - U_A + U_B + U_B - U_C = I_0 \cdot R$

(C) $U_B - U_C + U_2 - U_C - U_C = 0$

(A) $-2 \cdot U_A + U_B = 10$

(B) $-U_A + 3 \cdot U_B - U_C = 20$

(C) $U_B - 3 \cdot U_C = -20$

Az egyetlenrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert a *Crammer-szabály* használatával:

Az együttható mátrix determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 13$$

Képezzük D_i determinánsokat az együttható mátrix i. oszlopába az eredménymátrixot illesztve:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 20 & 3 & -1 \\ -20 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 10 & 0 \\ -1 & 20 & -1 \\ 0 & -20 & -3 \end{vmatrix} = 130$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & -20 \end{vmatrix} = 130$$

A *Crammer-szabály* értelmében az ismeretlen csomóponti potenciálok:

$$U_A = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{13} = 0\ V$$

$$U_B = \frac{D_2}{D} = \frac{130}{13} = 10\ V$$

$$U_C = \frac{D_3}{D} = \frac{130}{13} = 10\ V$$

Végül a kapott eredményekből számítsuk ki az ágáramokat:

$$I_1 = \frac{U_B - U_A}{R} = \frac{10 - 0}{10} = 1\ A$$

$$I_2 = \frac{U_1 - U_A}{R} = \frac{10 - 0}{10} = 1\ A$$

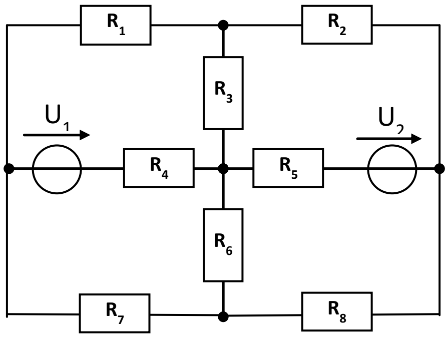
$$I_3 = \frac{U_B}{R} = \frac{10}{10} = 1\ A$$

$$I_4 = \frac{U_B - U_C}{R} = \frac{10 - 10}{10} = 0\ A$$

$$I_5 = \frac{U_2 - U_C}{R} = \frac{20 - 10}{10} = 1\ A$$

$$I_6 = \frac{U_C}{R} = \frac{10}{10} = 1\ A$$

1.6.13. Számítsa ki az alábbi áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff törvények, a szuperpozíció tétel, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere segítségével!

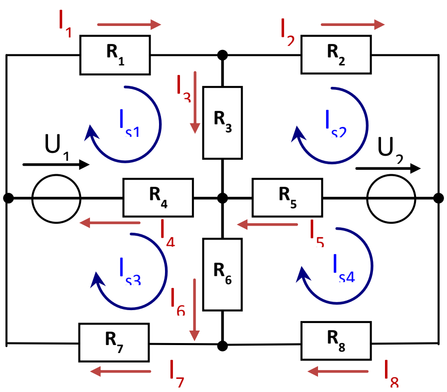


$R_1=2\ \Omega$
$R_2=4\ \Omega$
$R_3=8\ \Omega$
$R_4=2\ \Omega$
$R_5=4\ \Omega$
$R_6=2\ \Omega$
$R_7=4\ \Omega$
$R_8=8\ \Omega$
$U_1=102\ V$
$U_2=34\ V$

1-119. ábra

1.6.13.1. Megoldás a *hurokáramok* módszerével

A 8 ismeretlen áram kiszámításához négy hurok és négy csomóponti egyenlet írható fel. A hurokegyenletek módszerével, a négy hurokegyenlettel egy négy ismeretlenes egyenletrendszer megoldásával az ismeretlenek meghatározhatók.



1-120. ábra

Az 1-119. ábrán berajzoltuk a hurokáramokat. A hurokáramok és a valódi ágáramok közötti összefüggések:

(1) $I_1 = I_{s1}$

(2) $I_2 = I_{s2}$

(3) $I_3 = I_{s1} - I_{s2}$

(4) $I_4 = I_{s1} - I_{s3}$

(5) $I_5 = I_{s2} - I_{s4}$

(6) $I_6 = I_{s3} - I_{s4}$

(7) $I_7 = I_{s3}$

(8) $I_8 = I_{s4}$

Hurokegyenletek I_{s1}, I_{s2} és I_{s3} hurokáramokkal:

(1) $R_1 \cdot I_{s1} + R_3 \cdot (I_{s1} - I_{s2}) + R_4 \cdot (I_{s1} - I_{s3}) - U_1 = 0$

(2) $R_2 \cdot I_{s2} - U_2 + R_5 \cdot (I_{s2} - I_{s4}) + R_3 \cdot (I_{s2} - I_{s1}) = 0$

(3) $U_1 + R_4 \cdot (I_{s3} - I_{s1}) + R_6 \cdot (I_{s3} - I_{s4}) + R_7 \cdot I_{s3} = 0$

(4) $R_5 \cdot (I_{s4} - I_{s2}) + U_2 + R_8 \cdot I_{s4} + R_6 \cdot (I_{s4} - I_{s3}) = 0$

---

(1) $(R_1 + R_3 + R_4) \cdot I_{s1} - R_3 \cdot I_{s2} - R_4 \cdot I_{s3} = U_1$

(2) $-R_3 \cdot I_{s1} + (R_2 + R_3 + R_5) \cdot I_{s2} - R_5 \cdot I_{s4} = U_2$

(3) $-R_4 \cdot I_{s1} + (R_4 + R_6 + R_7) \cdot I_{s3} - R_6 \cdot I_{s4} = -U_1$

(4) $-R_5 \cdot I_{s2} - R_6 \cdot I_{s3} + (R_5 + R_6 + R_8) \cdot I_{s4} = -U_2$

Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 & 0 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 & 0 & -R_5 \\ -R_4 & 0 & R_4 + R_6 + R_7 & -R_6 \\ 0 & -R_5 & -R_6 & R_5 + R_6 + R_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \\ I_{s4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ -U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & -2 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \\ I_{s4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ -80 \\ -40 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása *Gauss-eliminációval:*

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & -2 & 0 & 80 \\ -8 & 16 & 0 & -4 & 40 \\ -2 & 0 & 8 & -2 & -80 \\ 0 & -4 & -2 & 14 & -40 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -8 & -2 & 0 & 80 \\ 0 & 16 & -2 & -6 & 140 \\ 0 & -8 & 46 & -12 & -400 \\ 0 & -4 & -2 & 14 & -40 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -8 & -2 & 0 & 80 \\ 0 & 16 & -2 & -6 & 140 \\ 0 & 0 & 90 & -30 & -660 \\ 0 & 0 & -10 & 50 & -20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -8 & -2 & 0 & 80 \\ 0 & 16 & -2 & -6 & 140 \\ 0 & 0 & 90 & -30 & -660 \\ 0 & 0 & 0 & 420 & -840 \end{bmatrix}$$

Az utolsó mátrix utolsó sorából felírható:

$$420 \cdot I_{s4} = -840$$

$$I_{s4} = -2\ A$$

A 3. sorból:

$$90 \cdot I_{s3} - 30 \cdot I_{s4} = -660$$

$$I_{s3} = \frac{30 \cdot I_{s4} - 660}{90} = \frac{-60 - 660}{90} = -8\ A$$

A 2. sorból:

$$16 \cdot I_{s2} - 2 \cdot I_{s3} - 6 \cdot I_{s4} = 140$$

$$I_{s2} = \frac{2 \cdot I_{s3} + 6 \cdot I_{s4} + 140}{16} = \frac{2 \cdot (-8) + 6 \cdot (-2) + 140}{16} = 7\ A$$

Az 1. sorból:

$$12 \cdot I_{s1} - 8 \cdot I_{s2} - 2 \cdot I_{s3} = 80$$

$$I_{s1} = \frac{8 \cdot I_{s2} + 2 \cdot I_{s3} + 80}{12} = \frac{8 \cdot 7 + 2 \cdot (-8) + 80}{12} = 10\ A$$

Végül írjuk fel a valódi ágáramokat:

(1) $I_1 = I_{s1} = 10\ A$

(2) $I_2 = I_{s2} = 7\ A$

(3) $I_3 = I_{s1} - I_{s2} = 3\ A$

(4) $I_4 = I_{s1} - I_{s3} = 10 - (-8) = 18\ A$

(5) $I_5 = I_{s2} - I_{s4} = 10 - (-2) = 12\ A$

(6) $I_6 = I_{s3} - I_{s4} = -8 - (-2) = -6\ A$

(7) $I_7 = I_{s3} = -8\ A$

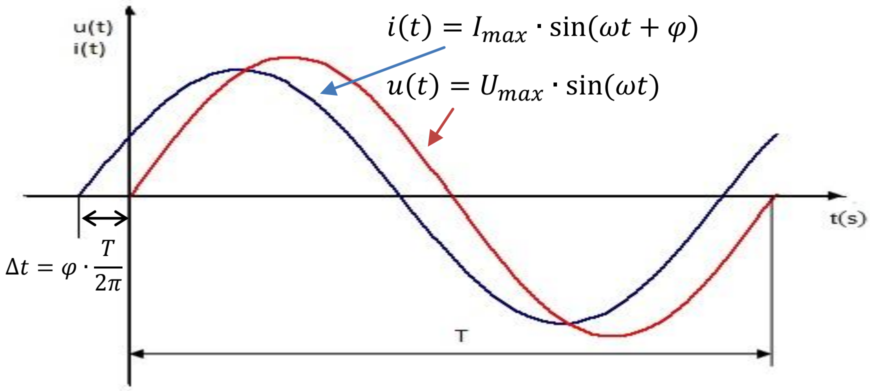
(8) $I_8 = I_{s4} = -2\ A$

2. VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ HÁLÓZATOK

2.1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben szinuszosan váltakozó áramú/feszültségű generátorokból és passzív áramköri elemekből (ellenállás, kondenzátor és induktivitás) álló egyszerű villamos hálózatok számításával foglalkozunk. A feladatok célja a váltakozó áramú hálózatok *komplex mennyiségek* használatával történő számításának megismerése és gyakorlása.

2.1.1. Szinuszos váltakozó feszültség/áram megadása



2-1. ábra

U_{max} [V], I_{max} [A] a feszültség/áram amplitúdója (csúcsértéke)

ω [1/s] körfrekvencia ($\omega = 2\pi \cdot f$)

t [s] idő

φ fázisszög, (fáziseltérés)

2.1.2. Szinuszos mennyiségek középértékei

Effektív érték (négyzetes középérték)

A gyakorlatban a váltakozó áram/feszültség nagyságának megadására általában nem az amplitúdót, hanem az *effektív értéket*, más néven a *négyzetes középértéket* használják.

Váltakozó áram/feszültség effektív értékén azt az egyenáramot/feszültséget értjük, amely ugyanakkora ellenálláson ugyanannyi idő alatt ugyanannyi hőt fejleszt, mint a váltakozó áram. R ellenálláson egységnyi idő alatt hővé alakuló teljesítmény:

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

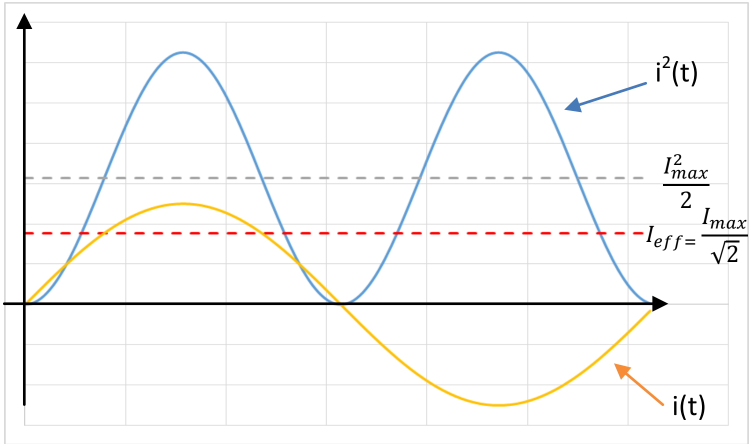
A keletkezett hő az áram/feszültség négyzetével arányos, ennek átlagértéke egy periódus alatt:

$$I_{átl}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt \qquad U_{átl}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt$$

Az effektív érték e mennyiségek négyzetgyöke:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I_{max} \cdot sin\omega t)^2 dt} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

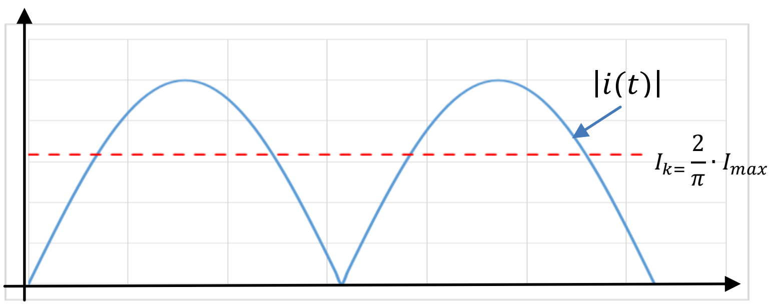
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (U_{max} \cdot sin\omega t)^2 dt} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$



2-2. ábra

Abszolút középérték

Váltakozó áram/feszültség abszolút középértékén azt az egyenáramot/feszültséget értjük, amely egy adott idő alatt ugyanannyi töltést szállít, mint a váltakozó áram. A töltésmennyiség arányos az árammal, de független az áram irányával, ezért az egy periódus alatt szállított töltésmennyiség az áram abszolút értékének időbeli átlagával arányos.



2-3. ábra

$$I_k = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|dt = \frac{1}{T}\int_0^T |I_{max} \cdot sin\omega t|dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_{max}$$

$U_k = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)| dt \; = \frac{1}{T}\int_0^T |U_{max} \cdot sin\omega t| dt = \frac{2}{\pi} \cdot U_{max}$

Összefüggés a szinuszos jel effektív és középértéke között:

$$I_{eff} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot I_k$$

2.1.3. A váltakozó áramú hálózatok passzív áramköri elemei

a) Ellenállás

Az összefüggést váltakozó áramú áramkörbe kapcsolt ellenállás árama és feszültsége között most is az Ohm-törvény adja:

$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_{max}}{R} \cdot sin\omega t = I_{max} \cdot sin\omega t,$

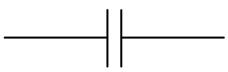
vagyis az ellenállás árama arányos a feszültséggel és a két mennyiség fázisban van egymással

b) Kondenzátor

A kondenzátor töltése arányos a rá kapcsolt feszültséggel, az arányossági tényező a kondenzátor kapacitása C [F, Farad]

$Q = C \cdot U \; [C]$

ahol Q a kondenzátor töltése.

A kondenzátor áramköri jele: 

Az összefüggés a kondenzátor árama és feszültsége között:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \frac{d(U_{max} \cdot sin\omega t)}{dt} = C \cdot \omega \cdot U_{max} \cdot cos\omega t$$
$$= I_{max} \cdot \sin(\omega t + 90^0)$$

ahol $\frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{1}{C \cdot \omega} = X_C \; [\Omega]$ az ún. *kapacitív reaktancia*

*(*A reaktancia reciprokát *szuszceptanciának* hívják, jele: B [1/Ω]

$B_C = C \cdot \omega$, *kapacitív szuszceptancia)*

A fenti összefüggésből látszik, hogy a kondenzátor árama 90^0-kal *siet* a feszültséghez képest.

c) Önindukciós tekercs, induktivitás

Váltakozó áramú tekercsben az áram hatására kialakuló váltakozó mágneses fluxus feszültséget, ún. önindukciós feszültséget hoz létre. Az önindukciós feszültség arányos az áram időbeli megváltozásával.

Az induktivitás áramköri jele: 

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{d(I_{max} \cdot \sin\omega t)}{dt} = L \cdot \omega \cdot I_{max} \cdot cos\omega t = U_{max} \cdot \sin(\omega t + 90^0)$$

ahol $\frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \omega \cdot L = X_L$ $[\Omega]$ az ún. *induktív reaktancia*

($B_L = \frac{1}{L \cdot \omega}$ $[\frac{1}{\Omega}]$, induktív szuszceptancia)

A fenti összefüggésből látszik, hogy az induktivitás árama 90^0-kal *késik* a feszültséghez képest.

2.1.4. Váltakozó áramú teljesítmény

A teljesítmény pillanatnyi értéke, ha a feszültség és az áram szinuszosan változó mennyiségek, amik nincsenek fázisban egymással:

$$P(t) = (U_{max} \cdot \sin\omega t)(I_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)) = 2 \cdot U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

A teljesítmény időbeli átlaga:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T 2 \cdot U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)\, dt = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$$

Ez a mennyiség az ún. *hatásos (wattos)* teljesítmény: $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$ $[W]$

A meddő teljesítmény: $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi$ $[var]$

A látszólagos teljesítmény: $S = U_{eff} \cdot I_{eff}\ [VA]$

A $\frac{P}{S} = cos\varphi$ értéket, ami a feszültség és az áram közötti fázisszög koszinusza, *teljesítménytényezőnek* nevezzük.

2.1.5. Komplex mennyiségek bevezetése

Szinuszos váltakozó áramú hálózatok számításánál a feszültség és áramértékeket komplex mennyiségként kezelve matematikailag lényegesen egyszerűbb összefüggéseket kapunk, mint ha az idő tartományban szögfüggvényekkel végeznénk a számításokat.

$u(t) = U_{max} \cdot \sin \omega t = Im[U_{max}(\cos\omega t + j \cdot \sin\omega t)] = Im\left[U_{max} \cdot e^{j\omega t}\right]$,

$i(t) = I_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Im[I_{max}(\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi)] = \quad = \left[I_{max} \cdot e^{j(\omega t+\varphi}\right]$,

ahol $j^2 = -1$ az imaginárius egység

A komplex feszültség és áram:

$\bar{u}(t) = U_{max} \cdot e^{j\omega t}$,

$\bar{\imath}(t) = I_{max} \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$

$\bar{u}$ és $\bar{\imath}$ komplex időfüggvények a komplex számsíkon ω szögsebességgel forgó U_{max} és I_{max} nagyságú forgó vektorok, melyek egy adott pillanatban a valós tengellyel ωt illetve ωt+φ szöget zárnak be.

t=0 időpontban rögzítve a komplex forgó vektorokat a komplex feszültség és a komplex áram amplitúdója a következő összefüggéssel definiálható:

$$\bar{U}_{max} = U_{max} \cdot e^{j\cdot 0} = U_{max}$$

$$\bar{I}_{max} = I_{max} \cdot e^{j\varphi}$$

A gyakorlatban az amplitúdó helyett az effektív értékét használjuk, a komplex effektív érték így:

$\bar{U} = \frac{\bar{U}_{max}}{\sqrt{2}} = U_{eff},\ \ \bar{I} = \frac{\bar{I}_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = I_{eff} \cdot e^{j\varphi}$

Ezeket a komplex számsíkon álló síkvektor ábrázolja, amit *fázornak* hívunk.

2.1.6. A komplex impedancia

A feszültséghez hasonlóan a váltakozó áramú hálózatok passzív elemeinek paramétereit is kezelhetjük komplex mennyiségekként. Ezeket összefoglaló néven komplex impedanciáknak nevezzük. Jele: Z [Ω]

Rezisztív impedancia (ellenállás):

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R} = \frac{U \cdot e^{j\omega t}}{R} = I \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = R = \bar{Z}_R$$

Kapacitív impedancia:

$$\bar{I} = C \cdot \frac{d\bar{U}}{dt} = C \cdot \frac{d\left(U \cdot e^{j\omega t}\right)}{dt} = C \cdot j \cdot \omega \cdot U \cdot e^{j\omega t} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \bar{U}$$

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -j \cdot X_C = \bar{Z}_C$$

Induktív impedancia:

$$\bar{U} = L \cdot \frac{d\bar{I}}{dt} = L \cdot \frac{d\left(I \cdot e^{j\omega t}\right)}{dt} = L \cdot j \cdot \omega \cdot I \cdot e^{j\omega t} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \bar{I}$$

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot X_L = \bar{Z}_L$$

A fenti összefüggésekből látható, komplex mennyiségek használatával az Ohm-törvény kiterjeszthető az induktív és kapacitív impedanciákra is.

Az általános Ohm-törvény:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

Komplex teljesítmény

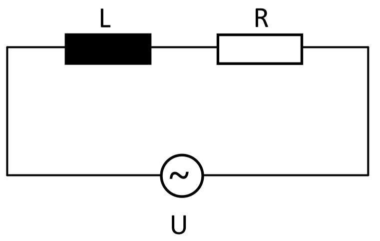
$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi + j \cdot U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi = P + j \cdot Q$$

2.2. Kidolgozott és gyakorló példák a váltakozó áramú áramkörök számításához

A következő részben öt részletesen kidolgozott és további 13 gyakorló példa található.

2.2.1. *50 Hz*-es szinuszosan váltakozó, *230 V* effektív feszültségű feszültségforrásra kapcsolunk sorosan egy ellenállást és egy indukciós tekercset. Számítsa ki az áramkör eredő komplex

impedanciáját, áramát, az ellenállás és a tekercs feszültségét, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt. Rajzolja fel a fázor ábrát!



U=230 V
f=50 Hz
L=1,432 H
R=300 Ω

2-4. ábra

(Megjegyzés: A továbbiakban az alsó index nélkül jelölt feszültség és áram érték az effektív értéket jelöli.)

A induktív impedancia:

$$Z_L = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot f \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1{,}432 = j \cdot 450\ \Omega$$

Ez egy olyan komplex mennyiség, melynek csak képzetes koordinátája van. A komplex számsíkon ábrázolva a képzetes tengelyen helyezkedik el. Exponenciális alakban felírva:

$$Z_L = 450 \cdot e^{j \cdot 90^0}\Omega$$

A rezisztív impedancia:

$$Z_R = R = 300\Omega$$

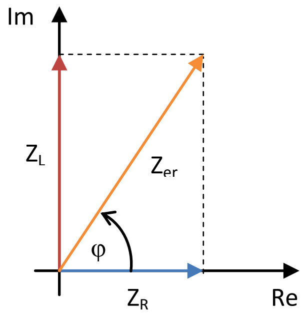
Ez egy olyan komplex mennyiség, melynek csak valós koordinátája van.

Exponenciális írásmóddal:

$$Z_R = 300 \cdot e^{j \cdot 0^0}\Omega$$

Az eredő impedancia kiszámítására az egyenáramú hálózatoknál az ellenállásokra felírt összefüggések érvényesek, de természetesen itt a komplex mennyiségekre vonatkozó szabályokat kell figyelembe venni. Vagyis sorba kapcsolt komplex impedanciák eredője az egyes impedanciák összegével egyenlő. Párhuzamos kapcsolás esetén az eredő impedancia reciproka egyenlő az egyes impedanciák reciprokának összegével.

Az impedanciák ábrázolása a komplex számsíkon:



$$Z_{er} = Z_R + Z_L = (300 + 450 \cdot j)\Omega$$

$$|Z_{er}| = \sqrt{|Z_R|^2 + |Z_L|^2} = \sqrt{300^2 + 450^2} = 540{,}83\Omega$$

$$\varphi = \text{artg}\frac{Im(Z_{er})}{Re(Z_{er})} = \text{artg}\frac{450}{300} = 56{,}3^0$$

$$Z_{er} = 540{,}83 \cdot e^{j \cdot 56{,}3^0}\ \Omega$$

2-5. ábra

Az áramkör árama:

(A számításoknál a feszültségforrás feszültségének fázisszögét 0-nak vesszük, ehhez viszonyítjuk a többi mennyiség fázisszögét)

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{er}} = \frac{230 \cdot e^{j \cdot 0^0}}{540 \cdot e^{j \cdot 56{,}3^0}} = 0{,}4252 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)}\ A$$

A fenti számításból látszik, hogy a komplex mennyiségekkel való számolással nemcsak az áram effektív értékét kaptuk meg (I=0,4252 A), hanem a feszültség és az áram közötti fázisszöget is ($\varphi = -56{,}3^0$). A mínusz előjel azt jelenti, hogy az áram *késik* a feszültséghez képest.

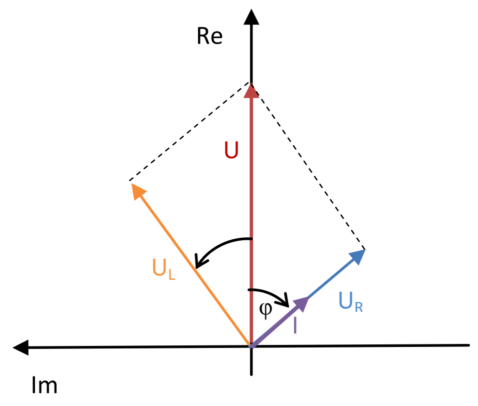
Az ellenálláson eső feszültség:

$$U_R = I \cdot Z_R = 0{,}4252 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)} \cdot 300 = 127{,}58 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)} V$$

Az induktivitáson eső feszültség:

$$U_L = I \cdot Z_L = 0{,}4252 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)} \cdot 450 \cdot e^{j \cdot 90^0} = 191{,}34 \cdot e^{j \cdot (33{,}7^0)} V$$

A feszültségek és áramok nagyságát és fázis viszonyait az ún. *fázorábrán* szemléltetjük. A fázorábra a komplex számsíkon ábrázolja a kérdéses mennyiségeket, úgy, hogy a 0 fázisszögű feszültség effektív értékét mérjük a függőleges tengelyre, ami ebben az esetben a *valós* tengelyt jelenti. (Olyan, mintha a komplex számsík valós és képzetes tengelyeit óramutató járásával ellentétesen 90 fokkal elfordítanánk.) A pozitív szögeket a valós tengelytől óramutató járásával ellentétesen, a negatív szögeket az óramutató járásával megegyező irányban mérjük fel.



2-6. ábra

A hatásos teljesítmény megegyezik az ellenállás teljesítményével:

$P = U \cdot I \cdot cos\varphi = 230 \cdot 0{,}4252 \cdot \cos 56{,}3^0 = 54{,}26\, W$

$P_R = U_R \cdot I_R = 127{,}58 \cdot 0{,}4252 = 54{,}26\, W = P$

A meddő teljesítmény megegyezik a tekercs teljesítményével:

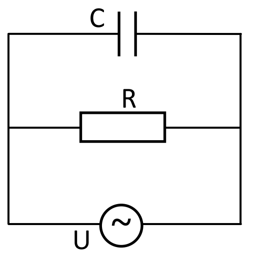
$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 230 \cdot 0{,}4252 \cdot \sin 56{,}3^0 = 81{,}36\, var$

$P_L = U_L \cdot I_L = 191{,}34 \cdot 0{,}4252 = 81{,}36\, var$

A látszólagos teljesítmény:

$S = U \cdot I = 230 \cdot 0{,}4252 = 97{,}796\, VA$

2.2.2. ***100 Hz-es*** szinuszosan váltakozó, ***100 V*** effektív feszültségű feszültségforrásra kapcsolunk párhuzamosan egy ellenállást és egy kondenzátort. Számítsa ki az áramkör eredő komplex impedanciáját, áramát, az ellenállás és a kondenzátor áramát, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt. Rajzolja fel a fázor ábrát!



U=100 V
f=100 Hz
C=9,947µF
R=120 Ω

2-7. ábra

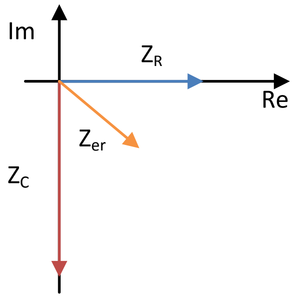
A kapacitív és a rezisztív impedancia:

$$Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 9{,}947 \cdot 10^{-6}} = -160j\ \Omega$$
$$= 160 \cdot e^{j\cdot(-90^0)}\Omega$$

$$Z_R = 120\ \Omega = 120 \cdot e^{j\cdot 0^0}\Omega$$

Az eredő impedancia:

$$Z_{er} = \frac{1}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}} = \frac{Z_R \cdot Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{120 \cdot (-160j)}{120 - 160j} = \frac{3 \cdot (-160j)}{3 - 4j} = \frac{-480j \cdot (3 + 4j)}{25}$$
$$= -19{,}2j \cdot (3 + 4j) = (76{,}8 - 57{,}6j)\Omega = 96 \cdot e^{j\cdot(-36{,}87^0)}\Omega$$



2-8. ábra

Az áramkör árama:

$$I = \frac{U}{Z_{er}} = \frac{100}{96 \cdot e^{j\cdot(-36{,}78)}} = 1{,}0467 \cdot e^{j\cdot 36{,}78^0} A$$

Az ellenállás árama:

$I_R = \frac{U}{Z_R} = \frac{100\cdot e^{j\cdot 0^0}}{120\cdot e^{j\cdot 0^0}} = 0{,}833\ \Omega$, tehát az áram és a feszültség fázisban vannak egymással

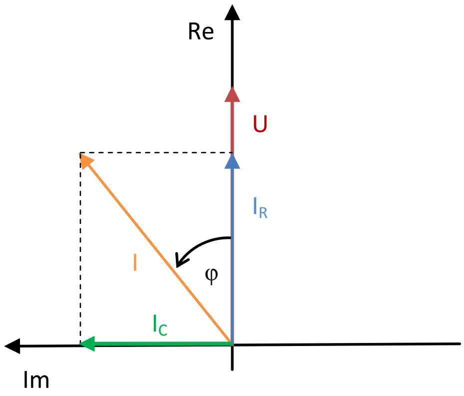
A kondenzátor árama:

$I_C = \frac{U}{Z_C} = \frac{100\cdot e^{j\cdot 0^0}}{160\cdot e^{j\cdot(-90^0)}} = 0{,}625 \cdot e^{j\cdot 90^0} A = j \cdot 0{,}625\ A$, tehát az áram 90^0-kal siet a feszültséghez képest.

Az áramkör áramát Kirchoff csomóponti törvényéből is megkaphatjuk:

$$I = I_R + I_C = 0{,}833 + j \cdot 0{,}625 = 1{,}0467 \cdot e^{j\cdot 36{,}78^0} A$$

Az áramkör fázorábrája:



2-9. ábra

A hatásos teljesítmény megegyezik az ellenállás teljesítményével:

$P = U \cdot I \cdot cos\varphi = 100 \cdot 1{,}0467 \cdot \cos 36{,}78^0 = 83{,}3\ W$

$P_R = U_R \cdot I_R = 100 \cdot 0{,}833 = 54{,}26\ W = P$

A meddő teljesítmény megegyezik a kondenzátor teljesítményével:

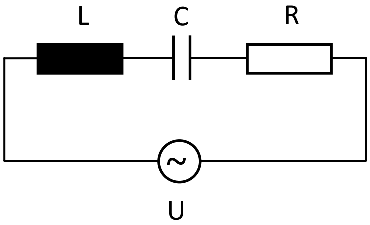
$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 100 \cdot 1{,}0467 \cdot \sin 36{,}78^0 = 62{,}5\ var$

$P_C = U_C \cdot I_C = 100 \cdot 0{,}625 = 62{,}5\ var$

A látszólagos teljesítmény:

$S = U \cdot I = 100 \cdot 1{,}0467 = 104{,}67\ VA$

2.2.3. *150 Hz*-es szinuszosan váltakozó, *15 V* effektív feszültségű feszültségforrásra kapcsolunk sorosan egy ellenállást, egy indukciós tekercset és egy kondenzátort. Számítsa ki az áramkör eredő komplex impedanciáját, áramát, az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor feszültségét, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt. Rajzolja fel a fázor ábrát! Számítsa ki az áramkör saját frekvenciáját!



U=15 V
f=150 Hz
L=26,53 mH
R=10 Ω
C=106 μF

2-10. ábra

A induktív, a kapacitív és a rezisztív impedancia:

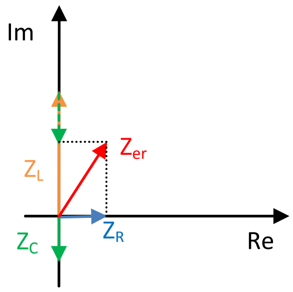
$$Z_L = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot f \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot 150 \cdot 26{,}53 \cdot 10^{-3} = 25j = 25 \cdot e^{j \cdot 90^0}\ \Omega$$

$$Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 150 \cdot 106 \cdot 10^{-6}} = -10j = 10 \cdot e^{j \cdot (-90^0)} \Omega$$

$$Z_R = 10\ \Omega = 10 \cdot e^{j \cdot 0^0} \Omega$$

Az eredő impedancia:

$$Z_{er} = Z_R + Z_L + Z_C = 10 + 25j - 10j = (10 + 15j)\Omega = 18{,}027 \cdot e^{j \cdot 56{,}3^0}$$



2-11. ábra

Az áramkör árama:

$$I = \frac{U}{Z_{er}} = \frac{15}{18{,}027 \cdot e^{j \cdot 56{,}3^0}} = 0{,}832 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)}$$

A tekercs, a kondenzátor és az ellenállás feszültsége:

$$U_L = I \cdot Z_L = 0{,}832 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)} \cdot 25 \cdot e^{j \cdot 90^0} = 20{,}8 \cdot e^{j \cdot (33{,}7^0)} V$$

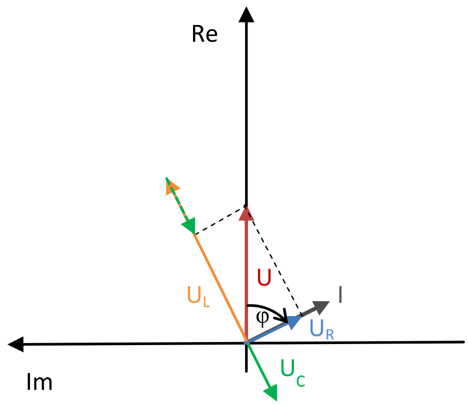
$$U_C = I \cdot Z_C = 0{,}832 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)} \cdot 10 \cdot e^{j \cdot (-90^0)} = 8{,}32 \cdot e^{j \cdot (-146{,}3^0)} V$$

$$U_R = I \cdot Z_R = 0{,}832 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)} \cdot 10 \cdot e^{j \cdot 0^0} = 8{,}32 \cdot e^{j \cdot (-56{,}3^0)} V$$

Kirchoff huroktörvénye a komplex mennyiségként értelmezett feszültségekre is érvényes, így

$$U = U_L + U_C + U_R$$

Ezt, illetve az áramot a fázorábrában ábrázolhatjuk:



2-12. ábra

A hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítmény:

$P = U \cdot I \cdot cos\varphi = 15 \cdot 0{,}832 \cdot \cos 56{,}3^0 = 6{,}922\ W,$ ami megegyezik az ellenállás teljesítményével: $P_R = U_R \cdot I = 8{,}32 \cdot 0{,}832 = 6{,}922\ W$

$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 15 \cdot 0{,}832 \cdot \sin 56{,}3^0 = 10{,}382\ var,$ ami meggyezik a tekercs és a kondenzátor teljesítményének különbségével:

$P_C = U_C \cdot I = 8{,}32 \cdot 0{,}832 = 6{,}922\ W,\ P_L = U_L \cdot I = 20{,}8 \cdot 0{,}832 = 17{,}3\ W$

A látszólagos teljesítmény:

$S = U \cdot I = 15 \cdot 0{,}832 = 12{,}48\ VA$

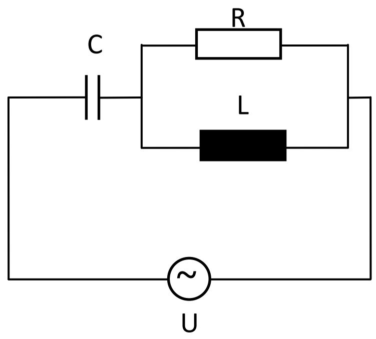
A saját frekvencia kisámítása:

Az eredő impedancia képletéből $Z_{er} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ látszik, hogy létezik egy olyan ω körfrekvencia (vagy f frekvencia), amelynél az impedancia képzetes része 0, az áramkör áramát csak az ellenállás határozza meg. Ezt a frekvenciát nevezik *saját frekvenciának*, kiszámítását megadó összefüggést *Thomson-képletnek*:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}};\ f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{26{,}53 \cdot 10^{-3} \cdot 10{,}6 \cdot 10^{-3}}} = 9{,}49\ Hz$$

2.2.4. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát, a kondenzátor és a párhuzamos tag feszültségét, az ellenállás és a tekercs áramát, rajzolja fel a fázor ábrát!



U=230 V
f=50 Hz
L=1,274 H
R=500 Ω
C=31,83 μF

2-13. ábra

Az elemek komplex impedanciája:

$$Z_L = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot f \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1{,}274 = 400j = 400 \cdot e^{j \cdot 90^0}\ \Omega$$

$$Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 31{,}83 \cdot 10^{-6}} = -100j$$
$$= 100 \cdot e^{j \cdot (-90^0)} \Omega$$

$$Z_R = 500\ \Omega = 500 \cdot e^{j \cdot 0^0} \Omega$$

Az eredő impedancia:

$$Z_{er} = Z_C + (Z_R \times Z_L) = Z_C + \frac{Z_R \cdot Z_L}{Z_R + Z_L} = -100j + \frac{500 \cdot (400j)}{500 + 400j} = -100j + \frac{2000j}{5 + 4j}$$
$$= -100j + \frac{2000j \cdot (5 - 4j)}{25 + 16} = -100j + 195{,}12 + 243{,}9j$$
$$= (195{,}12 + 143{,}9j)\Omega = 242{,}44 \cdot e^{j \cdot 36{,}4} \Omega$$

Az áramkör árama:

$$I = \frac{U}{Z_{er}} = \frac{230}{242{,}44 \cdot e^{j \cdot 36{,}4}} = 0{,}949 \cdot e^{j \cdot (-36{,}4^0)} A$$

A kondenzátor feszültsége:

$$U_C = I \cdot Z_C = 0{,}949 \cdot e^{j \cdot (-36{,}4^0)} \cdot 100 \cdot e^{j \cdot (-90^0)} = 94{,}9 \cdot e^{j \cdot (-126{,}4^0)} V$$

A tekercs és az ellenállás áramának kiszámításához felírhatjuk az áramosztás törvényét hasonlóképpen, mint az egyenáramú hálózatoknál, csak ellenállások helyett impedanciákra:

$$I_R = I \cdot \frac{Z_L}{Z_R + Z_L},\ I_L = I \cdot \frac{Z_R}{Z_R + Z_L}$$

$$I = I_R + I_L$$

Először számítsuk ki a törteket:

$$\frac{Z_L}{Z_R+Z_L}=\frac{400j}{500+400j}=\frac{4j}{5+4j}=\frac{4j\cdot(5-4j)}{41}=0{,}39+0{,}49j=0{,}626\cdot e^{j\cdot 51{,}48^0}$$

$$\frac{Z_R}{Z_R+Z_L}=\frac{500}{500+400j}=\frac{5}{5+4j}=\frac{5\cdot(5-4j)}{41}=0{,}61-0{,}49j=0{,}782\cdot e^{j\cdot(-38{,}77^0)}$$

$$I_R=I\cdot\frac{Z_L}{Z_R+Z_L}=0{,}949\cdot e^{j\cdot(-36{,}4^0)}\cdot 0{,}626\cdot e^{j\cdot 51{,}48^0}=0{,}594\cdot e^{j\cdot 15^0}$$

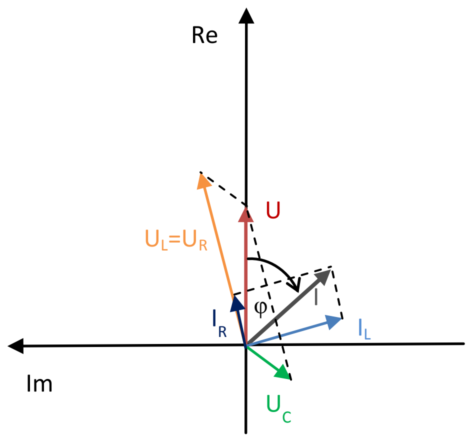
$$I_L=I\cdot\frac{Z_R}{Z_R+Z_L}=0{,}949\cdot e^{j\cdot(-36{,}4^0)}\cdot 0{,}782\cdot e^{j\cdot(-38{,}77^0)}=0{,}742\cdot e^{j\cdot(-75^0)}$$

A két párhuzamos ág feszültsége természetesen megegyezik, ellenőrzésként számoljuk ki mindkettőt!

$U_R=I_R\cdot Z_R=0{,}594\cdot e^{j\cdot 15^0}\cdot 500=297\cdot e^{j\cdot 15^0}$

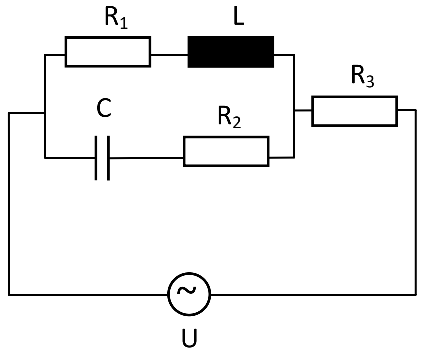
$U_L=I_L\cdot Z_L$=$0{,}742\cdot e^{j\cdot(-75^0)}\cdot 400\cdot e^{j\cdot 90^0}=297\cdot e^{j\cdot 15^0}$

Végül rajzoljuk fel a fázor ábrát:



2-14. ábra

2.2.5. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát, az egyes elemek feszültségét, a párhuzamos ágak áramát, rajzolja fel a fázor ábrát!



U=24 V
f=80 Hz
L=0,159 H
C=33,16 μF
R_1=10 Ω
R_2=20 Ω
R_3=5 Ω

2-15. ábra

A komplex impedanciák:

$$Z_L = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot f \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot 80 \cdot 0{,}159 = 80j = 80 \cdot e^{j \cdot 90^0}\ \Omega$$

$$Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 80 \cdot 33{,}16 \cdot 10^{-6}} = -60j = 60 \cdot e^{j \cdot (-90^0)} \Omega$$

$$Z_{R1} = 10\ \Omega = 10 \cdot e^{j \cdot 0^0} \Omega$$

$$Z_{R2} = 20\ \Omega = 20 \cdot e^{j \cdot 0^0} \Omega$$

$$Z_{R3} = 5\ \Omega = 5 \cdot e^{j \cdot 0^0} \Omega$$

Az eredő impedancia:

$$Z_{er} = [(Z_{R1} + Z_L) \times (Z_{R2} + Z_C)] + Z_{R3} = \frac{(Z_{R1} + Z_L) \cdot (Z_{R2} + Z_C)}{(Z_{R1} + Z_L) + (Z_{R2} + Z_C)} + Z_{R3}$$

$$Z_{RL} = Z_{R1} + Z_L = (10 + 80j)\Omega = 80{,}62 \cdot e^{j \cdot 82{,}87^0} \Omega$$

$$Z_{RC} = Z_{R2} + Z_C = (20 - 60j)\Omega = 63{,}25 \cdot e^{j \cdot (-71{,}565)} \Omega$$

$$\begin{aligned} Z_{RL} \times Z_{RC} &= \frac{(10 + 80j) \cdot (20 - 60j)}{10 + 80j + 20 - 60j} = \frac{(10 + 80j) \cdot (20 - 60j)}{30 + 20j} \\ &= \frac{(1 + 8j) \cdot (20 - 60j)}{3 + 2j} = \frac{500 + 100j}{3 + 2j} = \frac{(500 + 100j) \cdot (3 - 2j)}{9 + 4} \\ &= 130{,}77 - 53{,}846j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{er} &= (Z_{RL} \times Z_{RC}) + Z_{R3} = 130{,}77 - 53{,}846j + 5 = 135{,}77 - 53{,}846j \\ &= 146{,}06 \cdot e^{j \cdot (-21{,}633^0)} \Omega \end{aligned}$$

Az áramkör árama:

$$I = \frac{U}{Z_{er}} = \frac{24}{146{,}06 \cdot e^{j \cdot (-21{,}633^0)}} = 0{,}1643 \cdot e^{j \cdot 21{,}63^0} A$$

R_3 ellenállás feszültsége:

$$U_{R3} = I \cdot Z_{R3} = 0{,}1643 \cdot e^{j \cdot 21{,}63^0} \cdot 5 = 0{,}8215 \cdot e^{j \cdot 21{,}63^0} V$$

Az áramosztás törvényével számoljuk ki a párhuzamos ágak áramát:

$$I_{RL} = I \cdot \frac{Z_{RC}}{Z_{RL} + Z_{RC}}, \quad I_{RC} = I \cdot \frac{Z_{RL}}{Z_{RL} + Z_{RC}}$$

$$\frac{Z_{RC}}{Z_{RL} + Z_{RC}} = \frac{20 - 60j}{10 + 80j + 20 - 60j} = \frac{20 - 60j}{30 + 20j} = \frac{2 - 6j}{3 + 2j} = \frac{(2 - 6j) \cdot (3 - 2j)}{9 + 4}$$
$$= -0{,}46 - 1{,}69j = 1{,}751 \cdot e^{j \cdot 254{,}77^0}$$

(Megjegyzés: Mivel a fenti komplex szám mindkét koordinátája negatív, a komplex számsíkon ábrázolva a 3. síknegyedben helyezkedik el, a valós tengellyel bezárt szöge ezért 254,77^0, vagy ha negatív irányban, óramutató járásával megegyező irányban számoljuk, akkor -105,23^0.)

$$\frac{Z_{RL}}{Z_{RL} + Z_{RC}} = \frac{10 + 80j}{30 + 20j} = \frac{1 + 8j}{3 + 2j} = \frac{(1 + 8j) \cdot (3 - 2j)}{13} = 1{,}46 + 1{,}69j$$
$$= 2{,}233 \cdot e^{j \cdot 49{,}18^0}$$

$$I_{RL} = I \cdot \frac{Z_{RC}}{Z_{RL} + Z_{RC}} = 0{,}1643 \cdot e^{j \cdot 21{,}63^0} \cdot 1{,}751 \cdot e^{j \cdot 254{,}77^0} = 0{,}288 \cdot e^{j \cdot 276{,}4^0}$$
$$= 0{,}288 \cdot e^{j \cdot (-83{,}6^0)} A$$

$$I_{RC} = I \cdot \frac{Z_{RL}}{Z_{RL} + Z_{RC}} = 0{,}1643 \cdot e^{j \cdot 21{,}63^0} \cdot 2{,}233 \cdot e^{j \cdot 49{,}18^0} = 0{,}367 \cdot e^{j \cdot 70{,}81^0} A$$

A párhuzamos ágak feszültsége:

$$U_{RL} = U_{RC} = I_{RC} \cdot Z_{RC} = I_{RL} \cdot Z_{RL}$$

$$U_{RL} = 0{,}288 \cdot e^{j \cdot (-83{,}6^0)} \cdot 80{,}62 \cdot e^{j \cdot 82{,}87^0} = 23{,}2 \cdot e^{j \cdot (-0{,}73^0)}$$

$$U_{RC} = 0{,}367 \cdot e^{j \cdot 70{,}81^0} \cdot 63{,}25 \cdot e^{j \cdot (-71{,}565)} = 23{,}2 \cdot e^{j \cdot (-0{,}75^0)}$$

(A két érték közötti különbség a számolás során alkalmazott kerekítések pontatlanságának eredménye.)

A két párhuzamos ág elemeinek feszültsége:

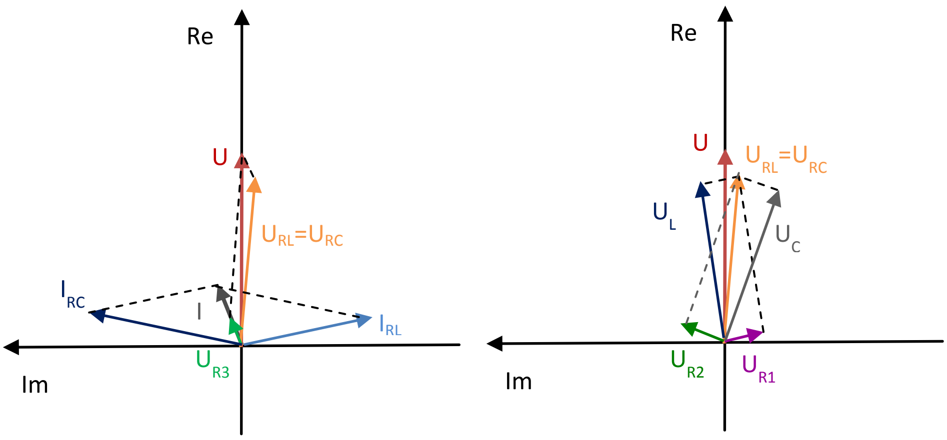
$$U_{R1} = I_{RL} \cdot Z_{R1} = 0{,}288 \cdot e^{j \cdot (-83{,}6^0)} \cdot 10 = 2{,}88 \cdot e^{j \cdot (-83{,}6^0)} V$$

$$U_L = I_{RL} \cdot Z_L = 0{,}288 \cdot e^{j \cdot (-83{,}6^0)} \cdot 80 \cdot e^{j \cdot 90^0} = 23{,}04 \cdot e^{j \cdot 6{,}4^0} V$$

$$U_{R2} = I_{RC} \cdot Z_{R2} = 0{,}367 \cdot e^{j \cdot 70{,}81^0} \cdot 20 = 7{,}34 \cdot e^{j \cdot 70{,}81^0} V$$

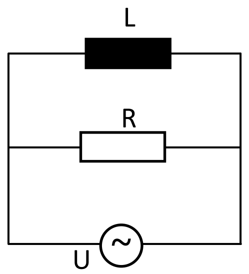
$$U_C = I_{RC} \cdot Z_C = 0{,}367 \cdot e^{j \cdot 70{,}81^0} \cdot 60 \cdot e^{j \cdot (-90^0)} = 22{,}02 \cdot e^{j \cdot (-19{,}2^0)} V$$

A fázor ábrát a jobb áttekinthetőség érdekében két részletben rajzoljuk fel:



2-16. ábra

2.2.6. ***100 Hz*-es szinuszosan váltakozó, *9 V* effektív feszültségű feszültségforrásra kapcsolunk párhuzamosan egy ellenállást és egy indukciós tekercset. Számítsa ki az áramkör eredő komplex impedanciáját, áramát, a feszültség és az áram közötti fázisszöget, az ellenállás és a tekercs áramát, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt. Rajzolja fel a fázor ábrát!**



U=9 V
f=100 Hz
L=79,6 mH
R=40 Ω

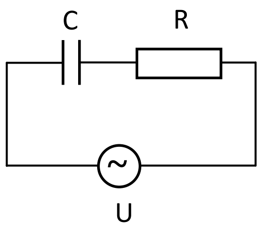
2-17. ábra

(Megoldások: $I_R = 0{,}255\ A$; $I_L = 0{,}18\ A$; $\varphi_L = -90^0$; $I = 0{,}288\ A$; $\varphi = 38{,}66^0$,

$Z_{er} = 31{,}23 \cdot e^{j\cdot 38{,}66^0}\Omega$; $P = 2{,}024\ W$; $Q = 1{,}619\ var$; $S = 2{,}592\ VA$*)*

2.2.7. ***50Hz*-es, szinuszosan váltakozó, *400 V* effektív feszültségű feszültségforrásra kapcsolunk sorosan egy ellenállást és egy kondenzátort. Számítsa ki az áramkör eredő komplex**

impedanciáját, áramát, az áram és a feszültség közötti fázisszöget, az ellenállás és a kondenzátor feszültségét, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt. Rajzolja fel a fázor ábrát!



U=400 V
f=50 Hz
R=200 Ω
C=31,83 μF

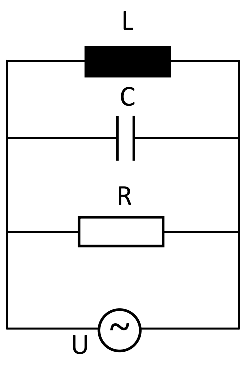
2-18. ábra

(*Megoldások:* $I = 1{,}79\ A; \varphi = 26{,}565^0$;

$U_R = 357{,}78\ V;\ \varphi_R = 26{,}565^0;\ \ U_C = 179;\ \ \varphi_C = -63{,}4^0$;

$Z_{er} = 223{,}6 \cdot e^{j\cdot(-26{,}565^0)}\Omega;\ \ P = 640{,}41\ W;\ \ Q = 320{,}2\ var;\ \ S = 716\ VA$)

2.2.8. ***60Hz*-es szinuszosan váltakozó, *110V* effektív feszültségű feszültségforrásra kapcsolunk párhuzamosan egy ellenállást, egy indukciós tekercset és egy kondenzátort. Számítsa ki az áramkör eredő komplex impedanciáját, áramát, fázisszögét, az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor áramát, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt. Rajzolja fel a fázor ábrát! Számítsa ki az áramkör saját frekvenciáját!**



U=110 V
f=60 Hz
C=88,42μF
L=53,05 mH
R=50 Ω

2-19. ábra

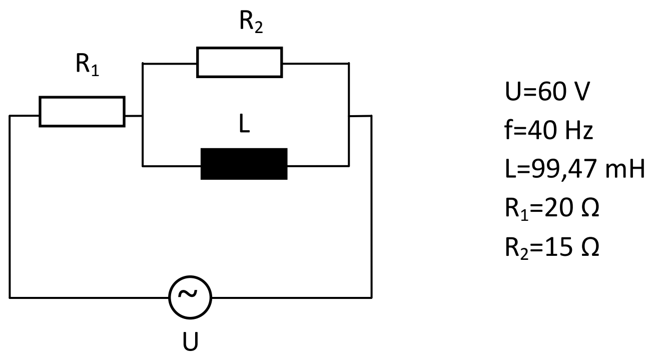
(*Megoldások:* $I_R = 2{,}2\ A;\ I_L = 5{,}5\ A;\ \varphi_L = -90^0;\ \ I_C = 3{,}667\ A;\ \varphi_C = 90^0$;

$I = 2{,}86\ A; \varphi = -39{,}8^0$

$Z_{er} = 38{,}4 \cdot e^{j\cdot 39{,}8^0}\Omega;\ \ P = 241{,}7\ W;\ \ Q = 201{,}38\ var;\ \ S = 314{,}6\ VA$

$\varphi_0 = 73{,}48\ Hz$

2.2.9. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát, fázisszögét, az R_1 ellenállás és a párhuzamos tag feszültségét, az R_2 ellenállás és az L induktivitás áramát, rajzolja fel a fázor ábrát!



2-20. ábra

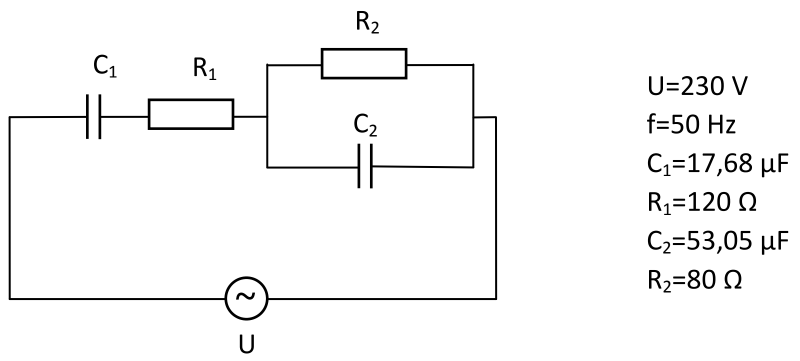
(Megoldások: $Z_{er} = 31{,}72 \cdot e^{j \cdot 12^0}\Omega;\ I = 1{,}89\ A;\ \varphi = -12^0;$

$U_{R1} = 37{,}89\ V;\ \varphi_{R1} = -12^0;\ U_{R2} = U_L = 24{,}2\ V;\ \varphi_{RL} = 19^0$

$I_{R2} = 1{,}62\ A;\ \varphi_{R2} = 19^0;\ I_L = 0{,}971\ A; \varphi_L = -71^0$

$P = 110{,}92\ W;\ Q = 23{,}58\ var;\ S = 113{,}4VA$)

2.2.10. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, C_1 kondenzátor, R_1 ellenállás és a párhuzamos tag feszültségét, az R_2 ellenállás és C_2 kondenzátor áramát, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt és rajzolja fel a fázor ábrát!



2-21. ábra

(Megoldások: $Z_{er} = 264{,}27 \cdot e^{j \cdot (-55{,}73^0)}\Omega;\ I = 0{,}87\ A;\ \varphi = 55{,}73^0;$

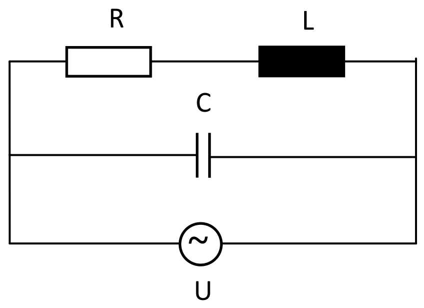
$U_{R1} = 104{,}44\ V;\ \varphi_{R1} = 55{,}73^0\ ;\ U_{C1} = 156{,}66\ V;\ \varphi_{C1} = -34{,}2^0;$

$I_{R2} = 0{,}522\ A;\ \varphi_{R2} = 2{,}6^0;\ \ I_{C2} = 0{,}696\ A;\ \varphi_{C2} = 92{,}6^0$

$U_{R2C2} = 41{,}6\ V;\ \varphi_{R2C2} = 2{,}6^0$

$P = 112{,}68\ W;\ Q = 165{,}36\ var;\ S = 200{,}1\ VA$

2.2.11. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, a két párhuzamos ág áramát, az ellenállás és tekercs feszültségét, rajzolja fel a fázor ábrát!



U=50 V
f=1 kHz
L=4,77 mH
C=3,18 µF
R=20 Ω

2-22. ábra

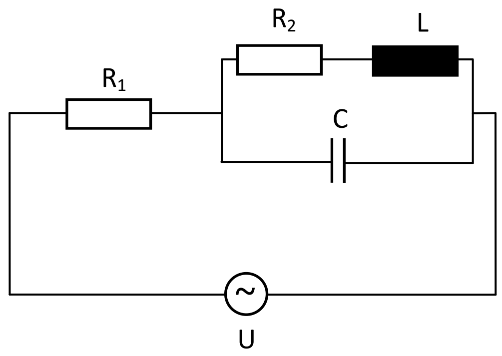
(*Megoldások:* $Z_{er} = 63{,}74 \cdot e^{j\cdot 11{,}31^0}\,\Omega;\ \ I = 0{,}784\ A;\ \varphi = -11{,}3^0;$

$I_C = 1\ A;\ \varphi_C = 90^0;\ \ I_{RL} = 1{,}387\ A;\ \varphi_{RL} = -56{,}31^0;$

$U_R = 27{,}74\ V;\ \varphi_R = -56{,}31^0;\ \ U_L = 41{,}61\ V;\ \varphi_L = 33{,}69^0$

$P = 38{,}46\ W;\ Q = 7{,}685\ var;\ S = 39{,}225\ VA$

2.2.12. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, az ellenállás és a párhuzamos tag feszültségét, a párhuzamos ágak áramait, az R_2 ellenállás és az induktivitás feszültségét, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt és rajzolja fel a fázor ábrát!



U=10 V
f=500 Hz
L=6,366 mH
R_1=5 Ω
C_2=21,22 µF
R_2=10Ω

2-23. ábra

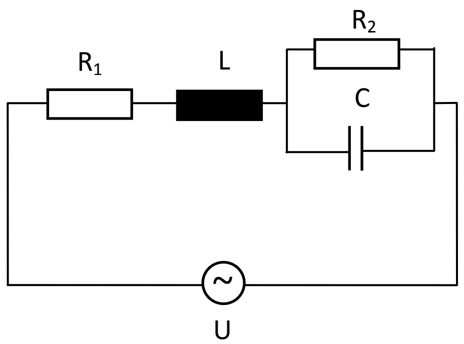
(Megoldások: $Z_{er} = 33{,}24 \cdot e^{j\cdot(-46{,}2^0)}\Omega$; $I = 0{,}3\,A$; $\varphi = 46{,}2^0$,

$U_{R1} = 1{,}5\,V$; $\varphi_{R1} = 46{,}2^0$; $I_C = 0{,}6A$; $\varphi_C = 83{,}1^0$; $I_{RL} = 0{,}402\,A$; $\varphi_{RL} = -70{,}4^0$;

$U_{R2} = 4{,}2\,V, \varphi_{R2} = -70{,}4^0$; $U_L = 8{,}04\,V$; $\varphi_L = 19{,}6^0$

$P = 2{,}076W; Q = 2{,}165\,var$; $S = 3\,VA$

2.2.13. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, az R_1 ellenállás, az induktivitás és a párhuzamos tag feszültségét, a párhuzamos ágak áramait, a hatásos, a látszólagos és a meddő teljesítményt és rajzolja fel a fázor ábrát!



U=10 V
f=1 kHz
L=0,238 H
R_1=2 kΩ
C_2=53,05 nF
R_2=1 kΩ

2-24. ábra

(Megoldások: $Z_{er} = 3{,}14 \cdot e^{j\cdot 22{,}5^0} k\Omega$; $I = 3{,}18\,mA$; $\varphi = -22{,}5^0$;

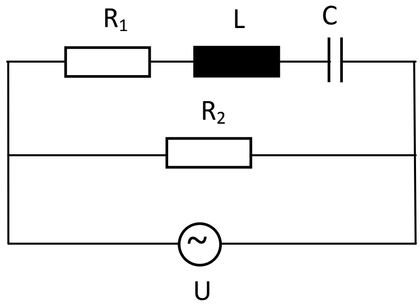
$U_{R1} = 6{,}37\,V$; $\varphi_{R1} = -22{,}5^0$; $U_L = 4{,}78\,V$; $\varphi_L = 67{,}5^0$;

$I_{R2} = 3{,}025\,mA$; $\varphi_{R2} = -40{,}9^0$; $I_C = 1{,}019\,mA$; $\varphi_C = 49{,}1^0$;

$U_{RC} = 3{,}025\,V$; $\varphi_{RC} = -40{,}9^0$;

$P = 29{,}42mW$; $Q = 12{,}18 \cdot 10^{-3}\,var$; $S = 31{,}85 \cdot 10^{-3}\,VA$

2.2.14. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát, fázisszögét, a két párhuzamos ág áramát, az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor feszültségét, a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt és rajzolja fel a fázor ábrát!



U=230 V
f=50 Hz
L=1,273 H
C=5,305 μF
R_1=250 Ω
R_2=400 Ω

2-25. ábra

(*Megoldások:* $Z_{er} = 188{,}3 \cdot e^{j\cdot(-21{,}55^0)}\Omega$; $I = 1{,}22\ A$; $\varphi = 21{,}55^0$;

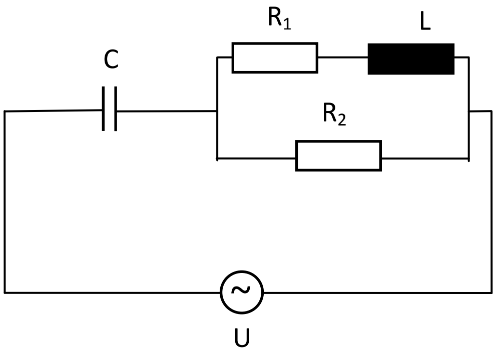
$I_{R2} = 0{,}575\ A$; $\varphi_{R2} = 0^0$; $I_{RLC} = 0{,}719\ A$; $\varphi_{RLC} = 38{,}66^0$;

$U_{R1} = 179{,}69\ V$; $\varphi_{R1} = 38{,}66^0$; $U_L = 287{,}5\ V$; $\varphi_L = 128{,}66^0$;

$U_C = 431{,}25\ V$; $\varphi_C = -51{,}34^0$

$P = 260{,}99\ W$; $Q = 103{,}07\ var$; $S = 280{,}6\ VA$)

2.2.15. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, a kondenzátor és a párhuzamos tag feszültségét, a párhuzamos ágak áramait, az R ellenállás és az induktivitás feszültségét, rajzolja fel a fázor ábrát!



U=110 V
f=60 Hz
C=8,84 μF
R_1=400 Ω
L=0,796 H
R_2=500Ω

2-26. ábra

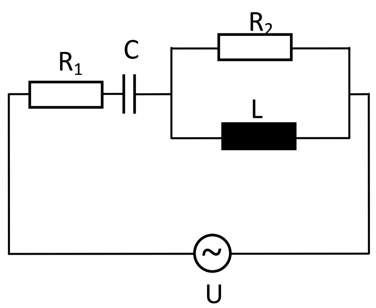
(*Megoldások:* $Z_{er} = 330{,}82 \cdot e^{j\cdot(-40{,}9^0)}\Omega$; $I = 0{,}33\ A$; $\varphi = 40{,}9^0$;

$U_C = 99{,}75\ V$; $\varphi_C = -49{,}1^0$; $I_{R2} = 0{,}176A$; $\varphi_{R2} = 53{,}3^0$; $I_{RL} = 0{,}176\ A$; $\varphi_{RL} = 22{,}5^0$;

$U_{R1} = 70,4\,V;\ \varphi_{R1} = 22,5^0;\ \ U_L = 52,8\,V;\ \varphi_L = 112,5^0$

$P = 27,45\,W; Q = 23,77\,var;\ S = 36,3\,VA$

2.2.16. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, az R$_1$ ellenállás, a kondenzátor és a párhuzamos tag feszültségét, a párhuzamos ágak áramait, a hatásos, a látszólagos és a meddő teljesítmény és rajzolja fel a fázor ábrát!



U=24 V
f=80 Hz
R_1=20 Ω
R_2=50 Ω
C=33,16 μF
L=159 mH

2-27. ábra

(*Megoldások:* $Z_{er} = 67,37 \cdot e^{j\cdot(-33,85^0)}\Omega;\ \ I = 0,356\,A;\ \varphi = 33,85^0;$

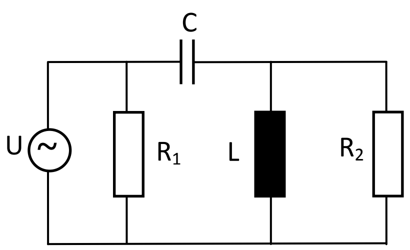
$U_{R1} = 7,125\,V;\ \varphi_{R1} = 33,85^0;\ \ U_C = 21,375\,V;\ \varphi_C = -56,15^0;$

$I_{R2} = 0,3\,A;\ \varphi_{R2} = 65,85^0\ ;\ \ I_L = 0,189\,A, \varphi_L = -24,5^0;$

$U_{R2} = U_L = 15\,V;\ \varphi_{R2L} = 65,85^0;$

$P = 10,56W;\ Q = 7,085\,var;\ S = 12,72\,VA$

2.2.17. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, az R$_1$ ellenállás, a kondenzátor és a párhuzamos ágak áramát, a kondenzátor és a párhuzamos tag feszültségét, a hatásos, a látszólagos és a meddő teljesítmény és rajzolja fel a fázor ábrát!



U=12 V
f=100 Hz
R_1=20 Ω
R_2=25 Ω
C=53,05 μF
L=63,69 mH

2-28. ábra

(Megoldások: $Z_{er} = 12{,}269 \cdot e^{j \cdot (-19{,}93^0)} \Omega$; $I = 0{,}978\, A$; $\varphi = 19{,}93^0$;

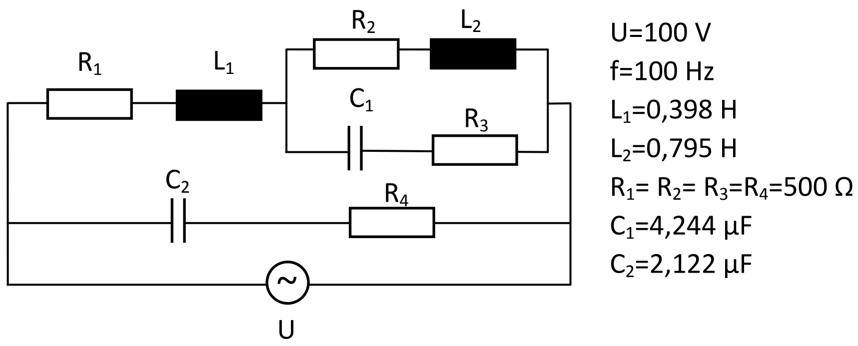
$I_{R1} = 0{,}6\, A$; $\varphi_{R1} = 0^0$; $I_C = 0{,}461\, A$; $\varphi_C = 46{,}23^0$;

$I_{R2} = 0{,}391\, A$; $\varphi_{R2} = 78{,}23^0$; $I_L = 0{,}244\, A$; $\varphi_L = -11{,}77^0$;

$U_{R2} = U_L = 9{,}77\, V$; $\varphi_{R2L} = 78{,}23^0$; $U_C = 13{,}83\, V$; $\varphi_C = -43{,}77^0$

$P = 11{,}03 W$; $Q = 4 var$; $S = 11{,}736\, VA$

2.2.18. Számítsa ki az alábbi áramkör eredő impedanciáját, áramát és fázisszögét, az egyes impedanciák áramát és feszültségét, a hatásos, a látszólagos és a meddő teljesítmény és rajzolja fel a fázor ábrát!



2-29. ábra

(Megoldások: $Z_{er} = 576{,}98 \cdot e^{j \cdot (-22{,}06^0)} \Omega$; $I = 0{,}1733\, A$; $\varphi = 22{,}06^0$;

$I_{C2R} = 0{,}11\, A$; $\varphi_{C2R} = 56{,}31^0$; $I_{RL1} = 0{,}102\, A$; $\varphi_{RL1} = -14{,}93^0$;

$I_{RL2} = 0{,}0{,}063\, A$; $\varphi_{RL2} = -58{,}9^0$; $I_{RC1} = 0{,}072\, A$; $\varphi_{RC1} = 22{,}9^0$;

$U_{R1} = 51{,}26\, V$; $\varphi_{R1} = -14{,}9^0$; $U_{L1} = 25{,}63\, V$; $\varphi_{L1} = 75{,}1^0$;

$U_{R2} = 31{,}78\, V$; $\varphi_{R2} = -58{,}9^0$; $U_{L2} = 31{,}78\, V$; $\varphi_{L2} = 31{,}1^0$;

$U_{R3} = 35{,}94\, V$; $\varphi_{R3} = 22{,}9^0$; $U_{C1} = 26{,}95\, V$; $\varphi_{C1} = -67{,}1^0$;

$U_{R4} = 55\, V$; $\varphi_{R4} = 56{,}31^0$; $U_{C2} = 82{,}5\, V$; $\varphi_{C2} = -33{,}69^0$;

$P = 16{,}06 W$; $Q = 6{,}51\, var$; $S = 17{,}33\, VA$

Irodalomjegyzék

1. Uray-Szabó: Elektrotechnika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998.

2. Nagy István: Elektrotechnikai példatár, BMF 2001.

3. Hodossy-Tomozi: Elektrotechnika jegyzet, Széchenyi István Egyetem Automatizálási tanszék, 2004.

4. Paul-Nasar-Unnewehr: Introduction to Electrical Engineering, McGraw-Hill Inc.,1992.

5. Morris: Electrical circuit analysis and design, Macmillan, 1993.