Kombinatoryka

1. Na ile sposobów można ustawić trzy osoby w kolejce do kasy?

Jeżeli ponumerujemy osoby liczbami 1, 2, 3, to odpowiedź wygląda tak

$$\begin{array}{c}(1,\quad 2,\quad 3)\\(1,\quad 3,\quad 2)\\(2,\quad 1,\quad 3)\\(2,\quad 3,\quad 1)\\(3,\quad 1,\quad 2)\\(3,\quad 2,\quad 1)\end{array}$$

Na pierwszej pozycji możemy ustawić jedną z trzech osób 1, 2 lub 3. Jeżeli ustawimy konkretną osobę, np. 1 to do ustawienia pozostają nam dwie pozostałe osoby 2 i 3.

$\boxed{1}\quad\boxed{}\quad\boxed{}$ pierwszy wybór

Jeżeli na pozycji drugiej ustawimy osobę np. 3,

$\boxed{1}\quad\boxed{3}\quad\boxed{}$ drugi wybór

to na ostatniej pozycji możemy ustawić już tylko jedną osobę o numerze 2, zatem mamy jeden wybór

$\boxed{1}\quad\boxed{3}\quad\boxed{2}$ trzeci wybór

Możemy zatem napisać:

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

Mnożenie kolejnych liczb naturalnych przez siebie nazywamy silnią i oznaczamy 3!

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

2. Na ile sposobów można ustawić w kolejce 10 osób?

Na pierwszej pozycji mamy 10 wyborów, na drugiej pozycji 9 wyborów, itd., czyli

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Czyli ogólnie n różnych elementów możemy ustawić na $n!$ sposobów. Symbol $n!$ nazywamy **silnią**, a przestawianie elementów pomiędzy sobą nazywamy **permutacją**.

permutacje zbioru o n elementach

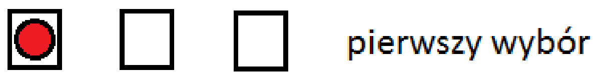
$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

3. Na ile sposobów można ustawić w ciąg trzy kulki: dwie czerwone i jedną zieloną?

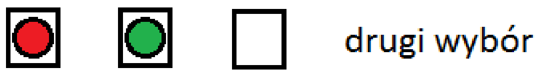
Jeżeli oznaczymy kulkę czerwoną przez **c**, a zieloną przez **z**, to odpowiedź wygląda tak

$$\begin{array}{ccc} z & c & c \\ c & z & c \\ c & c & z \end{array}$$

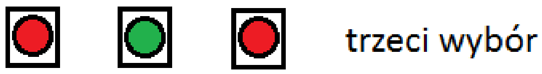
Tym razem na pierwszej pozycji możemy ustawić albo kulkę czerwoną, albo zieloną, czyli mamy dwa wybory, pomimo że posiadamy trzy kulki. Wybierzmy, np. kulkę czerwoną



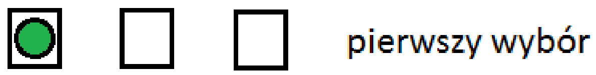
Na drugiej pozycji też możemy ustawić albo kulkę czerwoną, albo zieloną, czyli mamy dwa wybory. Wybierzmy kulkę zieloną.



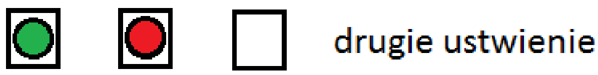
Na trzeciej pozycji musimy wstawić ostatnią posiadana kulkę czerwoną.



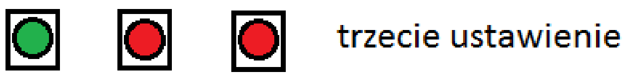
Czy możemy zatem napisać, że mamy $2 \cdot 2 \cdot 1$ wyborów? Okazuje się, że nie! Gdybyśmy najpierw wybrali kulkę zieloną, to na pierwszej pozycji były dwa wybory



Ale na drugiej pozycji musimy już wstawić kulkę czerwoną, nie mamy wyboru.



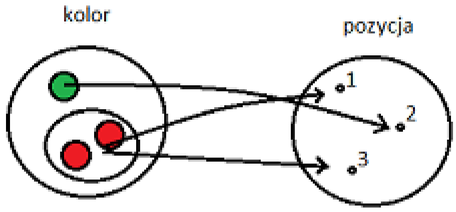
I na trzeciej pozycji też nie mamy wyboru.



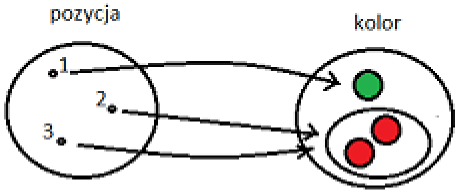
Zatem mieliśmy $2 \cdot 1 \cdot 1$ wyborów. Niedobrze)-:

Na ten problem należało spojrzeć inaczej. Ponieważ mamy tylko jedną zieloną kulkę to można ją było ustawić na trzech pozycjach. Albo na pierwszej pozycji, albo na drugiej pozycji , albo na trzeciej pozycji. A czerwone kulki dopełnią puste miejsca. Czyli, są tylko trzy możliwości różnych ustawień, które zostały przedstawione na samym początku tego zadania.

Tutaj problem polega na tym, że czerwone kulki traktujemy jako jeden kolor. Gdyby kulki miały numery, to liczylibyśmy tak samo jak przy ustawianiu osób.



Źle, to nie jest funkcja! Kulki czerwone traktowane są jako kolor czerwony.



Tak, jest dobrze, to jest funkcja!

Zwróć uwagę na to, że w pierwszym przykładzie miejscu przyporządkowaliśmy numer **rozróżnialnej** osoby,

$$\text{pozycja} \longrightarrow \text{numer osoby}$$

ale można też było zrobić na odwrót, osobie można było przyporządkować pozycję pamiętając o tym, że po ustawieniu pierwszej osoby liczba pozycji zmniejsza się do dwóch, a po ustawieniu drugiej osoby zostaje do dyspozycji tylko jedna pozycja.

W przykładzie drugim miejscu przyporządkowaliśmy **nierozróżnialną** kulkę.

$$\text{pozycja} \longrightarrow \text{kolor}$$

$$\frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

4. Na ile sposobów można ustawić w ciąg pięć kulek: trzy zielone i dwie czerwone?

W zadaniu 3. można z przodu dopisać dodatkowe dwie zielone kulki

z z z c c
z z c z c
z z c c z

A następnie można dalej je poprzestawiać

z c c z z
z c z c z
z c z z c

c z c z z
c z z c z
c z z z c

c c z z z

Mamy zatem 10 możliwości. Można je było obliczyć

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10 = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Przy tych obliczeniach **kolejność zielonych kulek pomiędzy sobą nie miała znaczenia**. **Znaczenia nie miała** także **kolejność czerwonych kulek pomiędzy sobą**.

5. Zastanów się co miało wpływ na to, że ustawienie trzech elementów przypadku osób i trzech elementów w przypadku kulek dało inny rezultat?

a) czy znaczenia miała ilość elementów?
b) czy znaczenia miała jakość elementów?
c) czy gdyby kulki miały kolor biały, zielony i czerwony, to wynik ustawienia byłby inny?
d) czy gdyby była para bliźniąt i trzecia dowolna osoba, to miałoby to wpływ na kolejność ustawienia?

6. Z czterech różnych kart losujemy dwie karty. Ile różnych par można wylosować?

Załóżmy, że te cztery karty były Waletem (W), Damą (D), Królem (K) oraz Asem (A) np. kier.
Należy zwrócić uwagę na to, że para rozumiana tutaj jest jako np. Dama i Król, ale już Król i Dama rozumiana jest jako ta sama para. To znaczy, że kolejność nie ma tutaj znaczenia.

(**W**, D)	(**D**, K)	(**K,** A)
(**W**, K)	(**D**, A)	
(**W**, A)		

Gdybyśmy liczyli w ten sposób, że na pierwszej pozycji w wybranej parze może stać jedna z czterech figur, czyli mamy cztery wybory, a na drugiej pozycji jedna z trzech pozostałych figur, to mielibyśmy

$$4 \cdot 3 = 12$$

par.

(**W**, D)	~~(**D**, W)~~	~~(**K**, W)~~	~~(**A**, W)~~
(**W**, K)	(**D**, K)	~~(**K**, D)~~	~~(**A**, D)~~
(**W**, A)	(**D**, A)	(**K**, A)	~~(**A**, K)~~

Jednak w taki sposób wyliczone pary rozróżniają pary o odwróconej kolejności. Pary które powtarzają się zostały wykreślone. Jak zatem dokonać właściwego rachunku?

Można policzyć tak:

Na pierwszej pozycji może być jedna z czterech figur, na drugiej pozycji jedna z trzech pozostałych figur, a ponieważ każda para powtarza się dwa razy, więc wynik podzielimy przez dwa, zatem

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Można ten sam rachunek wykonać bardziej uniwersalnie

$$\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{1}}{2 \cdot 1 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{1}} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \binom{4}{2}$$

Symbol $\binom{4}{2}$ czytamy jako „cztery po dwa” lub ogólnie $\binom{n}{k}$ „n po k” i nazywamy **kombinacją**. Jest to wybór k – elementowego podzbioru elementów z n – elementowego zbioru, gdy **kolejność** wybieranych elementów **nie ma znaczenia** oraz **kolejność elementów, które pozostały nie ma znaczenia**.

k −elementowe kombinacje zbioru o n elementach

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

7. Zastanów się w czym podobne jest losowanie dwóch kart z czterech kart, do ustawiania w ciąg trzech zielonych i dwóch czerwonych kulek.

8. Wylosujmy 4 karty bez zwracania z talii 52 kart. Ile takich czwórek można wylosować?

Losując pierwsza kartę możemy wylosować jedną z 52 kart. Losując drugą kartę możemy już tylko wylosować z pozostałych 51 kart. Losując trzecią kartę, losujemy z talii 50 - kartowej, a czwartą z talii 49 - kartowej. Zatem mamy

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = \frac{52!}{(52-4)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k! \ = 6\ \ 497\ 400 \text{ możliwości.}$$

Tutaj **znaczenie miała kolejność wylosowanych kart**, **nie miała** natomiast **znaczenia kolejność kart jakie pozostały w talii**.

Ten sposób liczenia to

k −elementowe wariacje zbioru o liczebności n

$$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

9. Wylosujmy teraz 4 karty ze zwracaniem z talii 52 kart. Ile takich czwórek można wylosować?

Tym razem rachunek będzie wyglądał tak

$$52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^4 = n^k \ = 7\,311\,616 \text{ możliwości}$$

Tutaj **znaczenie miała kolejność wylosowanych kart**, **nie miała** natomiast **znaczenia kolejność kart jakie pozostały w talii**. Karty mogły się powtórzyć. Natomiast w ćwiczeniu 8. Każda karta była inna.

wzory

liczba wszystkich	bez powtórzeń	z powtórzeniami
permutacji zbioru $[n]$	$P_n = n!$	$P_n^{n_1, n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$
k – elementowe **kombinacje** ze zbioru $[n]$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$
k – elementowych **wariacji** zbioru $[n]$	$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\bar{V}_n^k = n^k$

liczba wszystkich wyborów k - elementowych spośród n, gdy	bez powtórzeń	z powtórzeniami
kolejność elementów **nieistotna**	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$
kolejność elementów **istotna**	$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\bar{V}_n^k = n^k$