1. definíció. *Legyen A és B tetszőleges nemüres halmaz. A*

$$\emptyset \neq f \subset A \times B$$

relációt ***függvénynek*** *nevezzük, ha*

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f \quad \textit{esetén} \quad \exists!\; y \in \mathcal{R}_f \colon (x, y) \in f.$$

Az y elemet az f függvény x helyen felvett ***helyettesítési értékének*** *nevezzük és az $f(x)$ szimbólummal jelöljük. Ekkor azt is mondjuk, hogy az f függvény x-hez az $f(x)$ függvényértéket* ***rendeli****.*

3. definíció. *Az $f : A \to B$ függvényt* ***invertálhatónak*** *(****egy-egyértelműnek*** *vagy* ***injektívnek****) nevezzük akkor, ha a $\mathcal{D}_f = A$ értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe különböző, azaz*

$$(\triangle) \qquad \forall\, x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \neq t \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(t).$$

Gyakran használjuk a $(\triangle)$ alábbi ekvivalens átfogalmazásait:

- $\boxed{f \text{ invertálható} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x, t \in \mathcal{D}_f \text{ esetén} \quad f(x) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad x = t,}$
- f invertálható $\quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, y \in \mathcal{R}_f$-hez $\exists!\; x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) = y$.

$$\boxed{f \in A \to B} \quad :\Longleftrightarrow \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f \subset A.$$

$$\boxed{f : A \to B} \quad :\Longleftrightarrow \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f = A.$$

4. definíció. *Legyen f egy invertálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\forall\, y \in \mathcal{R}_f\text{-}\textit{hez}\ \exists!\; x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) = y.$$

Ekkor az f ***inverz függvényét*** *(vagy röviden* ***inverzét****) így értelmezzük:*

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \textit{amelyre} \quad f(x) = y.$$

$\boxed{\text{III.}}$ **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**):
Tegyük fel, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra a következők teljesülnek:

- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$,
- minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$.

Ekkor

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \quad \forall\, a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén} \quad a \leq \xi \leq b.$$

6. definíció. *A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***induktív halmaz****, ha*

- $0 \in H$,
- *minden $x \in H$ esetén $x + 1 \in H$.*

1. tétel (A teljes indukció elve). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

(i) *$A(0)$ igaz,*

(ii) *ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

9. definíció.

1^o *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***felülről korlátos****, ha*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } x \leq K.$$

Az ilyen K számot a H halmaz egy ***felső korlátjának*** *nevezzük.*

2^o *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***alulról korlátos****, ha*

$$\exists\, k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } k \leq x.$$

Az ilyen k számot a H halmaz egy ***alsó korlátjának*** *nevezzük.*

3^o *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***korlátos****, ha alulról is, felülről is korlátos azaz*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } |x| \leq K.$$

2. tétel (A szuprémum elv). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

(i) *$H \neq \emptyset$ és*

(ii) *H felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists \min \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

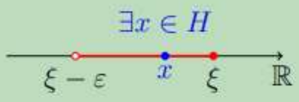
10. definíció.

1^o *A felülről korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját H* ***szuprémumának*** *nevezzük, és a $\boxed{\sup H}$ szimbólummal jelöljük.*

2^o *Az alulról korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját H* ***infimumának*** *nevezzük, és az $\boxed{\inf H}$ szimbólummal jelöljük.*

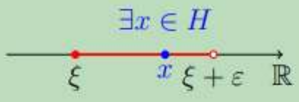
4. tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \sup H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ x \leq \xi; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legkisebb felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \exists x \in H: \ \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$



5. tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \inf H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ \xi \leq x; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legnagyobb alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \exists x \in H: \ x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$



- $\boxed{\exists \max H \quad \Longleftrightarrow \quad \sup H \in H \ \text{ és ekkor } \ \sup H = \max H}$,
- $\boxed{\exists \min H \quad \Longleftrightarrow \quad \inf H \in H \ \text{ és ekkor } \ \inf H = \min H}$.

7. tétel (Az arkhimédészi tulajdonság). *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall a > 0 \ \textit{ és } \ \forall b \in \mathbb{R} \quad \textit{esetén} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \ \textit{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

8. tétel (A Cantor-tulajdonság). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

3. definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor* ***a C halmaz f által létesített képén*** *az*

$$f[C] := \big\{ f(x) \mid x \in C \big\} = \big\{ y \in B \mid \exists x \in C: \ y = f(x) \big\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

4. definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $D \subset B$. Ekkor* ***a D halmaz f által létesített ősképén*** *az*

$$f^{-1}[D] := \Big\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\Big\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

5. definíció. *Tegyük fel, hogy $f : A \to B$ és $g : C \to D$ olyan függvények, amelyekre*

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

*Ebben az esetben az f (**külső**) és a g (**belső**) függvény **összetett függvényét** (vagy más szóval f és g **kompozícióját**) az $f \circ g$ szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:*

$$f \circ g : \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \qquad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

6. definíció. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt (**valós**) **sorozatnak** vagy **számsorozatnak** nevezzük. Az*

$$a(n) =: a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

*helyettesítési érték a sorozat **n-edik** (vagy **n-indexű**) **tagja**, a tag sorszámát jelző szám a tag **indexe**.*

8. definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat*

- ***alulról korlátos**, ha*

$$\exists\, k \in \mathbb{R}, \quad hogy \ \ k \le a_n \qquad (n \in \mathbb{N});$$

- ***felülről korlátos**, ha*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \quad hogy \ \ a_n \le K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

*Ha a sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátos** sorozatnak mondjuk. Ekkor*

$$\exists K > 0, \quad hogy \ \ |a_n| \le K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

7. definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) valós sorozat*

- ***monoton növekedő*** *(jele: $\nearrow$), ha*

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$

- ***szigorúan monoton növekedő*** *(jele: $\uparrow$), ha*

$$a_n < a_{n+1} \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$

- ***monoton csökkenő*** *(jele: $\searrow$), ha*

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$

- ***szigorúan monoton csökkenő*** *(jele: $\downarrow$), ha*

$$a_{n+1} < a_n \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén.}$$

Az (a_n) sorozatot ***monoton*** *sorozatnak nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.*

9. definíció. *Valamilyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ esetén a*

$$K_r(a) := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x-a| < r\right\}$$

halmazt az ***a középpontú r sugarú környezetének*** *nevezzük.*

10. definíció. *Legyen $r > 0$ valós szám. Ekkor a $+\infty$, ill. a $-\infty$ elemek r sugarú környezetét így értelmezzük:*

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \qquad \textit{ill.} \qquad K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat* ***konvergens***, *ha*

$(*)$ $\quad \exists\, A \in \mathbb{R}$, *hogy* $\forall\, \varepsilon > 0$ *számhoz* $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\, n > n_0$ *indexre* $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ekkor az A számot a sorozat ***határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim\,(a_n) := A, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n := A, \qquad a_n \to A \ (n \to +\infty).$$

Az (a_n) sorozatot ***divergensnek*** *nevezzük, ha nem konvergens*

3^o Ha egy sorozat divergens, akkor $(*)$ nem teljesül, ami pozitív állítás formájában azt jelenti, hogy:

$$\forall\, A \in \mathbb{R}\text{-hez } \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists\, n > n_0 \colon |a_n - A| \geq \varepsilon. \ \blacksquare$$

3. tétel. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

2. definíció.

1^o *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **határértéke** $+\infty$ (vagy a sorozat $+\infty$**-hez tart**), ha*

$$\forall\, P > 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 \colon a_n > P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim\,(a_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad a_n \to +\infty,\ \ \textit{ha}\ \ n \to +\infty.$$

2^o *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **határértéke** $-\infty$ (vagy a sorozat $-\infty$**-hez tart**), ha*

$$\forall\, P < 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 \colon a_n < P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim\,(a_n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \qquad a_n \to -\infty,\ \ \textit{ha}\ \ n \to +\infty.$$

3. definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak **van határértéke**, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \ \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n > n_0 : \ \ a_n \in K_\varepsilon(A).$$

4. definíció. *Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós sorozat és $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekedő sorozat (röviden: ν egy **indexsorozat**). Ekkor az $a \circ \nu$ függvény is sorozat, amelyet az (a_n) sorozat ν indexsorozat által meghatározott **részsorozatának** nevezünk. Az $a \circ \nu$ sorozat n-edik tagja:*

$$\big(a \circ \nu\big)(n) = a(\nu_n) = a_{\nu_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$a \circ \nu = (a_{\nu_n}).$$

6. tétel. *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik **monoton részsorozata**, azaz létezik olyan $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

7. tétel (A közrefogási elv). *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > N \colon a_n \le b_n \le c_n,$
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim\,(a_n) = \lim\,(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy a_{n_0} az (a_n) sorozat **csúcsa** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall n \geq n_0 \ \text{ indexre } \ a_n \leq a_{n_0}.$$

8. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim (a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim (b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1° $A < B \implies \exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N \colon a_n < b_n.$

2° $\exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N \colon a_n \leq b_n \implies A \leq B.$

2. tétel (Műveletek nullasorozatokkal). *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1° $(a_n + b_n)$ *is nullasorozat,*

2° *ha* (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *nullasorozat,*

3° $(a_n \cdot b_n)$ *nullasorozat.*

3. tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim (a_n) = A \in \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad \lim (b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1° $(a_n + b_n)$ *is konvergens és* $\lim (a_n + b_n) = \lim (a_n) + \lim (b_n) = A + B,$

2° $(a_n \cdot b_n)$ *is konvergens és* $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim (a_n) \cdot \lim (b_n) = A \cdot B,$

3° *ha* $b_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N})$ *és* $\lim (b_n) \neq 0,$ *akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens} \quad \textit{és} \quad \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim (a_n)}{\lim (b_n)} = \frac{A}{B}.$$

5. tétel. *Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.*

1° **(a)** *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim (a_n) = \sup \left\{ a_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim (a_n) = \inf \left\{ a_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2° **(a)** *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor*

$$\lim (a_n) = +\infty.$$

(b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról nem korlátos, akkor*

$$\lim (a_n) = -\infty.$$

8. tétel. *Minden rögzített $q \in \mathbb{R}$ esetén a (q^n) mértani sorozat határértékére a következők teljesülnek:*

$$\lim_{n \to +\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \textit{ha } |q| < 1, \\ = 1, & \textit{ha } q = 1, \\ = +\infty, & \textit{ha } q > 1, \\ \textit{nem létezik}, & \textit{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

2. tétel (Az e szám értelmezése). *Az*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4. tétel (Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére). *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor:*

1^o *Pontosan egy olyan α pozitív valós szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$*

*(α-t az A szám **m-edik gyökének nevezzük**, és az $\sqrt[m]{A}$ szimbólummal jelöljük).*

2^o *Ez az α szám az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós,} \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) (ún. iterációs) sorozat határértéke, azaz

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha = \sqrt[m]{A}.$$

5. tétel (A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Minden, korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.*

1. definíció. *Az (a_n) valós sorozatot **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n > n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

6. tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$