Vonalkövető autó rendszermodellje

Segédlet a RobonAUT verseny szabályozástechnikai szemináriumához

Kiss Domokos, Kolumbán Sándor

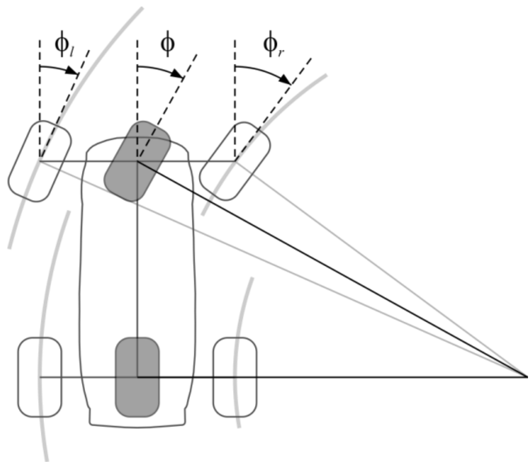
BME Automatizálási és Alkalmazott Informatikai Tanszék

2016. szeptember

Tartalomjegyzék

1 Bevezető

A négykerekű, kormányzott autók – így a RobonAUT-on használt autómodell is – Ackermann-kormányzással rendelkeznek. Ennek lényege, hogy kanyarodáskor a két első, kormányzott kerék kormányszöge eltér annak érdekében, hogy a kerekek csúszásmentesen, koncentrikus pályákon fussanak. Jelen esetben az Ackermann-modellnek a kinematikai szempontból előnyös **kétkerekű helyettesítését** – az ún. kerékpármodellt – használjuk (ld. 1. ábra).



1. ábra – Ackermann-modell és kerékpármodell

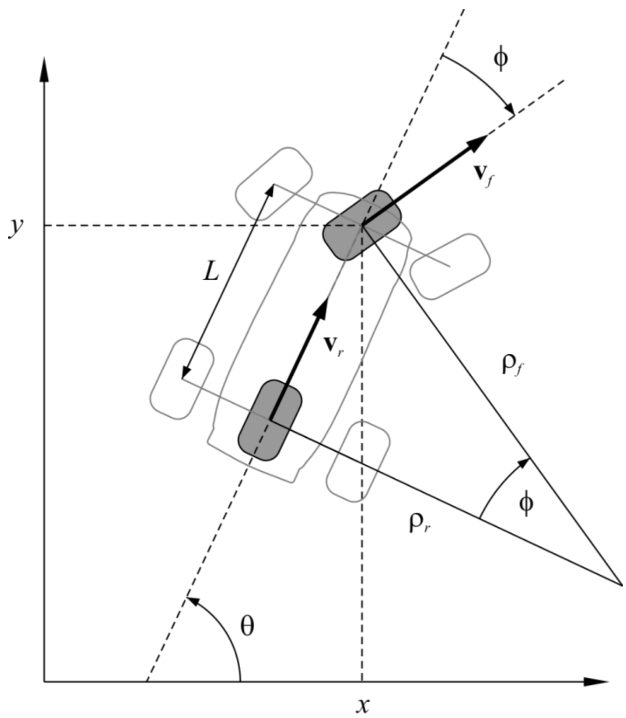
A kerékpármodellben az első, ill. a hátsó tengelyen lévő két-két kereket egy-egy, tengelyközéppontba helyezett virtuális kerékkel helyettesítjük[1], melyek az eredeti kerekekkel koncentrikus pályákon futnak. A kerékpármodell aktuális ϕ kormányszögének ismeretében egyértelműen megadható a két valós első kerék ϕ_l és ϕ_r kormányszöge, illetve a virtuális kerekek kerületi sebességeinek ismeretében egyszerűen számítható mind a négy kerék sebessége.

2 A kerékpármodell mozgásegyenlete

Első célunk a kerékpármodell (kinematikai) mozgásegyenletének felírása, mely megteremti a kapcsolatot a meghajtott kerék sebessége és a kormányszög (mint bemenet), valamint az autó pozíciója és orientációja (mint kimenet) között. Tegyük fel, hogy az autó hátsókerék-meghajtással rendelkezik, referenciapontja pedig az első keréktengely középpontja. A mozgásegyenlet felírásához a 2. ábra jelöléseit használjuk:

ϕ:	Kormányszög (bemenet)
$\mathbf{v}_r$:	A hátsó kerék kerületi sebessége (bemenet)
$\mathbf{v}_f$:	Az első kerék kerületi sebessége
ρ_r:	A hátsó kerék fordulási sugara
ρ_f:	Az első kerék fordulási sugara
L:	Az első és a hátsó keréktengely távolsága
(x, y, θ):	A robot pozíciója és orientációja (kimenet)

[1] A virtuális kerekeket a továbbiakban egyszerűen csak első és hátsó kerékként említjük.



2. ábra – Kinematikai felírás

Induljunk ki abból a fizikából jól ismert tényből, hogy egy merev test minden pontjának megegyezik a szögsebessége. Ennek megfelelően a hátsó és első tengelyközéppontokra felírhatjuk:

$$\omega_r = \omega_f \quad \rightarrow \quad \frac{v_r}{\rho_r} = \frac{v_f}{\rho_f}, \tag{1}$$

ahol v_r ill. v_f az hátsó ill. első kerék előjeles kerületi sebesség-nagyságát jelöli (amely pozitív, ha előrefelé, és negatív, ha hátrafelé irányuló mozgásról van szó). A hátsó és az első kerék fordulási sugarának aránya az ábráról leolvasható:

$$\frac{\rho_r}{\rho_f} = \cos\phi \tag{2}$$

A fenti két egyenletből behelyettesítés és átrendezés után megkapjuk az összefüggést az első és a hátsó kerék kerületi sebessége között:

$$v_r = v_f \cos\phi \tag{3}$$

Szintén leolvasható az ábráról a következő összefüggés az első kerék fordulási sugarának meghatározásához:

$$\rho_f = \frac{L}{\sin\phi} \tag{4}$$

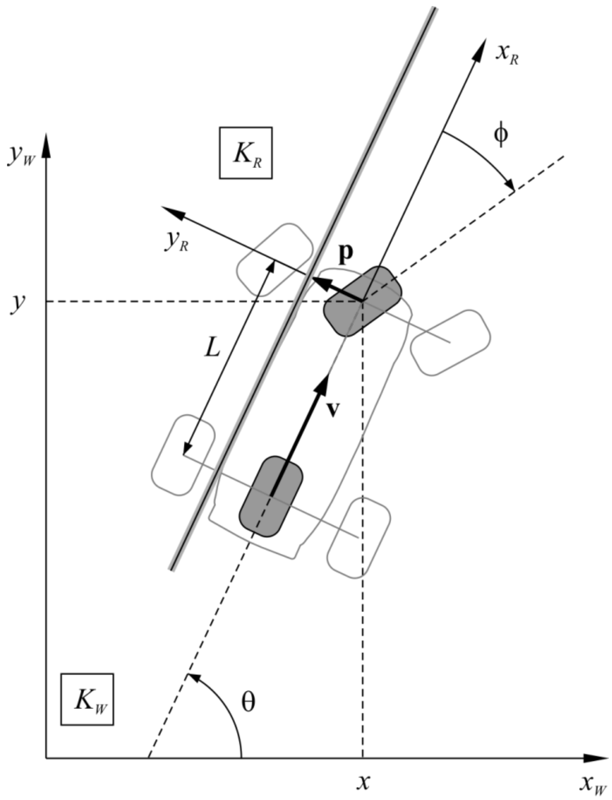
Az ábra alapján a fenti összefüggések felhasználásával adódnak a következő mozgásegyenletek:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_f \cos(\theta+\phi) = v_r \frac{\cos(\theta+\phi)}{\cos\phi} \\
\dot{y} &= v_f \sin(\theta+\phi) = v_r \frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos\phi} \\
\dot{\theta} &= \omega_f = \frac{v_f}{\rho_f} = v_f \frac{\sin\phi}{L} = \frac{v_r}{\cos\phi}\frac{\sin\phi}{L} = v_r \frac{\tan\phi}{L}
\end{aligned} \tag{5}
$$

3 Egyszerű vonalérzékelési modell

Az autó mozgásegyenletét a K_W világ-koordinátarendszerben adtuk meg. A további összefüggések felírásához szükségünk lesz egy másik, robothoz (ill. autóhoz) rögzített K_R koordinátarendszerre is, amelyet úgy veszünk fel, hogy origója az autó referenciapontjával essen egybe, x-tengelye pedig az autó hossztengelyével legyen párhuzamos, és a pozitív haladási irányba (előre) mutasson (ld. 3. ábra).

Az egyszerű vonalérzékelési modellnél azt feltételezzük, hogy a vezetővonal és az első keréktengely – K_R y-tengelye – metszéspontját tudjuk detektálni egy vonalérzékelő szenzorsorral (ez minden információnk a vonalról). Ezt a metszéspontot a továbbiakban *vonalérzékelési pont*nak nevezzük. A vezetővonalat végtelen hosszúságú egyenessel modellezzük, amely minden pillanatban párhuzamos K_R x-tengelyével (a vezetővonal orientációja ismeretének hiányában ez a legegyszerűbb feltételezés, amivel élhetünk).



3. ábra – Egyszerű vonalérzékelési modell

Jelöljük $\mathbf{p}$-vel a K_R origójából a vonalérzékelési pontba mutató vektort, p-vel pedig ennek az előjeles hosszát (más szóval a vonalérzékelési pont K_R-beli y-koordinátáját). Célunk, hogy felírjuk a vonalérzékelési pont mozgását K_R-ben a v_r hátsókerék-sebesség (a továbbiakban alsó index nélkül, egyszerűen csak v-vel jelöljük) és a ϕ kormányszög függvényében.

Éljünk az $x, y, \theta = 0$ választással[2], ekkor a mozgásegyenletből adódik, hogy

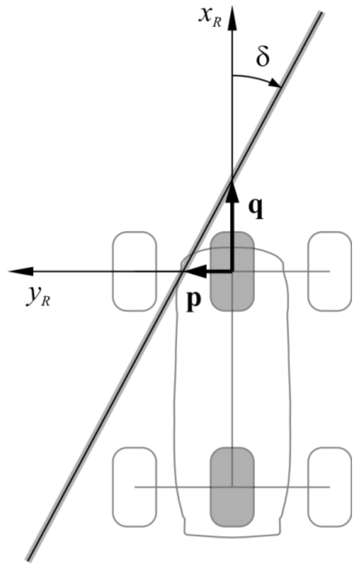
$$\dot{y} = v \cdot \tan \phi . \tag{6}$$

Mivel a vezetővonal K_W-ben rögzített, a vonalérzékelési pont K_R-beli pillanatnyi elmozdulása (p megváltozása) éppen ellentettje a robot K_W-beli y-irányú pillanatnyi elmozdulásának (y megváltozásának). Így tehát a p érzékelt vonalpozíció „mozgásegyenlete" K_R-ben felírva:

$$\boxed{\dot{p} = -\dot{y} = -v \cdot \tan \phi} \tag{7}$$

4 Orientációs vonalérzékelési modell

A vezetővonal párhuzamosságára vonatkozó feltevés elég durva közelítésnek tekinthető. Ennek illusztrálására tekintsük a 4. ábrát. A vezetővonal az autó hossztengelyével $\delta \neq 0$ szöget zár be, a kormányszög nulla.



4. ábra – A vezetővonal orientációjának hatása

Ebben az esetben az egyszerű modell szerint bármilyen v sebesség mellett $\dot{p} = 0$, vagyis a vonalérzékelési pontnak nem kellene mozognia az y-tengelyen, ami nyilván nem lesz igaz. Jelölje a vezetővonal K_R-beli y- és x-tengelymetszeteibe mutató vektorokat $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$, a metszetek koordinátáit (a vektorok előjeles hosszát) p és q. Ezekre az ábra alapján teljesül, hogy

$$p = -q \cdot \tan \delta \tag{8}$$

Idő szerint deriválva:

$$\dot{p} = -\dot{q} \cdot \tan \delta \tag{9}$$

[2] Az általánosság veszélyeztetése nélkül alkalmazhatunk egy olyan koordináta-transzformációt, melynek során a világ-koordinátarendszert úgy választjuk meg, hogy a vizsgált pillanatban éppen egybeessen a robot koordinátarendszerével.

Mivel a K_R koordinátarendszer (az autóval együtt) v sebességgel pozitív x-irányba halad, a vezetővonal x-tengelymetszete K_R -ből nézve éppen ellenkező irányba mozog ugyanazon sebességgel, vagyis

$$\dot{q} = -v \tag{10}$$

és ebből

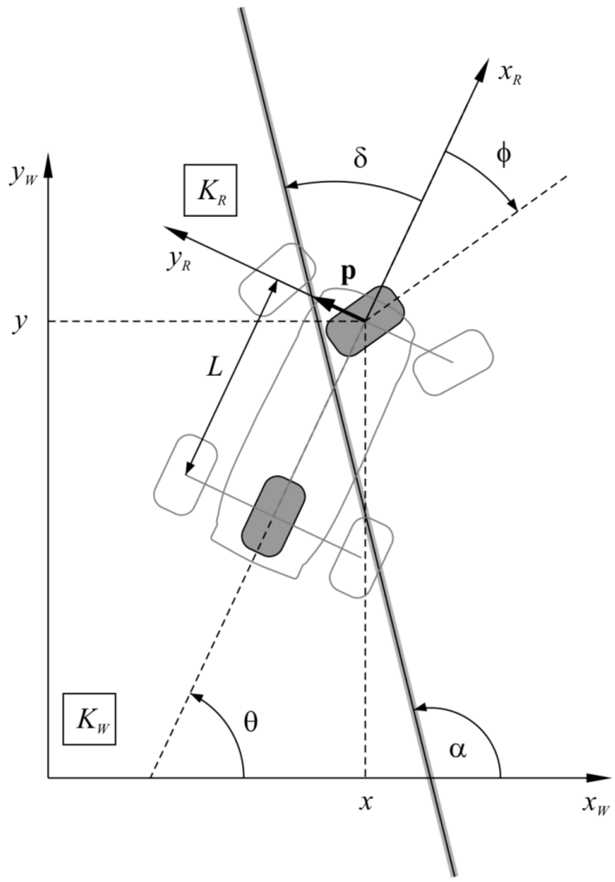
$$\dot{p} = v \cdot \tan\delta, \tag{11}$$

ami alakjában hasonlóságot mutat az egyszerű vonalérzékelési modellnél kapott eredménnyel. Összefoglalva az eddig kapott összefüggéseket $\dot{p}$ -ra:

Egyszerű vonalérzékelési modell	$\phi \neq 0, \quad \delta = 0$	$\dot{p} = -v \cdot \tan\phi$
Egyenes haladás, ferde vezetővonal	$\phi = 0, \quad \delta \neq 0$	$\dot{p} = v \cdot \tan\delta$

Az orientációs vonalérzékelési modell esetében feltesszük, hogy tudjuk érzékelni a vezetővonalnak a p pozícióján kívül az autó hossztengelyéhez képesti δ orientációját is, és ennek hatását is figyelembe vesszük p „mozgásegyenletének” felírásakor. Első ötletként felmerülhet a fenti két hatás összegzése, ami viszonylag egyszerű eredményre vezetne, melyben p megváltozása arányos a sebességgel és a két szög (δ és ϕ) tangensének különbségével. Azonban nemlineáris rendszereknél óvatosan kell bánnunk a szuperpozíció elvének gondolkodás nélküli alkalmazásával.

A speciális esetekre vonatkozó eredmények egyszerű összegzése helyett vezessük le az általános esetre (δ és ϕ egyike sem nulla) vonatkozó mozgásegyenletet az 5. ábra segítségével.



5. ábra – Orientációs vonalérzékelési modell

Először határozzuk meg a vezetővonal K_R-ben érzékelt δ orientációjának alakulását az autó mozgása közben. A vezetővonal K_W-beli α orientációjára igaz, hogy

$$\alpha = \theta + \delta = konst., \tag{12}$$

mivel a vonal rögzített K_W-ben. Ebből δ időbeli alakulására az (5) mozgásegyenlet felhasználásával az alábbi összefüggés adódik:

$$\dot{\theta} + \dot{\delta} = 0, \tag{13}$$

$$\dot{\delta} = -\dot{\theta} = -v\frac{\tan\phi}{L}. \tag{14}$$

A következőkben határozzuk meg a vezetővonal p pozíciójának „mozgásegyenletét". Ehhez írjuk fel a vezetővonal egyenesének egyenletét mindkét koordinátarendszerben:

$\boxed{K_R}$: $$y_R = \tan\delta \cdot x_R + p \tag{15}$$

$\boxed{K_W}$: $$y_W = \tan\alpha \cdot x_W + y_{W,0} \tag{16}$$

A jelölések értelmezése a következő:

x_R, y_R:	Az egyenes egy tetszőleges pontjának K_R-beli koordinátái
x_W, y_W:	Az egyenes egy tetszőleges pontjának K_W-beli koordinátái
$\tan\delta$:	Az egyenes K_R-beli meredeksége
$\tan\alpha = \tan(\theta+\delta)$:	Az egyenes K_W-beli meredeksége
p:	Az egyenes y-tengelymetszete K_R-ben
$y_{W,0}$	Az egyenes y-tengelymetszete K_W-ben

Adjuk meg a K_R és K_W közötti koordinátatranszformációt (a robot x, y, θ helyzetének ismeretében):

$$\begin{bmatrix} x_W \\ y_W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Skaláris formában:

$$\begin{aligned} x_W &= x_R\cos\theta - y_R\sin\theta + x \\ y_W &= x_R\sin\theta + y_R\cos\theta + y \end{aligned} \tag{18}$$

Helyettesítsünk be a vonal K_W-ben felírt egyenletébe:

$$x_R\sin\theta + y_R\cos\theta + y = \tan\alpha \cdot (x_R\cos\theta - y_R\sin\theta + x) + y_{W,0} \tag{19}$$

Mivel a vezetővonal és K_R y-tengelyének metszéspontját vizsgáljuk, ezért $x_R = 0$ és $y_R = p$ helyettesítéssel:

$$p\cos\theta + y = \tan\alpha \cdot (-p\sin\theta + x) + y_{W,0} \tag{20}$$

$$p(\cos\theta + \tan\alpha \cdot \sin\theta) = \tan\alpha \cdot x - y + y_{W,0} \tag{21}$$

$$p = \frac{\tan\alpha \cdot x - y + y_{W,0}}{\cos\theta + \tan\alpha \cdot \sin\theta} \tag{22}$$

Deriváljuk az összefüggést idő szerint:

$$\dot{p} = \frac{(\tan\alpha \cdot \dot{x} - \dot{y}) \cdot (\cos\theta + \tan\alpha \cdot \sin\theta) - (-\sin\theta \cdot \dot{\theta} + \tan\alpha \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}) \cdot (\tan\alpha \cdot x - y + y_{W,0})}{(\cos\theta + \tan\alpha \cdot \sin\theta)^2} \tag{23}$$

Az általánosság elvesztése nélkül tegyük fel, hogy az adott pillanatban K_W és K_R egyállásúak, és origójuk egybeesik (más szóval $x, y, \theta = 0$). Ekkor (12) és (22) alapján $\alpha = \delta$ és $y_{W,0} = p$, melyek behelyettesítésével $\dot{p}$ összefüggése a következő alakot ölti:

$$\dot{p} = \tan\delta \cdot \dot{x} - \dot{y} - \tan\delta \cdot \dot{\theta} \cdot p \tag{24}$$

$x, y, \theta = 0$ esetében a mozgásegyenlet (5) alakja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{y} &= v \cdot \tan\phi \\ \dot{\theta} &= v \cdot \frac{\tan\phi}{L} \end{aligned} \tag{25}$$

Ezt behelyettesítve (24)-be:

$$\dot{p} = v \cdot \tan\delta - v \cdot \tan\phi - v \cdot \frac{p}{L} \cdot \tan\delta \cdot \tan\phi \tag{26}$$

Összegezve, az orientációs modellben a vonalérzékelési pont „mozgásegyenlete”:

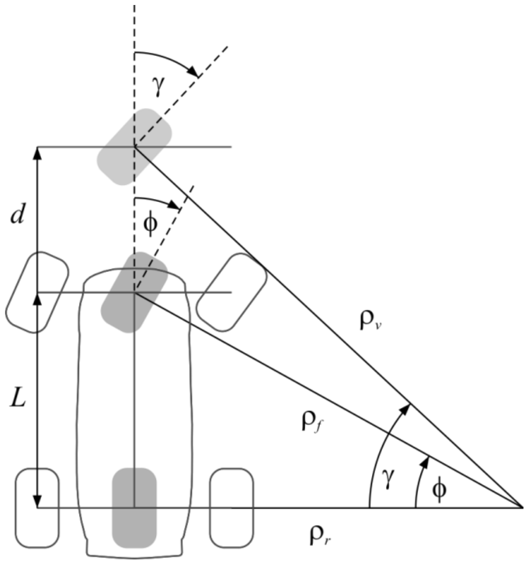
$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{p} = v \cdot \left(\tan\delta - \tan\phi - \frac{p}{L} \cdot \tan\delta \cdot \tan\phi \right) \\ &\dot{\delta} = -\dot{\theta} = -v \frac{\tan\phi}{L} \end{aligned}} \tag{27}$$

Vegyük észre, hogy $\delta = 0$, ill. $\phi = 0$ választása mellett $\dot{p}$ kifejezése visszaadja a (7), ill. (11) speciális eseteket. Azonban e speciális esetektől eltekintve megjelenik egy harmadik tag is, amely szerint p megváltozása függ magától a p értékétől is.

Fontos megjegyeznünk, hogy bár az orientációs vonalérzékelési modell az egyszerű modellnél sokkal pontosabban írja le a vonal mozgását az autóhoz képest, még tovább finomítható. Azt feltételezi ugyanis, hogy a ϕ kormányszög (mint bemenet) ugrásszerűen megváltoztatható, ami a fizikai valóságban sohasem igaz. A modell kibővíthető úgy, hogy figyelembe vegye ϕ dinamikáját, de ezt már az érdeklődő olvasóra bízzuk.

5 A vonalérzékelő szenzorsor elhelyezésének hatása

Az előzőekben feltettük, hogy a vezetővonalat érzékelő szenzorsort az első keréktengely vonalában helyezzük el. Ez egy önkényes választás volt, mechanikai és egyéb szempontok indokolhatják, hogy a valóságban ne itt, hanem a keréktengellyel párhuzamosan, de előrébb vagy hátrébb helyezkedjen el a vonalérzékelő. Vizsgáljuk meg ennek a hatását a 6. ábra segítségével!



6. ábra – A vonalszenzor elhelyezésének hatása

A valós szenzorsor és az első keréktengely előjeles távolságát jelölje d. Képzeljünk el egy újabb virtuális kereket a szenzorsor közepénél, amely szintén koncentrikus pályán fut a többi kerékkel. Az általa bejárt pálya görbületi sugara ρ_v, az ehhez tartozó virtuális kormányszög γ. az ábrából következik, hogy

$$\tan\phi = \frac{L}{\rho_r}, \qquad \tan\gamma = \frac{L+d}{\rho_r}. \tag{28}$$

Ez alapján

$$\frac{L}{\tan\phi} = \frac{L+d}{\tan\gamma}, \tag{29}$$

$$\tan\gamma = \tan\phi\frac{L+d}{L}. \tag{30}$$

Tehát a vonalérzékelő szenzorsor áthelyezése csupán annyit jelent, hogy egy másik, az eredetivel ekvivalens kerékpármodellt használunk, melyben a tengelytáv L helyett $L+d$, a kormányszög pedig ϕ helyett γ. A két kormányszög közötti összefüggés a két tengelytáv arányából számítható a (30) egyenletben megadott módon.

Vegyük észre, hogy a szenzorsor előrefelé tolásával (a hátsó tengelytől való távolításával) a virtuális γ kormányszög nő. Mivel a kormányszög, mint beavatkozó jel mechanikailag korlátozott, ez telítést fog jelenteni a szabályozási körben. A szenzorsor jó elhelyezésével ez a korlátozott szögtartomány virtuálisan kibővíthető, ami hasznos lehet a szabályozás felépítésekor.

6 A modell linearizálása

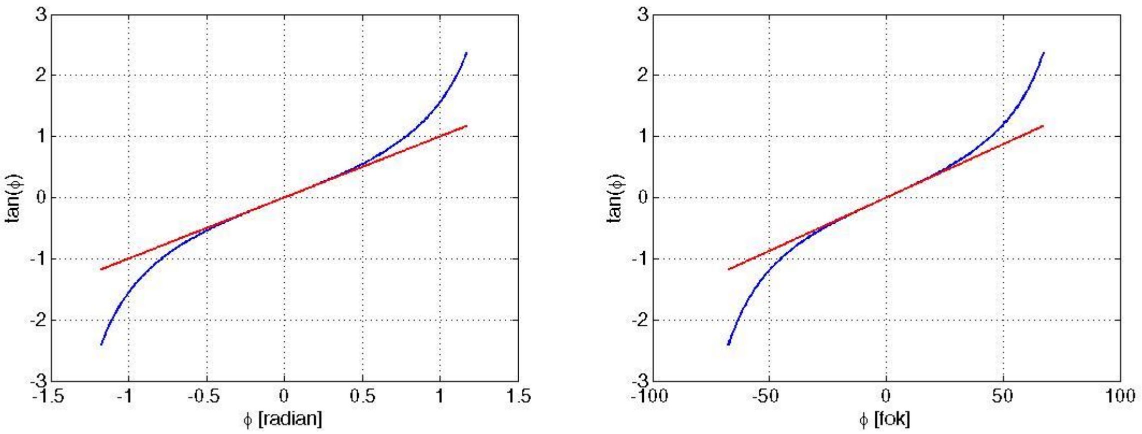
A fentiekben levezetett nemlineáris modellt használva nem tudunk az alap szabályozástechnika eszközeivel szabályozó algoritmust tervezni, illetve kiértékelni. A célunk az, hogy lehetőleg a vonalon állva ($p = 0$), az autót a vonallal párhuzamosan tartva ($\delta = 0$) és egyenesen előre álló kormánnyal ($\phi = 0$) haladjon az autó. Ha minden jól megy, akkor ebből az állapotból indulunk majd és csak kis eltérések fordulnak majd elő, amiket gyorsan kompenzálunk, tehát nem is igazán hagyjuk el ennek a munkapontnak a környékét. Ez persze nem így lesz, de reménykedni lehet.

Felhasználva, hogy

$$\tan(x + \Delta x) \approx \tan(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} \Delta x$$

az előzőekben levezetett nemlineáris differenciálegyenleteket linearizálni lehet (az elhanyagolt hiba Δx^2 nagyságrendű, ami remélhetőleg már lényegtelen).

Nézzük meg, hogy ez a lineáris közelítés mennyire használható a 0 környékén.



Látható, hogy 30-40 fokos eltérésig nem is olyan rossz a közelítés. Utána azért drasztikusan romlik a helyzet.

6.1 Egyszerű modell

$$\dot{p} = -v \tan(\phi)$$

Használva, hogy $\tan(0) = 0$ és $\cos(0) = 1$ a fenti egyenletek a következő formára egyszerűsödnek a választott munkapontunk környékén.

$$0 \dot{+} \Delta p \approx -v \left(\tan(\phi) + \frac{1}{\cos^2(\phi)} \Delta\phi \right)$$

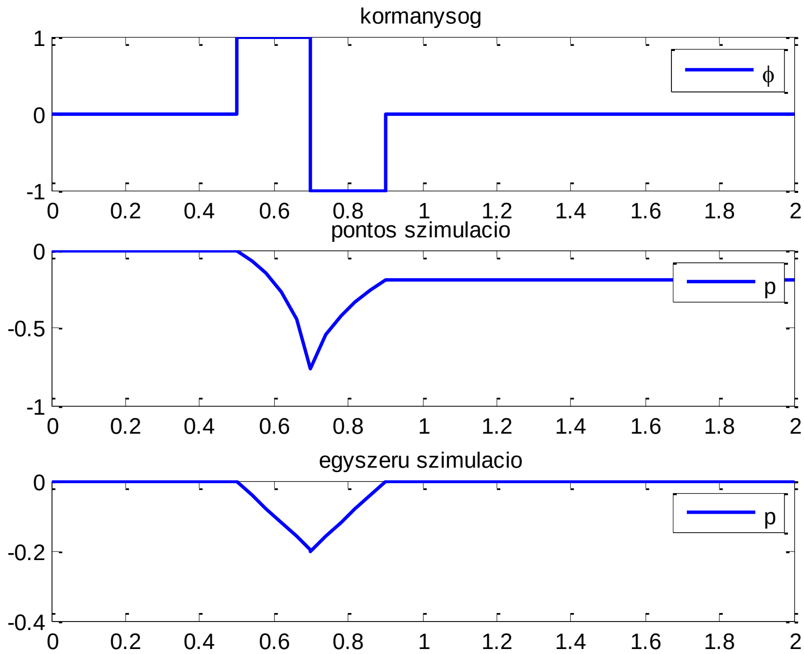
$$\dot{\Delta p} \approx -v \left(0 + \frac{1}{1} \Delta\phi \right)$$

$$\dot{\Delta p} \approx -v \Delta\phi$$

Ebből az egyenletből látszik, hogy a vonal távolságát egyszerűen a kormányszög integráljával közelítjük. Átviteli függvényként felírva, a kormányszög és a vonaltávolság közti átvitel az egyszerű modellben

$$P_e(s) = -v \frac{1}{s} \Phi(s)$$

Nézzük meg, hogy ez a modell mennyire adja vissza a valóságot.



A fenti ábrán az első jel a kormányszöget mutatja, egy ideig balra tekerjük a kormányt valamennyire, majd ugyanennyit vissza jobbra. A második ábra ennek hatására a vonaltávolságot mutatja a pontos modellt használva. Világos, hogy a vonal egy kicsit jobbra fog az autótól elhelyezkedni ez után a manőver után, az autó pedig a vonallal párhuzamosan fog haladni. Ez a jelenséget az egyszerű modell nem tudja jól visszaadni, valamint a vonaltávolság dinamikájának is más a formája. A részletes szimuláció esetén, ahogy az autó fordul el a vonaltól, egyre gyorsabban nő a vonaltól való távolság. Ezt a nemlineáris jelleget az egyszerű modell egyáltalán nem ragadja meg. A másik szignifikáns hiányosság, hogy az egyszerű modell alapján az autónak vissza kéne állnia a vonalra, ami nyilván nem igaz.

A továbbiakban ezzel a modellel nem is dolgozunk, annyira gyengének ítéljük meg.

6.2 Orientációs modell

$$\dot{\delta} \approx -\frac{v}{L}\left(\tan(\phi) + \frac{1}{\cos^2(\phi)}\Delta\phi\right)$$

$$\dot{p} \approx v\left(\tan(\delta) + \frac{1}{\cos^2(\delta)}\Delta\delta - \tan(\phi) - \frac{1}{\cos^2(\phi)}\Delta\phi - \frac{p}{L}\left(\tan(\delta) + \frac{1}{\cos^2(\delta)}\Delta\delta\right)\left(\tan(\phi) + \frac{1}{\cos^2(\phi)}\Delta\phi\right)\right)$$

Használva, hogy $\tan(0) = 0$ és $\cos(0) = 1$, a fenti egyenletek a következő formára egyszerűsödnek a választott munkapontunk környékén.

$$\dot{\delta} \approx -\frac{v}{L}\left(0 + \frac{1}{1}\Delta\phi\right)$$

$$\dot{p} \approx v\left(0 + \frac{1}{1}\Delta\delta - 0 - \frac{1}{1}\Delta\phi - \frac{p}{L}\left(0 + \frac{1}{1}\Delta\delta\right)\left(0 + \frac{1}{1}\Delta\phi\right)\right)$$

Mivel a $p = 0$ munkapontot választottuk, ezért az aktuális p érték minding $0 + \Delta p$ alakban írható. Így $\dot{p} = (0 + \dot{\Delta p}) = \dot{\Delta p}$. Ez lehetővé teszi, hogy az eredeti változóink helyett azok munkaponttól való eltérést használjuk új változónak (lásd lineáris változócsere integrálok számításánál). Így a változócsere utáni egyenleteink az alábbiak lesznek.

$$\dot{\Delta\delta} \approx -\frac{v}{L}\Delta\phi$$

$$\Delta\dot{p} \approx v\left(\Delta\delta - \Delta\phi - \frac{p}{L}(\Delta\delta)(\Delta\phi)\right)$$

Lineáris modellt szeretnénk kapni, ezért a megjelenő $(\Delta\delta)(\Delta\phi)$ kvadratikus tagot is elhanyagoljuk (ahogy a $\tan(x)$ sorfejtéséből is elhanyagoltuk a négyzetes és magasabb rendű tagokat). Valamint a sok Δ írását is unjuk, ezért elhagyjuk. Ez a nulla munkaponti értékek miatt ráadásul még jelentésbeli problémát sem okoz. Elfelejtve, hogy közelítő egyenleteink vannak, a linearizált modell egyenletei az alábbiak.

$$\dot{\delta} = -\frac{v}{L}\phi$$

$$\dot{p} = v(\delta - \phi)$$

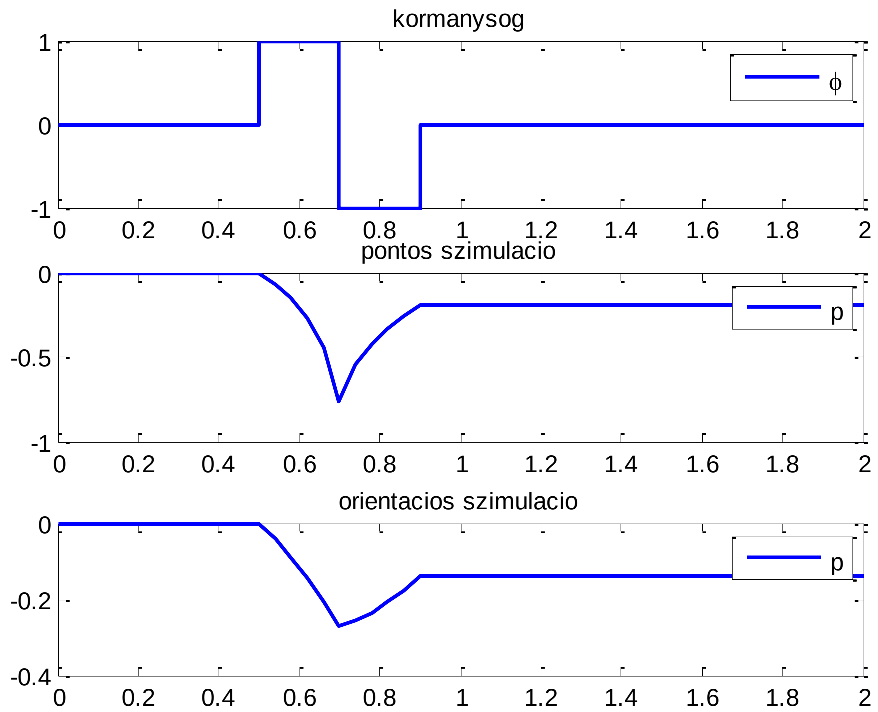
Ez a rendszer leírható az alábbi állapotegyenletekkel

$$\begin{bmatrix}\dot{\delta}\\ \dot{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ v & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\\ p\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-v/L\\ -v\end{bmatrix}\phi \qquad p = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\\ p\end{bmatrix} + 0\phi \qquad \delta = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\\ p\end{bmatrix} + 0\phi$$

Ha átviteli függvény alakban szeretnék felírni a kormányszög és a vonaltávolság közti átvitelt, akkor

$$P_o(s) = -\frac{vs + \frac{v^2}{L}}{s^2}$$

alakú átviteli függvényt kapunk. Nézzük meg, hogy ez modell hogyan viselkedik az előbbi szituációban.



Láthatóan egy fokkal jobb modellt kaptunk. Ugyan a távolság változásának dinamikája még mindig nagyon más a szimulált és a közelítő modell által adott ábrákon, azt a tulajdonságot azonban már hozza a modell, hogy ez a modell szintén vonallal párhuzamos haladást jelez előre, a vonaltól való távolság értékében természetesen téved, de ez az elhanyagolások miatt érthető.