## Числовые ряды

**Опр. числового ряда**: пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда выражение вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ называется числовым рядом.

$a_n$ называется общим членом ряда.

$S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \ldots + a_N$ называется $N$-й частичной суммой.

$r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$ называется $N$-м остатком ряда.

**Опр. сходимости ряда**: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если существует $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S \in \mathbb{R}$. В этом случае число $S$ называют суммой этого ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся, если предел $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ не существует (в том числе бесконечный предел).

**Критерий Коши**: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N,\ p \geq 1 \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Longleftrightarrow$

$$//\text{Кр. Коши для последовательностей}// \Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N,\ p \geq 1 \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

а $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$. □

**Необходимое условие сходимости ряда**: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Доказательство.* Следует из Критерия Коши при $p = 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_{n+1}| < \varepsilon$$

□

**Утверждение (арифм.свойства)**. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ – сходящиеся ряды. Тогда для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ сходится и его сумма равна $\alpha A + \beta B$.

*Доказательство.* упражнение □

**Опр. абсолютно и условно сходящегося ряда**. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

**Утверждение об абсолютной сходимости ряда**. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

*Доказательство.* Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то по Критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N,\ p \geq 1 \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

По неравенству треугольника:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

а значит выполнен Критерий Коши для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и, следовательно, он сходится. $\square$

**Теорема (о группировке членов ряда без изменения порядка)**. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и строго возрастающая последовательность $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем $k_1 = 1$. Обозначим $b_n = a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряд, полученный группировкой членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда

1) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = A$, т.е. группировка сходящегося ряда не меняет сумму.

2) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ и существует $m :\ k_{n+1} - k_n < m\ \forall n \in \mathbb{N}$ (т.е. группируем не более, чем по $m$ членов), то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = B$.

*Доказательство.* 1) Частичная сумма сгруппированного ряда $B_N = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_{N+1}-1} = A_{k_{N+1}-1}$ – частичная сумма исходного ряда. Если исходный ряд сходится, то существует предел $A_{k_{N+1}-1} \to A$, и частичные суммы сгруппированного ряда сходятся к тому же числу.

2) Частичная сумма исходного ряда:

$$A_N = a_1 + \ldots + a_N = a_1 + \ldots + a_{k_s - 1} + a_{k_s} + \ldots + a_N = b_1 + \ldots + b_{s-1} + a_{k_s} + \ldots + a_N = B_{s-1} + a_{k_s} + \ldots + a_N$$

Обозначим $\alpha_s = \max\{|a_{k_s}|, |a_{k_s+1}|, \ldots, |a_{k_{s+1}-1}|\}$. Тогда

$$B_{s-1} - m\alpha_s \leq A_N \leq B_{s-1} + m\alpha_s$$

Переходим к пределу (заметим, что из $N \to \infty$ следует $s \to \infty$, и из $a_n \to 0$ следует $\alpha_s \to 0$):

$$B \leq \lim_{N \to \infty} A_N \leq B$$

Следовательно, по определению ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, причем его сумма равна $B$. $\square$