Adatbázisok
Relációs lekérdezőnyelvek gyakorlat feladatmegoldások

Engedy Balázs
engedy@db.bme.hu

2012. július 24.

Figyelem! Kérlek, mielőtt használod, nézd meg, hátha felkerült még újabb változat a https://github.com/szarnyasg/BUTE-Databases-Course-Materials címre!
Az észrevételeket és a felfedezett sajtóhibákat a szarnyas@db.bme.hu címen várjuk.

Tartalomjegyzék

1. Felhasznált relációk

1.1. M(unkahelyek) reláció

1: név	2: foglalkozás	3: munkahely	4: kereset
Aladár	asztalos	OBI	1001
Béla	rendőr	BRFK	1002
Cecil	fogorvos	Rendelő	1003
Dezső	tanár	BME	1004
Elemér	tanár	ELTE	1005
Judit	fodrász	BjutiSzalon	1006
Kata	tanár	ELTE	1007
Lilla	igazgató	BjutiSzalon	1008
Mariann	rendőr	BRFK	1009
Nóra	műkörmös	BjutiSzalon	1010

1.2. H(ázasságok) reláció

1: férj	2: feleség
Aladár	Judit
Béla	Mariann
Elemér	Nóra

1.3. N(ők) reláció

1: név
Judit
Kata
Lilla
Mariann
Nóra

2. Feladatok

1. Kik a relációkban szereplő férfiak?
2. Kik az egyedülálló nők?
3. Mely házaspároknál keres a nő jobban?
4. Melyek foglalkozásokat űzi mindkét nem?
5. A Bjútiszalonban dolgozó nők férjei?
6. Kik a házasságban élő tanárok?
7. Melyek azok a foglalkozások, amelyeket legalább ketten űznek?
8. Melyek azok a foglalkozások, amelyeket csak egy-egy ember űz?

3. Sor- és oszlopkalkulus

3.1. Bevezetés

Az sor- és oszlopkalkulus két, az elsőrendőrendű logikához[1] nagyon hasonló relációs lekérdezőnyelv. A velük kapcsolatos legfontosabb tudnivaló, hogy a könyvbéli őket leíró 40., 43. oldaltól nem szabad megijedni. Itt mindössze formalizáltunk valami nagyon hasonlót ahhoz, amit középiskolai, egyetemi tanulmányaitok során már rengetegszer láttatok és használtatok matematikai állítások, bizonyítások leírásakor.

További kérdéseket vethet fel a könyvbeli bevezetésnél a formalizmus (milyen karaktersorozatok legálisak) és a jelentés (mit jelentenek a karaktersorozatok) szétválasztása. Ez két szempontból is indokolt: egyrészt ez a jelentéshozzárendelés teljesen önkényes, akár más jelentést is rendelhetnénk hozzá a karaktersorozatokhoz. Másrészt, ha úgy tetszik, ezt rendre meg is tesszük. Esetünkben pl. a $R^{(3)}(1,2,3)$ atomi formulához az „igaz” értéket rendeljük, ha jelenlegi pillanatban az R alaprelációink a $\{(1,2,2),(1,2,3),(2,3,4)\}$ reláció, de a „hamis” értéket, ha $R = \{(2,3,4),(3,4,5)\}$. Tehát a jelentést befolyásolják a formulákban előforduló alaprelációk pillanatnyi értékei.

Mi is van tehát pontosan a könyv 40. oldalán?

Szimbólumok Egy nyelv formális leírásakor minden alulról felfelé építkezünk: először megadjuk a legalacsonyabb szintű építőelemek, az ún. szimbolúmok halmazát. Ezzel mindössze annyi a célunk, hogy pontosan rögzítsuk, egy sor-/oszlopkalkulus formula milyen „karakterek” sorozata lehet.

[1]Ezt tanultátok pl. Mesterséges Intelligencia tárgyból.

Atomok Ez a következő szint, ők lesznek a legkisebb elemek, amikhez a jelenetés megadásakor konkrét igazságértékek (igaz, hamis) fognak rendelődni. Például az $R^{(4)}(v^{(4)})$ atomhoz akkor fogjuk az „igaz” értéket rendelni, ha $v^{(4)} \in R^{(4)}$ relációnak.

(Összetett) formulák Ez lesz a legmagasabb szint, amihez igazságértékeket fogunk rendelni a jelentés megadásakor. Minden atom egyben formula, illetve (rekurzívan) formulákat logikai összekötőkkel (és, vagy) összekapcsolva, illetve kvantálva is formulát fogunk kapni. A formulákban vannak olyan változók, amelyek kvantor hatáskörében állnak, és vannak olyanok, amelyek nem. Utóbbiak az ún. *szabad* változók, ezek értékét külön meg kell adni, hogy lehetséges legyen az adott formulát egy bool-értékké kiértékelni.

Kifejezés Ez a legfelső szint. A jelentésben ehhez nem igazságértékeket, hanem egy halmazt fogunk rendelni, mégpedig azt, amelyik a jobb oldalon (a | után) szereplő formula szabad változóinak olyan behelyettesítésiérték-kombinációt tartalmazza (ennesekként), amelyre a formula igaz.

3.2. Sorkalkulus

3.2.1. Kik a relációkban szereplő férfiak

Egy névlistára vagyunk kíváncsiak, tehát az eredményhalmazban egydimenziós ennesek (n-esek) lesznek, ezek legyártásához egydimenziós sorváltozóra van szükség. Tegyük fel, hogy minden férfi szerepel a `Munkahelyek` relációban is (ez most igaz). Ekkor a kívánt eredményhalmazt előállító *sorkalkulus kifejezés*:

$$\{s^{(1)} | \left(\exists u^{(4)} M^{(4)}(u^{(4)}) \wedge u[1] = s[1]\right) \wedge \neg \left(\exists v^{(1)} N^{(1)}(v^{(1)}) \wedge v[1] = s[1]\right)\}$$

A fenti értelmezése: az eredményhalmazban azok az $s^{(1)}$ értékek szerepelnek, melyekre az alábbi mindkét állítás (*részformula*) igaz:

1. $\left(\exists u^{(4)} M^{(4)}(u^{(4)}) \wedge u[1] = s[1]\right)$: azaz az adott $s^{(1)}$-hez tudunk találni egy olyan $u^{(4)}$-et[2], hogy $u^{(4)}$ benne van az $M^{(4)}$ relációban, és első komponense (név) megegyezik az $s^{(1)}$ első komponensével. Azaz, másképp fogalmazva: szerepel az $M^{(4)}$ relációban egy olyan négyes, aminek az első komponense $s^{(1)}$, azaz: az $M^{(4)}$ reláció első oszlopában szerepel $s^{(1)}$, tehát $s^{(1)}$ egy név.

2. $\neg \left(\exists v^{(1)} N^{(1)}(v^{(1)}) \wedge v[1] = s[1]\right)$: az előbbihez hasonlóan, csak itt nem létezést állítunk, azaz nem találunk az adott $s^{(1)}$-hez egy olyan $v^{(1)}$-et, hogy $v^{(1)}$ benne van az $N^{(1)}$ relációban, és első komponense megegyezik az $s^{(1)}$ első komponensével. Azaz

[2]Azaz e részformula kiértékelése előtt rögzítjük azt a bizonyos $s^{(1)}$-et, amire el akarjuk dönteni, hogy benne van-e az eredményhalmazban, és az értéket fixen tartva értékeljük ki a kvantoros kifejezést.

nem szerepel az $N^{(1)}$ relációban egy olyan érték, aminek az első (és itt egyetlen) komponense $s^{(1)}$ első komponensével egyezik meg, azaz: az $N^{(1)}$ reláció első (és egyetlen) oszlopában nem szerepel $s^{(1)}$, tehát $s^{(1)}$ nem egy női név.

És valóban: ha egy név nem női név, akkor férfi név.

Láthatjuk tehát, hogy a fentiekhez hasonló felépítésű, kvantoros részformulával írhatjuk le azt az elvárást, hogy egy sorváltozó egy komponense eleme legyen egy reláció adott oszlopának. Biztos, hogy kell ez a bonyolítás!? Nos, az első részformulánál mindenképp. Bármennyire is csábító lenne leírni, hogy $M^{(4)}(s^{(1)})$, ez szintaktikai hibás, mivel a reláció és a sorváltozó dimenziója nem egyezik meg, ilyen atomot a sorkalkulus nyelve nem engedélyez.

A második esetben viszont azonosak a dimenziók, valóban egyszerűsíthetjük a kifejezés felírását:

$$\{s^{(1)}|\left(\exists u^{(4)} M^{(4)}(u^{(4)}) \wedge u[1]=s[1]\right) \wedge \neg N^{(1)}(s^{(1)})\}$$

Ez továbbra is ugyanazt az eredményhalmazt állítja elő, de most közvetlenül fogalmaztuk meg $s^{(1)}$-ről, hogy nem eleme $N^{(1)}$-nek.

3.2.2. Kik az egyedülálló nők

Ugyanaz a feladat, mint az előbb, csak most az 1-aritású relációnak eleme az egydimenziós sorváltozó, és egy több-aritású másik reláció adott oszlopában nem szerepelhet:

$$\{s^{(1)}|\neg\left(\exists u^{(2)} H^{(2)}(u^{(2)}) \wedge u[2]=s[1]\right) \wedge N^{(1)}(s^{(1)})\}$$

3.2.3. Mely házaspároknál keres a nő jobban

Ahogy a megfogalmazásban is tükröződik, itt már házas*párokat*, tehát kételemű enneseket kell eredményül szolgáltatnunk, így kétdimenziós sorváltozóval generáljuk az eredményhalmazt:

$$\{s^{(2)}|\left(H^{(2)}(s^{(2)})\right)\wedge\left(\exists u^{(4)}, v^{(4)} M^{(4)}(u^{(4)}) \wedge M^{(4)}(v^{(4)}) \wedge u[1]=s[1] \wedge v[1]=s[2] \wedge u[4]<v[4]\right)\}$$

Értelmezzük ezt a kifejezést: az eredményhalmazban azok az $s^{(2)}$ párok szerepelnek, melyekre az alábbiak mindegyike igaz:

1. $\left(H^{(2)}(s^{(2)})\right)$: azaz a vizsgált $s^{(2)}$ a $H^{(2)}$ reláció eleme, tehát egy házaspárt ír le.

2. $\left(\exists u^{(4)}, v^{(4)} M^{(4)}(u^{(4)}) \wedge M^{(4)}(v^{(4)}) \wedge u[1]=s[1] \wedge v[1]=s[2] \wedge u[4]<v[4]\right)$: tehát az adott $s^{(2)}$-hoz találunk olyan $u^{(4)}$ és $v^{(4)}$ sorvektorokat[3], hogy ezek mindketten az $M^{(4)}$ reláció elemei, első komponensük rendre megegyezik $s^{(2)}$ első, illetve második komponensével, és negyedik komponensük között pedig „kisebb" aritmetikai reláció

[3] mégpedig egyértelműen, mivel a név egyértelműen azonosít egy munkavállalót esetünkben

áll fenn. Másképp fogalmazva: létezik az $M^{(4)}$ relációnak két olyan sora, hogy az egyik („név” alapján) az adott házaspár férfi tagjához, a másik pedig a női tagjához tartozik, és a feleséget leíró négyesben a kereset értéke több, mint a férjet leíróban.[4] Tehát az $s^{(2)}$ házaspár nő tagja többet keres a férfinél.

Vegyük észre, hogy a második részformulában nem mást valósítottunk meg, mint két illesztést: a `Házasságok` reláció soraihoz illesztettük duplán a `Munkahelyek` reláció sorait, egyszer a „férj–név”, másodszor a „feleség–név” attribútumok mentén. (Tehát minden házaspárt leíró ennest kiegészítettük az egyes tagok munkaviszonyát leíró attribútumértékekkel.) Ezek után már könnyen megadhattuk a szelekciós feltételt az aritmetikai reláció személyében – az „illesztett” adatokra vonatkozóan.

3.2.4. Melyek foglalkozásokat űzi mindkét nem

Itt a `Munkahelyek` reláció második oszlopának azon elemeit kell kigyűjteni (lásd: 3.2.1. szerint), amelyhez tartozik két olyan `Munkahelyek`-beli ennes, hogy az egyik név szerint egy férfihoz, a másik egy nőhöz illeszthető (lásd: 3.2.3). (Nem kell megijedni az esetleges négyszeres kvantálástól!)

3.2.5. A Bjútiszalonban dolgozó nők férjei

A `Házasságok` és `Munkahelyek` reláció illesztését, szűrését, majd vetítését megvalósító sorkalkulus-kifejezést kell alkotni, a fentiekben ismertetettekhez hasonlóan.

3.2.6. Kik a házasságban élő tanárok

Az előbbiekhez hasonlóan. Kihasználhatjuk, hogy atomokból legózzuk össze az „illesztéseket”, így könnyen tudunk egy olyan illesztést készíteni, hogy az egyik relációbeli enneshez a másik relációból egy olyan ennest illesztünk, hogy utóbbinak egyik VAGY másik attribútuma megegyezik előbbi egy attribútumával.

3.2.7. Melyek azok a foglalkozások, amelyeket legalább ketten űznek

A következő módon okoskodunk: azok a foglalkozások, amelyeket legalább ketten űznek, a `Munkahelyek` reláció második oszlopában legalább kétszer fognak szerepelni, mégpedig úgy, hogy mellettük az első oszlopban más-más név áll.

Tehát az eredményhalmazban azok az $s^{(1)}$ foglalkozások szerepelnek, amelyekhez találunk a `Munkahelyek` relációban két olyan $u^{(4)}$ és $v^{(4)}$ sort, hogy bennük azonos foglalkozás (2. attribútum), de különböző ember neve (1. attribútum) szerepel (ezzel már

[4] Ne feledjük, e részformula kiértékelésekor az $s^{(2)}$ változó (amely egyébként a részformula ún. *szabad* változója) értékét rögzítjük, tehát egy rögzített $s^{(2)}$-re kell „végigpróbálgatni”, hogy létezik-e megfelelő $u^{(4)}$ és $v^{(4)}$. Természetesen a próbálgatást összességében „minden” $s^{(2)}$-re el kell végezni, de minden $s^{(2)}$-re külön „ciklusban” keresünk u és v-ket.

kiküszöböljük azt a helyzetet is, amikor a két kvantor ugyanazt a rekordot „választaná be”, ezt így nem kell külön ellenőrizni):

$$\{s^{(1)}|\left(\exists u^{(4)}, v^{(4)} M^{(4)}(u^{(4)}) \wedge M^{(4)}(v^{(4)}) \wedge u[1] \neq v[1] \wedge u[2] = v[2] \wedge s[1] = u[2]\right)\}$$

3.2.8. Melyek azok a foglalkozások, amelyeket csak egy-egy ember űz

Az előző halmaz komplementere az összes foglalkozásra nézve, a formulát negálva kapható:

$$\{s^{(1)}|\left(\exists u^{(4)} M^{(4)}(u^{(4)}) \wedge s[1] = u[2]\right) \wedge \neg\Phi(s^{(1)})\}$$

ahol $\Phi(s^{(1)})$ az előző feladatban szereplő formula. A bal oldali részformula azért kell, hogy valóban csak azokat a *foglalkozásokat* kapjuk meg, amit csak egy-egy ember űz, és ne *mindent*, ami nem egy két ember által űzött foglalkozás.

3.3. Oszlopkalkulus

Lássuk, miben is különbözik egy oszlopkalkulus-kifejezés egy sorkalkulus-kifejezéstől!

- Vektorváltozók ($s^{(n)}$) helyett skalárváltozókat ($u, v, w, \ldots$) használunk. Például egy $s^{(n)}$ sorváltozót n darab skalár oszlopváltozóval, $u_1, u_2, ..., u_n$-nel helyettesítünk, melyek az eredeti vektorváltozó komponenseinek felelnek meg. De természetesen a skalárok átrendezhetőségének, tetszőleges kombinálhatóságának köszönhetően ennél sokkal rugalmasabb kifejezésekben gondolkodhatunk.
- Ennek megfelelően $R^{(n)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ módon jelölhetjük, hogy az u_i-kból képzett ennes eleme az R relációnak.
- Indexelésre ($s^{(n)}[i]$) nincs továbbá szükségünk, hiszen egy-egy oszlopváltozó épp a sorváltozó egy-egy komponensének, attribútumának felel meg.
- Végül a kifejezésben az egyetlen sorváltozó helyett oszlopváltozók egy sorozatával generáljuk az eredményhalmazt: $\{u_1, \ldots, u_n | \Psi(u_1, \ldots, u_n)\}$. Az eredményben pontosan azok az $(u_1, \ldots, u_n)$ ennesek lesznek, melyeknek u_i komponenseit (egyszerre) Ψ-be helyettesítve az igaznak adódik.

3.3.1. Kik a relációkban szereplő férfiak

A 3.2.1. fejezetben tárgyalt sorkalkulusnak- megfelelő oszlopkalkulus-kifejezés:

$$\{t|\left(\exists u, v, w : M^{(4)}(t, u, v, w)\right) \wedge \neg N^{(1)}(t)\}$$

A fenti értelmezése: az eredményhalmazban azok a t értékek szerepelnek, melyekre az alábbi mindkét állítás (*részformula*) igaz:

1. $\big(\exists u, v, w : M^{(4)}(t, u, v, w)\big)$: azaz az adott t-hez tudunk találni olyan u, w és w-t, hogy az ezekből alkotott négyes benne van az $M^{(4)}$ relációban. Azaz, másképp fogalmazva: szerepel az $M^{(4)}$ relációban egy olyan négyes, aminek az első komponense t, azaz az $M^{(4)}$ reláció első oszlopában szerepel t, tehát t egy név.

2. $\neg N^{(1)}(t)$: az $N^{(1)}$ reláció első (és egyetlen) oszlopában nem szerepel t, tehát t nem egy női név.

Figyeljük meg, hogy a sorkalkulust használó megoldással ellentétben az első részkifejezésben a `Munkahelyek`-beli első attribútumra vonatkozóan nem kell új segédváltozót felvennünk, amelyet aztán a kvantált részformulában egyenlővé kell tenni a kívülről érkező változóval, hanem közvetlenül a kívülről érkezett változót használjuk.

3.3.2. Kik a házasságban élő tanárok

A kívánt eredményhalmazt adó kifejezés:

$$\{t|\ \big(\exists u, v, w : M^{(4)}(t, u, v, w) \wedge u = \text{'}\mathit{tanár}\text{'}\big) \wedge \big(\exists s : H^{(2)}(s, t) \vee H^{(2)}(t, s)\big)\}$$

Értelmezése: az eredményhalmazban azok a t értékek szerepelnek, melyekre tudunk találni olyan u, w és w-t, hogy az ezekből alkotott négyes az $M^{(4)}$ reláció egy olyan sorát képzi, ahol a 2. attribútum az, hogy 'tanár' (ez szűr arra, hogy t egy tanár neve legyen), illetve tudunk t-hez egy olyan s-t találni, hogy valamilyen sorrendben, (s, t) vagy (t, s) ennes benne legyen a `Házasságok` relációban, azaz t egy férj vagy feleség neve legyen. Azok a t-k, amelyekre mindkét állítás igaz, lesznek a házas tanárok nevei.

3.3.3. A Bjútiszalonban dolgozó nők férjei

A kívánt eredményhalmazt adó kifejezés:

$$\{t|\ \big(\exists s, u, v, w : M^{(4)}(s, u, v, w) \wedge v = \text{'}\mathit{Bjútiszalon}\text{'} \wedge H^{(2)}(t, s)\big)\}$$

Értelmezése: az eredményhalmazban azok a t férfinevek szerepelnek, melyekhez tudunk találni olyan s, u, v és w értékeket, hogy az (s, u, v, w) négyes egy olyan munkavállaló adatait írja le, hogy a munkahelye a 'Bjútiszalon', és ez munkavállaló egy olyan házastársi kapcsolat „feleség" oldalát adja, ahol a férj a t.

Figyeljük meg, hogy lényegében egy illesztést végeztük el: a `Munkahelyek` reláció egy sorához illesztettük a „név–feleség" attribútumok mentén a `Házasságok` reláció egy sorát. Ugyanakkor míg a a 3.2.3. fejezetben leírt sorkalkulusos megoldásban két, eredetileg független változót vettünk fel a két illesztendő relációhoz, majd a reláció megfelelő elemeit egy külön egyenlőségvizsgálattal kapcsoltuk össze, addig itt az megfelelő rekordok összekapcsolása implicite adódik abból, hogy ugyanazt az oszlopváltozót használtuk fel az M és H-beli ennesek kijelölésére.

4. Biztonságos sorkalkulus

Elevenítsük fel, hogyan is definiáltuk a biztonságos kifejezések fogalmát!

1. Definíció. *Egy $\{t|\Psi(t)\}$ kifejezés biztonságos, ha:*

(i.) *$\forall t$ esetén, ahol $\Psi(t)$ igaz, t minden komponense $DOM(\Psi)$-beli.*

(ii.) *a* részformulák biztonságosok*, azaz Ψ minden $\exists u\omega(u)$ részformulájára fennáll, hogy $\forall u$ esetén, ahol $\omega(u)$ igaz, az ω-beli szabad változók valamely értéke mellett, akkor u minden komponense $DOM(\omega)$-beli.*

2. Definíció. *Egy $\Psi(t)$ formula $DOM(\Psi)$ doménje egy olyan halmaz, amely tartalmazza:*

(i.) *a $\Psi(t)$-ben található alaprelációk valamennyi attribútumának értékeit és*

(ii.) *a $\Psi(t)$-ben előforduló konstansokat.*

Először is vegyünk észre egy általános érvényű állítást. Ha egy kifejezés biztonságos, akkor véges sok helyettesítés teszi igazzá, és végtelen[5] sok helyettesítés nem. Így ha benne a formulát negáljuk, akkor végtelen sok helyettesítés fogja igazzá tenni, és csak véges sok nem.

Tehát egy biztonságos kifejezés formuláját negálva nem biztonságos kifejezést kapunk. Hasonló igaz a részformulák biztonságosságára is.

Az állítás visszafelé viszont nem igaz, nem biztonságos formulát negálva nem feltétlen lesz biztonságos, hisz elképzelhető, hogy mind az őt igazzá tevő, mind pedig az őt igazzá nem tevő helyettesítések halmaza is végtelen volt (pl: $\Psi(x) = ((x\%2) = 0)$), vagy tartalmazhat továbbra is nem biztonságos részformulát (s így a *(ii.)* feltételt sérti).

Most a feladatban megadott formulákból felépített kifejezések biztonságosságát fogjuk vizsgálni. Ennek eldöntéséhez célszerű egyszerűen a definíció alapján dolgozni, azaz megvizsgálni, hogy a két követelmény teljesül-e.

4.1. Kvantor nélküli kifejezések

Itt tehát nincs kvantort tartalmazó részformula, tehát csak az *(i.)* feltétel teljesülését kell vizsgálni.

[5]Kvázi-végtelen, hisz teljes vizsgálódásunkat korlátozza az interpretációhoz választott A alaphalmaz mérete. De ha csupán ennek növelésével nő egy halmaz mérete (mert korábban csak azért nem tartalmazott egy elemet, mert az nem volt benne A-ban), azt ilyen tekintetben „végtelen"-nek vesszük. Ilyen tekintetben „véges"-nek nevezünk egy halmazt, ha mérete nem A miatt korlátozott.

- $\{s^{(m)}|s^{(m)}[1] < 3\}$
  Nem biztonságos, hisz végtelen sok olyan ennes van, amelynek első komponense 3-nál kisebb, így végtelen nagy az eredményhalmaz (az *(i.)* feltétel nem teljesül). A domén egyébként a $\{3\}$ halmaz.

- $\{s^{(m)}|R^{(m)}(s^{(m)}) \wedge s^{(m)}[1] = 3\}$
  Ez a kifejezés biztonságos, hisz a formulájában olyan ÉS-kapcsolat van, amelynek első operandusát csak $R^{(m)}$-beli $s^{(m)}$-ek elégíthetik ki, amelyek elemei viszont definíció szerint benne vannak a formula doménjében, hiszen az tartalmazza a benne szereplő alaprelációk minden elemét. Így az *(i.)* feltétel teljesül, és ez most kvantort tartalmazó részformula hiányában elég is.

- $\{s^{(m)}|R^{(m)}(s^{(m)}) \wedge s^{(m)}[1] < 3\}$
  Ugyanúgy biztonságos.

- $\{s^{(m)}|R^{(m)}(s^{(m)}) \wedge \neg\left(s^{(m)}[1] = 3\right)\}$
  Ugyanúgy biztonságos. Látható, hogy az $R^{(m)}(s^{(m)})$ részformula annyira „biztos", hogy bármi kvantormenteset[6] is hozunk vele ÉS-kapcsolatba, a kifejezés biztonságos marad. Hiszen bármit is írunk az $R^{(m)}(s^{(m)})\wedge$ mellé, a doménnek ugyanúgy részét fogja kérdezni $R^{(m)}$ minden eleme, e reláción kívüli $s^{(m)}$ pedig továbbra sem elégítheti ki a formulát (az ÉS-kapcsolat miatt).

- $\{s^{(m)}|\neg R^{(m)}(s^{(m)}) \wedge s^{(m)}[1] = 3\}$
  A biztonságosság az m értékétől függ. Ha $m = 1$, akkor biztonságos, hisz $s^{(1)}$ csak a konstans 3 értéket veheti fel, és $3 \in DOM = \{3\} \bigcup R$. Ha $m > 1$, akkor nem biztonságos, hisz az egyenlőség csak $s^{(m)}$ első komponensét köti, a többi komponense bármilyen $R^{(m)}$-en kívüli lehet, ami végtelen nagy eredményhalmazt jelent.

4.2. Kvantort tartalmazó kifejezések

- $\{x|R(x) \wedge (\exists z : x = z)\}$
  Látható, hogy a kvantoros részformula a végeredmény tekintetében nem sok vizet zavar, a biztonságosság szempontjából annál fontosabb. Bár az *(i.)* feltételt teljesíti a kifejezés, hisz az eredményhalmaz épp az R reláció lesz, van viszont egy $\exists u \omega(u)$ alakú részformula, amelynek doménje az üres halmaz (hoppá!, nincs benne sem konstans, sem reláció), miközben $z = x$ teljesíti, így a *(ii.)* feltétel meghiúsul, a kifejezés nem biztonságos.

- $\{x|\,(\exists z : R(x) \wedge x = z)\}$
  Az eredményhalmaz ugyanúgy megegyzik R-rel, és az $R(x)$ feltétel miatt már a belső részformula is csak olyan z-kre igaz, amelyek R-beliek, miközben a részformula

[6] hogy a *(ii.)* feltételt ne rontsa el

doménje meghízott, $DOM = R$ lett, így mindkét feltétel teljesül, a kifejezés biztonságos. Ellentétben az előbbivel, mialatt ugyanazt az eredményhalmazt állítják elő!

4.3. Összetett kifejezések

Az alábbi részformulákat fogjuk $\exists y : \Phi(x,y)$, $\exists y : \Psi(x,y)$, $\exists y : \Omega(x,y)$ alakban beépíteni az összetett kifejezésekbe. Az így kapott kvantoros részformulák akkor lesznek biztonságosak (így az összetett kifejezés biztonságosságához szükséges *(ii.)* feltételt akkor nem rontják el), ha a Φ, Ψ és Ω formulák rendre csak olyan y-okra teljesülhetnek, amelyek benne vannak a doméjükben (tehát x-szel nem foglalkozunk). A domén mindenütt $DOM = \pi_1(R_1) \bigcup \pi_2(R_1) \bigcup \{0\}$.

- $\Phi(x,y) = R_1(x,y) \wedge y > 0$
  Biztonságos részformulát[7] fog adni, mert $R_1(x,y)$-et tartalmazza ÉS-kapcsolatban, így csak R_1-beli (s így doménbeli) y-okra teljesühet. Negáltja ebből következően nem biztonságos[8].

- $\Psi(x,y) = \neg R_1(x,y) \vee y > 0$
  Ez a relációjel megfordításától eltekintve az előző negáltja (De Morgan azonosság), tehát nem biztonságos részformulát fog adni, de a negáltja igen.

- $\Omega(x,y) = R_1(x,y) \vee y > 0$
  Végtelen sok y igazzá teszi (a VAGY-kapcsolat miatt), így nem fog biztonságos részformulát adni. Negáltja $\neg R_1(x,y) \wedge y <= 0$, ezt is végtelen sok x, y igazzá teszi, tehát a negáltja esetén sem lesz biztonságos.

Lássuk tehát, hogy ha a fentiekből különféle $\Theta(x)$ összetett formulákat építünk, akkor az ezekből képzett $\{x|\Theta(x)\}$ kifejezés mikor biztonságos. Minden esetben:

$$DOM(\Theta) = \pi_1(R_1) \bigcup \pi_2(R_1) \bigcup R_2 \bigcup \{0\}$$

.

- $\Theta(x) = R_2(x) \wedge \exists y : \Phi(x,y)$
  Biztonságos lesz, hiszen az eredményhalmaz a bal oldal miatt legfeljebb az R_2-ben lévő x-eket tartalmazhatja (*(i.)* feltétel O.K.), és az előbb megvizsgáltuk, hogy az Φ-ből képzett kvantoros részformula biztonságos lesz (*(ii.)* feltétel O.K.).

[7] Tehát a belőle képzett $\exists y : \Phi(x,y)$ részformula *biztonságos részformula* lesz.
[8] Tehát a belőle képzett $\exists y : \neg\Phi(x,y)$ részformula nem lesz *biztonságos*.

- $\Theta(x) = R_2(x) \wedge \exists y : \Psi(x, y)$
  Nem biztonságos, hiszen az előbb megvizsgáltuk, hogy az Ψ-ből képzett kvantoros részformula nem biztonságos, így a *(ii.)* feltétel nem teljesül.

- $\Theta(x) = R_2(x) \wedge \forall y : \Phi(x, y)$
  Az univerzális kvantorról nem szól a fáma, alakítsuk át egzisztenciális kvantorrá: $R_2(x) \wedge \neg\exists y : \neg\Phi(x, y)$. Láttuk azonban, hogy Φ negáltja elé egzisztenciális kvantort írva nem biztonságos részformulát kapunk, tehát a *(ii.)* feltétel nem teljesül, a kifejezés nem biztonságos.

- $\Theta(x) = R_2(x) \wedge \forall y : \Psi(x, y)$
  Hasonlóan átalakítva kapható, hogy mivel Ψ negáltját kvantálva biztonságos részformula adódik, a kifejezés is biztonságos.

- $\Theta(x) = \neg R_2(x) \wedge \exists y : \Phi(x, y)$
  Figyelem! Ennél, és azt ezt követő kifejezéseknél már az *(i.)* feltétel teljesülését nem garantálja egy fix $R_2(x)$ tag, a véges eredményhalmazról is a kvantort tartalmazó részformulának kell gondoskodni. A Φ-ben lévő $R_1(x, y)$ x értékét is megköti, tehát *(i.)* teljesül, és *(ii.)* változatlanul fennáll, tehát a kifejezés biztonságos.

- $\Theta(x) = \neg R_2(x) \wedge \exists y : \Psi(x, y)$
  Nem biztonságos, a részformula továbbra is elrontja a *(ii.)* feltételt.

- $\Theta(x) = \neg R_2(x) \wedge \forall y : \Phi(x, y)$
  Nem biztonságos, a részformula továbbra is elrontja a *(ii.)* feltételt.

- $\Theta(x) = \neg R_2(x) \wedge \forall y : \Psi(x, y)$
  Figyelem! Ez már így nem biztonságos! Átírva egzisztenciális kvantorra és behelyettesítve:
  $$\neg R_2(x) \wedge \neg\exists y : R_1(x, y) \wedge y \leq 0$$
  Azt állítjuk, hogy ez minden $R_2 \bigcup \pi_1(R_1)$-en kívüli x-re igaz lesz. A kvantoron kívüli részformula ilyen x-re nyilvánvalóan igaz, és hiába keresünk, nem találunk olyan y-t, hogy $R_1(x, y) \wedge y \leq 0$ teljesüljön, hiszen az x-ek miatt $R_1(x, y)$ sosem lesz igaz (mindazokat az x-eket kizártuk, amelyek R_1 első oszlopában szerepelhetnének). Így minden ilyen x-re $\neg\exists y : R_1(x, y) \wedge y \leq 0$ is igaz, tehát x-et már semmi nem köti meg, az eredményhalmaz „végtelen” lesz, az *(i.)* feltétel nem teljesül.

Mely formulák negáltja biztonságos?

Itt az egész $\Theta(x)$ formulák negálására kell gondolni. Az első négy formula negáltjának bal oldalán szerepelni fog egy „$\neg R_2(x) \vee$” tag (De Morgan azonosság!), ami végtelenné teszi az eredményhalmazt, tehát ezek nem lesznek biztonságosak.

Az ötödikre alkalmazhatjuk a fejezet elején ismertetett szabályt: biztonságos kifejezés negáltja nem biztonságos.

A maradék háromra pedig a fenti vizsgálatot elvégezve azt kapjuk, hogy a hatodik és a hetedik nem, de a nyolcadik immár biztonságos lesz!

A Φ és Ψ részformulákat Ω-val helyettesítve hány biztonságos kifejezést kapunk?

A nyolc közül egyik sem lesz biztonságos, hisz láttuk, hogy az $\exists y \Omega(x,y)$ és az $\exists y \neg\Omega(x,y)$ sem biztonságos részformula, így a *(ii.)* feltétel nem teljesül.

5. Gondolkodtató feladatok

Ezek a feladatok, ahogy a nevükből is látszik, arra szolgálnak, hogy átgondoljátok az anyagot, felfedezzetek érdekes összefüggéseket, trükkös megoldásokat! Így e megoldások referencia jelleggel szerepelnek itt, mindenkinek erősen javaslom, hogy először mindenképpen gondolkodjon a kérdéseken, és csak azután vesse össze megoldását azzal, ami itt olvasható!

Mi az összefüggés egy kifejezés biztonságossága és az eredményhalmaz számossága között?

A 4. fejezetben átismételtük a biztonságosság definícióját, mely azt mondta ki, hogy a biztonságosság egyik szükséges feltétele, hogy az eredményhalmazban minden ennes minden eleme a doménből való legyen, ami egy (matematikai értelemben vett) véges halmaz, így a megoldások száma is véges.

Ugyanakkor a véges eredményhalmaz nem elégséges feltétel, hisz egyrészt korántsem biztos, hogy a véges sok ennes a főformula doménjéből való, de még ha onnan is való, egy nem biztonságos részformula akkor is nem biztonságossá teheti az egész kifejezést. Tehát:

$$\text{biztonságos} \Rightarrow \text{véges}$$

$$\text{biztonságos} \not\Leftarrow \text{véges}$$

Mi a legprimitívebb algoritmus, amit el tudsz képzelni egy biztonságos sorkalkulus kifejezés eredményhalmazának előállítására?

Ha a kifejezés biztonságos, az eredményhalmazban legfeljebb DOM-beli elemekből felépülő ennesek lesznek. Első lépés tehát a DOM meghatározása. Ezután egy for-ciklussal végigmehetünk az ennek elemeiből mint komponensekből képzett összes (a kifejezésnek megfelelő dimenziójú) $v^{(n)}$ ennesen, és megvizsgáljuk, hogy kielégíti-e a kifejezést felépítő formulát: ha igen, akkor megy az eredményhalmazba, különben eldobjuk és nézzük a következő ennest.

Ha kvantoros részformulához érünk, akkor annak igazságértékét a következőképpen határozzuk meg egy adott $v^{(n)}$-re. Meghatározzuk a doménjét, majd az ebből képzett $w^{(n)}$ enneseken egy beágyazott for-ciklussal végigmegyünk, és ellenőrizzük, hogy arra a $v^{(n)}$ ennesre, ahol a külső for-ciklus tart, és az aktuális $w^{(n)}$-re teljesül-e a belső formula minden ($\forall$) vagy legalább egy ($\exists$) iterációban.

Több szintű kvantálás esetén ezt rekurzívan ismételjük.

Készíts reláció-algebrai kifejezést egy halmaz legkisebb, illetve második legkisebb elemének kiválasztására! Mi az ennek megfelelő sor- és oszlopkalkulus kifejezés?

Útmutatás: abból induljunk ki, hogy a halmaz legkisebb eleme olyan tulajdonságú, hogy nem létezik olyan elem, amely nála kisebb lenne. Ebből a sor- és oszlopkalkulus megoldás közvetlenül felírható. A relációalgebra-kifejezésben pedig a halmaz önmagával vett Descartes szorzatából szűréssel és vetítéssel előállíthatjuk azokat az elemeket, amelyiknél van kisebb...

A második legkisebb hasonlóan végiggondolva, némileg hosszabb kifejezésekkel kapható.

Mondjunk minél kacifántosabb helybenhagyó műveleteket!

Még akkor is, ha csak egy műveletet tartalmazó relációalgebrai kifejezéseket engedünk meg, számos példát találunk. Gondolhatunk a halmazelméletből örökölt idempotens kétoperandusú műveletetekre: $A \bigcup A = A$ vagy $A \bigcap A = A$. De ilyen a természetes illesztés ($A \bowtie A = A$) is.

Több művelet esetén a lehetőségek száma végtelen, ilyen tulajdonságú például:

$$\pi_{\text{az egyik A oszlopai}}(A \times A)$$

, vagy minden olyan szelekció is, ahol a feltétel minden ennesre teljesül:

$$A = \sigma_{KOR<20}(A) \bigcup \sigma_{KOR\geq 20}(A)$$

Mikor kényelmesebb a sor és mikor az oszlopkalkulus?

Természetesen mindig az, amelyikkel egyszerűbben, rövidebben felírhatjuk a probléma megoldását.

A feladatmegoldásoknál láttuk, hogy az illesztéseket (3.3.3. fejezet), illetve azt, hogy egy, a relációnál rövidebb ennes eleme-e a reláció megfelelő vetületének (3.3.1. fejezet), az oszlopváltozók rugalmasabb kezelhetősége miatt oszlopkalkulussal könnyebb (rövidebb) volt megfogalmazni. Ugyanakkor például, ha nagyon sok eleműek a relációk, rövidebb lehet, ha az egyes attribútumoknak megfelelő sok oszlopváltozót helyett egyetlen, azokat összefogó sorváltozót, tehát sorkalkulust használunk.

Egy Apa-Fia relációból keresd ki azokat, akik nem nagyapák!

Útmutatás: illesszük az A relációt önmagához az $A_1.Fia$ és $A_2.Apa$ attribútumok mentén. Milyen relációt kaptunk így?

Mely relációalgebrai műveletek invertálhatók, és milyen módon az eredeti reláció(k) felhasználása nélkül?

Invertálhatóság alatt itt azt értjük, hogy csak az eredményből az összes eredeti relációk pontosan helyreállíthatóak. A helybenhagyó műveletek nyilvánvalóan ilyenek, ezen kívül nézzük:

- $A \bigcup B$, $A \neq B$: bár ennesek nem vesztek el, nem invertálható, hisz általános esetben nem tudjuk eldönteni, hogy az eredményhalmazban melyik ennes melyik relációból származik.
- $A \bigcap B$, $A \neq B$: ennesek is elvesznek, nem invertálható.
- $A \backslash B$, $B \neq \{\}$: ennesek is elvesznek, nem invertálható.
- $\sigma_F(A)$, F nem minden ennesre igaz: ennesek is elvesznek, nem invertálható.
- $\pi_{\text{nem minden attribútum}}(A)$: oszlopok elvesznek, nem invertálható.
- $A \times B$: invertálható a megfelelő oszlopokra történő vetítéssel.

Az utóbbihoz hasonló kacifántosabb invertálható *kifejezéseket* is gyárthatunk. Arra kell figyelni, hogy ne vesszen el adatelem (attribútumérték), és meg tudjuk határozni, hogy az eredményben melyik adatelemet hova kell „visszatenni”.

Ha egy kifejezés biztonságos, akkor a negáltjáról mit mondhatunk, illetve ellenkező irányban mi a helyzet?

Lásd a 4. fejezetben elején leírtakat!

Soroljuk fel a sor- és oszlopkalkulus közötti átírás főbb lépéseit!

Bizonyítható, hogy az átírás mindig elvégezhető, a bizonyítást, és az átírás lépéseit lásd: tankönyv, 42. oldal.

Miért szükséges a biztonságos sorkalkulus definíciójánál a két feltétel? Mondjunk példát olyan esetekre, ahol a kifejezés csak az egyiket teljesíti, mi ezekkel a probléma?

Ha nem teljesül mindkét feltétel, kiértékelési problémáink adódnak.

Gondoljunk a naiv kiértékelési algoritmusra: bármelyik feltétel is nem teljesül, lesz egy olyan ciklus, amivel kezelhetetlen elemszámon kell végigiterálnunk (hiszen nem korlátozhatjuk a keresést a doménbeli ennesekre, mert így lehet, hogy elvesztünk megoldást (vagy hamis megoldásokat kapnánk), a ciklust minden $v \in A \times ... \times A$ ennesre el kell végezni.)

Tehát vagy az eredmény, vagy egy (kvantoros részformula) részeredménye kezelhetetlen méretűvé nő.