Rendszeroptimalizálás vizsgatételek
Megbízható hálózatok tervezése

Szárnyas Gábor
szarnyas@db.bme.hu

2013. május 19.

Az alábbi dokumentum a Rendszeroptimalizálás (BMEVISZM117), ill. Kombinatorikus optimalizálás (BMEVISZM029) tárgyak *Megbízható hálózatok tervezése* esettanulmányának kidolgozása a 2012-es tételsor alapján (`http://www.cs.bme.hu/kombopt/vizsgatetelek_rendszeropt_2012tavasz.pdf`). A kidolgozás az előadásjegyzet, valamint a Rendszeroptimalizálás (Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid; Typotex) és a Számítástudomány alapjai (Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba; Typotex) könyvek alapján készült.
A legfrissebb verzió és annak forrása elérhető a VIK wikin: `https://wiki-old.sch.bme.hu/bin/view/Infoszak/RendszerOptimalizalasMegbizhatoHalozatokTervezese`.
A kidolgozásban hibák előfordulhatnak, a hibajelentéseket a fenti emailcímen várom.

20. tétel

Globális és lokális élösszefüggőség és élösszefüggőségi szám fogalma. $\lambda(G)$ meghatározása folyamok segítségével (négyzetes és lineáris számú folyamkereséssel).

Definíció (pontösszefüggőség)**.** Egy G gráf k(-szorosan pont)-összefüggő, ha van legalább $k+1$ csúcsa és bármely legfeljebb $k-1$ csúcsát elhagyva összefüggő marad.

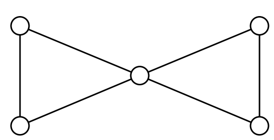
Definíció (élösszefüggőség)**.** Egy G gráf k(-szorosan) élösszefüggő, ha bármely legfeljebb $k-1$ élét elhagyva összefüggő marad.

Definíció (pontösszefüggőségi szám)**.** Egy G gráf pontösszefüggőségi száma $\kappa(G) = \max k$, hogy G k-összefüggő.

Definíció (élösszefüggőségi szám)**.** Egy G gráf élösszefüggőségi száma $\lambda(G) = \max k$, hogy G k-élösszefüggő.

Ha egy gráf k-pontösszefüggő, akkor k-élösszefüggő is, ezért $\lambda(G) \geq \kappa(G)$. Egyenlőség azonban nem mindig áll fenn (1. ábra).

Definíció (lokális élösszefüggőség)**.** Az u és v pontok közötti lokális élösszefüggőség ($\lambda(u,v)$) az u és v közötti éldiszjunkt utak maximális száma.



1. ábra. Ez a gráf 2-élösszefüggő, de nem 2-összefüggő.

Definíció (lefogó élhalmaz)**.** A G (irányított vagy irányítatlan) gráf F élhalmaza lefog minden uv utat, ha a $G - F$ gráfban nem létezik u-ból v-be (irányított) út.

Menger tételei alapján:[1]
$\lambda(u, v) = \{u$ és v közötti éldiszjunkt utak maximális száma$\} = \{u$ és v közötti utakat lefogó élek minimális száma$\}$

Állítás.

$$\lambda(G) = \min_{u,v \in V(G), u \neq v} \lambda(u, v)$$

$\lambda(G)$ meghatározása naiv algoritmussal: megvizsgáljuk, hogy adott $k = 1, 2, \ldots$ esetén bármely $k - 1$ élt elhagyva G összefüggő marad-e. Ez összesen $\sum_{k=1}^{\lambda(G)} \binom{|E(G)|}{k-1}$ lépést igényelne. Ezzel szemben a jobb oldalon szereplő kifejezés polinomiális lépésszámban kiértékelhető, pl. folyamok segítségével (ld. később).

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $\lambda(G) \leq \min \lambda(u, v)$ és $\lambda(G) \geq \min \lambda(u, v)$ is teljesül.

- $\lambda(G) \leq \min \lambda(u, v) = k$: kiválasztjuk azt az (u, v) csúcspárt, amely csúcsok között a minimum felvétetik. A két csúcs között legfeljebb k darab éldiszjunkt út fut, ezeket le tudjuk fogni k éllel. Ezt a k élt törölve G szétesik, G tehát nem lehet $(k + 1)$-élösszefüggő, legfeljebb k-élösszefüggő.
- $\lambda(G) \geq \min \lambda(u, v) = k$: bármely két pont között van legalább k éldiszjunkt út, ekkor $k - 1$ él elhagyásával nem eshet szét a gráf, tehát legalább k-élösszefüggő: $\lambda(G) \geq k$.

□

Egy (esetleg irányított) gráf élösszefüggőségének kiszámítására kézenfekvő a maximális folyam algoritmus használata. A G gráfból olyan hálózatot készítünk, amelyben minden él kapacitása egységnyi. Irányítatlan gráf esetén az éleket irányítjuk: egy irányítatlan $\{a, b\}$ élre a hálózatba (a, b) és (b, a) irányított éleket húzunk. Ekkor egy rögzített u, v pontpárra a $\lambda(u, v)$ érték éppen az u és v közötti maximális folyam értéke.
A folyamprobléma megoldására a javítóutas Edmonds-Karp algoritmus[2] lépésszáma $O(|V| \cdot |E|^2) = O(n^5)$, de létezik kevésbé szemléletes, $O(n^3)$ lépésszámú algoritmus.

Algoritmus ($\lambda(G)$ meghatározása négyzetes számú folyamkereséssel)**.** Minden (u, v) párra megvizsgáljuk a folyamértéket, ezek minimuma lesz $\lambda(G)$. Az (u, v) párok száma $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$. Az algoritmus lépésszáma $O(n^2 \cdot n^3) = O(n^5)$.

Algoritmus ($\lambda(G)$ meghatározása lineáris számú folyamkereséssel)**.** A

$$\lambda(G) = \min_{v \in V(G) - a} \lambda(a, v)$$

egyenlőség felhasználásával $\lambda(G)$ értéke $n - 1$ folyamprobléma megoldásával, $O(n \cdot n^3) = O(n^4)$ lépésben meghatározható.

Bizonyítás. A négyzetes számú folyamkereséshez képest szűkebb halmazon vizsgálódunk, ezért azt kell garantáltunk, hogy bármely a csúcsból kiindulva a $\lambda(a, v)$ értékek között lesz $\lambda(G)$ értékű. Legyen $k = \lambda(G)$. Nyilván minden $b \in V(G) - a$ csúcsra igaz, hogy

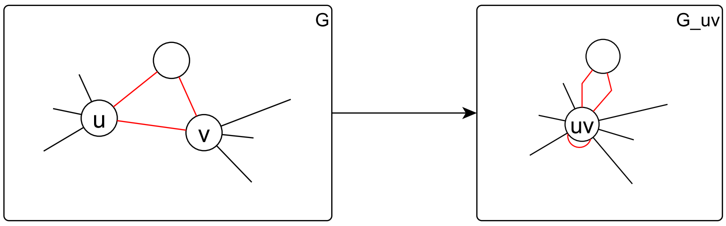
$$k = \min_{u,v \in V(G), u \neq v} \lambda(u, v) \leq \min_{v \in V(G) - a} \lambda(a, v) \leq \lambda(a, b),$$

azaz $\lambda(a, b) \geq k$.
Hagyjunk el G-ből k élt úgy, hogy szétessen, ekkor a kapott részgráfnak legalább két komponense lesz. Mivel a rögzített, válasszuk ki b-t úgy, hogy a és b külön komponensben legyenek, ekkor $\lambda(a, b) \leq k$.
$\lambda(a, b) \geq k$ miatt $\lambda(a, b) = k = \lambda(G)$, azaz lesz olyan b csúcs, ahol a $\lambda(G)$-nek megfelelő minimum felvétetik.

□

[1] BSz2 jegyzet, `http://www.cs.bme.hu/~fleiner/jegyzet/`, 1.4.1, Menger tételek, 1. (irányított gráfra) és 3. (irányítatlan gráfra)

[2] A BSz2 jegyzetben található Edmonds–Karp tétel leírja az algoritmust és kimondja, hogy az polinomiális.



2. ábra. Összehúzás

21. tétel

$\lambda(G)$ meghatározása összehúzások segítségével, Mader tétele (biz. nélkül), Nagamochi és Ibaraki algoritmusa (biz. nélkül).

Nagamochi és Ibaraki megmutatták, hogy egy irányítatlan gráf élösszefüggőségi számát folyamok használata nélkül is ki tudjuk számolni $O(|V(G)|^3)$ lépésben. Az alábbiakban definiáljuk az ehhez szükséges fogalmakat és állításokat.

Definíció (összehúzás)**.** A G gráf két u, v csúcsát összehúzva olyan G_{uv} gráfot kapunk, amelyben a G gráfban u-val vagy v-vel összekötött csúcsok az uv csúccsal vannak összekötve. Ha G egy p pontjából u-ba és v-be is futott él, G_uv-ben párhuzamos élek lesznek p és uv között. Ha az összehúzott csúcsok között futott él, uv-n hurokél lesz (2. ábra).

Állítás. A hurokélek nem befolyásolják az élösszefüggőségi számot (ennek bizonyítása triviális).

Állítás. A gráf két pontját összehúzva a minimális vágás mérete nem csökkenhet, sőt, csak akkor nőhet, ha minden minimális vágás elválasztja az összehúzott pontokat. Így érvényes az alábbi egyenlőség:

$$\lambda(G) = \min(\lambda(u, v), \lambda(G_{uv}))$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $\lambda(G)$ legfeljebb $\lambda(u, v)$, legfeljebb $\lambda(G_{uv})$, és az egyikkel egyenlő is.

1. $\lambda(G) \leq \lambda(u, v)$. Triviális a $\lambda(G) = \min_{u,v \in V(G), u \neq v} \lambda(u, v)$ definíció miatt.

2. $\lambda(G) \leq \lambda(G_{uv})$
   Ha G_{uv} nem összefüggő, akkor az összehúzás előtt G sem volt az (az állítás megfordítása nem igaz, ha G nem összefüggő, akkor G_{uv} lehet az, pl. egy C_2-ből és egy izolált pontból álló gráf esetén a C_2 egyik pontját az izolált ponttal összehúzva összefüggő gráfot kapunk).
   $\lambda(G_{uv}) = k$ esetén G_{uv}-nek van k olyan éle, amit elhagyva szétesik. A G_{uv}-beli vágást G-re transzformálva a megfelelő k élt elhagyva G is szétesik, mert ha nem így lenne, akkor az összehúzás utáni G_{uv} is összefüggő lenne. Ezért $\lambda(G) \leq k$ biztosan teljesül, $\lambda(G_{uv}) = k$ miatt $\lambda(G) \leq \lambda(G_{uv})$.

3. $k = \lambda(G) = \lambda(u, v)$ vagy $\lambda(G) = \lambda(G_{uv})$. Vegyünk egy k élű vágást G-ben.

   - Ha a k élt elhagyva u és v különböző komponensben vannak, akkor $\lambda(u, v) \leq k$, azaz $\lambda(u, v) \leq \lambda(G)$. Korábban beláttuk, hogy $\lambda(G) \leq \lambda(u, v)$, tehát $\lambda(G) = \lambda(u, v)$.
   - Ha ugyanabban a komponensben vannak, akkor G_{uv} is szétesik ugyanannak a k élnek az elhagyásával (mert u és v összehúzása nem teheti összefüggővé), tehát $\lambda(G_{uv}) \leq k$, azaz $\lambda(G_{uv}) \leq \lambda(G)$. Korábban beláttuk, hogy $\lambda(G) \leq \lambda(G_{uv})$, tehát $\lambda(G) = \lambda(G_{uv})$.

□

Tétel (Mader-tétel)**.** Minden G gráfban létezik olyan $u, v \in V(G)$ csúcspár, hogy $\lambda(u, v) = d(v)$.

Definíció (max-vissza sorrend)**.** A $G = (V, E)$ gráf pontjainak egy $(v_1, \dots, v_n)$ sorrendje max-vissza sorrend, ha minden i, j $(2 \le i < j \le n)$ párra teljesül, hogy

$$d(v_i, V_i) \ge d(v_j, V_i),$$

ahol $d(a, B)$ az a és a B közötti élek száma, $V_i = \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.[3]
Ilyen sorrend például úgy készíthető, hogy mindig arra ügyelünk, hogy a soron következő pont olyan legyen, amelyből a már sorba rakott pontokhoz a lehető legtöbb él vezet.

Tétel. $\lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$, ahol v_{n-1}, v_n az utolsó két pont G pontjainak egy max-vissza sorrendjében. (Nem bizonyítjuk.)

Ha tehát minden iterációban az összehúzandó párt egy max-vissza sorrend utolsó két pontjaként választjuk, a keresett $\lambda(v_{n-1}, v_n)$ érték a $d(v_n)$ fokszám lesz. Így a következő algoritmus helyesen számolja ki egy legalább két pontú gráfra a $\lambda(G)$ értéket.

Algoritmus (Nagamochi–Ibaraki)**.** Az algoritmus két lépésből áll:

1. Legyen $\lambda = \infty$
2. Készítsük el a gráf pontjainak egy max-vissza sorrendjét. Ha ebben $d(v_n) < \lambda$, akkor legyen $\lambda = d(v_n)$. Ha még legalább hárompontú a gráf, húzzuk össze a sorrend utolsó két pontját és kezdjük újra a 2. lépést. Ha már csak két pont maradt, $\lambda(G)$ értéke a két pont között futó párhuzamos élek száma, az algoritmus eredménye $\lambda = \lambda(G)$.

22. tétel

Minimális méretű 2-élösszefüggő, illetve 2-összefüggő részgráfok keresése. A problémák NP-nehézsége, Khuller–Vishkin (bizonyítás nélkül, de éles példával) és Cheriyan-Thurimella algoritmusok (biz. nélkül).

Legyen $G = (V, E)$ egy 2-élösszefüggő irányítatlan gráf, ahol minden él súlya egységnyi. Olyan G' feszítő részgráfot keresünk, melyben minden $u, v \in V(G)$ pontpárra $\lambda(u, v) \ge 2$ és a G' összsúlya minimális. Tehát a feladat egy minimális élszámú 2-élösszefüggő feszítő részgráf keresése G-ben.
Az optimum értéke pontosan akkor $|V(G)|$, ha G tartalmaz Hamilton-kört. Mivel a Hamilton-kör keresése visszavezethető erre a problémára, az optimum meghatározása NP-nehéz.

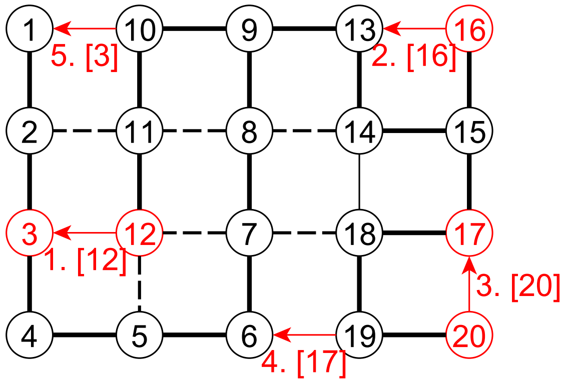
Definíció (elvágó él)**.** $e \in E(G)$ elvágó él, ha $G - e$ nem összefüggő.

Algoritmus (Khuller–Vishkin)**.** Az algoritmus 2-élösszefüggő irányítatlan gráfban 2-élösszefüggő feszítőgráfot keres, approximációs faktora $\frac{3}{2}$ (az ismert legjobb approximációs algoritmusé $\frac{4}{3}$).
A leírás során E' jelöli a megoldáshalmazt. Tetszőleges pontból kiindulva mélységi bejárást hajtunk végre. A keresés során a T mélységi fa minden élét belevesszük E'-be. Mindig, amikor a keresés egy v pontból visszalép a T valamelyik uv éle mentén (ekkor a T-nek a v pontból gyökerező $T(v)$ részfáját már teljesen bejártuk), ellenőrizzük, hogy az uv él elvágó-e az eddig kijelölt E' élhalmaz által feszített gráfban.[4] Ha igen, akkor az E'-höz egy olyan $T(v)$-ből – tehát nem csak v-ből, hanem a v-ből kiinduló részfájából – kilépő élt adunk hozzá, mely nincs T-ben és $T(v)$-n kívüli végpontját a keresés először érte el (azaz a mélységi száma a legkisebb).
A végén kapott E' élhalmaz által feszített részgráf lesz az algoritmus kimenete.[5] Az algoritmus működése a 3. ábrán látható.

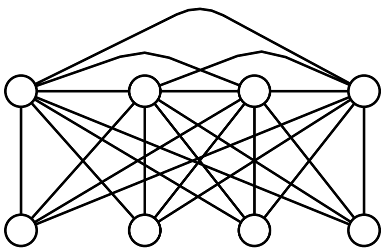
[3] A könyvben $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, ekkor a feltétel $d(v_i, V_{i-1}) \ge d(v_j, V_{i-1})$-re módosul

[4] uv egy visszaél, mert irányítatlan gráfok mélységi bejárása során nincsenek keresztélek. Nem fordulhat elő ugyanis az, hogy egy uv él esetén u mélységi száma nagyobb, mint v-é, úgy, hogy v befejezési száma pozitív, mert ekkor az uv él mentén v-ből bejártuk volna u-t is, így v befejezési száma az él vizsgálatakor 0 lenne. Ld. `http://cs.bme.hu/algel/9elo-2012.pdf`, 10–11. dia

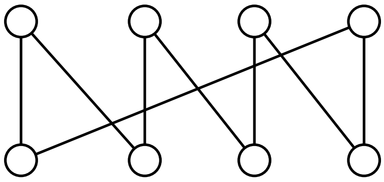
[5] Az algoritmus leírása megtalálható az alábbi cikkben: `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.56.8290`. Éles példa a 3.2.3. szakaszban.



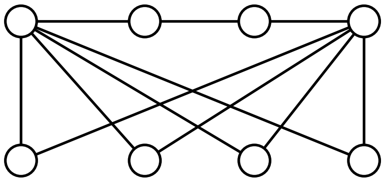
3. ábra. A Khuller–Vishkin algoritmus működése. A csúcsok sorszámai a mélységi bejárás során kapott mélységi számok. A vastag fekete élek jelölik a mélységi bejárás útját, a vékony piros élek a visszalépéskor hozzáadott élek (a feliratuk behúzás sorszáma, szögletes zárójelben az a csúcs, amelyből történő visszalépéskor behúztuk), a szaggatott élek az $E \setminus E'$-beli élek.



4. ábra.



5. ábra.



6. ábra.

Példa (Éles példa a Khuller–Vishkin algoritmusra)**.** $K_{n,n}$ teljes gráf, a gráf egyik partíciójában minden csúcs minden csúccsal össze van kötve, tehát a partíció pontjai által feszített részgráf egy K_n teljes gráf (4. ábra).
Az optimum $2n$ élű (5. ábra), míg az algoritmus $3n-1$ élű megoldást ad (6. ábra). Egy algoritmus k-approximációs, ha minden I bemenetre polinomidőben szolgáltat egy $y \in X_I$ megoldást, amire (minimalizálási probléma esetén)

$$f(y) \leq k \min_{x \in X_I} f(x)$$

Az algoritmus által adott megoldást és az optimálisat behelyettesítve:

$$3n - 1 \leq k \cdot 2n$$

$$\frac{3n-1}{2n} \leq k$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n} \leq k$$

Tehát az approximációs faktor nem lehet jobb $\frac{3}{2}$-nél.

Definíció. Jelöljük $\nu(G)$-vel a G gráfban található független élek maximális számát, $\rho(G)$-vel a lefogó élek minimális számát.

Tétel (2. Gallai tétel)**.** $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$ minden G gráfra, amelyben nincs izolált pont.

Bizonyítás. (A bizonyítás nem része a számonkérésnek).
Az állítás átrendezve: $|V(G)| - \nu(G) = \rho(G)$.
Belátjuk, hogy $|V(G)| - \nu(G) \geq \rho(G)$ és $|V(G)| - \nu(G) \leq \rho(G)$ teljesül.

- Egy $\nu(G)$ elemű X független élhalmaz lefog $2\nu(G)$ különböző pontot. A többi pont (mivel nincs köztük izolált) nyilván lefogható $|V(G)|-2\nu(G)$ éllel, így összesen $\nu(G)+|V(G)|-2\nu(G) = |V(G)|-\nu(G)$ éllel biztosan lefogható az összes pont, tehát $|V(G)| - \nu(G) \geq \rho(G)$.
- Másrészt, ha Y egy minimális méretű lefogó élhalmaz, akkor Y néhány (mondjuk k darab) diszjunkt csillag[6]. egyesítése. Ha ugyanis Y tartalmazna kört, akkor annak bármely élét, ha pedig 3 hosszú utat, akkor annak középső élét el lehetne hagyni Y-ból, mert a többi él mindig lefogná az összes pontot. Így $\rho(G) = |V(G)| - k$, hiszen a k csillag csúcsainak lefogásához $|V(G)| - k$ él kell (a középpontokat leszámítva minden csúcshoz egy-egy él). Tehát $k = |V(G)| - \rho(G)$.
  Ha minden csillagból kiválasztunk egy élt, az így kapott élhalmaz nyilván független, tehát $\nu(G) \geq k = |V(G)| - \rho(G)$, azaz $\nu(G) \geq |V(G)| - \rho(G)$, így $\rho(G) \geq |V(G)| - \nu(G)$ teljesül.

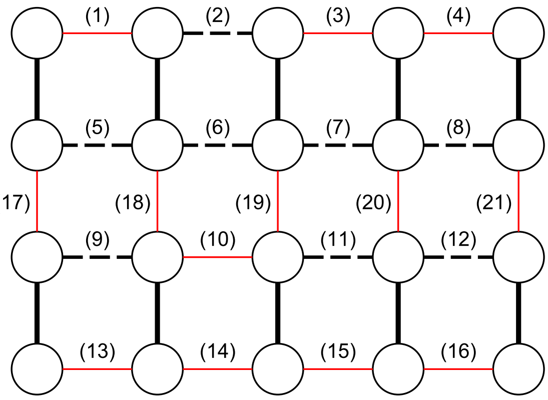
□

Algoritmus (Cheriyan-Thurimella)**.** Adott 2-összefüggő G gráfnak meghatározza egy olyan 2-összefüggő feszítő részgráfját, amelyben az optimumnál legfeljebb $\frac{3}{2}$-szer több él van ($\frac{3}{2}$-approximáció).

1. Keressünk egy minimális méretű L lefogó élhalmazt G-ben. (Nem csak páros, hanem általános gráfban is készíthetünk maximális párosítást polinomidőben: nem csak *maximal*, azaz tovább nem bővíthető, hanem *maximum*, azaz maximális méretű párosítás keresésére is létezik hatékony algoritmus.[7] Egy maximális méretű párosításból kiindulva, a párosításhoz néhány él hozzávételével minimális lefogó élhalmazt kapunk, ld. a Gallai-tétel bizonyítását).
2. Hagyjunk el G-ből $E \backslash L$-beli éleket amíg csak lehet, úgy, hogy a gráf 2-összefüggő maradjon.

A megmaradó élek által feszített részgráf az algoritmus kimenete.
Az algoritmus működése a 7. ábrán látható. Az ábrán $|L| = 10$, $E \backslash L$-ben 13 él marad, a kapott feszítő részgráf összesen 23 élből áll.

[6]csillag: olyan fa, amelyet úgy kapunk, ha l csúcsot egyenként összekötünk a központi csúccsal ($K_{1,l}$)
[7]Edmonds-algoritmus, ld. `http://www.cs.berkeley.edu/~karp/greatalgo/lecture05.pdf`



7. ábra. A Cheriyan–Thurimella algoritmus működése. A vastag fekete élek a minimális lefogó élhalmaz élei, a szaggatott vonallal jelzetteket töröltük, a vékony piros élek maradtak meg az $E \setminus L$ halmazból. A zárójelben lévő számok az egyes élek vizsgálatának sorrendjét jelölik.