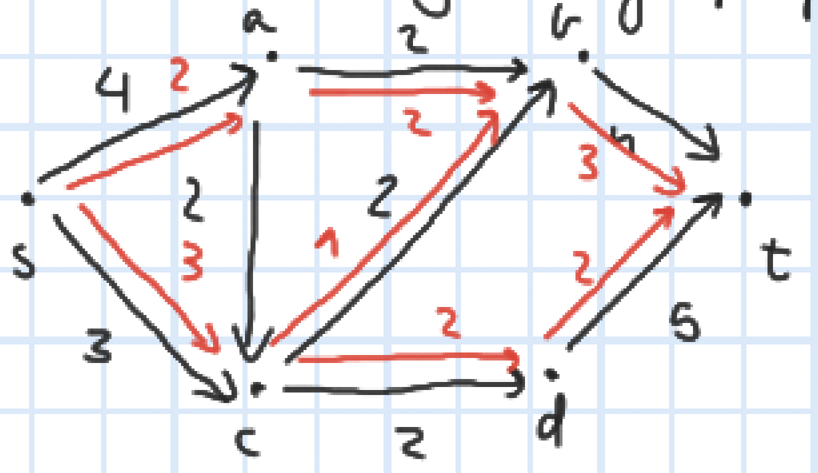
Algorytmy i Struktury Danych

Wykład 10

Problem maksymalnego przepływu



z s tylko krawędzie wychodzące

do t tylko krawędzie wchodzące

Wejście: $G = (V, E)$ – graf skierowany

(dla każdych $u, v \in V$, co najwyżej jedna z (u,v), (v,u) istnieje)

$s, t \in V$ – źródło i ujście

$c : V \times V \to \mathbb{N}$ – funkcja pojemności

$c(u,v) = 0$ jeśli $(u,v) \notin E$

$c(u,u) = 0$ – w grafie nie ma pętli

Zadanie

Znaleźć "przepływ" o maksymalnej wartości

Przepływ

$f : V \times V \to \mathbb{N}$

f spełnia następujące warunki

a) $(\forall\, u,v \in V)\big[\, f(u,v) \le c(u,v) \,\big]$

b) $(\forall\, v \in V - \{s,t\})\Big[\, \sum_{u \in V} f(u,v) = \sum_{u \in V} f(v,u) \,\Big]$

Wartość przepływu

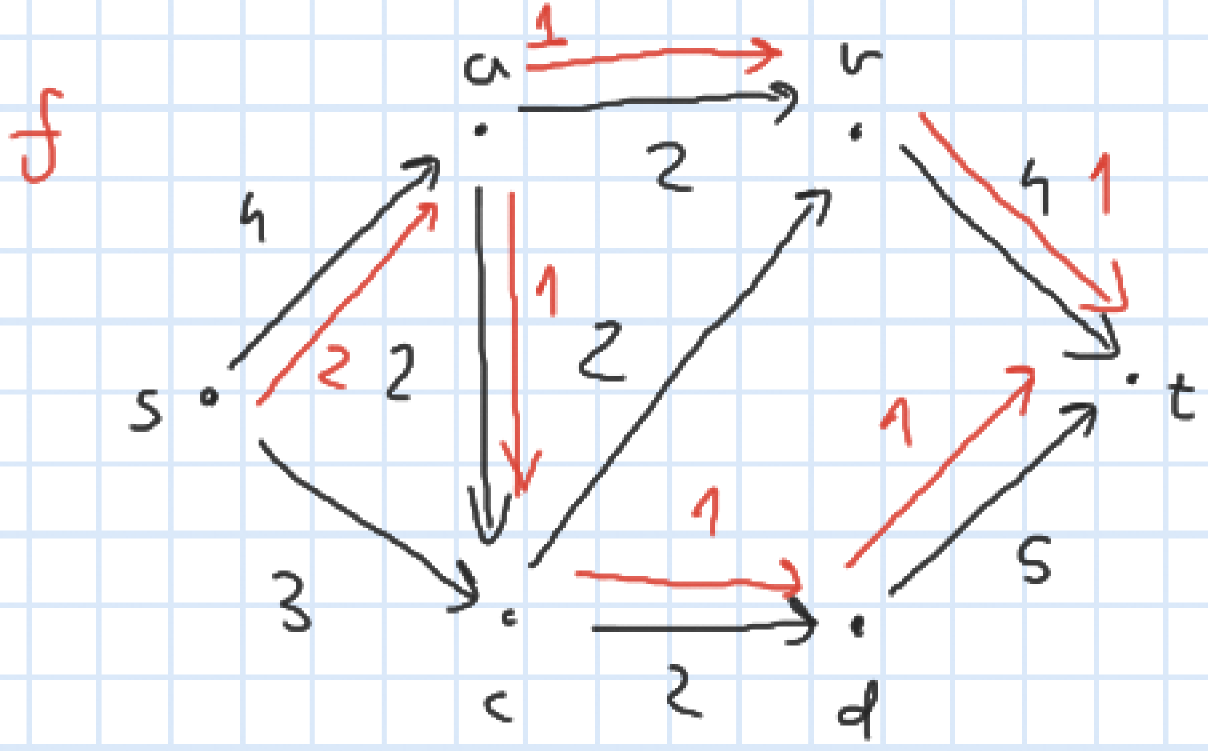
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \overbrace{\sum_{v \in V} f(v,s)}^{\text{z def. } 0}$$

Sieci residualne

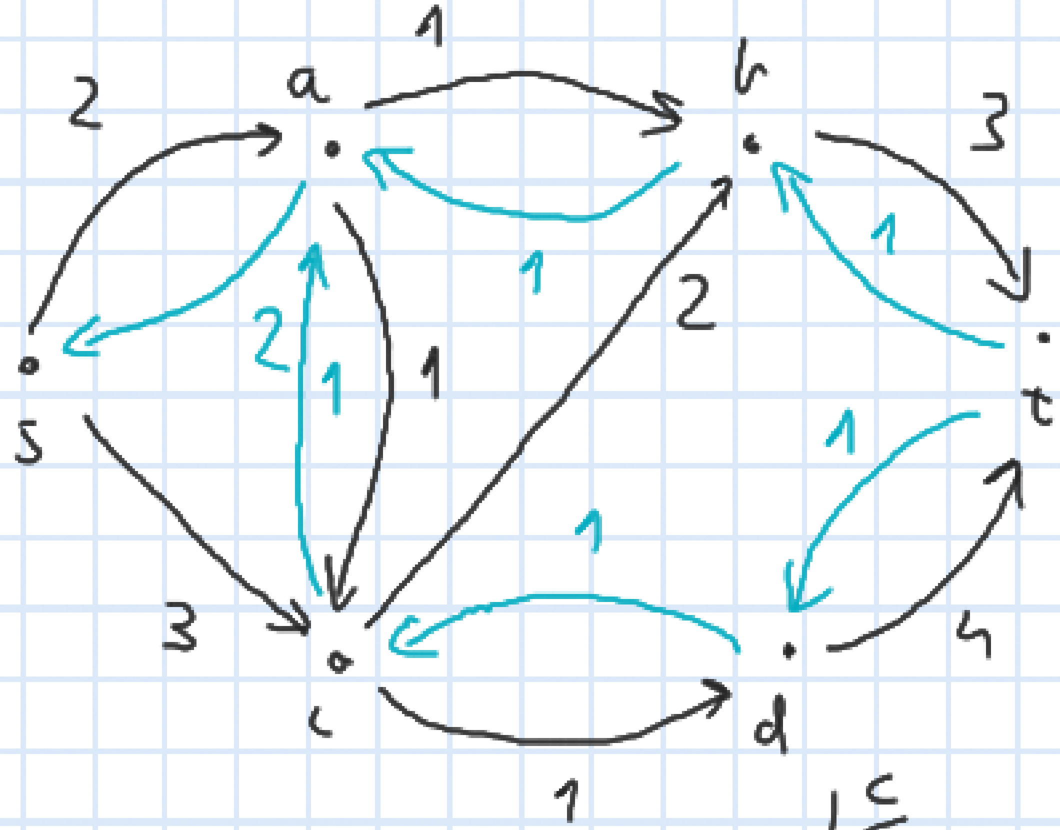
$$\left.\begin{array}{l} G = (V, E) \\ s, t \in V \\ c : V \times V \to \mathbb{N} \end{array}\right\} \text{sieć przepływowa}$$

$$f : V \times V \to \mathbb{N} \; \} \text{ przepływ}$$

sieć przepływowa + przepływ = sieć residualna



$\Downarrow$ sieć residualna



Definiujemy sieć residualną G_f, c_f

przez funkcję $c_f : V \times V \to \mathbb{N}$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & , (u,v) \in E \\ f(v,u) & , (v,u) \in E \\ 0 & , \text{w p.p.} \end{cases}$$

// $G_f = G$

uzdłuż ścieżki powiększającej możemy powiększyć przepływ o wartość tej ścieżki

Ścieżka powiększająca dla G, f to ścieżka z s do t w G_f, c_f

Wartością ścieżki powiększającej jest minimalna wartość $c_f(u,v)$ na ścieżce

Metoda Forda-Fulkersona

1. Jeśli istnieje ścieżka powiększająca dla G, f to powiększ f wzdłuż ścieżki
2. Wróć do kroku 1

Czemu ten algorytm jest poprawny?
(czemu nie wpada w lokalne maksimum?)

Przekrój w sieci

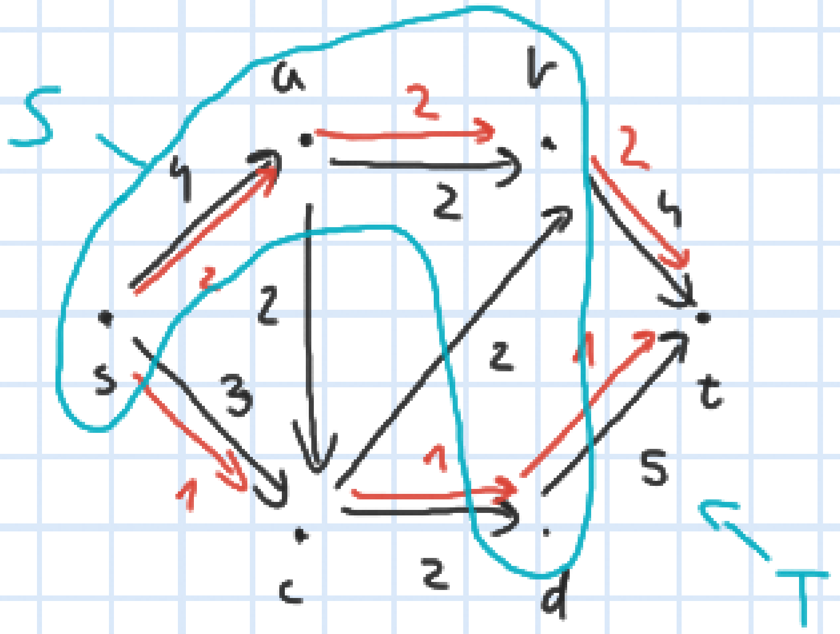
$$\left.\begin{array}{l} G=(V,E), \quad s,t \\ c: V\times V \to \mathbb{N} \end{array}\right\} \text{ sieć przepływowa}$$

$$f: V\times V \to \mathbb{N}$$

Przekrój sieci to podział V na dwa zbiory

$$S, \quad T = V - S$$

gdzie $s \in S$, $t \in T$



Przepustowość przekroju

$$c(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)$$

$$c(S,T) = 3+2+4+5 = 14$$

Przepływ netto przez przekrój

$$f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{v\in S}\sum_{u\in T} f(u,v)$$

$$f(S,T) = 1+2+1-1 = 3$$

Lemat

Niech f będzie przepływem w sieci G ze źródłem s, ujściem t. gdzie (S,T) jest przekrojem. Wówczas $f(S,T) = |f|$

Dowód

z warunku zachowania przepływu:

$$(\forall u \in V - \{s,t\})\left[\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) = 0 \right]$$

Wartość przepływu to:

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)$$

$$+ \sum_{u\in S-\{s\}} \sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S-\{s\}} \sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S} \sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$= \underbrace{\sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(v,u)}_{= f(S,T)}$$

$$\underbrace{+ \sum_{u\in S} \sum_{v\in S} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in S} f(v,u)}_{= 0}$$

$$= f(S,T)$$

Lemat

Wartość przepływu jest niewiększa niż przepustowości dowolnego przekroju

Dowód

$$|f| = f(S,T)$$

$$= \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$\leq \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} f(u,v)$$

$$\leq \sum_{u\in S} \sum_{v\in T} c(u,v) = c(S,T)$$

Twierdzenie (o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju)

max-flow / min-cut theorem

Niech $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $c: V \times V$ będzie siecią przepływową i f będzie przepływem w tej sieci. Następujące warunki są równoważne:

(1) f jest maksymalnym przepływem

(2) G_f, c_f nie zawiera ścieżek powiększających

(3) dla pewnego przekroju S, T zachodzi
$$|f| = c(S,T)$$

Dowód

(3) $\Rightarrow$ (1) – natychmiastowe z poprzedniego lematu

(1) $\Rightarrow$ (2) – oczywiste, bo inaczej moglibyśmy powiększyć przepływ i nie byłby maksymalny

(2) $\Rightarrow$ (3)

$$S = \{ v \in V \mid \text{istnieje ścieżka z } s \text{ do } v \text{ w } G_f, c_f \}$$

$| \; s \in S, \quad t \notin S$

$$T = V - S$$

$| \; t \in T$

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} \left(f(u,v) - f(v,u) \right)$$

Jeśli $(u,v) \in E$ to $c_f(u,v) = 0 \Rightarrow f(u,v) = c(u,v)$

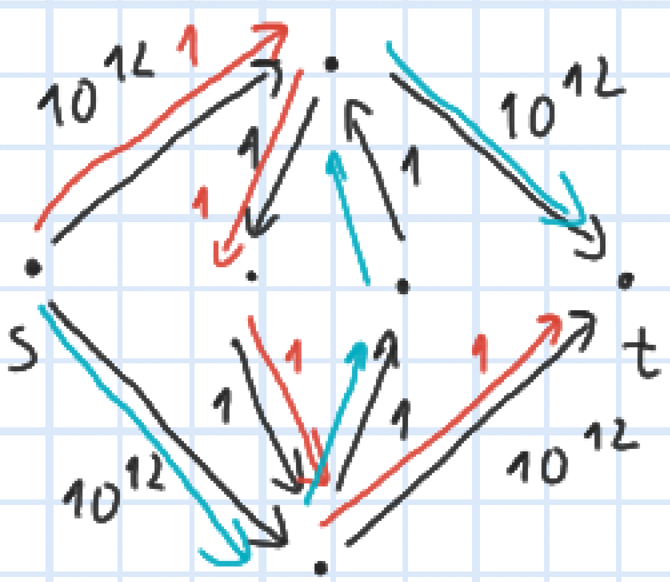
Jeśli $(v,u) \in E$ to $c_f(u,v) = 0 \Rightarrow f(v,u) = 0$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) = c(S,T)$$

Złożoność metody Forda-Fulkersona

$$O(\underbrace{(V+E)}_{\text{zł. szukania ścieżek powiększających}}\underbrace{|f^*|}_{\text{wartość maks. przepływu}}) = O(E|f^*|)$$

To może być bardzo dużo!

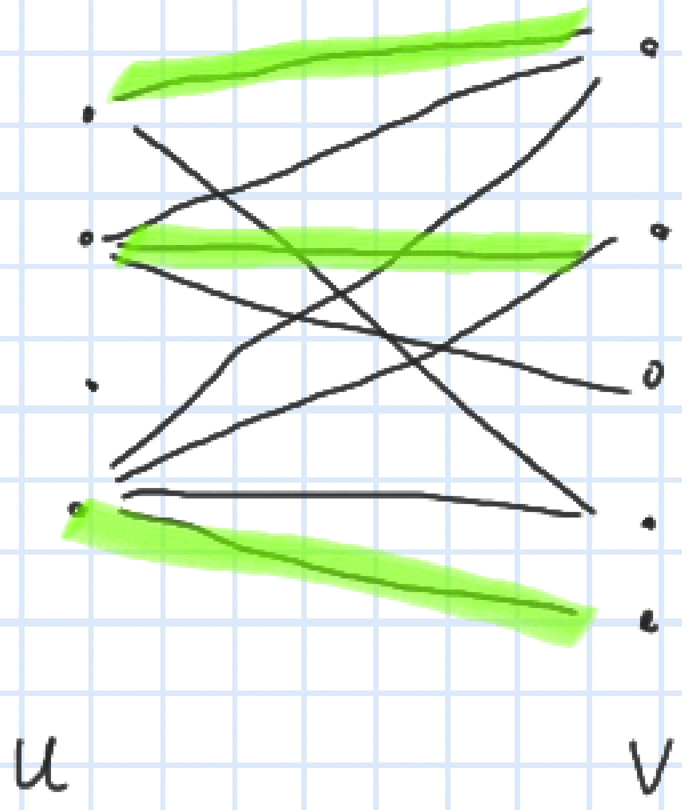


Jeśli zawsze ścieżkę powiększającą znajdujemy algorytmem BFS, to złożoność wynosi

$$O(VE^2)$$

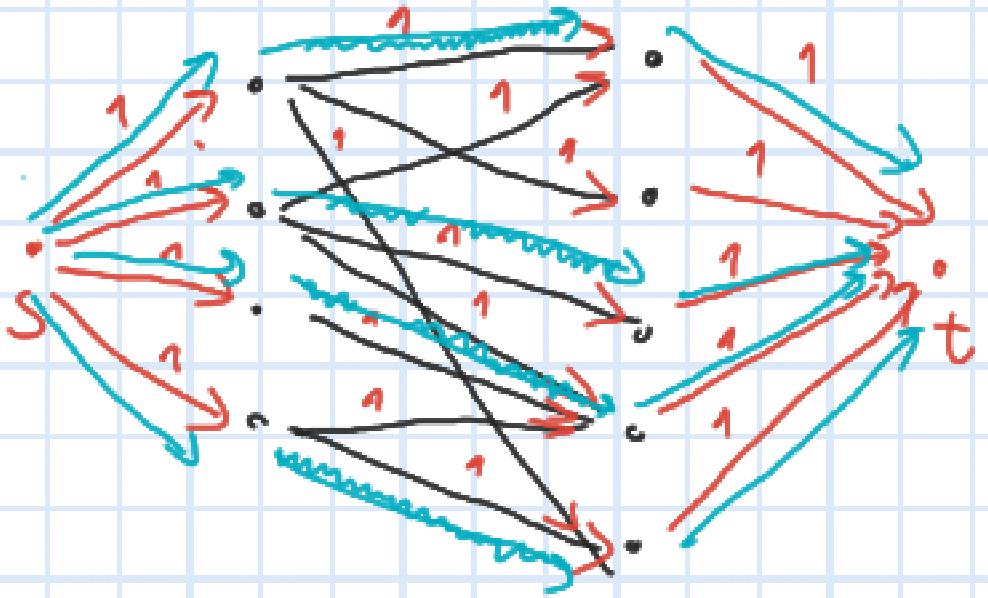
Skojarzenia w grafach dwudzielnych

Graf dwudzielny – graf którego zbiór wierzchołków można podzielić na części U i V, takie że każda krawędź zawiera jeden wierzchołek z U i jeden z V



Skojarzenie to zbiór krawędzi, które nie mają wspólnego wierzchołka

Najliczniejsze skojarzenie znajdujemy przez obliczenie maksymalnego przepływu:



$c(v_i, v_j) = 1$

Złożoność

$O(EV) = O(V^3)$