Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

Programtervező Informatikus Szak

MATEMATIKAI ALAPOK

oktatási segédanyag

Összeállította: Csörgő István és Filipp Zoltán

Budapest, 2025. ŐSZI FÉLÉV
Később további fejezetekkel fog bővülni.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ezt a tananyagot a Programtervező Informatikus Szak „Matematikai alapok" tantárgyának oktatásához állítottuk össze. Felhasználtuk benne a szakon korábban oktatott „Matematikai alapozás" tantárgy segédanyagát is.

Az 1–5 fejezetek a középiskolai ismeretekre alapoznak.

A 6. fejezet már új anyag, a nagyságrend-őrző becslésekről szól.

A 7–9 fejezetek a középiskolában elkezdett logikai alapismereteket fejlesztik tovább.

A 10. fejezetben a hallgatók megismerkednek a teljes indukcióval (aki már tanulta, kiváló alkalom az ismétlésre)

A 11. fejezet a komplex számok alapvető ismereteiről szól. E téma későbbi félévekben még részletes tárgyalásra kerül.

A 12–23 fejezetek lineáris algebrai alapismereteket tartalmaznak. E témakör szintén folytatódik majd a későbbi félévekben.

A 24–26 fejezetek pedig függvénytani alapismeretek oktatásának segédanyagai. Ez a téma is folytatódni fog majd a felsőbb félévekben.

Az 1–11 fejezeteket, a 24–26 fejezeteket, valamint a Függelék 27.4 szakaszát
Filipp Zoltán írta.

A 12–23 fejezeteket, valamint a Függelék 27.1–27.2 és 27.5–27.7 szakaszait
Csörgő István írta.

Néhány jelölés:

- a valós számok halmaza: $\mathbb{R}$;
- a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$;
- a pozitív egész számok halmaza: $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- az egész számok halmaza: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N}\}$;
- a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \ \mid \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\}$;
- a komplex számok halmaza: $\mathbb{C} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ \Big| \ x, y \in \mathbb{R}\}$ (i az imaginárius egység) ;
- Az intervallumok nyíltságát gömbölyű zárójellel, és nem kifelé fordított szögletes zárójellel fogjuk jelölni.
- Részhalmaz jelölésére a $\subseteq$ jelet fogjuk használni.

1. Algebrai és gyökös kifejezések I.

1.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Nevezetes azonosságok.
2. Hatványok (pozitív egész hatványok, negatív egész hatványok, racionális hatványok) és műveletek hatványokkal.
3. Gyökök és műveletek gyökökkel.
4. Szorzattá alakítás, polinomok, polinomok gyökei.

Néhány nevezetes azonosság

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (a, b, c \in \mathbb{R});$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$

Polinomok, polinomok gyökei

Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén *n-edfokú polinom*on értjük az alábbi kifejezést:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

ahol a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 adott valós számok (a polinom *együtthatói*), $a_n \neq 0$. Az a_n együttható neve: a polinom *főegyütthatója*. x jelöli a polinom ún. *változóját*, ami tetszőleges valós szám lehet. Az $n = 0$ esetben konstans polinomról beszélünk. Ezek tehát a nem nulla valós számokkal azonosíthatók. A 0-át is tekinthetjük polinomnak, e polinom fokát és főegyütthatóját azonban nem értelmezzük.

Az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot a P polinom *gyök*ének nevezzük, ha $P(\alpha) = 0$. Az $x - \alpha$ elsőfokú polinom az α gyökhöz tartozó *gyöktényező*.

Az $a^n - b^n$ különbség szorzattá alakítási szabályának segítségével bebizonyítható, hogy az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor gyöke a P polinomnak, ha az $x - \alpha$ gyöktényező kiemelhető P-ből, azaz, ha van olyan Q polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az említett azonosság segítségével a kiemelés a gyakorlatban is végrehajtható (ld. Függelék **??** szakasz).

Gyakran használt módszer a gyöktényező kiemelésére a Horner-féle táblázat alkalmazása (ld. Függelék **??** szakasz).

Legyen α a P polinom gyöke. Ekkor az előzőek szerint van olyan van olyan Q_1 polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q_1(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha α gyöke a Q_1 polinomnak is, akkor van olyan van olyan Q_2 polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \alpha) \cdot Q_2(x) = (x - \alpha)^2 \cdot Q_2(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az eljárást addig folytatjuk, amíg lehet. Így azt kapjuk, hogy van olyan $m \in \mathbb{N}^+$ szám és Q_m polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q_m(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és α már nem gyöke Q_m-nek, azaz $Q_m(\alpha) \neq 0$.

Az m számot az α gyök multiplicitásának nevezzük (a P polinomban).

A gyöktényezők most vázolt sorozatos kiemelésével belátható, hogy egy n-edfokú polinomnak legfeljebb n db gyöke van.

1.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Végezze el a következő hatványozást: $(a - 2b + c)^2$, ha $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Alakítsa szorzattá a következő kifejezést, ha $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2.$$

3. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő polinomot:
$$P(x) := (2x - 1)^3 - 2 \cdot (2 + x)^3 + x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Alakítsa elsőfokú polinomok szorzatává az alábbi polinomot:
$$P(x) := 3x^3 + 3x^2 - 6x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Egyszerűsítse a következő algabrai törtet:

$$E(x) := \frac{x^3-1}{1-x^5} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

6. Egyszerűsítse a következő algabrai törtet:

$$E(x) := \frac{x^4+x^2+1}{x^6-1} \quad (\pm 1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

7. Egyszerűsítse a következő algabrai törtet:

$$E(x) := \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

8. Végezze el a következő műveleteket és hozza a legegyszerűbb alakra a kapott kifejezést:

$$\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x^2+xy}-\frac{x}{y^2+xy}\right) \quad (x;y \in \mathbb{R}; x \neq 0; |x| \neq |y|).$$

9. Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét:

   (a) $\dfrac{2}{\sqrt{3-\sqrt{2}}-1}$.

   (b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$.

10. Számítsa ki az alábbi kifejezések pontos értékét:

   (a) $\left(\sqrt{9+6\sqrt{2}}-\sqrt{9-6\sqrt{2}}\right)^2$.

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

11. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3.$$

12. Végezze el a következő műveleteket:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right) \quad (a;b>0; ab \neq 0; a \neq b).$$

13. Végezze el a következő műveleteket:

$$\frac{\left(a^{1/2}\cdot b^{2/3}\right)^{-3/4}\cdot\left(a^{1/3}\cdot b^{1/4}\right)^{2}}{\left(a^{1/12}\right)^{-1/2}}\quad (a>0; b\geq 0).$$

14. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x):=\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}\quad (x\in[0;+\infty))\,.$$

Hozza az f utasítását a legegyszerűbb alakra.

15. Legyenek $x,y,z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olyan valós számok, melyekre teljesül, hogy:

$$x+y+z=1\ \wedge\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$$

Mennyi lesz az alábbi kifejezés pontos értéke:

$$x^2+y^2+z^2\,?$$

1.2. Feladatok

1.2.1. Órai feladatok

Algebrai átalakítások, azonosságok

1. Mutassuk meg, hogy minden $a,b\in\mathbb{R}$ esetén

$$a^2+ab+b^2=3\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Számítsuk ki ennek alapján a^3-b^3 pontos értékét, ha $a-b=2$ és $a+b=\sqrt{5}$.

2. Az $x>0$ valós számra teljesül, hogy $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Bizonyítsuk be, hogy $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ is egész szám.

3. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\dfrac{1}{(a+b)^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{2}{ab(a+b)^2}=\dfrac{1}{a^2b^2};$

(b) $\dfrac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\dfrac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}+\dfrac{1}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a^2+b^2}-\dfrac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=0;$

(c) $\dfrac{1}{a(a-b)(c-a)}+\dfrac{1}{b(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(b-c)}=-\dfrac{1}{abc}$;

(d) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)}=0$.

4. Igazoljuk, hogy ha

(a) $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $a+b+c=0$, akkor $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=0$;

(b) $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $a+b+c=0$, akkor $a^3+b^3+c^3=3abc$;

(c) $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$, akkor $a=b=c$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az x,y,z pozitív valós számokra:

$$x+2y+3z=6 \quad \wedge \quad \frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=1$$

akkor

$$(x-6)\cdot(y-3)\cdot(z-2)=0.$$

6. Egyszerűsítsük a következő kifejezést az x,y változók olyan valós értékei mellett, melyekre $x\neq y$:

$$E(x,y)=\frac{x^3-x-y^3+y+xy^2-x^2y}{x^3+x-y^3-y+xy^2-x^2y}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a fenti egyszerűsített kifejezésben az x,y változóknak az alábbi értékeket adva az új kifejezés nem függ a z paramétertől:

$$x=\frac{k(1-z^2)}{1+z^2};\quad y=\frac{2kz}{1+z^2}\qquad (k,z\in\mathbb{R}).$$

7. Alakítsuk szorzattá az

$$(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2 \qquad (a,b,c\in\mathbb{R})$$

különbséget!

8. Számítsuk ki az alábbi összeget, ahol az utolsó tagban n darab 1−es jegy szerepel $(1\leq n\in\mathbb{N})$:

$$1+11+111+\cdots+\underbrace{1\cdots1}_{n\ \text{jegy}}=?$$

9. Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x) := \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}); \quad g(x) := \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ valós szám esetén:

$$f(g(x)) \cdot g(f(x)) + 1 = 0.$$

10. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ függvényt, úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén:

$$\frac{x^n+1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^{n-k} + f(x) \quad (1 \le k \le n; 1 \le k, n \in \mathbb{N}).$$

Gyökös kifejezések, átalakítások

11. Lássuk be, hogy

(a) $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (a, b \ge 0);$

(b) $a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$

(c) $a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$

12. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

(a) $\dfrac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 0 < b < a).$

(b) $\dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 0 < b, a).$

(c) $\left(\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \dfrac{2\sqrt{xy}}{x - y}\right) \quad (0 < x \ne y).$

13. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést, a változók megengedett értékei mellett $(0 < x, y;\ x \ne y)$:

$$E(x,y) := \left(\frac{x^{-1/6} - \dfrac{5}{\sqrt[6]{y}}}{\dfrac{1}{x^{1/3}} - y^{-1/3}} - 5 \cdot \frac{x^{-1/6} - y^{-1/6}}{x^{-1/3} - \sqrt[3]{y^{-1}}} \right)^{-1} \cdot \frac{6\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}.$$

14. Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezést, és számítsuk ki az értékét, ha $x = 0,5$:

$$E(x) := \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x} \right) \cdot \left(\sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x} \right) \qquad (0 < x < 1) \; .$$

15. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi számot:

$$\sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}.$$

16. Számítsuk ki az alábbi *"teleszkópikus"* összegeket:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} \quad (1 \le n \in \mathbb{N}).$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} \quad (1 \le n \in \mathbb{N}).$$

17. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \quad (x \in [1;+\infty)) \, .$$

Hozza az f utasítását a legegyszerűbb alakra.

Polinomok

18. Alakítsuk szorzattá az alábbi polinomokat:

(a) $P(x) := x^3 + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $Q(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

19. Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt $P-$ből:

(a) $x_0 = 2, \quad P(x) = 3x^2 - 7x + 2$;

(b) $x_0 = 3, \quad P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18$;

(c) $x_0 = -1, \quad P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.

20. Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet

(a) $(2x^2 + x + k)-$ból $(x+3)-$at $\quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $(4x^2 - 6x + k)-$ból $(x-3)-$at $\quad (x \in \mathbb{R})$

kiemelni? Emeljük is ki!

21. Legyen x_1, x_2 az $x^2 + px + 1$ másodfokú polinom, x_3 és x_4 pedig az $x^2 + qx + 1$ másodfokú polinom két−két valós gyöke. Írjuk fel az alábbi szorzatot p és q függvényében:

$$(x_1 - x_3) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_1 + x_4) \cdot (x_2 + x_4).$$

22. Bizonyítsuk be, hogy a következő polinom értéke minden egész x−re egész:

$$P(x) = \frac{1}{315} \cdot x^9 - \frac{2}{21} \cdot x^7 + \frac{13}{15} \cdot x^5 - \frac{164}{63} \cdot x^3 + \frac{64}{35} \cdot x\ .$$

23. Határozza meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az

$$P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$$

polinom $(x - 1)$−gyel, $(x - 2)$−vel, $(x - 3)$−mal való osztási maradéka rendre $1, 2$, illetve 3 legyen.

1.2.2. További feladatok

Algebrai átalakítások, azonosságok

1. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{a}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a + b} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ |a| \neq |b|).$$

2. Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$\left(\frac{a}{a + 2b} - \frac{a + 2b}{2b}\right)\left(\frac{a}{a - 2b} - 1 + \frac{8b^3}{8b^3 - a^3}\right) = \frac{a}{2b - a}$$

$(a, b \in \mathbb{R},\ |a| \neq 2|b|,\ b \neq 0)$.

3. Lássuk be, hogy minden $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (a + b)(b + c)(c + a)$;

(b) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2$;

(c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(a+c) = 2(a^3+b^3+c^3-3abc)$;

(b) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 - 3(a-b)(b-c)(c-a) = 0$;

(c) $(a^2-bc)^3 + (b^2-ac)^3 + (c^2-ab)^3 - 3(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab) =$
$= (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$;

(d) $(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 - 3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) =$
$= 4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

5. Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c > 0$ és $abc = 1$, akkor

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1\ .$$

6. Tegyük fel, hogy az a, b, c valós számok teljesítik az alábbi feltételeket:

$$a+b+c = 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1\ .$$

Számítsuk ki a következő kifejezés értékét:

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}\ .$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ és

$$x^3+y^3+z^3 = x^2+y^2+z^2 = x+y+z = 1,$$

akkor $xyz = 0$.

8. Adjuk meg

$$a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3)$$

értékét, ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a+b = 1$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha két egész szám különbsége 2, akkor a köbeik különbsége felbontható három egész szám négyzetének összegére!

10. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\left(\frac{4}{3x} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{3(x-2)}{2(x-1)}\right) \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0; 1)\ .$$

11. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

(a) $\dfrac{(a+1)(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)}$, ha $a=10$;

(b) $\left(\dfrac{8+b^3}{x^2-y^2}:\dfrac{4-2b+b^2}{x-y}\right)\left(x+\dfrac{xy+y^2}{x+y}\right)$, ha $b=8,\ x=997,5,\ y=-0,75$;

12. Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x):=2x+3\quad (x\in\mathbb{R});\quad g(x):=4x+9\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Igazoljuk, hogy:

$$f(g(x))=g(f(x))\quad (x\in\mathbb{R}).$$

13. Tegyük fel, hogy $x+\dfrac{1}{x}=a$. Fejezzük ki az $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ kifejezés értékét a segítségével.

14. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\to\mathbb{R}$ függvényt, úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség minden $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ esetén:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1}\cdot f(x)\quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

Hogyan definiálhatnánk az $f(0)$ értéket, hogy az azonosság fennálljon $x=0-$ra is? Mennyi az $\dfrac{1}{f(2018)}$ érték?

Gyökös kifejezések, átalakítások

15. Mutassuk meg, hogy

(a) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})\qquad (a,b\ge 0)$;

(b) $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)\qquad (a,b\ge 0)$;

(c) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(a-\sqrt{ab}+b\right)\qquad (a,b\ge 0)$.

16. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{a-b}{a+b}\cdot\sqrt{\frac{a^2+ab}{a^2-2ab+b^2}}\quad (a,b\in\mathbb{R},\ 0<b<a).$$

17. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét:

$$\frac{2\sqrt{xy}+4\sqrt{y}-3\sqrt{x}-6}{2-2y}:\left(\frac{4y+19-2\sqrt{y}}{2+2\sqrt{y}}-5\right),$$

ha $x=16,\ y=9$.

18. Igazoljuk, hogy

(a) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

(b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

(c) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

(d) $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$

egész számok!

19. Számítsuk ki az alábbi *"teleszkópikus"* összegeket:

$$\text{a)}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}\quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

$$\text{b)}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}\quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

20. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$E(x,y):=\left(\frac{x^{1/2}+y^{1/2}}{(x+y)^{1/2}}-\frac{(x+y)^{1/2}}{x^{1/2}+\left(\dfrac{1}{y}\right)^{-1/2}}\right)^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}};\qquad (0<x,y).$$

21. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést a változók megengedett értékei mellett:

$$E(a,b):=\frac{(ab)^{3/2}-(a-b)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)}{ab\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{ab}\right)+(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{ab}\right)}.$$

$\boxed{\textit{Polinomok}}$

22. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

(a) $4x^2-9b^2$;

(b) y^3+1;

(c) $8a^3-27$;

(d) $27a^3 + 8$;

(e) $8a^3 + b^6$;

(f) $27a^6x^{12} - 64b^9y^{15}$;

(g) $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$.

23. Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt $P-$ből:

(a) $x_0 = 1, \quad P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 10$;

(b) $x_0 = -2, \quad P(x) = 3x^3 + 10x^2 + 8x$.

24. Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet

(a) $(x^3 - 4x + 2k)-$ból $(x - 4)-$et;

(b) $(x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 3k)-$ból $(x + 1)-$et

kiemelni? Emeljük is ki!

25. Hány különböző megoldása van az alábbi egyenletnek a valós számhalmazon

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + \frac{1}{x_k^2}) = 2n\ ?$$

26. Bizonyítsa be, hogy ha x, y, z különböző egész számok, akkoraz alábbi kifejezés értéke is egész szám:

$$\frac{x^{2008}}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^{2008}}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^{2008}}{(z-y)(z-x)}\ .$$

27. Igazoljuk, hogy ha a k egész szám gyöke a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

egész együtthatós polinomnak (tehát $k,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$), akkor k osztója a_0-nak!

28. Határozzuk meg az alábbi polinomok egész gyökeit:

(a) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 4$;

(b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 6$;

(c) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

(d) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

(e) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$.

Megjegyzés: Igazolható, hogy ha a polinom főegyütthatója $a_n = 1$ vagy $a_n = -1$, akkor a polinom valós gyökei vagy egész számok, vagy pedig irracionális számok.

29. Adott a $P(x) := x^2+ax+b \quad (x \in \mathbb{R})$ polinom, ahol a, b tetszőleges valós paraméterek. Határozzuk meg a következő kifejezést:

$$P(-P(x)) - P(P(-x))) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

2.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Másodfokú egyenletek, megoldóképlet, egyenlőtlenségek.
2. Gyöktényezős felbontás, teljes négyzetté alakítás.
3. Másodfokú függvények, polinomok és tulajdonságaik.
4. Másodfokú függvények ábrázolása, parabolák, kapcsolatuk a másodfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel.
5. Paraméteres egyenlőtlenségek.

2.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ rögzített valós számok. Az
$$ax^2 + bx + c = 0$$
másodfokú egyenletnek mik leszenek a gyökei és a diszkrimináns függvényében tárgyalja a gyökök természetét.

2. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$ rögzített valós számok. Írja fel a
$$cx^2 + bx + a = 0$$
másodfokú egyenlet gyökeinek összegére és szorzatára vonatkozó Viéte−formulákat.

3. Adott a $2x^2 - 3x - 8 = 0$ másodfokú egyenlet. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1},$$
ha x_1, x_2 jelölik a megadott egyenlet gyökeit.

4. Írja fel azt a másodfokú egyenletet, melynek főegyütthatója 1 és gyökei $\sqrt{2} - 1$ és $\sqrt{2} + 1$. Mik a további együtthatók ebben az egyenletben?

5. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke:
$$px^2 - x + 1 = 0\,?$$

6. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz igaz az alábbi egyenlőtlenség minden valós x esetén:
$$px^2 - (p+2)x + 3 > 0\,?$$

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke:
$$\frac{p}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 = 0\,?$$
Mikor lesz pontosan egy megoldása az egyenletnek?

8. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x + 1} < 1.$$

9. Tekintsük az
$$f(x) := x^2 - 4x + 7 \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvényt. Írja fel a teljes négyzet alakot, ábrázolja a függvényt, és adja meg az f minimumának helyét és értékét. Hol metszi el f grafikonja az y tengelyt?

10. Milyen $(x; y)$ valós számpárok elégítik ki az alábbi egyenletet?
$$x^2 - 3xy + y^2 = 0\,?$$
Hol helyezkednek el a síkon ezek az $(x; y)$ pontok?

11. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:
$$f(x) := 2 - \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad (x \in [-3; 2]).$$
Hol veszi fel ezeket az f?

12. Bizonyítsa be, hogy minden a, b nemnegatív valós szám esetén igaz az alábbi egyenlőtlenség:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$
Mikor van itt egyenlőség?

13. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén igaz az alábbi egyenlőtlenség:
$$\frac{|x|}{x^2 + 4} \leq \frac{1}{4}.$$
Mikor van itt egyenlőség?

14. Adja meg az alábbi függvény szélsőértékeit és azok helyeit:

$$f(x) := -2x^2 + x - 1 \quad (x \in D := \{x \in \mathbb{R} : |x - 1/2| \leq 1/2\}).$$

15. Adottak az $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ valós együtthatók és a

$$P(x) := ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

másodfokú polinom. Írja fel ennek gyöktényezős alakját, ha x_1 és x_2 jelölik a valós gyököket. Mikor teljesül, hogy ez a gyöktényezős alak egy teljes négyzet (ekkor hogy néz ki) ?

2.2. Feladatok

2.2.1. Órai feladatok

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletet:

$a)$ $P(x) = x^2 - 6x + 3;$ $\qquad$ $b)$ $P(x) = 2x^2 + 7x - 1.$

2. A *Viète*−képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

(a) $x^2 - 5x + 6 > 0\,;$

(b) $\dfrac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2\,;$

(c) $\dfrac{x - 1}{x + 1} > \dfrac{3x + 4}{1 - 2x}\,;$

(d) $\dfrac{x + 2}{x + 1} + \dfrac{3x - 2}{1 - 2x} \leq 0$

egyenlőtlenség?

4. Adjuk meg azokat a $p \in \mathbb{R}$ paramétereket, amelyekre

(a) az $x^2 + 6x + p > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(b) az $x^2 - px > \dfrac{2}{p}$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(c) az $(p^2 - 1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(d) az $\dfrac{x^2 - px + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

5. Valamely $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett a $2x^2 - 3(p-1)x + 1 - p^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek a négyzetösszege $\dfrac{5}{4}$. Mi a p?

6. Adjuk meg a p paraméter értékeit úgy, hogy az $(1-p)x^2 + 2px = p + 3$ egyenletnek két különböző pozitív gyöke legyen!

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $x^2 - (p-2)x + p - 3 = 0$ másodfokú egyenletet! Határozzuk meg a p paramétert úgy, hogy az egyenlet gyökeinek a négyzetösszege minimális legyen!

8. Milyen $p, q \in \mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek p is gyöke és q is gyöke?

9. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén:

$$\frac{7 - \sqrt{52}}{3} \leq \frac{x+3}{x^2 - x + 1} \leq \frac{7 + \sqrt{52}}{3}.$$

10. Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb és legkisebb értékeit:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

11. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy mértani sorozat különböző, egymást követő tagjai, akkor érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \leq 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

12. Egy másodfokú egyenlet x_1, x_2 gyökei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$x_1 - x_2 = \frac{4\sqrt{a-1}}{a-2}; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}},$$

ahol $a \in [1; +\infty) \setminus \{2\}$ paraméter.

a) Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a fenti x_1 és x_2.

b) A megadott a paraméter függvényében tárgyaljuk a gyökök természetét (valósak vagy komplexek) és a valós esetekben azok előjelét.

13. Mutassuk meg, hogy

(a) $\dfrac{2}{1/a + 1/b} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \quad (a, b \in (0; +\infty));$

(b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$.

(c) $\left| a + \dfrac{1}{a} \right| \geq 2 \quad (a \neq 0).$

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

14. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc$$

egyenlőtlenség! Mikor van itt egyenlőség?

15. Igazoljuk, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $\left| \dfrac{1}{a-b} \right| < \dfrac{2}{|a|} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 2|b| < |a|);$

(b) $\left| \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \right| \geq 2 \quad (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$

(c) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \quad (x \in \mathbb{R});$

(d) $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R});$

(e) $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \geq 0 \quad (a, b \in \mathbb{R});$

(f) $2 < \left(\dfrac{a+2b}{a+b} \right)^2 \quad (a, b \in (0, +\infty),\ a^2 < 2b^2)$.

16. Bizonyítsuk be, hogy minden a, b, x, $y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|ax+by| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ *(Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség)*;

(b) $\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} \le \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}$ *(Minkowski egyenlőtlenség)*;

A fenti egyenlőtlenségekben pontosan akkor van egyenlőség, ha létezik olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy

$$(x=\lambda a \text{ és } y=\lambda b) \quad \text{vagy} \quad (a=\lambda x \text{ és } b=\lambda y)\ .$$

Mi a geometriai jelentése ezeknek az egyenlőtlenségeknek?

2.2.2. További feladatok

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x)=0$ másodfokú egyenletet:

$$P(x)=x^2+10x+26; \qquad P(x)=-x^2+2x+3; \qquad P(x)=-3x^2+8x+5.$$

2. A $Viète-$ képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\dfrac{2x^2+5x-18}{x-2} \le 0;$

(b) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} \ge 0\ .$

4. Milyen $p,q\in\mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2+px+q=0$ egyenletnek

(a) olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke?

(b) minden gyöke olyan, hogy annak a reciproka is gyöke?

(c) minden gyökének a négyzete is gyöke?

(d) minden gyökének az ellentettje is gyöke?

5. Adott $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

(a) $x(x+3) + p(p-3) = 2(px-1)$;

(b) $\dfrac{x(x-p)}{x+p} - x + p = \dfrac{10x}{x+p} - 10$.

6. Milyen $m \in \mathbb{R}$ esetén lesz az $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke?

7. Határozzuk meg $\mathbb{R} \ni m-$et úgy, hogy az $x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 4 = 0$ egyenletnek két pozitív gyöke legyen!

8. Mi lehet a $p \in \mathbb{R}$ paraméter, ha az $(1-p)x^2 - 4px + 4(1-p) = 0$ egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van?

9. Adjuk meg $\mathbb{R} \ni q-$t úgy, hogy az $x^2 - 4x + q = 0$ egyenletnek

(a) legyen olyan gyöke, amelynek a háromszorosa is gyöke;

(b) egyetlen gyöke legyen!

10. Melyek azok a $k \in \mathbb{R}$ számok, amelyekkel az

$$x^2 + kx + 1 = 0 \quad \text{és az} \quad x^2 + x + k = 0$$

egyenletnek van közös gyöke?

11. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$(2x^2 + 7x - 8) \cdot (2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$$

egyenletet!

12. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Tudjuk, hogy az $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ egyenletnek $x_1 = -2$ a gyöke és van olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke. Határozzuk meg az a, b paramétereket!

13. Egy másodfokú egyenlet x_1, x_2 gyökei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$4x_1x_2 - 5x_1 - 5x_2 + 4 = 0; \quad (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = \frac{1}{1+a},$$

ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ valós paraméter.

a) Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a fenti x_1 és x_2.

b) Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a gyökökre teljesüljön az alábbi egyenlőség

$$x_1^2 + x_2^2 = 11.$$

3. Algebrai és gyökös kifejezések II.

3.1. Kiegészítés az elmélethez

Abszolút érték és tulajdonságai, háromszög egyenlőtlenségek

Idézzük fel az abszolút érték definícióját: legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített valós szám, ekkor:

$$|x| := \begin{cases} -x \text{ , ha } x < 0; \\ x \quad \text{, ha } x \geq 0 \end{cases}$$

az x valós szám abszolút értéke. Világos, hogy $|x|$ jelenti egyben a számegyenesen az x valós szám távolságát az origótól.

Ha $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok, akkor $|x - y|$ nemnegatív valós szám méri az x és y geometriai távolságát.

Könnyű a definíció alapján meggondolni, hogy:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

illetve

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0: \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Mindez azonban nem mondható el az összeg és különbség esetén, de érvényesek az alábbi nevezetes egyenlőtlenségek:

Tétel: (*Háromszög egyenlőtlenségek*) Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok esetén:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

3.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy valós x szám abszolút értékét.
2. Az $x \in \mathbb{R}$ értékeitől függően "bontsa fel" $|x^2 - 1|$−et.
3. Írja le a valós számokra vonatkozó *háromszög egyenlőtlenségeket.*
4. Hol vannak a síkon azok az $(x; y)$ pontpárok, melyekre: $|y - |x|| < 1$?
5. Oldja meg az $|x + 2| = x - 1$ egyenletet.
6. Mely valós számok elégítik ki az $||x - 1| - 2| > 1$ egyenlőtlenséget?

7. Egyszerűsítse az alábbi racionális törtet:

$$\frac{x^3-1}{x^4-1}.$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{x}.$$

9. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{3-x}<x+\sqrt{x}-1.$$

10. Milyen x valós számokra igaz, hogy:

$$|2-\sqrt{1-x}|<1?$$

11. Milyen x valós számokra igaz, hogy:

$$\sqrt{x^2}=x+1?$$

12. Adjon meg olyan különböző x, t valós számokat (ha léteznek), amelyekre:

$$(x-2)^2+|x-1|=(t-2)^2+|t-1|.$$

13. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+1|<1/2$. Milyen határok közt változhat $|x-1|$?

14. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, melyekre:

$$|x|<2 \;\;\wedge\;\; |1-x|>1\,.$$

15. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x-3|<2$. Adjunk egy felső becslést $|x^2-9|$−re.

3.2. Feladatok

Valamennyi feladatban alapértelmezés, hogy a formulákban szereplő betűk olyan számokat jelentenek, amelyekre a kifejezések értelmesek (kifejezés értelmezési tartománya). Természetesen ez a halmaz tovább szűkülhet, ha a feladatban feltételeket adunk meg ezekre a betűkre.

3.2.1. Órai feladatok

Algebrai átalakítások, egyszerűsítések

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$;

(b) $\dfrac{x^4+5x^2+4}{x^4-16}$;

(c) $\dfrac{2x^2-13x-7}{8x^3+1}$;

(d) $\dfrac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{x^5+x^3}$;

(e) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}$;

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket:

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1}$;

(b) $\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1}$;

(c) $\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$;

(d) $\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{\sqrt{x}-1}-1}$ $(x>4)$.

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek ill. egyenlőtlenségek?

(a) $|2x-7|+|2x+7|=14$;

(b) $|2x-7|+|2x+7|=x+15$;

(c) $|x^2-4x-5|+|x-2|=7$;

(d) $|x^2+3x|=|2x-6|$;

(e) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$;

(f) $|x-2|<3$;

(g) $|2x-1|<|x-1|$;

(h) $|x(1-x)| < \dfrac{1}{4}$;

(i) $\dfrac{1+|x-2|}{|x-3|} \leq \dfrac{1}{2}$;

4. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+2| < 1$. Milyen határok közt változhat $|x+1|$?

5. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x-2| < 2$. Adjunk egy felső becslést $|x^2-4|$–re.

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$;

(b) $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1$;

(c) $x-1 = \sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$;

(d) $\sqrt{6x^2+8x-8} - \sqrt{3x-2} = 0$;

(e) $\sqrt{x^2-p} + 2\cdot\sqrt{x^2-1} = x \quad (p \in \mathbb{R})$;

(f) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

(g) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 12$;

(h) $\sqrt{|1-x^2|} = \dfrac{x}{2}+1$;

(i) $\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3}$;

(j) *A)* $\sqrt{3x+13} = x+1$; *B)* $\sqrt{3x+13} \leq x+1$;

(k) *A)* $\sqrt{x^2+4x} = 2-x$; *B)* $\sqrt{x^2+4x} > 2-x$;

(l) $\sqrt{x^2-1} < 5-x$;

(m) $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$;

(n) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$;

(o) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3$;

(p) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} > \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Függvények, sorozatok, nagyságrendi átalakítások

7. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \quad (x \in [2;17]).$$

8. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\dfrac{5n^3-3n^2+2n+7}{8n^3+7n-3}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{n+1}+3\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^2+2}}{\sqrt[3]{n^2}-1}$.

9. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$;

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n-1}}$;

(c) $\sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n^2+n+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$.

10. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados−sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \dfrac{3^n\cdot n^2}{(n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(d) $x_n = \dfrac{n^n\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(e) $x_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}}{(1+\sqrt{1})\cdot(1+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(1+\sqrt{n})} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

11. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök−sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n^2+1)^{2n}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)\ ;$

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{1-n}+2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)\ ;$

(c) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)\ .$

3.2.2. További feladatok

Algebrai átalakítások, egyszerűsítések

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{x^2+2x-3}{5x^2+16x+3}\,;$

(b) $\dfrac{x^4+8x^2+15}{x^4+6x^2+9}\,;$

(c) $\dfrac{27x^3-1}{6x^2+x-1}\,;$

(d) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+1}.$

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket, ha lehet:

(a) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3+5}-2}\,;$

(b) $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{3}+4}-2}\,;$

(c) $\dfrac{x^2-26x-27}{\sqrt[3]{x}-3}\,;$

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek, egyenlőtlenségek?

(a) $\left|\dfrac{3|x|-2}{|x|-1}\right| = 2\,;$

(b) $||x+1|-2| = ||x-2|+1|$;

(c) $|x+3|+|x-1| = 3x-5$;

(d) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2| = x+2$;

(e) $|x+3|+\sqrt{x^2-2x+1} = 8$.

(f) $\left|\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{2}{3}\right| \le \dfrac{|x-2|}{1+|x-2|}$;

(g) $x^2-6|x|-7<0$;

(h) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \le 2$;

(i) $|\,|x+1|-|x-1|\,|<1$;

(j) $|x|>|x-1|$;

(k) $|x+2|-|x| \ge 1$.

4. Bizonyítsuk be, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $0 < a+b-ab < 1 \quad (a,b\in(0,1))$;

(b) $a^2+b^2 \ge 2|ab| \quad (a,b\in\mathbb{R})$;

(c) $2x^4-2x^3-x^2+1\ge 0 \quad (x\in\mathbb{R})$;

(d) $ab-5a^2-3b^2\le 0 \quad (a,b\in\mathbb{R})$;

(e) $|a+b|<|1+ab| \quad (a,b\in\mathbb{R},\ |a|,|b|<1)$;

(f) $|a+b|+|a-b|\ge|a|+|b| \quad (a,b\in\mathbb{R})$;

(g) $|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\ge|a+b|+|b+c|+|c+a| \quad (a,b,c\in\mathbb{R})$;

(h) $\left(\dfrac{a+2b}{a+b}\right)^2-2<2-\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \quad (a,b\in(0,+\infty),\ a^2<2b^2)$.

5. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+5|<3$. Milyen határok közt változhat $1/|x-2|$?

6. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+1|<1/2$. Adjunk egy felső becslést $|1/x^2-1|$–re.

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{5+\sqrt{x+1}}+\sqrt{3-\sqrt{x+1}}=\sqrt{7}+1$;

(b) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$.

(c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+3}=1$;

(d) $\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{4x^2-12x+9}=4$;

(e) $\sqrt{\dfrac{x-3}{2}}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+3}$;

(f) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$;

(g) $\sqrt{3x^2-|x|-1}=3-2x$;

(h) $\sqrt{3x+10}\leq x+4$;

(i) $\sqrt{3x+7}<x-1$;

(j) $\sqrt{5x+16}>x+2$;

(k) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\leq 5$;

(l) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\leq 5$.

8. Van–e olyan x racionális szám, amelyre

(a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-10}}=\dfrac{\sqrt{3x+22}}{\sqrt{3x-14}}$;

(b) $\sqrt{4-2\sqrt{x^2-1}}=2x$?

9. Mutassuk meg, hogy minden $1\leq n\in\mathbb{N}$ esetén teljesül az

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenség!

10. Lássuk be, hogy minden $1\leq n\in\mathbb{N}$ esetén teljesül a

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenségpár!

Függvények, sorozatok, nagyságrendi átalakítások

11. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\dfrac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\dfrac{3n^4+5n^3-7n+4}{5n^4-10n^2+2}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{2n^2+5n}}{\sqrt{n^2+6}+3n+1}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}+\sqrt[3]{n^2+6}}{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{n^2-1}}$;

12. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\sqrt{n^4+n^2+5}-\sqrt{n^4-2n^2-7}\,;$

(b) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n^2+2}-\sqrt{n^3-n^2+3}}\,;$

(c) $\sqrt[3]{n^3+n^2+3}-n\,;$

13. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados$-$sorozatot:

(a) $x_n=\dfrac{5^{n+2}}{(n+1)!} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\ ;$

(b) $x_n=\dfrac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\ ;$

(c) $x_n=\dfrac{(n+2)!}{4^n\cdot(n^2+3)} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\ ;$

(d) $x_n=\dfrac{(-n-2)^n}{(2n+2)!} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\ ;$

14. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök$-$sorozatot:

(a) $x_n=\dfrac{3^{2n-1}}{(n^3+1)^{5n}} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\ ;$

(b) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{2-n}+3^n} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\ ;$

(c) $x_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{3n^2-n} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\ .$

4. Exponenciális, logaritmusos kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek

4.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Racionális kitevőjű hatvány.
2. Exponenciális azonosságok, kifejezések használata.
3. Exponenciális függvények és tulajdonságaik.
4. Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek.
5. Logaritmus definíciója, azonosságok.
6. Logaritmusfüggvények és tulajdonságaik.
7. Logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek.

4.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja $\log_a b-$t, megadva az $a, b-$re vonatkozó feltételeket is.
2. Milyen x valós számra igaz, hogy $2^x = 3$?
3. Milyen x valós szám esetén teljesül, hogy : $\dfrac{1}{2^{\sqrt{3x}}} = 4^{-3/2}$?
4. Írja fel a szorzat logaritmusára vonatkozó képletet és a hozzá tartozó feltételeket.
5. Írja fel a hányados logaritmusára vonatkozó képletet és a hozzá tartozó feltételeket.
6. Írja át az $\log_5 2$ számot $3-$as alapú logaritmusok segítségével.
7. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést:
$$13^{\dfrac{\lg(\ln 13)}{\lg 13}}.$$
8. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:
$$\sqrt[4]{x^{4+\log_x 36}} \quad (1 \neq x \in (0;+\infty)).$$

9. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\ln^2 x - \ln x^3 + \ln e^2 = 0.$$

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x + \log_2(9 - 2^x) = 3.$$

11. Milyen valós x számokra igaz, hogy:

$$|\lg(x-1) - 10| < 1\,?$$

12. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := e^{1-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := 3^{|x|+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

14. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := \log_2 x^2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

15. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyeit:

$$f(x) := \sqrt{\ln x + 1} - \sqrt{\ln x - 1} \quad (x \in [e; e^2]).$$

4.2. Feladatok

4.2.1. Órai feladatok

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$2^x = 128; \qquad 2^x \geq 128; \qquad 2^x < 128; \qquad \left(\frac{1}{27}\right)^x = 81; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{25}{9}.$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33.$$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $9 \cdot 3^{x-2} + 6 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1} + 18\,;$

(b) $16 \cdot 3^x = 9 \cdot 2^{2x}\,;$

(c) $3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0\,;$

(d) $3 \cdot 4^x + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{x+1}\,;$

(e) $\sqrt{(17-12\sqrt{2})^x} + \sqrt{(17+12\sqrt{2})^x} = \dfrac{10}{3}\,;$

(f) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0\,.$

4. Oldjuk meg a következő egyenletet az $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} (t \in \mathbb{R})$ helyettesítés felhasználásával:

$$4x^3 - 3x - a = 0 \quad (a > 1).$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$e^x + e^{-x} > 3.$$

6. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyeit:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2^x+2} - \sqrt{2^x-2}} \quad (x \in [1;2]).$$

Logaritmus tulajdonságai, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$5^2 \cdot 5^{\log_{25} 36 - 1} + 5^{1+\log_{125} 8}.$$

8. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4}.$$

9. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_x \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \cdot y^{-1}}}}} \quad (1 \neq x \in (0;+\infty); y > 0).$$

10. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\frac{1}{2} \cdot \lg 52 + 3 \cdot \lg 2 + \lg 125 + \lg \sqrt{325} - \lg 13.$$

11. Fejezze ki $x-$et az a, b, c segítségével, ha:

$$\log_a x = 3 \cdot (\log_a b - \log_{a^2} c) \quad (1 \neq a > 0; b, c > 0).$$

12. Tudva, hogy $\log_{16}(54) = a$ fejezzük ki a segítségével $\log_{12}(18)-$at.

13. Tudva, hogy $20x^2 - y^2 + 8xy = 0$ teljesül számítsuk ki $\lg x - \lg y$ pontos értékét.

14. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\log_5 x = -1; \qquad \log_5 x \leq -1; \qquad \log_5 x \geq -1;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x < -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x > -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x = -2.$$

15. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_3 (\log_2 (\lg(2x))) = 0\,;$

(b) $\log_{25} \left[\frac{1}{5} \cdot \log_3 \left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = -\frac{1}{2}\,;$

(c) $\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2\log_3 4,5 - 4\,;$

(d) $\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 + 2\log_4 3\,;$

(e) $\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3\,;$

(f) $\log_x(8) - \log_{4x}(8) = \log_{2x}(16)\,;$

(g) $x^{(2\cdot\lg^2 x - 1,5\cdot\lg x)} = \sqrt{10}$

(h) $\log_3 \frac{3x-1}{x+2} > 1\,;$

(i) $\log_3 \frac{3x-1}{x+2} < 1\,;$

(j) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq 0\,;$

(k) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \leq 0\,;$

(l) $\log_x(\lg(x)) > 0\,;$

(m) $\log_{1/x} \frac{2x-1}{x-1} \leq -1\,.$

16. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb értékét és annak helyét:

$$f : [1; 64] \to \mathbb{R} \quad f(x) = (\log_2 x)^4 + 12 \cdot (\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \frac{8}{x}.$$

17. Milyen x valós számok esetén értelmezhető a következő kifejezés:

$$E(x) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{1-x}}}{\ln(x^2 - 1)}\ ?$$

18. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := \ln \frac{1}{x} \quad (x \in (0; +\infty)).$$

19. Igazolja, hogy tetszőleges a, b pozitív valós számok esetén:

$$\ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}.$$

Mit fejez ki ez az egyenlőtlenség geometriailag?

20. Igazolja, hogy tetszőleges a, b valós számok esetén:

$$\frac{e^a + e^b}{2} \geq e^{(a+b)/2}.$$

Mit fejez ki ez az egyenlőtlenség geometriailag?

4.2.2. További feladatok

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Adjuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ valós számokat, amelyekre

(a) $8^{x-1} - 2^{3x-2} + 8 = 0$;

(b) $2^{3x+1} + 3^{2x+2} = 11$.

(c) $2^{x+1} \cdot 5^{x+1} = 0.01^{-x}$;

(d) $2^x - 0.5^x = 3.75$;

(e) $3^x + 3^{-x} = p \quad (p \in \mathbb{R}$ paraméter);

(f) $(x-1)^x = \sqrt[3]{x-1}$.

(g) $5^{3x-4} < \frac{1}{25}$;

(h) $\frac{3}{7}^{4-3x} \geq \frac{49}{9}$;

(i) $2^x + 2^{1-x} < 3$.

Logaritmus tulajdonságai, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

2. Tudva, hogy $\log_{12}(27) = a$ fejezzük ki a segítségével $\log_6(16)$−ot.

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\ln(10x) = \lg(ex).$$

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^{\ln x} = e.$$

5. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2^x + 2)^{1/x} = 4.$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_{4-x}(x^2+16) + \log_{4-x}(2x+1) = \log_{4-x}(2x) + \log_{4-x}(x^2+21)$;

(b) $\log_{x+1}(2x^2+8x+6) = 2$;

(c) $\log_3(x^3-1) - \log_3(x^2+x+1) = 2$;

(d) $\lg(x^4) + \lg(x^2) = 6$;

(e) $\log_{x-1}(x^2-2x+1) = 2$;

(f) $\lg(x+24) = 2 - 2\lg(\sqrt{x+3})$;

(g) $4\log_a(x) - 4\log_{a^2}(x) + 4\log_{a^4}(x) = 3 \quad (a \in \mathbb{R})$;

(h) $\lg(x) + \lg(x-3) = 1$;

(i) $2 \cdot \lg(2) + \lg(2x+1) - \lg(-12x) = \lg(1-2x)$;

(j) $\dfrac{\log_3(2x)}{\log_3(4x-15)} = 2$;

(k) $\log_x(x^3+3x^2-27) = 3$;

(l) $\log_2(x) + 2\cdot\log_4(x) = 3\cdot\log_8(x) + 1$;

(m) $(\log_2(x))\cdot(\log_4(2x)) = 2\cdot\log_4(2)$;

(n) $\log_2(17-2^x) + \log_2(2^x+15) = 8$;

(o) $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$;

(p) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$;

(q) $x^{\lg(x)} = 0.1\cdot x^2$;

(r) $\log_3\left(\log_3^2(x) - 3\cdot\log_2(x) + 5\right) = 2$.

(s) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+x-30) < 0$;

(t) $\log_{1-x}\dfrac{2x+3}{4(2x+1)} \geq 1$;

(u) $\log_3 x \geq \log_x 3$.

7. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\log_{1/2}(x^2-1) + \log_2(x-1) < \log_4(x+1).$$

8. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\ln(x-1) - \ln(x+1) \geq -\ln x.$$

9. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(\ln x)^x > e^x.$$

10. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{\log_2(\pi)} + \frac{1}{\log_\pi(2)} > 2.$$

11. Mutassuk meg, hogy

$$\log_a(a^2+1) + \log_{a^2+1}(a^2) > 3 \quad (a \in (1, +\infty)) .$$

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in (0; 1)$, akkor :

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

13. Igazoljuk, hogy:

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5.$$

14. Milyen x valós számok esetén értelmezhető a következő kifejezés:

$$E(x) = \frac{\sqrt{2^x - 1}}{\log_x(|x| - 3)} ?$$

15. Legyen adott az $a \in (0; 1)$ paraméter és az $f(x) := a^x + (1-a)^x \ (x \in \mathbb{R})$ függvény. Igazoljuk, hogy:

(a) Ha $x > 1 \implies f(x) < 1$;

(b) Ha $x < 1 \implies f(x) > 1$.

16. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a \neq b \in (0; +\infty)$ valós számokra:

$$a^a \cdot b^b > a^b \cdot b^a.$$

17. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a \neq b \in (0; +\infty)$ és $\alpha \in (0; 1)$ valós számokra:

$$a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} < a + b.$$

18. Bizonyítsuk be, hogy :

$$\exists!\, x \in [1; +\infty) : 1 + 2 \cdot \ln x = e^{1-x}.$$

19. Határozza meg az alábbi függvény legkisebb értékét és helyét:

$$f(x) := \log_2^2 x + \log_x^2 2 \quad (x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}).$$

20. Milyen valós x, y számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt{\log_x(\pi - \sqrt{y})} + 2\cos(3\pi \cos\sqrt{y}) + \sqrt{\log_{\pi-\sqrt{y}} x} \leq 0?$$

5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

5.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

Középszint:

1. Szög, forgásszög, szögmérés (fok, ívmérték).
2. Szögfüggvények értelmezése (hegyesszög, tompaszög).
3. Nevezetes szögek szögfüggvényei.
4. Egyszerű trigonometrikus azonosságok (ide tartozik a pitagoraszi azonosság, valamint a tangens kifejezése a sinus és a cosinus hányadosaként).

Emelt szint:

1. Szögfüggvények értelmezése tetszőleges szög esetén.
2. Trigonometrikus függvények értelmezése, grafikonjaik, jellemző tulajdonságaik:
$$\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}.$$
3. További trigonometrikus azonosságok.

Az alábbi azonosságokat tudni kell:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\quad \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
2. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$
3. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$
4. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$;
5. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$;
6. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;
7. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
8. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad$ (*Linearizáló formulák*).

Itt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valós számok, azaz ívmértékben megadott szögek, vagy pedig α, β fokban megadott szögek.

5.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mekkora radiánban kifejezve a $120°-$os szög?
2. Adja meg a következő kifejezések pontos értékét:
$$\sin \pi/3;\ \ \cos \pi;\ \ \sin \pi/4;\ \ \cos \pi/2;\ \ \operatorname{tg} \pi/4;\ \ \operatorname{ctg} \pi/6;\ \ \operatorname{tg} \pi/3.$$
3. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:
$$(\sin \pi/7 + \cos \pi/7)^2 - \sin 2\pi/7.$$
4. Számítsa ki $\sin^3 \pi/3 - \cos^3 \pi/3$ pontos értékét.
5. Milyen $a \in \mathbb{R}$ valós számmal teljesül az alábbi azonosság a megadott x valós számokra:
$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{a}{\sin^2(2x)} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})?$$
6. Számítsa ki az addíciós tétellel $\sin(x - y)$ értékét.
7. Számítsa ki az addíciós tétellel $\cos(x + y)$ értékét.
8. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:
$$\sin \pi/7 \cdot \cos \pi/42 + \sin \pi/42 \cdot \cos \pi/7.$$
9. Számítsa ki $\sin \pi/8$ pontos értékét.
10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x.$$
11. Ábrázolja az $f(x) := \sin^4 x - \cos^4 x \quad (x \in [0; \pi])$ függvényt.
12. Hozza a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:
$$E(x) := (\sin x + \cos x)^4 - (\sin x - \cos x)^4 \quad (x \in \mathbb{R}).$$
Milyen x valós számokra teljesül, hogy:
$$E(x) = -2\ ?$$
13. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a $[\pi/2; \pi]$ intervallumon:
$$\sin 2x > \cos x.$$

14. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legkisebb értékét és annak helyeit.

15. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\frac{\sin^2 \dfrac{4037\pi}{4}}{1 - \cos^3 7\pi}.$$

5.1.2. További kérdések az elmélethez

1. Ábrázolja az $f(x) := \sin x \quad (x \in [0; 3\pi])$ függvényt.
2. Ábrázolja a $g(x) := \cos x \quad (x \in [-\pi; 3\pi])$ függvényt.
3. Definiálja és ábrázolja a tg függvényt.
4. Írja le a *linearizáló* formulákat.
5. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\cos 9\pi/20 \cdot \cos \pi/5 + \sin 9\pi/20 \cdot \sin \pi/5.$$

5.2. Feladatok

5.2.1. Órai feladatok

Azonosságok, egyenletek

1. Számítsa ki $\operatorname{tg} \pi/12$ pontos értékét.

2. Vezessünk le linearizáló formulát a $\cos^3 \alpha$ kifejezésre, ha $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \quad \sin x = -\frac{1}{2}; \qquad b) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad c) \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$d) \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \qquad e) \quad \operatorname{tg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -1; \qquad f) \quad \operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{3}$$

4. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz

(a) $\sin 4x = \sin x$;

(b) $\cos 10x = \cos 2x$;

(c) $\cos 4x = \sin 3x$;

(d) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;

(e) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$;

(f) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{3}{2}$;

(g) $\dfrac{4}{\cos^2 x} - 5\operatorname{tg}^2 x = 1$;

(h) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$;

(i) $\sqrt{2} \cdot \sin x \cos \dfrac{x}{2} = \sqrt{1 + \cos x}$;

(j) $2\sin^2 x + \sin x + \dfrac{1}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2\sin x} = 1$;

(k) $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \cdot \sin^2 3x$;

(l) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6$?

(m) $\cos 2x = \cos x - \sin x$?

$\boxed{\textit{Egyenlőtlenségek}}$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\sin x < -\frac{1}{2}; \qquad \sin x > -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \le -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \ge -\frac{1}{2}.$$

6. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz

$$-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}\ ?$$

7. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$;

(b) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;

(c) $\dfrac{2\sin x + 1}{2\cos x} \le 0$;

(d) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x} > 1$;

(e) $\left|\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| \le 1$.

8. Keressük meg a $0 \le x \le 2\pi$ intervallumba eső valamennyi olyan x számot, mely kielégíti a kövtkező egyenlőtlenséget:

$$2\cos x \le |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \le \sqrt{2}.$$

$\boxed{\textit{Egyéb típusok}}$

9. a) Egyszerűsítsük a következő kifejezést a valós x változó megengedett értékei mellett, amikor is a nevező nem 0:

$$E(x) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \cos 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)}{\sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin 5x}.$$

b) Oldjuk meg a fenti egyszerűsített $E(x)$ kifejezéssel az alábbi egyenletet:

$$E(x) + \frac{1}{E(x)} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvény konstans a megadott halmazon:

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \sqrt{\cos 2x}} + \sqrt{\cos^2 x - \sqrt{\cos 2x}} \quad (x \in [-\pi/4; \pi/4]).$$

11. Határozzuk meg azt a legbővebb D halmazt, melynek x elemeire értelmezhető az alábbi kifejezés:

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \quad (x \in D).$$

Az így kapott f függvény utasítását hozzuk a legegyszerűbb alakra, majd oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$f(x) + (2+\sqrt{3})f(-x) = 0.$$

12. A cos függvény tulajdonságait felhasználva határozzuk meg az alábbi függvény értékkészletét:

$$f(x) := \cos\frac{1}{x} \quad \left(x \in \left[\frac{3}{2\pi}; \frac{2}{\pi}\right)\right).$$

13. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := (\sqrt{\operatorname{tg}} - \sqrt{\operatorname{ctg} x})^2 \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legnagyobb és legkisebb értékét és annak helyeit a $[\pi/8; 5\pi/12]$ intervallumon.

14. Határozza meg az $f(x) := \sin^2 \dfrac{x}{2} \cdot \cos^2 \dfrac{x}{2}$ $(x \in [0; \pi/4])$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét. Hol veszi fel ezeket a függvény?

15. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre és bármely $x \neq \dfrac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n; \lambda$ tetszés szerinti egész szám) valós számra érvényes az alábbi azonosság:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

16. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét, ahol $1 \leq n \in \mathbb{N}$ darab négyzetgyök szerepel a kifejezésben:

$$x_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

5.2.2. További feladatok

Azonosságok, egyenletek

1. Fejezze ki $\operatorname{tg}(x + y)$ értékét $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg} y$ segítségével.

2. Számísa ki $\operatorname{tg} \pi/8$ pontos értékét.

3. Számítsa ki $\operatorname{tg} \pi/16 + \operatorname{ctg} \pi/16$ pontos értékét.

4. Vezessen le *linearizáló* formulát a $\sin^3 \alpha$ kifejezésre. (Fejezze ki $\sin 3\alpha$ értékét $\sin \alpha$ segítségével.)

5. Igazoljuk, hogy azon a halmazon, ahol az alábbi egyenlőség mindkét oldala értelmes, az egyenlőség azonosság:

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2}$;

(b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} \cos 4x$.

(c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;

(d) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$;

(e) $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $0 < z < \dfrac{\pi}{2}$ valós szám, hogy

$$\sin x + 2 \cos x = \sqrt{5} \cdot \sin(z + x) \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

7. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $4\cos^3 x + 3\cos(\pi - x) = 0$;

(b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sin 2x}$;

(c) $\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x$;

(d) $\sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x - 3\cos^2 x = 0$;

(e) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$;

(f) $2\cos 2x + 4\sin x + 1 = 0$;

(g) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 2$.

8. Az $y \in \mathbb{R}$ paramétertől függően oldjuk meg a

$$2 \cdot \sin x = y + \frac{1}{y}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

9. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \cdot x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x} \ .$$

10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$$

11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin(\pi/4 - x)}{\sqrt{2}\cos x}} \ .$$

12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{\cos^2 x} = \sin x.$$

$\boxed{\textit{Egyenlőtlenségek}}$

13. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

$$\cos x < \cos^4 x \ .$$

14. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$;

(b) $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$;

(c) $\frac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1$;

(d) $\sin x \cos 6x > \cos x \sin 6x$;

(e) $\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \cdot |\sin x| + \frac{\sqrt{6}}{4} < 0.$

Egyéb típusok

15. a) Egyszerűsítsük a következő kifejezést a valós x változó megengedett értékei mellett, amikor is a nevező nem 0:

$$E(x) = \frac{\sin 6x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) + 2\sin x \cos x}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 2x\right) + \cos 6x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)}.$$

b) Oldjuk meg a fenti egyszerűsített $E(x)$ kifejezéssel az alábbi egyenletet:

$$E(x) - \frac{1}{E(x)} = -2.$$

16. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legkisebb értékét és annak helyét a $[0; \pi/4]$ intervallumon.

17. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb értékét és annak helyét:

$$f(x) := \sin\frac{\pi}{x} \cdot \cos\frac{x}{\pi} + \sin\frac{x}{\pi} \cdot \cos\frac{\pi}{x} \quad (x \in [\pi; 2\pi]).$$

18. Ábrázolja az $f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x \quad (x \in [0; \pi/2])$ függvényt.

19. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \mathrm{tg}\frac{\pi\cos^2 x}{4} + \mathrm{tg}\frac{\pi\sin^2 x}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

20. Valamely x értékre teljesül az alábbi egyenlet:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet amelyet $\cos 2x$ elégít ki. Alkalmazzuk eredményünket az

$$a = 4, b = 2, c = -1$$

esetben.

21. Egy háromszög α, β, γ szögei olyanok, hogy $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ egymást követő természetes számok. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

22. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ valós állandók és x jelentsen valós változót, végül pedig

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(a_k + x)}{2^{k-1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1) = f(x_2) = 0$, akkor van olyan m egész szám, hogy $x_2 - x_1 = m\pi$.

6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései

Az óra első felében a polinomok és racionális törtfüggvények növekedési ütemével foglalkozunk: úgynevezett nagyságrend-őrző becsléseket adunk.

Az óra második felében pedig az analízisben is fontos szerepet játszó további becsléseket fogunk átnézni néhány függvény esetében.

6.1. Kiegészítés az elmélethez

Ismétlés: polinomok

Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén *n-edfokú polinom*on értjük az alábbi kifejezést:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

ahol a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 adott valós számok (a polinom *együtthatói*), $a_n \neq 0$. Az a_n együttható neve: a polinom *főegyütthatója*. x jelöli a polinom ún. *változóját*, ami tetszőleges valós szám lehet. Az $n = 0$ esetben konstans polinomról beszélünk. Ezek tehát a nem nulla valós számokkal azonosíthatók. A 0-át is tekinthetjük polinomnak, e polinom fokát és főegyütthatóját azonban nem értelmezzük.

Polinomok nagyságrendi becslése

Tekintsünk egy *pozitív főegyütthatós* polinomot.
Érzéseink azt sugallják, hogy ha az x változó „nagy" pozitív szám, akkor a polinom „nagyságrendileg úgy viselkedik", mint a legmagasabb fokú tagja. Ezen pontosabban a következőt értjük. Ha

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (a_n > 0),$$

akkor megadhatók olyan $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok, hogy minden $x \geq R$ esetén

$$m \cdot x^n \leq P(x) \leq M \cdot x^n.$$

Kissé lazábban fogalmazva: Elég nagy x-ek esetén $P(x)$ értéke az x^n hatvány konstansszorosai közé esik.

Az $m \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) a P *nagyságrend-őrző alsó becslésének* (NRA-becslésének), az $M \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) pedig a P *nagyságrend-őrző felső becslésének* (NRF-becslésének) nevezzük. Nevezzük e két becslés együttesét NR-becslésnek (*nagyságrend-őrző becslés*).
A becslés végrehajtására (vagyis az $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok megkeresésére) a Függelék **??** szakaszában adunk módszert és példát.

Racionális törtkifejezések becslése

Két polinom hányadosát racionális törtkifejezésnek (röviden: törtkifejezésnek) nevezzük. Az ilyen típusú kifejezésekre is adhatunk nagyságrend-őrző (NR) becsléseket. Ha ugyanis P_1 n-edfokú és P_2 k-adfokú pozitív főegyütthatós polinomok, melyeknek NR-becsléseit már előállítottuk:

$$m_1 \cdot x^n \le P_1(x) \le M_1 \cdot x^n \qquad (x \ge R_1) \qquad \text{és}$$

$$m_2 \cdot x^k \le P_2(x) \le M_2 \cdot x^k \qquad (x \ge R_2),$$

akkor $x \ge \max\{R_1, R_2\}$ esetén nyilvánvalóan

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \le \frac{M_1 \cdot x^n}{m_2 \cdot x^k} = \frac{M_1}{m_2} \cdot x^{n-k},$$

továbbá

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \ge \frac{m_1 \cdot x^n}{M_2 \cdot x^k} = \frac{m_1}{M_2} \cdot x^{n-k}.$$

6.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy alkalmas P polinom *NRA becslését.*

2. Definiálja egy alkalmas P polinom *NRF becslését.*

3. Felhasználva a P, Q polinomok NR becsléseit definiálja a P/Q racionális tört NR becsléseit.

4. Adjon NRA és NRF becslést a $P(x) := x^5+3x^3-2x^2+7x+21$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomra.

5. Adjon NRA és NRF becslést az $f(x) := \dfrac{2x^7 - 3x^4 + 5x^2 - x + 6}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ racionális törtfüggvényre.

6. Adjon NRA és NRF becslést az $x_n := n^4 - 2n^3 - +7n^2 - n + 13$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra.

7. Adjon NRA és NRF becslést az $x_n := \dfrac{n^5 - 2n^4 + 3n^3 - 4n^2 + 5n + 111}{n^3 - 2n + 3}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra.

8. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$
teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := x^4 + 2x^2 + x - 5000$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$f(x) > 80000$$
teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4+2x^3-x+12}{x^2+x+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$f(x) > 1000$$
teljesüljön, ha $x > K$.

11. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk felső becslést az
$$|f(x) - f(1)|$$
eltérésre, ha $|x-1| < \dfrac{1}{100}$.

12. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk felső becslést az
$$|f(x) - f(2)|$$
eltérésre, ha $|x-2| < \dfrac{1}{100}$.

13. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$|f(x) - f(2)| \le K \cdot |x-2|$$
teljesüljön, ha $|x-2| < \dfrac{1}{100}$.

14. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $\delta > 0$ számot, hogy
$$|f(x) - f(2)| \le \frac{1}{1000}$$
teljesüljön, ha $|x-2| < \delta$.

6.2. Feladatok

6.2.1. Órai feladatok

NR-becslések

1. Adjunk NRF−becslést az alábbi polinomokra!

(Azaz: adjunk meg olyan $M > 0$ és $R > 0$ számokat, hogy minden $x \ge R$ esetén igaz legyen a $P(x) \le M \cdot x^n$ egyenlőtlenség! Más szóval: adjunk meg olyan $M > 0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \le M \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,.$

2. Adjunk NRA$-$becslést az alábbi polinomokra!

(Azaz: adjunk meg olyan $m > 0$ és $R > 0$ számokat, hogy minden $x \geq R$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség! Más szóval: adjunk meg olyan $m > 0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,.$

3. Adjunk NRF$-$ és NRA$-$becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{5x^2 - 3x - 10}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 10x^2 + 20x - 15}{7x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 9}\,.$

4. Adjunk NRF$-$ és NRA$-$becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = 7n^3 - 4n^2 + 5n - 17 \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{3n^4 + 7n^3 - 10n^2 - 13n + 6}{2n^5 - 8n^3 + 5n^2 + 9n - 7} \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

5. Tekintsük az $f(x) := 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Mit tudunk mondani az $f(x)$ függvényértékekről (alsó és felső becslés), ha

$$|x - 2| < \frac{1}{10}?$$

Hogy tudjuk felírni ezt a becslést $|f(x) - 7| < \varepsilon$ alakban alkalmas $\varepsilon > 0$ szám segítségével?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - 7|$ eltérés kisebb legyen mint $\dfrac{1}{10}$, hacsak $|x - 2| < \delta$?

6. Tekintsük az $f(x) := x^2 + x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(-1)|$ eltérésre, ha $|x+1| < \dfrac{1}{100}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(-1)|$ eltérés legyen kisebb mint $\dfrac{1}{100}$, hacsak $|x+1| < \delta$.

7. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{2x+1}{x-3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(2)|$ eltérésre, ha $|x-2| < \dfrac{1}{10}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(2)|$ eltérés legyen kisebb mint $\dfrac{1}{10}$, hacsak $|x-2| < \delta$.

8. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x+1}{x^4 + x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{1000}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := x^3 - 2x^2 + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 200$$

teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 100$$

teljesüljön, ha $x > K$.

11. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0; +\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{1000}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

6.2.2. További feladatok

1. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi polinomokra:

(a) $P(x) = 7x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x - 10\,;$

(b) $P(x) = 12x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 6x - 20\,;$

(c) $P(x) = x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 10^2 + 11x + 33\,;$

(d) $P(x) = 4x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 10x + 5\,;$

(e) $P(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 20\,;$

(f) $P(x) = \dfrac{1}{10}x^5 - 99x^4 - 88x^3 - 67x^2 - 61x - 60\,.$

2. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 7x^2 + x + 8}{3x^2 - 5x - 7}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 9x^2 + 8x - 12}{4x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 11x^2 + 3x + 6}\,.$

3. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = n^3 - 7n^2 + 9n - 13 \quad (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{5n^4 + 3n^3 - 14n^2 - 9n + 7}{2n^5 + 11n^3 - 4n^2 + 5n - 17} \quad (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

4. Tekintsük az $f(x) := 5x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Mit tudunk mondani az $f(x)$ függvényértékekről (alsó és felső becslés), ha

$$|x - 1| < \frac{1}{100}?$$

Hogy tudjuk felírni ezt a becslést $|f(x) - 3| < \varepsilon$ alakban alkalmas $\varepsilon > 0$ szám segítségével?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - 3|$ eltérés kisebb legyen mint $\dfrac{1}{100}$, hacsak $|x - 1| < \delta$?

5. Tekintsük az $f(x) := 4 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(-1)|$ eltérésre, ha $|x + 1| < 1$?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(-1)|$ eltérés kisebb legyen mint $\dfrac{1}{10}$, hacsak $|x + 1| < \delta$?

6. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1-3x}{x+2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(1)|$ eltérésre, ha $|x - 1| < \dfrac{1}{100}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(1)|$ eltérés legyen kisebb mint $\dfrac{1}{100}$, hacsak $|x - 1| < \delta$.

7. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^2 + x + 8}{x^3 + 2x^2 + 1}$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

8. Tekintsük az $f(x) := 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 2018$$

teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4 - x + 13}{x^2 + x}$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 1000$$

teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x^2 + 1} - x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

7. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások I.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

7.1. Kiegészítés az elmélethez

Kijelentések

Az „*állítás*” és a „*kijelentés*” szavakat azonos értelemben használjuk, és alapfogalomnak tekintjük. Jelölésben gyakran használjuk a $p, q, r \dots$ vagy az $A, B, C \dots$ betűket. Szintén alapfogalomnak tekintjük az állítások *igazságtartalmá*nak, más szóval *logikai értéké*nek fogalmát, ami kétféle lehet: igaz, hamis. Néhány példa:

1. $5 > 4$. Logikai értéke: igaz. Más szóval: az állítás *igaz.*

2. $10 \geq 25$. Ez az állítás *hamis.*

Néha a kijelentés egy vagy több változótól függ, amely változók egy megadott halmazból (ez az ún. *alaphalmaz*) vehetik értéküket. Például:

1. $x + 3 \leq 5 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

2. $x^2 + y^2 > 1 \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$.

Az ilyen kijelentéseket *nyitott*nak is szokás nevezni. A nyitott kijelentés igazságtartalma attól függ, hogy a változója helyére milyen értéket írunk. Például az előbb felírt $x+3 \leq 5$ állítás $x = 1$ esetén igaz, $x = 8$ esetén hamis.

A változók azon értékeinek halmazát, amelyre a kijelentés igaz, *igazsághalmaz*nak nevezzük.

Műveletek kijelentésekkel, igazságtábla

Kijelentésekkel újabb kijelentéseket definiálhatunk a következő alaműveletek segítségével: *tagadás* vagy *negáció* ($\neg$), *konjunkció* ($\wedge$), *diszjunkció* ($\vee$),*implikáció* ($\Longrightarrow$) és *ekvivalencia* ($\Longleftrightarrow$). Ezeket szokás egy úgynevezett *igazságtábla* segítségével bevezetni, ahol az oszlopokban megadjuk a műveletekben előforduló logikai állítások és az új kijelentések logikai értékét, figyelembe véve a szóbanforgó kijelentések összes lehetséges értékét.

p	q	$\neg$ p	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\Longrightarrow$ q	p $\Longleftrightarrow$ q
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

Az igazságtáblát jól fogjuk tudni használni összetettebb kijelentések kiértékeléséhez is (lásd órai feladatok).

Kvantorok

Vezessük be a $\forall$ jelet a „minden”, a $\exists$ jelet a „létezik” („van olyan”) szó rövidítésére. Ezeket a jeleket *kvantorjelek*nek, röviden *kvantorok*nak nevezzük. A kvantorok segítségével egy nyitott kijelentésből új állítások képezhetőek. Példák:

1. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 + 1 > 0.$

   Logikai értéke nyilvánvalóan igaz.

2. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Logikai értéke hamis, mivel pl. $x = 6$ esetén nem igaz.

3. $\exists x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Ez az állítás igaz, mivel pl. $x = 0$ esetén igaz.

4. $\exists x \in [7, +\infty): \quad x + 3 \leq 5.$

   Az állítás hamis, mivel $x \geq 7$ esetén $x + 3 \geq 10$.

5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   Logikai értéke: hamis, mivel pl. $(x, y) = (0, 0)$ esetén nem igaz.

6. $\forall y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   Az állítás nyitott, változója $x \in \mathbb{R}$.

7. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   E kijelentés logikai értéke: igaz. Ugyanis pl. $x = 2$ esetén az egyenlőtlenség így néz ki:

   $$4 + y^2 > 1,$$

   ami minden $y \in \mathbb{R}$ esetén igaz.

8. $\forall x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5 \qquad (y \in \mathbb{R}).$

   Az állítás nyitott, változója y.

9. $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5.$

   A kapott kijelentés már nem nyitott, logikai értéke eldönthető, mégpedig: hamis. Vegyünk ugyanis egy $y \in \mathbb{R}$ számot. Ha $y \leq 2$, akkor pl. $x := 3$ választással $3 \in [y, +\infty)$, de $3 + 3 \leq 5$ nem igaz. Ha pedig $y > 2$, akkor pl. $x := y + 1$ választással $y + 1 \in [y, +\infty)$, de $y + 1 + 3 \leq 5$ nem igaz. Tehát valóban nem létezik ilyen $y \in \mathbb{R}$.

Kvantoros kifejezések tagadása

Tekintsük az utolsó példában szereplő

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5$$

állítást. Könnyen meggondolható, hogy ennek tagadása:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in [y, +\infty) : \quad x + 3 > 5.$$

Formálisan: a kvantorjeleket megcseréljük, s a végén az állítás tagadását vesszük.

„Ha-akkor” szerkezetű állítások (következtetések, implikációk)

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol az x változó az Ω alaphalmazból veheti az értékeit. Ekkor a

„ha az $A(x)$ állítás igaz, akkor a $B(x)$ állítás is igaz”

kijelentést *következtetés*nek nevezzük, és röviden így jelöljük:

$$A(x) \Longrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazásai:

- „Az $A(x)$ állításból következik a $B(x)$ állítás.”
- „$A(x)$-ből következik $B(x)$.”
- „Az $A(x)$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $B(x)$ igaz legyen.”
- „$A(x)$ elégséges feltétele $B(x)$-nek.” Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ bal oldalán áll az elégséges feltétel.
- „A $B(x)$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $A(x)$ igaz legyen.”
- „$B(x)$ szükséges feltétele $A(x)$-nek.” Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ jobb oldalán áll a szükséges feltétel.
- „Minden olyan $x \in \Omega$ esetén, amelyre az $A(x)$ állítás igaz, igaz a $B(x)$ állítás is.”

  Ezt tömören is felírhatjuk a $\forall$ kvantorral:

  $$\forall\, x \in \Omega,\ A(x) : \quad B(x).$$

Megjegyezzük, hogy a „ha-akkor” szerkezetű állításnak a $\forall$ kvantorral való átfogalmazása sokszor megkönnyíti a megértést, a bizonyítást, továbbá az állítás tagadását.

Például: tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ következtetést. Ennek néhány megfogalmazása:

- Ha $x \geq 3$, akkor $x > 1$.
- $x \geq 3$-ból következik, hogy $x > 1$.
- Az $x \geq 3$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $x > 1$ igaz legyen.
- $x \geq 3$ elégséges feltétele $x > 1$-nek.

- Az $x > 1$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $x \geq 3$ igaz legyen.
- $x > 1$ szükséges feltétele $x \geq 3$-nak.
- Minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre az $x \geq 3$ állítás igaz, igaz az $x > 1$ állítás is. Tömör felírása:
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 3: \quad x > 1.$$

Nyilvánvaló, hogy a vizsgált következtetés igaz.

„Akkor és csak akkor" szerkezetű állítások (ekvivalenciák):

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol $x \in \Omega$. A „$B(x) \Longrightarrow A(x)$" állítást az „$A(x) \Longrightarrow B(x)$" állítás *megfordításá*nak nevezzük. Ha egy igaz következtetés megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy a következtetés *megfordítható.*

Példaként tekintsük az előbbiekben vizsgált

$$x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$$

(igaz) következtetést. Ennek megfordítása az $x > 1 \Longrightarrow x \geq 3$ állítás, ami szintén sokféleképpen fogalmazható meg. Például így:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 1: \quad x \geq 3.$$

Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy hamis állításhoz jutottunk, mivel pl. $x = 2$ esetén $2 \in \mathbb{R}$ és $2 > 1$ is teljesül, azonban $2 \geq 3$ már nem igaz. Tehát az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ állítás nem fordítható meg.

Ha az $A(x) \Longrightarrow B(x)$ következtetés is és a megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy

„$A(x)$ *ekvivalens* $B(x)$-szel".

Ez tehát az alábbit jelenti:

$$(\,A(x) \Longrightarrow B(x)\,) \quad \text{és} \quad (\,B(x) \Longrightarrow A(x)\,).$$

Az így kapott állítást *ekvivalenciá*nak nevezzük, és így jelöljük:

$$A(x) \Longleftrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazások:

- „$A(x)$ és $B(x)$ ekvivalensek."
- „Az $A(x)$ állítás *akkor és csak akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."
- „Az $A(x)$ feltétel *szükséges és elégséges* ahhoz, hogy a $B(x)$ állítás igaz legyen."
- „Az $A(x)$ állítás *pontosan akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."

Mivel az ekvivalencia két „ha-akkor" szerkezetű állításból épül fel, a „ha-akkor" szerkezetű állítások pedig megfogalmazhatóak a $\forall$ kvantorjellel, ezért az ekvivalencia is megfogalmazható kvantorjelekkel. Az

$$A(x) \Longleftrightarrow B(x)$$

ekvivalencia így fogalmazható át:

$$(\,\forall\, x \in \Omega,\ A(x):\quad B(x)\,)\quad \text{és}\quad (\,\forall\, x \in \Omega,\ B(x):\quad A(x)\,).$$

Ez az átfogalmazás különösen az ekvivalenciák bizonyításánál hasznos.

Példaként tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az

$$x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$$

következtetést. Ennek megfordítása az $x^2 > 0 \Longrightarrow x \neq 0$ állítás. Könnyen megmutatható, hogy az állítás is és a megfordítása is igaz. Tehát igaz az alábbi ekvivalencia:

$$x \neq 0 \Longleftrightarrow x^2 > 0\ .$$

Néhány megfogalmazása:

- Az $x \neq 0$ és az $x^2 > 0$ állítások ekvivalensek.
- $x \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $x^2 > 0$.
- Az $x \neq 0$ feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy $x^2 > 0$ igaz legyen.
- $x \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x^2 > 0$.

7.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \wedge q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
2. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \Longrightarrow q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
3. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \Longleftrightarrow q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
4. Adja meg a p állítás esetén a $\neg p$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
5. Adja meg az A, B állítások esetén az $A \vee \neg B$ állítás igazságtábláját (lehetséges logikai értékeit). Az alapműveletek közül melyik állítással ekvivalens a most megadott

$$A \vee \neg B$$

   kijelentés?
6. Adottak az $f(x) := 1 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) := 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(x)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

(a) $f(x) = g(x) \iff A(x)$;

(b) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x) \iff A(x)$;

(c) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x) \iff A(x)$.

7. Adott az alábbi nyitott kijelentés a természetes számok halmazán (azaz $n \in \mathbb{N}$):

$$A(n): \quad 3^n \geq n^2 + 2n + 1.$$

Igazak-e az allábbi állítások:

(a) $A(0), A(1), A(2)$.

(b) $\exists\, N \in \mathbb{N}: \; A(N)$ hamis.

(c) $\exists\, N \in \mathbb{N} \;\forall\, n \in \mathbb{N}\, n \geq N: \; A(n)$ igaz.

8. Adja meg a fenti (c) állítás tagadását, azaz tagadja le az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; n \geq N : 3^n \geq n^2 + 2n + 1.$$

9. Adja meg az alábbi állítás tagadását és döntse el, hogy az állítás, vagy a tagadása igaz:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; \exists\, y \in [x; +\infty) : y - 5 < 21.$$

10. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy az $A(0; 1), B(1; 0), C(-1; 0)$ és $D(x+y; x-y)$ pontok egy $ABCD$ négyzetet alkossanak.

11. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy a $C(x; y)$ pont egyenlő távolságra legyen az $A(-1; 0)$ és $B(1; 2)$ pontoktól.

12. Írja le matematikai jelöléssekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

(a) Két négyzetszám összege pontosan akkor nulla, ha mindkét szám nulla;

(b) Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két megfelelő oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.

(c) Egy szám 6−tal való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy osztható legyen 2−vel is és 3−mal is.

(d) Egy $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pont akkor és csak akkor van rajta az origó közepű 2 sugarú körvonalon, ha koordinátáinak négyzetösszege 4.

(e) Ha egy szám négyzete 4, akkor ez a szám 2.

(f) Egy szám négyzete ponotsan akkor 4, ha ennek a számnak az abszolút értéke 2.

(g) Egy valós szám távolsága 1−től akkor és csak akkor legfeljebb 3, ha a szám legalább −2 és legfeljebb 4.

(h) A természetes számok halmazának van legkisebb eleme.

13. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\Box$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

    (a) $x = \sqrt{16} \quad \Box \quad x = 4$;

    (b) $4x^2 = 16 \quad \Box \quad x = -2$;

    (c) $x^2 > 0 \quad \Box \quad x \neq 0$;

14. Írja fel kvantorokkal az alábbi állítást és döntse el, hogy igaz-e a kapott állítás. Írja fel ennek tagadását is.

    Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy:

$$\frac{n^4 - n^2}{n+1} > 4000.$$

15. Döntse el, hogy igaz-e az alábbi állítás. Írja fel ennek tagadását is.

$$\exists\, K > 0 \;\; \forall\, x \in (K; +\infty) : \;\; \frac{x^2 + x}{x^3 + 10} < \frac{1}{1000}.$$

7.2. Feladatok

7.2.1. Órai feladatok

Kijelentések kvantorok

1. Igazságtábla segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

(a) $(A \wedge B) \vee C \;=\; (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;

(b) $(A \vee B) \wedge C \;=\; (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

(c) $\neg(\neg A) \;=\; A$;

(d) $\neg(A \wedge B) \;=\; \neg A \vee \neg B$;

(e) $\neg(A \vee B) \;=\; \neg A \wedge \neg B$;

(f) $A \Rightarrow B \;=\; \neg A \vee B$;

(g) $\neg A \Rightarrow \neg B \;=\; B \Rightarrow A$;

(h) $(\neg A \vee B) \Rightarrow B \;=\; A \vee B$;

2. Legyen $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ és $D(x)$ a következő négy nyitott kijelentés az $\mathbb{R}$ alaphalmazon:

$A(x):$ x pozitív valós szám;

$B(x):$ x olyan valós szám, amelyre igaz, hogy $x^2 + x - 6 = 0$;

$C(x):$ $x = -3$;

$D(x):$ $x = 2$.

Fogalmazzuk meg különféle módokon az alábbi állításokat, és vizsgáljuk meg, hogy igazak-e:

1. $C \Longrightarrow B$;	2. $C \Longrightarrow \neg A$;	3. $D \Longrightarrow A$;
4. $D \Longrightarrow B$;	5. $B \Longrightarrow (C \vee D)$;	6. $B \iff (C \vee D)$;
7. $(A \wedge B) \iff D$;	8. $\neg(\neg A \wedge D)$;	9. $(\neg A \wedge B) \iff C$.

3. Tekintsük az alábbi következtetéseket (minden változó a valós számok halmazából veszi az értékét):

(a) $x = 0$ és $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$;

(b) $xy = xz \Longrightarrow y = z$;

(c) $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$;

(d) $x^2 + y^2 = 12x + 16y - 75 \Longrightarrow 25 \le x^2 + y^2 \le 225$.

Fogalmazzuk meg ezeknek az állításoknak a megfordítását! Mindegyik esetben döntsük el, hogy a következtetés vagy a megfordítása igaz-e, esetleg egyik sem!

4. Tekintsük az

i) $n \ge 5$ $(n \in \mathbb{N})$;

ii) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03$ $(n \in \mathbb{N})$;

iii) $x^2 + x - 1 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

nyitott kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

5. Tekintsük az

$$\frac{1}{n} < 0,01 \ \ (n \in \mathbb{N}^+)$$

nyitott kijelentést!

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\forall\, n \geq N: \ \ \frac{1}{n} < 0,01 \ \ (N \in \mathbb{N}^+).$$

Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+ \ \forall\, n \geq N: \ \ \frac{1}{n} < 0,01.$$

Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

6. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat! Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz–e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

Megjegyzés: A (c) pontbeli állítást az alábbi két megfogalmazásban is szokás mondani:

a) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

b) Az $\dfrac{n^2}{10n-7}$ *tört nagyobb* 100*–nál, ha n elég nagy természetes szám.*

7. Fogalmazzuk meg kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntsük el, hogy igazak–e vagy sem! Írjuk fel tagadásukat is!

(a) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$n^4 - 35n^3 - 15n^2 + 13n + 10 > 2000.$$

(b) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0,05.$$

(c) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^6-20n^5+3n^4-6n^3+3}{13n^3+100n^2+200} > 230.$$

7.2.2. További feladatok

Kijelentések, kvantorok

1. Igazságtábla segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

(a) $A \wedge \neg(B \wedge A) \;=\; A \wedge \neg B$;

(b) $A \vee \neg(B \vee A) \;=\; A \vee \neg B$;

(c) $\neg((A \vee B) \wedge \neg A) \;=\; A \vee \neg B$;

(d) $A \Leftrightarrow B \;=\; (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$;

(e) $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A \;=\; A \vee \neg B$;

(f) $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B \;=\; \neg A$;

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén tekintsük az alábbi kijelentéseket:

$A(n):$ n osztható 10-zel;

$B(n):$ n osztható 5-tel;

$C(n):$ n osztható 2-vel.

Fogalmazzuk meg különféle módokon a következő állításokat és vizsgáljuk meg, hogy igazak-e:

(a) $A \Longrightarrow B$;

(b) $A \iff B \vee C$.

(c) $A \iff B \wedge C$.

(d) $A \Longrightarrow C$.

Ellenőrizzük, hogy az első állítás megfordítása, azaz a $B \Longrightarrow A$ következtetés nem igaz!

Mi a helyzet a $C \Longrightarrow A$ következtetéssel?

3. Fogalmazzuk meg különféle módokon a megadott állításokat (*ha-akkor*, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

(a) Két valós szám egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a négyzetük is egyenlő legyen.

(b) Egy másodfokú egyenlet diszkriminánsának a pozitivitása elégséges ahhoz, hogy az egyenletnek legyen valós gyöke.

(c) Egy négyszög oldalainak egyenlősége szükséges ahhoz, hogy az illető négyszög négyzet legyen.

(d) Egy négyszög szögeinek egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a szóban forgó négyszög deltoid legyen.

(e) Három szakasz hosszának az egyenlősége elégséges ahhoz, hogy ebből a három szakaszból, mint oldalakból háromszöget szerkeszthessünk.

(f) Ahhoz, hogy két valós szám összege hét legyen, elégséges, de nem szükséges, hogy az egyik szám öt, a másik pedig kettő legyen.

4. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

(a) egy valós szám négyzete pozitív legyen?

(b) az $ax^2 + bx + c$ másodfokú kifejezés minden x valós szám esetén pozitív (nemnegatív) (negatív) (nem-pozitív) legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok.

(c) az a, b befogójú és c átfogójú háromszög derékszögű legyen?

(d) valamely konvex négyszög érintőnégyszög legyen?

(e) adott szakasz egy térbeli pontból derékszög alatt látsszék?

(f) az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok és $a \neq 0$.

(g) az x valós számhoz legyen olyan y valós szám, hogy $y^2 = x$?

Fogalmazzuk meg különféle módokon a kapott állításokat (*ha-akkor*, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

5. Az ebben a feladatban szereplő nyitott kijelentések közös alaphalmaza $\mathbb{R}$. Írjuk a $\square$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

(a) $x = \sqrt{4} \quad \square \quad x = 2;$

(b) $x^2 = 4 \quad \square \quad x = 2;$

(c) $x^2 > 0 \quad \square \quad x > 0;$

(d) $x^2 < 9 \quad \square \quad x < 3;$

(e) $x(x^2 + 1) = 0 \quad \square \quad x = 0;$

(f) $x(x + 3) < 0 \quad \square \quad x > -3\,.$

6. Tekintsük az

$$\frac{n^2}{2n+1} > 100 \quad (n \in \mathbb{N})$$

nyitott kijelentést!

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

7. Tekintsük az

i) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03 \quad (n \in \mathbb{N})$;

ii) $\dfrac{n^2+5}{2n-1} > 213 \quad (n \in \mathbb{N})$;

iii) $\dfrac{n^2}{2n+1} > 308 \quad (n \in \mathbb{N})$;

iv) $\dfrac{73+10n-n^2}{2n+1} < -157 \quad (n \in \mathbb{N})$;

kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:

$$\forall n \geq N: \quad A(n) \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:

$$\exists N \in \mathbb{N}^+ \ \forall n \geq N: \quad A(n).$$

Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

8. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat. Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz-e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(d) Minden elég nagy természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(e) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{1}{2}n^3 - 25n^2 - 14n + 9 > 1000.$$

(f) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{n^3 + 4n^2 - 3n + 20}{3n^5 - 7n^4 + 4n^3 - 12n^2 - 12n + 5} < 0,01.$$

(g) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{2n^5 - 25n^4 - 17n^3 + 4n^2 + 5n - 4}{18n^3 + 17n^2 - 16n + 15} > 185.$$

8. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások II.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

8.1. Kiegészítés az elmélethez

Lásd a **7. fejezet** elméleti összefoglalóját.

8.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \vee q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.

2. Adja meg a p, q állítások esetén a $q \Longrightarrow p$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.

3. Adja meg a p, q állítások esetén a $\neg p \vee q$ állítás igazságtábláját (lehetséges logikai értékeit). Az alapműveletek közül melyik állítással ekvivalens a most megadott $\neg p \vee q$ kijelentés?

4. Adottak az $f(x) := x^2 - 2x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) := a \ (x \in \mathbb{R})$ függvények, ahol a tetszölegesen rögzített valós paraméter. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(a)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\} = \emptyset \iff A(a)$;

   (b) $\exists\, !\, x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) \iff A(a)$;

   (c) Az $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ halmaz pontosan kételemű $\iff A(a)$.

5. Adott az alábbi nyitott kijelentés a természetes számok halmazán (azaz $n \in \mathbb{N}$):

$$A(n) : \quad \frac{n^4 + n + 1}{n^2 + 2} > 100.$$

   Igazak-e az allábbi állítások:

   (a) $A(0); A(1); A(2)$.

   (b) $\exists\, N \in \mathbb{N} : \ A(N)$ igaz.

   (c) $\exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in \mathbb{N}\, n \geq N : \ A(n)$ igaz.

6. Adja meg az alábbi állítás tagadását:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in N\, n \geq N : \frac{1 + n}{1 + n^2} < \varepsilon.$$

7. Igaz-e az alábbi állítás:

$$\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in (-\infty; y] : x - 5 < 21?$$

8. Adja meg az alábbi állítás tagadását és döntse el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz:

$$\exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} : x \leq K.$$

9. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy az $A(-1;0), B(1;0)$ és $C(x;y)$ pontok egy ABC szabályos háromszöget alkossanak.

10. Legyen $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter és tekintsük az $x^2+y^2 = 1$ és az $y = x+a\ \ (x, y \in \mathbb{R})$ egyenletű görbéket. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(a)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

    (a) A fenti két görbének nincs közös pontja $\iff A(a)$;

    (b) A fenti két görbének pontosan egy közös pontja van $\iff A(a)$;

    (c) A fenti két görbének pontosan két közös pontja van $\iff A(a)$;

11. Írja le matematikai jelölésekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

    (a) Az $x > 1$ egyenlőtlenség elégséges feltétele annak, hogy az x abszolút értéke $1-$nél nagyobb legyen. Igaz-e az állítás megfordítása?

    (b) Egy szám $5-$tel való oszthatósága szükséges feltétele annak, hogy $10-$zel is osztható legyen ez a szám. Igaz-e a megfordított állítás?

    (c) Ha egy valós szám nagyobb mint 2, akkor ezen szám négyzete legalább 4.

    (d) Ha egy valós szám nagyobb mint 2, akkor reciproka legfeljebb 2^{-1}. Igaz-e a megfordított állítás?

    (e) Vannak olyan x, y valós számok, melyekre $3x + 2y$ éppen -1.

    (f) Vannak olyan x, y valós számok, melyeknek a négyzetösszege kisebb mint 9.

    (g) Az $x^2 - y^2 = 0$ egyenlőség teljesülése szükséges feltétele annak, hogy az $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ pont rajta legyen $y = -x$ egyenletű egyenesen. Igaz-e a megfordítás?

12. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\square$-be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\iff$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\iff$ írható, oda csak azt írjuk):

    (a) $x^2 < 1 \quad \square \quad x < 1;$

    (b) $x^3 - 4x = 0 \quad \square \quad x = 2;$

    (c) $x(x-2) < 0 \quad \square \quad x < 2\,;$

13. Igaz-e az alábbi állítás (itt x valós számot jelöl):

$$|x-1| < x \iff x > \frac{1}{2}.$$

14. Igaz-e az alábbi implikáció (x valós szám):

Ha $|x-2| < 1 \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$?

15. Tagadja le az alábbi állítást és döntse el, hogy az eredeti állítás igaz, vagy a tagadása:

$$\exists\, K > 0 \ \forall\, x \in (K; +\infty): \ \frac{x^3 + 2x^2 + x + 10}{x^2 + x + 1} > 2018.$$

8.2. Feladatok

8.2.1. Órai feladatok

Kijelentések, kvantorok logikai állítások

1. Legyenek a, b, x, y tetszőleges valós számok. Igazak-e az alábbi állítások:

(a) $a + b = 0 \iff a^2 + b^2 = -2ab$?

(b) $a + b = 1 \iff a^2 + b^2 = 1 - 2ab$?

(c) $x = -1 \iff x^2 + x = 0$?

(d) $x = \sqrt{2} \iff x^2 = 2$?

(e) $x^2 + y^2 - 2(x - y) = 7 \iff$

$\iff$ (x, y) rajta van az $(1; -1)$ középű 3 sugarú körvonalon ?

(f) $\exists\, a \in \mathbb{R} : e = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax \ \ (x \in \mathbb{R})\} \iff$ Az e síkbeli ponthalmaz egy origón átmenő egyenes ?

(g) Legyenek a és b nemnegatív valós számok. Ekkor:

$$a^2 + b^2 = 0 \iff \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\ ?$$

(h) $x \geq 2 \iff |1 - x| = x - 1$?

(i) $|x - 5| < 2 \iff 3 < x < 7$?

(j) $y - x = |x| \iff y = x \cdot (1 + \operatorname{sign}(x))$?

(k) $\exists\, \log_{x^2 - 1/4}(1 - x^2) \in \mathbb{R} \iff \left[\frac{1}{|x|}\right] = 1$,

(ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli)?

(l) $a = b \vee a = 3b \iff a^3 - 3a^2b - ab^2 + 3b^3 = 0$?

(m) $x = 0 \vee x = \dfrac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \iff 27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 8^x = 0$?

(n) $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \vee \operatorname{tg} x = 3 \iff$

$$\iff \sin^3 x - 3\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 3\cos^3 x = 0 \ ?$$

(o) $a + b + c = 0 \iff a^3 + b^3 + c^3 = -3abc$?

Ha nem igaz valamelyik ekvivalencia, állapítsuk meg, hogy melyik "irány" helytálló.

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy sem. Ha nem igazak, fogalmazzuk át a feltételeket/a kijelentést úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Válaszoljunk a feltüntetett további kérdésekre is.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + (x-5)^2 + (x-12)^2 \geq 62$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 6$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x-5| + |x-12| \geq 11$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 5$.

(c) Tekintsük az $f(x) := x + |x| \ \ (x \in [-1; 1])$ függvényt. Ekkor:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} : 0 \leq f(x) \leq 2$;

b) $f(x) = 2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 1$; illetve

c) f értéke akkor és csak akkor minimális, ha $x = 0$ vagy $x = -1$.

(d) Tekintsük az $a_n := \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ \ (n \in \mathbb{N})$ geometriai sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2} =$ állandó (a sorozat hányadosa, vagy kvóciense);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2 - 2^{-n}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \ 0 < a_n \leq 1$ (a sorozat korlátos);

e) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja.

f) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban.

g) A sorozat legkisebb értéke a 0.

h) $\exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall n \in \mathbb{N}\ n > N$ indexre $a_n < \dfrac{1}{1000}$.

(e) Tekintsük az $a_n := 2 + 3n \ \ (n \in \mathbb{N})$ számtani sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = 3 =$ állandó (a sorozat különbsége, vagy differenciája);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{3n^2 + 7n + 4}{2}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (a sorozat szigorúan monoton nő) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 2 \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, K \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le K$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_N > K$;

g) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja;

h) A 0 indexű tag a legkisebb elem a sorozatban;

i) A sorozat legkisebb értéke a 0;

j) $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall\, n \in \mathbb{N}\ n > N$ indexre $a_n > K$.

(f) Tekintsük az $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatot. Ekkor:

a) $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le a_{n+1})$ vagy $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \ge a_{n+1})$ (azaz a sorozat monoton)

b) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

c) Ha $b_n := a_{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ b_n > b_{n+1}$;

d) Ha $c_n := a_{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ c_n < c_{n+1}$;

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index, melyre $a_n \le a_m$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$;

g) $\exists\, l \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_l \le a_n$;

h) $\exists\, K \in \mathbb{R}^+\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ |a_n| \le K$.

i) $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > m :\ |a_n - 0| < \dfrac{1}{1000}$.

j) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > m :\ |a_n - 0| < \varepsilon$.

(g) Tekintsük az $f_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + px + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol p valós paraméter. Ekkor:

a) Az $f_p(x) = 0$ egyenletnek mindkét gyöke valós $\iff$ $|p| \ge \sqrt{2}$.

b) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van. Mennyi ez a p érték és ekkor mi az egyenlet gyöke?

c) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 2 legyen. Mennyi ez a p érték?

d) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 0 legyen. Mennyi ez a p érték?

e) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = 3$ a függvény minimumhelye legyen. Mennyi ez a p érték?

f) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = 3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték?

g) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény maximumhelye 3 legyen. Mennyi ez a p érték?

h) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege 2 legyen. Mennyi ez a p érték?

i) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke egész szám $\iff p = \pm\dfrac{3}{2}$.

j) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény grafikonjának az $y = 3x \quad (x \in \mathbb{R})$ egyenes érintője legyen. Mennyi a p értéke? Mely pontban érinti a megadott egyenes az f_p grafikonját?

k) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

l) $\exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $\forall\, p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

m) Az $(x_p; y_p) \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pontok akkor és csak akkkor lesznek az $f_p \;\; (p \in \mathbb{R})$ parabolák "csúcspontjai" , ha az $(x_p; y_p) \;\; (p \in \mathbb{R})$ pontok befutják az

$$y = 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ egyenletű parabolát.}$$

n) Rögzítsünk egy p valós paramétert. Ekkor

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} \text{ esetén } f_p(m) \in \mathbb{Z} \iff p + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

(h) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in (0; +\infty))$ függvényt. Ekkor:

$$\forall\, x, t \in [1; +\infty) : \; |f(x) - f(t)| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - t|.$$

Milyen felső becslés adható az $|f(x) - f(t)|$ eltérésre, ha $x, t \in [4; +\infty)$? Igaz-e, hogy:

$$\exists\, K > 0 \;\; \forall\, x, t \in (0; +\infty) : \; |f(x) - f(t)| \leq K \cdot |x - t|?$$

3. Adott a következő függvény:

$$f(x) = |1 - |x|| \;\; (x \in [-3; 2)).$$

Vizsgáljuk meg a következő állítások igazságértékét:

(a) $\forall\, x \in D_f : f(x) \geq 0$.

(b) $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq 2$.

(c) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \le f(x)$.

(d) $\exists\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \le f(x)$.

(e) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(x) \le f(a)$.

(f) $\exists!\, b \in D_f$ úgy, hogy $f(b) = 1$.

(g) $\exists\, c \in D_f$ úgy, hogy $f(c) = 0$.

(h) $\exists!\, x \in D_f$ úgy, hogy $f(x) = x$.

(i) $\forall\, c \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása.

(j) Az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása $\Longleftrightarrow c \in [0;2]$.

(k) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 4 darab megoldása, ha $c \in (0;1)$.

(l) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 3 darab megoldása, ha $c = 1$.

(m) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 2 darab megoldása, ha $c = 0$.

(n) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 1 darab megoldása, ha $c \in (1;2]$.

4. Adottak az alábbi x valós számokra vonatkozó állítások:

(a) $A \,:\, x \ge 3$;

(b) $B \,:\, |x| = 4$;

(c) $C \,:\, x^2 = 16$;

(d) $D \,:\, \sqrt{x} = 2$;

(e) $E \,:\, x^2 - 4x = 0$;

(f) $F \,:\, 3 \cdot \ln x = \ln(16x)$.

a) Állítsunk fel logikai kapcsolatokat a fenti állítások között.

b) A fenti állítások közül hány lehet egyszerre igaz ugyanarra az x valós számra vonatkozóan?

8.2.2. További feladatok

Kijelentések, kvantorok logikai állítások

1. Legyenek a, b, x, y tetszőleges valós számok. Igazak-e az alábbi állítások:

(a) $\sqrt{a^2} = -a \Longleftrightarrow a \le 0$?

(b) $2a + 1 = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2} = a + 1$?

(c) $a < 0 \iff \sqrt{a^2+1} > a+1\,?$

(d) $a + b = 0 \iff a^3 + b^3 = 0\,?$

(e) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = -9 \iff (x, y)$ rajta van az $(-2; 3)$ középű 2 sugarú körvonalon ?

(f) $|x| + |y| < 1 \iff (x, y)$ benne van az $(1; 0); (0; 1); (-1; 0); (0; -1)$ csúcspontú négyzetlap belsejében?

(g) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc\,?$

(h) $|x - 3| < 4 \iff$ ha az x valós szám a 3 számtól 4−nél kisebb távolságra van $\iff -1 < x < 7\,?$

(i) $|x - 4| > 3 \iff$ ha az x valós szám a 4 számtól 3−nál nagyobb távolságra van $\iff (x < 1) \vee (x > 7)\,?$

(j) $\neg(|x - 2| > 1) \iff x \in [1; 3]\,?$

(k) $x^2 + y^2 + x + y = 2\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \iff x^4 + y^4 = 0\,?$

(l) $[\sin x] - 1 \geq 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\,?$

(m) $[\sin x] = -1 \iff x = -\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\,?$

(n) $xy(1 + 2y) = y^3 + 2x^2 \iff$ az $(x; y)$ pont rajta van az origón átmenő 2 meredekségű egyenesen, vagy az

$$f(x) = \sqrt{x} \ \ (x \geq 0)$$

függvény grafikonján?

(o) $\exists \ln \dfrac{x}{\sin x} \in \mathbb{R} \iff x \in \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(2k\pi; (2k+1)\pi) \bigcup \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(-(2k+1)\pi; -2k\pi)\,?$

Ha nem igaz valamelyik ekvivalencia, állapítsuk meg, hogy melyik ”irány” helytálló és adjunk meg szükséges és elégséges feltételt/feltételeket a fenti jobb oldalak teljesüléséhez.

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy sem. Ha nem igazak és lehetséges fogalmazzuk át a feltételeket/a kijelentést úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Válaszoljunk a feltüntetett további kérdésekre is.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 - (x + 5)^2 - (x - 2)^2 \leq -28$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = -2$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| \geq 4$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 2 \vee x = 3$.

(c) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1 + x}{1 - |x|}$ $(x \in (-1; 1))$ függvényt. Ekkor:

a) $\forall\, x \in (-1; 1) : 1 \leq f(x)$;

b) $f(x) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$;

c) $\exists\, K > 0$ melyre $f(x) < K \quad (\forall\, x \in (-1;1))$.

(d) Tekintsük az $a_n := \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ geometriai sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ állandó (a sorozat hányadosa, vagy kvóciense);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{5 \cdot 5^n - 3 \cdot 3^n}{2 \cdot 5^n}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 0 < a_n < 1$ (a sorozat korlátos);

e) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja.

f) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban.

g) A sorozat legkisebb értéke a 0.

h) $\exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall n \in \mathbb{N}\ n > N$ indexre $a_n < \dfrac{1}{100}$.

(e) Tekintsük az $a_n := 3 - 2n \quad (n \in \mathbb{N})$ számtani sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n =$ állandó (a sorozat különbsége, vagy differenciája);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n+1) \cdot (3 - n)$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_N < K$;

g) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja;

h) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban;

i) A sorozat legnagyobb értéke a 0;

j) $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ n > N$ indexre $a_n < K$.

(f) Tekintsük az $a_n := (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Ekkor:

a) $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le a_{n+1})$ vagy $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \ge a_{n+1})$ (azaz a sorozat monoton)

b) Ha $b_n := a_{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ b_n < b_{n+1}$; (a páros indexű tagokból képzett sorozat monoton növő)

c) Ha $c_n := a_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ c_n > c_{n+1}$; (a páratlan indexű tagokból képzett sorozat monoton fogyó)

d) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) ($\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, k \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_k < K$) $\wedge$ ($\forall\, M \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_m > M$);

g) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index, melyre $a_n \leq a_m$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$;

h) $\exists\, l \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_l \leq a_n$;

i) $\exists\, K \in \mathbb{R}^+\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \leq K$.

(g) Tekintsük az $f_p(x) = x^2 + (2-p)x - 2p$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol p valós paraméter. Ekkor:

a) Az $f_p(x) = 0$ egyenletnek mindkét gyöke valós $\Longleftrightarrow$ $p \in \mathbb{R}$.

b) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van. Mennyi ez a p érték és ekkor mi az egyenlet gyöke?

c) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 3 legyen. Mennyi ez a p érték?

d) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ f_p(x) \geq 0$ legyen.

e) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathbb{R}:\ f_p(x) < 0$.

f) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = 3$ a függvény minimumhelye legyen. Mennyi ez a p érték?

g) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = 3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték?

h) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = -3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték? Hol veszi fel a minimumát az f?

i) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek köbösszege -8 legyen. Mennyi ez a p érték?

j) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke egész szám $\Longleftrightarrow$ $p \in \mathbb{Z}$.

k) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény grafikonjának az $y = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes érintője legyen. Mennyi a p értéke? Mely pontban érinti a megadott egyenes az f_p grafikonját?

l) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

m) $\exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $\forall\, p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

n) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke akkor és csak akkor negatív, ha $p < 0$.

3. Adott a következő függvény:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}\ \ (x \in [0; 1]).$$

Vizsgáljuk meg a következő állítások igazságértékét:

(a) $\forall\, x \in D_f : f(x) \geq 0.$

(b) $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq 1.$

(c) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \leq f(x).$

(d) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq f(a).$

(e) $\exists\, c \in D_f$ úgy, hogy $f(c) = 0.$

(f) $\exists\, x \in D_f$ úgy, hogy $f(x) = \sqrt{x}.$

(g) $\forall\, x, t \in [1/8; 1/4] :\ |f(x) - f(t)| \leq |x - t|.$

4. Adottak az alábbi x valós számokra vonatkozó állítások:

(a) $A\ :\ x \leq 0;$

(b) $B\ :\ \sqrt{x^2} = -x;$

(c) $C\ :\ \ln(-x) > 1;$

(d) $D\ :\ |x - 1| > 3;$

(e) $E\ :\ x^3 = 25x;$

(f) $F\ :\ \ln^2(\sin(\pi x)) + \left(x^3 + x^2 - \dfrac{3}{4}x\right)^2 = 0.$

a) Állítsunk fel logikai kapcsolatokat a fenti állítások között.

b) A fenti állítások közül hány lehet egyszerre igaz ugyanarra az x valós számra vonatkozóan?

9. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások III.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

9.1. Kiegészítés az elmélethez

Lásd a **7. fejezet** elméleti összefoglalóját.

9.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Írja le matematikai jelölésekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

   (a) A természetes számok halmazának van legnagyobb eleme.

   (b) A $(0;1]$ intervallumnak van legnagyobb eleme.

   (c) A $(0;1]$ intervallumnak van legkisebb eleme.

   (d) Nem minden természetes szám osztható $3-$mal.

   (e) Nincs (nem létezik) olyan valós szám melynek a négyzete -1 lenne.

   (f) Van olyan valós szám, amelyik nem racionális.

   (g) Bármely valós szám reciproka is valós szám.

   (h) Bármely pozitív természetes szám reciproka racionális szám.

2. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\square$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

   (a) $x^2 + x < 0 \quad \square \quad x > -1$;

   (b) $x^2 + y^2 \leq 0 \quad \square \quad (x = 0 \ \wedge \ y = 0)$;

   (c) $(x + y)^2 = (x - y)^2 \quad \square \quad (x = 0 \ \vee \ y = 0)$;

3. Írja le kvantorok segítségével az alábbi állítást:

   Van olyan pozitív K szám, hogy minden nála nagyobb x pozitív valós szám esetén teljesül az, hogy $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ kisebb mint 100^{-1}.

   Igaz-e a kapott állítás?

4. Írja le kvantorok segítségével az alábbi állítást:

   Minden ε pozitív számhoz van olyan pozitív K szám, hogy minden nála nagyobb x pozitív valós szám esetén teljesül az, hogy $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ kisebb mint ε.

   Igaz-e a kapott állítás?

5. Fogalmazza meg kvantorokkal a matematika nyelvén az alábbi implikációt:

   Minden olyan x, t valós számra az $[1; 2]$ intervallumból, melyek távolsága kevesebb mint $1/3$ a négyzetgyökeik eltérése kisebb mint $1/6$.

   Igaz-e a kapott állítás?

6. Fogalmazza meg kvantorokkal a matematika nyelvén az alábbi állítást:

   Majdnem minden n természets szám esetén

$$\frac{2^n}{3^n} < \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

   Igaz-e a kapott állítás?

7. Igaz-e az alábbi állítás, ha x valós számot jelöl:

$$\exists\, A \subseteq \mathbb{R}:\ \ (|x^2-4| = 1 \iff x \in A)\,?$$

8. Igaz-e az alábbi állítás, ha x valós számot jelöl:

$$\exists\, A \subseteq \mathbb{R}:\ \ ((|x-1| < 1/2 \ \wedge\ |x-1/3| < 3/4|) \iff x \in A)\,?$$

9. Pozitív formában tagadja az alábbi állítást, majd döntse el, hogy melyik az igaz:

$$\forall\, A \subseteq \mathbb{R}\ \exists\, x \in A:\ |x-2| > 3\,.$$

10. Fogalmazza meg kvantorokkal a matematika nyelvén az alábbi állítást:

    Majdnem minden n természets szám esetén $\dfrac{3n+1}{n+2}$ eltérése $3-$tól kevesebb, mint $\dfrac{1}{10}$. Igaz-e a kapott állítás?

11. Helyes-e az alábbi levezetés (x valós számot jelöl):

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{1-x} > 1 \iff \sqrt{x-2} > 1 + \sqrt{1-x} \iff \sqrt{1-x} < x-2 \iff$$

$$\iff x^2 - 3x + 3 > 0 \iff x \in \mathbb{R}\,?$$

12. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \frac{x^2+1}{x} \quad (x > 0).$$

Igaz-e, hogy:

$$\forall\, y \in [2;+\infty)\ \exists\, x \in (0;+\infty) : f(x) = y\,?$$

13. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \cos x \quad (x \in (-\pi/2;+\pi/2)).$$

Igaz-e a következő implikáció?

$$\text{Ha } x \in \mathbb{R} \text{ olyan, hogy } |2x| < 1 \implies f(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Írja fel a megfordított állítást is és vizsgálja meg annak igazságtartalmát.

14. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen irányú implikációk és ekvivalenciák igazak az alábbi állítások között:

(a)
$$A(x) : f(x) > 0;$$

(b)
$$B(x) : \exists\, k \in \mathbb{N}\ \ x \in (2k\pi; (2k+1)\cdot\pi;$$

(c)
$$C(x) : x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi; (2k+1)\cdot\pi).$$

15. Vizsgáljuk meg, hogy milyen irányú implikációk és ekvivalenciák igazak az alábbi állítások között:

(a)
$$A(x) : x \in \cap_{n=1}^{+\infty}(-1/n; 1/n);$$

(b)
$$B(x) : \forall\, k \in \mathbb{N}^+ : \ \ |k\cdot x| < 1;$$

(c)
$$C(x) : x = 0.$$

9.2. Feladatok

9.2.1. Órai feladatok

Egyenletek, egyenlőtlenségek levezetése

1. Helyesek-e az alábbi levezetések a valós számok halmazán tekintve a megfelelő átalakításokat:

(a) $\ln x^6 = 6 \iff 6 \cdot \ln x = 6 \iff \ln x = 1 \iff x = e\,?$

(b) $\sqrt{2x^2-2} > x \quad (x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty))) \iff 2x^2 - 2 > x^2 \iff x^2 > 2 \iff x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)\ ?$

(c)
$$\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3} \iff$$
$$\iff (4x-1)+(4-x)+3\cdot\sqrt[3]{(4x-1)(4-x)}\cdot(\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{4-x}) = -3 \iff$$
$$\iff (4x-1)+(4-x)+3\cdot\sqrt[3]{(4x-1)(4-x)}\cdot(-\sqrt[3]{3}) = -3 \iff$$
$$\iff x+2 = \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{-4x^2+17x-4} \iff x^3+18x^2-39x+20 = 0 \iff$$
$$\iff (x-1)^2\cdot(x+20) = 0 \iff x_1 = x_2 = 1 \wedge x_3 = -20\ ?$$

(d) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \iff \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\cdot\frac{x}{y} - 3 = 0 \iff \left(\frac{x}{y} = 1 \vee \frac{x}{y} = -3\right) \iff$
$$\iff (y = x \vee x = -3y)\ ?$$

(e) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \iff (x+y)^2 - 4y^2 = 0 \iff (x-y)\cdot(x+3y) = 0 \iff$
$$\iff (y = x \vee x = -3y)\ ?$$

(f) Ha $x, y \in Z$ akkor:
$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 5 \iff (x-y)\cdot(x+3y) = 5 \iff (x; y) \in \{(2; 1); (-4; 1)\}\ ?$$

(g) Ha $x, y \in Z$ akkor:
$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 3 \iff (x-y)\cdot(x+3y) = 3 \iff (x; y) \in \emptyset\ ?$$

Implikációk, ekvivalenciák

2. Állapítsuk, meg, hogy az alábbi állítások közé milyen jel tehető a $\star$ szimbólum helyére a következő halmazból
$$\{\Longrightarrow; \Longleftarrow; \Longleftrightarrow\}$$
úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Ahol ekvivalencia érvényes, ott csak az $\Longleftrightarrow$ jelet tegyük ki. Ahol csak az "egyik irány igaz" ott cáfoljuk meg egy példával az állítás megfordítását. Az előforduló változók valós számokat jelölnek.

(a) $x^2 = 25 \ \star \ x = 5.$

(b) $x^2 = 25 \ \star \ x = -5.$

(c) $a^2 + b^2 = 0 \ \star \ ab = 0.$

(d) $a < b \ \star \ a^2 < b^2.$

(e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \ \star \ x = 1.$

(f) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0 \ \star \ x \in \{-1; 2\}.$

(g) $x^2 - 3x = 0 \ \star \ x = 3.$

(h) $\ln x < 1 - \sqrt{x} \ \star \ x \in (0; 1].$

(i) $|x| = x \ \star \ x \geq 0.$

(j) $\sin 2x = \operatorname{tg} x \ \star \ x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

(k) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x}{1 - |x|} \quad (x \in (-1; 1))$ függvényt.

Ekkor : $f(x) = f(t) \ \star \ x = t.$

(l) Tekintsük az $f(x) := |x - 1| + |x + 2| \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

Ekkor : $f(x) = f(t) \ \star \ x = t.$

3. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt jelentő A (ekvivalens) kijelentést az alábbi állításokhoz:

(a) $\sqrt[4]{x} = x^4 \iff A(x).$

(b) $\sqrt[3]{x} = x^3 \iff A(x).$

(c) $\sqrt{1 - \cos x} = -2 \cdot \sin \dfrac{\pi}{4} \cdot \sin \dfrac{x}{2} \iff A(x).$

(d) $\sqrt{\cos x} > 1 - \sin^2 x \iff A(x).$

(e) $\cos x = x^2 - 4\pi \cdot x + 4\pi^2 + 1 \iff A(x).$

(f) $\dfrac{x \cdot 2018^{1/x} + \dfrac{1}{x} \cdot 2018^x}{2} = 2018 \iff A(x).$

(g) $\operatorname{tg}(x - y) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \iff A(x; y).$

(h) $x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y \iff A(x; y).$

(i) $|x| + |y| < 1 \iff A(x; y)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a kétdimenziós síkbeli koordináta rendszerben.

(j) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 2} < 3 \iff A(x; y; z)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a háromdimenziós térbeli koordináta rendszerben.

(k) $max\{a, b\} = \dfrac{|a - b| + a + b}{2} \iff A(a; b).$

(l) Tekintsük az $f(x) := ax - 2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol a valós paraméter. Ekkor:

$$(f(x) = f(t) \implies x = t) \iff A(a).$$

(m) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$ függvényt. Ekkor:

Az $f(x) = y$ egyenlet megoldható ($x-$re nézve) $\iff A(y)$.

(n) Tekintsük az $f(x) := x^2 - 4x$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt.

($\emptyset \neq D \subset D_f$ tovább nem bővíthető halmaz, melyre

$$\forall x \neq t \in D \Rightarrow f(x) \neq f(t)) \iff A(D).$$

9.2.2. További feladatok

Egyenletek levezetése

1. Helyesek-e az alábbi levezetések a valós számok halmazán tekintve a megfelelő átalakításokat:

(a) $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x} = 0 \iff \sin^2 x + x^2 = 0 \iff (\sin x = 0 \wedge x = 0) \iff x = 0$?

(b) $\sqrt{x-3} - \sqrt{2-x} > 0 \iff \sqrt{x-3} > \sqrt{2-x} \iff x - 3 > 2 - x \iff x > \dfrac{5}{2}$?

(c) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \iff \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 3 \cdot \dfrac{x}{y} + 2 = 0 \iff \left(\dfrac{x}{y} = 2 \vee \dfrac{x}{y} = 1\right) \iff$

$$\iff (y = x \vee x = 2y) \text{ ?}$$

(d) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \iff (x-y)^2 + y^2 - xy = 0 \iff$

$$\iff (x-y)^2 - y \cdot (x-y) = 0 \iff (x-y) \cdot (x-2y) = 0 \iff (y = x \vee x = 2y) \text{ ?}$$

(e) Ha $x, y \in Z$ akkor:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 2 \iff (x+y)^2 + y \cdot (x+y) = 2 \iff (x+y) \cdot (x+2y) = 2 \iff$$

$$\iff (x; y) \in \{(0; 1); (3; -1); (0; -1); (-3; 1)\} \text{ ?}$$

Implikációk, ekvivalenciák

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi állítások közé milyen jel tehető a $\star$ szimbólum helyére a következő halmazból

$$\{\Longrightarrow; \Longleftarrow; \Longleftrightarrow\}$$

úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Ahol ekvivalencia érvényes, ott csak az $\iff$ jelet tegyük ki. Ahol csak az "egyik irány igaz" ott cáfoljuk meg egy példával az állítás megfordítását. Az előforduló változók valós számokat jelölnek.

(a) $x^3 = -8 \quad \star \quad x = \sqrt[3]{-8} = -2.$

(b) $x^4 = 4 \quad \star \quad x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}.$

(c) $\sqrt[4]{x^6} = -x \cdot \sqrt[4]{x^2} \quad \star \quad x < 0.$

(d) $\dfrac{a}{b} = 0 \quad \star \quad ab = 0.$

(e) $ab > 0 \quad \star \quad (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0).$

(f) $\dfrac{a}{b} \leq 0 \quad \star \quad ab \leq 0.$

(g) $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \star \quad (ab > 0).$

(h) $\ln^2(ab) = \ln^2 a + \ln^2 b \quad \star \quad (a, b > 0 \wedge (a = 1 \vee b = 1)).$

(i) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \star \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

(j) $\dfrac{1}{x+1} \leq e^x \quad \star \quad x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$

(k) $|x| = -x \quad \star \quad x \geq 0.$

(l) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \star \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad : \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(m) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ $(x \in [0; 1))$ függvényt. Ekkor :

$$f(x) = f(t) \quad \star \quad x = t\ .$$

(n) Tekintsük az $f(x) := (x-3)^2 + |1 - x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Ekkor :

$$f(x) = f(t) \quad \star \quad x = t\ .$$

3. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt jelentő A (ekvivalens) kijelentést az alábbi állításokhoz:

(a) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = x^3 \iff A(x).$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt{x^2} \iff A(x).$

(c) $\sqrt{1 + \cos x} = \cos \dfrac{x}{2} \iff A(x).$

(d) $\sqrt{\sin x} = 1 - \cos^2 x \iff A(x).$

(e) $\sqrt{\sin x} > 1 - \cos^2 x \iff A(x).$

(f) $\sqrt{\cos x} < 1 - \sin^2 x \iff A(x).$

(g) $x^2 + \sin x + \pi \cdot x + \dfrac{\pi^2}{4} = -1 \iff A(x).$

(h) $\dfrac{e^x}{x} + x \cdot e^{-x} = 2 - (e^x - x)^2 \iff A(x).$

(i) $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \iff A(x;y)$.

(j) $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} < 2 \iff A(x;y)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a kétdimenziós síkbeli koordináta rendszerben.

(k) $|x-3|+|y-2| < 1 \iff A(x;y)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a kétdimenziós síkbeli koordináta rendszerben.

(l) $min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2} \iff A(a;b)$.

(m) Tekintsük az $f(x) := x - 1 + ax \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol a valós paraméter. Ekkor :

$$(f(x) = f(t) \implies x = t) \iff A(a).$$

(n) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{3x+2}{x+1} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ függvényt. Ekkor:

Az $f(x) = y$ egyenlet megoldható ($x-$re nézve) $\iff A(y)$.

(o) Tekintsük az $f(x) := 1 - x^2 \ (x \in (-\infty; 1]\ )$ függvényt.

($\emptyset \neq D \subset D_f$ tovább nem bővíthető halmaz, melyre

$$\forall x \neq t \in D \ \Rightarrow \ f(x) \neq f(t)) \iff A(D)\ .$$

10. Teljes indukció

10.1. Kiegészítés az elmélethez

Teljes indukció:

Tétel: *(A teljes indukció elve)* Tegyük fel, hogy adottak az $A(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ természetes számokra vonatkozó állítások. Ha

1. $A(0)$ igaz és
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \quad A(n+1)$ is igaz , akkor

$A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

Megjegyzések:

1. A fenti tételben az "$A(0)$ igaz" feltételt *kezdő lépésnek* nevezzük.
2. A "Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \quad A(n+1)$ is igaz" feltételben $A(n)$ az úgynevezett *indukciós feltevés*, és az itteni implikáció az *indukciós lépés*, vagy az indukciós tulajdonság öröklődése.
3. Igen gyakrori a feladatokban, hogy az indukció kezdő lépése nem $0-$ról indul, hanem például 1 vagy $2-$ről, vagy egy a feladat által megadott $m \in \mathbb{N}$ értékről. Így is megfogalmazva az állítást:

   Tétel: *(A teljes indukció elve)* Tegyük fel, hogy adottak az $A(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ természetes számokra vonatkozó állítások és $m \in \mathbb{N}$ egy rögzített természetes szám. Ha

   (a) $A(m)$ igaz és
   (b) Minden $n \in \mathbb{N}, \ n \geq m$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \quad A(n+1)$ is igaz , akkor

   $A(n)$ igaz minden $m \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

4. Egy további kiterjesztés is lehetséges, amivel most nem fogunk dolgozni, nevezetesen a természetes számok halmaza kicserélhető a fenti állításban $\mathbb{Z}-$re, azaz az egész számok halmazára.

Binomiális együtthatók:

Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ és

$$0! := 1 \ , \qquad n! := \prod_{j=1}^{n} j \quad (1 \leq n) \ , \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

A binomiális együtthatók nevezetes tulajdonságai:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1, \qquad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n, \qquad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

továbbá

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} \qquad (k=1,\dots,n)\ .$$

Példák:

Egyenlőségek igazolása

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $2 \le n$ természetes szám esetén igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n):\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Megoldás: Ellenőrizzük a kezdő lépést $n=2$−re:

$$A(2):\ \ 1-\frac{1}{2^2}=\frac{2+1}{2\cdot 2} \iff \frac{3}{4}=\frac{3}{4}\ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $2 \le n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n):\ \ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is:

$$A(n+1):\ \ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}.$$

A bizonyítandó fenti állításban a bal oldalból indulva írjuk be az indukciós feltevésben szereplő szorzat helyére a neki megfelelő "jobb oldalt", azaz:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=\underline{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=A(n)\ (\text{ind.felt.})=$$

$$=\underline{\frac{n+1}{2n}}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n\cdot(n+2)}{2n\cdot(n+1)}=\frac{n+2}{2n+2}\ \surd.$$

Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $2 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

Megjegyzés: A feladat megoldható indukció nélkül is az alábbi észrevétellel (teleszkópikus szorzat):

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\cdot(k+1)}{k^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \le n$ természetes szám esetén igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n):\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

Megoldás: Ellenőrizzük a kezdő lépést $n = 1$−re:

$$A(1):\quad 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}\iff\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés). Belátjuk, hogy ez maga után vonja az $A(n + 1)$ teljesülését is:

$$A(n+1):$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2\cdot(n+1)}=\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2\cdot(n+1)}\iff$$

$$\iff 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}.$$

A bizonyítandó fenti állításban a bal oldalból indulva írjuk be az indukciós feltevésben szereplő összeg helyére a neki megfelelő "jobb oldalt", azaz:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\text{ind.felt.}=$$

$$=\left(\underline{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\underline{\frac{1}{2n+2}}=$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\ \surd.$$

A teljes indukció elve alapján tehát $A(n)$ igaz minden $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

Megjegyzés: A fenti összefüggést *Catalan* egyenlőségnek nevezik.

Egyenlőtlenségek igazolása

1. Adjuk meg az összes $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, melyre igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad 2^n > n^2 + 4n + 5.$$

Megoldás: Ellenőrizve $n = 7-$re teljesül először, azaz:

$$A(7): \quad 2^7 > 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 \iff 128 > 82 \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy $A(n)$ igaz valamely tetszőlegesen rögzített $7 \le n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad 2^n > n^2 + 4n + 5$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is, azaz:

$$A(n+1): \quad 2^{n+1} > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5.$$

A fenti egyenlőtlenség bal oldalából indulva, az indukciós feltevést is használva becsüljünk az alábbiak szerint:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (\text{ind.felt.}) > 2 \cdot (n^2 + 4n + 5) = 2n^2 + 8n + 10.$$

Összevetve a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt belátnunk, hogy:

$$2n^2 + 8n + 10 > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5.$$

Ez utóbbit tovább alakítva kapjuk, hogy:

$$2n^2 + 8n + 10 > n^2 + 6n + 10 \iff n^2 + 2n > 0,$$

ami bőven teljesül, ha $n \ge 7$. Ezt összevetve a korábbiakkal, az alábbi becsléslánc adódik:

$$2^{n+1} > 2n^2 + 8n + 10 > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5 \implies A(n+1) \ \surd.$$

Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $7 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes számra:

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \le \frac{5n-2}{2n}.$$

Megoldás: Nézzük az induló lépést $n = 1-$re:

$$A(1): \quad \frac{1}{1!} \le \frac{3}{2} \iff 1 \le \frac{3}{2} \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy $A(n)$ igaz valamely tetszőlegesen rögzített $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdot + \frac{1}{n!} \le \frac{5n-2}{2n}.$$

Ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is, azaz:

$$A(n+1): \quad \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdot+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2}.$$

A fenti egyenlőtlenség bal oldalából indulva, az indukciós feltevést is használva becsüljünk az alábbiak szerint:

$$\underline{\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdot+\frac{1}{n!}\right)}+\frac{1}{(n+1)!} \leq (\text{ind.felt.}) \leq \underline{\frac{5n-2}{2n}}+\frac{1}{(n+1)!}.$$

Összevetve ezt a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt belátnunk, hogy:

$$\frac{5n-2}{2n}+\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2}.$$

Ez utóbbit ekvivalens módon tovább alakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2}-\frac{5n-2}{2n}=\frac{4}{4n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n\cdot(n+1)} \iff$$

$$\iff n\cdot(n+1) \leq (n+1)! \iff 1 \leq (n-1)!,$$

ami nyilván teljesül, ha $n \geq 1$. Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0;+\infty)$ pozitív valós számok esetén, melyekre:

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$$

igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n.$$

Megoldás: Bizonyítsuk az állítást a megadott pozitív számok számára (n-re) vonatkozó indukcióval. Ellenőrizzük a kezdő lépést $n=1-$re, tehát tekintsünk egyetlen $x_1>0$ pozitív valós számot, melyre igaz az, hogy $x_1=1$. Ekkor a bizonyítandó állítás az alábbi:

$$A(1): \quad x_1 \geq 1 \iff 1 \geq 1. \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz bárhogyan is választunk n darab pozitív valós számot, melyeknek a szorzata 1 igaz lesz, hogy az összegük legalább n. Belátjuk, hogy ez maga után vonja az $A(n+1)$ teljesülését is, vagyis azt, hogy, ha az

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}>0$$

számok szorzata 1, akkor:

$$A(n+1): \quad x_1+x_2+\cdots+x_{n+1} \geq n+1.$$

Két eset lehetséges. Az egyik esetben mind az $n+1$ darab szám egyenlő $1-$el. Ekkor készen vagyunk az $A(n+1)$ állítással is, hiszen ez azt jelenti ebben az esetben, hogy

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ darab}} = n+1 \geq n+1,$$

ami nyilván igaz.

A második eset az, amikor nem mindegyik szám 1. Ekkor lesz köztük legalább egy olyan szám amelyik kisebb mint 1. Legyen ez x_n. Ekkor azonban kell olyan számnak is lennie, amelyik nagyobb mint egy (ha ilyen nem lenne a többiek közt, akkor a szorzatuk $-$ itt használjuk, hogy pozitívak a számaink$-$ kisebb lenne mint 1, ami nem lehet) . Legyen tehát ez az $1-$nél nagyobb szám például az x_{n+1}. Tehát adottak most az

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} > 0$$

számok úgy, hogy

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \ \ \wedge \ \ x_n < 1 \ \ \wedge \ \ x_{n+1} > 1.$$

Alkalmazzuk most az indukciós feltevést az alábbi n darab pozitív számra, melyeknek a szorzata nyilván 1:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}.$$

Ezekre tehát igaz az $A(n)$, azaz:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n.$$

Induljunk ki a bizonyítandó $A(n+1)$ állítás bal oldalából és a fenti egyenlőtleségből becsüljük az első $n-1$ tag összegét az alábbiaknak megfelelően:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n+1} = \underline{(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}+x_n+x_{n+1} \geq \underline{n - x_n \cdot x_{n+1}}+x_n+x_{n+1}.$$

Ezt összevetve a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt igazolnunk, hogy:

$$n - x_n \cdot x_{n+1} + x_n + x_{n+1} \geq n+1.$$

Ez utóbbi pedig ekvivalens tovább az alábiakkal:

$$-x_n \cdot (x_{n+1} - 1) + x_{n+1} - 1 \geq 0 \iff (1 - x_n) \cdot (x_{n+1} - 1) \geq 0.$$

A korábban x_n és $x_{n+1}-$re tett feltételeket figyelembe véve:

$$1 - x_n > 0 \ \ \wedge \ \ x_{n+1} - 1 > 0,$$

tehát a szorzatuk pozitív, így nemnegatív is egyben. Ezzel beláttuk az $A(n+1)$ állítást. A teljes indukció elve alapján tehát $A(n)$ igaz minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és mondott tulajdonságú pozitív valós számok esetén.

Megjegyzés: a bizonyításból az is könnyen kiderül, hogy egyenlőség pontosan akkor áll elő, ha mindegyik szám 1. Formálisan tehát, ha $x_1, x_2 \cdots x_n > 0$ számok szorzata 1, akkor:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1.$$

Alkalmazás: Legyen $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0; +\infty)$ tetszőlegesen rögzített pozitív valós számok. Alkalmazzuk a most bizonyított állítást az alábbi n darab pozitív számra, melyeknek a szorzata nyilván 1:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \cdots; \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}.$$

Ekkor a **2.** feladat alapján azt állíthatjuk, hogy:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} \ge n$$

továbbá, itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \cdots = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = 1 \iff$$

$$\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Az itt kapott állításokat kicsit átrendezve és összefoglalva: tetszőleges $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám és

$$x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$$

pozitív valós számok esetén:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Könnyű meggondolni ha a fenti számokat a *nemnegatív* számkörből választjuk és ha valamelyik szám (akár mindegyik) esetleg 0, akkor is fennáll a fenti egyenlőtlenség és az egyenlőségre tett ekvivalencia, tehát igaz az alábbi tétel:

Tétel: (Számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség)

Tetszőleges $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0; +\infty)$ nemnegatív valós számok esetén:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

10.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét.
2. Definiálja az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatót.
3. Számítsa ki $\binom{5}{2}$ pontos értékét.
4. Számítsa ki $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ pontos értékét.
5. Határozza meg $\binom{n+2}{n}$−et .
6. Mennyi lesz $\binom{2018}{1111} \Big/ \binom{2018}{907}$?
7. Mennyi lesz $\binom{100}{2} + \binom{100}{3} + \binom{101}{4} + \binom{102}{5}$?
8. Mennyi lesz $\binom{1}{0} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \dots \cdot \binom{2018}{2017}$?
9. Hogyan szól a számtani−mértani közepek közti egyenlőtlenség?
10. Fejtsük ki az $(a-2b)^3 \quad (a, b \in \mathbb{R})$ hatványt.
11. Számítsuk ki a $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^3$ hatványozást.
12. Végezze el a következő binomiális kifejtést $(a+b)^5 \quad (a, b \in \mathbb{R})$, kiszámolva az együtthatókat is.

10.2. Feladatok

E szakasz feladatait teljes indukcióval oldjuk meg. Megjegyezzük, hogy köztük több feladat is van, ami teljes indukció nélkül is megoldható, sőt olyan is, melynek az indukció nélküli megoldása még egyszerűbb is. Adott esetben bemutatjuk az indukciótól eltérő megoldást is, ha annak tanulsága fontos lehet a későbbiekben.

10.2.1. Órai feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $(1 \le n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

2. (**Binomiális tétel.**)

(a) Bizonyítsuk be a binomiális tételt: Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

(b) A binomiális tétel alkalmas szereposztásával lássuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n ; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}^+) .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá a_1, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, akkor

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(a mértani sorozat első n tagjának összege)!

Egyenlőtlenségek igazolása

4. Igazoljuk, hogy

(a) $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n} - 1$ $(n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$ $(n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$;

(d) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots \dfrac{1}{3n+1} > 1$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$;

(e) $|\sin(nx)| \le n \cdot |\sin x|$ $(\forall x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N})$.

5. (**Bernoulli–egyenlőtlenség.**) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $-1 \leq h \in \mathbb{R}$, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Következmény: Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $h := \dfrac{1}{n}$ szereposztással kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

6. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli–egyenlőtlenség $-2 \leq h < -1$ valós számokra is igaz!

Megjegyzés: Itt nem működik a klasszikus indukciós bizonyítási módszer.

$\boxed{\textit{Sorozatok}}$

7. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{2}$ és $a_{n+1} := \sqrt{2 \cdot a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \; a_n < a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < 2$.

Adjunk explicit formulát a sorozat n indexű tagjának kiszámolására, majd bizonyítsuk teljes indukcióval **is** a formula helyességét! Az explicit formulát használva igazoljuk a (b) állítást.

8. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{2}$ és $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \; a_n < a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < 2$;

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n = 2 \cdot \cos \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

"Vezessük le" a fenti explicit formulát felhasználva, hogy $2 \cdot \cos \dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ és, hogy $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \dfrac{x}{2}}$.

Igazoljuk a (c) $\Longrightarrow$ (b) implikációt.

9. Tekintsük az $a_1 := \dfrac{1}{2}$; $a_2 := \dfrac{1}{3}$ és $a_{n+2} := \dfrac{a_n \cdot a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot.

Bizonyítsuk be, hogy:

$$a_n = \frac{1}{1 + 2^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Egyéb típusok

10. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az alábbi szám osztható 23−mal:

$$2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}.$$

11. Tegyük fel, hogy az $A_2, A_3, \ldots, A_n$ független eseményekre

$$P(A_k) = \frac{1}{2k^2} \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Mennyi annak a valószínűsége, hogy $A_2, A_3, \ldots, A_n$ közül páratlan sok következik be?

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén, ha $x = (2 + \sqrt{3})^n$, akkor $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{12}$ teljes négyzet.

13. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

10.2.2. További feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$;

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = n+1$;

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)2k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$;

(j) $$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cdot\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \quad (1\le n\in\mathbb{N}; x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}).$$

2. Lássuk be, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\prod_{k=0}^{n}(1+2^{2^k}) = 2^{2^{n+1}}-1\ .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n\in\mathbb{N}^+$, továbbá a_1, $d\in\mathbb{R}$, akkor

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+(a_1+(n-1)d) = \frac{n}{2}\,[\,2a_1+(n-1)d\,]$$

(a számtani sorozat első n tagjának összege)!

Egyenlőtlenségek igazolása

4. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $2^n > n^2 \quad (4<n\in\mathbb{N})$;

(b) $3^n > n^3 \quad (4\le n\in\mathbb{N})$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{2n-1}{n} \quad (2\le n\in\mathbb{N})$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} > \dfrac{1}{2} \quad (2\le n\in\mathbb{N})$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} > \dfrac{13}{24} \quad (2\le n\in\mathbb{N})$;

(f) $\dfrac{n}{2} < \sum\limits_{k=1}^{2^n-1}\dfrac{1}{k} < n \quad (2\le n\in\mathbb{N})$;

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad (2\le n\in\mathbb{N})$;

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)! > ((n+1)!)^n \quad (2\le n\in\mathbb{N})$;

(i) $2^n > 1+n\cdot\sqrt{2^{n-1}} \quad (2\le n\in\mathbb{N})$.

5. (**Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség**). Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_n \in [-1, +\infty)$, továbbá az $x_1, \ldots, x_n$ számok azonos előjelűek, akkor

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \,.$$

6. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \quad (2 \leq n \in \mathbb{N});$

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \quad (3 \leq n \in \mathbb{N}).$

Sorozatok

7. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ és $a_{n+1} := \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ :\ a_n > a_{n+1};$

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{2} < a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Adjunk explicit formulát a sorozat n indexű tagjának kiszámolására, majd bizonyítsuk teljes indukcióval **is** a formula helyességét!

8. Tekintsük az $a_1 := \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $a_{n+1} := \sqrt{\dfrac{1}{2} + a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ :\ a_n < a_{n+1};$

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2};$

9. Legyen az (a_n) sorozat első három eleme $a_0 = a_1 = a_2 = 1$. A sorozat további elemeit az alábbi szabály segítségével képezzük:

$$a_n \cdot a_{n+3} - a_{n+1} \cdot a_{n+2} = n! \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Adjuk meg a sorozat a_n elemét n függvényében.

Egyéb típusok

10. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az alábbi szám osztható $9-$cel

$$4^n + 15n - 1.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy ha α olyan valós szám, melyre $\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{3}$, akkor α irracionális.

11. Komplex számok

11.1. Az elméleti anyag

11.1.1. A komplex szám fogalma

A másodfokú egyenletek megoldásánál találkoztunk azzal a problémával, hogy ha a diszkrimináns negatív, akkor a gyök alatt negatív szám áll és így nincs valós megoldása a kérdéses egyenletnek. Például az

$$x^2 + 1 = 0$$

egyenlet ilyen. Tehát a valós számok körében nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, melynek a négyzete -1 lenne. Vajon ez akkor is igaz marad, ha valamilyen más számhalmazra térnénk át a valós számok helyett? Az eddigi középiskolai ismereteink szerint a valós számok kimerítették a legbővebb számhalmazt. Egy merész gondolattal vezessük be az úgynevezett imaginárius egységet: egy i-vel jelölt objektumot, melyről tételezzük fel, hogy éppen azt tudja, amit a fent említett x valós számok nem teljesítettek, nevezetesen, hogy:

$$i^2 = -1.$$

Ezzel az imaginárius egységgel tudunk definiálni új típusú számokat, úgynevezett komplex számokat az alábbiak szerint:

Definíció: Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok és i a fent bevezetett imaginárius egység, tehát $i^2 = -1$. Ekkor a

$$z := x + i \cdot y$$

alakú kifejezéseket *komplex (összetett) számoknak* fogjuk nevezni. A komplex számokra gyakran használjuk a $z, w, \varepsilon, ...$ vagy az indexelt $z_1, z_2, w_1, ...$ jelöléseket.

Például:

$$z = 1 + 2 \cdot i; \;\; w = -3 - \sqrt{2} \cdot i; \;\; \varepsilon = \frac{2}{3} - i;$$

$$z_1 = 2 + 0 \cdot i = 2; \;\; z_2 = 0 - 6 \cdot i = -6 \cdot i; \ldots$$

Ha például

$$z = x + i \cdot y$$

egy komplex szám, akkor azt mondjuk, hogy x a z *valós része* és y a z *képzetes része.* Jelölésben

$$z = x + i \cdot y \Longleftrightarrow x = \mathrm{Re}(z) \;\; \wedge \;\; y = \mathrm{Im}(z).$$

A fenti példákban

$$\mathrm{Re}(1 + 2 \cdot i) = 1 \;\; \wedge \;\; \mathrm{Im}(1 + 2 \cdot i) = 2;$$

$$\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(-3 - \sqrt{2} \cdot i) = -3 \;\; \wedge \;\; \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(-3 - \sqrt{2} \cdot i) = -\sqrt{2};$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{3} - i\right) = \frac{2}{3} \;\wedge\; \mathrm{Im}(\varepsilon) = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{3} - i\right) = -1;$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(2 + 0 \cdot i) = 2 \;\wedge\; \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(2 + 0 \cdot i) = 0;$$

Látható, hogy itt a képzetes rész 0, ilyenkor $z = x + 0 \cdot i = x \;\; (x \in \mathbb{R})$ valós szám. Ennek megfelelően tehát a valós számok is speciális komplex számoknak tekinthetőek, nevezetesen a képzetes részük 0.

$$\mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(0 - 6 \cdot i) = 0 \;\wedge\; \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(0 - 6 \cdot i) = -6.$$

Ebben az esetben a valós rész 0. Az ilyen komplex számokat, tehát amelyek

$$z = 0 + y \cdot i = yi \quad (y \in \mathbb{R})$$

alakúak, tiszta vagy tisztán *képzetes számoknak* nevezzük. Jelölje $\mathbb{C}$ a fent bevezetett komplex számok halmazát, vagyis:

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y \;\big|\; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

A komplex számok precíz bevezetésére és a $\mathbb{C}$ számhalmaz mélyebb vizsgálatára a későbbi tanulmányaikban fognak kitérni. Jelenlegi célunk mindössze annyi, hogy a komplex számokat bevezessük, néhány fontos tulajdonságukat megmutassuk, illetve a velük végzett algebrai számolásokat begyakoroljuk. A fenti észrevételt formálisan is megfogalmazva, a valós számok egyben komplex számok is, tehát:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

de $\mathbb{C}$ bővebb halmaz mint az $\mathbb{R}$, ugyanis például $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Két komplex számot pontosan akkor tekintünk egyenlőnek, ha valós és képzetes részeik rendre megegyeznek, tehát ha $z = x + iy$ és $w = a + ib \;\; (x, y, a, b \in \mathbb{R})$ komplex számok, akkor:

$$z = w \iff x + iy = a + ib \iff (x = a \;\wedge\; y = b).$$

Ez lehetővé tesz számunkra egy egyértelmű megfeleltetést a $z = x + iy$ komplex számok és az ennek megfelelő $(x; y)$ rendezett párok között. Ez utóbbi pontok (síkbeli vektorok) már ismertek a koordináta geometria köréből és szemléletes tartalmuk átvihető a komplex számok szemléltetéséhez és a Gauss-féle komplex számsík modellezéséhez.

11.1.2. Komplex számok szemléltetése a Gauss-féle számsíkon

Tekintsünk egy $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex számot. Ekkor a valós és a képzetes részek $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok. Ábrázoljuk ezeket egy Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer vízszintes és függőleges tengelyein (mint valós számegyeneseken). A vízszintes tengelyen jelöljük a valós részt és a függőleges tengelyen a képzetes részt. Mivel egy $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ rendezett számpárhoz egyértelműen hozzárendelhető egy és csakis egy komplex szám (nevezetesen $z = x + iy$), illetve egy és csakis egy pont a Descartes-féle koordináta síkunkon, ezért feleltessük meg ennek egy (x, y) pontját a Gauss-sík $z = x + iy$ komplex pontjának.

A vektorok hosszának mintájára vezessük be a komplex szám hosszát (modulusát, abszolút értékét) és a komplex szám konjugáltját (a valós tengelyre vett tükörképét):

Definíció: Legyen $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tetszőleges komplex szám. Ekkor a hossza, vagy abszolút értéke (modulusa) a

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0; +\infty)$$

nemnegatív valós szám, illetve a konjugáltja a

$$\overline{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

komplex szám.

Például:

$$|7 - 4i| = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}; \quad |-1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}; \quad |i| = \sqrt{1} = 1;$$

$$\overline{1 - 2i} = 1 + 2i; \quad \overline{-1 + 2i} = -1 - 2i; \quad \overline{-5i} = 5i;$$

Megjegyzés: A bevezetésben felvetett analógia a vektorok és a komplex számok között, illetve a megfelelő szemléltetés lehetőséget ad a komplex számok további átírására egy másik alakra, amit *trigonometrikus alaknak* nevezünk, de jelen tárgy keretei között erre nem fogunk kitérni. Itt és most a komplex számokat csupán a bevezetett, úgynevezett *algebrai alakjukban* fogjuk használni.

11.1.3. Műveletek algebrai alakú komplex számokkal

Definíció: Vezessük be a négy alapműveletet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás). Legyenek ehhez $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ komplex számok. Ekkor definíció szerint:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i;$$

$$z_1 - z_2 := (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) := (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i;$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i;$$

$$z_1/z_2 := \frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} := \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i;$$

A műveletek eredményét : az új komplex számot (összeg, különbség, szorzat, hányados) algebrai alakban tüntettük fel (leolvasható a valós és a képzetes részük). Vajon hogyan jött ki ez a definíció?

Például: Legyenek $z_1 := 2 + 3i$ és $z_2 := -1 + 5i$. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$z_1 + z_2 = (2+3i) + (-1+5i) = 1+8i; \ \wedge \ z_1 - z_2 = (2+3i) - (-1+5i) = 2+3i+1-5i = 3-2i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (-1 + 5i) = -2 + 10i - 3i + 15i^2 = -2 + 7i - 15 = -17 + 7i;$$

$$z_1/z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{-1+5i} = \frac{(2+3i)\cdot(-1-5i)}{(-1+5i)\cdot(-1-5i)} = \frac{13-13i}{1-25i^2} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i;$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i;$$

$$3z_1 := 3\cdot z_1 = 3\cdot(2+3i) = 6+9i;$$

$$iz_1 := i\cdot z_1 = i\cdot(2+3i) = 2i+3i^2 = -3+2i;$$

$$z_1^2 = (2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = -5+12i;$$

$$2z_1 = 2\cdot(2+3i) = 4+6i;$$

$$\frac{1}{z_1+2z_2} = \frac{1}{(2+3i)+2\cdot(-1+5i)} = \frac{1}{13i} = \frac{i}{13i^2} = -\frac{1}{13}\cdot i;$$

Megjegyzés: Megfigyelhető, hogy a komplex számok összeadása és kivonása, illetve a valós skalárral (számmal) való szorzása megfeleltethető a vektoroknál tanult hasonló műveleteknek. Más a helyzet a szorzással. A vektoroknál tanult skaláris és vektoriális szorzás nincs kapcsolatban a megfelelő komplex számok szorzásával. Osztásról a vektorok esetében nem is beszélhetünk.

Egy érdekes összefüggés vezethető le a komplex szám, annak hossza és konjugáltja között, ami sokszor használható a számolások során is. Legyen ehhez $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ a szokásos jelölésű komplex számunk. Ekkor:

$$z\cdot\overline{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - y^2\cdot i^2 = x^2+y^2 = |z|^2 \ \ (z\in\mathbb{C}),$$

tehát bármely z komplex szám esetén:

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2 \ \ (z\in\mathbb{C}),$$

vagy

$$|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} \ \ (z\in\mathbb{C}).$$

Speciálisan, ha $z = x+0i = x\in\mathbb{R}$ valós szám, akkor a fenti azonosság az alábbi ismerős alakot ölti:

$$|z| = |x| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{x^2},$$

azaz

$$\sqrt{x^2} = |x| \ \ (x\in\mathbb{R}).$$

Kérdés: Mit jelent geometriailag az alábbi nemnegatív szám, ha z_1 és z_2 két tetszőlegesen rögzített komplex szám:

$$|z_1 - z_2|\,?$$

11.1.4. Valós együtthatós polinomok és komplex gyökök

Végül egy utolsó pontban térjünk vissza a kiindulásként felvetett problémához, nevezetesen például olyan valós együtthatós másodfokú egyenletekhez és megoldásaikhoz, ahol a diszkrimináns negatív. Például oldjuk meg az

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

másodfokú egyenletet. Alkalmazva a tanult megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

Ahogy annak idején megállapítottuk a gyök alatt nem állhat negatív szám (ezért nincs valós megoldás) és mit értsünk akkor a $\sqrt{-3}$ szám alatt?
Most, hogy bevezettük az i imaginárius egységet, melyre $i^2 = -1$ alakítsuk az alábbi módon a fenti egyenletet (teljes négyzet alak):

$$(x+1)^2+3 = 0 \iff (x+1)^2 = -3 \iff (x+1)^2 = 3 \cdot i^2 \iff (x+1)^2 - (\sqrt{3} \cdot i)^2 = 0 \iff$$

$$\iff (x + 1 - \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x + 1 + \sqrt{3} \cdot i) = 0.$$

Innen már leolvasható a két gyök:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \cdot i.$$

Látható, hogy ilyenkor a két megoldás egymásnak komplex konjugáltja. Összevetve a kapott megoldásokat a megoldóképletben kapott eredménnyel egy kérdés marad: mit értsünk a $\sqrt{-3}$ szám alatt? Ez itt a komplex gyökvonás fogalmát igényli, amit a későbbi tanulmányok során fognak tanulni. Jelenleg egyezzünk meg abban, hogy

$$\sqrt{-1} = i$$

és, hogy

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i.$$

Ezzel az "egyezménnyel" kikerülhető a szorzattá alakításos levezetés és használhatjuk az ismert megoldóképletet.

Megjegyzések:

1. A komplex gyökvonás bevezetésével látni fogjuk, hogy például -1–nek a négyzetgyöke két érték lehet, nevezetesen: $\pm i$, hiszen mindkettőre igaz, hogy

   $$(\pm i)^2 = i^2 = -1.$$

   Egyezzünk meg jelenleg abban, hogy $\sqrt{-1} = i$.

2. A $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$ egyenlőség általában nem igaz a komplex számok körében, azaz ha $z, w \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex számok, akkor általában **nem igaz**, hogy

$$\sqrt{z \cdot w} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}.$$

A minket érintő mostani témakörben előforduló $x > 0$ valós esetekben igazolható az alábbi egyenlőség:

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-1}.$$

Az általános esethez, legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ rögzített valós számok és tekintsük az ezekkel képzett másodfokú egyenletet:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (x \in \mathbb{C}),$$

ahol tehát x most a komplex számok köréből vehet fel értékekeket és tegyük fel, hogy a diszkrimináns negatív, tehát:

$$b^2 - 4ac < 0.$$

A korábban megismert megoldóképlet teljesen analóg módon vezethető le és a fenti egyezménnyel az alábbi (konjugált) komplex gyököket kapjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot \sqrt{-1}}{2a} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Megjegyzés:

1. Jegyezzük meg, hogy a magasabb fokú valós együtthatós polinomok első vagy a valós számhalmazon tovább nem bontható másodfokú tényezők szorzatára bonthatóak (hogyan?) és ha ez megvan innen már könnyű a valós és a komplex gyökök megadása.

   Például oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:

   $$x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0.$$

   Megoldás: Vegyük észre (nem mindig egyszerű), hogy:

   $$x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0 \iff x^4 - 9x^2 - x^3 + 9x + x^2 - 9 = 0 \iff$$

   $$\iff x^2 \cdot (x^2 - 9) - x \cdot (x^2 - 9) + (x^2 - 9) = 0 \iff (x^2 - 9) \cdot (x^2 - x + 1) = 0 \iff$$

   $$\iff x^2 = 9 \ \vee \ x^2 - x + 1 = 0.$$

   Tehát a keresett megoldások az alábbiak:

   $$x_{1,2} = \pm 3; \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

11.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mikor igaz, hogy $z = w$, ha $z, w \in C$ komplex számok?
2. Definiálja a $\mathbb{C}$ *komplex számhalmazt.*
3. Definiálja egy z komplex szám *konjugáltját.*
4. Adja meg az $\dfrac{2i-1}{5+3i}$ komplex szám valós és képzetes részét.
5. Ha $z = x + iy \in C$ komplex szám $(x, y \in \mathbb{R})$, akkor adja meg a z^2 komplex szám valós és képzetes részét.
6. Adottak a $z_1 \neq 0$ és $z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számok. Adja meg a $\dfrac{z_2}{z_1}$ komplex szám valós és képzetes részét.
7. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \ \ |z \cdot w| = |z| \cdot |w|\ ?$$
8. Milyen z komplex számokra igaz, hogy
$$z^2 + \overline{z}^2 = 0\,?$$
9. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$\mathrm{Re}(\, z - 1 + i) = 2\,?$$
10. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$-1 < \mathrm{Re}\, z \leq 3\,?$$
11. Határozza meg a $z = (\sqrt{2} - i \cdot \sqrt[4]{3})^2$ komplex szám modulusát.
12. Melyek azok a z komplex számok (és ábrázoljuk őket), amelyekre z^3 valós szám?
13. Mennyi $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$?
14. Mennyi lesz $1 + \dfrac{1+i}{1-i} \cdot i$?
15. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^3 - 1 = 0.$$

11.1.6. További kérdések az elmélethez

1. Számítsa ki a $(2-i)^3$ komplex számot.
2. Adja meg a $\dfrac{2}{3-i}$ komplex szám valós és képzetes részét.
3. Adja meg a $\dfrac{3-i}{i}$ komplex szám valós és képzetes részét.
4. Adja meg a $\dfrac{1}{z}$ komplex szám valós és képzetes részét, ha $z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
5. Adja meg az $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$ komplex szám valós és képzetes részét.
6. Definiálja egy z komplex szám *abszolút értékét.*
7. Igaz-e minden z komplex számra, hogy $|z^2| = |z|^2$?
8. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \ \ \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\ ?$$
9. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0: \ \ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}\ ?$$
10. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0: \ \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\ ?$$
11. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \ \ \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}\ ?$$
12. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \ \ |z+w| = |z| + |w|\ ?$$
13. Mikor igaz, hogy $z = \overline{z}$?
14. Fejezzük ki egy z komplex szám valós és képzetes részét z és $\overline{z}$ segítségével.
15. Mit fejez ki geometriailag a $|z - \sqrt{3} + i|$ szám ?
16. Mennyi lesz $|z - \overline{z}|$?
17. Mennyi lesz $|z + \overline{z}|$?
18. Igaz-e, hogy:
$$\forall\, z \in \mathbb{C}: \ \ \overline{\overline{z}} = z\ ?$$
19. Mennyi lesz $\overline{z - \overline{z}}$?

20. Mit ad meg a komplex számsíkon az alábbi ponthalmaz, ha $z \in \mathbb{C}$ egy rögzített komplex szám :
$$L := \{c \cdot z \mid c \in \mathbb{R}\}\ ?$$

21. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$|\mathrm{Im}\, z| > 2\ ?$$

22. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$|\mathrm{Im}\, z + 1| < 1 \ \ \wedge |\mathrm{Re}\, z - 1| \leq 2 \ \ ?$$

23. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

24. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^3 + 1 = 0.$$

25. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^2 + 8 = 0.$$

26. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^4 - 16 = 0.$$

27. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

11.2. Feladatok

11.2.1. Órai feladatok

1. Határozzuk meg az $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy az alábbi egyenlőségek teljesüljenek (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2 = -1$):

(a) $(1-2i)\cdot x + (1+2i)\cdot y = 1 + i$;

(b) $(2+i)\cdot x - (2-i)\cdot y = x - y + 2i$;

(c) $(4-3i)\cdot x^2 + (3+2i)\cdot xy = 4y^2 - \dfrac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)\cdot i$;

(d) $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i.$

2. Végezzük el az alábbi műveleteket és hozzuk algebrai alakra a kapott kifejezéseket (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $\dfrac{1}{2-3i}$;

(b) $\dfrac{1+5i}{3+2i}$;

(c) $(1-2i)\cdot(5+i)$;

(d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+i}}}$;

(e) $(2-i)^2+(2+i)^3$;

(f) $(3-\sqrt{2}i)^3\cdot(3+\sqrt{2}i)$;

(g) $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{3-i}{1+i}$;

(h) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}+\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2}$;

(i) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2019}$.

3. Igazoljuk, hogy a megadott egyenletnek a felsorolt komplex számok megoldásai (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $x^3-x^2+8x+10=0;\quad z_1:=1+3i\ \wedge\ z_2:=1-3i;$

(b) $x^4+x^2+1=0;\quad z_1:=-\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \wedge\ z_2:=-\dfrac{1}{2}-i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

4. Adottak az alábbi komplex számok:

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}\ \wedge\ z_2=\frac{i}{-2\sqrt{2}+2i}.$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:

$$z_1+z_2;\ \ z_1\cdot z_2;\ \ \frac{z_1}{z_2};\ \ z_1^2+z_2^2;\ \ z_1^3+z_2^3;\ \ z_1^4+z_2^4;\ \ z_1^{-3}\cdot z_2^5.$$

5. Számítsuk ki az alábbi összegeket:

(a) $S_{2018} = \sum_{k=0}^{2018} i^k$;

(b) $S_{2019} = \sum_{k=0}^{2019} (-1)^k \cdot i^k$.

6. Tegyük fel, hogy a $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számokra $|z| = |w| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$\frac{z+w}{1+z\cdot w} \in \mathbb{R}.$$

7. Határozzuk meg $|z|$−et, ha:

$$z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4.$$

8. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss−féle számsíkon, amelyekre z^3 tisztán képzetes szám.

9. Milyen $z \in \mathbb{C}$ komplex számok elégítik ki az alábbi egyenleteteket:

(a) $z^2 = 1 + i$;

(b) $z^3 = \overline{z}$?

Ábrázoljuk a kapott megoldásokat a komplex síkon.

10. Bizonyítsuk be, hogy bármely $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számok esetén igaz az alábbi azonosság:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2 \cdot (|z|^2 + |w|^2).$$

Mi a geometriai jelentése a fenti azonosságnak?

11. Mi lesz $|z - i - 1|$ legkisebb és ha van legnagyobb értéke és mely z komplex számok esetén veszi ezt fel, ha:

(a) $\operatorname{Im} z = -2$?

(b) $\operatorname{Im} z = 2 \cdot \operatorname{Re} z$?

(c) $|z + 1| = 1$?

$\boxed{\textit{Valós együtthatós polinomok, komplex gyökök}}$

12. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $x^3-1=0$;

(b) $x^4-1=0$;

(c) $x^2-2\sqrt{2}\cdot x+5=0$;

(d) $x^3-9x^2+18x+28=0$;

(e) $x^4-30x^2+289=0$.

11.2.2. További feladatok

1. Határozzuk meg az $x, y\in\mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy az alábbi egyenlőségek teljesüljenek (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $2x+i+x\cdot i\cdot(x+y)=3+y\cdot(1-i)$;

(b) $3\cdot\sqrt{x^2-2y}+(1-i)x^2=2\cdot(1+2i)y+4-19i$;

(c) $\dfrac{2}{3x+iy}-\dfrac{3}{5+i}=2$.

(d) $\dfrac{x-1}{1+i}+\dfrac{y+1}{1-i}=\dfrac{i}{2}$.

2. Végezzük el az alábbi műveleteket és hozzuk a legegyszerűbb alakra a kapott kifejezéseket (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-i}$;

(b) $\dfrac{i-\sqrt{5}}{i+\sqrt{5}}$;

(c) $(i^2-7i)\cdot(2+i)$;

(d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{i-1}}}$;

(e) $(2+i)^2+(2-3i)^3$;

(f) $\dfrac{i-6}{2+5i}+\dfrac{2-i}{2+i}$;

(g) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$;

(h) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5$;

(i) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$;

(j) $\dfrac{(1/\sqrt{2}+i)^3-(1/\sqrt{2}-i)^3}{(1/\sqrt{2}+i)^2-(1/\sqrt{2}-i)^2}$;

(k) $\left(\dfrac{19+7i}{9-i}\right)^4+\left(\dfrac{20+5i}{7+6i}\right)^4$.

3. Igazoljuk, hogy a megadott egyenletnek a felsorolt komplex számok megoldásai (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $x^3-3\sqrt{2}\cdot x^2+7x-3\sqrt{2}=0;\quad z_1:=\sqrt{2}-i\ \wedge\ z_2:=\sqrt{2}+i;$

(b) $x^4-2x^3+(6+\sqrt{2})x^2-8x+4\cdot(\sqrt{2}+2)=0;\quad z_{1,2}:=\pm 2i\ \wedge\ z_{3,4}:=1\pm i\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}.$

4. Adottak az alábbi komplex számok:

$$z_1=\frac{5i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot i}\ \wedge\ z_2=\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot i}.$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket és az eredményt adjuk meg algebrai alakban:

$$z_1+z_2;\ z_1\cdot z_2;\ \frac{z_1}{z_2};\ z_1^2+z_2^2;\ z_1^3+z_2^3;\ z_1^4+z_2^4;\ z_1^3\cdot z_2^{-3}-z_1^{-3}\cdot z_2^3\,.$$

5. Milyen $n\in\mathbb{N}^+$ pozitív természetes szám esetén igaz, hogy:

$$(1+i)^n=(1-i)^n\ ?$$

6. Bizonyítsuk be, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ természetes szám esetén igaz, hogy:

$$(1+i)^n+(1-i)^n\in\mathbb{R}\,.$$

7. Számítsuk ki az alábbi összegeket:

(a) $S_{2018}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2018}(1+i)^k$;

(b) $S_{2019}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2019}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{3k}$.

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a\in\mathbb{R}$ valós paraméter esetében az alábbi komplex szám abszolút értéke 1:

$$z:=\frac{1+ia}{1-ia}.$$

9. Határozzuk meg $|z|$–et, ha:

$$z = \frac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^4}.$$

10. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss–féle számsíkon, amelyekre z^4 valós szám.

11. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss–féle számsíkon, amelyekre z^4 tisztán képzetes szám.

12. Határozzuk meg az alábbi feltételeknek eleget tevő z komplex számokat:

(a) $|z+i| = |\overline{z}-1| = |z-iz|$;
(b) $|z+1-i| = 1 \ \wedge \ |z-1+i| = \sqrt{5}$;
(c) $|z+2+i| = 1 \ \wedge \ |z| = \sqrt{5}-1$;
(d) $|z-1| = |1+iz| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

13. Milyen $z \in \mathbb{C}$ komplex számok elégítik ki az alábbi egyenleteteket:

(a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$;
(b) $z^3 = \dfrac{i}{\overline{z}}$?

Ábrázoljuk a kapott megoldásokat a komplex síkon.

14. Mi lesz $|z-1+i|$ legkisebb és ha van legnagyobb értéke és mely z komplex számok esetén veszi ezt fel, ha:

(a) $\operatorname{Im} z = 2$;
(b) $\operatorname{Re} z = -1$;
(c) $|z-i| = 1$;

Valós együtthatós polinomok, komplex gyökök

15. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $x^2 + 2x + 3 = 0$;
(b) $x^3 + 1 = 0$;
(c) $x^6 + 1 = 0$;
(d) $x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 4x - 4\sqrt{2} = 0$;
(e) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 20x + 25 = 0$.