

1. A probléma megoldása, részfeladatok

A feladat

- két azonos számú affin függvénnyel definiált iterált függvényrendszer által generált fraktál egymásba transzformálása úgy, hogy a transzformáció során a generált fraktálok box-dimenziójának valamilyen alsó becslést tudjunk adni.
- a definiáló háromszögek csúcsai között olyan folytonos görbék keresése (valamilyen genetikus függvénnyel), amelyek mentén a lépésenként generált fraktálok box-dimenziója egy alsó korlát alá nem csökken.
- Apophysis-hez hasonló kezelőfelület kialakítása
- mentési lehetőség megvalósítása, a generált fraktálok animációja és a függvények szintjén egyaránt

Részfeladatok

A probléma megoldására a következő részfeladatok lettek megfogalmazva:

- a matematikai háttér alapos ismerete és kidolgozása
- algoritmusok kidolgozása: (fraktálgenerálás, fraktál deformáció, box-dimenzió kiszámítása, genetikus algoritmus amely olyan folytonos görbéket keres amelyek mentén a lépésenként generált fraktálok box-dimenziója nem csökken egy alsó korlát alá)
- a kidolgozott algoritmusok implementációja Java nyelvbe
- dokumentáció készítése a program megvalósításáról és működéséről

A feladat megoldása közben a legnagyobb kihívást a box-dimenzió becslése jelentette, a legtöbb időt az algoritmusok kidolgozása és implementálása vette igénybe. Különösen sok ráfordítást igényelt az n kontrolponttal rendelkező Basier görbék implementációja. Az implementálás Java nyelvben történt a JOGL függvénykönyvtár használatával.

A munka végeredménye

Egy olyan program, amely különböző fraktálok egybetranszformálását teszi lehetővé. A program képes háromszögek, valamint iterált függvényrendszerek segítségével fraktálokat kigenerálni, valamint ezeket egymásba transzformálni. Feltétel, hogy a két fraktált azonos számú affin függvény kell meghatározza.

2. Alapfogalmak

Fraktál

A legegyszerűbb, de nem feltétlenül pontos megközelítésben – „önhasznló”, végtelenül komplex geometriai alakzatok. Az önhasznlóság azt jelenti, hogy egy kisebb rész felnagyítva ugyanolyan struktúrát mutat, mint egy nagyobb rész. Az eredeti és talán legszélesebb körben elfogadott definíció, miszerint fraktálnak nevezünk egy geometriai alakzatot akkor, ha „induktív” dimenziója (Lebesgue-dimenziója) nem esik egybe (szigorúan kisebb) a Hausdorff-féle dimenziójával.

Transzformáció

A matematikában, elsősorban a geometriában transzformáció alatt egy halmaz önmagába való leképezéseit értjük. Speciális esetként a geometriai transzformációk olyan függvények, amelyek pontokhoz pontokat rendelnek hozzá, tehát értékkészletük és értelmezési tartományuk pontthalmaz.

Affin transzformáció

Az affin geometriában használt, illetve a lineáris algebra részeként is tárgyalható fogalom. Egy affin transzformáció során a transzformált koordináták az eredeti koordináták lineáris függvényeként állnak elő. Ide tartoznak a lineáris transzformációk és az eltolás is. Iterált függvényrendszer, Iterated Function System (IFS) – A matematikában használt módszer, amellyel fraktálokat építenek fel. Ezek az IFS fraktálok mindig önhasznlóak. Az iterált függvényrendszerek a dinamikai rendszerek tanulmányozásában is használatosak.

Példa

Legyen egy lineáris transzformáció, amely egy pontot leképez egy másik pontba. A transzformációt a következőképpen definiáljuk:

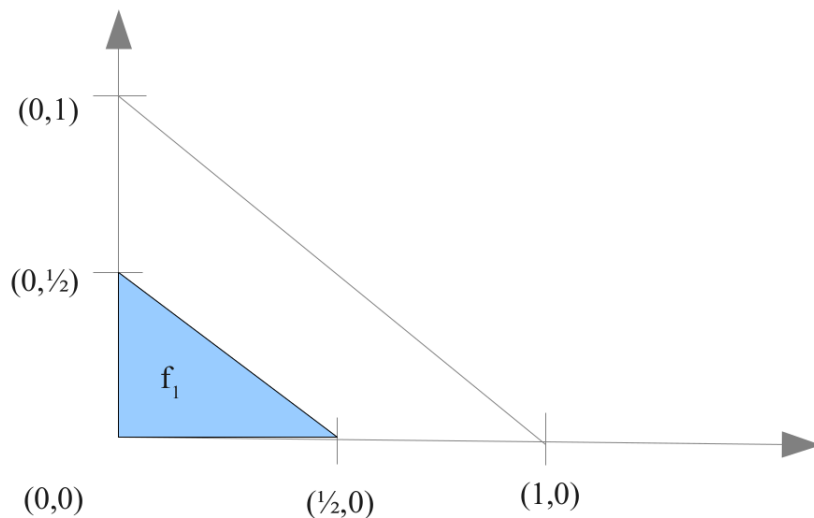
$$l_1(0, 0) = (0, 0); l_1(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0); l_1(0, 1) = (0, \frac{1}{2});$$

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ Három pont által meghatározott affin transzformációk.

$$f_1 = l_1 + \vec{v};$$

Az f_1 egy affin transzformáció amit úgy kapunk meg, hogy egy lineáris transzformációt eltolunk egy \vec{v} vektorral. Ebben az esetben a $\vec{v} = (0, 0)$;

Grafikusan a következőt jelenti:

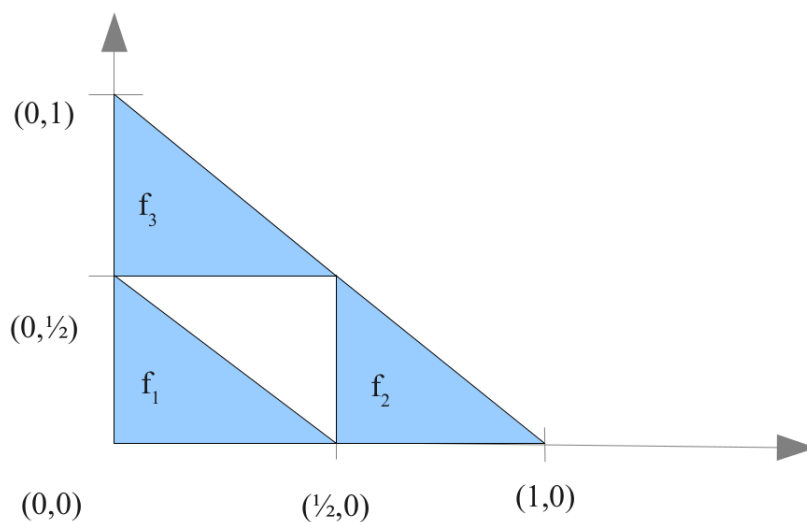


2.1. ábra. Affin transzformáció

Az f_2, f_3 transzformációt az f_1 -hez hasonlóképpen kapom meg:

$$\begin{aligned} \{f_2(x, y) = f_1(x, y) + \vec{v}\} \quad \vec{v} &= (\tfrac{1}{2}, 0) \\ \{f_3(x, y) = f_1(x, y) + \vec{u}\} \quad \vec{u} &= (0, \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Grafikusan a következőképpen néz ki:



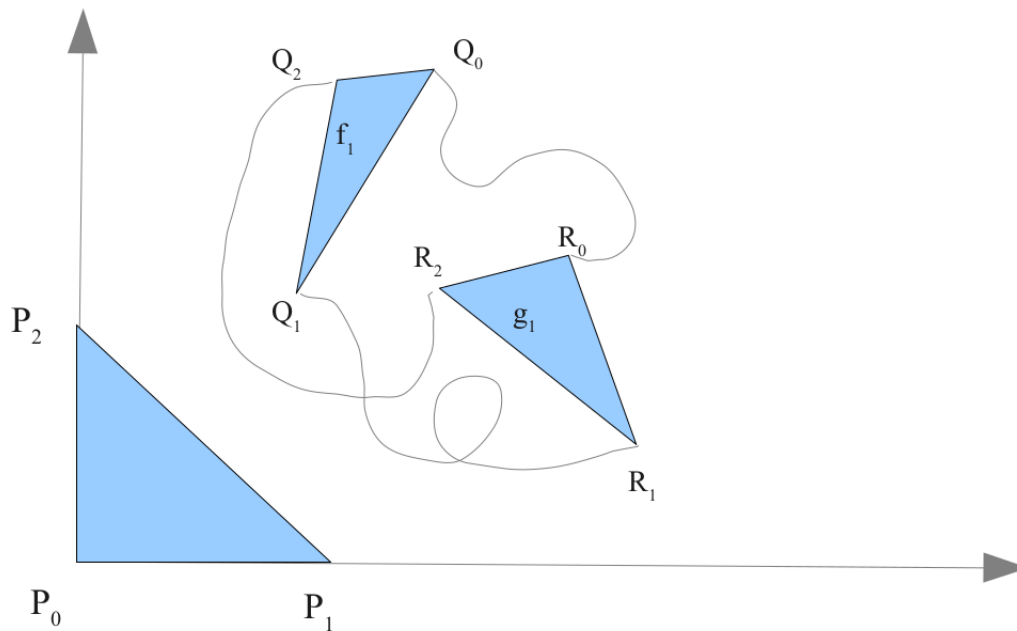
2.2. ábra. Affin transzformációk

Ha a transzformációk segítségével megkapott kicsi háromszögekre újra és újra elvégezzük az előbbi transzformációkat, akkor egy önhasonló struktúrát fogunk kapni. Nem szükséges minden lépésben (iterációban) elvégeznünk mind a három transzformációt, elég ha minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Esetünkben a Sierpinski háromszöget fogjuk megkapni.

Fraktál deformáció

Fraktál deformáció alatt azt a folyamatot értjük, amely egy meglevő fraktál képét, átképezi egy másik fraktál képébe. Feltétel, hogy a két fraktál képét ugyanannyi pont határozza meg. A fraktál deformációt a következő példa segítségével szemléltetjük:

Legyen $f_1, g_1 : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$

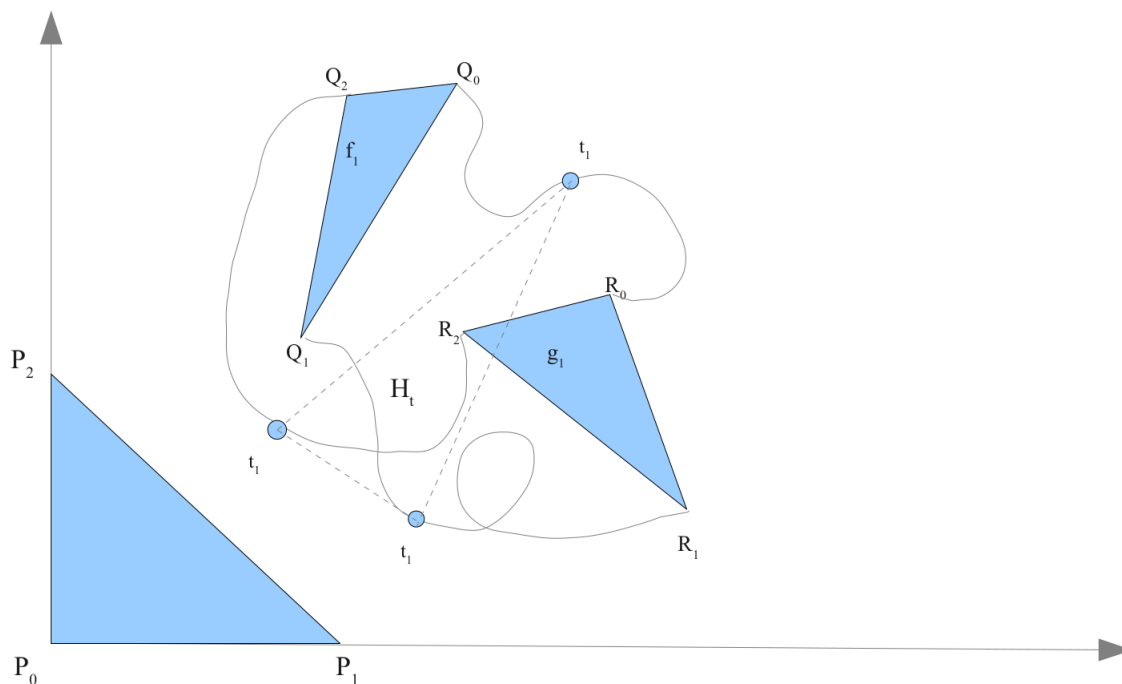


2.3. ábra. Fraktál deformáció

Az f_1 transzformáció a P_0, P_1, P_2 pontokat viszi át a Q_0, Q_1, Q_2 pontokba, míg a g_1 transzformáció az R_0, R_1, R_2 pontokba. A fraktál deformáció esetén beszélhetünk egy γ függvényről, amely valamilyen síkgörbe mentén, T idő alatt leképezi a Q_0, Q_1, Q_2 pontokat, az R_0, R_1, R_2 pontokra.

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Ez egy köztes t_1 időpillanatban, egy köztes H_t fraktál képét tekinthetjük meg. Ezt a következő ábrán szemléltetjük.



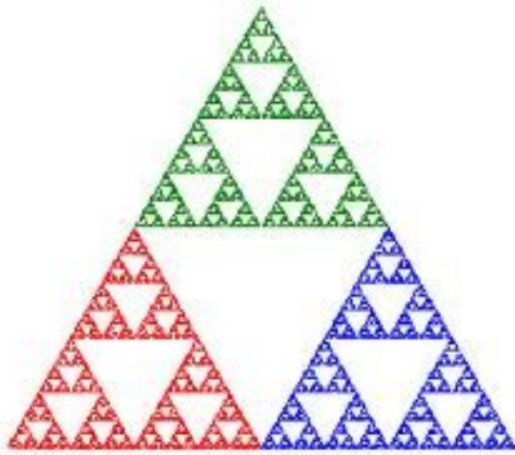
2.4. ábra. Köztes állapot

Box-dimenzió(Hausdorff-dimenzió,fraktáldimenzió)

A fraktálgeometriában egy módszer, amellyel meg lehet határozni a fraktál dimenzióját egy Euklideszi térben. A box-dimenzió kiszámításához, képzeljük el az adott fraktált egy egyenletesen elosztott négyzethálóban elhelyezve és számoljuk meg, mennyi négyzetre van szükség, hogy befedje a teljes halmazt. Minél sűrűbb ez a négyzetháló, annál jobban nő ez a szám. Legyen $N(\varepsilon)$ a négyzetek száma, és ε a négyzetek oldalainak hossza. Ekkor a következőképpen határozzuk meg a box-dimenziót:

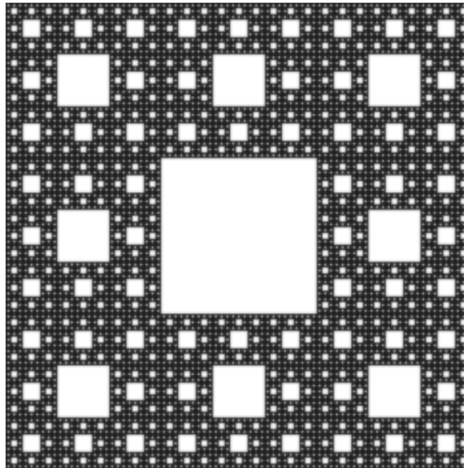
$$\dim_{\text{box}}(S) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

„A fraktál olyan halmaz, aminek a Hausdorff-dimenziója nagyobb, mint a Lebesgue-dimenziója.” – Mandelbrot. Ahol a vonal Lebesgue-dimenziója egy, a felületé kettő, és így tovább. Ez alapján számítva a fraktálok hossza vagy felszíne végtelen. A Hausdorff-dimenziót szemléletesen az adja, hogy hány példányra van szükség az adott alakzathoz ahhoz, hogy kirakjuk az alakzat egy nagyobb példányát. Ez csak szabályos fraktál esetén alkalmazható. Például a Sierpinski-háromszög, ami önmagának három felére kicsinyített példányából áll, Hausdorff-dimenziója (box-dimenziója) $\frac{3}{2} \approx 1,585$, míg Lebesgue-dimenziója 1.



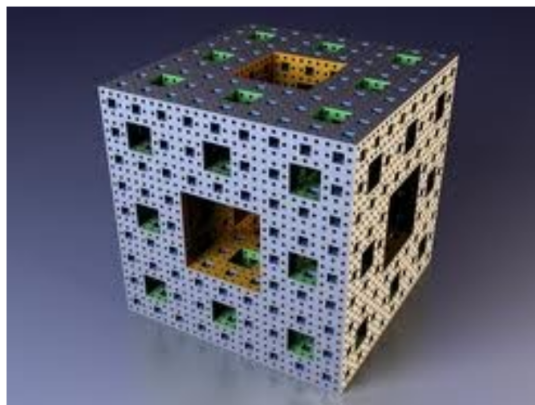
2.5. ábra. Sierpinski-háromszög

A Sierpinski-szőnyeg box-dimenziója $\frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,89$



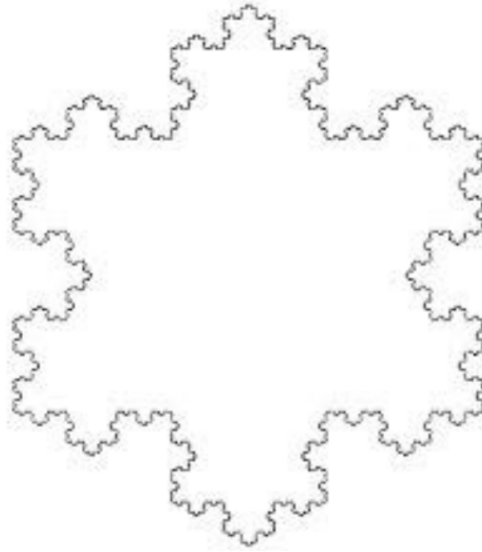
2.6. ábra. Sierpinski-szőnyeg

A Menger-szivacs box-dimenziója $\frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,73$



2.7. ábra. Menger sponge

A Koch-hópehely box-dimenziója $\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$



2.8. ábra. Koch-hópehely

Genetikus algoritmusok

Olyan keresési technikák egy osztálya, melyekkel optimumot vagy egy adott tulajdonságú elemet lehet keresni. A genetikus algoritmusok speciális evolúciós algoritmusok, a technikáikat az evolúcióbiológiából kölcsönözték. A genetikus algoritmusok sokfélék lehetnek, de az alábbi részeket mindig tartalmazzák:

Inicializáció

A kezdeti populációt legegyszerűbb véletlenszerűen generálni. A populáció mérete a probléma természetétől függ, de leggyakrabban néhány száz vagy néhány ezer egyedből áll. Hagyományosan az egyedek a keresési téren egyenletesen oszlanak el, viszont egyes esetekben olyan részekben több egyedet generálnak, ahol sejthető az optimum.

Szaporítás (keresztelés)

Egyedekből újabb egyedeket a kétoperandusú keresztelés (vagy rekombináció) művelettel, és az egyoperandusú mutáció művelettel lehet. Ezeket az operátorokat általában véletlenszerűen alkalmazzák.

Kiválasztás (szelekció)

Az egyedek generálása után a kiválasztásra kerül sor. A kiválasztás lehet determinisztikus vagy stochasztikus. Az első esetben szigorúan az egy adott küszöbértéknél jobb állóképességű egyedek maradnak fenn, a stochasztikus kiválasztásnál a rosszabb állóképességű egyedek közül is néhány fennmarad. A stochasztikus megoldás népszerűbb, mert elkerülhető vele a lokális optimumhoz való konvergencia.

Leállítás

A genetikus algoritmusok rendszerint addig futnak, amíg egy leállási feltétel nem teljesül. Gyakori leállási feltételek a következők:

- Adott generációs szám elérése.
- Ha a legjobb egyed állóképessége már nem javul jelentős mértékben egy-egy iterációval.

2. Irodalomjegyzék

- [1] <http://www.berzsenyi.hu/~dcsonka/matek/Mandelbrot/Mandelbrot/fraktal.htm>.
- [2] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-halmaz>.
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Iterated_function_system.
- [4] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Frakt%C3%A1l>.
- [5] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Hausdorff-dimenzi%C3%B3>.
- [6] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-h%C3%A1romsz%C3%B6g>.
- [7] http://hu.wikipedia.org/wiki/Affin_transzform%C3%A1ci%C3%B3.
- [8] [http://hu.wikipedia.org/wiki/Transzform%C3%A1ci%C3%B3_\(matematika\)](http://hu.wikipedia.org/wiki/Transzform%C3%A1ci%C3%B3_(matematika)).
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski%E2%80%93Bouligand_dimension.
- [10] http://hu.wikipedia.org/wiki/Genetikus_algoritmus.