

6. Zeeman-effektus

Koltai János

2013. április

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. A Fábry–Perot-interferométer	3
2.1. Az interferométeren átmenő fény intenzitása	4
2.2. Kísérleti alkalmazások	5
2.3. Spektrális jellemzők, felbontóképesség	6
3. A mérés menete	8
4. Számolási feladatok	9
5. Gyakorló kérdések	9
6. Mérési feladatok	10

1. Bevezetés

Ha egy atomot külső mágneses térbe helyezünk, az energiaszintjei eltolódnak, az eredetileg degenerált szintjei felhasadhatnak, ezt a jelenséget nevezzük Zeeman-effektusnak. A felhasadást az atomi mágneses momentumok ($\vec{\mu}$) és a külső mágneses tér (\vec{B}) kölcsönhatásaként fellépő energia okozza:

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (1)$$

Az (1) kifejezésben a skalárszorzat függ a mágneses tér és a mágneses momentum relatív irányától. A mágneses magrezonancia (NMR) és az elektron spin rezonancia (ESR) egyaránt az atomi energiaszintek Zeeman-felhasadásának következménye. Az NMR esetében a felhasadások a mag mágneses momentum és a nagy statikus mágneses tér irányától függenek. A magrezonancia során egy kisebb, váltakozó elektromágneses térrel (jellemzően a rádiófrekvenciás tartományban ($\nu = 20$ MHz)) a magmomentumok közti átmenet hozható létre. Az ESR-ben a Zeeman-felhasadás az elektronok mágneses momentumától függ és ezért egy sokkal nagyobb energiájú (jellemzően $\nu = 10$ GHz) váltakozó elektromágneses tér kell a rezonancia létrejöttéhez.

Ebben a kísérletben az optikai Zeeman-effektust fogjuk vizsgálni, ami bizonyos értelemben kicsit bonyolultabb, mert mindig két energiaszint felhasadását kell egyszerre figyelembe venni. Az optikai Zeeman-effektus során az atom egy gerjesztett állapotból alapállapotba (vagy egy alacsonyabb energiájú gerjesztett állapotba) relaxál, és az energiaszintek közötti energia egy foton formájában sugárzódik ki. Ha ez a folyamat külső mágneses térben zajlik, akkor mind a kezdő, mind a végállapot energiaszintjei felhasadhatnak és ennek megfelelően többféle, kicsit különböző energiájú fotont figyelhetünk meg.

Ezt a jelenséget 1896-ban Zeeman¹ fedezte fel, és magyarázta meg a Bohr-atommodell keretében. A Zeeman–Lorentz-féle magyarázatban a mágneses térben mozgó elektronokra Lorentz-erő hat, ami kissé módosítja a pályájukat és ezáltal az energiájukat. Ez az energiaváltozás függ a pálya irányától, ha merőleges a pálya a mágneses térre, akkor a ΔE energia pozitív vagy negatív lesz, attól függően, hogy az elektron mozgása a pálya mentén az óramutató járásával egyező vagy ellenkező. Ha a mágneses tér a pálya síkjába esik, akkor pedig a Lorentz-erő átlaga egy körbejárás során zérus lesz, és emiatt a $\Delta E = 0$ lesz. Ez az érvelés minden esetben a spektrumvonalak hármas („normális”) felhasadására vezet. Egy körültekintőbb tárgyalás ugyanezt az eredményt adja tetszőleges irányultságú pálya esetén. Egy kvantummechanikai tárgyalás nem a Lorentz-erőn alapul, hanem azon, hogy egy adott pályaimpulzus-momentumú elektronhoz μ_l mágneses momentum kapcsolódik, és az (1) egyenletnek megfelelően egy energia-felhasadásra vezet. Ez a felhasadás természetesen függ a mágneses momentum és külső mágneses tér relatív irányultságától.

¹Pieter Zeeman (1865-1943), holland fizikus. 1902-ben Hendrik Lorentzcel megosztott Nobel-díjat kapott a később róla elnevezett jelenség felfedezéséért.

A gyakorlatban a „normális” három vonalas Zeeman-felhasadást ritkán tudjuk megfigyelni. Általában egy nagyfelbontású spektroszkóppal több, mint három vonalat találunk, sőt, ha éppen három vonalat találunk, akkor is azok nem a Zeeman-Lorentz féle érvelésnek megfelelően függnek a mágneses tértől. Ezt az „anomális” Zeeman-effektust csak évekkel később, az elektron spinjének felfedezését követően lehetett megmagyarázni. Az elektron spinje, vagyis saját impulzusmomentuma, egy belső szabadsági fok, amihez szintén kapcsolódik mágneses momentum, csak a pályából származó mágneses momentumtól eltérő mértékű, nagyjából annak kétszerese.

A mérés során a *higany* $^3S_1 \rightarrow ^3P_1$, kék vonalának Zeeman-felhasadását fogjuk vizsgálni, a kis mágneses tér (< 1 T) határesetben. Mivel a felhasadás kicsi ($B = 1$ T mágneses tér esetén is $0,01$ nm nagyságrendű), megfigyeléséhez nagyfelbontású spektroszkópiai módszert kell alkalmazni, jelen esetben a felhasadásokat Fábry–Perot-interferométerrel figyeljük meg. A mérés elvégzése előtt szükséges az [A.](#) függelék elolvasni, ahol a Zeeman-effektusról bőseges leírás található!

2. A Fábry–Perot-interferométer

Tekintsünk két, egymástól d távolságban lévő, párhuzamos üveglemezt, melyre λ hullámhosszú, monokromatikus fénysugár esik be ([1](#) ábra)! Az üveglemezek belső felületei részben tükrözőek, így ha a θ beesési szög kicsi, a sugár sokszorosan reflektálódik az üveglemezek között. A jobb oldalon kilépő sugarakra az optikai úthossz különböző, azok a végtelenben, vagy egy gyűjtőlencse fókusz síkjában interferálnak ([1](#)). Jelölje δl az optikai úthosszak különbségét a szomszédosan kilépő (eggyel többször oda-vissza reflektálódott) sugarak esetén. Az [1](#) ábráról leolvasható, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$\delta l = \overline{AB} + \overline{BC} = 2d \cos \theta, \quad (2)$$

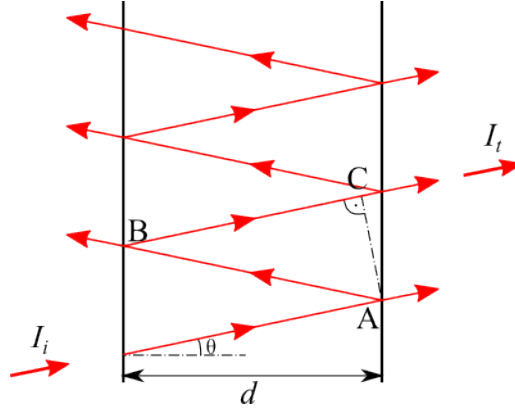
ahonnan a két sugár közötti fáziskülönbség:

$$\delta \varphi = 2\pi \frac{\delta l}{\lambda} + \varphi_1 + \varphi_2 = 4\pi \cos \theta \frac{d}{\lambda} + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (3)$$

ahol φ_1, φ_2 a fémrétegeken visszaverődéskor kapott fázisváltozás. A beesési szögtől függően az átmenő fény interferenciájában erősítés vagy gyengítés (kioltás) lép fel. Az erősítés feltétele most is $\delta \varphi = 2\pi m$, ahol m egy tetszőleges egész szám. Ha eltekintünk a fémrétegeken visszaverődéskor kapott fázisváltozásoktól, akkor az m -ed rendű erősítés iránya a következő lesz:

$$\cos \theta_m = \frac{\lambda m}{2d}. \quad (4)$$

Megjegyezzük, hogy kis szögekre m nagy szám lesz, ugyanis be szokás vezetni m_0 -át, ami a fenti egyenlet megoldása $\theta = 0$ szög esetén, azaz $m_0 = 2d/\lambda$. Szokásos paraméterek mellett $m_0 \approx 10^4$.



1. ábra. Egy sugár többszöri visszaverődése a Fábry–Perot-interferométerben

2.1. Az interferométeren átmenő fény intenzitása

Az interferométeren átmenő fény intenzitásának részletesebb analizéséhez kiszámíthatjuk az átmenő fény elektromos terének amplitúdóját (E_t^0) a beeső fény elektromos terének amplitúdójából (E_i^0), valamint az átmenő fénysugarak időtől függő elektromos térerősségeinek szuperponálásából – a megfelelő fázisfaktorkok figyelembevételével. A k -adik átmenő fénysugár elektromos tere: $E_{tk} = E_{tk}^0 \exp(i\omega t)$, ahol $k = 0$ az első átmenő (nem reflektálódott) fénysugárnak felel meg. Ha a belső, tükröző felületek reflexiós és átviteli tényezői r és t , akkor $E_{tk}^0 = t^2 r^{2k} E_i^0$. A k -adik sugár fázisa $k\delta\varphi$ -vel késik a $k = 0$ -dik sugár fázisához képest. A fentiek figyelembevételével az átmenő fény térerőssége:

$$E_t = \sum_{k=0}^{\infty} E_{tk}^0 \exp[i(\omega t - k\delta\varphi)] = E_i^0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (t^2 r^{2k}) \exp(-ik\delta\varphi) \right] \exp(i\omega t). \quad (5)$$

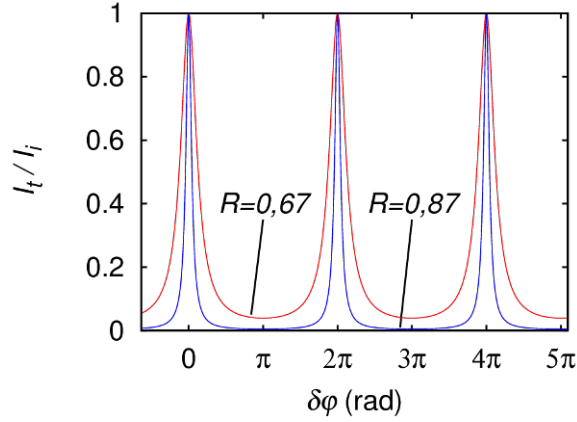
Itt feltételeztük, hogy a tükrök között a visszaverődések száma nagy, ezért az összegzésben a felső határt végtelennek vettük. Az (5) geometriai sort felösszegezve az alábbi kifejezés kapható:

$$E_t = \left[\frac{T}{1 - R \exp(-i\delta\varphi)} \right] E_i^0 \exp(i\omega t), \quad (6)$$

ahol bevezettük a $T = t^2$ transzmissziós- és $R = r^2$ reflexiós együtthatókat. Mivel a fényintenzitás a térerősség abszolútértékének négyzetével arányos, a fentiekből az átmenő és a beeső fény intenzitásának aránya:

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2 \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta\varphi/2)}, \quad (7)$$

ahol bevezettük az $F = 4R/(1 - R)^2$ jelölést. A 2 ábrán a (7) egyenletnek megfelelően az átmenő fény intenzitását ábrázoltuk a fáziskülönbség függvényeként két különböző R



2. ábra. A Fábry–Perot-interferométeren átmenő fény intenzitáseloszlása két különböző reflexió esetén ($R = 0,67$ és $R = 0,87$)

reflexió esetében. Feltételeztük, hogy a tükröző rétegek abszorpciója zérus, azaz teljesül a $T + R = 1$ összefüggés. Az ábrán látható, hogy a maximumok periodikusan a $\varphi = 2\pi m$ értékeknél lépnek fel. Minél tökéletesebb a lemezeken a reflexió, annál keskenyebb a rezonanciák az intenzitásban. Mint azt később látni fogjuk ez összefüggésben áll a spektroszkóp felbontóképességével.

2.2. Kísérleti alkalmazások

A Fabry–Perot-interferométer egy nagyfelbontású spektroszkópai eszköz, amely többféle elrendezésben is használható. Egy szokásos elrendezésben az interferométeren áthaladó, párhuzamos nyaláb intenzitását mérik az interferométer mögött, egy gyűjtőlencse fókuszpontjában elhelyezett, pontszerű résen (pinhole) keresztül. Az interferométert feltöltik a vizsgált gázzal. Finoman változtatva az interferométerben lévő gáz törésmutatóját (pl. a nyomás vagy a hőmérséklet változtatásával) az intenzitás maximumok az interferencia miatt jellegzetesen módosulnak. Az ilyen fajta mérés kiértékeléséhez a (3) kifejezésben a közeg törésmutatóját is figyelembe kell venni az optikai úthosszkülönbség számolásakor.

A jelen kísérletben alkalmazott elrendezés a 3 ábrán látható. Egy kiterjedt fényforrás sugarait egy gyűjtőlencse kis divergenciájú nyalábként az interferométerre vetíti. A rendszer hengeres szimmetriája miatt a tágulóan beeső nyaláb az interferométer mögött egy színes gyűrűrendszerként képződik le. Ez akár végtelenre akkomodált szemmel is megfigyelhető. A gyűrűk kvantitatív megértéséhez tekintsünk monokromatikus nyalábot, és leképezésként használjunk egy második gyűjtőlencsét a fókusz síkjában elhelyezett ernyővel! A gyűjtőlencse az optikai tengellyel θ szöget bezáró párhuzamos nyalábot a fókusz síkjában egy pontba képezi le, melynek távolsága az optikai tengelytől:

$$\overline{OP_\theta} = D/2 = f \tan \theta, \quad (8)$$

ahol f a lencse fókusz távolsága, D pedig a kialakuló gyűrű átmérője lesz. Ha figyelembe vesszük a (4) interferencia-feltételt, akkor paraxiális sugarakra (θ_m kicsi, azaz $\tan \theta_m \approx \sin \theta_m$) adódik, hogy:

$$\left(\frac{D_m}{2f}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\lambda m}{2d}\right)^2 = \left(1 + \frac{\lambda m}{2d}\right) \left(1 - \frac{\lambda m}{2d}\right). \quad (9)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $m, m_0 \gg m_0 - m$, a következő alakra juthatunk:

$$D_m^2 = 8f^2 \left(1 - \frac{\lambda m}{2d}\right). \quad (10)$$

Ez a kifejezés az alapja a mérés kiértékelésének. A (10) képlet m -ben lineáris, tehát a szomszédos gyűrűk átmérőnégyzeteinek különbsége mindig állandó lesz:

$$D_{m-1}^2 - D_m^2 = 8f^2 \frac{\lambda}{2d} = \text{const.} \quad (11)$$

Ez a kifejezés lehetőséget teremt a Fabry–Perot-interferométer kalibrálásához, ha ismerjük a lencse fókusz távolságát és a monokromatikus nyaláb hullámhosszát, vagy a lencse fókusz távolságát számolhatjuk ki, ha az interferométer tükreinek távolságát ismerjük. A mérés során ennek kicsit módosított alakját használjuk majd a kalibráláshoz.

A (10) képlet alapján tudjuk a felhasadások következményeképpen kialakuló interferenciagyűrűket értelmezni. Ha feltételezzük, hogy az interferenciaképet két közeli hullámhosszú monokromatikus nyaláb hozza létre, melyeknek a hullámhosszai rendre λ és $\lambda + \Delta\lambda$, akkor a gyűrűk átmérői között az alábbi összefüggés fog teljesülni:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{8f^2} (D_m^2 - D_m'^2). \quad (12)$$

A mérés során mindvégig ezen formula alapján fogjuk a Zeeman-felhasadást kiszámolni.

2.3. Spektrális jellemzők, felbontóképesség

A Fabry–Perot-interferométer spektrális jellemzésére több paramétert szokás bevezetni. Az egyik a *szabad spektrális tartomány* ($\Delta\lambda_0$), melyet úgy értelmezhetünk, hogy azon két közeli spektrumvonal hullámhosszának különbsége, melyek két szomszédos rendben azonos átmérőjű interferenciagyűrűket hoznak létre. A (10) egyenlet alapján a szabad spektrális tartományra a következő eredmény adódik:

$$\Delta\lambda_0 = \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda}{m_0} = \frac{\lambda^2}{2d}, \quad (13)$$

ahol felhasználtuk, hogy m nagy szám és közelíthettük m_0 -val.

A szabad spektrális tartomány meghatározza azt a spektrumtartományt, mely egyidejűleg az interferométerrel megfigyelhető, a különböző rendű gyűrűk összekeveredése nélkül. Mivel a szabad spektrális tartomány a Fábry–Perot-interferométernél kicsi, ezért gyakran más spektrométerrel kombinálva alkalmazzák. A szabad spektrális tartomány a d lemeztávolság növelésével csökken.

Az interferométer *felbontóképessége* többféleképpen is definiálható. Az F_0 felbontást az intenzitáseloszlás (2 ábra) két szomszédos maximuma közötti $\delta\varphi$ és a maximum körüli félértékszélesség (γ) hányadosaként definiáljuk. A félértékszélesség a (7) egyenletből számolható, $\gamma = 2\delta\varphi_0$, ahol teljesül az alábbi feltétel:

$$F \sin^2(\delta\varphi_0/2) = 1. \quad (14)$$

Feltételezve, hogy $F \gg 1$, azt kapjuk, hogy $\gamma = 4/\sqrt{F}$. Mivel a két intenzitásmaximum távolsága a (3) egyenlet szerint 2π , az F_0 -ra az alábbi eredmény adódik:

$$F_0 = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \quad (15)$$

A fázisszögre megadott γ félértékszélesség átszámítható hullámhosszkülönbségre ($\delta\lambda$) is a (3) egyenlet segítségével, a $\delta\varphi$ függvény λ szerinti deriváltjának felhasználásával:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2d} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}. \quad (16)$$

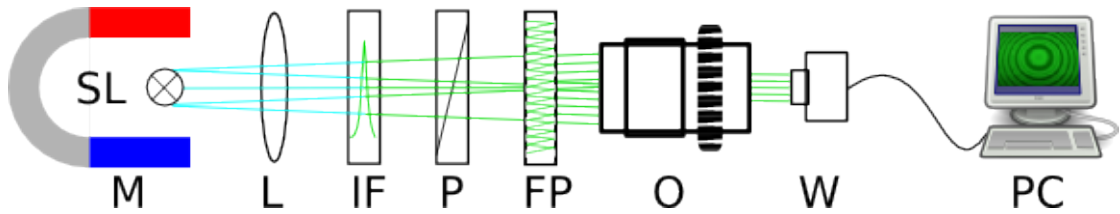
A $\delta\lambda$ – definíció szerint – két olyan spektrális vonal hullámhosszkülönbsége, mely egymástól még megkülönböztethető (Rayleigh-kritérium). A $\delta\lambda$ csökkenthető a d lemeztávolság növelésével. Spektroszkópiában szokásos az adott spektrométer felbontóképességét a λ és $\delta\lambda$ hányadosaként definiálni (R_0):

$$R_0 = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2d}{\lambda} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}. \quad (17)$$

A Fabry–Perot-interferométerre az F_0 felbontóképesség a jellemzőbb. Könnyen belátható, hogy F_0 egyúttal megadja az ún. *effektív interferencia számot* is. Ez utóbbi – definíció szerint – az a szám, amely megadja, hogy hány felbontható vonal fér bele a szabad spektrális tartományba, azaz F_0 -ra fennáll a következő összefüggés:

$$F_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{\delta\lambda}. \quad (18)$$

F_0 csak a tükröző felületek reflexiójától függ, a reflexiót növelve F_0 is nő, az interferométer fényereje viszont csökken.



3. ábra. A mérési elrendezés vázlatos rajza: SL - spektrállámpa, M - elektromágnes, L - gyűjtőlencse, IF - interferencia szűrő, P - polarizátor, FP - Fabry-Perot interferométer, O - objektív, W - webkamera, PC - számítógép

3. A mérés menete

A kísérleti elrendezés vázlatos összeállítása a 3 ábrán látható. Az elektromágnes (M) pólusai között helyezkedik el a spektrálizzó (SL). A spektrálizzó fénye egy gyűjtőlencsével (L) kissé széttartó nyalábként a Fabry–Perot-interferométerre jut. Az interferencia szűrő (IF) segítségével kiválaszthatjuk a vizsgálandó spektrálvonalat, a polarizátorral (P) pedig a mágneses térrel párhuzamos (π) illetve arra merőleges (σ) komponenseket tudjuk majd szétválasztani. A Zeeman-felhasadást ebben az elrendezésben a mágneses térre merőleges irányban kilépő fotonokon figyeljük meg. Elvileg lehetséges lenne a térrel párhuzamos megfigyeles is, csak ahhoz a tekercsek magjára lyukat kellene fúrni, hogy az izzó fénye arra is ki tudjon a tekercsek közül lépni. A gyűrűket egy objektív (O) a webkamera (W) bemenetére vetíti, a keletkező képeket számítógépen (PC) rögzítjük.

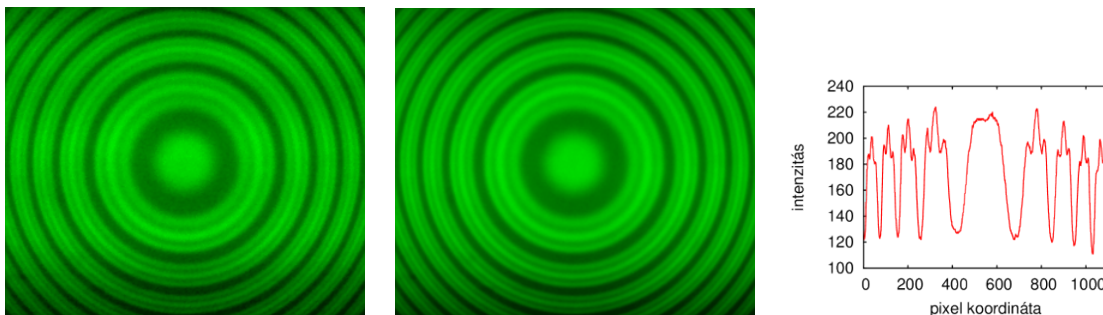
A gyűrűket megfigyelhetjük szabad szemmel is. Ehhez el kell távolítani az objektívet és a webkamerát. Ezt felhasználhatjuk a Fabry–Perot-interferométer lemezeinek párhuzamosra állítására: ha szemünket az optikai tengelyre merőlegesen mozgatjuk – rossz beállítás esetén – a gyűrűk egyes irányokban mozogva tágulnak, míg más irányban szűkülnek. A táguló iránynak megfelelő lemeztávolságot ekkor finoman csökkenteni kell. A lemezek állítására az interferométer előlapján három csavar szolgál.

Az objektívvel és webkamerával történő megfigyelés esetén kissé módosítani kell a (11) és a (12) formulákat. Mivel az első lencse után további lineáris leképezések következnek, amelyek nagyítása nem ismert, célszerű az alábbi alakokat használni:

$$D_{m-1}^2 - D_m^2 = N \frac{\lambda}{2d}, \quad (19)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N}(D_m^2 - D_m'^2), \quad (20)$$

ahol N a nagyítási tényező, melyet a kalibráció során az első egyenletből határozzunk meg. Fontos, hogy ezután már a rendszer nagyításán ne változtassunk! A kamerával készült képek minősége nagymértékben javítható több kép átlagolásával, ezért képsorozatot készítünk a mérés során, majd a képfeldolgozás első lépéseként átlagoljuk azokat. A 4 ábrán példaként egy π átmenetekről készült kép látható.



4. ábra. A Fabry–Perot-interferométeren keletkező gyűrűrendszer Zeeman-felhasadása, a higany zöld vonalára, párhuzamos polarizátor állás (π) esetén. A nyers kép mellett az átlagolás eredménye, valamint az átmérő mentén vett intenzitáseloszlás látszik.

4. Számolási feladatok

- Számolja ki a g-faktor értékét a 3P állapotokra!
- Számolja ki a higany kék vonalának relatív intenzitásait!

5. Gyakorló kérdések

1. Milyen kölcsönhatás eredménye a Zeeman-felhasadás?
2. Mi a spin-pálya csatolás Hamilton-operátora?
3. Mi a Zeeman-kölcsönhatás Hamilton-operátora?
4. Írja fel a Zeeman-felhasadás kis mágneses tér esetén érvényes alakját!
5. Mi az a Bohr-magneton? Mekkora a Bohr-magneton értéke?
6. Mit jelent a 3P_2 jelölés?
7. Mekkora lehet J értéke, $L = 1$ és $S = 1$ esetén?
8. Mik egy $J = 2$ spin lehetséges vetületei?
9. Hányszorosan degenerált egy $S = 42$ spin? Mekkora a spin, ha a spin multiplicitás 42?
10. Mi az a spintriplett/spinszinglett?
11. Írjon fel két feles spinű részecskére szimmetrikus/antiszimmetrikus spinhullámfüggvényt!

12. Hogyan hangzik a Pauli-elv a hullámfüggvényekre kimondva?
13. Mik azok a (jó) kvantumszámok és mire valók?
14. Mekkora az optikai fáziskülönbség egy Fabry–Perot-interferométer esetén?
15. Hogyan lehet energiát mérni a Fabry–Perot-interferométerrel?

6. Mérési feladatok

A spektrállámpa ultraibolya fényt is kibocsájt, mely a szemre ártalmas lehet, ezért ne nézzünk tartósan a spektrállámpába! Az elektromágnes tápegységét mindig zérusra állított áramerősségnél kapcsoljuk ki vagy be!

1. Végezzük el a berendezés optikai beállítását!
2. A kvalitatív vizsgálódás végeztével kalibrációként vegyük fel zérus mágneses tér mellett az intenzitáseloszlást! Ebből a (19) képletben az N nagyítási tényező meghatározható ($\lambda = 435,84 \text{ nm}$, $d = 8 \text{ mm}$). Fontos, hogy ezután az optikai beállítást már nem szabad megváltoztatni! A kamerával készült képek minősége nagymértékben javítható több kép átlagolásával, ezért képsorozatot (legalább 10 kép) készítsünk a mérés során, majd a képfeldolgozás első lépéseként átlagoljuk azokat!
3. 5-5 mágneses tér értéknél vizsgáljuk a σ - illetve a π -átmeneteket! A Zeeman-felhasadásokat a (20) képlet alapján határozhatjuk meg. Ábrázoljuk a Zeeman-felhasadásokat a mágneses tér függvényeként! A tekercsre I áramot kapcsolva $B = bI$ mágneses tér hat a spektrálizzónál, ahol $b = 0,89 \text{ T/A}$.
4. A Zeeman-felhasadások mágneses tér függéséből számoljuk ki a Bohr-magneton értékét! Értékeljük a kapott eredményeket!