Aufgabe 2

a)

Wir berechnen für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Produkt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} X^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j}{j!} X^j$$

Wenn $a_j = \frac{\alpha^j}{j!}$ und $b_j = \frac{\beta^j}{j!}$, dann ist das Produkt

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha^i}{i!} \cdot \frac{\beta^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} \alpha^i \beta^{k-i} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^i \beta^{k-i} = \frac{(\alpha+\beta)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} X^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j}{j!} X^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta)^k}{k!} X^k = \exp((\alpha+\beta)X).$$

Wir berechnen das Produkt:

$$(1-2X) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^j X^j.$$

Wir nutzen dazu die Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j X^j = \frac{1}{1-2X}.$$

Also ist

$$(1-2X) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^j X^j = (1-2X) \cdot \frac{1}{1-2X} = 1.$$

b)

Für $f, g, h \in K[X]$ ist $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$.

Beweis. Sei $f = \sum_{i=0}^N a_i X^i$, $g = \sum_{i=0}^M b_i X^i$ und $h = \sum_{i=0}^L c_i X^i$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(f \cdot g) \cdot h &= \left(\sum_{i=0}^N a_i X^i \cdot \sum_{i=0}^M b_i X^i \right) \cdot \sum_{i=0}^L c_i X^i \\
&= \left(\sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k \right) \cdot \sum_{i=0}^L c_i X^i \\
&= \sum_s \left(\sum_{k+l=s} c_l \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \right) X^s \\
&= \sum_s \left(\sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k \right) X^s \\
&= \sum_s \left(\sum_{i+k=s} a_i \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right) \right) X^s \\
&= \sum_s a_s X^s \cdot \left(\sum_k \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right) X^k \right) \\
&= \sum_s a_s X^s \cdot \left(\sum_k b_k X^k \cdot \sum_l c_l X^l \right) \\
&= f \cdot (g \cdot h).
\end{aligned}$$

Also ist $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. □

Sei K ein Körper. Für $f \in K[X]$ mit $f = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ definieren wir die Abbildung

$$\tilde{f} : K \to K, x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Für $f, g \in K[X]$ gilt $\widetilde{f \cdot g} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$.

Beweis. Sei $f = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ und $g = \sum_{i=0}^{M} b_i X^i$. Zudem sei $x \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\widetilde{f \cdot g})(x) &= \left(\widetilde{\sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k} \right)(x) \\
&= \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k \\
&= \sum_i a_i x^i \cdot \sum_j b_j x^j \\
&= \left(\sum_i a_i x^i \right)(x) \cdot \left(\sum_j b_j X^j \right)(x) \\
&= \widetilde{f}(x) \cdot \widetilde{g}(x) \\
&= (\tilde{f} \cdot \tilde{g})(x).
\end{aligned}$$

□