

## Aufgabe 1

a)

Sei  $f = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$  mit  $a_k \in \mathbb{R}$  für  $k \leq N \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $f$ , so ist die komplex konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  ebenfalls eine Nullstelle

*Beweis.* Gelte  $\tilde{f}(\lambda) = 0$ . Wir nutzen im Folgenden, dass für  $z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$  gilt

$$a \cdot \bar{z} = \overline{a \cdot z}, \quad \bar{z} + \bar{z} = \overline{z + z}, \quad \bar{z} \cdot \bar{z} = \overline{z \cdot z}.$$

Also ist  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $f$ , denn:

$$\tilde{f}(\bar{\lambda}) = \sum_{k=0}^N a_k \bar{\lambda}^k = \overline{\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k} = \overline{\tilde{f}(\lambda)} = \overline{0} = 0.$$

□

b)

Wir betrachten die reelle  $3 \times 3$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad A - X \cdot \mathbb{1}_3 := \begin{pmatrix} 1-X & -2 & 0 \\ -2 & 5-X & -4 \\ 0 & 4 & -1-X \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f_A &= \det(A - X \cdot \mathbb{1}_3) \\ &= (-X+1)(-X+5)(-X-1) - 4(-4)(-X+1) - (-X-1)(-2)(-2) \\ &= -X^3 + 5X^2 - 11X + 15 \end{aligned}$$

Dieses Polynom  $f_A \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$  hat eine Nullstelle  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Das Polynom  $f_A$  hat den Grad  $\deg(f_A) = 3$  und zerfällt somit in 3 Linearfaktoren:

$$f_A = a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) \quad \text{für geeignete } a, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C},$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  alle Nullstellen von  $f_A$  sind. Da alle Koeffizienten von  $f_A$  reell sind, gibt es wie in a) gezeigt zu jedem  $\lambda_n$  eine zweite Nullstelle  $\bar{\lambda}_n$ . Da  $f_A$  eine ungerade Anzahl an Nullstellen hat, muss für mindestens ein  $\lambda_n$  gelten  $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$ . Dies ist äquivalent zu  $\lambda_n \in \mathbb{R}$ . □

c)

Sei  $\lambda_1 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  eine Nullstelle von  $f_A \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ , wobei  $p, q \in \mathbb{Z}$  teilerfremd sind, dann gilt  $p|15$  und  $q|(-1)$ . Also ist  $\lambda_1 \in \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$ . Wir probieren systematisch

$$\begin{aligned}\tilde{f}(-15) &= 4680 \\ \tilde{f}(-5) &= 320 \\ \tilde{f}(-3) &= 120 \\ \tilde{f}(-1) &= 32 \\ \tilde{f}(1) &= 8 \\ \tilde{f}(3) &= 0 \\ \tilde{f}(5) &= -40 \\ \tilde{f}(15) &= -2400\end{aligned}$$

und erkennen  $\lambda_1 = 3$ . Sei also  $g := X - 3$ . Wir führen die Polynomdivision von  $f_A : g$  durch:

0. Wir prüfen:  $\deg(g) \leq \deg(f)$ . Dies ist wahr, also gehe zu Schritt 1.

1. Wir setzen:  $q_1 := -X^2$  und

$$f_1 := f_A - q_1 g = 2X^2 - 11X + 15.$$

Wir prüfen:  $\deg(g) \leq \deg(f_1)$ . Dies ist wahr, also gehe zu Schritt 2.

2. Wir setzen:  $q_2 := 2X$  und

$$f_2 := f_1 - q_2 g = -5X + 15.$$

Wir prüfen:  $\deg(g) \leq \deg(f_2)$ . Dies ist wahr, also gehe zu Schritt 3.

3. Wir setzen:  $q_3 := -5$  und

$$f_3 := f_2 - q_3 g = 0.$$

Wir prüfen:  $\deg(g) \leq \deg(f_3)$ . Dies ist falsch, also bricht der Algorithmus ab.

Wir setzen  $q := q_1 + q_2 + q_3 = -X^2 + 2X - 5$ . Das Polynom  $f_A$  zerfällt also wie folgt:

$$f_A = (X - 3) \cdot (-X^2 + 2X - 5)$$

Wir bestimmen nun die restlichen Nullstellen des quadratischen Polynoms  $-X^2 + 2X - 5$  mit der  $p$ - $q$ -Formel und erhalten die Nullstellen von  $f_A$ :

$$\lambda_1 = 3, \lambda_{2/3} = 1 \pm 2i.$$