Universität Potsdam
Institut für Mathematik

Sommersemester 2025
Dr. Florian Hanisch

Lineare Algebra II (Lehramt) – Übungsblatt 2

Abgabe bis Mittwoch, 23.04.2025, 24.00 Uhr

Bitte beachten Sie, dass die Abgabe nur elektronisch als pdf (z.B. getippt oder gescannt) im Moodle möglich ist, wobei Ihre Namen oben auf der ersten Seite der Datei stehen müssen.

1. Aufgabe Determinanten I (4+8=12 Punkte)

a) Wir definieren die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C})$ durch $A_{jk} := i^{j+k}$ für $j \neq j$ und $A_{jj} := 0$. Berechnen Sie $\det(A)$, indem Sie A durch Zeilenumformungen auf obere Dreiecksform bringen und dabei soweit erforderlich D1 bis D8 anwenden. Dokumentieren Sie die Schritte!

b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Entwickelung die Determinante der Matrix

$$C(z) := \begin{pmatrix} 1 & z+i & i & 1 \\ z-i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & z-i \\ 1 & i & z+i & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C})\,.$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $C(z)$ invertierbar? Bestimmen Sie $\mathrm{rg}(C(z))$ für $z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Die hier verwendeten Inhalte sind z.T. Gegenstand der aktuellen Verständnistests.

2. Aufgabe Determinanten II (4+8=12 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Determinanten von sogenannten *Blockmatrizen* berechnet werden. Zu $A \in \mathrm{Mat}(m, K)$ und $C \in \mathrm{Mat}(n, K)$ definieren wir die *Blockmatrix*

$$B(A, C) := \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right) := \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}(m+n, K).$$

Wir wollen nun zeigen: $\det(B(A, C)) = \det(A) \cdot \det(C).$ (1)

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 6.7 (Skript), dass (1) im Falle $\det(C) = 0$ richtig ist.

b) Sei nun $\det(C) \neq 0$. Wir definieren $\widetilde{\det} : \mathrm{Mat}(m, K) \to K,\ A \mapsto \det(B(A, C)) \cdot \det(C)^{-1}$.
Begründen Sie, dass $\widetilde{\det}$ auch die Eigenschaften D1, D2 und D3 erfüllt und folgern Sie (1).

3. Aufgabe Online Aufgabe in Moodle - keine pdf-Abgabe! (12 Punkte)

4. Aufgabe Online Aufgabe in Moodle - keine pdf-Abgabe! (12 Punkte)