Aufgabe 4

Sei $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \| x \| = 1\}$ die 2-dimensionale Sphäre, also die „Oberfläche" der Einheitskugel im dreidimensioanlen Raum. Ein Großkreis auf S^2 ist eine Menge G der Form:

$$G = E \cap S^2, \qquad \text{wobei } E \subset \mathbb{R}^3 \text{ 2-dimensionaler Untervektorraum ist.}$$

Wir setzen nun $\mathbb{P} := S^2$ und $\mathbb{G} := \{G \mid G \text{ ist Großkreis auf } S^2\}$ die Menge aller Großkreise.

a)

Zu zwei Punkten $p, q \in \mathbb{P}$ existiert immer ein Großkreis $G \in \mathbb{G}$, so dass $p, q \in G$.

Beweis. Zwei beliebige Vektoren $p, q \neq 0 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bilden eine Basis eines Untervektorraums E. Dieser ist maximal 2-dimensional und mindestens 1-dimensional. Eine eindimensionale Basis können wir um einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus E$ ergänzen und erhalten ebenfalls einen 2-dimensionalen Untervektorraum. Zu desem gibt es stets einen Großkreis, der p und q enthält.

b)

Ein Großkreis G ist genau dann eindeutig ist, wenn $q \notin \{p, -p\}$.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei ein beliebiger Großkreis $G \in \mathbb{G}$ eindeutig durch $p, q \in G$ bestimmt. Dann bestimmen p, q eindeutig einen 2-dimensionale UVR, d.h. sie sind linear unabhängige Basisvektoren. Angenommen $q \in \{p, -p\}$. Dann ist $q = \lambda p$ mit $\lambda \in \{1, -1\}$. Das ist ein Widerspruch, denn dann wären p und q linear abhängig.

"$\Leftarrow$" Seien $p, q \in S^2$, wobei $q \notin \{p, -p\}$. Dann sind existiert wie in a) gezeigt ein Großkreis G mit dazugehörigem Untervektorraum E sodass $p, q \in G \subset E$. Angenommen es gäbe einen weiteren Großkreis G' mit dazugehörigem Untervektorraum E'. Die Vektoren p, q sind linear unabhängig, also Basis von E und E'. Also müssen die beiden Untervektorräume und somit die beiden Großkreise bereits gleich gewesen sein.

c)

Sei $p \lessdot G :\Leftrightarrow p \in G$. Wir überprüfen welche Inzidenzaxiome diese Relation erfüllt.

I1 "Durch je zwei Punkte geht eine Gerade":

Wurde bereits in a) bewiesen.

I2 "Durch je zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade":

Ist im Allgemeinen falsch.

Beweis. Seien $p := e_1, q := -p$ Punkte auf S^2 und $E := L(p, e_2), E' := (p, e_3)$ Untervektorräume mit dazugehörigen Großkreisen G, G'. Dann ist $p \in E, p \in E'$ und $q = 1 \cdot -p + 0 \cdot e_2 \in E$ und $q = 1 \cdot -p + 0 \cdot e_3 \in E'$. Allerdings ist $E \neq E'$, da beispielsweise $E \ni e_2 \notin E'$, also auch $G \neq G'$.

I3 "Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte":

Ist im Allgemeinen wahr.

Beweis. Sei ein beliebiger Großkreis G und der dazugehörige Untervektorraum E mit Basis $B = (b_1, b_2)$. Dann liegt $p := b_1 \cdot \frac{1}{\|b_1\|}$ auf G, denn $\|p\| = 1$ und $p = \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1 + 0 \cdot b_2$ also $p \in E$. Analog liegt $q := b_2 \cdot \frac{1}{\|b_2\|}$ ebenfalls auf G, wobei $p \neq q$, da b_1 und b_2 linear unabhängig sind.

I4 "Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen":

Ist im Allgemeinen wahr.

Beweis. Seien weiterhin p, q, E zu einem beliebigen Großkreis G wie in I3 definiert. Wähle einen beliebigen Punkt $r' \in \mathbb{R}^3 \setminus E$ und setze $r := r' \cdot \frac{1}{\|r'\|}$. Angenommen $r \in G \subset E$, dann wäre $r' = \|r'\| \cdot r \in E$. Dies ist ein Widerspruch also liegt r nicht auf G.