Aufgabe 1

a) Volumina und affine Abbildungen

Wir betrachten die Punkte

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C' := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

und die Dreiecke Δ mit den Eckpunkten A, B, C und Δ' mit den Eckpunkten A', B', C'. Gesucht ist eine affine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto M \cdot x + b$ mit

$$M = \left(\begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad b \in \mathbb{R},$$

sodass $A' = F(A)$, $B' = F(B)$ und $C' = F(C)$. Zunächst gilt

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = A' = F(A) = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b = b \qquad \Rightarrow \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für B':

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = B' = F(B) = M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $2 \cdot M_{11} + 3 \cdot M_{12} = 12$ und $2 \cdot M_{21} + 3 \cdot M_{22} = 5$. Für C' gilt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = C' = F(C) = M \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad M \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $4 \cdot M_{11} - \cdot M_{12} = 10$ und $4 \cdot M_{21} - \cdot M_{22} = 3$. Daraus ergeben sich zwei LGS, die wir mit dem Gaußverfahren lösen:

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} M_{21} \\ M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} M_{21} \\ M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$M = \left(\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right).$$

Nun gilt $\Delta' = F(\Delta)$ und daher

$$\mathrm{vol}_2(\Delta') = \mathrm{vol}_2(F(\Delta)) = |\det(M)| \cdot \mathrm{vol}_2(\Delta) = |(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1)| \cdot \mathrm{vol}_2(\Delta) = \mathrm{vol}_2(\Delta).$$

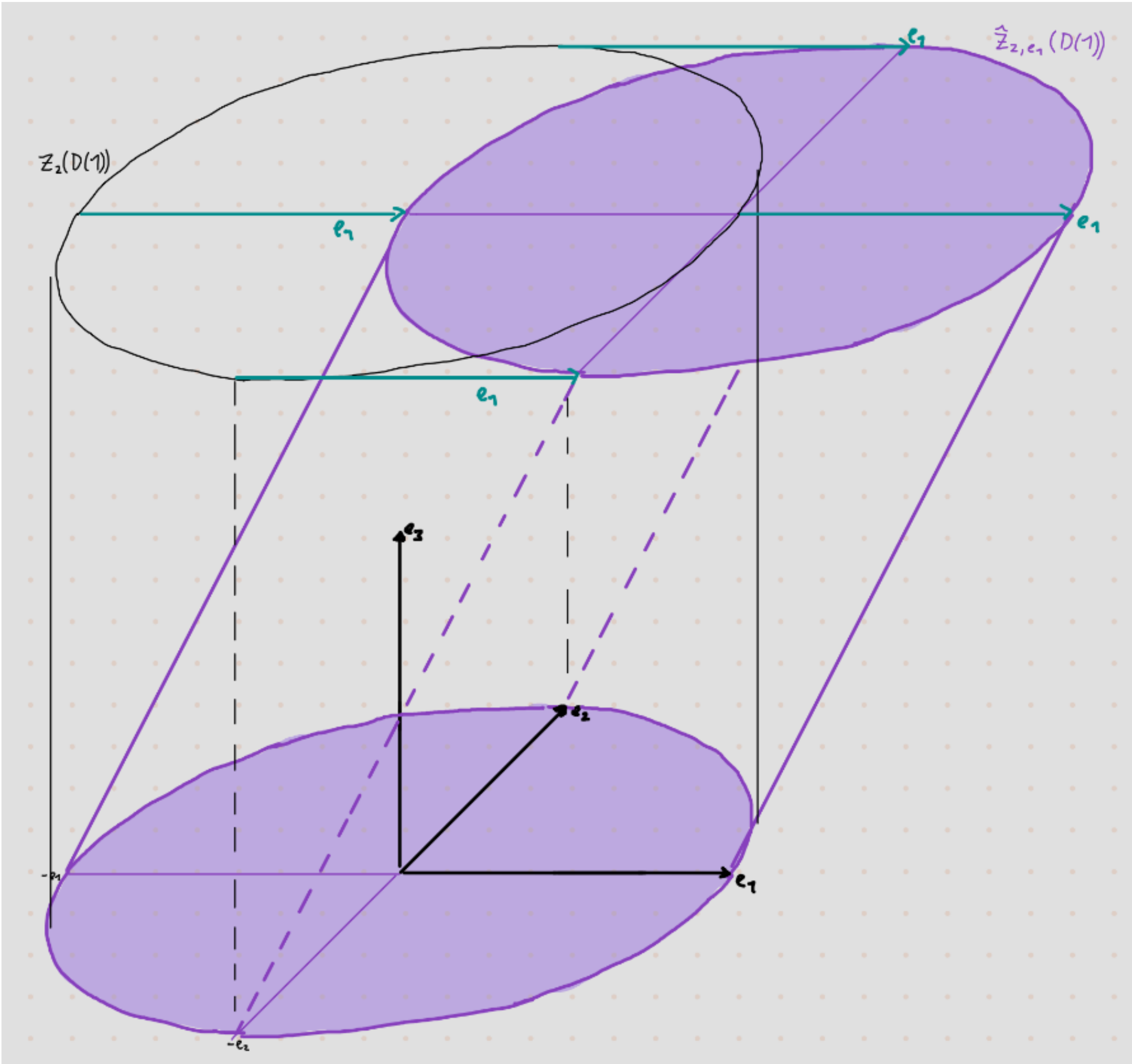
b) Schiefer Zylinder

Sei $X \in \mathbb{K}^{n-1}$, $\hat{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $h > 0$. Wir definieren den schiefen Zylinder über X durch

$$\hat{Z}_{\hat{b},h}(X) := \left\{ \left(\hat{x} + \frac{s}{h}\hat{b}, s \right) \;\middle|\; \hat{x} \in X,\; s \in [0,h] \right\}.$$

Beispielskizze schiefer Zylinder

Wir verschieben $Z_2(D(1))$ mit e_1 und erhalten $\hat{Z}_{2,e_1}(D(1))$:



Volumen des schiefen Zylinders

Es ist $\mathrm{vol}_n\left(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X)\right) = h \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(X)$.

Beweis. Der verallgemeinerte Zylinder über X ist definiert durch

$$Z_h(X) := X \times [0,h] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dann die affine Abbildung

$$G : Z_h(X) \to \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{x} + \frac{s}{h}\hat{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist affin, da sie die Form

$$G(x) = A \cdot x + b \quad \text{mit } b = 0 \quad \text{und } A := \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h}\hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hat und es gilt:

$$G(x) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h}\hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} + \frac{s}{h}\hat{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\mathrm{vol}_n\left(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X)\right) = h \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(X).$$

Wir berechnen die Determinante der Matrix A:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h}\hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_{n-1}) \cdot 1 - 0 \cdot \frac{1}{h}\hat{b} = 1.$$

Da G eine affine Abbildung mit $\det(G) = 1$ ist, bleibt das Volumen beim Übergang erhalten. Nach *Korollar 6.107* gilt daher:

$$\mathrm{vol}_n\left(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X)\right) = |\det(G)| \cdot \mathrm{vol}_n\left(Z_h(X)\right) = \mathrm{vol}_n\left(Z_h(X)\right) = h \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(X). \qquad \square$$

Aufgabe 2

a)

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und $s \in (0, \infty)$ sei die Abbildung

$$F_s : B_R(0) \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot x.$$

Für jedes $x \in B_R(0)$ gilt $\|x\| \leq R$, also folgt für $F_s(x) = s \cdot \mathbb{1}_n \cdot x = s \cdot x$, dass $\|s \cdot x\| = s \cdot \|x\| \leq s \cdot R$, und somit $F_s(x) \in B_{s \cdot R}(0)$. Da $\det(s \cdot \mathbb{1}_n) = s^n \neq 0$, ist F_s bijektiv. Also ist $F_s(B_R(0)) = B_{s \cdot R}(0)$ und es gilt:

$$\operatorname{vol}(B_{s \cdot R}(0)) = \operatorname{vol}((s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot B_R(0)) = |\det(s \cdot \mathbb{1}_n)| \cdot \operatorname{vol}(B_R(0)) = s^n \cdot \operatorname{vol}(B_R(0))$$

Sei nun $s = \frac{19}{20}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
n = 3: &\quad \frac{\operatorname{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0.86 \\
n = 10: &\quad \frac{\operatorname{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 0.60 \\
n = 25: &\quad \frac{\operatorname{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{25} \approx 0.28
\end{aligned}$$

b)

Wir bestimmen das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit einem Schalenanteil von über $\frac{999999}{1000000}$:

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{\operatorname{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n \geq \frac{999999}{1000000} \\
\Leftrightarrow \quad &\left(\frac{19}{20}\right)^n \leq \frac{1}{1000000} \\
\Leftrightarrow \quad &n \geq \log_{\frac{19}{20}}\left(\frac{1}{1000000}\right) \approx 269.34 \\
\Rightarrow \quad &n = \lceil 269.34 \rceil = 270.
\end{aligned}$$