Lineare Algebra II (LA) Übungsblatt 1

Erik Achilles, Alexandra Dittmar, Artur Szeczinowski

2. August 2025

Aufgabe 1.2

Sei die Funktion

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a)

Die Funktion cosh ist differenzierbar, da e^x, e^{-x} und 2 als Exponentialfunktionen bzw. konstante Funktionen differenzierbar sind. Die Differenzierbarkeit von cosh folgt dann aus Summen - und Quotientenregel. Wir bestimmen $\sinh := \cosh'$:

$$\begin{aligned} \sinh(x) = \cosh'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' &= \left(\frac{(e^x + e^{-x})' \cdot 2 - (e^x + e^{-x}) \cdot 2'}{2^2}\right) \\ &= \left(\frac{(e^x - e^{-x}) \cdot 2 - (e^x + e^{-x}) \cdot 0}{2 \cdot 2}\right) \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})}{2}. \end{aligned}$$

b)

Wir untersuchen cosh auf lokale Extremstellen. Wir bestimmen Nullstellen der ersten Ableitung:

$$
\begin{aligned}
& \cosh'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(e^x - e^{-x})}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & e^x - e^{-x} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & e^x = e^{-x} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{2x} = e^{-x} \cdot e^x = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x = \ln(1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0
\end{aligned}
$$

Also hat die Funktion ein lokales Extremum an der Stelle $x = 0$. Wir betrachten nun die zweite Ableitung an dieser Stelle:

$$\cosh''(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0.$$

Also hat cosh ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$.
Wir untersuchen cosh auf globale Extremstellen. Für $x > 0$ gilt $e^x > 1, e^{-x} < 1$ das heißt

$$\cosh'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} > \frac{1-1}{2} = 0.$$

Daraus folgt, dass $\cosh(x)$ streng monoton wachsend ist. Analog gilt für $x < 0$, dass $e^x < 1, e^{-x} > 1$ also

$$\cosh'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} < \frac{1-1}{2} = 0.$$

Daraus folgt, dass $\cosh(x)$ streng monoton fallend ist. Somit hat die Funktion kein globales Maximum und ein globales Minimum an der Stelle $x = 0$.

c)

Der Wertebereich der Funktion ist $\cosh(\mathbb{R}) = [1, \infty)$.

Beweis. Aus dem globalen Minimum $\cosh(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = 1$ und dem Monotonieverhalten folgern wir, dass $\cosh(\mathbb{R}) \subseteq [1, \infty]$. Wir zeigen "$\supseteq$". Sei ein beliebiges $1 \leq y < \infty$, dann gibt es ein $X \in \mathbb{R}$ mit

$$\cosh(0) = 1 \leq y < \cosh(X).$$

Da cosh differenzierbar also insbesondere stetig ist, gibt es nach ZWS ein $x \in [0, X] \subset \mathbb{R}$ mit $\cosh(x) = y$. Somit gilt $\cosh(\mathbb{R}) = [1, \infty)$. □

d)

Die Funktion cosh ist im Intervall $[0, \infty]$ stetig und streng monoton wachsend. Also ist sie bijektiv in diesem Intervall und hat eine Umkehrfunktion arcosh.