Lineare Algebra II (Lehramt)

Florian Hanisch
Universität Potsdam, Institut für Mathematik

13. April 2025

Das vorliegende Skript wird noch fortlaufend überarbeitet und verbessert. Ich bin für Hinweise auf Fehler und Verbesserungsvorschläge weiterhin sehr dankbar, bitte einfach an fhanisch@uni-potsdam.de mailen. Bereits in der Vergangenheit wurde mir von verschiedener Seite „zugearbeitet“, ich möchte mich dafür bei den Potsdamer Studierenden, Kolleginnen und Kollegen, insbesondere bei Tillmann Bewer, Claudia und Peter Grabs sowie Sophia Zscheischler bedanken!

Diese Vorlesung baut in großen Teilen auf dem Buch *Lineare Algebra und Analytische Geometrie* von Christian Bär (siehe [1]) auf, das aus Campusnetz der Universität Potsdam kostenlos heruntergeladen werden kann. Wir werden die interessierten Leser*innen an einigen Stellen auf dieses Buch verweisen, wenn wir mal ein Argument nicht oder nicht in allen Details ausführen; an anderen Stellen weichen wir allerdings davon ab. Ab & an lohnt sich also ein Blick ins Buch.

Inhaltsverzeichnis

6 Determinanten

In diesem Kapitel lernen wir die Determinante kennen - eine wichtige Kenngröße von Matrizen und allgemeiner linearen Abbildungen. Wir studieren zunächst algebraische Eigenschaften und Anwendungen, widmen uns dann später aber auch ihrer geometrischen Bedeutung, z.B. bei der Volumenberechnung.

6.1 Definition und Eigenschaften

Wir erinnern kurz an folgende

Notation 6.1 Für K ein Körper und V ein K-Vektorraum bezeichnen wir die Mengen der $n \times n$-Matrizen bzw. Endomorphismen von V mit

$$\mathrm{Mat}(n,K) := \mathrm{Mat}(n \times n, K) \qquad \mathrm{End}_K(V) := \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ ist linear}\}.$$

Wir verwenden nun einen neuen Zugang zur Einführung von mathematischen Strukturen: Wir geben zunächst Eigenschaften an, die die Determinante haben soll und beweisen dann, dass eine Determinante existiert und durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt wird.

Definition 6.2 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$\det\colon \mathrm{Mat}(n,K) \to K, \quad A \mapsto \det(A)$$

heißt *Determinantenabbildung*, falls folgende Axiomen gelten:

(D1) det ist *linear in jeder Zeile*

(D2) det ist *alternierend*, d.h.: Stimmen zwei Zeilen in A überein, so gilt $\det(A) = 0$.

(D3) det ist *normiert*, d.h. $\det(\mathbb{1}_n) = 1$.

In D1 ist noch der Ausdruck „linear in jeder Zeile“ erklärungsbedürftig:

Definition 6.3 (Linearität in Zeilen) det heißt *linear in der i-ten Zeile*, falls für alle $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ mit Zeilen $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n \in (K^n)^t$ (und analog $\tilde{a}'_i, \tilde{a}''_i \in (K^n)^t$) gilt:

$$\det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \lambda\tilde{a}_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}'_i + \tilde{a}''_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}'_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}''_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 6.4 Der Ausdruck „Linearität in Zeilen“ erklärt sich wie folgt: Halten wir alle Zeilen außer der i-ten fest, so wird die Determinante eine Abbildung $K^n \to K$, wobei wir K^n hier als Zeilenvektoren interpretieren. Die Forderungen aus Definition 6.3 besagen dann gerade, dass diese Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear ist. Die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}(n,K) \to K$ ist für $n > 1$ *nicht linear* (siehe D4 im nächsten Satz)!

Bevor wir Existenz und Eindeutigkeit von det klären, folgern wir aus D1 bis D3 weitere Eigenschaften, die eine solche Abbildung - sofern sie existiert - auch haben muss:

Satz 6.5 Erfülle $\det: \mathrm{Mat}(n,K) \to K$ (D1) bis (D3). Dann gilt für $A, B \in \mathrm{Mat}(n,K)$ und $\lambda \in K$:

(D4) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$.

(D5) Ist eine Zeile von A gleich 0, so ist $\det(A) = 0$.

(D6) Entsteht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen, dann gilt $\det(B) = -\det(A)$.

(D7) Entsteht B aus A durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer **anderen** Zeile, so gilt $\det(B) = \det(A)$.

(D8) Ist A eine obere Dreiecksmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \big(\text{ formal: } \forall 1 \le j < i \le n : A_{ij} = 0 \ \big), \tag{1}$$

dann gilt: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

Beweis (D4): $\lambda \cdot A$ entsteht aus A, indem wir *alle* Zeilen mit λ multiplizieren. D4 folgt durch n-faches Anwenden von D1:

$$\det(\lambda \cdot A) = \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot \tilde{a}_1 \\ \lambda \cdot \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \lambda \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \lambda \cdot \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \dots \overset{(D1)}{=} \lambda^n \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \lambda^n \det(A)$$

(D5): Diese Eigenschaft folgt auf ähnliche Art und Weise aus D1:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} 0 \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

(D6): Wir an, dass B aus $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ durch Vertauschen der Zeilen i und j entsteht, ansonsten seien A und B identisch. Wir können also schreiben

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir mit Hilfe von D2 und D1:

$$0 = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i + \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_j + \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 0 + \det(A) + \det(B) + 0$$

Also folgt D6. (D7) folgt in ähnlicher Weise, wenn wir $\lambda \tilde{a}_j$ zu $\tilde{a}_i$ addieren:

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_i + \lambda \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \det(A) + \lambda \cdot 0 = \det(A).$$

Im vorletzten tritt wegen $i \neq j$ die Zeile $\tilde{a}_j$ in der zweiten Determinante doppelt auf. □

Vor dem Beweis von (D8) zeigen wir, dass wir (D1) - (D7) bereits Determinanten berechnen können, wenn wir mal annehmen, dass diese existieren:

Beispiel 6.6 (Methode „Gauß-Algorithmus“) Wir bestimmen die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C}), \tag{2}$$

indem wir A durch Zeilenumformungen modifizieren und (D1)–(D7) nutzen:

$$\begin{aligned}
\det(A) &\overset{(D6)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} && \text{Vertausche I und II} \\
&\overset{(D7)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 3-2i & 2 \end{pmatrix} && \text{Addiere } (-2)\cdot\text{I zu III} \\
&\overset{(D7)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix} && \text{Addiere } (2i-3)\cdot\text{II zu III} \\
&\overset{(D1)}{=} 3i \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{Ziehe Faktor } 3i \text{ III} \\
&\overset{(D7)}{=} 3i \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \begin{array}{l}\text{Addiere } (-i)\cdot\text{III zu II und } (-1)\cdot\text{III zu I} \\ \text{Dann addiere } (-i)\cdot\text{II zu I}\end{array} \\
&\overset{(D3)}{=} 3i \cdot 1 \ = \ 3i
\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung von Satz 6.5) Im Beweis von (D8) unterscheiden wir 2 Fälle:

1.Fall: Alle Diagonaleinträge $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind ungleich Null. Wie in Beispiel 6.6 (4.Schritt) ziehen wir mit (D1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aus der Determinante. Nun stehr 1 auf der Hauptdiagonalen und wie im Beispiel (5.Schritt) eliminieren wir alle Einträge oberhalb der Diagonalen, nach (D7) ändert das ihren Wert nicht. Zusammen:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{(D7)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{(D3)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

2.Fall: Ein Diagonaleintrag und damit $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ hat den Wert Null; also zu zeigen: $\det(A) = 0$. Dazu sei j der größte Index mit $\lambda_j = 0$. Gilt $j = n$, so ist die letzte Zeile der oberen Dreiecksmatrix A die Nullzeile, mit (D5) folgt $\det(A) = 0$. Ist $j < n$, so nutzen wir die Zeilen $j+1, \ldots, n$, um mit Zeilenumformungen wie in (D7) alle Einträge der j-ten Zeile zu eliminieren:

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & * \\ & \lambda_{j-1} & & & & \\ \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & & & \color{red}{\lambda_{j+1}} & & \\ & & & & \color{red}{\ddots} & \\ 0 & & & & & \color{red}{\lambda_n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow A' = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & * \\ & \lambda_{j-1} & & & & \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \color{red}{\lambda_{j+1}} & & \\ & & & & \color{red}{\ddots} & \\ 0 & & & & & \color{red}{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

Hier nutzen wir, dass $\color{red}{\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n \neq 0}$! Aus (D7) und (D5) folgt $\det(A) = \det(A') = 0$. □

Vor dem Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis diskutieren wir das Verhältnis von Determinante und Invertierbarkeit von $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$. Dazu erinnern wir an Beispiel 4.18:

$$A \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \in \mathrm{Mat}(n,K) : B \cdot A = \mathbb{1}_n = A \cdot B. \tag{3}$$

Mit Determinanten können wir dies einfacher als mit Verfahren 15 (1.Semester) prüfen:

Satz 6.7 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\det\colon \mathrm{Mat}(n,K) \to K$ eine Determinantenabbildung. Dann sind für alle $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ folgende Bedingungen äquivalent:

i) $\det(A) \neq 0$.

ii) $\mathrm{rg}(A) = n$.

iii) A ist invertierbar, d.h. $A \in \mathrm{GL}(n,K)$.

Beweis (von Satz 6.7) *„i) ⇔ ii)“*: Bringen wir A mit D6- und D7-Operationen in Zeilenstufenform wie in (1), so folgt $\det(A) = \pm\lambda_1 \cdots \lambda_n$. Aus der Zeilenstufenform lesen wir nun ab:

$$\mathrm{rg}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n\colon \lambda_i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

„ii) ⇔ iii)“: Wir verwenden die Abbildung $\varphi_A : K^n \to K^n, x \mapsto A \cdot x$ und folgern:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) = n \quad &\Leftrightarrow \quad \dim(\varphi_A(K^n)) = n && \text{(Bemerkung 5.72)} \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi_A(K^n) \text{ ist surjektiv} && \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi_A(K^n) \text{ ist bijektiv} && \text{(Korollar 5.76)} \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist invertierbar, i.e. } A \in \mathrm{GL}(n,K) && \text{(Korollar 5.97).} \end{aligned}$$
□

Wir beweisen nun Existenz und Eindeutigkeit von Determinantenabbildungen:

Satz 6.8 Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es **genau** eine Determinantenabbildung

$$\det\colon \operatorname{Mat}(n, K) \to K.$$

Im Beweis brauchen wir folgendes Konzept, das später noch nützlich sein wird:

Definition 6.9 Für $A \in \operatorname{Mat}(n, K)$, $1 \le i, j \le n$ entsteht die *Streichungsmatrix*

$$A_{ij}^{\mathrm{Str}} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(n-1, K)$$

durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Beweis (von Satz 6.8) Wir beginnen mit dem Beweis der Eindeutigkeit, seien also

$$\det\colon \operatorname{Mat}(n, K) \to K \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\det}\colon \operatorname{Mat}(n, K) \to K$$

zwei Determinantenabbildungen, die D1–D3 und folglich D4–D8 erfüllen. Sei $A \in \operatorname{Mat}(n; K)$. Wir überführen A mit Umformungen des Typs D7 und k Zeilenvertauschungen D6 ($k = 0$ erlaubt) auf obere Dreiecksform

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Aus D6, D7 und D8, die für det und $\widetilde{\det}$ gelten, folgt dann direkt:

$$\det(A) = (-1)^k \det(A') = (-1)^k \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n \qquad \widetilde{\det}(A) = (-1)^k \widetilde{\det}(A) = (-1)^k \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Also stimmen det und $\widetilde{\det}$ überein, es gibt höchstens eine Determinantenabbildung.

Wir zeigen die Existenz durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ und nennen eine Determinante auf $\operatorname{Mat}(n, K)$ vorübergehend $\det_n$. Der *Induktionsanfang* ist trivial, da $\det_1((a)) := a$ eine Abbildung definiert, die die Eigenschaften D1–D3 für 1×1-Matrizen erfüllt.

Induktionsschritt ($n-1 \to n$): Wir nehmen an, dass wir $\det_{n-1}\colon \operatorname{Mat}(n-1, K) \to K$ konstruiert haben und definieren $\det_n\colon \operatorname{Mat}(n, K) \to K$ reklursiv. Dazu fixiere $j \in \{1, \dots, n\}$ und setze

$$\det{}_n\colon \operatorname{Mat}(n, K) \to K, \quad \det{}_n(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det{}_{n-1}(A_{ij}^{Str}). \tag{4}$$

Hier ist A_{ij}^{Str} die Streichungsmatrix aus Definition 6.9.

Nach I.V. erfüllt $\det_{n-1}$ D1–D3. Wir verifizieren, dass $\det_n$ dann ebenfalls D1–D3 erfüllt.

D1: Für Zeilenvektoren $\tilde{a}_i, \tilde{a}'_k, \tilde{a}''_k \in K^n$ betrachten wir die Matrizen

$$A' = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}'_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}, \qquad A'' = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}''_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}'_k + \tilde{a}''_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}$$

Gilt $i \neq k$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung (D1 für $\det_{n-1}$), dass

$$\det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij}) = \det{}_{n-1}(A'^{Str}_{ij}) + \det{}_{n-1}(A''^{Str}_{ij}) \tag{5}$$

Da $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$ liefert (4):

$$\begin{aligned} \det{}_n(A) &= (-1)^{k+j} a_{kj} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) + \sum_{i \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij}) \\ &\overset{(5)}{=} (-1)^{k+j}(a'_{kj} + a''_{kj}) \det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) + \sum_{i \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} \left(\det{}_{n-1}(A'^{Str}_{ij}) + \det{}_{n-1}(A''^{Str}_{ij}) \right) \\ &\overset{(4)}{=} \det{}_n(A') + \det{}_n(A'') \end{aligned}$$

Dies zeigt die Zeilenadditivität, die Homogenität („λ rausziehen") zeigt man analog.

D2) $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ habe zwei gleiche Zeilen $\tilde{a}_k = \tilde{a}_\ell$ und o.B.d.A $k < \ell$. Falls $i \neq k, \ell$, so hat A^{Str}_{ij} zwei gleiche Zeilen und nach Induktionsvoraussetzung (D2 für $\det_{n-1}$) folgt

$$\det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij}) = 0 \tag{6}$$

Weiter entsteht $A^{Str}_{\ell j}$ aus A^{Str}_{kj} durch $\ell - k - 1$ Zeilenvertauschungen: Wegen $\tilde{a}_\ell = \tilde{a}_k$ können wir nach Streichung der ℓ-ten Zeile die k-te Zeile an den Platz tauschen, an dem vormals die ℓ-te Zeile war. Dazu brauchen wir $\ell - k - 1$ Vertauschungen (klar?). Wiederum nach Induktionsvoraussetzung (D6 für $\det_{n-1}$) folgt dann

$$\det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) = (-1)^{\ell-k-1} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) \tag{7}$$

Wegen von $\tilde{a}_k = \tilde{a}_\ell$ sowie (6) und (7) liefert die rekursive Formel (4) für $\det_{n-1}$ nun:

$$\begin{aligned} \det{}_n(A) = & \sum_{i \neq k, \ell} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{\det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij})}_{=0} \\ & + (-1)^{k+j} a_{kj} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) + (-1)^{\ell+j} \underbrace{a_{\ell j}}_{=a_{kj}} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) \\ = \; & a_{kj} \cdot \left((-1)^{\ell+j-1} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) + (-1)^{\ell+j} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) \right) = 0 \end{aligned}$$

Also erfüllt $\det_n$ ebenfalls die Eigenschaft D2.

D3) Dies ist die einfachste der drei Eigenschaften. $\det_n(\mathbb{1}_n) = 1$ folgt ziemlich direkt aus (4), indem wir $\det_{n-1}(\mathbb{1}_{n-1}) = 1$ aus der Induktionsvoraussetzung benutzen. Wir besprechen dies in den Begleitkursen oder lesen es im Buch (S.210/211) nach. $\square$

In Beweis von Satz 6.8 haben wir implizit gezeigt, dass die Determinante von $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ vermöge (4) durch die Determinanten von $A_{ij}^{Str} \in \mathrm{Mat}()n-1,K)$ ausgedrückt werden kann:

Korollar 6.10 (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $(a_{ij}) = A \in \mathrm{Mat}(n,K)$. Dann gilt für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}^{\mathrm{Str}}).$$

Die Vorzeichen $(-1)^{i+j}$, die in der Laplace-Entwicklung auftreten, können wir übersichtlich in einem Schachbrettmuster aufschreiben und uns so leicht merken:

+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+

Aus Korollar 6.10 erhalten wir für kleine n explizite Formeln für die Determinante:

n=1: Für $A = (a) \in \mathrm{Mat}(1,K)$ erhalten wir direkt $\det((a)) = a$.

n=2: Entwicklung nach der ersten Spalte liefert:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \det((d)) - c \cdot \det((b)) = ad - bc. \tag{8}$$

n=3: Entwicklung nach der ersten Spalte liefert nun:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \cdot \det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \cdot \det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (ei - hf) - d \cdot (bi - hc) + g \cdot (bf - ec) \\ &= aei + dhc + gbf - (ahf + dbi + gec). \end{aligned} \tag{9}$$

Für die letzte Formel, die bereits 6 Summanden enthält, gibt es eine gute Merkregel:

Bemerkung 6.11 (Regel von Sarrus) Sei $A \in \mathrm{Mat}(3,K)$. Die 6 Summanden aus (9) lassen sich vermöge folgendem Schema generieren:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

blau: positives Vorzeichen
rot: negatives Vorzeichen

Wir schreiben also die ersten und zweite Spalte von A nochmal rechts neben A und multiplizieren entlang der blauen und roten Linien. Die Produkte werden aufaddiert, wobei wir beiden den roten Linien ein Vorzeichen hinzufügen.

Vorsicht! Die Regel von Sarrus gilt nur für $n = 3$, für Matrizen anderer Größe erhalten wir falsche Resultate. Dies ist ein sehr „beliebter“ Fehler!

Zur Berechnung der Determinante von 3×3-Matrizen kennen wir also 2 Verfahren:

Beispiel 6.12 (Methode 1: Gauß-Algorithmus) Wir bestimmen die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C}), \tag{10}$$

indem wir A durch Zeilenumformungen in obere Dreiecksform bringen und D6, D7 und D8 nutzen. Dies enstpricht größtenteils dem Vorgehen Beispiel 6.6, wir fassen zusammen:

$$\det(A) \overset{(D6)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{(D7)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix} \overset{(D8)}{=} -1 \cdot 1 \cdot (-3i) = 3i$$

Vorsicht! Der Werte der Determinante kann sich bei Zeilenumformungen ändern, anders als bei LGS, dort ändert sich die Lösunsgmenge nicht. Lediglich D7 lässt den Wert unverändert. „Zeilentausch“(D6) führt wie oben zu einem Vorzeichen, Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor ändert die Determinante um diesen Faktor, z.B.:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ \frac{1}{2} \cdot (2 & 3 & 4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.13 (Methode 2: Regel von Sarrus) Schematisch lautet diese Regel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & i \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

Wir lesen also direkt ab:

$$\det(A) = 0 \cdot i \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + i \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot i \cdot i - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 + 2 + 3i + 2 - 0 - 4 = 3i$$

In diesem Beispiel ist Anwendung von Sarrus etwas einfacher als die Gauß-Methode. Letztere ist aber nicht nur für $n = 3$ anwendbar und im Allgemeinen – wie sollte es anders sein – vielen anderen Verfahren überlegen. *Das Beherrschen dieser Technik ist und bleibt wichtig*!

Literatur

[1] C. Bär, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, 1.Auflage, Wiesbaden: Springer Spektrum, 2018.

[2] C. Bär et.al, *Interaktive Aufgaben.* `https://cbaer.eu/joomla/index.php/de/mathematik/interaktive-webseiten/ueben`

[3] Wikipedia, *Mathematik — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*, 2023. `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematik&oldid=235074398` [Online; Stand 14. Oktober 2023]

[4] S. Waldmann, *Lineare Algebra 1*, 2.Auflage, Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum, 2021

[5] K. Bryan und T. Leise, *The $25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google*, SIAM Rev. 48 (2006), 569–581, DOI 10.1137/050623280.

[6] S. Bosch, *Lineare Algebra*, 6.Auflage, Berlin/Heidelberg: Springer 2021