Aufgabe 2

Zu $A \in \mathrm{Mat}(m,K), C \in \mathrm{Mat}(n,K)$ definiere die Blockmatrix $B(A,C) := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m+n,K)$.
Wir zeigen: $\det(B(A,C)) = \det(A) \cdot \det(C)$.

a)

Sei $\det(C) = 0$. Nutze *(D6)*, *(D7)* und erhalte C' in oberer Dreiecksform mit $\det(C') = \pm\det(C) = 0$. Aus *Satz 6.7* folgt direkt

$$\det(C') = 0 \overset{(6.7)}{\Leftrightarrow} \mathrm{rg}(C') = \tilde{\mathrm{rg}}(C') \neq n$$

Da C' in oberer Dreiecksform steht aber nicht vollen Rang hat, muss mindestens die letzte Zeile null sein. Also ist

$$C'_{nn} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B(A,C')_{m+n,m+n} = 0 \overset{(D5)}{\Rightarrow} \quad \det(B(A,C)) = \pm\det(B(A,C')) = 0.$$

b)

Sei nun $\det(C) \neq 0$. Wir definieren $\widetilde{\det} : \mathrm{Mat}(m,K) \to K,\ A \mapsto \det(B(A,C)) \cdot \det(C)^{-1}$.

(D1) $\widetilde{\det}$ ist zeilenlinear, denn für alle $A \in \mathrm{Mat}(m,K)$ mit Zeilen $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m, \tilde{a}'_i, \tilde{a}''_i \in (K^m)^t$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\det}\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \lambda(\tilde{a}'_i + \tilde{a}''_i) \\ \vdots \\ \tilde{a_m} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \\ \vdots & \\ \lambda(\tilde{a}'_i + \tilde{a}''_i) & 0 \\ \vdots & \\ \tilde{a_m} & \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \det(C)^{-1} \\
&= \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \\ \vdots & \\ \tilde{a}'_i & 0 \\ \vdots & \\ \tilde{a_m} & \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \det(C)^{-1} + \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \\ \vdots & \\ \tilde{a}''_i & 0 \\ \vdots & \\ \tilde{a_m} & \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \det(C)^{-1} \\
&= \lambda \cdot \widetilde{\det}\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}'_i \\ \vdots \\ \tilde{a_m} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \widetilde{\det}\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}''_i \\ \vdots \\ \tilde{a_m} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(D2) $\widetilde{\det}$ ist alternierend, denn falls $\tilde{a}_i = \tilde{a}_j,\ i \neq j$, so ist auch $\tilde{b}_i = (\tilde{a}_i\ 0) = (\tilde{a}_j\ 0) = \tilde{b}_j$ also $\det(B(A,C)) = 0$ und somit $\widetilde{\det}(A) = 0 \cdot \det(C)^{-1} = 0$.

(D3) $\widetilde{\det}$ ist normiert, denn für $B^{(m)} := B(\mathbb{1}_m, C)$ streiche rekursiv die erste Zeile und Spalte. Wir zeigen nun, dass die Determinante bei dieser Striechung erhalten bleibt. Dazu verwenden wir den Spaltenentwicklungssatz von Laplace:

$$\begin{aligned}
\det(B^{(m)}) &= \sum_{i=1}^{m+n} (-1)^{i+1} \cdot b_{i1} \cdot \det(B_{i1}^{(m)\ \mathrm{Str}}) \\
&= (-1)^{1+1} \cdot b_{11} \cdot \det(B_{11}^{(m)\ \mathrm{Str}}) + \sum_{i=2}^{m+n} (-1)^{i+1} \cdot b_{i1} \cdot \det(B_{i1}^{(m)\ \mathrm{Str}}) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \det(B_{11}^{(m)\ \mathrm{Str}}) + \sum_{i=2}^{m+n} (-1)^{i+1} \cdot 0 \cdot \det(B_{i1}^{(m)\ \mathrm{Str}}) \\
&= \det(B_{11}^{(m)\ \mathrm{Str}}) \quad = \quad \det(B^{(m-1)})
\end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich $B^{(0)} = C$. Also ist

$$\det(B^{(m)}) \cdot \det(C)^{-1} \quad = \quad \det(B^{(0)}) \cdot \det(C)^{-1} \quad = \quad \det(C) \cdot \det(C)^{-1} \quad = \quad 1.$$

Da $\widetilde{\det}$ *(D1), (D2), (D3)* erfüllt und die Determinantenabbildung eindeutig ist muss $\widetilde{\det} = \det$ sein. also ist

$$\begin{aligned}
& \det(A) = \widetilde{\det}(A) = \det(B(A, C)) \cdot \det(C)^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \det(A) \cdot \det(C) = \det(B(A, C)) \quad \square
\end{aligned}$$