Aufgabe 2

Wir definieren $g_j \in \text{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch

$$g_0(x) := 1, \qquad g_1(x) := x - 1, \qquad g_2(x) := x^2, \qquad g_3(x) := x^3 - x^2.$$

Weiter definieren wir die Basen $B_0 := (f_0, f_1, f_2, f_3)$ und $B := (g_0, g_1, g_2, g_3)$ von $\text{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und Ψ_B, Ψ_{B_0} die dazugehörigen Koordinatenisomorphismen. Sei $h > 0$. Wir definieren die Abbildung

$$\Delta_h : \text{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \text{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (\Delta_h(f))(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

a)

Die Abbildung Δ_h ist linear.

Beweis. Seien $p_1, p_2 \in \text{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für alle x:

$$\begin{aligned}
(\Delta_h(\lambda(p_1 + p_2)))(x) &= \frac{(\lambda(p_1 + p_2))(x+h) - (\lambda(p_1 + p_2))(x)}{h} \\
&= \lambda \left(\frac{p_1(x+h) - p_1(x)}{h} + \frac{p_2(x+h) - p_2(x)}{h} \right) \\
&= \lambda \left((\Delta_h(p_1))(x) + (\Delta_h(p_2))(x) \right)
\end{aligned}$$

denn $\text{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \text{GL}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. □

b)

Wir berechnen

$$\Psi_{B_0}((1,1,1,1)^t) = 1f_0 + 1f_1 + 1f_2 + 1f_3 = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Wir berechnen

$$\Psi_B((1,1,1,1)^t) = 1g_0 + 1g_1 + 1g_2 + 1g_3 = x^3 + x.$$

Wir berechnen

$$\Psi_{B_0}^{-1}(f_0 - f_1 - f_2 + f_3) = \Psi_{B_0}^{-1}(x^3 - x^2 - x + 1) = \Psi_{B_0}^{-1}(g_3 + g_1 + 2g_0) = (2,1,0,1)^t.$$

c)

Wir bestimmen die darstellende Matrix $A := M_{B_0}^{B}(\Delta_h)$. Wir berechnen zunächst

$$(\Delta_h(g_0))\,(x) = \frac{g_0(x+h) - g_0(x)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0.$$

Also ist $\Delta_h(g_0) = 0f_0 + 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$. Wir berechnen

$$(\Delta_h(g_1))\,(x) = \frac{g_1(x+h) - g_1(x)}{h} = \frac{x+h-1-x+1}{h} = 1.$$

Also ist $\Delta_h(g_1) = 1f_0 + 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$. Wir berechnen

$$(\Delta_h(g_1))\,(x) = \frac{g_2(x+h) - g_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Also ist $\Delta_h(g_2) = hf_0 + 2f_1 + 0f_2 + 0f_3$. Wir berechnen

$$(\Delta_h(g_3))\,(x) = \frac{g_3(x+h) - g_3(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - (x+h)^2 - x^3 + x^2}{h} = 3x^2 - 2x + 3xh + h^2 - 1.$$

Also ist $\Delta_h(g_3) = (h^2-1)f_0 + (3h-2)f_1 + 3f_2 + 0f_3$. Wir bilden daraus die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h & h^2-1 \\ 0 & 0 & 2 & 3h-2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d)

Wir überprüfen für $\tilde{g}(x) := x^3 - x^2 - x + 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_{b_0}(A \cdot \Psi_B^{-1}(\tilde{g})) &= \Psi_{b_0}(A \cdot \Psi_B^{-1}(0g_0 - 1g_1 + 0g_2 + 1g_3)) \\ &= \Psi_{b_0}(A \cdot (0, -1, 0, 1)^t) \\ &= \Psi_{b_0}((h^2-2), 3h-2, 3, 0) \\ &= (h^2-2)f_0 + (3h-2)f_1 + 3f_2 + 0f_3. \end{aligned}$$

Also ist $\left(\Psi_{b_0}(A \cdot \Psi_B^{-1}(\tilde{g}))\right)(x) = 3x^2 + 3hx - 2x + 3f_2 + h^2 - 2$ und es gilt

$$\begin{aligned} (\Delta_h(\tilde{g}))\,(x) &= \frac{\tilde{g}(x+h) - \tilde{g}(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h}((x+h)^3 - (x+h)^2 - (x+h) + 1 - x^3 + x^2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{h}(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^2 - 2xh - h^2 - x - h + 1 - x^3 + x^2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{h}(3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2xh - h^2 - h) \\ &= 3x^2 + 3xh - 2x + h^2 - h - 1 \\ &= \left(\Psi_{b_0}(A \cdot \Psi_B^{-1}(\tilde{g}))\right)(x). \end{aligned}$$