Aufgabe 1

a)

$$\tilde{f} := K[X]$$

Geometrische Reihe:

$$\text{Für } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1$$

Wir erkennen, dass dies die Taylorreihe der Exponentialfunktion ist:

$$\exp(\lambda X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda X)^n}{n!} = \exp(\lambda) \cdot \exp(X)$$

Daraus folgt dann:

$$\exp(\lambda X) \cdot \exp(\mu X) = \exp((\lambda + \mu)X)$$

Der binomische Lehrsatz sagt nun:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Somit ist das Produkt:

$$A(X) \cdot B(X) = e^B$$

Für $1 - 2x$ gilt:
Hier erkennen wir die geometrische Reihe mit:

$$f(X) = \frac{1}{1-2x}$$

Dies multiplizieren wir nun mit $(1-2x)$:

$$\frac{1}{1-2x} \cdot (1-2x) = 1$$

Wir erhalten also als Produkt $R(X)$ die Potenzreihe 1.

b)

Zeigen Sie für $F := K(X)$:

$$(fg) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \quad \text{sowie} \quad F = F_{ij}$$

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$

Für f_i, g_i, h_i Objekte und p_e:

$$f \cdot g = d \quad \text{mit} \quad (f \cdot g) \cdot h$$

$$V_s = d_{ij} b_j$$

$$f(g \cdot h) : V = s_i \cdot e_r \quad \text{mit} \quad e_r : r \to b_j e_r$$

$$= e_s i r b_j e_r = d_i b_j e_r = V_s$$

Für alle s folgt also:

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$

Also:

$$i + j + l = s$$