Aufgabe 1

a)

Sei $f = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \leq N \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, so ist die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ebenfalls eine Nullstelle.

Beweis. Gelte $\tilde{f}(\lambda) = 0$. Wir nutzen im Folgenden, dass für $z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \cdot \overline{z} = \overline{a \cdot z}, \qquad \overline{z} + \overline{z} = \overline{z + z}, \qquad \overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{z \cdot z}.$$

Also ist $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, denn:

$$\tilde{f}(\overline{\lambda}) \quad = \quad \sum_{k=0}^{N} a_k \overline{\lambda}^k \quad = \quad \overline{\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k} \quad = \quad \overline{\tilde{f}(\lambda)} \quad = \quad \overline{0} \quad = \quad 0.$$

□

b)

Wir betrachten die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad A - X \cdot \mathbb{1}_3 := \begin{pmatrix} 1 - X & -2 & 0 \\ -2 & 5 - X & -4 \\ 0 & 4 & -1 - X \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f_A &= \det(A - X \cdot \mathbb{1}_3) \\ &= (-X + 1)(-X + 5)(-X - 1) - 4(-4)(-X + 1) - (-X - 1)(-2)(-2) \\ &= -X^3 + 5X^2 - 11X + 15. \end{aligned}$$

Dieses Polynom $f_A \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ hat eine Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Beweis. Das Polynom f_A hat den Grad $\deg(f_A) = 3$ und zerfällt somit in 3 Linearfaktoren:

$$f_A = a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) \qquad \text{für geeignete } a, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ alle Nullstellen von f_A sind. Da alle Koeffizienten von f_A reell sind, gibt es, wie in *a)* gezeigt, zu jedem λ_n eine zweite Nullstelle $\overline{\lambda_n}$. Da f_A eine ungerade Anzahl an Nullstellen hat, muss für mindestens ein λ_n gelten $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$. Dies ist äquivalent zu $\lambda_n \in \mathbb{R}$. □

c)

Sei $\lambda_1 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von $f_A \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind, dann gilt $p|15$ und $q|(-1)$. Also ist $\lambda_1 \in \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$ Wir probieren systematisch

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(-15) &= 4680 \\
\tilde{f}(-5) &= 320 \\
\tilde{f}(-3) &= 120 \\
\tilde{f}(-1) &= 32 \\
\tilde{f}(1) &= 8 \\
\tilde{f}(3) &= 0 \\
\tilde{f}(5) &= -40 \\
\tilde{f}(15) &= -2400
\end{aligned}$$

und erkennen $\lambda_1 = 3$. Sei also $g := X - 3$. Wir führen die Polynomdivision von $f_A : g$ durch:

0. Wir prüfen: $\deg(g) \leq \deg(f_A)$. Dies ist wahr, also gehe zu Schritt 1.
1. Wir setzen: $q_1 := -X^2$ und
$$f_1 := f_A - q_1 g = 2X^2 - 11X + 15.$$
Wir prüfen: $\deg(g) \leq \deg(f_1)$. Dies ist wahr, also gehe zu Schritt 2.
2. Wir setzen: $q_2 := 2X$ und
$$f_2 := f_1 - q_2 g = -5X + 15.$$
Wir prüfen: $\deg(g) \leq \deg(f_2)$. Dies ist wahr, also gehe zu Schritt 3.
3. Wir setzen: $q_3 := -5$ und
$$f_3 := f_2 - q_3 g = 0.$$
Wir prüfen: $\deg(g) \leq \deg(f_3)$. Dies ist falsch, also bricht der Algorithmus ab.

Wir setzen $q := q_1 + q_2 + q_3 = -X^2 + 2X - 5$. Das Polynom f_A zerfällt also wie folgt:

$$f_A = (X - 3) \cdot (-X^2 + 2X - 5)$$

Wir bestimmen nun die restlichen Nullstellen des quadratischen Polynoms $-X^2 + 2X - 5$ mit der p-q-Formel und erhalten die Nullstellen von f_A:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_{2/3} = 1 \pm 2i.$$