# Aufgabe 1

## a)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standartskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Wir definierten die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle v, Aw \rangle \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}).$$

Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ definiert ein Skalarprodukt.

*Beweis.* Zunächst bestimmen wir eine Eigenbasis $B := (b_1, b_2)$ wobei

$$\begin{aligned} b_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{denn} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ b_2 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{denn} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^2$ gibt es also passende $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, sodass:

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \qquad \text{und} \qquad w = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2.$$

Wir zeigen nun die Eigenschaften des Skalarproduktes.
1.) Die Abbildung ist bilinear, denn das Standartskalarprodukt ist bilinear und Matrixmultiplikation ist linear.
2.) Die Abbildung ist symmetrisch, denn es gilt

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_A &= \langle \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, A(\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2) \rangle \\ &= \langle \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, A\mu_1 b_1 + A\mu_2 b_2 \rangle \\ &= \langle \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, 1\mu_1 b_1 + 3\mu_2 b_2 \rangle \\ &= 1\lambda_1\mu_1 \langle b_1, b_1 \rangle + 1\lambda_2\mu_1 \langle b_2, b_1 \rangle + 3\lambda_1\mu_2 \langle b_1, b_2 \rangle + 3\lambda_2\mu_2 \langle b_2, b_2 \rangle \\ &= \langle \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2, 1\lambda_1 b_1 + 3\lambda_2 b_2 \rangle \\ &= \langle \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2, A\lambda_1 b_1 + A\lambda_2 b_2 \rangle \\ &= \langle \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2, A(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \rangle \\ &= \langle w, v \rangle_A. \end{aligned}$$

3.) Die Abbildung ist positiv definit, denn

$$\langle v, v \rangle_A = 1\lambda_1\lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + 1\lambda_2\lambda_1 \langle b_2, b_1 \rangle + 3\lambda_1\lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle + 3\lambda_2\lambda_2 \langle b_2, b_2 \rangle \geq 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

wobei hier genutzt wurde, dass $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$ und $\lambda_1^2, \lambda_2^2 \geq 0$. Zuletzt gilt

$$\langle v, v \rangle_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle v, Av \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \qquad \square.$$

## b)

Sei $s > 0$ und $v := \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$. Dann ist $Av = \begin{pmatrix} 2s \\ -2 \end{pmatrix}$ und $Aw = \begin{pmatrix} -2 \\ 2s \end{pmatrix}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \sphericalangle_A(v, w) &= \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle_A}{\|v\|_A \cdot \|w\|_A}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\langle v, Aw\rangle}{\sqrt{\langle v, Av\rangle} \cdot \sqrt{\langle w, Aw\rangle}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-s^2 + 2s}{\sqrt{2s^2 - s} \cdot \sqrt{2s^2 - s}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-s^2 + 2s}{2s^2 - s}\right). \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\|v + w\|_A = \sqrt{\langle v + w, A \cdot (v + w)\rangle} = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}\rangle} = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}\rangle} = \sqrt{2s^2} = \sqrt{2} \cdot s$$

Wir berechnen

$$\|v - w\|_A = \sqrt{\langle v - w, A \cdot (v - w)\rangle} = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}\rangle} = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3s \\ -3s \end{pmatrix}\rangle} = \sqrt{3s^2 + 3s^2} = \sqrt{6} \cdot s$$

### c)

Wir visualisieren die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\|_A^2 = 6\} \subset \mathbb{R}^2$. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
\|x\|_A^2 = 6 \Rightarrow \sqrt{\langle x, Ax\rangle}^2 = 6 \\
&\Rightarrow |\langle x, Ax\rangle| = 6 \\
&\Rightarrow \left| \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 6 \\
&\Rightarrow |x_1(2x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 2x_2)| = 6 \\
&\Rightarrow |2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2| = 6 \\
&\Rightarrow |x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2| = 3.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich mit einem Grafikrechner plotten: