Aufgabe 1

Wir betrachten die folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

a)

i)

ii)

b)

Aufgabe 2

Sei V ein K-Vektorraum, $\lambda, \mu \in K$ sowie $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$.

a)

Die Abbildung φ ist genau dann injektiv, wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \varphi \text{ ist injektiv} \\
\Leftrightarrow \quad & \ker(\varphi) = \ker(\varphi - 0 \cdot \mathrm{id}_v) = \mathrm{Eig}(\varphi, 0) \neq \{0\} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \text{ ist kein Eigenwert von } v
\end{aligned}$$

□

b)

Ist φ bijektiv und λ ein Eigenwert von φ, so folgt $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist Eigenwert von φ^{-1}.

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von φ und $v \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda)$ d.h. $\varphi(v) = \lambda v$ und insbesondere $\varphi^{-1}(\lambda v) = v$. Daraus folgt

$$\varphi(\lambda^{-1} v) = \lambda^{-1} \varphi(v) = \lambda^{-1} \varphi(\varphi^{-1}(\lambda v)) = v.$$

Das ist äquivalent zu $\varphi^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$. Also ist λ^{-1} Eigenwert von φ^{-1}. □

c)

Gilt $p \in K[X]$ und $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$, so folgt $v \in \mathrm{Eig}(\tilde{p}(A), \tilde{p}(\lambda))$.

Beweis. Sei $p \in K[X]$ und $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda \mathbb{1}_3)$, d.h.

$$(A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v = 0 \qquad \text{also auch} \qquad \tilde{p}((A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v) \ = \ \tilde{p}(0) \ = \ 0.$$

Aufgrund von *Lemma 7.25* folgt

$$((\tilde{p}(A) - \tilde{p}(\lambda) \mathbb{1}_3) \cdot \tilde{p}(v)) \ = \ \tilde{p}((A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v) \ = \ 0.$$

Also ist $\tilde{p}(v) \in \mathrm{Eig}(\tilde{p}(A), \tilde{p}(\lambda))$ und somit auch $(A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v = 0$, da v und $\tilde{p}(v)$ l.a. sind. □

d)

Seien $v_\lambda, v_\mu \in K^n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ, μ. Dann ist $v_\lambda + v_\mu$ wieder ein Eigenvektor, genau dann wenn $\lambda = \mu$.

Beweis. "$\Leftarrow$" Sei $\lambda = \mu$. Dann ist $\varphi(v_\lambda) = \lambda \cdot v_\lambda$ und $\varphi(v_\mu) = \mu \cdot v_\mu = \lambda \cdot v_\mu$. Daraus folgt

$$\varphi(v_\lambda + v_\mu) = \varphi(v_\lambda) + \varphi(v_\mu) = \lambda \cdot v_\lambda + \lambda \cdot v_\mu = \lambda(v_\lambda + v_\mu)$$

Also ist $v_\lambda + v_\mu$ ein Eigenvektor von A.

"⇒" Sei $(v_\lambda + v_\mu) \in \mathrm{Eig}(A, \xi)$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert ξ. Dann ist

$$\lambda \cdot v_\lambda + \mu \cdot v_\mu = \varphi(v_\lambda) + \varphi(v_\mu) = \varphi(v_\lambda + v_\mu) = \xi \cdot (v_\lambda + v_\mu) = \xi \cdot v_\lambda + \xi \cdot v_\mu$$

Diese Linearkombination ist eindeutig bestimmt also folgt $\xi = \lambda = \mu$.

$\square$