Lineare Algebra II (LA) Übungsblatt 12

Erik Achilles, Alexandra Dittmar, Artur Szeczinowski

Juli 2025

Aufgabe 1

a)

Beweis. Für alle $v, w, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
v \times (w \times z) &= v \times \begin{pmatrix} w_2 z_3 - w_3 z_2 \\ w_3 z_1 - w_1 z_3 \\ w_1 z_2 - w_2 z_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_2(w_1 z_2 - w_2 z_1) - v_3(w_3 z_1 - w_1 z_3) \\ v_3(w_2 z_3 - w_3 z_2) - v_1(w_1 z_2 - w_2 z_1) \\ v_1(w_3 z_1 - w_1 z_3) - v_2(w_2 z_3 - w_3 z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_2 w_1 z_2 - v_2 w_2 z_1 - v_3 w_3 z_1 + v_3 w_1 z_3 \\ v_3 w_2 z_3 - v_3 w_3 z_2 - v_1 w_1 z_2 + v_1 w_2 z_1 \\ v_1 w_3 z_1 - v_1 w_1 z_3 - v_2 w_2 z_3 + v_2 w_3 z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1(v_2 z_2 + v_3 z_3) - z_1(v_2 w_2 + v_3 w_3) \\ w_2(v_3 z_3 + v_1 z_1) - z_2(v_3 w_3 + v_1 w_1) \\ w_3(v_1 z_1 + v_2 z_2) - z_3(v_1 w_1 + v_2 w_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1(v_2 z_2 + v_3 z_3 + v_1 z_1 - v_1 z_1) - z_1(v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_1 w_1 - v_1 w_1) \\ w_2(v_3 z_3 + v_1 z_1 + v_2 z_2 - v_2 z_2) - z_2(v_3 w_3 + v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_2 w_2) \\ w_3(v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 - v_3 z_3) - z_3(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - v_3 w_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (w_1(v_2 z_2 + v_3 z_3 + v_1 z_1) - w_1 v_1 z_1) - (z_1(v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_1 w_1) - z_1 v_1 w_1) \\ (w_2(v_3 z_3 + v_1 z_1 + v_2 z_2) - w_2 v_2 z_2) - (z_2(v_3 w_3 + v_1 w_1 + v_2 w_2) - z_2 v_2 w_2) \\ (w_3(v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3) - w_3 v_3 z_3) - (z_3(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) - z_3 v_3 w_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1(v_2 z_2 + v_3 z_3 + v_1 z_1) - z_1(v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_1 w_1) \\ w_2(v_3 z_3 + v_1 z_1 + v_2 z_2) - z_2(v_3 w_3 + v_1 w_1 + v_2 w_2) \\ w_3(v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3) - z_3(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \end{pmatrix} \\
&= \langle v, z \rangle w - \langle v, w \rangle z
\end{aligned}$$

□

b)

Sei $\xi := (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Die Abbildung $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \beta(v,w) := \langle v \times (\xi \times w), \xi \rangle$ ist eine symmetrische Bilinearform.

Beweis. Die Abbildung ist eine Verkettung von bilinearen Abbildung (Kreuzprodukt, Skalarprodukt) und ist daher ebenfalls bilinear. Wir zeigen nun Symmetrie. Dazu nutzen wir *a)* und die Symmetrie des Skalarprodukts:

$$\beta(v,w) = \langle v \times (\xi \times w), \xi \rangle \overset{a)}{=} \langle \langle v, w \rangle \xi - \langle v, \xi \rangle w, \xi \rangle = \langle v, w \rangle \langle \xi, \xi \rangle - \langle v, \xi \rangle \langle w, \xi \rangle$$
$$= \langle w, v \rangle \langle \xi, \xi \rangle - \langle w, \xi \rangle \langle v, \xi \rangle = \langle \langle w, v \rangle \xi - \langle w, \xi \rangle v, \xi \rangle \overset{a)}{=} \langle w \times (\xi \times v), \xi \rangle = \beta(w, v).$$

□

Aufgabe 2

Zu $M \in \mathrm{Mat}(n,K)$ definieren wir $M^{\pm} := \frac{1}{2}(M \pm M^t) \in \mathrm{Mat}(n,K)$.

a)

Es gilt $M^{\pm} \in \mathrm{Mat}^{\pm}(n,K)$.

Beweis. *Fall I* Gelte $M^{\pm} = \frac{1}{2}(M + M^t)$. Dann ist

$$(M^{\pm})^t = (\frac{1}{2}(M+M^t))^t = \frac{1}{2}(M+M^t)^t = \frac{1}{2}(M^t+M) = \frac{1}{2}(M+M^t) = \frac{1}{2}(M+M^t) = M^{\pm}.$$

Fall II Gelte $M^{\pm} = \frac{1}{2}(M - M^t)$. Analog folgt $(M^{\pm})^t = M^{\pm}$.
Also ist $M^{\pm} \in \{A \in \mathrm{Mat}(n,K) | A^t = \pm A\} = \mathrm{Mat}^{\pm}(n,K)$. □

Es gilt $\mathrm{Mat}(n,K) = \mathrm{Mat}^{+}(n,K) \oplus \mathrm{Mat}^{-}(n,K)$.

Beweis. Da $\mathrm{Mat}^{+}(n,K), \mathrm{Mat}^{-}(n,K) \subset \mathrm{Mat}(n,K)$, ist $\mathrm{Mat}(n,K) \supseteq \mathrm{Mat}^{+}(n,K) \oplus \mathrm{Mat}^{-}(n,K)$.
Wir zeigen "$\subseteq$".
Sei $M \in \mathrm{Mat}(n,K)$ beliebig, dann gilt für passende $A \in \mathrm{Mat}^{+}(n,K), B \in \mathrm{Mat}^{-}(n,K)$: $M = A+B$, denn für alle $i,j \leq n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} & M_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \\ \wedge \qquad & M_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A_{ij} - B_{ij}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich als LGS schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \end{pmatrix}.$$

Da $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = -2 \neq 0$ hat das LGS für alle i,j genau eine Lösung, d.h. A und B sind eindeutig bestimmt. Also gilt $\mathrm{Mat}(n,K) \subseteq \mathrm{Mat}^{+}(n,K) \oplus \mathrm{Mat}^{-}(n,K)$ und es folgt Gleichheit. □

b)

Sei $\beta : K^m \times K^n \to K$ eine Bilinearform. Wir definieren $M(\beta) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ durch $M(\beta)ij := \beta(e_i, e_j)$. Für alle $x \in K^m, y \in K^n$ gilt $\beta(x,y) = x^t \cdot M(\beta) \cdot y$.

Beweis. Es gilt aufgrund der Biliniarität von β:

$$x^t \cdot M(\beta) \cdot y = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \beta(e_i, e_j) \overset{bilin.}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i \beta(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) \overset{bilin.}{=} \beta(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \beta(x,y)$$

□

Die Aussage "*Sind* $M, M' \in \mathrm{Mat}(n, K)$ *und gilt für alle* $x \in K^n : x^t \cdot M \cdot x = x^t \cdot M' \cdot x$, *so folgt* $M = M'$*.*" ist im Allgemeinen falsch.

Beweis. Seien $x \in K^n := \mathbb{R}^2$ und $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^t \cdot M \cdot x &= 1 \cdot x_1 x_1 + 1 \cdot x_1 x_2 + (-1) \cdot x_2 x_1 + 1 \cdot x_2 x_2 \\ &= 1 \cdot x_1 x_1 + (-1) \cdot x_1 x_2 + 1 \cdot x_2 x_1 + 1 \cdot x_2 x_2 \\ &= x^t \cdot M^t \cdot x \end{aligned}$$

aber $M \neq M^t$. Die Aussage ist wiederlegt. □