

Aufgabe 1

Wir betrachten die folgenden Matrizen aus $\text{Mat}(3, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

a)

i)

ii)

b)

Aufgabe 2

Sei V ein K -Vektorraum, $\lambda, \mu \in K$ sowie $\varphi \in \text{End}(V)$ und $A \in \text{Mat}(n, K)$.

a)

Die Abbildung φ ist genau dann injektiv, wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ ist injektiv} \\ \Leftrightarrow & \ker(\varphi) = \ker(\varphi - 0 \cdot \text{id}_V) = \text{Eig}(\varphi, 0) \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi \end{aligned}$$

□

b)

Ist φ bijektiv und λ ein Eigenwert von φ , so folgt $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist Eigenwert von φ^{-1} .

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von φ und $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda)$ d.h. $\varphi(v) = \lambda v$ und insbesondere $\varphi^{-1}(\lambda v) = v$. Daraus folgt

$$\varphi(\lambda^{-1}v) = \lambda^{-1}\varphi(v) = \lambda^{-1}\varphi(\varphi^{-1}(\lambda v)) = v.$$

Das ist äquivalent zu $\varphi^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$. Also ist λ^{-1} Eigenwert von φ^{-1} .

□

c)

Gilt $p \in K[X]$ und $v \in \text{Eig}(A, \lambda)$, so folgt $v \in \text{Eig}(\tilde{p}(A), \tilde{p}(\lambda))$.

Beweis. Sei $p \in K[X]$ und $v \in \text{Eig}(A, \lambda)$,

□

d)

Seien $v_\lambda, v_\mu \in K^n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ, μ . Dann ist $v_\lambda + v_\mu$ wieder ein Eigenvektor, wenn _____

Beweis.

□