Lineare Algebra II (Lehramt)

Florian Hanisch
Universität Potsdam, Institut für Mathematik

27. April 2025

Das vorliegende Skript wird noch fortlaufend überarbeitet und verbessert. Ich bin für Hinweise auf Fehler und Verbesserungsvorschläge weiterhin sehr dankbar, bitte einfach direkt an fhanisch@uni-potsdam.de mailen. Bereits in der Vergangenheit wurde mir von verschiedener Seite „zugearbeitet“, ich möchte mich dafür bei den Potsdamer Studierenden, Kolleginnen und Kollegen, insbesondere bei Tillmann Bewer, Claudia und Peter Grabs sowie Sophia Zscheischler bedanken!

Diese Vorlesung baut in großen Teilen auf dem Buch *Lineare Algebra und Analytische Geometrie* von Christian Bär (siehe [1]) auf, das aus Campusnetz der Universität Potsdam kostenlos heruntergeladen werden kann. Wir werden die interessierten Leser*innen an einigen Stellen auf dieses Buch verweisen, wenn wir mal ein Argument nicht oder nicht in allen Details ausführen; an anderen Stellen weichen wir allerdings davon ab. Ab & an lohnt sich also ein Blick ins Buch.

Inhaltsverzeichnis

6 Determinanten & Geometrie

In diesem Kapitel lernen wir die Determinante kennen - eine wichtige Kenngröße von Matrizen und allgemeiner linearen Abbildungen. Wir studieren zunächst algebraische Eigenschaften und Anwendungen, widmen uns dann später aber auch ihrer geometrischen Bedeutung, z.B. bei der Volumenberechnung.

6.1 Definition und Eigenschaften

Wir erinnern kurz an folgende

Notation 6.1 Für K ein Körper und V ein K-Vektorraum bezeichnen wir die Mengen der $n \times n$-Matrizen bzw. Endomorphismen von V mit

$$\mathrm{Mat}(n, K) := \mathrm{Mat}(n \times n, K) \qquad \mathrm{End}_K(V) := \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ ist linear}\}.$$

Wir verwenden nun einen neuen Zugang zur Einführung von mathematischen Strukturen: Wir geben zunächst Eigenschaften an, die die Determinante haben soll und beweisen dann, dass eine Determinante existiert und durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt wird.

Definition 6.2 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$\det\colon \mathrm{Mat}(n, K) \to K, \quad A \mapsto \det(A)$$

heißt *Determinantenabbildung*, falls folgende Axiomen gelten:

(D1) det ist *linear in jeder Zeile*

(D2) det ist *alternierend*, d.h.: Stimmen zwei Zeilen in A überein, so gilt $\det(A) = 0$.

(D3) det ist *normiert*, d.h. $\det(\mathbb{1}_n) = 1$.

In D1 ist noch der Ausdruck „linear in jeder Zeile“ erklärungsbedürftig:

Definition 6.3 (Linearität in Zeilen) det heißt *linear in der i-ten Zeile*, falls für alle $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ mit Zeilen $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n \in (K^n)^t$ (und analog $\tilde{a}'_i, \tilde{a}''_i \in (K^n)^t$) gilt:

$$\det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \lambda\tilde{a}_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}'_i + \tilde{a}''_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}'_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i-1} \\ \tilde{a}''_i \\ \tilde{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 6.4 Der Ausdruck „Linearität in Zeilen“ erklärt sich wie folgt: Halten wir alle Zeilen außer der i-ten fest, so wird die Determinante eine Abbildung $K^n \to K$, wobei wir K^n hier als Zeilenvektoren interpretieren. Die Forderungen aus Definition 6.3 besagen dann gerade, dass diese Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear ist. Die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}(n,K) \to K$ ist für $n > 1$ *nicht linear* (siehe D4 im nächsten Satz)!

Bevor wir Existenz und Eindeutigkeit von det klären, folgern wir aus D1 bis D3 weitere Eigenschaften, die eine solche Abbildung - sofern sie existiert - auch haben muss:

Satz 6.5 Erfülle $\det: \mathrm{Mat}(n,K) \to K$ (D1) bis (D3). Dann gilt für $A, B \in \mathrm{Mat}(n,K)$ und $\lambda \in K$:

(D4) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$.

(D5) Ist eine Zeile von A gleich 0, so ist $\det(A) = 0$.

(D6) Entsteht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen, dann gilt $\det(B) = -\det(A)$.

(D7) Entsteht B aus A durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer **anderen** Zeile, so gilt $\det(B) = \det(A)$.

(D8) Ist A eine obere Dreiecksmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \big(\text{ formal: } \forall 1 \le j < i \le n : A_{ij} = 0 \ \big), \tag{1}$$

dann gilt: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

Beweis (D4): $\lambda \cdot A$ entsteht aus A, indem wir *alle* Zeilen mit λ multiplizieren. D4 folgt durch n-faches Anwenden von D1:

$$\det(\lambda \cdot A) = \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot \tilde{a}_1 \\ \lambda \cdot \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \lambda \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \lambda \cdot \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \dots \overset{(D1)}{=} \lambda^n \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \lambda^n \det(A)$$

(D5): Diese Eigenschaft folgt auf ähnliche Art und Weise aus D1:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} 0 \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

(D6): Wir an, dass B aus $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ durch Vertauschen der Zeilen i und j entsteht, ansonsten seien A und B identisch. Wir können also schreiben

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir mit Hilfe von D2 und D1:

$$0 \overset{(D2)}{=} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i + \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_j + \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 0 + \det(A) + \det(B) + 0$$

Also folgt D6. (D7) folgt in ähnlicher Weise, wenn wir $\lambda\tilde{a}_j$ zu $\tilde{a}_i$ addieren:

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i + \lambda\tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \\ \tilde{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \det(A) + \lambda \cdot 0 = \det(A).$$

Im vorletzten Schritt tritt wegen $i \neq j$ die Zeile $\tilde{a}_j$ im zweiten Summanden doppelt auf. □

Vor dem Beweis von (D8) zeigen wir, dass wir (D1) - (D7) bereits Determinanten berechnen können, wenn wir mal annehmen, dass diese existieren:

Beispiel 6.6 (Methode „Gauß-Algorithmus“) Wir bestimmen die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C}), \tag{2}$$

indem wir A durch Zeilenumformungen modifizieren und (D1)–(D7) nutzen:

$$\begin{aligned}
\det(A) &\overset{(D6)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} && \text{Vertausche I und II} \\
&\overset{(D7)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 3-2i & 2 \end{pmatrix} && \text{Addiere } (-2)\cdot\text{I zu III} \\
&\overset{(D7)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix} && \text{Addiere } (2i-3)\cdot\text{II zu III} \\
&\overset{(D1)}{=} 3i \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{Ziehe Faktor } -3i \text{ aus III heraus} \\
&\overset{(D7)}{=} 3i \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \begin{array}{l}\text{Addiere } (-i)\cdot\text{III zu II und } (-1)\cdot\text{III zu I} \\ \text{Dann addiere } (-i)\cdot\text{II zu I}\end{array} \\
&\overset{(D3)}{=} 3i \cdot 1 \;=\; 3i
\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung von Satz 6.5) Im Beweis von (D8) unterscheiden wir 2 Fälle:

1.Fall: Alle Diagonaleinträge $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind ungleich Null. Wie in Beispiel 6.6 (4.Schritt) ziehen wir mit (D1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aus der Determinante. Nun steht 1 auf der Hauptdiagonalen und wie im Beispiel (5.Schritt) eliminieren wir alle Einträge oberhalb der Diagonalen, nach (D7) ändert das ihren Wert nicht. Zusammen:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{(D7)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{(D3)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

2.Fall: Ein Diagonaleintrag und damit $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ hat den Wert Null; also zu zeigen: $\det(A) = 0$. Dazu sei j der größte Index mit $\lambda_j = 0$. Gilt $j = n$, so ist die letzte Zeile der oberen Dreiecksmatrix A die Nullzeile, mit (D5) folgt $\det(A) = 0$. Ist $j < n$, so nutzen wir die Zeilen $j+1, \ldots, n$, um mit Zeilenumformungen wie in (D7) alle Einträge der j-ten Zeile zu eliminieren:

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & * \\ & \lambda_{j-1} & & & & \\ \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & & & \lambda_{j+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow A' = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & * \\ & \lambda_{j-1} & & & & \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \lambda_{j+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Hier nutzen wir, dass $\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n \neq 0$! Aus (D7) und (D5) folgt $\det(A) = \det(A') = 0$. □

Vor dem Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis diskutieren wir das Verhältnis von Determinante und Invertierbarkeit von $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Dazu erinnern wir an Beispiel 4.18:

$$A \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \in \mathrm{Mat}(n, K) : B \cdot A = \mathbb{1}_n = A \cdot B. \tag{3}$$

Mit Determinanten können wir dies einfacher als mit Verfahren 15 (1.Semester) prüfen:

Satz 6.7 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\det: \mathrm{Mat}(n, K) \to K$ eine Determinantenabbildung. Dann sind für alle $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ folgende Bedingungen äquivalent:

i) $\det(A) \neq 0$.

ii) $\mathrm{rg}(A) = n$.

iii) A ist invertierbar, d.h. $A \in \mathrm{GL}(n, K)$.

Beweis (von Satz 6.7) „*i) ⇔ ii)*“: Bringen wir A mit D6- und D7-Operationen in Zeilenstufenform wie in (1), so folgt $\det(A) = \pm\lambda_1 \cdots \lambda_n$. Aus der Zeilenstufenform lesen wir nun ab:

$$\mathrm{rg}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n : \lambda_i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

„*ii) ⇔ iii)*“: Wir verwenden die Abbildung $\varphi_A : K^n \to K^n, x \mapsto A \cdot x$ und folgern:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) = n \quad &\Leftrightarrow \quad \dim(\varphi_A(K^n)) = n && \text{(Bemerkung 5.72)} \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi_A \text{ ist surjektiv} && \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi_A \text{ ist bijektiv} && \text{(Korollar 5.76)} \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist invertierbar, i.e. } A \in \mathrm{GL}(n, K) && \text{(Korollar 5.97).} \end{aligned}$$

□

Wir beweisen nun Existenz und Eindeutigkeit von Determinantenabbildungen:

Satz 6.8 Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es **genau** eine Determinantenabbildung

$$\det\colon \mathrm{Mat}(n,K) \to K.$$

Im Beweis brauchen wir folgendes Konzept, das später noch nützlich sein wird:

Definition 6.9 Für $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$, $1 \le i,j \le n$ entsteht die *Streichungsmatrix*

$$A_{ij}^{\mathrm{Str}} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n-1,K)$$

durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Beweis (von Satz 6.8) Wir beginnen mit dem Beweis der Eindeutigkeit, seien also

$$\det : \mathrm{Mat}(n,K) \to K \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\det} : \mathrm{Mat}(n,K) \to K$$

zwei Determinantenabbildungen, die D1–D3 und folglich D4–D8 erfüllen. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$. Wir überführen A mit Umformungen des Typs D7 und k Zeilenvertauschungen D6 ($k = 0$ erlaubt) auf obere Dreiecksform

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Aus D6, D7 und D8, die für $\det$ und $\widetilde{\det}$ gelten, folgt dann direkt:

$$\det(A) = (-1)^k \det(A') = (-1)^k \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n \qquad \widetilde{\det}(A) = (-1)^k \widetilde{\det}(A) = (-1)^k \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Also stimmen $\det$ und $\widetilde{\det}$ überein, es gibt höchstens eine Determinantenabbildung.

Wir zeigen die Existenz durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ und nennen eine Determinante auf $\mathrm{Mat}(n,K)$ vorübergehend $\det_n$. Der *Induktionsanfang* ist trivial, da $\det_1((a)) := a$ eine Abbildung definiert, die die Eigenschaften D1–D3 für 1×1-Matrizen erfüllt.

Induktionsschritt ($n-1 \to n$): Wir nehmen an, dass wir $\det_{n-1} : \mathrm{Mat}(n-1,K) \to K$ konstruiert haben und definieren $\det_n : \mathrm{Mat}(n,K) \to K$ rekursiv. Dazu fixiere $j \in \{1,\dots,n\}$ und setze

$$\det{}_n : \mathrm{Mat}(n,K) \to K, \quad \det{}_n(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det{}_{n-1}(A_{ij}^{Str}). \tag{4}$$

Hier ist A_{ij}^{Str} die Streichungsmatrix aus Definition 6.9.

Nach I.V. erfüllt $\det_{n-1}$ D1–D3. Wir verifizieren, dass $\det_n$ dann ebenfalls D1–D3 erfüllt.

D1: Für Zeilenvektoren $\tilde{a}_i, \tilde{a}'_k, \tilde{a}''_k \in K^n$ betrachten wir die Matrizen

$$A' = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}'_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}, \qquad A'' = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}''_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}'_k + \tilde{a}''_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}$$

Gilt $i \neq k$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung (D1 für $\det_{n-1}$), dass

$$\det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij}) = \det{}_{n-1}(A'^{Str}_{ij}) + \det{}_{n-1}(A''^{Str}_{ij}) \tag{5}$$

Da $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$ liefert (4):

$$\begin{aligned}
\det{}_n(A) &= (-1)^{k+j} a_{kj} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) + \sum_{i \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij}) \\
&\overset{(5)}{=} (-1)^{k+j} (a'_{kj} + a''_{kj}) \det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) + \sum_{i \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} \left(\det{}_{n-1}(A'^{Str}_{ij}) + \det{}_{n-1}(A''^{Str}_{ij}) \right) \\
&\overset{(4)}{=} \det{}_n(A') + \det{}_n(A'')
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Zeilenadditivität, die Homogenität („λ rausziehen“) zeigt man analog.

D2) $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ habe zwei gleiche Zeilen $\tilde{a}_k = \tilde{a}_\ell$ und o.B.d.A $k < \ell$. Falls $i \neq k, \ell$, so hat A^{Str}_{ij} zwei gleiche Zeilen und nach Induktionsvoraussetzung (D2 für $\det_{n-1}$) folgt

$$\det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij}) = 0 \tag{6}$$

Weiter entsteht $A^{Str}_{\ell j}$ aus A^{Str}_{kj} durch $\ell - k - 1$ Zeilenvertauschungen: Wegen $\tilde{a}_\ell = \tilde{a}_k$ können wir nach Streichung der ℓ-ten Zeile die k-te Zeile an den Platz tauschen, an dem vormals die ℓ-te Zeile war. Dazu brauchen wir $\ell - k - 1$ Vertauschungen (klar?). Wiederum nach Induktionsvoraussetzung (D6 für $\det_{n-1}$) folgt dann

$$\det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) = (-1)^{\ell-k-1} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) \tag{7}$$

Wegen von $\tilde{a}_k = \tilde{a}_\ell$ sowie (6) und (7) liefert die rekursive Formel (4) für $\det_{n-1}$ nun:

$$\begin{aligned}
\det{}_n(A) = &\sum_{i \neq k, \ell} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{\det{}_{n-1}(A^{Str}_{ij})}_{=0} \\
&+ (-1)^{k+j} a_{kj} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{kj}) + (-1)^{\ell+j} \underbrace{a_{\ell j}}_{=a_{kj}} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) \\
= \ & a_{kj} \cdot \left((-1)^{\ell+j-1} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) + (-1)^{\ell+j} \det{}_{n-1}(A^{Str}_{\ell j}) \right) = 0
\end{aligned}$$

Also erfüllt $\det_n$ ebenfalls die Eigenschaft D2.

D3) Dies ist die einfachste der drei Eigenschaften. $\det_n(\mathbb{1}_n) = 1$ folgt ziemlich direkt aus (4), indem wir $\det_{n-1}(\mathbb{1}_{n-1}) = 1$ aus der Induktionsvoraussetzung benutzen. Wir besprechen dies in den Begleitkursen oder lesen es im Buch (S.210/211) nach. $\square$

In Beweis von Satz 6.8 haben wir implizit gezeigt, dass die Determinante von $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ vermöge (4) durch die Determinanten von $A_{ij}^{Str} \in \mathrm{Mat}()n-1,K)$ ausgedrückt werden kann:

Korollar 6.10 (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $(a_{ij}) = A \in \mathrm{Mat}(n,K)$. Dann gilt für jedes $j \in \{1,\ldots,n\}$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}^{\mathrm{Str}}).$$

Die Vorzeichen $(-1)^{i+j}$, die in der Laplace-Entwicklung auftreten, können wir übersichtlich in einem Schachbrettmuster aufschreiben und uns so leicht merken:

+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+

Aus Korollar 6.10 erhalten wir für kleine n explizite Formeln für die Determinante:

n=1: Für $A = (a) \in \mathrm{Mat}(1,K)$ erhalten wir direkt $\det((a)) = a$.

n=2: Entwicklung nach der ersten Spalte liefert:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \det((d)) - c \cdot \det((b)) = ad - bc. \tag{8}$$

n=3: Entwicklung nach der ersten Spalte liefert nun:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \cdot \det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \cdot \det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (ei - hf) - d \cdot (bi - hc) + g \cdot (bf - ec) \\ &= aei + dhc + gbf - (ahf + dbi + gec). \end{aligned} \tag{9}$$

Für die letzte Formel, die bereits 6 Summanden enthält, gibt es eine gute Merkregel:

Bemerkung 6.11 (Regel von Sarrus) Sei $A \in \mathrm{Mat}(3,K)$. Die 6 Summanden aus (9) lassen sich vermöge folgendem Schema generieren:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

blau: positives Vorzeichen
rot: negatives Vorzeichen

Wir schreiben also die ersten und zweite Spalte von A nochmal rechts neben A und multiplizieren entlang der blauen und roten Linien. Die Produkte werden aufaddiert, wobei wir beiden den roten Linien ein Vorzeichen hinzufügen.

Vorsicht! Die Regel von Sarrus gilt nur für $n = 3$, für Matrizen anderer Größe erhalten wir falsche Resultate. Dies ist ein sehr „beliebter" Fehler!

Zur Berechnung der Determinante von 3×3-Matrizen kennen wir also 2 Verfahren:

Beispiel 6.12 (Methode 1: Gauß-Algorithmus) Wir bestimmen die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C}), \tag{10}$$

indem wir A durch Zeilenumformungen in obere Dreiecksform bringen und D6, D7 und D8 nutzen. Dies entspricht größtenteils dem Vorgehen Beispiel 6.6, wir fassen zusammen:

$$\det(A) \overset{(D6)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{(D7)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix} \overset{(D8)}{=} -1 \cdot 1 \cdot (-3i) = 3i$$

Vorsicht! Der Werte der Determinante kann sich bei Zeilenumformungen ändern, anders als bei LGS, dort ändert sich die Lösungsmenge nicht. Lediglich D7 lässt den Wert unverändert. „Zeilentausch"(D6) führt wie oben zu einem Vorzeichen, Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor ändert die Determinante um diesen Faktor, z.B.:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ \mathbf{\tfrac{1}{2}} \cdot (2 & 3 & 4) \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{2}} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.13 (Methode 2: Regel von Sarrus) Schematisch lautet diese Regel:

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & i \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

Wir lesen also direkt ab:

$$\det(A) = 0 \cdot i \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + i \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot i \cdot i - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 + 2 + 3i + 2 - 0 - 4 = 3i$$

In diesem Beispiel ist Anwendung von Sarrus etwas einfacher als die Gauß-Methode. Letztere ist aber nicht nur für $n = 3$ anwendbar und im Allgemeinen – wie sollte es anders sein – vielen anderen Verfahren überlegen. *Das Beherrschen dieser Technik ist und bleibt wichtig*!

Wir zeigen jetzt schrittweise, dass D1,D2 und D4-D7 analog auch für Spalten gelten:

Korollar 6.14 (Spaltenlinearität) det ist linear in jeder Spalte, genauer:

Für alle Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n, a'_j, a''_j \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt:

a) $\det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & \lambda \cdot a_j & \dots & a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_j & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

b) $\det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a'_j + a''_j & \dots & a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a'_j & \dots & a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a''_j & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

Beweis Wir rechnen b) nach, a) geht ganz analog (siehe [1], Korollar 4.70). Gelte $a_j = a'_j + a''_j$. Wir entwickeln nach dieser j-ten Spalte und erhalten aus (4):

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a'_j + a''_j & \dots & a_n\end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (a'_{ij} + a''_{ij}) \det(A^{Str}_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ij} \det(A^{Str}_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a''_{ij} \det(A^{Str}_{ij}) \\ &= \det(a_1 \ \dots \ a'_j \ \dots \ a_n) + \det\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a''_j & \dots & a_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$ □

Für $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ gilt auch $A^t \in \mathrm{Mat}(n,K)$, damit ist $\det(A^t)$ definiert. Es gilt:

Satz 6.15 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$:

$$\det(A) = \det(A^t). \tag{11}$$

Beweis Der Beweis dieser Aussage lässt sich sehr elegant auf die Eindeutigkeit der Determinantenabbildung zurückführen. Wir definieren die Abbildung

$$\widetilde{\det} : \mathrm{Mat}(n,K) \to K, \quad \widetilde{\det}(A) := \det(A^t).$$

Wenn wir zeigen können, dass $\widetilde{\det}$ ebenfalls D1–D3 erfüllt, so impliziert die Eindeutigkeit für alle $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$: $\det(A) = \widetilde{\det}(A) = \det(A^t)$, also gerade (11).
Da Transposition die Rollen von Spalten und Zeilen tauscht und det nach Korollar 6.14 spaltenlinear ist, folgt die Zeilenlinearität von $\widetilde{\det}$, d.h D1 ist erfüllt. D3 rechnen wir nach:

$$\widetilde{\det}(\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n^t) = \det(\mathbb{1}_n) = 1.$$

Zum Nachweis von D2 habe nun $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ zwei gleiche Zeilen. Dann hat A^t zwei gleiche Spalten und folglich gilt $\mathrm{rg}(A^t) < n$. Nach Satz 6.7 folgt daraus aber $0 = \det(A^t) = \widetilde{\det}(A)$, d.h. $\widetilde{\det}$ erfüllt ebenfalls D2 und der Beweis ist komplett. □

Wie können jetzt leicht zeigen, dass sich weitere Rechenregeln auf Spalten übertragen:

Korollar 6.16 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$. Entsteht $\hat{A}$ aus A durch Vertauschen zweier Spalten, so gilt die Spaltenversion von D6:

$$\det(\hat{A}) = -\det(A).$$

Analog übertragen sich auch D5 und D7 auf die die Spalten.

Beweis Entsteht $\hat{A}$ aus A durch Vertauschung zweier Spalten, so entsteht $\hat{A}^t$ aus A^t durch Vertauschung zweier Zeilen. Anwendung von D6 und Satz 6.15 liefert dann direkt:

$$\det(\hat{A}) \overset{6.15}{=} \det(\hat{A}^t) \overset{(D6)}{=} -\det(A^t) \overset{6.15}{=} -\det(A).$$

Die anderen Eigenschaften ergeben sich analog. □

Eine weitere Folgerung aus Satz 6.15 und dem Spaltenentwicklungssatz ist:

Korollar 6.17 (Zeilenentwicklungssatz von Laplace) Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $(a_{ij}) = A \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Dann gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}^{\mathrm{Str}}).$$

Beispiel 6.18 Wir berechnen die Determinante einer komplexe 4×4-Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & \pi & 0 & i \\ \pi & \pi & i & \pi \\ i & \pi & 0 & -i \end{pmatrix} \overset{(i)}{=} (-i) \cdot \det\begin{pmatrix} i & 0 & i \\ \pi & i & \pi \\ i & 0 & -i \end{pmatrix} \overset{(ii)}{=} (-i) \cdot i \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}}_{=2} = 2$$

Hier haben wir in (i) nach der ersten Zeile und in (ii) nach der zweiten Spalte entwickelt, der letzte Schritt ist dann Formel (8) für 2×2-Matrizen und etwas Rechnen in $\mathbb{C}$.

6.2 Permutationen und die Leibnizformel

In diesem Abschnitt beweisen wir die *Leibnizformel*, eine explizite Formeln für $\det(A)$ für beliebig große Matrizen. Sie beruht auf einer systematischen Diskussion der Vorzeichen, die beim Permutieren von Zeilen / Spalten resultieren. Dazu nutzen wir die *symmetrische Gruppe* vom Grad $n \in \mathbb{N}$ (siehe 4.19 ff), die aus allen Permutationen der Zahlen $1, \dots n$ besteht:

$$S_n = \{\sigma : X_n \to X_n \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\} \qquad \text{wobei } X_n = \{1, \dots, n\}$$

Gruppenverknüpfung ist die Komposition von Abbildungen, neutrales Element ist id_{X_n} und das Inverse von $\sigma \in S_n$ ist die Umkehrabbildung $\sigma^{-1} : X_n \to X_n$. Für $\sigma \in S_n$ schreiben wir

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

hier sehen wir direkt wie σ die Zahlen $1, \dots, n$ permutiert. Eine besonders einfache Klasse von Permutation bildet die Transpositionen:

Definition 6.19 $\sigma \in S_n$ heißt *Transposition*, wenn es $i, j \in X_n$ mit $i \neq j$ gibt, so dass für alle $k \in X_n$ gilt:

$$\sigma(k) = \begin{cases} j & \text{für } k = i \\ i & \text{für } k = j \\ k & \text{sonst} \end{cases}.$$

In Worten: Die beiden Zahlen i, j werden getauscht, alle anderen bleiben fest.

Unter Verwendung der Notation aus (12) hat eine Transposition also die Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \cdots i-1 & i & i+1 \cdots j-1 & j & j+1 \cdots n \\ 1 \cdots i-1 & j & i+1 \cdots j-1 & i & j+1 \cdots n \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.20 (Transpositionen in S_3) Für $n = 3$ kennen wir die 6 Elemente aus S_3 explizit:

$$\mathrm{id}_{X_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

τ_1, τ_2 und τ_3 sind Transpositionen und $\mathrm{id}_{X_3}, \sigma_1, \sigma_2$ nicht. Allerdings lassen sich alle drei als Verknüpfung von Transpositionen schreiben (siehe Bsp. 4.21):

$$\mathrm{id}_{X_3} = \tau_1 \circ \tau_1 \qquad \sigma_1 = \tau_1 \circ \tau_2 \qquad \sigma_2 = \tau_1 \circ \tau_3.$$

Tatsächlich lässt sich jede Permutation $\sigma \in S_n$ in solche einfachen Bausteine zerlegen:

Lemma 6.21 Sei $n \in \mathbb{N}$. Jedes $\sigma \in S_n$ ist als Verkettung von Transpositionen darstellbar, d.h. es existieren Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_N \in S_n$, so dass:

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_N.$$

Den Beweis diese Aussage behandeln wir in den Übungen, siehe auch [1], Seite 142/143. Hier geben wir ein Beispiel, das das Verfahren bereits illustriert:

Beispiel 6.22 Wir überführen eine Permutation $\sigma \in S_4$ durch Vertauschungen in id:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{4\leftrightarrow 2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{3\leftrightarrow 2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{2\leftrightarrow 1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{id} \tag{13}$$

Hier haben wir zuerst 4 mit 2, dann 3 mit 2 und schließlich 2 mit 1 vertauscht um so von hinten nach vorne die Permutation σ in die Identität zu überführen. Hieraus können wir direkt eine Zerlegung („von links nach rechts“) von σ in Transpositionen ablesen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{4\leftrightarrow 2} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{3\leftrightarrow 2} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{2\leftrightarrow 1}$$

Bemerkung 6.23 Zur Zerlegung in Transpositionen halten wir noch fest:

a) Transpositionen sind selbstinvers, d.h.: Ist $\tau \in S_n$ Transposition, so gilt $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_{X_n}$.

b) Die Zerlegung in Transpositionen ist nicht eindeutig: Ist $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_N \in S_n$ und τ Transposition, so gilt nach a) auch $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_N \circ \tau \circ \tau$.

c) Die Verkettung von null Transpositionen definieren wir als id_{X_n}.

Nach b) ist die Zahl der Transpositionen, die wir benötigen, um $\sigma \in S_n$ zu darzustellen, nicht eindeutig bestimmt. Allerdings legt σ fest, ob diese Zahl gerade oder ungerade ist:

Notation 6.24 Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezeichne $\operatorname{sign}(x) := \frac{x}{|x|} \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen von x.

Nun ordnen wir auch Permutationen ein „Vorzeichen" zu:

Definition 6.25 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in S_n$. Ein Paar $(i, j) \in X_n \times X_n$ heißt *Fehlstand* von σ falls

$$i < j \qquad \text{und} \qquad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Das *Signum* von σ ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \le i < j \le n} \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}\right) = (-1)^{\#\text{Fehlstände } \sigma} \in \{-1, 1\}.$$

Beispiel 6.26 (Signum einer Transposition) Wir berechnen das Signum von$\tau_2 \in S_3$:

$$\operatorname{sgn}(\tau_2) = \operatorname{sign}\left(\frac{\tau_2(2) - \tau_2(1)}{2 - 1}\right) \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{\tau_2(3) - \tau_2(1)}{3 - 1}\right) \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{\tau_2(3) - \tau_2(2)}{3 - 2}\right) = (-1)^3 = -1$$

Dieses Ergebnis ist kein Zufall, wir formulieren es als Teil a) des nächsten Satzes:

Satz 6.27 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) Ist $\tau \in S_n$ eine Transposition, so gilt $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

b) Für alle $\sigma, \nu \in S_n$ gilt: $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \nu) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\nu)$.

Teil b) besagt, dass sgn ein sog. Gruppenhomomorphismus ist. Wir haben diesen Begriff bisher nicht eingeführt, das erfolgt in der Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie".

Beweis a) Wir könnten uns systematisch überlegen, dass sich für eine Transposition τ, die $k < \ell$ vertauscht, die Vorzeichen aus dem Produkt in Def. 6.25 gegenseitig aufheben bis auf eines, das zum Fehlstand (k, ℓ) gehört. So ergibt sich $\operatorname{sign}(\tau) = -1$, wir verzichten auf Details.

b) Wir erweitern zuerst den Bruch aus Definition 6.25:

$$\frac{(\sigma \circ \nu)(j) - (\sigma \circ \nu)(i)}{j - i} = \frac{\sigma(\nu(j)) - \sigma(\nu(i))}{\nu(j) - \nu(i)} \cdot \frac{\nu(j) - \nu(i)}{j - i} \tag{14}$$

Weiter gilt für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\operatorname{sign}(x \cdot y) = \operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)$. Aus (14) folgt

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \nu) = \prod_{i<j} \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(\nu(j)) - \sigma(\nu(i))}{j - i}\right) = \prod_{i<j} \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(\nu(j)) - \sigma(\nu(i))}{\nu(j) - \nu(i)}\right) \cdot \prod_{i<j} \operatorname{sign}\left(\frac{\nu(j) - \nu(i)}{j - i}\right).$$

Der zweite Faktor ist $\operatorname{sgn}(\nu)$. Im ersten Faktor setzen wir $k := \nu(i), \ell := \nu(j)$ falls $\nu(i) < \nu(j)$ und $k := \nu(j), \ell := \nu(i)$ falls $\nu(i) < \nu(j)$. In beiden Fällen gilt

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(\nu(j)) - \sigma(\nu(j))}{\nu(j) - \nu(i)}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(\ell) - \sigma(k)}{\ell - k}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\prod_{i<j} \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(\nu(j))-\sigma(\nu(i))}{\nu(j)-\nu(i)}\right) = \prod_{k<\ell} \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(\ell)-\sigma(k)}{\ell-k}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma),$$

denn die Permutation ν ist bijektiv und ändert in dem Produkt nur die Reihenfolge der Faktoren, nicht aber das Produkt als Ganzes.[1] Das beendet den Beweis. □

Als direkte Schlussfolgerung ergibt sich:

Korollar 6.28 Sei $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_N = \sigma \in S_n$ eine Zerlegung von σ in N Transpositionen dann gilt:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_N) = \operatorname{sgn}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sgn}(\tau_N) = (-1)^N.$$

Insbesondere ist durch $\operatorname{sgn}(\sigma)$ festgelegt, ob N gerade oder ungerade ist.

Als Abschluss bestimmen wir das Signum der Permutation aus Beispiel 6.22:

Beispiel 6.29 Wir haben bereits $\sigma \in S_4$ durch Vertauschungen in id überführt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{4\leftrightarrow 2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{3\leftrightarrow 2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{2\leftrightarrow 1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{id} \tag{15}$$

So konnten wir σ als Produkt von 3 Transpositionen schreiben, Korollar 6.28 impliziert nun

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1.$$

Diese Beispiel zeigt, wie wir $\operatorname{sgn}(\sigma)$ effektiv bestimmen können: Wir brauchen nur das Analogon zu (15) zu betrachten und festhalten, ob die Zahl der Vertauschungen gerade oder ungerade war. Die explizite Zerlegung aus Beispiel 6.22 brauchen wir dabei nicht.

Nun können wir die Leibnizformel der Determinante besprechen:

Satz 6.30 (Leibnizformel) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}(n, K)$. Dann gilt:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}. \tag{16}$$

Bemerkung 6.31 Für $n = 2$ gilt $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$ und (16) reduziert sich auf (8):

$$\operatorname{sign}(\mathrm{id}) A_{1,\mathrm{id}(1)} A_{2,\mathrm{id}(2)} + \operatorname{sign}(\tau) A_{1,\tau(1)} A_{2,\tau(2)} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Ganz ähnlich liefert $n = 3$ gerade die Sarrus-Formel (9). Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ hat die Summe in (16) nach Satz 4.22 $n!$ Summanden, diese Zahl wächst sehr schnell mit n (z.B. 720 für $n = 6$), die Leibnizformel ist für explizite Berechnungen daher oft unnütz.

[1] Wenn Ihnen diese Indexsubstitution nicht geheuer ist schreiben Sie sich einmal ein Beispiel für $n = 3$ (3 Faktoren) oder $n = 4$ (6 Faktoren) hin. Dann sehen Sie ganz konkret, was passiert.

Bemerkung 6.32 Für $K = \mathbb{R}$ hat Satz 6.30 andere Anwendungen. Identifizieren wir $\mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n)$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ (die Vektorräume sind isomorph, denn diese Matrizen haben genau n^2 Einträge) so besagt (16), dass $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion (in n^2 Variablen) ist und damit u.a. stetig ist. Anwendung des Zwischenwertsatz sagt uns: Hängt die Matrix $A(t)$ stetig von $t \in [0,1]$ ab und gilt $\det(A(0)) > 0$ sowie $\det(A(1)) < 0$, so gilt $\det(A(t_0)) = 0$ für ein $t_0 \in (0,1)$ - $A(t)$ war also „unterwegs“ bei t_0 nicht invertierbar!

Beweis (der Leibnizformel) Wir zeigen, dass (16) D1, D2 und D3 erfüllt. Für D1 verweisen wir auf [1] (S.220/221). D3 ist leicht einzusehen, denn für die Diagonalmatrix $\mathbb{1}_n$ trägt nur der Summand für $\sigma = \mathrm{id}$ in (16) bei, er hat den Wert 1. In D2 werden die Vorzeichen $\mathrm{sgn}(\sigma)$ relevant, hier gehen wir ins Detail.

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Matrix, deren k-te und ℓ-te Zeile übereinstimmen; es gelte $k < \ell$. Sei $\tau \in S_n$ die Transposition, die k und ℓ vertauscht. Wir betrachten die Abbildung

$$K_\tau : S_n \to S_n, \quad \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$$

Wegen $K_\tau(K_\tau(\sigma)) = \sigma \circ \tau \circ \tau = \sigma$ ist diese Abbildung ihre eigene Inverse, also bijektiv. Insbesondere bildet sie die Permutation mit Signum $+1$ bijektiv auf diejenigen mit Signum -1 ab und wir erhalten eine Zerlegung von S_n in disjunkte Mengen:

$$S_n = \underbrace{\{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = +1\}}_{=:A_n} \cup \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = -1\} = A_n \cup \{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in A_n\}$$

Sei nun $\sigma \in A_n$. Wir vereinfachen den Summanden zu $\sigma \circ \tau$ aus der Leibnizformel:

$$\begin{aligned} &\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot a_{1,\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{k,\sigma\circ\tau(k)} \cdots a_{\ell,\sigma\circ\tau(\ell)} \cdots a_{n,\sigma\circ\tau(n)} \\ &\quad = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{\mathrm{sgn}(\tau)}_{=-1} \cdot a_{1,\sigma(\tau(1))} \cdots \underbrace{a_{k,\sigma(\ell)}}_{=a_{\ell,\sigma(\ell)}} \cdots \underbrace{a_{\ell,\sigma(k)}}_{=a_{k,\sigma(k)}} \cdots a_{n,\sigma(\tau(n))} \\ &\quad = -\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Im letzten Schritt benutzen wir, dass die k-te und ℓ-te Zeile von A gleich sind. Wir erhalten also gerade das Negative des Summanden zu σ. Die Summe aus (16) zerfällt also in zwei Summen, eine über A_n und eine über $\{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in A_n\}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \\ &\quad = \sum_{\sigma \in A_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in A_n} \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot a_{1,\sigma(\tau(1))} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(\tau(n))} \\ &\quad \overset{(17)}{=} \sum_{\sigma \in A_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} = 0 \end{aligned}$$

Das beweist D2, wegen der Eindeutigkeit der Determinanten folgt die Leibnizformel (16). □

6.3 Determinantenmultiplikationssatz und inverse Matrix

Wir diskutieren jetzt die Determinante des Produkts zweier Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$:

Satz 6.33 (Determinantenmultiplikationssatz) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Vor dem Beweis überlegung wie sich für $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ die Einträge von $A \cdot B$ durch die Spalten (a_i, b_i) und Zeilen $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ von A bzw. B darstellen lassen, wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = (a_1 \ldots a_n) \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix} = (b_1 \ldots b_n). \tag{18}$$

Die Definition des Matrixprodukts liefert dann direkt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A \cdot b_1 & \ldots & A \cdot b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \cdot B \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \cdot B \end{pmatrix} \tag{19}$$

Also sind die Spalten von $A \cdot B$ Linearkombinationen der Spalten von A und die Zeilen von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Zeilen von B.

Beweis *1.Fall* $\det(B) = 0$: Nach Satz 6.7 folgt $\mathrm{rg}(B) < n$, d.h B hat maximal $n-1$ linear unabhängige Zeilen. Da die Zeilen von $A \cdot B$ nach (19) Linearkombinationen der Zeilen von B sind, folgt $\mathrm{rg}(A \cdot B) < n$ und damit wiederum $\det(A \cdot B) = 0$.

2.Fall $\det(B) \neq 0$. Wir definieren die Abbildung

$$\widetilde{\det} : \mathrm{Mat}(n, K) \to K, \quad A \mapsto \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$$

und verifizieren, dass $\widetilde{\det}$ ebenfalls D1, D2 und D3 erfüllt.

Zu D1: Wir schreiben A wie in (18), die i-te Zeile habe die Form $\tilde{a}_i = \lambda \tilde{a}'_i + \mu \tilde{a}''_i$. Seien A' und A'' die Matrizen, deren i-te Zeile $\tilde{a}'_i$ bzw. $\tilde{a}''_i$ ist. (19) besagt für das Matrixprodukt:

$$\det(A \cdot B) = \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \cdot B \\ \vdots \\ (\lambda \tilde{a}'_i + \mu \tilde{a}''_i) \cdot B \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \cdot B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \cdot B \\ \vdots \\ \lambda \tilde{a}'_i \cdot B + \mu \tilde{a}''_i \cdot B \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \cdot B \end{pmatrix} \overset{\mathrm{D1}}{=} \lambda \det \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \cdot B \\ \vdots \\ \tilde{a}'_i \cdot B \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \cdot B \end{pmatrix}}_{=A' \cdot B} + \mu \det \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \cdot B \\ \vdots \\ \tilde{a}''_i \cdot B \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \cdot B \end{pmatrix}}_{=A'' \cdot B},$$

wobei wir D1 für det benutzt haben. Division durch $\det(B)$ liefert D1 für $\widetilde{\det}$:

$$\widetilde{\det}(A) = \lambda \frac{\det(A' \cdot B)}{\det(B)} + \mu \frac{\det(A'' \cdot B)}{\det(B)} = \lambda \widetilde{\det}(A') + \mu \widetilde{\det}(A'').$$

Zu D2: Habe A die gleiche Zeilen $\tilde{a}_i = \tilde{a}_j$ $(i \neq j)$. Dann sind nach (19) auch die $i-te$ und j-te Zeile von $A \cdot B$ gleich und es gilt $\det(A \cdot B) = 0$. Dies impliziert $\widetilde{\det}(A) = 0$.

D3 ergibt sich direkt durch Nachrechnen: $\widetilde{\det}(\mathbb{1}_n) = \det(B)/\det(B) = 1$.

Aus der Eindeutigkeit der Determinantenabbildung (Satz 6.8) folgt für alle $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$: $\det(A) = \widetilde{\det}(A)$. Nach Definition von $\widetilde{\det}(A)$ bedeutet dies gerade $\det(A)\cdot\det(B) = \det(A\cdot B)$. □

Für invertierbare Matrizen folgt direkt ein einfacher Zusammenhang zwischen $\det(A)$ und $\det(A^{-1})$:

Korollar 6.34 (Determinante der Inversen) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ gilt:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Beweis Wir wenden den Determinantenmultiplikationssatz auf die Identität $A\cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$ an:

$$1 = \det \mathbb{1}_n = \det(A\cdot A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

Division durch $\det(A) \neq 0$ liefert die Behauptung. □

Für das nächste Korollar erinnern wir an *Ähnlichkeit* von Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n,K)$:

$$A, B \text{ sind ähnlich} \quad \Leftrightarrow \quad \exists T \in \mathrm{GL}(n,K) : B = T\cdot A\cdot T^{-1} \tag{20}$$

Damit können wir formulieren:

Korollar 6.35 (Determinanten ähnlicher Matrizen) Ähnliche Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n,K)$ haben die gleiche Determinante.

Beweis Wir schreiben $B = T\cdot A\cdot T^{-1}$ und aus Satz 6.33 und Korollar 6.34 folgt:

$$\det(B) = \det(T\cdot A\cdot T^{-1}) = \det(T)\cdot\det(A)\cdot\det(T^{-1}) = \det(T)\cdot\det(A)\cdot\det(T)^{-1} = \det(A).$$ □

Wir erhalten weiter ein Determinanten-Formel für die Inverse A^{-1} einer invertierbaren Matrix und in Folge auch eine explizite Lösungsformel für bestimmte LGS.

Satz 6.36 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$. Wir definieren $B \in \mathrm{Mat}(n,K)$ durch

$$b_{\mathbf{ij}} := (-1)^{i+j}\cdot\det(A^{\mathrm{Str}}_{\mathbf{ji}}),$$

wobei der Indextausch $\mathbf{ij} \leftrightarrow \mathbf{ji}$ zu beachten ist. Dann gilt:

$$A\cdot B = B\cdot A = \det(A)\cdot\mathbb{1}_n.$$

Insbesondere gilt für $A \in \mathrm{GL}(n,K)$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot B. \tag{21}$$

Beweis Der „Insbesondere“-Teil folgt leicht aus dem ersten Teil des Satzes: Umstellen liefert $A\cdot(\frac{1}{\det(A)}B) = (\frac{1}{\det(A)}B)\cdot A = \mathbb{1}_n$ und dies besagt gerade, dass $\frac{1}{\det(A)}B = A^{-1}$.

Wir zeigen den ersten Teil, genauer: $(A\cdot B)_{ii} = \det(A)$ und $(A\cdot B)_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Es gilt:

$$(A\cdot B)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\cdot a_{ik}\cdot \det(A_{ik}^{Str}) = \det(A),$$

wobei der letzte Schritt gerade in Laplace-Entwicklung nach der i-te Spalte besteht. Sei nun $i \neq j$ und $\hat{A} \in \mathrm{Mat}(n,K)$ die Matrix, die wir erhalten, wenn wir in A die j-te durch die i-te Zeile ersetzen. Somit gilt $A_{jk}^{Str} = \hat{A}_{jk}^{Str}$. Laplace-Entwicklung analog zu oben ergibt:

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\cdot a_{ik}\cdot \det(A_{jk}^{Str}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\cdot \hat{a}_{jk}\cdot \det(\hat{A}_{jk}^{Str}) = \det(\hat{A}).$$

Da $\hat{A}$ zwei gleiche Zeilen hat folgt $(A\cdot B)_{ij} = \det(\hat{A}) = 0$ und der Satz ist bewiesen. □

Für große n ist diese Formel unpraktisch da die Berechnung von Determinanten aufwändig ist. Für (sehr) kleine n können wir die Inverse aber mit Hilfe von (21) bestimmen:

Beispiel 6.37

n=2: Sei K ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ invertierbar. Dann gilt für die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

n=3: Sei $K = \mathbb{C}$. Wir berechnen für unser altes Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3i}\begin{pmatrix} 4i-3 & -2 & 3-2i \\ -4+3i & -2i & 2 \\ 2 & i & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3i}\begin{pmatrix} 4i-3 & -4+3i & 2 \\ -2 & -2i & i \\ 3-2i & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen bereits für $n = 3$, dass wir eine Determinante einer 3×3-Matrix und 9 Determinanten von 2×2-Matrizen berechnen mussten. Dies ist viel zu aufwändig, das Verfahren 15 (LAILA-Skript S.118) ist bereits hier überlegen.

Nun zur Lösungsformel für LGS:

Satz 6.38 (Cramer'sche Regel) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für $a_1,\dots,a_n, b \in K^n$ sei

$$A = (a_1,\dots,a_n) \in \mathrm{GL}(n,K).$$

Dann ist die eindeutige Lösung $x = (x_1,\dots,x_n)^t \in K^n$ des LGS $A\cdot x = b$ gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(a_1,\dots,a_{i-1},b,a_{i+1},\dots,a_n)}{\det(A)} \qquad (i = 1,\dots,n).$$

Beweis Da A invertierbar ist können wir mit A und A^{-1}multiplizieren und erhalten:

$$A \cdot x = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A^{-1} \cdot b \qquad\qquad \text{d.h. } \text{Lös}(A,b) = \{A^{-1} \cdot b\}.$$

Mit Formel (21) für die Matrixeinträge $(A^{-1})_{ij}$ gilt für die eindeutige Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)^t$:

$$\begin{aligned} x_i = (A^{-1} \cdot b)_i &= \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} b_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(A_{ji}^{Str}) b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \det(A_{ji}^{Str}) \end{aligned}$$

Die Summe ist erneut der Term aus der Laplace-Entwickelung (i-te Spalte), also

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n). \qquad \square$$

Natürlich können wir LGS auch immer mit dem effizienteren Gauß-Verfahren lösen. Letzteres ist außerdem auf *beliebige* Gleichungssysteme anwendbar - A braucht nicht quadratisch und erst recht nicht invertierbar zu sein!

Wir schauen uns die Cramer'sche Regel (Satz 6.38) mal im Einsatz an:

Beispiel 6.39 Wir möchten die Lösung von $A \cdot z = b$ für folgende Daten bestimmen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(A) = 3i$ gilt $A \in GL(3, \mathbb{C})$; Satz 6.38 liefert die eindeutige Lösung $z \in \mathbb{C}^3$ von $A \cdot z = b$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{3i} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{3(4i-3)}{3i} = 4 + 3i \\ z_2 &= \frac{1}{3i} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-6}{3i} = 2i \qquad \Rightarrow \qquad z = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 2i \\ -2-3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3. \\ z_3 &= \frac{1}{3i} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & i & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{3(3-2i)}{3i} = -2 - 3i \end{aligned}$$

6.4 Determinanten von linearen Abbildungen

Wir übertragen jetzt das Konzept „Determinante" auf lineare Abbildungen. Dazu erinnern wir an den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen (siehe LAILA-Skript Kapitel 5.4). Ist $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, i.e. $\varphi \in \text{End}(V)$, und $B = (b_1, \dots, b_n)$

eine Basis von V, dann wird φ die *darstellende Matrix* $M_B^B(\varphi) \in \mathrm{Mat}(n,K)$ zugeordnet. Diese Matrix liefert eine vollständige Beschreibung von φ, hängt aber von der Wahl von B ab. Wählen wir eine weitere Basis B', so besagt die Transformationsformel:

$$M_{B'}^{B'}(\varphi) = T_{B'}^B \cdot M_B^B(\varphi) \cdot T_B^{B'} = T_{B'}^B \cdot M_B^B(\varphi) \cdot (T_{B'}^B)^{-1}. \tag{22}$$

Wir definieren nun eine Determinante von φ über die darstellenden Matrix:

Definition 6.40 Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis B und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Dann heißt

$$\det(\varphi) := \det(M_B^B(\varphi))$$

Determinante des Endomorphismus φ.

Zunächst ist nicht offensichtlich, dass diese Definition nur von φ und nicht von B abhängt:

Bemerkung 6.41 Die Determinante eines Endomorphismus ist *wohldefiniert*, d.h. hängt nicht von der Wahl von B ab. Denn ist B' eine weitere Basis, so sind $M_B^B(\varphi)$ und $M_{B'}^{B'}(\varphi)$ wegen (22) ähnlich und haben damit nach Korollar 6.35 dieselbe Determinante: $\det(M_B^B(\varphi)) = \det(M_{B'}^{B'}$.

Schauen wir uns geometrische Beispiele an:

Beispiel 6.42 (Determinante von Drehung und Spiegelung) Wir betrachten

$$R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix}\text{Drehung um} \\ \text{Winkel } \alpha\end{pmatrix} \qquad S_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix}\text{Spiegelung an} \\ \theta\text{-Achse}\end{pmatrix}.$$

Von beiden Abbildungen haben wir bereits darstellende Matrizen bestimmt und erhalten:

1) Die Determinante der Drehung in der Ebene um den Winkel θ ist

$$\det(R_\theta) = \det(M_{B_0}^{B_0}(R_\theta)) = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

2) Die Determinante der Achsenspiegelung ist

$$\det(S_\theta) = \det(M_{B_0}^{B_0}(S_\theta)) = \det\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{pmatrix} = -\cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta) = -1.$$

   Dies folgt auch daraus, dass S_θ und $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ ähnlich sind (LAILA Bsp. 5.117), denn offenbar gilt $\det(S_\theta) = 1 \cdot (-1) = -1$.

Wir können also Drehungen und Spiegelungen anhand der Determinanten unterscheiden, darauf kommen wir im Kontext von *Orientierungen* zurück.

Als zweites Beispiel greifen wir Beispiel 5.88 (LAILA-Skript) in etwas modifizierter Form auf:

Beispiel 6.43 Auf $V := \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wählen wir Basis $B = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ wobei $f_k(t) = t^k$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V,\ f \mapsto \varphi(f) \qquad \text{mit} \qquad \varphi(f)(t) = t \cdot f'(t).$$

Dann gilt $\varphi(f_k)(t) = t \cdot k \cdot t^{k-1}$, d.h. $\varphi(f_k) = k \cdot f_k$ und wir erhalten

$$M_B^B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det(\varphi) = \det(M_B^B(\varphi)) = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0.$$

Wir sehen hier zwei Dinge:

1) Eine gute Wahl der Basis B vereinfacht die Berechnung der Determinanten. Für eine andere Basis wird die darstellende Matrix i.Allg. nicht einmal eine Dreiecksmatrix sein.

2) Wegen $\det(\varphi) = 0$ kann φ nicht bijektiv sein kann. Das ist nicht überraschend, denn f_0 ist ein von Null verschiedenes Element im Kern von φ.

Einige Aussagen zu Determinanten übertragen sich von Matrizen auf Endomorphismen:

Korollar 6.44 Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

a) φ ist ein Automorphismus $\Leftrightarrow \det(\varphi) \neq 0$.

b) Ist φ ein Automorphismus, dann gilt $\det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi)}$.

c) $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$.

Beweis Dies folgt direkt aus den entsprechenden Eigenschaften für Matrizen, konkreter:

a) Folgt aus Korollar 5.100 (LAILA-Skript) und Satz 6.7.

b) Folgt aus Korollar 5.100 (LAILA-Skript) und Satz 6.34.

c) Folgt aus Satz 5.99 (LAILA-Skript) und Satz 6.33. □

6.5 Geometrie 1 – Orientierungen

Wir beginnen mit der Frage, inwiefern die rechte und linke Hand von Menschen eigentlich „verschieden“ sind und machen einen einfachen Versuch: Wir halten Daumen, Zeige- und Mittelfinger beider Hände so, dass sie senkrecht aufeinander stehen. Jetzt probieren wir, unsere Hände so zu bewegen (drehen, verschieben, ...), dass die Daumen, Zeige- und Mittelfinger jeweils aufeinander zu liegen kommen. Wir stellen fest: Das geht „irgendwie“ nicht.

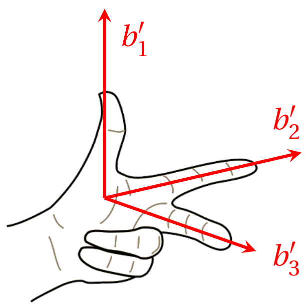


Abbildung 1: Linke und rechte Hand mit Basisvektoren entlang der Finger

Um dies mathematisch zu verstehen, stellen wir fest, dass die Vektoren (b_1, b_2, b_3) bzw. (b_1', b_2', b_3'), die durch Daumen, Zeige- und Mittelfinger „definiert" werden, jeweils eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir werden sehen, dass die Basen zu linker und rechter Hand verschieden orientiert sind, eine Eigenschaft von Basen reeller Vektorräume, die wir jetzt entwickeln.

Konvention 6.45 Wir betrachten in diesem Kapitel endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorräume $V \neq \{0\}$.

Die Wahl des Körpers $\mathbb{R}$ ist hier wichtig, weil $\mathbb{R}^\times = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ in zwei Teile zerfällt: *Positive* und *negative* Zahlen. Für viele andere Körper (insbes. für $\mathbb{C}$) ist dies nicht der Fall!

Definition 6.46 Zwei Basen B und B' von V heißen *gleich orientiert*, falls

$$\det\left(T_{B'}^{B}\right) > 0$$

und *entgegengesetzt orientiert* bzw. *verschieden orientiert*, falls

$$\det\left(T_{B'}^{B}\right) < 0.$$

Beispiel 6.47 Seien $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasisvektoren. Wir betrachten die Basen

$$B := B_0 = (e_1, e_2, e_3) \qquad B' := (e_3, e_1, e_2) \qquad B'' := (e_3, -e_1, e_2)$$

von $\mathbb{R}^3$. Dann sind B und B' gleich orientiert, B und B'' dagegen verschieden orientiert, denn:

$$\det T_{B'}^{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = +1 \qquad \text{und} \qquad \det T_{B''}^{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Bemerkung 6.48 Im $\mathbb{R}^n$ können wir die Berechnung von $T_{B'}^{B}$ umgehen. Sind $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B' = (b_1', \dots, b_n')$ Basen, so können wir sie als $n \times n$ Matrizen mit Spalten b_i bzw. b_i' auffassen. Wie in Korollar 5.112 b) (LAILA-Skript) diskutiert gilt dann $T_{B'}^{B} = (B')^{-1} \cdot A$ (Matrixprodukt). Also folgt mit Satz 6.33 und Korollar 6.34:

$$\det(T_{B'}^{B}) = \det((B')^{-1} \cdot B) = \det((B')^{-1}) \cdot \det(B) = (\det(B'))^{-1} \cdot \det(B).$$

Also: Fassen wir im $\mathbb{R}^n$ die Basen B und B' als Matrizen auf, so gilt:

$$B \text{ und } B' \text{ sind gleich orientiert} \quad \Leftrightarrow \quad \det(B) \text{ und } \det(B') \text{ haben das gleiche Vorzeichen.}$$

Dies ist für $n \leq 3$, wo Determinanten noch bequem zu berechnen sind, einfach zu prüfen.

Aus der Analysisvorlesung ist das Konzept der Äquivalenzrelation bekannt. Tatsächlich definiert „gleich orientiert sein“ eine solche auf der Menge der Basen:

Lemma 6.49 Die Relation „gleich orientiert“ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V, d.h.

i) Jede Basis ist zu sich selbst gleich orientiert (Reflexivität).

ii) Sind B und B' gleich orientiert, so sind auch B' und B gleich orientiert (Symmetrie).

iii) Sind B und B' sowie B' und B'' gleich orientiert, so auch B und B'' (Transitivität).

Beweis Sei $n := \dim(V)$. Da $T_B^B = \mathbb{1}_n$ gilt $\det T_B^B = \det(\mathbb{1}_n) = 1 > 0$, also folgt i). ii) lassen wir als Übung, wir zeigen iii): Nach Voraussetzung gilt $\det(T_{B'}^B), \det(T_{B''}^{B'}) > 0$. Wegen $T_{B''}^B = T_{B''}^{B'} \cdot T_{B'}^B$ (Lemma 5.111 LAILA) liefert der Satz 6.33:

$$\det(T_{B''}^B) = \det(T_{B''}^{B'} \cdot T_{B'}^B) = \underbrace{\det(T_{B''}^{B'})}_{>0} \cdot \underbrace{\det(T_{B'}^B)}_{>0} > 0 \tag{23}$$

Also sind B und B'' gleich orientiert und auch Transitivität ist bewiesen. □

In der Analysis wurden des Weiteren Äquivalenzklassen besprochen. Damit definieren wir:

Definition 6.50 Zu jeder Basis B von V definieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(V,B) &:= \text{Äquivalenzklasse von } B \text{ unter „gleich orientiert“} \\ &= \{B' \mid B' \text{ist Basis von } V, \text{ die zu } B \text{ gleich orientiert ist}\}.\end{aligned}$$

Die Mengen $\mathcal{O}(V,B)$ heißen *Orientierungen* von V.

Bevor wir Eigenschaften von Orientierungen studieren, erinnern wir an eine wesentliche Eigenschaften von Äquivalenzklassen: Zwei Klassen $\mathcal{O}(V,B)$ und $\mathcal{O}(V,B')$ sind entweder gleich oder disjunkt. Die Menge der Orientierungen ist sehr überschaubar:

Lemma 6.51 Jeder endlich-dim. reelle Vektorraum V besitzt **genau zwei** Orientierungen.

Dies beruht im Wesentlichen darauf, dass es in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ genau 2 Vorzeichen (+,-) gibt:

Beweis Ist $B := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ Basis von V, so auch $B' := (-b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Wie in Beispiel 6.47 sehen wir, dass B und B' verschieden orientiert sind. Also gilt $\mathcal{O}(V,B) \neq \mathcal{O}(V,B')$, d.h. es gibt mindestens zwei Orientierungen. Ist B'' eine beliebige andere Basis, so folgt wie in (23):

$$\det(T_{B''}^B) = \det(T_{B''}^{B'}) \cdot \det(T_{B'}^B) = -\det(T_{B''}^{B'}).$$

Also sind entweder B'' und B gleich orientiert oder B'' und B', es gilt entweder $\mathcal{O}(V,B'') = \mathcal{O}(V,B)$ oder $\mathcal{O}(V,B'') = \mathcal{O}(V,B')$. Also gibt es keine weiteren Orientierung. □

Da es genau zwei Orientierungen gibt, sagen wir, dass sich die *Orientierung umkehrt*, wenn wir von einer Orientierung auf *die* andere wechseln. Wir haben dann folgend Rechenregeln, die direkt aus den bekannten Regeln für Determinanten folgen:

Korollar 6.52

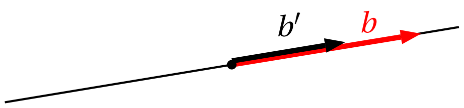
a) Vertauschung zweier Basisvektoren kehrt die Orientierung um.

b) Ersetzung eines Basisvektors durch ein negatives Vielfaches kehrt die Orientierung um.

c) Streckung eines Basisvektors um einen positiven Faktor erhält die Orientierung.

In Dimension $n = 1, 2, 3$ lässt sich die Orientierung in $V = \mathbb{R}^n$ anschaulich interpretieren:

Beispiel 6.53 (Orientierung im $\mathbb{R}^1$) V ist eindimensional (also eine Gerade), d.h. jede Basis hat die Form (b) für ein $b \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sind $B = (b)$ und $B' = (b')$ zwei Basen, so gilt $b = \lambda \cdot b'$ und damit $T^B_{B'} = (\lambda) \in \mathrm{Mat}(1, \mathbb{R})$ sowie $\det(T^B_{B'}) = \lambda$. Also sind (b) und (b') genau dann gleich orientiert, wenn $\lambda > 0$, d.h. wenn b und b' in V in dieselbe Richtung zeigen:



(b) und (b') gleich orientiert (b) und (b') verschieden orientiert

Beispiel 6.54 (Orientierung im $\mathbb{R}^2$) Seien $B = (b_1, b_2)$ und $B' = (b'_1, b'_2)$ Basen von $V = \mathbb{R}^2$. Wir stellen uns vor, dass wir im Ursprung stehen und in Richtung des ersten Basisvektors blicken. Wir fragen uns: In welche Richtung (links oder rechts) müssen wir den Kopf drehen um in die Richtung des zweiten Vektors zu schauen, wobei wir den Kopf jeweils um einen Winkel aus $(0, \pi)$ drehen können (den Wert π selbst brauchen wir nicht zu betrachten, warum ?). Wir wollen zeigen:

B und B' sind gleich orientiert.	$\Leftrightarrow$	Wir müssen bei beiden Basen den Kopf in die gleiche Richtung (links oder rechts) drehen.

Wir sagen dann auch, dass die Basen den gleichen *Drehsinn* haben. Bildlich dargestellt:

(b_1, b_2) und (b'_1, b'_2) gleich orientiert (b_1, b_2) und (b'_1, b'_2) verschieden orientiert

Begründung: Wir nehmen zuerst an, dass b_1 und b'_1 in dieselbe Richtung zeigen, d.h. es gilt $b_1 = \lambda b'_1$ für ein $\lambda > 0$. Beide Vektoren spannen dann dieselbe Gerade $G := G_{0,b_1} = G_{0,b'_1}$ durch

0 auf. Weiter gilt $b_2 = \mu b_1' + \nu b_2'$ für geeignete $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich:

$$T_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det T_{B'}^{B} = \lambda \cdot \nu$$

Das Vorzeichen von $\det(T_{B'}^{B})$ ist also einfach das Vorzeichen von ν, da $\lambda > 0$. Das Vorzeichen von ν sagt uns aber gerade, ob b_2 und b_2' auf der gleichen Seite von G liegen (+) oder auf verschiedenen (-) und das wollten wir verifizieren.
Zeigen b_1 und b_1' nicht in dieselbe Richtung, so betrachten wir eine Drehung R_α, die b_1' in Richtung b_1 dreht: $b_1 = \lambda \cdot R_\alpha(b_1')$ für ein $\lambda > 0$. Wir setzen $b_1'' = R_\alpha(b_1')$ und $b_2'' := R_\alpha(b_2')$. Da wir die Determinante von Drehungen aus Beispiel 6.42 kennen, folgt

$$T_{B''}^{B} = T_{B''}^{B'} \cdot T_{B'}^{B} = R_{-\alpha} \cdot T_{B'}^{B} \qquad \Rightarrow \qquad \det(T_{B''}^{B}) = \underbrace{\det(R_{-\alpha})}_{=1} \cdot \det(T_{B'}^{B}) = \det(T_{B'}^{B}).$$

In Worten: Durch das Drehen beider Basisvektoren um den Winkel α hat sich der Drehsinn der Basis nicht verändert, unsere Kopfbewegung wäre für B' und B'' die gleich. Damit sind B und B' genau dann gleich orientiert, wenn B und B'' gleich orientiert sind und unser Argument von oben überträgt sich.

Beispiel 6.55 (Orientierung im $\mathbb{R}^3$) Hier kommen wir zurück auf unser Anfangsbeispiel mit linker und rechter Hand. Nach geeigneter Drehung (positive Determinante!) können wir die rechte Hand mit der Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$ und die linke Hand mit der Basis $B' = (-e_1, e_2, e_3)$ in Übereinstimmung bringen. Damit repräsentieren unsere Hände je eine der beiden Orientierungen des $\mathbb{R}^3$.

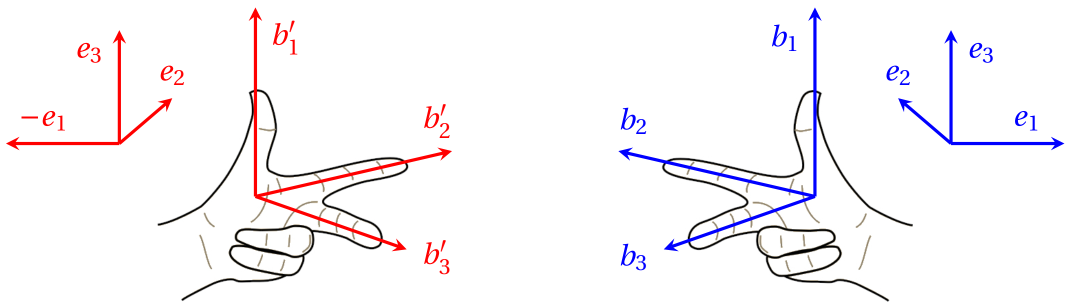


Abbildung 2: Händigkeit und Standardbasen

Wenn wir also zwei Basen $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $B' = (b_1', b_2', b_3')$ gegeben haben, dann sind die beiden genau dann gleich orientiert, wenn wir sie - nach einigen Drehungen und Verrenkungen[2] - durch Daumen, Zeige- und Mittelfinger (Reihenfolge ist wichtig!) ein und derselben Hand beschreiben können. Brauchen wir verschiedene Hände sind B und B' also entgegengesetzt orientiert.

Bemerkung 6.56 Orientierungen des $\mathbb{R}^3$ sind wichtig an verschiedenen Stellen in der Physik. So erfahren z.B. bewegte Ladungen im Magnetfeld eine Kraft (sog. Lorentzkraft). Bewegt

[2] Wir gehen hier davon aus, dass wir nicht einfach einen Finger „umklappen" können, bei den meisten Menschen ist das so.

sich eine positive Ladung in Richtung $v \in \mathbb{R}^3$ und zeigt die Feldstärke in Richtung $B \in \mathbb{R}^3$, so steht diese Kraft senkrecht auf v und B. Damit ist die Richtung der Kraft aber noch nicht eindeutig charakterisiert, es bleiben zwei Möglichkeiten. Die Gesetze der Physik besagen nun genauer, dass in diesem Fall (v, B, F) so wie die rechte Hand orientiert ist.

Zunächst ist keine der Orientierungen eines Vektorraums ausgezeichnet. Erst die Wahl einer der beiden erlaubt uns zu sagen, dass *eine* Basis positiv oder negativ orientiert ist:

Definition 6.57 Sei auf V eine Orientierung $\mathscr{O}$ gewählt. Eine Basis B von V heißt *positiv orientiert* (bzgl. $\mathscr{O}$), falls $B \in \mathscr{O}$, und *negativ orientiert* sonst.

Definition 6.58 Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ besitzt die Standardbasis $B_0 := (e_1, \ldots, e_n)$. Die zugehörige Orientierung $\mathscr{O}_0 := \mathscr{O}(\mathbb{R}^n, B_0)$ heißt Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$.

Wenn wir auf $\mathbb{R}^3$ also die Standardorientierung wählen, so ist die Basis B' aus Beispiel 6.47 positiv und B'' negativ orientiert.
Wir wollen zum Schluss noch den Effekt linearer Abbildungen $\varphi : V \to V$ auf die Orientierung untersuchen. Dazu möchten wir prüfen, ob eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ gleich orientiert zu $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ ist. Nun wird das zweite Tupel i.Allg. aber keine Basis sein, denn wir haben in Satz 5.68 (LAILA-Skript) gezeigt, dass φ genau dann Basen auf Basen abbildet, wenn es bijektiv ist. Daher betrachten wir im Folgenden nur bijektive lineare Abbildungen.

Definition 6.59

i) Eine bijektive lineare Abbildung $V \to V$ heißt *Automorphismus* von V, die Menge aller Automorphismen bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}(V)$.

ii) $\varphi \in \mathrm{Aut}(V)$ heißt *orientierungserhaltend*, wenn für jede Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V gilt: $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ sind gleich orientiert.

Die Eigenschaft eines Automorphismus, orientierungserhaltend zu sein, lässt sich leicht mit Hilfe der Determinante von φ charakterisieren:

Lemma 6.60 $\varphi \in \mathrm{Aut}(V)$ ist genau dann orientierungserhaltend, wenn $\det(\varphi)$ positiv ist.

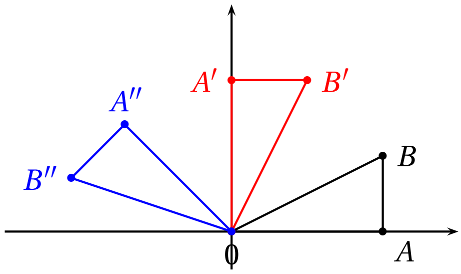
Beweis Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis und $B' := (\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$. Nach Definition von Transformationsmatrix bzw. darstellender Matrix gilt:

$$T_B^{B'} = M_B^B(\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \det(T_B^{B'}) = \det(M_B^B(\varphi)) = \det(\varphi)$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Mit Beispiel 6.42 erhalten wir damit direkt eine geometrisch relevante Anwendung:

Beispiel 6.61 Drehungen $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind orientierungserhaltend, Spiegelungen nicht. Diese Tatsche wird im Geometrieunterricht in der Schule häufig an Dreiecken illustriert:



$A' = S_{\pi/4}(A)$
$B' = S_{\pi/4}(B)$

$A'' = D_{3\pi/4}(A)$
$B'' = D_{3\pi/4}(B)$

Wir sehen wie in Beispiel 6.54, dass (A, B) und (A'', B'') gleich orientiert sind, während dies für (A, B) und (A', B') nicht gilt. Dies passt dazu, dass Drehungen orientierungserhaltend, Spiegelungen aber orientierungsumkehrend sind. Die Spiegelung hat also den Umlaufsinn im Dreieck geändert, die Drehungen nicht.

Die Eigenschaften der Determinante liefern uns weitere Aussagen über das Verhalten von Abbildungen, deren Beweis wir als Übung lassen:

Korollar 6.62 Für Automorphismen $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(V)$ gilt:

i) id_V ist orientierungserhaltend.

ii) Sind φ, ψ orientierungserhaltend, so auch $\varphi \circ \psi$.

iii) Ist φ orientierungserhaltend, so auch φ^{-1}.

Bemerkung 6.63 Die bijektiven Abbildungen $V \to V$ bilden bzgl. der Verkettung eine Gruppe, die wir auch mit $(\mathrm{Abb}(V, V), \circ)^\times$ bezeichnet hatten (siehe LAILA-Lemma 4.17). Es ist nicht schwer zu sehen, dass $\mathrm{Aut}(V)$ eine Untergruppe von ihr ist und damit selbst eine Gruppenstruktur erbt. Korollar 6.62 besagt dann gerade, dass

$$\{\varphi \in \mathrm{Aut}(V) \mid \varphi \text{ ist orientierungserhaltend}\}$$

wiederum Untergruppe dieser Gruppe $\mathrm{Aut}(V)$ ist und damit selbst eine Gruppe.

Literatur

[1] C. Bär, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, 1.Auflage, Wiesbaden: Springer Spektrum, 2018.

[2] C. Bär et.al, *Interaktive Aufgaben.* `https://cbaer.eu/joomla/index.php/de/mathematik/interaktive-webseiten/ueben`

[3] Wikipedia, *Mathematik — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*, 2023. `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematik&oldid=235074398` [Online; Stand 14. Oktober 2023]

[4] S. Waldmann, *Lineare Algebra 1*, 2.Auflage, Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum, 2021

[5] K. Bryan und T. Leise, *The $25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google*, SIAM Rev. 48 (2006), 569–581, DOI 10.1137/050623280.

[6] S. Bosch, *Lineare Algebra*, 6.Auflage, Berlin/Heidelberg: Springer 2021