Aufgabe 2

Wir definieren $g_j \in \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch

$$g_0(x) := 1, \qquad g_1(x) := x - 1, \qquad g_2(x) := x^2, \qquad g_3(x) := x^3 - x^2.$$

Weiter definieren wir die Basen $B_0 := (f_0, f_1, f_2, f_3)$ und $B := (g_0, g_1, g_2, g_3)$ von $\mathrm{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und Ψ_B, Ψ_{B_0} die dazugehörigen Koordinatenisomorphismen. Sei $h > 0$. Wir definieren die Abbildung

$$\Delta_h : \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (\Delta_h(f))(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

a)

Die Abbildung Δ_h ist linear.

Beweis. Seien $p_1, p_2 \in \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $\square$