Universität Potsdam
Institut für Mathematik

Sommersemester 2025
Dr. Florian Hanisch

Lineare Algebra II (Lehramt) – Übungsblatt 9

Abgabe bis Mittwoch, 18.06.2025, 24.00 Uhr

Bitte beachten Sie, dass die Abgabe nur elektronisch als pdf (z.B. getippt oder gescannt) im Moodle möglich ist, wobei Ihre Namen oben auf der ersten Seite der Datei stehen müssen.

1. Aufgabe Diagonalisierbarkeit (8+4=12 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

a) Bestimmen Sie für die Matrizen A und B

   i) die charakteristische Polynome und die Eigenwerte;

   ii) die Eigenräume und die geometrischen Vielfachheiten;

b) Geben Sie zu A bzw. B sofern möglich Eigenbasen an. Geben Sie - sofern möglich - Matrizen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ bzw. $T^{-1} \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{R})$ an, sodass SAS^{-1} bzw. TBT^{-1} diagonal sind. Sollten Basen bzw. Matrizen nicht existieren: Begründen Sie in max. 2 Sätzen, warum nicht!

Hinweis: Werfen Sie einen Blick auf Verfahren 1 (S.71). Mit der Determinantenformel für Blockmatrizen (Blatt 2) müssen Sie bei B nur sehr wenig rechnen!

2. Aufgabe Eigenwerte, -vektoren & -räume (4x3=12=10 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum, $\lambda, \mu \in K$ sowie $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Zeigen Sie:

a) φ ist genau dann injektiv, wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.

b) Ist φ bijektiv und λ ein Eigenwert von φ, so folgt $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist Eigenwert von φ^{-1}.

c) Gilt $p \in K[X]$ und $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$, so folgt $v \in \mathrm{Eig}(\tilde{p}(A), \tilde{p}(\lambda))$.

d) Sei $v_\lambda, v_\mu \in K^n$ Eigenvektoren von A zu Eigenwerte λ bzw. μ. Wann ist $v_\lambda + v_\mu$ wieder ein Eigenvektor von A (Begründung angeben) ?

3. Aufgabe Online Aufgabe in Moodle - keine pdf-Abgabe! (12 Punkte)