Aufgabe 1

a)

Sei $X \in \mathbb{K}^{n-1}$, $\hat{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $h > 0$. Wir definieren den schiefen Zylinder über X durch

$$\hat{Z}_{\hat{b},h}(X) := \left\{ \left(\hat{x} + \frac{s}{h}\hat{b}, s \right) \;\middle|\; \hat{x} \in X,\ s \in [0,h] \right\}.$$

Es ist $\mathrm{vol}_n \left(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X) \right) = h \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(X)$.

Beweis. Der verallgemeinerte Zylinder über X ist definiert durch

$$Z_h(X) := X \times [0,h] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dann die affine Abbildung

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad G \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} + \frac{s}{h}\hat{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist affin, da sie die Form

$$F \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} + b \quad \text{mit } b = 0$$

hat. Die Matrixdarstellung lautet dann:

$$A := \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h}\hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denn es gilt:

$$G(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h}\hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} + \frac{s}{h}\hat{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\mathrm{vol}_n \left(Z_{\hat{b},h}(X) \right) = h \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(X).$$

Wir berechnen die Determinante der Matrix A:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h}\hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_{n-1}) \cdot 1 - 0 \cdot \frac{1}{h}\hat{b} = 1.$$

Da G eine affine Abbildung mit $\det(G) = 1$ ist, bleibt das Volumen beim Übergang erhalten. Nach *Korollar 6.107* gilt daher wir:

$$\mathrm{vol}_n \left(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X) \right) = |\det(G)| \cdot \mathrm{vol}_n \left(Z_h(X) \right) = \mathrm{vol}_n \left(Z_h(X) \right) = h \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(X).$$

□

Aufgabe 2

a)

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und $s \in (0, \infty)$ sei die Abbildung

$$F_s : B_R(0) \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot x.$$

Für jedes $x \in B_R(0)$ gilt $\|x\| \leq R$, also folgt für $F_s(x) = s \cdot \mathbb{1}_n \cdot x = s \cdot x$, dass $\|s \cdot x\| = s \cdot \|x\| \leq s \cdot R$, und somit $F_s(x) \in B_{s \cdot R}(0)$. Da $\det(s \cdot \mathbb{1}_n) = s^n \neq 0$, ist F_s bijektiv. Also ist $F_s(B_R(0)) = B_{s \cdot R}(0)$ und es gilt:

$$\mathrm{vol}(B_{s \cdot R}(0)) \quad = \quad \mathrm{vol}((s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot B_R(0)) \quad = \quad |\det(s \cdot \mathbb{1}_n)| \cdot \mathrm{vol}(B_R(0)) \quad = \quad s^n \cdot \mathrm{vol}(B_R(0))$$

Sei nun $s = \frac{19}{20}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
n = 3: &\qquad \frac{\mathrm{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\mathrm{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0.86 \\
n = 10: &\qquad \frac{\mathrm{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\mathrm{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 0.60 \\
n = 25: &\qquad \frac{\mathrm{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\mathrm{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{25} \approx 0.28
\end{aligned}$$

b)

Wir bestimmen das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit einem Schalenanteil von über $\frac{999999}{1000000}$:

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{\mathrm{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\mathrm{vol}(B_R(0))} = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n \geq \frac{999999}{1000000} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{19}{20}\right)^n \leq \frac{1}{1000000} \\
\Leftrightarrow \quad & n \geq \log_{\frac{19}{20}}\left(\frac{1}{1000000}\right) \approx 269.34 \\
\Rightarrow \quad & n = \lceil 269.34 \rceil = 270.
\end{aligned}$$