Lineare Algebra II (LA) Übungsblatt 12

Erik Achilles, Alexandra Dittmar, Artur Szeczinowski

Juli 2025

Aufgabe 1

a)

Beweis. Für alle $v, w, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$
\begin{aligned}
v \times (w \times z) &= v \times \begin{pmatrix} w_2z_3 - w_3z_2 \\ w_3z_1 - w_1z_3 \\ w_1z_2 - w_2z_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_2(w_1z_2 - w_2z_1) - v_3(w_3z_1 - w_1z_3) \\ v_3(w_2z_3 - w_3z_2) - v_1(w_1z_2 - w_2z_1) \\ v_1(w_3z_1 - w_1z_3) - v_2(w_2z_3 - w_3z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_2w_1z_2 - v_2w_2z_1 - v_3w_3z_1 + v_3w_1z_3 \\ v_3w_2z_3 - v_3w_3z_2 - v_1w_1z_2 + v_1w_2z_1 \\ v_1w_3z_1 - v_1w_1z_3 - v_2w_2z_3 + v_2w_3z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1(v_2z_2 + v_3z_3) - z_1(v_2w_2 + v_3w_3) \\ w_2(v_3z_3 + v_1z_1) - z_2(v_3w_3 + v_1w_1) \\ w_3(v_1z_1 + v_2z_2) - z_3(v_1w_1 + v_2w_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1(v_2z_2 + v_3z_3 + v_1z_1 - v_1z_1) - z_1(v_2w_2 + v_3w_3 + v_1w_1 - v_1w_1) \\ w_2(v_3z_3 + v_1z_1 + v_2z_2 - v_2z_2) - z_2(v_3w_3 + v_1w_1 + v_2w_2 - v_2w_2) \\ w_3(v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 - v_3z_3) - z_3(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 - v_3w_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (w_1(v_2z_2 + v_3z_3 + v_1z_1) - w_1v_1z_1) - (z_1(v_2w_2 + v_3w_3 + v_1w_1) - z_1v_1w_1) \\ (w_2(v_3z_3 + v_1z_1 + v_2z_2) - w_2v_2z_2) - (z_2(v_3w_3 + v_1w_1 + v_2w_2) - z_2v_2w_2) \\ (w_3(v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3) - w_3v_3z_3) - (z_3(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) - z_3v_3w_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1(v_2z_2 + v_3z_3 + v_1z_1) - z_1(v_2w_2 + v_3w_3 + v_1w_1) \\ w_2(v_3z_3 + v_1z_1 + v_2z_2) - z_2(v_3w_3 + v_1w_1 + v_2w_2) \\ w_3(v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3) - z_3(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \end{pmatrix} \\
&= \langle v, z \rangle w - \langle v, w \rangle z
\end{aligned}
$$

□

b)

Sei $\xi := (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Die Abbildung $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \beta(v,w) := \langle v \times (\xi \times w), \xi\rangle$ ist eine symmetrische Bilinearform.

Beweis. Die Abbildung ist eine Verkettung von bilinearen Abbildung (Kreuzprodukt, Skalarprodukt) und ist daher ebenfalls bilinear. Wir zeigen nun Symmetrie. Dazu nutzen wir *a)* und die Symmetrie des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}\beta(v,w) = \langle v \times (\xi \times w), \xi\rangle &\overset{a)}{=} \langle \langle v,w\rangle \xi - \langle v,\xi\rangle w, \xi\rangle = \langle v,w\rangle\langle \xi,\xi\rangle - \langle v,\xi\rangle\langle w,\xi\rangle \\ = \langle w,v\rangle\langle \xi,\xi\rangle - \langle w,\xi\rangle\langle v,\xi\rangle &= \langle \langle w,v\rangle \xi - \langle w,\xi\rangle v, \xi\rangle \overset{a)}{=} \langle w \times (\xi \times v), \xi\rangle = \beta(w,v).\end{aligned}$$

□