Aufgabe 2

a)

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und $s \in (0, \infty)$ sei die Abbildung

$$F_s : B_R(0) \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot x.$$

Für jedes $x \in B_R(0)$ gilt $\|x\| \leq R$, also folgt für $F_s(x) = s \cdot \mathbb{1}_n \cdot x = s \cdot x$, dass $\|s \cdot x\| = s \cdot \|x\| \leq s \cdot R$, und somit $F_s(x) \in B_{s \cdot R}(0)$. Da $\det(s \cdot \mathbb{1}_n) = s^n \neq 0$, ist F_s bijektiv. Also ist $F_s(B_R(0)) = B_{s \cdot R}(0)$ und es gilt:

$$\operatorname{vol}(B_{s\cdot R}(0)) \quad = \quad \operatorname{vol}((s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot B_R(0)) \quad = \quad |\det(s \cdot \mathbb{1}_n)| \cdot \operatorname{vol}(B_R(0)) \quad = \quad s^n \cdot \operatorname{vol}(B_R(0))$$

Sei nun $s = \frac{19}{20}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
n = 3 : \quad & \frac{\operatorname{vol}(B_{s\cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0.86 \\
n = 10 : \quad & \frac{\operatorname{vol}(B_{s\cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 0.60 \\
n = 25 : \quad & \frac{\operatorname{vol}(B_{s\cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{25} \approx 0.28
\end{aligned}$$

b)

Wir bestimmen das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit einem Schalenanteil von über $\frac{999999}{1000000}$:

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{\operatorname{vol}(B_{s\cdot R}(0))}{\operatorname{vol}(B_R(0))} = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n \geq \frac{999999}{1000000} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{19}{20}\right)^n \leq \frac{1}{1000000} \\
\Leftrightarrow \quad & n \geq \log_{\frac{19}{20}}\left(\frac{1}{1000000}\right) \approx 269.34 \\
\Rightarrow \quad & n = \lceil 269.34 \rceil = 270.
\end{aligned}$$