

# Aufgabe 1

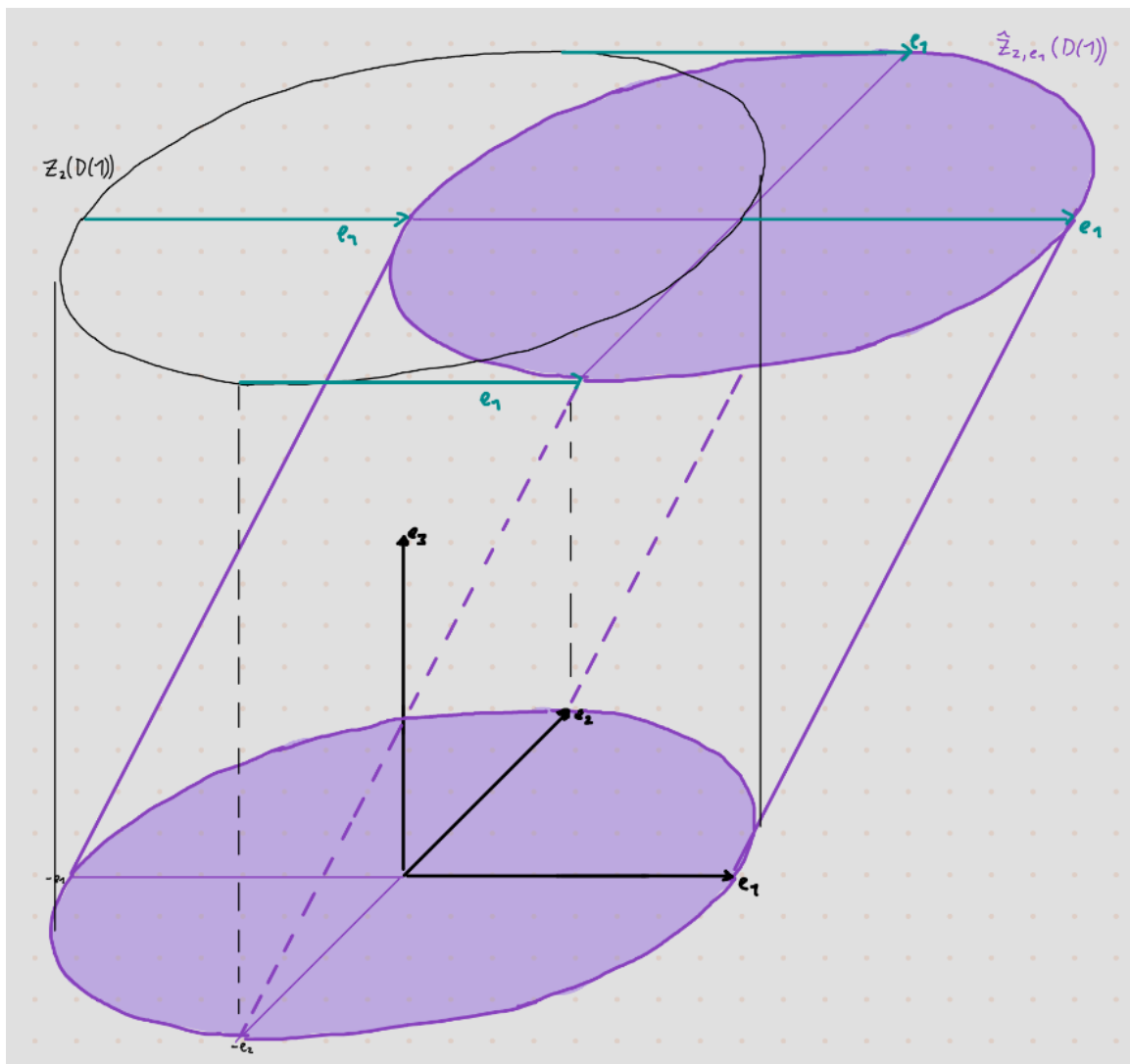
## b) Schiefer Zylinder

Sei  $X \in \mathbb{K}^{n-1}$ ,  $\hat{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$  und  $h > 0$ . Wir definieren den schiefen Zylinder über  $X$  durch

$$\hat{Z}_{\hat{b},h}(X) := \left\{ \left( \hat{x} + \frac{s}{h} \hat{b}, s \right) \mid \hat{x} \in X, s \in [0, h] \right\}.$$

### Beispielskizze schiefer Zylinder

Wir verschieben  $Z_2(D(1))$  um  $e_1$  und erhalten  $\hat{Z}_{2,e_1}(D(1))$ :



### Volumen des schiefen Zylinders

Es ist  $\text{vol}_n(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X)) = h \cdot \text{vol}_{n-1}(X)$ .

*Beweis.* Der verallgemeinerte Zylinder über  $X$  ist definiert durch

$$Z_h(X) := X \times [0, h] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dann die affine Abbildung

$$G : Z_h(X) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{x} + \frac{s}{h} \hat{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist affin, da sie die Form

$$G(x) = A \cdot x + b \quad \text{mit } b = 0 \quad \text{und } A := \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h} \hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hat und es gilt:

$$G(x) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h} \hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} + \frac{s}{h} \hat{b} \\ s \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\text{vol}_n(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X)) = h \cdot \text{vol}_{n-1}(X).$$

Wir berechnen die Determinante der Matrix  $A$ :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} I_{n-1} & \frac{1}{h} \hat{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_{n-1}) \cdot 1 - 0 \cdot \frac{1}{h} \hat{b} = 1.$$

Da  $G$  eine affine Abbildung mit  $\det(G) = 1$  ist, bleibt das Volumen beim Übergang erhalten. Nach *Korollar 6.107* gilt daher:

$$\text{vol}_n(\hat{Z}_{\hat{b},h}(X)) = |\det(G)| \cdot \text{vol}_n(Z_h(X)) = \text{vol}_n(Z_h(X)) = h \cdot \text{vol}_{n-1}(X). \quad \square$$

## Aufgabe 2

a)

Für ein festes  $n \in \mathbb{N}$  und  $s \in (0, \infty)$  sei die Abbildung

$$F_s : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot x.$$

Für jedes  $x \in B_R(0)$  gilt  $\|x\| \leq R$ , also folgt für  $F_s(x) = s \cdot \mathbb{1}_n \cdot x = s \cdot x$ , dass  $\|s \cdot x\| = s \cdot \|x\| \leq s \cdot R$ , und somit  $F_s(x) \in B_{s \cdot R}(0)$ . Da  $\det(s \cdot \mathbb{1}_n) = s^n \neq 0$ , ist  $F_s$  bijektiv. Also ist  $F_s(B_R(0)) = B_{s \cdot R}(0)$  und es gilt:

$$\text{vol}(B_{s \cdot R}(0)) = \text{vol}((s \cdot \mathbb{1}_n) \cdot B_R(0)) = |\det(s \cdot \mathbb{1}_n)| \cdot \text{vol}(B_R(0)) = s^n \cdot \text{vol}(B_R(0))$$

Sei nun  $s = \frac{19}{20}$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} n = 3 : \quad & \frac{\text{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\text{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0.86 \\ n = 10 : \quad & \frac{\text{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\text{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 0.60 \\ n = 25 : \quad & \frac{\text{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\text{vol}(B_R(0))} = s^n = \left(\frac{19}{20}\right)^{25} \approx 0.28 \end{aligned}$$

b)

Wir bestimmen das kleinste  $n \in \mathbb{N}$  mit einem Schalenanteil von über  $\frac{999999}{1000000}$ :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\text{vol}(B_{s \cdot R}(0))}{\text{vol}(B_R(0))} &= 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n \geq \frac{999999}{1000000} \\ \Leftrightarrow \quad \left(\frac{19}{20}\right)^n &\leq \frac{1}{1000000} \\ \Leftrightarrow \quad n &\geq \log_{\frac{19}{20}} \left(\frac{1}{1000000}\right) \approx 269.34 \\ \Rightarrow \quad n &= \lceil 269.34 \rceil = 270. \end{aligned}$$