Universität Potsdam
Institut für Mathematik

Sommersemester 2025
Dr. Florian Hanisch

Lineare Algebra II (Lehramt) – Übungsblatt 3

Abgabe bis Mittwoch, 30.04.2025, 24.00 Uhr

Bitte beachten Sie, dass die Abgabe nur elektronisch als pdf (z.B. getippt oder gescannt) im Moodle möglich ist, wobei Ihre Namen oben auf der ersten Seite der Datei stehen müssen.

1. Aufgabe Determinanten & etwas Geometrie (4+8=12 Punkte)

Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte mit $p \neq q$. Für $x \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt $\det(M) = 0$ genau dann, wenn der Zeilenvektor $(1, x_1, x_2)$ eine Linearkombination von $(1, p_1, p_2)$ und $(1, q_1, q_2)$ ist.

b) Für die eindeutige Gerade $G(p, q)$ durch p und q gilt: $G(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \det(M(x)) = 0\}$

2. Aufgabe Permutationen & Transpositionen (9+3=12 Punkte)

Wir betrachten die Permutation

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \in S_7.$$

a) Lesen Sie den Induktionsbeweis von Lemma 3.38 im Buch von C. Bär (dies entspricht Lemma 6.21 im Skript). Zerlegen Sie dann σ als Verkettung von Transpositionen, indem Sie *genau* dem dort benutzen rekursiven Verfahren folgen. Aus Ihrer Abgabe sollte (kurz & knapp) hervorgehen, wie Sie dem Verfahren folgen und Sie sollten das in der Präsenzkorrektur auch erläutern können.

b) Sei $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{1, -1\}$ die Vorzeichenabbildung und

$$\epsilon(\sigma, i, j) := \mathrm{sign}\left(\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}\right) \qquad \text{für } i, j \in \{1, \ldots, 7\} \text{ mit } i \neq j.$$

Berechnen Sie $\epsilon(\sigma, 2, 6)$, $\epsilon(\sigma, 6, 2)$ und $\epsilon(\sigma, 1, 7)$.

3. Aufgabe Online Aufgabe in Moodle - keine pdf-Abgabe! (12 Punkte)