# Aufgabe 1

## a)

Seien $v, w : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ stetig für jedes $s \in [0,1]$ sei $B(s) := (v(s), w(s))$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Dann sind $B(0) = (v(0), w(0))$ und $B(1) = (v(1), w(1))$ gleich orientiert.

*Beweis.* Die Funktionen $[v_1, v_2, w_1, w_2$ sind stetig. Also ist $\det(B_s) = v_1(s) \cdot w_2(s) - v_2(s) \cdot w_1(s)$, nach (*Analysis I Satz 5.6.*) ebenfalls stetig. Angenommen $B(0)$ und $B(1)$ wären verschieden orientiert. Falls $\det(B(0)) > 0$, folgt dann $\det(B(1)) < 0$ und falls $\det(B(0)) < 0$, folgt $\det(B(1)) > 0$. Also wäre $M := \sup(det(B([0,1]))) > 0$ und $m := \inf(det(B([0,1]))) < 0$ Nach Zwischenwewertsatz (*5.9.*) gibt es zu $0 \in [m, M]$ ein $s_0$ mit $(det(B(s_0))) = 0$. Jedoch wäre dann $B(s_0)$ nicht l.u. und daher keine Basis. Dies ist ein Wiederspruch also ist die Aussage bewiesen. $\square$

## b)

Für die stetigen Abbildungen

$$V : [0,1] \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W : [0,1] \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi x) \\ \cos(\pi x) \end{pmatrix}$$

gilt

i) $L(V(0), W(0)) = L(V(1), W(1)) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 0\} =: E$

ii) Für alle $s \in [0,1]$ sind $V(s), W(s)$ l.u.

iii) Die Basen $(V(0), W(0))$ und $(V(1), W(1))$ von $E$ sind verschieden orientiert.

*Beweis.* Da sin, cos und konstante Funktionen stetig sind, sind auch $V$ und $W$ stetig, wir überprüfen die drei Bedingungen. Zu *i)*: Es ist

$$L(V(0), W(0)) = L\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(0) \\ \cos(0) \end{pmatrix} \right) = L\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 0\} = E$$

und

$$L(V(1), W(1)) = L\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(1) \\ \cos(1) \end{pmatrix} \right) = L\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 0\} = E.$$

Zu *ii)*: Da für alle $s \in [0,1]$ gilt $V(s)_1 = 1$ und $W(s)_1 = 0$, gibt es nur die triviale Linearkombination der Null. D.h. $V(s), W(s)$ sind linear unabhängig.
Zu *iii)*: Da $(V(0), W(0)) = (V(1), -W(1))$ sind die Basen nach *Korollar 6.52 b)* verschieden orientiert. $\square$

# Aufgabe 2

Sei $(e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $v \in \mathbb{R}^3 \setminus L(e_1, e_3)$. Wir betrachten für alle $x \in \mathbb{R}^3$ die parallelen Geraden $G(x) := x + L(v)$. Weiter sei $E := -e_2 + L(e_1, e_3)$.

## a)

Die Menge $G(x) \cap E$ besteht aus genau einem Element $p(x)$ und die Abbildung $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto p(x)$ ist affin.

*Beweis.* Es ist

$$G(x) = x + L(v) = \{x + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x - \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und

$$E = -e_2 + L(e_1, e_3) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} : y = -e_2 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_3\}.$$

Für den Schnitt gilt also:

$$\begin{aligned} G(x) \cap E &= \{x - \lambda v \mid \exists \lambda, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} : x - \lambda v = -e_2 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_3\} \\ &= \{x - \lambda v \mid \exists \lambda, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} : x + e_2 = \lambda v + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_3\} \end{aligned}$$

Da $v \notin L(e_1, e_3)$ sind $e_1, e_3, v$ linear unabhängig. In der Linearkombination $x + e_2 = \lambda v + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_3$ sind daher $\lambda, \mu_1, \mu_2$ eindeutig bestimmt. Insbesondere ist dann $x - \lambda v$ eindeutig und $G(x) \cap E$ besteht nur aus einem Element.

Da $e_1, e_3, v$ linear unabhängig sind, ist $B_E := (e_1, e_3, v)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir zeigen nun die Affinität der Abbildung $p$ in dem wir zeigen, dass die Abbildungsvorschrift:

$$p(x) := \left((T_{B_0}^{B_E}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (T_{B_0}^{B_E})^{-1}\right) \cdot x - \left(v \cdot \tfrac{-1}{v_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v_1}{v_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_3}{v_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot x - \begin{pmatrix} -\frac{v_1}{v_2} \\ -1 \\ -\frac{v_3}{v_2} \end{pmatrix}$$

die gegebene Voraussetzung erfüllt, also $p(x) \in G(x) \cap E$. Es gilt:

$$p(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{v_1}{v_2} x_2 - \frac{v_1}{v_2} \\ -1 \\ x_3 - \frac{v_3}{v_2} x_2 - \frac{v_3}{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2 - 1}{v_2} v_1 \\ x_2 - \frac{x_2 - 1}{v_2} v_2 \\ x_3 - \frac{x_2 - 1}{v_2} v_3 \end{pmatrix} = x - \left(\frac{x_2 - 1}{v_2}\right) \cdot v \quad \in G(x)$$

und

$$p(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{v_1}{v_2} x_2 - \frac{v_1}{v_2} \\ -1 \\ x_3 - \frac{v_3}{v_2} x_2 - \frac{v_3}{v_2} \end{pmatrix} = -e_2 + \left(x_1 - \frac{v_1}{v_2} x_2 - \frac{v_1}{v_2}\right) \cdot e_1 + \left(x_3 - \frac{v_3}{v_2} x_2 - \frac{v_3}{v_2}\right) \cdot e_3 \quad \in E$$

Also lässt sich $p(x)$ in der Form $A \cdot x + b$ schreiben. $\square$

**b)**

**c)**

Sind $G, G' \subset \mathbb{R}^3$ parallele Geraden und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ affin, so sind $F(G)$ und $F(G')$ Punkte oder parallele Geraden

*Beweis.* Sei $U$ der UVR zu $G, G'$. Für $g \in G$ und $g' \in G'$ gilt nach Definition $G = U + g$ und $G' = U + g'$. Außerdem ist $F(x) = \varphi(x) + b$ mit der linearen Abbildung $\varphi$ und $b \in \mathbb{R}$. Also ist

$$F(G) \quad = \quad F(U+g) \quad = \quad \varphi(U+g)+b \quad = \quad \varphi(U)+\varphi(g)+b$$

und

$$F(G') \quad = \quad F(U+g') \quad = \quad \varphi(U+g')+b' \quad = \quad \varphi(U)+\varphi(g')+b'.$$

Aufgrund der Linearität von $\varphi$ ist $\varphi(U)$ wieder ein UVR. Außerdem sind $(\varphi(g)+b), (\varphi(g)+b) \in \mathbb{R}$. Also sind alle Bedingungen für Parallelität erfüllt. □