Aufgabe 2

a)

Wir betrachten die Permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_7.$$

"$n = 7$" Es ist $\sigma(7) = 6$ also "Fall 2". Sei τ_1 die Transposition, die 6 und 7 vertauscht:

$$\tau_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für $(\tau_1 \circ \sigma)$ gilt nun "Fall 1". Wir wenden das Verfahren also erneut auf den Rest σ' an, wobei

$$\sigma' := (\tau_1 \circ \sigma)|_{X_6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_6.$$

"$n = 6$" Es ist $\sigma'(6) = 2$ also "Fall 2". Sei τ_2' die Transposition, die 2 und 6 vertauscht:

$$\tau_2' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $(\tau_2' \circ \sigma')$ gilt nun "Fall 1". Wir wenden das Verfahren erneut auf den Rest σ'' an, wobei

$$\sigma'' := (\tau_2' \circ \sigma')|_{X_5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

"$n = 5$" Es ist $\sigma''(5) = 5$. Für σ'' gilt daher "Fall 1". Wir wenden das Verfahren erneut auf σ''' an, wobei

$$\sigma''' := \sigma''|_{X_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

"$n = 4$" Es ist $\sigma'''(4) = 2$ also "Fall 2". Sei τ_3''' die Transposition, die 2 und 4 vertauscht:

$$\tau_3''' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $(\tau_3''' \circ \sigma''')$ gilt nun "Fall 1". Wir wenden das Verfahren erneut auf den Rest σ'''' an, wobei

$$\sigma'''' := (\tau_3''' \circ \sigma''')|_{X_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

"$n = 3$" Es ist $\sigma''''(3) = 1$ also "Fall 2". Sei τ_4'''' die Transposition, die 1 und 3 vertauscht:

$$\tau_4'''' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $(\tau_4'''' \circ \sigma'''')$ gilt nun "Fall 1". Wir wenden das Verfahren also erneut auf den Rest σ''''' an, wobei

$$\sigma''''' := (\tau_3'''' \circ \sigma'''')|_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

"$n = 2$" Es ist $\sigma'''''(2) = 2$. Für σ''''' gilt daher "Fall 1". Wir erhalten den Rest $\sigma'''''' := \sigma'''''|_{X_1} = id \in S_1$ und haben so den "Induktionsanfang" erreicht.

Wir definieren eine "Ergänzungsabbildung"

$$\varphi : S_n \to S_7,\ \tau' \mapsto \tau \qquad \text{mit} \qquad \tau(k) := \begin{cases} \tau'(k) & \text{für } k \in X_n \\ k & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nun können wir alle Transpositionen ergänzen:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \\ \tau_2 := \varphi(\tau_2') &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \\ \tau_3 := \varphi(\tau_3''') &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \\ \tau_4 := \varphi(\tau_4'''') &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun ist $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_4$.

b)

Wir berechnen $\epsilon(\sigma, 2, 6)$:

$$\epsilon(\sigma, 2, 6) = \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(6) - \sigma(2)}{6 - 2}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{2-4}{6-2}\right) = \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Wir berechnen $\epsilon(\sigma, 6, 2)$:

$$\epsilon(\sigma, 6, 2) = \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 6}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{4-2}{2-6}\right) = \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Wir berechnen $\epsilon(\sigma, 1, 7)$:

$$\epsilon(\sigma, 1, 7) = \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma(7) - \sigma(1)}{7 - 1}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{6-3}{7-1}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$