Aufgabe 2

Wir definieren $g_j \in \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch

$$g_0(x) := 1, \qquad g_1(x) := x - 1, \qquad g_2(x) := x^2, \qquad g_3(x) := x^3 - x^2.$$

Weiter definieren wir die Basen $B_0 := (f_0, f_1, f_2, f_3)$ und $B := (g_0, g_1, g_2, g_3)$ von $\mathrm{Poly}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und Ψ_B, Ψ_{B_0} die dazugehörigen Koordinatenisomorphismen. Sei $h > 0$. Wir definieren die Abbildung

$$\Delta_h : \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad (\Delta_h(f))(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

a)

Die Abbildung Δ_h ist linear.

Beweis. Seien $p_1, p_2 \in \mathrm{Poly}^3(\mathbb{R},\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für alle x:

$$\begin{aligned}(\Delta_h(\lambda(p_1 + p_2)))(x) &= \frac{(\lambda(p_1 + p_2))(x+h) - (\lambda(p_1 + p_2))(x)}{h} \\ &= \lambda\left(\frac{p_1(x+h) - p_1(x)}{h} + \frac{p_2(x+h) - p_2(x)}{h}\right) \\ &= \lambda\left((\Delta_h(p_1))(x) + (\Delta_h(p_2))(x)\right)\end{aligned}$$

denn $\mathrm{Poly}^3(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\square$

b)

Wir berechnen

$$\Psi_{B_0}((1,1,1,1)^t) = 1f_0 + 1f_1 + 1f_2 + 1f_3 = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Wir berechnen

$$\Psi_B((1,1,1,1)^t) = 1g_0 + 1g_1 + 1g_2 + 1g_3 = x^3 + x.$$

Wir berechnen

$$\Psi_{B_0}^{-1}(f_0 - f_1 - f_2 + f_3) = \Psi_{B_0}^{-1}(x^3 - x^2 - x + 1) = \Psi_{B_0}^{-1}(g_3 + g_1 + 2g_0) = (2,1,0,1)^t.$$