

## Aufgabe 1

Wir betrachten die folgenden Matrizen aus  $\text{Mat}(3, \mathbb{R})$ :

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

**a)**

i)

ii)

**b)**

## Aufgabe 2

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\lambda, \mu \in K$  sowie  $\varphi \in \text{End}(V)$  und  $A \in \text{Mat}(n, K)$ .

**a)**

Die Abbildung  $\varphi$  ist genau dann injektiv, wenn 0 kein Eigenwert von  $\varphi$  ist.

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ ist injektiv} \\ \Leftrightarrow & \ker(\varphi) = \ker(\varphi - 0 \cdot \text{id}_V) = \text{Eig}(\varphi, 0) \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi \end{aligned}$$

□

**b)**

Ist  $\varphi$  bijektiv und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\varphi$ , so folgt  $\lambda \neq 0$  und  $\lambda^{-1}$  ist Eigenwert von  $\varphi^{-1}$ .

*Beweis.* Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\varphi$  und  $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda)$  d.h.  $\varphi(v) = \lambda v$  und insbesondere  $\varphi^{-1}(\lambda v) = v$ . Daraus folgt

$$\varphi(\lambda^{-1}v) = \lambda^{-1}\varphi(v) = \lambda^{-1}\varphi(\varphi^{-1}(\lambda v)) = v.$$

Das ist äquivalent zu  $\varphi^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$ . Also ist  $\lambda^{-1}$  Eigenwert von  $\varphi^{-1}$ .

□

**c)**

Gilt  $p \in K[X]$  und  $v \in \text{Eig}(A, \lambda)$ , so folgt  $v \in \text{Eig}(\tilde{p}(A), \tilde{p}(\lambda))$ .

*Beweis.* Sei  $p \in K[X]$  und  $v \in \text{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda \mathbb{1}_3)$ , d.h.

$$(A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v = 0 \quad \text{also auch} \quad \tilde{p}((A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v) = \tilde{p}(0) = 0.$$

Aufgrund von Lemma 7.25 folgt

$$((\tilde{p}(A) - \tilde{p}(\lambda) \mathbb{1}_3) \cdot \tilde{p}(v)) = \tilde{p}((A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v) = 0.$$

Also ist  $\tilde{p}(v) \in \text{Eig}(\tilde{p}(A), \tilde{p}(\lambda))$  und somit auch  $(A - \lambda \mathbb{1}_3) \cdot v = 0$ , da  $v$  und  $\tilde{p}(v)$  l.a. sind.

□

**d)**

Seien  $v_\lambda, v_\mu \in K^n$  Eigenvektoren von  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda, \mu$ . Dann ist  $v_\lambda + v_\mu$  wieder ein Eigenvektor, wenn \_\_\_\_\_

*Beweis.*

□