Aufgabe 1

a)

Für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z})$ gilt:

$$A \text{ ist invertierbar und es gilt } A^{-1} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \det(A) \in \{1, -1\}.$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z})$ und gelte $A^{-1} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z})$. Da alle Matrixeinträge ganzzahlig sind, und nach Spaltenentwicklungssatz von Laplace sich die Determinante als Summe von Produkten der Einträge darstellen lässt, ist auch $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Außerdem ist

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) \quad = \quad \det(A \cdot A^{-1}) \quad = \quad \det(\mathbb{1}_3) \quad = \quad 1.$$

Also sind $\det(A)$ und $\det(A^{-1})$ ganzzahlige Teiler der 1 und somit $\det(A), \det(A^{-1}) \in \{1, -1\}$.

"$\Leftarrow$" Sei $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z})$ und gelte $\det(A) \in \{1, -1\}$. Nach *Satz 6.7* ist A invertierbar. Für die Inverse gilt zudem:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot B = \pm B$$

wenn B durch $b_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji}^{\mathrm{Str}})$ gegeben ist. Somit ist jedes $a_{ij} = \pm b_{ij}$ durch ein Produkt ganzer Zahlen gegeben und somit auch ganzzahlig: $\det(A^{-1}) \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z})$. □

b)

$\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}) := \{A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z}) | \det(A) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$

Beweis. Für ein beliebiges $A \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ also $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z}) \subset \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ mit $\det(A) = 1 \neq 0$ folgt direkt $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$. Also ist $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.
Nun zeigen wir die 3 Eigenschaften des UVR separat.

1. Es gilt $\det(\mathbb{1}_n) = 1$, also ist $\mathbb{1}_n \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$.

2. Seien $A, B \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$, so gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$, also ist $A \cdot B \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$.

3. Sei $A \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$, also $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z})$ und $\det(A) = 1$. Wie in *a)* gezeigt wurde, gibt es ein Inverses $A^{-1} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Z})$ mit

$$\det(A^{-1}) \quad = \quad \det(A^{-1}) \cdot 1 \quad = \quad \det(A^{-1}) \cdot \det(A) \quad = \quad 1$$

Also ist $A^{-1} \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$. □

c)

Wir bestimmen zunächst die Determinante von M mit der Regel von Sarrus:

$$\det(M) = (b \cdot 3 \cdot c) + (0 \cdot 1 \cdot 2) + (1 \cdot 0 \cdot 2) - (2 \cdot 3 \cdot 1) - (2 \cdot 1 \cdot b) - (c \cdot 0 \cdot 0) = 3bc - 6 - 2b = 1.$$

Also ist $3bc - 6 - 2b = 1$, daraus folgt $b \cdot (3c - 2) = 7$. Daher kann b nur Teiler von 7 sein. Wir probieren systematisch:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } b = 1: & 3c - 2 = 7 & \Rightarrow & c = 3 \\
\text{für } b = -1: & 3c - 2 = -7 & \Rightarrow & c = -\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z} \\
\text{für } b = 7: & 3c - 2 = 1 & \Rightarrow & c = 1 \\
\text{für } b = -7: & 3c - 2 = -1 & \Rightarrow & c = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}
\end{array}$$

Also ist $(b, c) \in \{(1, 3), (7, 1)\}$.

Aufgabe 2

a)

Die Basen B und B_0 sind gleich orientiert genau dann, wenn $\det(B) > 0$

Beweis. Die Basen sind nach Definition genau dann gleich orientiert, wenn $\det(T_{B_0}^B) > 0$. Wie in *Bemerkung 5.109* gezeigt wurde, "*erhalten wir $T_{B_0}^B$ einfach durch Nebeneinanderschreiben der Spaltenvektoren in B*", also $T_{B_0}^B = B$. □

b)

Wir betrachten die Basen $B' := (b_1, b_2, b_3)$ und $B'' := (b_5, b_4, b_1)$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}, \quad b_5 := \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wir bestimmen nun die Determinante der Basen mit der Regel von Sarrus:

$$\det(B') = (1 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot 3) + (0 \cdot 2 \cdot 3) - (3 \cdot 1 \cdot 0) - (0 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 1) = 2,$$

$$\det(B'') = (0 \cdot 4 \cdot 3) + (2 \cdot 2 \cdot 4) + (1 \cdot 2 \cdot 4) - (4 \cdot 4 \cdot 1) - (4 \cdot 2 \cdot 0) - (3 \cdot 2 \cdot 2) = -4.$$

Da $\operatorname{sign}(\det(B')) \neq \operatorname{sign}(\det(B''))$, sind B' und B'' verschieden orientiert.

c)

Sei $\sigma \in S_n$. Dann sind die Basen $B := (b_1, \dots, b_n)$ und $B(\sigma) := (b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)})$ genau dann gleich orientiert wenn $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.

Beweis. Es gilt $B(\sigma) = T_{B(\sigma)}^B \cdot B$, Wobei sich $T_{B(\sigma)}^B = (t_{ij})$ folgendermaßen ergibt:

$$b_j \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} t_{ij} b_{\sigma(i)} \qquad \text{also} \qquad t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wir bestimmen die Determinante mit der Leibnizformel:

$$\det(T_{B(\sigma)}^B) = \sum_{\varsigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\varsigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} t_{i,\varsigma(i)},$$

wobei für alle Summanden ungleich null gilt

$$\operatorname{sgn}(\varsigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} t_{i,\varsigma(i)} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} : t_{i,\varsigma(i)} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varsigma = \sigma.$$

Also ist

$$\det(T_{B^{(\sigma)}}^B) \quad = \quad \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} t_{i,\sigma(i)} \quad = \quad \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} 1 \quad = \quad \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Das bedeutet:

$$B \text{ und } B^{(\sigma)} \text{ sind gleich orientiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det(T_{B^{(\sigma)}}^B) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = 1.$$

□