1 Wellen

Die **Wellenfunktion** ist gegeben durch $\xi = \xi(x,t) = f(x \pm vt)$. Wobei "+" Verschiebung nach <u>links</u> und "−" nach <u>rechts</u>.
v ist die **Phasengeschwindigkeit**, welche die Geschwindigkeit einer Welle angibt, mit der sich eine vorgegebene Phase bewegt.

Die **Harmonische Wellenfunktion** ist gegeben durch

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(k(x \pm vt)) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t)}$$

wobei

- k: **Wellenzahl** resp. **Wellenvektor** (Anzahl Wellen pro Längeneinheit) mit $[k] = \frac{1}{m}$ oder $\frac{\text{rad}}{m}$
- ε_0: **Amplitude** mit $[\xi_0] = m$
- λ: **Wellenlänge** mit $[\lambda] = m$
- ω: **Frequenz** in $\frac{\text{rad}}{s}$ oder $\frac{1}{s}$

Zusammenhänge:

- Frequenz: $\omega = kv$ und $2\pi f = \omega$
- Wellenvektor: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

Die **Wellengleichung** in einer Dimension lautet:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Wir unterscheiden zwei Arten von Wellen:

- **Transversale Welle**: $\xi(x,t) = Af(x - vt)\hat{z}$
  Auslenkung senkrecht zur Propagationsrichtung.
  Bsp: (elastische Seilwelle) $v = \pm\sqrt{\frac{S}{\mu}}$ mit $S = \frac{F}{A}$ = Zugspannung und μ = Dichte (Masse pro Volumenelement)
- **Longitudale Welle**: $\xi(x,t) = Af(x - vt)\hat{x}$
  Auslenkung parallel zur Propagationsrichtung.
  Bsp: (Federkette oder Welle im Festkörper) $v = \pm\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ mit $E = \frac{F}{A} \cdot \frac{l}{\Delta l} = \frac{\sigma}{\varepsilon_l}$ Elastizitätsmodul und $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{A\ dz}$ = Dichte

In einer **ebenen Welle** ist die Phase an jedem Ort senkrecht zur Ausbreitungsrichtung identisch: $\xi(x,y,z,t) = Af(kz - \omega t)$

Polarisation von $\vec{A}e^{i(kz-\omega t)}$:

- **linear**: Welle schwingt in Ebene
- **eliptisch**: Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen mit Phasenunterschied
- **zirkulär polarisiert**: Spezialfall der eliptischen Welle mit Phasenunterschied $\Delta\delta = \frac{\pi}{2}$

Wellengleichung in 3D: Für $\xi := \vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \Delta\xi = 0$$

Wellengleichung für Kugelwellen:
Für $\xi := \vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\xi$$

kinetische Energiedichte:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}\right)^2$$

elastische Energiedichte:

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial x}\right)^2$$

Gesammtenergie:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{dE_{el}}{dV} + \frac{dT}{dV} = \rho v^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

konkret für Welle $\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ mit Phasengeschw. $v = \frac{\omega}{k}$

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 k^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) = \rho\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Wir definieren die **mittlere Energiedichte** als:

$$\left\langle\frac{dW}{dV}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dW}{dV}(x,t)dt = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

Die **Energieflussdichte** (/der **Poynting-Vektor**) S ist diejenige Energie, welche pro Zeit durch ein zum Fluss orthogonalen Flächenelement steht.

$$\vec{S} = \frac{d^2W}{da \cdot dt}\cdot\frac{d\vec{a}}{|d\vec{a}|} \quad \text{mit} \quad [S] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$$

Die **Intensität** ist der Betrag von S: $I = |S|$ und wird auch als **Energiestrom** bezeichnet. Die **mittlere Intensität** ist:

$$\langle I\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v = \frac{1}{2}\rho\frac{\omega^3}{k}A^2 = \frac{P}{A} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Oberfläche}}$$

Mittlerer Energiestrom der durch die gesammte Kugeloberfläche im Abstand r hindurchtretenden Welle:

$$\dot{W} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(\frac{A_0}{r}\right)^2 \cdot v \cdot 4\pi r^2$$

Superpositionsprinzip: Summe zweier Wellen ist wieder eine Welle. Hilfreiche Trigonometrische Additionstheoreme:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\cdot\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cdot\cos(y) \mp \sin(x)\cdot\sin(y)$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x)\cdot\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$
$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$
$$\sin(x)\cdot\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Für zwei Wellenfunktionen ξ_1, ξ_2 heisst das:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\sin(kx_1 - \omega t) + A\sin(kx_2 - \omega t + \delta)$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)\sin\left(kx_1 - \omega t + \frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)$$

Dabei beschreibt der Kosinus-Term die Amplitude und der Sinus-Term eine harmonische Welle. Es gibt zwei Arten:

- **konstruktive Interferenz**: neue Phase ganzzahliges Vielfaches von π: $\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) = nx$
- **destruktive Interferenz**: neue Phase halbzahliges Vielfaches von π: $\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

Reflexion und Transmission

- **einlaufende Welle**: $\xi_A(x,t) = Ae^{i(k_1 x - \omega t)}$
- **reflektierte Welle**: $\xi_R(x,t) = Re^{i(-k_1 x - \omega t + \delta_R)}$
- **transmittierte Welle**: $\xi_T(x,t) = Te^{i(k_2 x - \omega t + \delta_T)}$

$$R = \pm\frac{1-\alpha}{1+\alpha}A \quad , \quad T = \frac{2A}{1+\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{S_1\rho_2}{S_2\rho_1}}$$

- $\alpha = 1$: vollständige Transmission, $R = 0$ und $T = A$.
- $\alpha > 1$: $R > 0$, hartes Medium, vollständige reflexion mit einem **Phasensprung** $\pi \Rightarrow R = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}A$ und $T = \frac{2A}{1+\alpha}$
- $\alpha < 1$: $R > 0$, Grenzfall $\alpha = 0$: loses Seil,vollständige reflexion ohne Phasensprung $\Rightarrow R = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}A$ und $T = \frac{2A}{1+\alpha}$

Stehende Welle:

	fest eingespannt	einseitig eingespannt
Anfangsbed.	$u(x=0) = u(x=L) = 0$	$u(x=0) = 0,\ u(x=L)$ $B = u_0$
	$\rightarrow A = 0, kl = n\pi$	$\rightarrow A = 0, kl = \frac{2n+1}{2}\pi$
Wellenzahl	$k_n = \frac{n\pi}{1}$	$k_n = \frac{2n+1}{2}\pi$
Wellenlänge	$\lambda_n = \frac{2l}{n}$	$\lambda_n = \frac{4l}{2n+1}$
Eigenfunktion	$u_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\tau}x\right)$	$u_n(x) = B_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\tau x\right)$
Eigenfrequenz	$\omega_n = \frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$	$\omega_n = \frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{\frac{S}{\rho}}$
Grundfrequenz	$\omega_1 = \tau\sqrt{\frac{S}{\rho}}$	$\omega_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$
Harmonische Oberwellen	$\omega_n = n\omega_1$	$\omega_n = (2n+1)\omega_0$

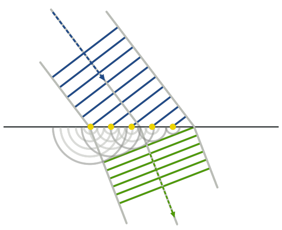
Superposition von

$$\xi_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \text{ und } \xi_2(x,t) = A\cos(-kx - \omega t + \delta_R)$$

$$\text{ergibt:} \quad \xi(x,t) = 2A\cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right)$$

- **Reflexion am harten Medium**: ($\alpha >> 1$, $\delta_R = \pi$)
$$\xi(x,t) = 2A\sin(kz)\sin(\omega t)$$
- **reflexion am weichen Medium**: ($\alpha < 1$, $\delta_R = 0$)
$$\xi(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

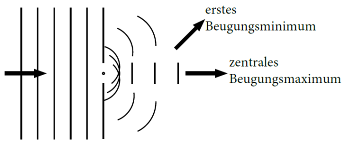
Prinzip von Huygens: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer neuen Welle, der sogenannten Elementarwelle, betrachtet werden.

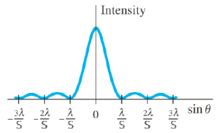


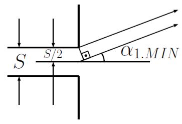
Orte der Maximalen Verstärkung: $\Delta\varphi = n2\pi \stackrel{!}{=} k\delta\sin(\alpha)$ mit δ den Abständen zwischen den Löchern.

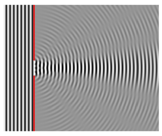
Nullstellen der Intensität: Nullstellen: $\frac{k\cdot d}{2}\sin(\alpha) \stackrel{!}{=} n\cdot\pi$
Orte NST: $\sin(\alpha_{NST}) = n\frac{\lambda}{d}$ mit d = Gesammtlänge der Wand, α = Einfallswinkel der Wellenfront.

Beugung ist die Abweichung vom gradlinigen Strahlenverlauf an Grenzflächen oder Öffnungen. Sie ist dann wichtig, wenn die Grösse der Öffnung etwa von der Grössenordnung der Wellenlänge ist.









Für destruktive Interferenz am ersten Beugungsminimum gilt: $\frac{S}{2}\sin(\alpha_{1,\min}) = \frac{\lambda}{2} \longrightarrow \sin(\alpha_{1,\min}) = \frac{\lambda}{S}$

Der Reflexionsgesetz Einfallender Lichtstrahl, reflektierter Lichtstrahl und Einfallslot (Oberflächennormale im Auftreffpunkt) liegen in einer Ebene. Einfallswinkel α_1 und Reflexionswinkel α_2 - beide zum Einfallslot hin gemessen - sind gleich.

Das Brechungsgesetz / Snellius'sches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n_1}\frac{n_2}{v_{\text{Vakuum}}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

mit n = Brechungsindex.

Akustische Linsen: Schallgeschw. in einem Gas: $v = \sqrt{\kappa\frac{RT}{M}}$ dabei sind $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$, R die allgemeine Gaskonstante und M die Molekularmasse des Gases.

Dopplereffekt

- Ruhende Quelle, bewegter Beobachter:
  - Beobachter rennt von Quelle weg
  $$\nu_B = \nu_Q\left(1 - \frac{v_B}{\lambda_{\text{emit}}\nu_Q}\right)$$
  - Beobachter rennt auf Quelle zu
  $$\nu_B = \nu_Q\left(1 + \frac{v_B}{\lambda_{\text{emit}}\nu_Q}\right)$$
- Ruhender Beobachter, bewegte Quelle:
  - Quelle entfernt sich vom Beobachter
  $$\nu'_B = \nu'_Q\left(1 - \frac{v_Q}{\lambda_{\text{emit}}\nu_Q}\right)^{-1}$$
  - Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu
  $$\nu'_B = \nu'_Q\left(1 + \frac{v_Q}{\lambda_{\text{emit}}\nu_Q}\right)^{-1}$$

Schockwelle Eine Schockwelle breitet sich im **Mach'schen** Kegel aus. Es gilt: $\vartheta = \arcsin\left(\frac{\lambda\nu}{v_Q}\right)$ Das Verhältnis $\frac{v_Q}{\lambda\nu}$ wird als **Mach'sche Zahl** bezeichnet.

2 Elektrostatik

Für den **Strom** I, den Zeitintervall Δt und der **geflossenen Ladung** ΔQ gilt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad , \quad \Delta Q = I \cdot \Delta t$$

Coulombkraft: Q_1 wirkt auf Q_0:

$$\vec{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0 Q_1}{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)^2}\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}$$

Energie und Ladungsverteilung

$$W = \int_{\infty}^{r_{21}} -F_{21}(r)\cdot ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}}$$

Elektrisches Feld: $F = q \cdot E$
diskrete Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^2}\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

kontinuierliche Ladungsverteilung: $(dq = \rho dV)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{(\vec{r} - \vec{r'})^2}\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}dV'$$

Elektrisches Potential
diskret:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

kontinuierliche:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}dV'$$

Potential eines Plattenkondensators: $\phi_{BA} = E\Delta z$

Gauss'sches Gesetz

$$d\Phi = E \cdot da \implies \Phi = \int_{\partial V} E \cdot da$$

$$E = -\nabla\phi \quad , \quad \text{div}E = \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Satz von Stokes

$$\text{rot}E = 0$$

Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Laplace-Gleichung (Spezialfall $\rho = 0$)

$$\Delta\phi = 0$$

Berechnungsmethoden: E-Felder

Rezept: Über das Potential

1. Ladungselement dq aufschreiben (zB: $dq = \lambda dx$ für eine Linienladung)
2. Position des Betrachtungspunkts $(\vec{r})$ und des Ladungselements $(\vec{r}')$ aufschreiben
3. $|\vec{r} - \vec{r}'|$ bestimmen
4. Alle oben bestimmten Grössen in die Gleichung für das Potential einsetzen
$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}dq$$
5. Integration mit geeigneten Grenzen (zB: Stabanfang bis Stabende)
6. Benutze
$$\vec{E} = -\nabla\Phi$$
um das elektrische Feld zu finden.

Rezept: Direkt über das elektrische Feld

1. Zeichne deine Anordnung in eine Skizze. Wähle dazu ein geeeignetes Koordinatensystem (2-dim, 3-dim). Betrachte die **Symmetrien** deiner Skizze.
2. Bestimme nun den Ortsvektor $\vec{r}$ deines Betrachtungspunkts.
3. Wähle nun ein infinitesimales Ladungselement dq auf deinem Ladungsträger. Beachte dabei, dass es sehr sinnvoll ist, wenn dessen Positionsvektor $\vec{r}'$ senkrecht auf $\vec{r}$ steht.
4. Benutze nun
$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
und setze alle deine bestimmten Argumente (dq, $\vec{r}$ und $\vec{r}'$) ein.
5. Berechne nun das Integral mit geeigneten Grenzen
$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

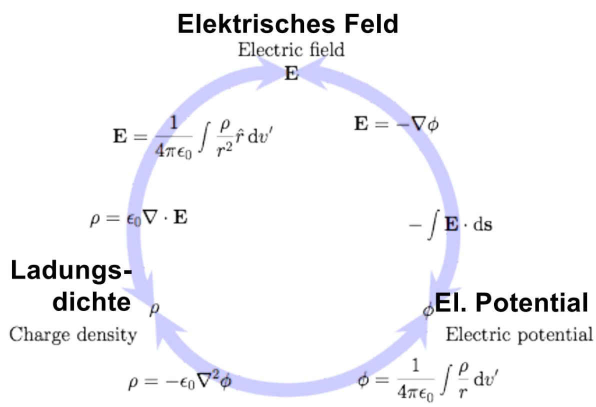
Rezept: Gauss'sches Gesetz
Als Alternative zum direkten Weg kann man oftmals Symmetrien ausnutzen. Es gilt für den Fluss (Integration über die Oberfläche):

$$\Phi_E = \int_A \vec{E}d\vec{A}$$

Gauss'sche Gesetz:

$$\int_A \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV$$

Wir benutzen dieses Verfahren, wenn folgende Fälle auftreten: Zylindrische oder sphärische Symmetrie, ∞-Ebenen



3 Elektrische Leiter

Leiter: Einzelnen Ladungen sind sehr mobil. Daher ist das elektrische Feld überall im Leiter Null. Die Ladungen passen sich also an. Des Weiteren verschwindet die Ladungsdichte überall im Inneren der Leiters.

Isolator: Es existieren keine freien Ladungen. Daher können wir das elektrische Feld und Potential berechnen.

Bedingungen an einen Leiter:

- Das elektrostatische Potential ist überall im Inneren des Leiters auf dessen Oberfläche konstant. Insbesondere ist die Oberfläche eine Äquipotentialfläche.
- Das elektrische Feld in der Nähe der Oberfläche verschwindet im Inneren und die Feldlinien stehen orthogonal auf die Oberfläche. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ mit σ = lokale Flächenladungsdichte auf der Oberfläche und $\vec{n}$ = Normalenvektor.
- Die Flächenladungsdichte σ ist abhängig von der Form des Leiters.
- Die Gesammtladung eines Leiters ist gegeben durch die Integration der Flächenladungsdichte über die Oberfläche
$$Q = \int_S \sigma da = \varepsilon_0 \int_S E da$$

Das allgemeine elektrostatische Problem
Wir betrachten einen Leiter im Vakuum, sodass die **Laplacegleichung** zu $\delta\phi = 0$ wird. Es gibt verschiedene Randbedingungen, die man betrachten kann:

1. **Dirichlet-Randbedingung**: Das Potential ϕ ist für alle Leiter definiert.
2. **Neumann-Randbedingung**: Die Ladung Q ist für alle Leiter definiert.
3. Eine Mischung der beiden.

Eindeutigkeitssatz: Falls für eine gegebene Menge an Randbedingungen eine Lösung des elektrostatischen Problems existiert, so ist diese eindeutig.

Influenz Verschiebung von Ladungen in einem Leiter durch eine externe Ladungsverteilung.

Faraday'sche Käfig

- **Ein leerer von einen Leiter umgebener Raum**: Wir wissen, dass das Potential auf der Leiteroberfläche konstant sein muss. Damit ist es konstant auf dem ganzen Hohlraum, weil er ja keine Ladung einschliesst. Das dabei entstehende elektrische Feld ist Null.
- **Eine von einem Leiter umgebene Ladung**: Man stelle sich vor, eine positive Punktladung Q sitze im Hohlraum eines Leiters. Wegen des Gauss'schen Gesetzes muss die Ladung der inneren Oberfläche des Leiters gerade $-Q$ sein (Damit das elektrische Feld im Inneren des Leiters wieder Null wird.) Die äussere Oberfläche des Leiters trägt dann ebenfalls wieder eine Ladung Q, damit die Gesammtladung des leiters verschwindet.
- **Allgemein**: Durch einen Leiter, der einen Hohlraum umschliesst, wird das Innere von allen äussseren Einflüssen abgeschirmt und die Umgebung wird von jeglicher Information über die Bewegung der Ladungen im Inneren abgeschnitten.

4 Kondensatoren

Kapazität C: $[C] = 1\text{F} = 1\frac{\text{C}}{\text{V}}$
Es gilt: $Q = C \cdot \phi$, wobei Q die Ladung ist, C die Kapazität und ϕ das Potential (oft auch U oder V).

Plattenkondensator:

Elektrisches Feld:
$$E_{\text{Plattenkondensator}} = \frac{V}{d}$$

Kapazität:
$$C_{\text{Plattenkondensator}} = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

Gespeicherte Energie:
$$dW = \phi dQ = \frac{Q}{C}dQ \Rightarrow W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

Ersatzkapazitäten:

- parallel: $C = \sum C_i$
- seriell: $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$

Bemerkung: Werden Kondensatoren einfach verbunden, ohne dass es eine Spannungsquelle gibt, so gelten die Formeln für die Parallelschaltung, da einer der Kondensatoren als Spannungsquelle fungiert, der andere als Kondensator.

5 Elektrische Ströme

Ein **Elektrischer Strom** entsteht, wenn sich eine Nettoladung in Bewegung befindet.

Stromstärke:
$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = nAvq$$
I bezeichnet die Ladung, welche pro Zeit durch einen Leiter fliesst.

Anzahl Ladungsträger:
$$\Delta N = nA\Delta x = nAv\Delta t$$
n bezeichnet Anzahldichte in $\frac{1}{m^3}$, A Oberfläche des Leiters, Δx dessen Länge. Weiter ist v die Driftgeschwindigkeit.

Stromrichtung

- Die *physikalische* Stromrichtung ist die Bewegungsrichtung der Elektronen.
- Die *technische / konventionelle* Stromrichtung ist diejenige der positiven Ladungsträger.

Stromdichte: $\vec{J} = nq\vec{v}$ Allgemeiner:

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \qquad \text{und} \qquad I_A = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Die Stromdichte gibt uns an, wie viel Strom pro Oberfläche durch den Leiter fliesst.

Ladugserhaltung:

$$I = \int_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

Kondinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Ohm'sches Gesetz:

- **mikroskopisch**: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ mit σ der Leitfähigkeit des Materials.
- **idealisiert**: $U = R \cdot I$ mit U der Spannung, R dem Widerstand und I dem Strom.

6 Schaltkreise

Kirchhoff'sche Regeln

1. Für jedes aus Widerständen bestehende Schaltelement gilt das **Ohm'sche Gesetz**:
$$V_i = R_i I_i$$
2. Es dürfen sich keine Ladungen aufbauen, daher gilt
$$\sum_i I_i = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \sum I_{\text{in}} = \sum I_{\text{out}}$$
3. Für jede Schleife verschwindet die Summe der Potentialdifferenzen:
$$\sum_i V_i = 0$$

Ersatzwiderstände:

- Serieschaltung: $R_{\text{Tot}} = \sum_i R_i$
- Parallelschaltung: $\frac{1}{R_{\text{Tot}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

Ersatzkapazitäten:

- Serieschaltung: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$
- Parallelschaltung: $C = \sum_i C_i$

Energieumwandlung:
Damit eine Ladung durch einen Schaltkreis fliessen kann, muss eine Energiequelle existieren, welche die in den Widerständen verlorene Wärme ersetzt. Diese Energiequelle wird auch als **elektromotorische Kraft** $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Leistung:

$$P = \dot{W} = IU = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Schaltkreise mit Kondensatoren

Es gilt: $Q = C \cdot V$, wobei Q die Ladung, C die Kapazität und V die Spannung ist.

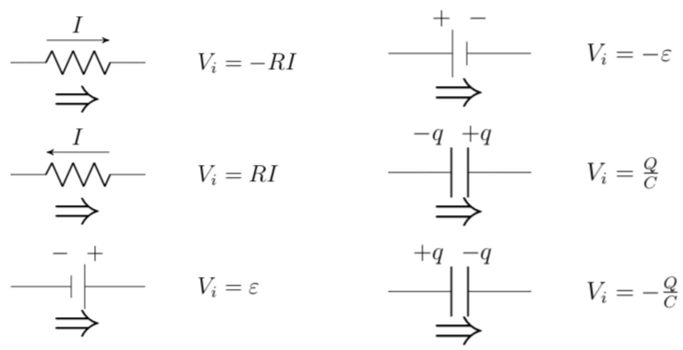
Entladestrom eines Kondensators:

$$I(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Man nennt RC die **Relaxationsskala**. Der **Ladestrom** ist analog definiert:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Das Vorzeichen ABC



7 Spezielle Relativitätstheorie

Einstein'sche Postulate:

1. Absolute, gleichförmige Bewegung kann man nicht messen.
2. Die Geschwindigkeit des Lichts ist unabhängig von Bewegungszustand der Lichtquelle Folglich misst jeder Beobachter die gleiche Lichtgeschwindigkeit.

Galilei-Transformation

Wir verwenden zwei Bezugssysteme S_A und S_B mit den jeweiligen Koordinaten x^A, y^A, z^A resp. x^B, y^B, z^B. S_B bewege sich entlang der positiven x-Achse mit v_B^A relativ zu S_A. S_A bewegt sich demnach mit $-v_B^A$ relativ zu S_B. Falls nun die Ursprünge zusammenfallen, so erhalten wir die klassischen Beziehungen:

$$\begin{aligned} x^A &= x^B + v_B^A t^B & x^B &= x^A - v_B^A t^A \\ y^A &= y^B & y^B &= y^A \\ z^A &= z^B & z^B &= z^A \\ t^A &= t^B & t^B &= t^A \end{aligned}$$

Diese Transformationen verstossen aber gegen die Einstein'schen Postulate.

Lorentztransformation
Die relativistische Transformationsvorschrift (entlang der x-Achste) lautet:

$$\begin{aligned} x^A &= \gamma(x^B + v_B^A t^B) \\ y^A &= y^B \\ z^A &= z^B \\ t^A &= \gamma(t^B + \frac{v_B^A x^B}{c^2}) \end{aligned}$$

Dabei ist $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$ mit $\beta = \frac{v_B^A}{c} = \frac{-v_A^B}{c}$
In Matrizenschreibweise heisst das für ein ruhendes System S und ein bewegtes (in x-Richtung) System S':

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \beta x) \\ \gamma(x - \beta ct) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zeitdilatation:

$$\Delta t^A = \gamma \Delta t^B \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \gamma \Delta t_{\text{eigen}}$$

Das Zeitintervall Δt in einem beliebigen Bezugssystem ist stets grösser als die Eigenzeit.

Längenkontraktion:

$$\Delta x^A = \frac{1}{\gamma} \Delta x^B \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x_{\text{eigen}}$$

Die Länge l in einem beliebigen Bezugssystem ist stets kleiner als die Eigenlänge l_0.

Gleichzeitigkeit
Zwei Ereignisse finden gleichzeitig statt, wenn die von den Ereignissen ausgesandten Lichtsignale einen Beobachter, der sich in der Mitte der Ereignisse befindet, zus selben Zeit erreichen.

Invarianz
Wir definieren das **Raumzeit-Intervall** Δs als:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

welches eine Invariante der Lorentztransformation ist.

- **Zeitartig**: $\Delta s^2 > 0$: Zeitintervalle am kleinsten, wo Ereignisse am selben Ort stattfinden
- **Raumartig**: $\Delta s^2 < 0$: Länge am kleinsten, wo Raumkoordinate zur selben Zeit gemessen
- **Lichtkegel**: $\Delta s^2 = 0$: Die Gleichung beschreibt die Ausbreitung des Lichtes als Kugelwelle.

Geschwindigkeitstransformationen
Es sei ein Teilchen in S_B mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$. Die Geschwindigkeit in S_A ist:

$$\begin{aligned} v_x^A &= \frac{dx^A}{dt^A} = \frac{\gamma(dx^B + v_B^A dt^B)}{\gamma(dt^B + \frac{v_B^A}{c^2} dx^B)} = \frac{v_x^B + v_B^A}{1 + \frac{v_B^A v_x}{c^2}} \\ v_y^A &= \frac{dy^A}{dt^A} = \frac{v_y^B}{\gamma(1 + \frac{v_B^A v_x^B}{c^2})} \\ v_z^A &= \frac{dz^A}{dt^A} = \frac{v_z^B}{\gamma(1 + \frac{v_B^A v_x^B}{c^2})} \end{aligned}$$

wobei v_B^A die Geschw. von B im Bezugssystem von A ist.

Relativistischer Dopplereffekt
Der (longitudale) relativistische Dopplereffekt ist gegeben durch:

$$\nu^A = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu^B \qquad \text{für kleiner werdenden Abstand}$$

$$\nu^A = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu^B \qquad \text{für grösser werdenden Abstand}$$

Der transversale Dopplereffekt ist geg. durch $\nu^A = \sqrt{1-\beta^2} \nu^B$

Relativistischer Impuls und relativistische Energie

- **Impuls**: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$
- **Energie**: $E_{\text{Tot}} = E_{\text{Kin}} + E_0 = \gamma m c^2$ mit $E_0 = mc^2$ der Ruheenergie.

Die Masse eines Teilchens ist Lorentz-invariant und es gilt:

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

Relativistische Kraft

$$\begin{aligned} m\gamma \dot{\vec{v}} &= \vec{F} - \frac{1}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ m\gamma^3 \vec{a} &= (\vec{F} \cdot \hat{v}) \cdot \hat{v} \end{aligned}$$

Vierer-Impuls
Energie-Impuls Vektor in 4er-Koordinaten

$$P^\nu = \begin{pmatrix} E_{\text{Tot}}/c \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\text{Tot}} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Für einen Vierer-Vektor gilt allgemein:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

Für das 4er-Skalarprodukt gilt

$$x^\mu y_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^0 \\ -y^1 \\ -y^2 \\ -y^3 \end{pmatrix} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Wir nennen x^μ kontravariant und x_μ kovariant.

8 Felder bewegter Ladungen

Transformationen von elektrischen Feldern an einem Plattenkondensator

- **Elektrisches Feld, senkrecht**: $E'_\perp = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\gamma\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E_\perp$
- **Elektrisches Feld, parallel**: $E'_\parallel = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_\parallel$

Transformation von elektrischen Felder einer bewegten Punktladung
Angenommen wir haben eine Punktladung, die sich mit v_x entlang der x-Achse bewegt. Das elektrische Feld sei in der xz-Ebene, also parallel, bzw senkrecht zur Bewegung. Im mitbewegten Inertialsystem, in dem sich die Ladung im Ursprung und in Ruhe befindet sind die Komponenten des elektrischen Feldes:

$$E_x(x,0,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$
$$E_z(x,0,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

Mit $r'^2 = x'^2 + z'^2$ und $z' = r'\sin(\theta')$ erhalten wir:

$$E' = \sqrt{E'^2_x + E'^2_z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2(\theta')\right)^{3/2}}$$

wobei die Striche die Koordinaten im Laborsystem kennzeichnen, welches sich mit Relativgeschwindigkeit $-v_x$ bewegt.

Kräfte auf bewegte Ladungen:

$$F_\parallel = F'_\parallel = qE'_\parallel = qE_\parallel \qquad F_\perp = \frac{1}{\gamma}F'\perp = \frac{1}{\gamma}qE'_\perp = qE_\perp$$

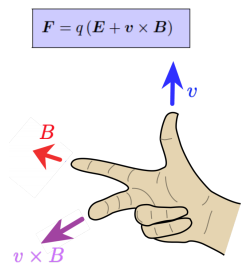
9 Magnetische Felder

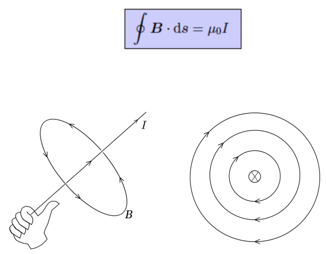
Es gilt: $I = \frac{dq}{dt} = \frac{dl}{dt}\frac{dq}{dx} = v\cdot\lambda$ mit λ der **Linienladungsdichte**.

Lorentz-Kraft: Kraft, welche auf bewegte Teilchen in einem Magnetfeld wirkt:

$$d\vec{F}_L = I(d\vec{l}\times\vec{B}(\vec{r})) \quad \text{oder allgemeiner} \quad \vec{F} = q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Mit I Strom, $\vec{B}$ Magnetfeld, q (positive) Ladung des Teilchens, E elektrisches Feld, $d\vec{r}$ Leiterelement.





Das **Ampère'sche Gesetz** wird benutzt, wenn wir unendlich ausgedehnte Leiter haben, wie zB einen unendlich langen Draht. Die Formel lautet:

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{eing.}} \qquad \text{oder} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0$$

Vorgehen

1. Skizze zeichnen + Koordinaten wählen
2. Schleife einzeichnen
3. Erste Formel für Ampère'sches Gesetz benutzen
4. Auflösen

Eindeutigkeitssatz: Für eine gegebene Konfiguration von Strömen $\vec{J}(\vec{r})$ existiert ein eindeutiges Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$.

Das Vektorpotential ist definiert als:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dx'dy'dz' \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

Das Biot-Savart'sche Gesetz

Die Formel von Biot-Savart lautet wie folgt:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}Id\vec{l}\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(d\vec{l}\times\hat{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}(\vec{J}\times\hat{r})dV$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2}(\vec{v}\times\hat{r})$$

- **Leiterelement $d\vec{l}$:** Wir wählen uns auf jedem Leiter ein infinitesimales Leiterelement. Dies beschreiben wir dann im gewählten Koordinatensystem. Es beschreibt also einen kleinen Ausschnitt auf dem Leiter. Später wird dann über dieses Element integriert.
- **Position des Leiterelements $\vec{r}'$:** Der gestrichene Ortsvektor beschreibt die Position des Leiterelements.
- **Position des Betrachtungspunkts P $\vec{r}$:** Um das magnetische Feld letzten Ende zu berechnen, betrachten wir einen bestimmten Punkt in allgemeinen Koordinaten, dh. wir können ihn überall wählen, jedoch ist manchmal ein bestimmter Punkt gefragt und dann vereinfacht sich die Formel.

Vorgehen:

1. $d\vec{l}$ definieren
2. Position von P bestimmen ($\vec{r}$)
3. Position von $d\vec{l}$ bestimmen ($\vec{r}'$)
4. Erste Formel von Biot-Savart verwenden

Energiedichte

- des Magnetfeldes: $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- des elektrischen Feldes: $u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Hall-Effekt
In Magnetfeldern wirkt auf bewegte Ladungen eine zu ihrer Bewegungsrichtung senkrecht wirkende Kraft. In einem stromdurchflossenen Leiter schiebt diese Kraft die Ladungsträger auf eine Seite des Leiters, und es kommt zu einer Ladungstrennung. Zwischen der oberen und der unteren Seite des Ladungsträgers entsteht dann eine Spannungsdifferenz, die sogenannte **Hall-Spannung**

$$U_H = E_H b = v_d B b$$

Magnetischer Dipolmoment
Das magnetische Moment einer Leiterschleife ist gegeben durch:

$$\vec{\mu} = nI\vec{A}$$

wobei n die Anzahl Windungen der Leiterschleife ist. Auf eine Leiterschleife wirkt nun ein Drehmoment, welches gegeben ist durch

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Relativistische Transformationen
Wir betrachten einen unendlich ausgedehnten Plattenkondensator parallel zur xz-Ebene, welche sich im Laborsystem K mit der geschwindigkeit v_0 in x-Richtung bewegt. Sei K' ein Inertialsystem das sich mit v relativ zu K in x-Richtung bewegt ($\beta = \frac{v}{c}$).

$$E'_\parallel = E_\parallel \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma\left(\vec{E}_\perp + c\vec{\beta} \times \vec{B}_\perp\right)$$
$$B'_\parallel = B_\parallel \qquad \vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E}_\perp\right)$$

Im Spezialfall $\vec{B} = 0$:

$$E'_\parallel = E_\parallel \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma\vec{E}_\perp$$
$$B'_\parallel = 0 \qquad \vec{B}'_\perp = -\gamma\frac{\vec{\beta}}{c} \times \vec{E}_\perp$$

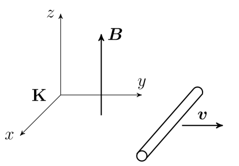
Wegen $\vec{\beta} \times \vec{E}_\parallel = 0$ folgt:

$$\vec{B}' = -\frac{\vec{\beta}}{c} \times \vec{E}'$$

10 Magnetische Induktion

Der magnetische Fluss durch eine Oberfläche $\vec{A}$ ist definiert durch

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



In der linken Darstellung gilt für den Stab mit Endpunkten A und B:

$$U_{BA} = \int_A^B q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Die **elektromotorische Kraft** ist dann gegeben als:

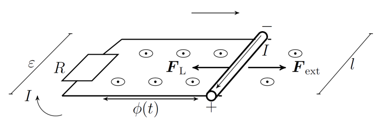
$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \frac{U_{BA}}{q}$$

Faraday'sches Gesetz:

$$\mathcal{E} = U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Das Lenz'sche Gesetz
Die magnetisch induzierte elektromotorische Kraft erzeugt ihrerseits ein Magnetfeld, das der Änderung des Flusses entgegenwirkt.

Die **Leistung**, die eine externe Kraft $\vec{F}_{\text{ext}}$ aufbringen muss, um im Widerstand R dissipierte Joul'sche Wärme zu ersetzen, ist gegeben durch



$$\vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = lIBv = \mathcal{E}I \qquad \text{für diesen Aufbau}$$

Selbstinduktion
Der Strom durch eine Spule erzeugt ein Magnetfeld. Das Magnetfeld ist proportional zum Strom I. Der magnetische Fluss ist:

$$\Phi_{\text{mag}} = LI$$

mit L der **Selbstinduktivität** der Spule. Die Spannung durch Selbstinduktion ist nach dem Faraday'schen Gesetz:

$$U_{\text{ind}} = -L\frac{dI}{dt}$$

Gegenseitige Induktivität ist der Einfluss auf eine Spule, erzeugt durch eine andere Spule

$$\Phi_{\text{mag},21} = M_{21}I_1$$

mit M_{21} der **gegenseitigen Induktivität**. Es gilt: $M_{12} = M_{21}$

Das Magnetfeld einer langen Spule mit einer Querschnittsfläche A, Länge l und Anzahl Windungen N ist gegeben als:

$$B = \mu_0\frac{N}{l}I$$

Dann folgt:

$$\Phi = \mu_0 A\frac{N}{l}IN \implies \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0\frac{N^2}{l}A\frac{dI}{dt}$$
$$\implies L = \mu_0\frac{AN^2}{l}$$

Gespeicherte Energie:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 dV$$

11 Wechselströme

Da $Q = CV$ folgt: $I = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dV}{dt}$.

Frei schwindenger gedämpfter LRC-Stromkreis

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
- $\rho = \frac{R}{2L}$

1. **Schwache Dämpfung**: $\rho^2 < \omega_0^2$ oder $R^2 < 4\frac{L}{C}$: Lösung: $V(t) = V_0 e^{\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
2. **Starke Dämpfung**: $\rho^2 > \omega_0^2$ oder $R^2 > 4\frac{L}{C}$: Lösung: $V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}$ mit $\beta_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$
3. **Sehr starke Dämpfung**: $R^2 >> 4\frac{L}{C}$: Lösung: $V(t) = V_0 e^{-\frac{R}{L}t}$
4. **Kritische Dämpfung**: $\rho = \omega$ oder $R^2 = 4\frac{L}{C}$: Lösung: $V(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}(1 + Bt)$

Zusammenfassung Spannungsabfall:

- Widerstand: $V_R = -IR$
- Kondensator: $V_C = \frac{Q}{C}$
- Spule: $V_L = -L\frac{dI}{dt}$

Achtung: Vorzeichen sind relativ! Beim Kondensator: Ist die Stromrichtung gleich dem Potentialabfall (von Minus zu Plus), wo erhalten wir eine parallele Situation. Für die parallele Konfiguration erhalten wir ein negatives Vorzeichen falls man von Plus nach Minus geht! Für den antiparallelen Fall, haben wir ein positives Vorzeichen.

Verschiedene Stromkreise:

- RL**-Stromkreis**: "Strom ist zu Spät, in Induktivität", Lösungen: $\tan(\alpha) = -\frac{\omega L}{R}$ und $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$
- RC**-Stromkreis**: "Strom eilt vor, am Kondensator", Lösungen: $\tan(\alpha) = \frac{1}{\omega RC}$ und $I_0 \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2}}}$
- RLC**-Schwingkreis**: Lösungen: $\tan(\alpha) = -\frac{\omega L'}{R}$ mit $L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ und $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

  Maximales I_0 bei $\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

  Der dimensionslose **Qualitätsfaktor** ist: $\mathcal{Q} = \frac{L\omega_{\max}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{R}}$

Bei hoher Frequenz des Wechselstromes setzt ein Kondensator dem Stromfluss nahezu keinen Widerstand entgegen.

Beschreibung durch komplexe Zahlen:

- **elektromotorische Kraft**: $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$
- **komplexe Strom**: $I = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$
- $\alpha = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(I)}{\mathrm{Re}(I)}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(Y)}{\mathrm{Re}(Y)}\right)$
- **Admittanz**: Y: Verallgemeinerung des Leitwertes in Gleichstromkreisen, es gilt: $I = YV$.
- **Impedanz**: Z: Verallgemeinerung des Ohm'schen Widerstandes, es gilt: $Z = \frac{1}{Y} \Rightarrow V = ZI$.

Bei einer **Parallelschaltung** gilt: $Y = \sum_j Y_j$

Bei einer **Serienschaltung** gilt: $Z = \sum_j Z_j$

Komponente	Admittanz Y	Impedanz Z
R	$\frac{1}{R}$	R
L	$-\frac{\mathrm{i}}{\omega L}$	$\mathrm{i}\omega L$
C	$\mathrm{i}\omega C$	$-\frac{\mathrm{i}}{\omega C}$

Leistungsaufnahme eines Stromkreises

- $P = IV$
- $\mathrm{Re}(IV) \neq \mathrm{Re}(I)\mathrm{Re}(V)$
- Mittlere Leistung: $\langle P \rangle = \langle VI \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t)dt$
- **Effektivwerte**: $V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ und $I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle}$

12 Maxwellgleichungen und elektromagnetische Wellen

Maxwellgleichungen:

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Gauss/Coulomb)
2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Nicht-Existenz von magnetischen Monopolen)
3. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faraday'sches Gesetz)
4. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Ampèr'sches Gesetz)
5. $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\approx \rho}{\partial t}$ (Kontinuitätsgleichung)

In Integralform:

$$\int_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0}$$
$$\int_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$
$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} d\vec{A}$$
$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$$

Die homogene Wellengleichung und deren Lösungen: Im Vakuum: $\rho = 0$ und $\vec{J} = 0 \Rightarrow$ **homogene Maxwellgleichungen**:

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
3. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Elektromagnetische Wellen:

- Es gilt $|\vec{E}| = c \cdot |\vec{B}|$
- Elektromagnetische Wellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ aus und das Licht ist eine elektromagnetische Welle.
- Das elektrische und magnetische stehen orthogonal zueinander und zur Ausbreitungsrichtung. Insbesondere gilt: $\vec{E} = \vec{B} \times c\hat{k}$ oder $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}$ wobei $\hat{k}$ der Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung der Welle ist.

Der **Pointing-Fluss** ist $S = \frac{1}{\mu_0}\langle EB \rangle$ und allgemeiner ist der **Pointing-Vektor** (Vektorielle Energieflussdichte):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Der Betrag $|\vec{S}|$ ist gerade die Intensität.

Pointing-Theorem:
Wenn $\vec{S}$ der Pointing-vektor ist und u_{em} die Energiedichte, dann gilt:

$$\frac{\partial(u_{mech} + u_{em})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

Im Vakuum gilt:

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

Elektromagnetische Wellen sind invariant unter beliebiger Lorentz-Transformation.

Wellengleichung für Potentiale:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \text{und} \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$$

mit ϕ dem elektrischen Potential.

Lorenz-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wellengleichung für das Vektorpotential

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

D'Alembert Operator: $\Box := \Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Retardierte Potentiale

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t - |\vec{r} - \vec{r'}|/c)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV'$$

Der Hertz'sche Dipol:

- Der **Dipolmoment** ist $\vec{P} = Q \cdot \vec{l}$ oder $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$ mit:
- Variierende Ladung: $Q(t) = Q_0 \sin(\omega t)$
- Strom $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ wobei $I_0 = \omega Q_0 = \frac{\omega p_0}{l}$
- **Momentaner Energietransport** durch Kugelschale A:

$$P = \int_A \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a}$$

13 Elektrische und magnetische Felder im Materie

Dielektrika:
In einem Material gilt für die Kapazität eines Plattenkondensators: $C = \varepsilon C_{\text{Vak}}$ mit ε der **Dielektrizitätskonstante**. Falls Ladungs Q_0 konstant ist, gilt: $V = \frac{1}{\varepsilon} V_{\text{Vak}}$. Falls die Spannung V_0 konstant ist, gilt: $Q = \varepsilon Q_{\text{Vak}}$.

Materialien, welche unabhängig von externen Feldern magnetisch sind, heissen **ferromagnetisch**. Während **paramegnetische** Materialien das vorhandene Magnetfeld verstärken, wird es durch **diamagnetische** Materialien abgeschwächt.

Nettokraft in einem inhomogenen Feld:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} p_x \ \partial_x E_x \\ p_y \ \partial_y E_y \\ p_z \ \partial_z E_z \end{pmatrix} = \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} \nabla E_x \\ \nabla E_y \\ \nabla E_z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} F_x &= \vec{p} \cdot \nabla E_x \\ F_y &= \vec{p} \cdot \nabla E_y \\ F_z &= \vec{p} \cdot \nabla E_z \end{aligned}$$

Die elektrische Flussdichte und das Gauss'sche Gesetz im Dielektrikum:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{\text{ges}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{geb}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{vak}} = \frac{\rho_{\text{frei}}}{\varepsilon \varepsilon_0} = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\rho_{\text{geb}}}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{-\rho_{\text{geb}}}{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_{\text{geb}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Wir definieren die **elektrische Flussdichte** oder **dielektrische Verschiebung** D durch:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Damit folgt das **modifizierte Gauss'sche Gesetz**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$$

und $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$.

Die elektrischen Dipole ($\vec{p}$) erzeugen eine Polarisation $\vec{P}$ welche das externe E-Feld im Material schwächen: $\mathcal{E} = \frac{E_{\text{vak}}}{E_{\text{result}}} \geq 1$.

Mit der Teilchendichte N und dem magnetischen Dipolmoment μ definieren wir die **Magnetisierung** als $\vec{M} = N \cdot \vec{\mu}$.

Wir definieren das H-**Feld** als $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_{\text{frei}} \qquad \text{(Ampèr'sches Gesetz in Materie)} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} \end{aligned}$$