Analysis I und II

Zusammenfassung

Balázs Szekér
szekerb@student.ethz.ch

Zusammenfassung zur Vorlesung vom Herbstsemester 2019
und Frühlingssemester 2020 gegeben von Peter Simon Jossen

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

12. Mai 2021

Vorwort

Dies ist eine Sammlung von Definitionen, Sätzen, etc. aus dem Skript *Analysis I und II* von Manfred Einsiedler, Peter Jossen und Andreas Wieser. Sie dient als Zusammenfassung und Begleitung der Vorlesung *Analysis I und II*, gehalten von Peter Simon Jossen im Herbstsemester 2019 und Frühlingssemester 2020 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Diese Publikation ist weder als Ersatz zum Vorlesungsbetrieb zu erachten noch als eine ausreichende Vorbereitung für die Prüfung. Alle Beweise wurden weggelassen und sind im Skript *Analysis I und II* nachzulesen, welches Sie auf der Vorlesunghomepage [1] finden.

Falls Sie Fehler finden, sei es sprachlich oder thematisch, oder falls Sie Verbesserungsvorschläge haben, wenden Sie sich an szekerb@student.ethz.ch

Besten Dank

Balázs Szekér

[1] https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-1262-07L/

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Naive Mengenlehre

Definition

(1) Eiene **Menge** besteht aus beliebigen unterscheidbaren Elementen.
(2) Eine Menge ist unverwechselbar dursch ihre **Elemente** bestimmt.
(3) Eine Menge ist nicht Element ihrer selbst.
(4) Jede Aussage A über Elemente einer Menge X definiert die Menge der Elemente in X fpr die die Aussage A wahr ist, notiert $\{x \in X|\text{A gilt für x}\}$

Definition

Mengen von Mengen wird **Familien** von Mengen genannt. Seltener braucht man auch die Bezeichnung **Kollektion** oder **Ansammlung**.

Definition

Seien P und Q Mengen. Wir sagen, dass P **Teilmenge** von Q ist, und schreiben $P \subset Q$, falls für alle $x \in P$ auch $x \in Q$ gilt. Wir sagen, dass P eine **echte Teilmenge** von Q ist und schreiben $P \subsetneq Q$, falls P eine Teilmenge von Q, aber nicht gleich Q ist. Wir schreiben $P \not\subset Q$, falls P keine Teilmenge von Q ist.

Definition

Seien P und Q Mengen. Der **Durchschnitt** $P \cap Q$, die **Vereinigung** $P \cup Q$, das **relative Komplement** $P \backslash Q$ und die symmetrische Differenz $P \Delta Q$ sind durch

$$\begin{aligned}
&P \cap Q = \{x \mid x \in P \wedge x \in Q\} \\
&P \cup Q = \{x \mid x \in P \vee x \in Q\} \\
&P \backslash Q = \{x \mid x \in P \wedge x \notin Q\} \\
&P \Delta Q = (P \cup Q) \backslash (P \cap Q) = \{x \mid x \in P \text{ XOR } x \in Q\}
\end{aligned}$$

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen, also eine Menge deren Elemente selbst Mengen sind. Dann definieren wir die **Vereinigung** als

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

respektive den **Durchschnitt** der Menge $\mathcal{A}$ als

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

Falls $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$, dann schreiben wir auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$$

für die Vereinigung, und den Durchschnitt der Menge in $\mathcal{A}$.

Definition

Zwei Mengen A, B heissen **disjunkt**, falls $A \cap B = \varnothing$ gilt. Für eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Mengen, sagen wir, dass die Menge in $\mathcal{A}$ **paarweise disjunkt** sind, falls für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \neq A_2$ gilt $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Definition

Sei X eine Menge. Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ von X ist die Menge aller Teilmengen von X, das heisst

$$\mathcal{P}(X) = \{Q \mid Q \text{ ist eine Menge und } Q \subset X\}$$

Definition

Für zwei Mengen X und Y ist das **kartesische Produkt** $X \times Y$ die Menge aller geordneten Paare (x, y) wobei $x \in X$ und $y \in Y$. In Symbolen,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

Allgemeiner, sei I eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei X_i eine Menge. Das **Produkt** der Familien von Mengen $\{X_i | i \in I\}$ definieren wir als

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I \ : \ x_i \in X_i\}$$

Für eine Zahl $n \leq 1$ und eine Menge X definieren wir X^n als das n-fache kartesische Produkt von X mit sich selbst.

1.2 Funktionen und Abbildungen

Definition

Seien X und Y Mengen. Eine **Funktion** von X nach Y ist eine Teilmenge F des karesischen Produktes $X \times Y$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$ gibt:

$$\forall x \in X \ \exists! \ y \in Y : (x, y) \in F$$

Wir bezeichnen die Menge X als **Definitionsbereich** und die Menge Y als **Wertebereich** oder auch als **Zielbereich**.

Definition

Die Menge F ist gegeben durch

$$F = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

gegeben und wird **Graph** von f bezeichnet.

Definition

Sei X eine Menge und sei A eine Teilmenge von X . Die Funktion $\iota_A : A \to X$ die durch $\iota_A(a) = a \ \forall a \in A$ gegeben ist, nennt man **Inklusionsabbildung** von A nach X . Die Inklusionsabbildung $\iota_X : X \to X$ wird **Identität** von X genannt, und als $id_X : X \to X$ geschrieben. Die Funktion $\mathbb{1}_A : X \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin A \\ 1 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

wird **charakteristische Funktion** von A genannt. Für zwei Mengen X und Y wird die **Menge aller Abbildungen** von X nach Y als Y^X geschrieben, formaler

$$Y^X = \{f \mid f : X \to X \text{ ist eine Funktion}\}$$

Grund der Notation ist unter anderem die folgende Behauptug. Falls X und Y endliche Mengen sind mit m, respektive n Elementen für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, so hat Y^X genau n^m Elemente.

Definition

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und sei A eine Teilmenge von X . Die Verknüpfung $f \circ \iota_A$ von f mit der Inklusionsabbildung $\iota_A : A \to X$ nennt man **Einschränkung** von f auf A. Man notiert diese Funktion als

$$f|_A : A \to Y$$

Es gilt $f|_A(a) = f(a)\ \forall a \in A$. Dennoch betrachten wir $f|_A$ und f als verschiedene Funktionen, da ihre Definitionsbereich nicht derselbe ist - ausgenommen natürlich man hätte $A = X$ und also $\iota_A = id_X$

Definition

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir nennen f

1. **injektiv** oder eine **Injektion** falls $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ \forall x_1, x_2 \in X$ gilt.
2. **surjektiv** oder eine **Surjektion** falls $\forall\ y \in Y\ \exists x \in X$ mit $f(x) = y$
3. **bijektiv** oder eine **Bijektion**, falls sie suejektiv und injektiv ist.

Ist f bijektiv, so wird die Funktion $g : Y \to X$, die eindeutig durch

$$g \circ f = id_X \quad und \quad f \circ g = id_X$$

bestimmt ist, **Umkehrabbildung** von f, oder zu f **inverse Funktion** genannt. Es ist also $g(y)$ das eindeutig bestimmte Element $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Lemma

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.
1. Falls f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Falls $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.
3. Falls f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
4. Falls $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.
5. Falls f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv un des gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Definition

Für eine Funktion $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $A \subset X$ schreiben wir

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$$

und nennen diese Teilmenge von Y das **Bild** von A bezüglich der Funktion f. Für eine Teilmenge $B \subset Y$ schreiben wir

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B : f(x) = y\}$$

und nennen diese Teilmenge von X das **Urbild** von B bezüglich der Funktion f.

1.3 Algebraische Strukturen

Definition

Ein **kommutatives Monoid** ist ein Tripel (M, m_0, f) bestehend aus einer Menge M, einem Element $m_0 \in M$ und einer Abbildung $f : M \times M \to M$ die folgende Eigenschaften erfüllen.

1. Neutrales Element: $f(x, m_0) = f(m_0, x) = x \ \forall x \in M$
2. Kommutativität: $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z) \ \forall x, y, z \in M$
3. Assiziativität: $f(x, y) = f(y, x) \ \forall x, y \in M$

Wir nennen die Funktion f **Addition** und m_0 **neutrales Element** oder **Null**, und schreiben üblicherweise $x + y$ anstelle von $f(x, y)$ und 0 anstelle von m_0.

Definition

Sei X eine Menge. Eine **Relation** auf X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Wir schreiben auch xRy falls $(x, y) \in R$. Wenn $\sim$ eine Relation ist, dann schreiben wir auch $x \nsim y$ für $\neg(x \sim y)$. Eine Relation $\sim$ heisst:

1. **Reflexiv**: Falls $\forall x \in X : x \sim x$
2. **Transitiv**: Falls $\forall x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow x \sim z$
3. **Symmetrisch**: Falls $\forall x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$
4. **Antisymmetrisch**: Falls $\forall x, y \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim x)) \Rightarrow x = y$

Eine Relation heisst **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Eine Relation heisst **Ordnungsrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Definition

Sei $\sim$ ein Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Dann wird für $x \in X$ die Menge

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x genannt. Weiter heisst die Menge aller Äquivalenzklassen

$$X/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

Quotient oder die **Quotientenmenge** von X modulo $\sim$. Ein Element $x \in X$ wird auch **Repräsentant** seiner Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ genannt.

Definition

Sei X eine Menge. Eine **Partition** von X ist eine Familie $\mathcal{P}$ von nicht leeren, paarweise disjunkten Teilmengen von X, so dass

$$X = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$$

gilt. Mit anderen Worten: Mengen $P \in \mathcal{P}$ sind nicht leer, und jedes Element von X ist Element von genau einem $P \in \mathcal{P}$.

Proposition

Sei X eine nicht leere Menge. Äquivalenzrelationen auf X und Partitionen von X entsprechen einander im folgenden Sinne: Für eine gegebene Äquivalenzrelation $\sim$ auf X ist die Menge

$$P = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

eine Partition von X. Umgekehrt definiert für eine gegebene Partition P von X

$$x \sim y \iff \exists p \in P : x \in p \wedge y \in p$$

für $x, y \in X$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir erhalten eine kanonische Bijektion zwischen der Menge aller Äquivalenzrelationen auf X und der Menge aller Partitionen von X.

Definition

Eine Funktion f heisst **wohldefiniert**, falls f nicht von der Wahl der Repräsentanten x der Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ abhängt und jedem Element $[x]_\sim$ des Definitionsbereichs $X/_\sim$ das eindeutig bestimmte Element $f([x]_\sim)$ zuordnet.

1.4 Kardinalität

Definition

Seien X und Y zwei Mengen. Wir sagen, dass X und Y **gleichmächtig** sind, geschrieben $X \sim Y$ oder $|X| = |Y|$, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt. Wir sagen dass Y **mächtiger** als X ist, und schreiben $X \lesssim Y$, falls es eine Injektion $f : X \to Y$ gibt. Wir sagen in dem Fall auch X sei **schmächtiger** als Y.

Definition

Wir sagen X ist **abzählbar** (unendlich), falls $|X| = |\mathbb{N}|$.
Wir sagen, dass X **unendlich** ist, falls $|\mathbb{N}| \leq |X|$.
Wir sagen, dass X **überabzählbar** ist, falls $|\mathbb{N}| < |X|$

Satz (Cantors Diagonalargument)

Sei X eine Menge. Dann ist die $\mathcal{P}(X)$ mächtiger als X und nicht gleichmächtig zu X.

Satz (Cantor, Schröder, Bernstein)

Seien X und Y Mengen, so dass $X \lesssim Y$ und $Y \lesssim X$. Dann gilt $X \sim Y$.

Definition

Wir sagen, dass die Kardinalität der leeren Menge Null ist, und schreiben $|\varnothing| = 0$. Sei X eine Menge und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir sagen die Menge X habe Kardinalität n, und schreiben $|X| = n$, falls X gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ ist. In diesem Fall nennen wir X eine **endliche Menge** und schreiben $|X| < \infty$. Ist X nicht endlich, so nennen wir X eine **unendliche Menge**. Die Menge heisst **abzählbar unendlich**, falls sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ wird auch $\aleph_0$, gesprochen **Aleph-0**, genannt.

Auswahlaxiom

Variante (1)
Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine surjektive Funktion. Dann existiert eine Funktion $g : Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ g = id_Y$
Die Funktion g in dieser Verion des Auswahlaxioms nennt man einen **Schnitt** von f.

Variante (2)
Sei Y eine Menge, und $\mathcal{X}$ eine Familie von nichtleeren Teilmengen von Y. Dann gibt es eine Funktion $\alpha : X \to Y$ mit der Eigenschaft dass $\alpha(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt. Die Funktio α in dieser Version nennt man **Auswahlfunktion**, da sie der Auswahl eines Elementes $\alpha(X)$ in jeder der nichtleeren Mengen $X \in \mathcal{X}$ gleichkommt.

Variante (3)
Sei $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ einer Familie von nichtleeren Mengen. Dann ist das Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i$$

nicht leer.

Definition

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein Element $x \in X$ heisst **maximal** falls für alle $y \in X$ gilt: $x \leq y \Rightarrow x = y$. Ein Element $m \in X$, so dass $x \leq m$ für alle $x \in X$ gilt, dann heisst $m \in X$ **Maximum** von X.

Definition

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge, und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Element $x \in X$ heiss **obere Schranke** von A falls $a \leq x$ für alle $a \in A$ gilt. Ein Element $x \in X$ heisst **untere Schranke** von A falls $x \leq a$ für alle $a \in A$ gilt.

Definition

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heisst **Kette**, falls für alle $x, y \in K$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Wir sagen $(X, \leq)$ sei **induktiv** geordnet, falls jede Kette in X eine obere Schranke besitzt.

Lemma (Zorn's Lemma)

Sei $(X, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge. Dann existiert ein maximales Element in X.

Satz (Hausdorff'sches Maximumprinzip)

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Dann existiert eine maximale Kette in X. Das heisst, es existiert eine Kette $M \subseteq X$, so dass

$$M \subseteq L \;\Rightarrow\; M = L$$

für jede Kette $L \subseteq X$ gilt.

2 Die reellen Zahlen

In diesem Kapitel werden Körper thematisiert. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser, bzw Leserin, mit diesem Begriff vertraut ist. Falls dies nicht der Fall ist, verweise ich auf die Unterlagen der Linearen Algebra I und II. Insbesondere möchte ich auf die Zusammenfassung *Linearen Algebra I und II* von Paul Sander verweisen.
Weitere Begriffe die bekannt sein sollten, sind *ganze Zahlen* und *rationale Zahlen*.

2.1 Die Axiome der reellen Zahlen

Definition

Sei K ein Körper, und sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf der Menge K. Wir nennen $(K, \leq)$, oder kurz K, einen **angeordneten Körper** falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Linearität der Ordnung: Für alle $x, y, \in K$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.
2. Kompatibilität von Ordnung und Addition: Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$x \leq y \Rightarrow x + y \leq y + z$$

3. Kompatibilität von Ordnung und Multiplikation: Für alle $x, y \in K$ gilt

$$(x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow x \cdot y \geq 0$$

Bemerkung

Im Folgenden sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, und x, y, z, w bezeichnen Elemente aus K.

(a) (Trichotomie) Es gilt entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.
(b) Falls $x < y$ und $y \leq z$ ist, dann gilt auch $x < z$.
(c) (Addition von Ungleichungen) Gilt $x \leq y$ und $z \leq w$, dann gilt auch $x + z \leq y + w$.
(d) Es gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $0 \leq y - x$ gilt.
(e) Es gilt $x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -x$.
(f) Es gilt $x^2 \geq 0$, und $x > 0$, falls $x \neq 0$.
(g) Es gilt $0 < 1$.
(h) Falls $0 \leq x$ und $y \leq z$, dann gilt $xy \leq xz$.
(i) Falls $x \leq 0$ und $y \leq z$, dann gilt $xy \geq xz$.
(j) Aus $0 < x \leq y$ folgt $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.
(k) Aus $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq z \leq w$ folgt $0 \leq xz \leq yw$.
(l) Aus $x + y \leq x + z$ folgt $y \leq z$.
(m) Aus $xy \leq xz$ und $x > 0$ folgt $y \leq z$.

Definition

Sei $(k, \leq)$ ein geordneter Körper. Der **Absolutbetrag** auf K ist die Funktion $|\,.\,| : K \to K$ die durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

für alle $x \in K$ definiert ist. Das **Signum** ist die Funktion sgn: $K \to \{-1, 0, 1\}$ die durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für alle $x \in K$ definiert ist.

Bemerkung

Im Skript (Seite 46) gibt es Punkte *(a)* bis *(h)*. Hier werden nur *(g)* und *(h)* erwähnt.

(g) **Dreiecksungleichung**: Es gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$.
(h) Umgekehrte Dreiecksungleichung: Es gilt $|y| - |x| \leq |x-y|$.

Definition (Vollständigkeitsaxiom)

Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Wir sagen $(K, \leq)$ sei **vollständig** oder **vollständig angeordneter Körper** falls Aussage (V) wahr ist.

(V) Seien X, Y nicht-leere Teilmengen von K derart, dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt, dann gibt es ein $c \in K$, das zwischen X und Y liegt, in dem Sinn, dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq c \leq y$ gilt.

Die Aussage (V) bezeichnen wir als **Vollständigkeitsaxiom**.

Definition

Wir nennen **Körper der reellen Zahlen** jeden vollständigen angeordneten Körper. Solge Körper notieren wir mit dem Symbol $\mathbb{R}$.

2.2 Intervalle

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist das **abgeschlossene Intervall** $[a, b]$ definiert durch

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

und das **offene Intervall** (a, b) definiert durch

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Die **halboffenen Intervalle** $[a, b)$ und $(a, b]$ sind durch

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{und} \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

definiert. Wir definieren die **unbeschränkten abgeschlossenen Intervalle**

$$[a,\infty) = \mathbb{R}_{\geq a} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \quad \text{und} \quad (-\infty,b] = \mathbb{R}_{\leq b} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

sowie die **unbeschränkten offenen Intervalle**

$$(a,\infty) = \mathbb{R}_{>a} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \quad \text{und} \quad (-\infty,b) = \mathbb{R}_{<b} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

und schliesslich $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Definition

Sei $x \in \mathbb{R}$. Eine Menge, die ein offenes Intervall enthält, in dem x liegt, wird auch eine **Umgebung** oder **Nachbarschaftne** von x genannt. Für ein $\delta > 0$ wird das offene Intervall $(x-\delta, x+\delta)$ die **δ-Umgebung** von x genannt.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst **offen** in $\mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in U$ ein offenes Intervall I mit $x \in I$ und $I \subset U$ existert. Eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}$ heisst **abgeschlossen** in $\mathbb{R}$, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \backslash F$ offen ist.

2.3 Komplexe Zahlen

Es wird vorausgesetzt, dass der Leser, bzw die Leserin, bereits eine Vorstellung hat was komplexe Zahlen sind und wie die Notation funktioniert. Falls dies nicht der Fall ist, muss sich mittels anderer Literatur geholfen werden. Hier werden nur Operationen und mathematische Tools des Körpers der komplexen Zahlen thematisiert.
Kurze erläuterung der Notation: Wir schreiben $z = (x, y)$ wobei x der Realteil von z und y der Imaginärteil von z ist. Die gängigere Schreibweise ist jedoch $z = x + yi$.

Definition

Wir nennen **Addition** und **Multiplikation** auf der Menge $\mathbb{C}$ die folgenden Operationen.

Addition: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Multiplikation: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

Proposition

Die Menge $\mathbb{C}$, zusammen mit dem Nullelement $(0, 0)$, dem Einselement $(1, 0)$ und den vorher definierten Operationen, ist ein Körper.

Definition

Sei $z = x + yi$ eine komplexe Zahl. Wir nennen $\overline{z} = x - yi$ die zu z **konjugierte** komplexe Zahl. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto \overline{z}$ heisst **komplexe Konjugation**.

Lemma

Die komplexe Konjugation erfüllt folgende Eigenschaften:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ und $z\overline{z} \geq 0$. Des Weiteren gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $z\overline{z} = 0$ genau dann wenn $z = 0$.
2. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z \cdot q} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Bemerkung

Es lässt sich keine Ordnung auf $\mathbb{C}$ definierten, die zur Addition und zur Multiplikation kompatibel ist.

Definition

Der **Absolutbetrag** oder die **Norm** auf $\mathbb{C}$ ist die Funktion $|\,.\,| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Bemerkung

Der Ausolutbetrag ist positiv definit und multiplikativ, dh.

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z|\,|w| \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Proposition (Dreiecksungleichung)

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Definition (**Cauchy-Schwarz Ungleichung**)

Für komplexe Zahlen $z = x_1 + y_1 i$ und $w = x_2 + y_2 i$ gilt

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq |z|\,|w|$$

Definition

Die **offene Kreisscheibe** mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge

$$B(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}$$

Die **abgeschlossene Kreisscheibe** mit Radius $r > 0$ um $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge

$$\overline{B(z,r)} = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leq r\}$$

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heisst **offen** in $\mathbb{C}$, wenn zu jedem Punkt in U eine offene Kreisscheibe um diesen Punkt existert, die in U enthalten ist. Formaler: Für alle $z \in U$ existert ein Radius $r > 0$, so dass $B(z,r) \subseteq U$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heisst **abgeschlossen** in $\mathbb{C}$, falls ihr Komplement $\mathbb{C} \backslash A$ offen ist.

2.4 Maximum und Supremum

Definition

Eine Teilmenge $X \in \mathbb{R}$ ist **von oben beschränkt**, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq s$ für alle $x \in X$. Ein solches $s \in \mathbb{R}$ nennt man eine **obere Schranke** von X.

Definition

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Ein Element $x_1 \in X$ heisst **Maximum** von X falls für alle $x \in X$ die Ungleichung $x \leq x_1$ gilt. Wir schreiben

$$x_1 = \max(X)$$

falls das Maximum von X existert und gleich x_1 ist.

Bemerkung

Das Maximum ist eindeutig. Das bedeutet wenn x_1 und x_2 beide Maxima einer Teilmenge sind, folgt
$x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Definition

Die Begriffe **von unten beschränkt** und **untere Schranke** sowie **Minimum** sind analog definiert. Wir schreiben

$$x_0 = \min(X)$$

falls das Minimum von X existert und gleich x_0 ist. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst **beschränkt**, falls sie von oben und von unten beschränkt ist.

Definition

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $A := \{a \in \mathbb{R} \mid x \leq a \ \forall x \in X\}$ die Menge aller oberen Schranken von X. Falls das Minimum $x_0 = \min(A)$ existert, dann nennen wir dieses Minimum **Supremum** von X, und wir schreiben $x_0 = \sup(X)$.

Satz

Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte, nicht leere Teilmenge. Dann existert ein Supremum von X.

Proposition

Seien X und Y von oben beschränkte, nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, und schreibe

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \quad \text{und} \quad XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

Die Mengen $X \cup Y$, $X \cap Y$ und $X + Y$ sind von oben beschränkt, und falls $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$ gilt, so ist auch XY von oben beschränkt.

(1) Es gilt $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup(X), \sup(Y)\}$.
(2) Falls $X \cap Y$ nicht leer ist, so gilt $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup(X), \sup(Y)\}$.
(3) Es gilt $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$.
(4) Falls $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$, so gilt $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$

Definition

Für eine von unten beschränkte, nicht leere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ wird die grösste untere Schranke von X auch als **Infimum** $\inf(X)$ von X genannt. Es gilt die zum vorherigen Satz analoge Existenzaussage für das Infimum. Alternativ kann man das Infimum von X als

$$-\sup\{-x \mid x \in X\}$$

definieren. Überhaupt kann man dadurch praktisch alle Aussagen über Infima auf Aussagen über Suprema zurückführen.

Definition

Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Falls $X \subset \mathbb{R}$ nicht von oben beschränkt ist, dann definieren wir $\sup(X) = \infty$. Falls X leer ist, setzen wir $\sup(\varnothing) = -\infty$. Wir nennen in diesem Zusammenhang ∞ und $-\infty$ **uneigentliche Werte**.

2.5 Konsequenz der Vollständigkeit

Satz (Archimedisches Prinzip)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existeret genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$.

Korollar

Für jedes $\varepsilon > 0$ existert eine ganze Zahl $n \geq 1$ so, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt.

Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Dann existert eine $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ mit $0 < \frac{1}{n} < x$.

Definition

Der **ganzzahlige Anteil** $\lfloor x \rfloor$ einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n_1 \leq x < n_1 + 1$. Die durch $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ gegebene Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Z}$ heisst **Abrundungsfunktion**. Der **gebrochene Anteil** einer reellen Zahl x ist $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

Definition

Eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ heisst **dicht** in $\mathbb{R}$ falls es für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\delta > 0$ einen Ball $B(x, \delta)$ gibt sodass $B(x, \delta) \cap X \neq \varnothing$.

Korollar

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

Korollar

Zu je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.

Proposition

Die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass x ein **Häufungspunkt** der Menge A ist, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $0 < |a - x| < \varepsilon$ gibt.
Der Häufungspunkt muss nicht in A liegen.

Bemerkung

$A \subseteq \mathbb{R}$ ist dicht $\Leftrightarrow$ Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von A.

Satz

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte unendliche Teilmenge. Dann existert ein Häufungspunkt von A in $\mathbb{R}$.

Bemerkung

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) = \varnothing \quad \text{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \varnothing$$

Satz

Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Familie von beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:
1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$
2. $(F_1 \in \mathcal{F}) \wedge (F_2 \in \mathcal{F}) \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$
Dann ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

nicht leer.

Korollar (Intervallschachtlungsprinzip)

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein nicht-leeres, abgeschlossenes, beschränktes Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben, so dass für alle natürlichen Zahlen $m \leq n$ die Inklusion $I_m \supset I_n$ gilt. Dann ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}]$$

nicht-leer.

2.6 Modelle und Eindeutigkeit der Menge der reellen Zahlen

Definition

Wir schreiben $C(0) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, und nennen **Dedekind-Schnitt** jede nicht leere, von unten beschränkte Teilmenge C von $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, dass $C = C(0) + C$, also

$$C = \{x + c \mid x \in C(0), c \in C\}$$

gilt. Wir schreiben $\mathcal{D}$ für die Menge aller Dedekind-Schnitte.

Bemerkung

Für jede rationale Zahl q ist die Menge $C(q) = \{x \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$ ein Dedekindschnitt.

Satz (Dedekind)

Mit der Addition, Multipliation und der Ordnungsrelation, dem Nullelement $C(0)$ und dem Einselement $C(1)$ bildet die Menge der Dedekind-Schnitte $\mathcal{D}$ einen vollständigen, angeordneten Körper. Die Rechenoperationen sind wir folgt gegeben:

Addition: $C(p + q) = C(p) + C(q)$
Multipliation: $C(pq) = C(p)C(q)$
Ordnungsrelation: $p \leq q \Rightarrow C(p) \leq C(q)$

Definition

Seien C und D Dedekind-Schnitte. Die **Summe** von C und D ist der Dedekind-Schnitt

$$C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}$$

Wir sagen C ist **kleiner** als D und schreiben $C \leq D$ falls $C \supseteq D$ gilt.

Lemma

Mit der Operation + ist die Menge der Dedekind-Schnitte $\mathcal{D}$ dine kommutative Gruppe mit neutralem Element $C(0)$. Ausserdem gilt
1. $C \leq D$ oder $D \leq C$ für alle $C, D \in \mathcal{D}$
2. $C \leq D \Rightarrow C + E \leq D + E$ für alle $C, D, E \in \mathcal{D}$

Definition

Seien C und D Dedekind-Schnitte. Das **Produkt** von C und D ist der Dedekind-Schnitt

$$CD = \begin{cases} \{cd \mid c \in C, d \in D\} & \text{falls } C(0) \leq C \text{ und } C(0) \leq D \\ -\{cd \mid c \in -C, d \in D\} & \text{falls } C(0) \geq C \text{ und } C(0) \leq D \\ -\{cd \mid c \in C, d \in -D\} & \text{falls } C(0) \leq C \text{ und } C(0) \geq D \\ \{cd \mid c \in -C, d \in -D\} & \text{falls } C(0) \geq C \text{ und } C(0) \geq D \end{cases}$$

Lemma

Mit der vorher eingeführten Addition, Multipliation und Ordnungsrelation, dem Nullelement $C(0)$ und dem Einselement $C(1)$ bildet die Menge der Dedekind-Schnitte $\mathcal{D}$ einen angeordneten Körper.

Lemma

Der angeordnete Körper $(\mathcal{D}, \leq)$ ist vollständig.

Satz (Eindeutigkeit der reellen Zahlen)

Seien $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{S}, \leq)$ vollständig angeordnete Körper. Dann existiert genau eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, die die folgenen Eigenschaften erfüllt:

1. Additivität: $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
2. Multiplikativität: $\Phi(1) = 1$ und $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
3. Monotonie: $x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Diese Abbildung Φ ist bijektiv. Eine solche Abbildung nennt man auch **Isomorphismus**.

3 Reellwertige Funktionen in einer Variablen

3.1 Polynome und Polynomfunktionen

In diesem Kapitel wird vom Leser, bzw von der Leserin, vorausgesetzt, dass er, bzw sie, bereits vertraut ist mit der **Summennotation** $\sum$ und der **Produktnotation** $\prod$ und den dazugerörigen Konventionen der Indexierung. Eine Sache, die es dennoch wert ist zu erwähnen, ist, dass wir die folgende Konventionen brauchen werden.

$$\sum_{j\in\varnothing} a_j = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{j\in\varnothing} a_j = 1$$

Bemerkung

Die Summe ist linear. Das heisst:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Bemerkung

Für die sogenannte **Teleskopsumme** gilt:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_n$$

Bemerkung

Für das Produkt gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{n}(ca_k) = c^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Lemma (Bernoulli'sche Ungleichung)

Für alle reellen Zahlen $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Proposition (Geometrische Summenformel)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{falls } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{falls } q \neq 1 \end{cases}$$

Definition

Sei K ein beliebiger Körper. Ein **Polynom** f in einer Variable T und Koeffizienten in K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und Elementen $a_0, \ldots a_n \in K$ die wir als **Koeffizienten** bezeichnen. Hierbei ist T die sogenannte **Variable**. Wir definieren den **Polynomring** $K[T]$ als die Menge der Polynome mit Koeffizienten in K in der Variablen T, wobei Addition und Multiplikation formal durch Kommutativität und Distributionsgesetz gegeben ist.

Definition

Sei $f \in K[T]$ ein Polynom, gegeben wie in der vorherigen Definition. Falls $a_n \neq 0$, so nennen wir a_n den **Leitkoeffizienten**, und die natürliche Zahl n den **Grad** von f. Wir definieren den Grad des Polynoms $f = 0$ formal als $-\infty$. Ein Polynom von Grad ≤ 0 heisst **konstant**, ein Polynom von Grad ≤ 1 heisst **affin**, und ein Polynom vom Grad ≤ 2 heisst **quadratisch.**

Bemerkung

Ein Polynom f ist keine Funktion.

Definition

Eine **Polynomfunktion** auf $\mathbb{C}$ ist eine Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $z \mapsto f(z)$ für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$. Analog dazu definieren wir auch Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$.

Proposition

Sei $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl $M > 0$ eine reelle Zahl $R \geq 1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ auch $|f(z)| \geq M$ gilt.

Korollar

Die Zuordnung, die jedem Polynom $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ die zugehörige Polynomfunktion $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ zuweist bijektiv.

Definition

Eine Nullstelle eines Polynoms $f \in K[T]$ ist eine Zahl $x \in K$ mit $f(x) = 0$.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ mit komplexen Koeffizienten hat eine komplexe Nullstelle.

Definition

Wir sagen, dass ein Polynom g ein Polynom f **teilt** falls es ein Polynom q gibt mit $f = qg$.

Definition

Wir sagen, dass eine Nullstelle $z \in K$ von $f(T) \in K[T]$ **Vielfachheit** $k \in \mathbb{N}$ hat, falls $(T - z)^k$ das Polynom f teilt, aber $(T - z)^{k+1}$ das Polynom f nicht teilt.

Satz

Ein Polynom $f(T) \in K[T]$ vom Grad $n \geq 1$ hat n Nullstellen in K auch wenn man diese entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach zählt.

Proposition

Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, $z_1, \dots, z_n \in K$ paarweise verschiedene Elemente, und $w_1, \dots, w_n \in K$ beliebige Elemente. Es gibt höchstens ein Polynom $f \in K[T]$ von Grad $n - 1$ mit der Eigenschaft

$$f(z_k) = w_k \ \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Das Auffinden eines solchen Polynoms wird als **Lagrange Interpolation** bezeichnet. Wir beginnen damit, für jedes $k = 1, 2, \dots, n$ das Polynom

$$Q_k(T) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{T - z_j}{z_k - z_j}$$

zu definieren. Die Notation bedeutet hier, dass wir das Produkt über alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ nehmen. Das Polynom $Q_k(T)$ hat Grad $n-1$, und es gilt

$$Q_k(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

Das gesuchte Polynom $f \in K[T]$ erhalten wir als Linearkombination

$$f(T) = \sum_{k=1}^{n} w_k Q_k(T)$$

wobei wir $f(z_k) = w_k$ wiederum direkt durch Einsetzen in die Formel sehen. Da alle Polynome Q_k vom Grad $n-1$ sind, ist f höchstens vom Grad $n-1$.

Definition

Für ein rationales Polynom $\frac{f}{g}$ nennt man die Nullstellen von g **Pole**.

Definition

Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heisst **algebraisch**, falls es ein von Null verschiedenes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ gibt mit $f(\alpha) = 0$.

3.2 Reellwertige Funktionen

Definition

Als **reellwertige** Funktion bezeichnet man jede Funktion mit Wertebereich $\mathbb{R}$.

Definition

Für eine beliebige, nicht-leere Menge D definieren wir die Menge der **reellwertigen** Funktionen auf D als

$$\mathcal{F}(D) = \mathbb{R}^D = \{f \mid f : D \to \mathbb{R}\}$$

Die Menge $\mathcal{F}(D)$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, wobei Addition und skalare Multiplikation durch

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{und} \quad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x)$$

für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$ und $x \in D$. Die Menge $\mathcal{F}(D)$ bildet mit dieser Operation einen kommutativen Ring.

Definition

Wir definieren eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{F}(D)$ durch

$$f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow \forall x \in D : f_1(x) \leq f_2(x)$$

für $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$. Wir sagen, dass $f \in \mathcal{F}(D)$ **nicht-negativ** ist, falls $f \geq 0$ gilt.

Definition

Sei D eine nicht-leere Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen die Funktion f sei **von oben beschränkt**, falls die Wertemenge $f(D)$ von oben beschränkt ist, und wir sagen f sei **von unten beschränkt**, falls die Wertemenge $f(D)$ von unten beschränkt ist. Wir sagen f sei **beschränkt** falls f von unten und von oben beschränkt ist.

Definition

Analog zu den reellwertigen Funktionen, können auch die **komplexwertigen Funktionen** definiert werden als

$$\mathcal{F}(D) = \{f \mid f : D \to \mathbb{C}\}$$

Es gelten die analogen Definitionen für die Beschränktheit.

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst

monoton wachsend, falls

$$\forall x, y \in D : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

streng monoton wachsend, falls

$$\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

monoton fallend, falls

$$\forall x, y \in D : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

streng monoton fallend, falls

$$\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Wir nennen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ **monoton**, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist, und **streng monoton**, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Bemerkung

Streng monoton $\Rightarrow$ injektiv.

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **stetig bei einem Punkt** $x_0 \in D$ ist, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Die Funktion f ist **stetig auf** D, falls sie bei jedem Punkt von D stetig ist. Formal ist Stetigkeit von f auf D also durch

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

definiert.

Proposition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $f_+, f_2 : D \to \mathbb{R}$, die bei einem Punkt $x_0 \in D$ stetig sind. Dann sind auch die Funktionen $f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2$ und af_1 für ein $a \in \mathbb{R}$ stetig bie x_0. Insbesondere bildet die Menge der stetigen Funktionen

$$\mathcal{C}(D) = \{f \in \mathcal{F}(D) \mid f \text{ ist stetig}\}$$

einen Untervekorraum des Vektorraums $\mathcal{F}(D)$.

Proposition

Verknüpfungen stetiger Funktionen sind wierderum stetig.

Korollar

Polynomfunktionen sind stetig, das heisst, $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Satz (**Zwischenwertsatz**)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Tielmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $[a, b]$ ein in D enthaltenes Intervall. Für jede reelle Zahl c mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ gibt es ein $x \in [a, b]$, so dass $f(x) = c$ gilt.

Satz (Umkehresatz)

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist $f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und die Abbildung $f : I \to f(I)$ hat eine stetige, streng monotone inverse Abbildung $f^{-1} : f(I) \to I$.

3.3 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Satz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt. Das heisst, es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

Definition

Sei D eine Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf D. Wir sagen, dass die Funktion f ihr **Maximum** in einem Punkt $x_0 \in D$ **annimmt**, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ gilt. Wir bezeichnen $f(x_0)$ als das **Maximum** von f. Analog **nimmt** f ihr **Minimum** in $x_0 \in D$ **an**, falls $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. In dem Fall nennen wir $f(x_0)$ das **Minimum** von f. Maaxima und Minima bezeichnet man summarisch als **Extrama** oder **Extremwerte**.

Satz

Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an.

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst **gleichmässig stetig**, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in D$ gilt.

Bemerkung (Unterschied stetig und gleichmässig stetig)

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $x_0 \in X$. Dann sind stetig und gleichmässig stetig in Quantoren wie folgt definiert:

Stetig: $\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Gleichmässig Stetig: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass bei der gleichmässigen Stetigkeit das δ gleich bleibt für alle $x \in X$, und bei der "normalen" Stetigkeit ändert sich das δ für jedes $x \in X$.

Satz

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall für $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmässig stetig.

Definition

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heisst **Lipschitz stetig**, falls ein $L \geq 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

für alle $x, y \in X$. L heisst Lipschitz-Konstante für f.

Bemerkung

Lipschitz stetig $\Rightarrow$ Gleichmässig stetig $\Rightarrow$ Stetige

Achtung! Dies ist nur eine einseitige Implikation und keine Äquivalenz.

4 Das Riemann Integral

4.1 Treppenfunktionen und deren Integral

Definition

Eine **Zerlegung** von $[a,b]$ ist eine endliche Menge von Punkten

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Die Punkte $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ werden Teilungspunkte der Zerlegung genannt.

Definition

Eine Zerlegung $a = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_m = b$ wird **Verfeinerung** von $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ genannt, falls

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\}, y_m$$

gilt.

Definition

Eine Funktion $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ heisst **Treppenfunktion**, falls es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ von $[a,b]$ gibt, so, dass für $k = 1, 2, \dots, n$ die Einschränkung von f auf das offene Intervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist. Wir sagen in dem Fall auch die Funktion f sei eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Proposition

Seien f_1 und f_2 Treppenfunktionen auf $[a,b]$ und seien $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $s_1 f_1 + s_2 f_2$ und $f_1 \cdot f_2$ Treppenfunktionen.

Bemerkung

Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$

$$\mathcal{TF}([a,b]) = \{f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f \text{ ist eine Treppenfunktion}\}$$

ist ein Vektorraum, oder genauer, ein Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{F}([a,b])$ der reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$. Da das Produkt zweier Treppenfunktionen wiederum eine Treppenfunktion ist, bilden die Treppenfunktionen einen Ring. Des Weiteren sind Treppenfunktionen beschränkt, da sie endliche Wertemengen haben.

Definition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich einer Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ von $[a,b]$. Wir definieren das **Integral** von f auf $[a,b]$ als die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

wobei c_k den Wert von f auf dem Intervall (x_{k-1}, x_k) bezeichnet.

Bemerkung

Ist $a = y0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b$ eine weitere Zerlegung von $[a,b]$ befüglich welcher f eine Treppenfunktion ist, so muss gelten:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} d_k (y_k - y_{k-1})$$

Proposition

Die Abbildung $\int : \mathcal{TF}([a,b]) \to \mathbb{R}$ ist linear. Das heisst, für alle $f, g \in \mathcal{TF}([a,b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Proposition

Seien f und g Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit $f \leq g$. Dann gilt:

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$$

4.2 Definition und erste Eigenschaften des Riemann-Integrals

Definition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir die Menge der **Untersummen** $\mathcal{U}(f)$ und **Obersummen** $\mathcal{O}(f)$ von f durch

$$\mathcal{F}(f) = \left\{ \int_a^b u dx \mid u \in \mathcal{TF} \text{ und } u \leq f \right\} \qquad \mathcal{O}(f) = \left\{ \int_a^b o dx \mid o \in \mathcal{TF} \text{ und } f \leq o \right\}$$

Falls f beschränkt ist, so sind diese Mengen nicht leer. Für $u, o \in \mathcal{TF}$ mit $u \leq f \leq o$ gilt auch

$$\int_a^b u dx \leq \int_a^b o dx$$

und deshalb gilt $s \leq t$ für alle $s \in \mathcal{U}(F)$ und $t \in \mathcal{O}(f)$. Falls f beschränkt ist, gilt insbesondere die Ungleichung

$$\sup \mathcal{U}(f) \leq \inf \mathcal{O}(f)$$

Definition

Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst **Riemann-integrierbar**, falls $\sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$ gilt. In diesem Fall wird dieser gemeinsame Wert das **Riemann-Integral** von f genannt, und wird wie folgt geschrieben.

$$\int_a^b f dx = \sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$$

Proposition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen u und o gibt, die folgendes erfüllen:

$$u \leq f \leq o \quad \text{und} \quad \int_a^b (o - u) dx < \varepsilon$$

Definition

Wir schreiben $\mathcal{R}([a,b])$ oder einfach $\mathcal{R}$ falls $[a,b]$ klar aus dem Kontext ist, für die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$.

$$\mathcal{R}([a,b]) = \{ f \in \mathcal{F}([a,b]) \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar} \}$$

Bemerkung

Treppenfunktionen sind integrierbar, es gilt also $\mathcal{TF}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}([a,b]) \subseteq \mathcal{F}([a,b])$

Satz

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}([a,b])$ bildet einen linearen Unterraum von $\mathcal{F}([a,b])$ und das Integral ist eine lineare Funktion auf $\mathcal{R}([a,b])$. Das heisst, für $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar, mit Integral

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Proposition

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Falls $f \leq g$, so gilt auch $\int_a^b f dx = \int_a^b g dx$.

Definition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren Funktionen f^+, f^- und $|f|$ auf $[a,b]$ durch

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

für $x \in [a,b]$. Die Funktion f^+ ist der **Positivteil**, f^- ist der **Negativteil** und $|f|$ ist der **Absolutbetrag** der Funktion f. Es gilt $f = f^+ + f^-$.

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann sind auch f^+, f^- und $|f|$ integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

4.3 Integrierbarkeitssätze

Satz

Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Definition

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst **stückweise monoton**, falls es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ von $[a,b]$ gibt, so dass $f|_{(x_{k-1},x_k)}$ monoton ist für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$. Jede monotone Funktion ist stückweise monoton.

Korollar

Jede stückweise monotone, beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Lemma

Sei $d \geq 0$ eine Ganze Zahl. Es existieren rationale Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{n^{d+1}}{d+1} + c_d n^d + c_{d-1} n^{d-1} + \cdots + c_0$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

Satz

Polynomfunktionen auf $[a, b]$ sind Riemann-integrierbar. Für alle Monome x^d mit $d \geq 0$ gilt

$$\int_a^b x^d dx = \frac{1}{d+1}\left(b^{d+1} - a^{d+1}\right)$$

Satz

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

5 Folgen und Grenzwerte

5.1 Der metrische Raum

Definition

Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X gemeinsam mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die die **Metrik** auf X genannt wird und die folgenden drei Eigenschaften erfüllt.

1. Definitheit: Für alle $x_1, x_1 \in X$ gilt $d(x_1, x_2) \geq 0$ und $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
2. Symmetrie: Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$
3. Dreiecksungleichung: Für alle $x_1, x_2 x_3 \in X$ gilt $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$

Eine Metrik d auf einer Menge X weist je zwei Punkten ihre **Distanz** oder **Abstand** zu.

Definition

Die **Standardmetrik** d ist definiert durch

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

für alle $x_1, x_2 \in X$.

Definition

Die **diskrete Metrik** d auf einer Menge X ist definiert durch

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 \end{cases}$$

Definition

Wir setzen $X = \mathbb{C}$ und definieren die **Manhatten-Metrik** d_{NY} auf X durch

$$d_{NY}(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

für komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

Definition

Eine weitere Metrik auf $\mathbb{C}$ ist die **französische Eisenbahn Metrik** d_{SNFC}, definiert durch

$$d_{SNFC}(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear abhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \\ |z_1| + |z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \end{cases}$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $r \geq 0$ reell. Wir nennen die Teilmenge

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$$

"offener Ball mit Zentrum x_0 und Radius r".

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir sagen A sei beschränkt falls eine reelle Zahl $R \geq 0$ existiert mit

$$d(x, y) \leq R \ \forall x, y \in A$$

Bemerkung

Ist $x_0 \in X$, so ist $A \subseteq X$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists R \geq 0$ mit $A \subseteq B(x_0, R)$

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Wir sagen A sei **offen** in X, falls $\forall x_0 \in A \ \exists \delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subseteq A$. Wir nennen $B \subseteq X$ **abgeschlossen** in X, falls $X \backslash B$ offen in X ist.

Proposition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede Vereinigung offener Teilmengen von X ist offen. Jeder endliche Durchschnitt offener Teilmengen von X ist offen.

Definition

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst **stetig** im Punkt $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ mit } d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \ \forall x \in X$$

f ist stetig auf X falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$ ist.

Ist $X \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$ auf X und $\mathbb{R}$, so erhalten wir den bekannten Stetigkeitsbegriff.

Definition

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst **gleichmässig stetig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ mit } d_x(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \ \forall x_1, x_2 \in X$$

Definition

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst **Lipschitz stetig**, falls

$$\exists L > 0 \text{ (reell) mit } d_y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_x(x_1, x_2)$$

Definition

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst **Isometrie**, falls

$$d_y(f(x_1), f(x_2)) = d_x(x_1, x_2) \ \forall x_1, x_2 \in X$$

Bemerkung

f ist eine Isometrie $\Rightarrow$ f ist Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig

Proposition

Seien (X,d) und (Y,d) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen. $f^{-1} = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$.
3. Ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $a \in X$, so ist $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergent, mit Grenzwert $f(a)$.
4. Für alle $x \in X$ und $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass $d(x, x_1) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_1)) < \varepsilon$.

5.2 Konvergenz von Folgen in einem metrischen Raum

Definition

Sei X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. Das Bild $a(n)$ von $n \in \mathbb{N}$ schreibt man auch als a_n und bezeichnet es als das n-te **Folgenglied** von a. Anstatt $a : N \to X$ schreibt man oft $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heisst **konstant**, falls $a_n = a_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, und **schliesslich konstant**, falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n = a_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$.

Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Ein Element $a \in X$ heisst **Grenzwert** oder **Limes** falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

Proposition

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Sind $a, b \in X$ Grenzwerte dieser Folge, so gilt $a = b$.

Definition

Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ heisst **konvergent**, falls ein Grenzwert $a \in X$ für diese Folge existiert. Wir schreiben $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Definition

Folgen, die nicht konvergieren, nennt man **divergent**.

Definition

Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in einem metrischen Raum (X,d) heisst **beschränkt**, falls eine reelle Zahl $R > 0$ gibt, so dass $d(x_n, x_m) \leq R$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Definition

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Ein Element $a \in X$ heisst **Häufungspunkt** der Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \text{ mit } d(x_n, a) < \varepsilon$$

Bemerkung

Häufungspunkte einer Folge sind im Allgemeinen nicht das selbe wie Häufungspunkte des Bildes $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Bemerkung

Eine Folge kann mehrere Häufungspunkte haben, aber nur einen Grenzwert.

Proposition

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergierende Folge in (X, d) mit Grenzwert $a \in X$. Dann ist a der einzige Häufungspunkt dieser Folge.

Definition

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in einer Menge X. Eine **Teilfolge** von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Folge der Form $(x_{f(n)})_{n=0}^{\infty}$, wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine strend monoton steigende Funktion ist.

Lemma

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum. Jede Teilfolge von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, und hat den selben Grenzwert wie $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Proposition

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Ein Element $a \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, wenn es eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit Grenzwert a gibt.

Korollar

Eine konvergierende Folge hat genau einen Häufungspunkt, und zwar ihren Grenzwert.

Definition

Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in einem metrischen Raum ist eine **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall m, n \geq N$$

Proposition

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Definition

Ein metrischer Raum (X, d) heisst **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.

Bemerkung

Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständig. $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

Definition

Als **kanonische Einbettung** $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die injektive, lineare Abbildung die $q \in \mathbb{Q}$ die Klasse der konstanten Folgen mit Wert q zuordnet.

Satz (Banach'scher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein nicht leerer, vollständiger metrischer Raum, seien $x, y \in X$ und sei $T : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft: Für eine reelle Zahl $0 \leq \lambda < 1$ gilt

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$$

Dann existiert ein eindeutiges Element $a \in X$ mit $T(a) = a$.

5.3 Folgen reeller und komplexer Zahlen

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f ist genau dann stetig bei x_0, wenn für jede konvergente Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ auch die Folge $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ gilt.

Bemerkung

Grob gesagt ist der Inhalt dieses Satzes, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn sie konvergente Folgen auf konvergenten Folgen abbildet, mit dem richtigen Grenzwert. Dies bezeichnet man auch als **Folgen-stetigkeit**.

Proposition (Rechenregeln)

Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x_n)_{n=0}^{\infty} + (y_n)_{n=0}^{\infty} &= (x_n + y_n)_{n=0}^{\infty} \\
\alpha \cdot (x_n)_{n=0}^{\infty} &= (\alpha x_n)_{n=0}^{\infty} \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \\
\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \\
\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) &= (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n) \\
\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n) &= \alpha \lim_{n\to\infty} x_n \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \\
\lim_{n\to\infty} (x_n^{-1}) &= (\lim_{n\to\infty} x_n)^{-1}
\end{aligned}$$

Bei letzterem ist wichtig: $x_n \neq= 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Ausserdem konvergieren alle obigen Folgen. Insbersondere bildet die Menge der konvergenten Folgen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ einen Unterraum und Bildung des Grenzwertes ist eine lineare Abbildung von diesem Unterraum nach $\mathbb{R}$

Proposition

Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten $A = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $B = \lim_{n\to\infty} y_n$.
1. Falls $A < B$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < y_n$ für alle $n \geq N$.
2. Falls $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $A \leq B$.

Lemma (Sandwich)

Es seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen, so dass für ein $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\mathrm{x}_n \leq \mathrm{y}_n \leq z_n$ für alle $n \geq N$ gelten. Angenommen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ sind konvergent und haben den selben Grenzwert. Dann ist auch die Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

Bemerkung

Beschränkte Folgen reeller Zahlen besitzen immer mindestens einen Häufungspunkt, oder äquivalent dazu, konvergierende Teilfolgen. Ausserdem sind monotone und Beschränkte Folgen stets konvergent.

Satz

Eine monotone Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Falls die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton wachsend ist, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und falls die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend ist, so gilt entsprechend

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Definition

Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ heisst **monoton steigend**, falls $x_n \leq x_m$ für alle $n \leq m \ \in \mathbb{N}$. Analoge Definition ür streng monoton steigend.

Satz

Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

Definition

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Die reellen Zahlen definiert durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\{x_k \mid k \geq n\}\right) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf\{x_k \mid k \geq n\}\right)$$

heissen **Limes superior**, respektive **Limes inferior** der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Satz

Der Limes Superior $A = \limsup_{\to\infty} x_n$ einer beschränkten Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ erfüllt folgende Eigenschaften: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Folgenglieder x_n mit $x_n > A + \varepsilon$, und unendlich viele Folgenglieder x_n mit $x_n > A - \varepsilon$.

Korollar

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt, und besitzt konvergente Teilfolgen.

Korollar

Jede beschränkte Teilfolge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Korollar

Eine beschränkte Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn folgendes gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

Satz

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$.

Definition (Uneigentliche Grenzwerte)

Sei $xFolge$ eine Folge reeller Zahlen. Wir sagen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ **divergiert gegen** $+\infty$, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

falls für jede reelle Zahl $R > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existert, so, dass $x_n > R$ für alle $n \geq N$ gilt. Genauso sagen wir, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ **gegen** $-\infty$ **divergiert**, falls für jede reelle Zahl $R < 0$ ein $N \in \mathbb{N}$existert, so, dass $x_n < R$ für alle $n \geq N$ gilt. In beiden Fällen sprechen wir von **uneigentlichen Grenzwerten**.

Proposition

Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n = x_n + iy_n$. Also $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:
(1) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegebn $C = A + Bi \Leftrightarrow (x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen A und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen B.
(2) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt $\Leftrightarrow (x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ sind beschränkt.
(3) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchy $\Leftrightarrow (x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ sind Cauchy

Korollar

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{C}$.

Satz

Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Satz

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständige metrische Räume.

5.4 Die Exponentialfunktion

Proposition

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ist konvergent, und ihr Grenzwert ist eine positive reelle Zahl.

Definition

Die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist die durch

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion. Die **Euersche Zahl** $e \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv, streng monoton steigend, und stetig. Ausserdem gilt:

$$\begin{aligned} \exp(0) &= 1 \\ \exp(-x) &= \exp(x)^{-1} \quad \text{für alle } x \in X \\ \exp(x+y) &= \exp(x)\exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Satz

Der Logarithmus $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist eine streng monoton wachsende, stetige und bijektive Funktion. Des weiteren gilt:

$$\begin{aligned} \log(1) &= 0 \\ \log(a^{-1}) &= -\log(a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}_{>0} \\ \log(ab) &= \log(a) + log(b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}_{>0} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist die eindeutige Umkehrfunktion von $\exp :$.

Lemma (Bernoulli Ungleichung)

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$$

Bemerkung

Für eine positive Zahl $a > 0$ und beliebigen Exponenten $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$a^x := \exp(x \log(a))$$

5.5 Grenzwerte von Funktionen

In diesem ganzen Kapitel gilt folgendes: Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, $x_0 \in D$ oder x_0 ist Häufungspunkt von D.

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine reelle Zahl A heisst **Grenzwert von $f(x)$ für** $x \to x_0$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, mit der Eigenschaft

$$x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Bemerkung

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls es einen Grenzwert a von f bei x_0 gibt, dann ist dieser Grenzwert eindeutig bestimmt und wir schreiben

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Lemma

Sind f und g Funktionen auf D, derart, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

existieren, so existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = A + B \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$$

Lemma

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist x_0 ein Element von D, so ist f genau dann stetig bei x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Bemerkung

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Auch wenn f unstetig ist bei x_0, kann ein Grenzwert $A = \lim_{x \to x_0} f^*(x)$ existieren, wobei f^* die einschränkung von f ist auf die Menge $D \setminus \{x_0\}$. Unter diesen Umständen nennt man den Punkt $x_0 \in D$ eine **hebbare Unstetigkeitsstelle** von f. Die Funktion definiert durch

$$\overline{f} : D \cup x_0 \to \mathbb{R}$$
$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D \\ a & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

ist stetig bei x_0. Somit wurde die Unstetigkeitsstelle von $\overline{f}$ behoben, in dem wir den Wert der Funktion f an der Stelle x_0 durch A ersetzt haben. Wir nennen A auch einen Grenzwert von f in einer **punktierten Umgebung** von x_0. Wir nennen $\overline{f}$ die **stetige Fortsetzung** von f auf $D \cup \{x_0\}$.

Lemma

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ in D auch $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = A$ gilt.

Proposition

Sei $f : D rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $x_0 \in D$:
(1) Die Funktion f ist stetig bei x_0
(2) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$
(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
(4) Für jede Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ in D mit $x_0 = \lim_{n \to \infty} y_n$ gilt $\lim_{n \to \infty} = f(x_0)$.

Proposition

Seien $D, E \in \mathbb{R}$, sei $f : D \to E$ so, dass $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ existeirt und $a \in E$ gilt. Sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die bei $a \in E$ stetig ist. Dann gilt: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(a)$

Proposition

Wir können konventionen für uneigentliche Grenzwerte einführen. Wir sagen, dass $f(x)$ gegen $+\infty$ für $x \to x_0$ divergiert und schreiben $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, falls für jede reelle Zahl $R > 0$ ein $\delta > 0$ existert, mit der Eigenschaft dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R$ für alle $x \in D$.

Definition

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $D \cap [x_0, x_0 + delta) \neq \varnothing$ für alle $\delta > 0$ gilt. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine reelle Zahl A heisst **rechtseitiger Grenzwert** von $f(x)$ bei x_0, falls jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, mit

$$x \in D \cap [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Bemerkung

Existiert der rechtseitige Grenzwert A von f an der Stelle x_0, so benutzen wir die Notation

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \leq x}} f(x)$$

um dies auszudrücken. Falls x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ ist, so können wir auch die punktierte Version des rechtseitigen Grenzwertes

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

definieren. Analog zum rechtseitigen Grenzwert können wir auch den **linksseitigen Grenzwert** definieren.

Definition

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $D \cap (R, \infty) \neq \varnothing$ für alle $R > 0$ gilt. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine reelle Zahl A heisst **Grenzwert von** $f(x)$ **für** $x \to \infty$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert, mit

$$x \in D \cap (R, \infty) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Bemerkung

Tabelle 1: Echte Grenzwerte für $x \to x_0$

Notation	U_δ, nichtleer für alle $\delta > 0$	Bedingung: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$	$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$	$x \in U_\delta \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ $x \neq x_0$	$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$	$x \in U_\delta \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ $x \geq x_0$	$[x_0, x_0 + \delta) \cap D$	$x \in U_\delta \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ $x > x_0$	$(x_0, x_0 + \delta) \cap D$	$x \in U_\delta \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ $x \leq x_0$	$(x_0 - \delta, x_0] \cap D$	$x \in U_\delta \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ $x < x_0$	$(x_0 - \delta, x_0) \cap D$	$x \in U_\delta \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$

Tabelle 2: Uneigentliche Grenzwerte für $x \to x_0$

Notation	U_δ, nichtleer für alle $\delta > 0$	Bedingung: $\forall M > 0 \exists \delta > 0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\star$	Entspr. $\star$ wie in Tabelle 1	$x \in U_\delta \Longrightarrow f(x) > M$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ $\therefore$	Entspr. $\star$ wie in Tabelle 1	$x \in U_\delta \Longrightarrow f(x) < -M$

Tabelle 3: Echte Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Notation	U_R, nichtleer für alle $R > 0$	Bedingung: $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$	$(R, \infty) \cap D$	$x \in U_R \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$	$(-\infty, -R) \cap D$	$x \in U_R \Longrightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$

Tabelle 4: Uneigentliche Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Notation	U_R, nichtleer für alle $R > 0$	Bedingung: $\forall M > 0 \exists R > 0$
$\lim_{x \to \star} f(x) = +\infty$	Entspr. $\star$ wie in Tabelle 3	$x \in U_R \Longrightarrow f(x) > M$
$\lim_{x \to \star} f(x) = -\infty$	Entspr. $\star$ wie in Tabelle 3	$x \in U_R \Longrightarrow f(x) < -M$

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Falls der rechtseitige Grenzwert

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq x_0}} f(x)$$

existiert, dann sagen wir, dass f **rechtseitig stetig** ist bei x_0. Analog dazu definieren wir **linksseitige Stetigkeit**. Wir nennen $x_0 \in D$ eine **Sprungstelle**, falls die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

beide existieren, aber verschieden sind.

Definition (Landau Notation)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Element von D oder ein Häufungspunkt von D. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wir schreiben

(1) $$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0$$

falles ein $\delta > 0$ und eine reelle Zahl $M > 0$ existieren, mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M\,|g(x)|$$

für alle $x \in D$.

(2) $$f = O(g(x)) \quad \text{für } x \to -\infty$$

falls ein $R \in \mathbb{R}$ und ein $M > 0$ existeren, mit

$$x < R \Rightarrow |f(x)| \leq M\,|g(x)|$$

für ein $x \in D$.

(3) $$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to x_0$$

falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $delta > 0$ existert, mit

$$|x - x_0| \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|$$

für ein $x \in D$.
Falls $g(x) \neq 0$ für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gibt, dann ist die Aussage $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ äquivalent zu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

5.6 Normen und Konvergenzen auf Vektorräumen

In diesem Kapitel legen wir einen Körper $\mathbb{K}$ fest, der entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

Definition

Sei V ein Vekorraum über $\mathbb{K}$. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, die folgende drei Eigenschaften erfüllt.
(1) (Definitheit) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
(2) (Homogenität) Für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw $\alpha \in \mathbb{C}$) gilt $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$.
(3) (Dreiecksungleichung) Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\|v_1 + v_1\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.
Man nennt V gemeinsam mit der Norm $\|\cdot\|$ einen **normierten Vektorraum**.

Beispiel

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die **Maximumsnorm** oder **Unendlichnorm** $\|\cdot\|_\infty$ und die **1-Norm** $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{K}^n$ sind definiert durch

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\} \qquad \text{und} \qquad \|v\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |v_j|$$

für $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$. Allgemeiner kann man für eine reelle Zahl $p \geq 1$ folgende Norm definieren

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|\right)^{\frac{1}{p}}$$

Man nennt diese **p-Norm**. Auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lässt sich folgende Norm definieren für ein $f \in V$.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Diese Norm wird L^1**-Norm** genannt. Allgemeiner kann man für reelle Zahlen $p \geq 1$ folgende Norm definieren

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Eine solche Norm nennt man **p-Norm** oder L^p**-Norm**. Das L steht für Lebesgue. Die Maximumsnorm auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen ist wie folgt definiert für ein $f \in V$:

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

Diese nennt man auch ∞**-Norm**, L^∞**-Norm** oder auch **sup-Norm**.

Die **Operatornorm** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist durch

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Ax\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\|_2 \leq 1\}$$

definiert, wobei $\|\cdot\|_2$ für die Euklidische Norm steht. Des Weiteren gilt

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|x\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Definition

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auch V. Wir nennen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ **äquivalent**, falls Konstanten $A > 0$ und $B > 0$ existieren mit

$$\|v\|_1 \leq A \cdot \|v\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|v\|_2 \leq B \cdot \|v\|_1 \qquad \forall v \in V$$

Lemma

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann ist

$$d : V \times V \to \mathbb{R} \qquad\qquad d(v, w) = \|v - w\|$$

eine Metrik auf V.

Definition

Wir bezeichnen die im obigen Lemma gegebene Metrik die von der Norm $\|\cdot\|$ **induzierte Metrik** auf V.

Satz

Sei V ein $\mathbb{K}$ Vektorraum, seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent.
(2) Die Identitätsabbildungen $V_{\|\cdot\|_1} \xrightarrow{id} V_{\|\cdot\|_2}$ und $V_{\|\cdot\|_2} \xrightarrow{id} V_{\|\cdot\|_1}$ sind stetig.
(3) Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist offen bezüglich der von $\|\cdot\|_1$ induzierten Metrik, genau dann, wenn sie offen bezüglich der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Metrik ist.
(4) Eine Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ in V konvergiert nach $w \in V$ bezüglich der $\|\cdot\|_1$ genau dann, wenn $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen w bezüglich der $\|\cdot\|_2$ konvergiert.

Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ein **inneres Produkt** oder **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung

$$\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

die folgende Eigenschaften erfüllt
(1) (Sesquilinearität) Für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v, w \rangle &= \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle \qquad \text{und} \\ \langle u, \alpha v + \beta w \rangle &= \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

(2) (Symmetrie) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$.
(3) ((positiv)Definitheit) Für alle $v \in V$ ist $\langle v, v \rangle$ reell und nichtnegativ, und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
Das $\bar{\cdot}$ steht für die komplexe Konjugation.

Satz (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $\langle -,- \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und sei $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dann gilt die Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$$

für alle $v, w \in V$. Des weiteren gilt Gleichheit genau dann, wenn v und w linear unabhängig sind.

Proposition

Sei V ein $\mathbb{K}$ Vekorraum, $\langle -,- \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann definiert $v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V. Diese Norm wird **2-Norm** oder **Euklidische Norm** genannt.

Lemma

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die Norm auf V. Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ konvergierende Folge in V mit Grenzwert $w \in V$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n\| = \|w\|$$

Lemma

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf V. Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in V. Falls die Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ konvergiert, dann konvergiert sie auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$. Die Grenzwerte sind in diesem Fall gleich.

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vekorraum. Alle Normen auf V sind zueinander äquivalent.

Lemma

Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine Folge in $\mathbb{K}^d$ konvergiert genau dann bezüglich der euklidischen Norm, wenn sie koordinatenweise konvergiert.

Satz (Heine-Borell)

Sei $d \in \mathbb{N}$. Jede bezüglich der euklidischen Norm beschränkte Folge in $\mathbb{K}^d$ besitzt eine konvergierende Teilfolge, und einen Häufungspunkt.

Korollar

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bezüglich der euklidischen Norm ist jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergent.

6 Reihen, Funktionenfolgen und Potenzreihen

6.1 Reihen komplexer Zahlen

Definition

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, und sei A eine komplexe Zahl. Die Notationen

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad A = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

sind gleichbedeutend. Im Zusammenhang, in dem wir uns für den Grenzwert der **Partialsummen** der Folge $(a_k)_k$ interessieren, sprechen wir üblicherweise nicht von einer Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sondern von der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

und Konvergenz der Reihe. Wir nennen a_n das **n-te Glied** oder den **n-ten Summanden** der Reihe. Wir nenne die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergent**, falls der Grenzwert existiert, wobei wir diesen dann als **Wert der Reihe** bezeichnen. Ansonsten nennen wir die Reihe **divergent**.

Proposition

Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n)_n$ eine **Nullfolge**, das heisst, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bemerkung

Die **harmonische Reihe** divergiert. Sie ist wie folgt gegeben:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Lemma

Seien $sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Insbesondere bilden konvergente Reihen einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ und der Wert der Reihe stellt eine lineare Abbildung auf diesen Vektorraum nach $\mathbb{C}$ dar.

Lemma

Sei $\sum_{k=0}^{\infty}$ eine Reihe. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ist die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

Lemma

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Definiere $A_1 = a_1 + \cdots + a_{n_1}$ und $A_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ für $k \geq 2$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Proposition

Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen Gliedern $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bilden die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine monoton wachsende Folge. Falls diese Folge der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ansonsten gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} s_n = \infty$$

Korollar

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1 \infty b_k}$ zwei Reihen mit der Eigenschaft $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und insbesondere gelten die Implikationen

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divertent} \Longrightarrow \sum_{K=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Diese beiden Implikationen treffen auch dann zu, wenn $0 \leq a_n \leq b_n$ nur für alle hinreichenden grossen $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man nennt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine Majorante der Reihe $\sum_{K=1}^{\infty} a_k$, und die letztere eine Minorante der Reihe $\sum_{K=1}^{\infty} b_k$. Daher spricht man auch vom **Majoranten-** und dem **Minorantenkriterium**.

Proposition (Verdichtungskriterium)

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert}$$

Definition

Wir sagen, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit komplexen Summanden **absolut konvergiert**, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **bedingt konvergent**, falls sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Proposition

Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Falls $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}$ und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

Beispiel

Die **alternierende harmonische Reihe** konvergiert bedingt.

Satz (Riemann'scher Umordnungssatz)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingte konvergente Reihe mit reellen Gliedern, und sei $A \in \mathbb{R}$. Es existiert eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Definition

Für eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nichtnegativer Zahlen bezeichnen wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ als eine **alternierende** Reihe.

Proposition (Leibnitz-Kriterium)

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

Satz (Cauchy-Kriterium)

Die Reihe komplexer Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$gibt, so dass für $n \geq m \geq N$ folgendes erfüllt ist:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

6.2 Absolute Konvergenz

Die Definition von absoluter Konvergenz, so wie die erste Proposition, sind im vorherigen Kapitel zu finden.

Korollar (Majorantenkriterium von Weierstrass)

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe und $(b_n)_n$ eine reelle Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für alle hinreichend grossen $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, und daher auch konvergent.

Korollar (Cauchy-Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen und

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

("Grösster Häufungspunkt"). Dann gilt:
Falls $\alpha < 1$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
Falls $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Korollar (D'Alemberts Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle n $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existiert. Dann gilt:
Falls $\alpha < 1$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
Falls $\alpha > 1$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz (Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Satz (Produktsatz)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, und sei eine Bijektion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $\alpha(n) = (\varphi(n), \psi(n))$ gegeben. Dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut.

Korollar (Cauchy-Produkt)

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit komplexen Gliedern sind, dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right)$ absolut konvergent ist.

6.3 Konvergenz von Funktonenfolgen

Definition

Sei D eine Menge, sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert **punktweise** gegen f, falls für jedes $x \in D$ die Folge komplexer Zahlen $(f_n(x))_{n=0}^{\infty}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir bezeichnen die Funktion f in dem Fall als den **punktweisen Grenzwert** der Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$.

Definition

Sei D eine Menge, sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert **gleichmässig** gegen f, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$existiert, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ die folgende Abschätzung gilt.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Satz

Sei $D \subset \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ die gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Satz

Sei $[a, b]$ ein Intervall und sei $(f_n : [a, b] \to \mathbb{C})_{n=0}^{\infty}$ eine Folge integrierbarer Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx$$

6.4 Potenzreihen

Definition

Sei K ein Körper. Eine **Potenzreihe** mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ist eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{K}$, suggestiv geschrieben als Reihe

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

wobei T als **Variable** bezeichnet wird und $a_n \in \mathbb{K}$ als **Koeffizient**. Addition und Multiplikation sind wie folgt definiert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n = \sum_{n=0} (a_n + b_n) T^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) T^n$$

Wir schreiben $K[\![T]\!]$ für den dadurch entstehenden Ring von Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$.

Definition

Sei $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ eine formale Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten. Der **Konverenzradius** von f ist die Zahl $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ oder das Symbol $R = \infty$, definiert duch

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho = \infty \\ \rho^{-1} & \text{falls } 0 < \rho < \infty \\ \infty & \text{falls } \rho = 0 \end{cases}$$

Bemerkung

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R, und sei r eine positive reelle Zahl mit $r < R$. Schreibe $D = \overline{B(0,r)}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ für die Funktion gegeben durch $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_n z^k$.
(1) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$, und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.
(2) Für $z \in B(0,R)$, setze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmässig gegen die Funktion $f|_D$ auf D.
Insbesondere definiert die Potenzreihe die stetige Abbildung $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$.

Lemma

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ (Anstatt $\mathbb{R}$ kann man auch $\mathbb{C}$ nehmen) und $f : D \to \mathbb{R}$. Angenommen f_n ist stetig für alle $n \geq 0$ und $\forall \varepsilon_0\ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon_0\ \forall n \geq N$. (i.e. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$) Dann ist f stetig.

Lemma

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius R ist gegeben durch

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Proposition

Sei $R \geq 0$, und seien $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty}$ und $g(T) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n$ Potenzreihen mit Kovergenzradius mindestens R. Dann haben die Summe $f(T) + g(T)$ und das Produkt $f(T)g(T)$ Konverenzradien mindestens R.

Lemma

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$. Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a,b]$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \; dx = \int_a^b f \; dx$$

Satz (Abel'scher Grenzwertsatz)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R, derart, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{\substack{t\to R \\ t<R}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Anders ausgedrückt: Dann ist die Funktion $f : (-R, R] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ist stetig bei R.

Satz

Sei $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$eine Potenzreihe mit Konverenzradius $R > 0$. Dann hat die Potenzreihe

$$F(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} T^{n+1}$$

denselben Konverenzradius R, und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \forall a, b \in (-R, R)$$

6.5 Trigonometrische Funktionen

Definition

Die **Exponentialreihe** ist die Formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \in \mathbb{C}[\![T]\!]$. Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass der Konvergenzradius R unendlich ist. Das heisst, sie konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ und die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist stetig.

Proposition

Die obige Definition gilt auch für alle $x \in \mathbb{R}$.

Korollar

Für $a \leq b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b \exp(x)dx = \exp(b) - \exp(a)$$

Definition

Die **komplexe Exponentialabbildung** ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Für eine positive reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir $a^z = \exp(z \log(a))$, und insbesondere auch $e^z = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz

Die komplexe Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig. Des Weiteren gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{und} \quad |\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt $|\exp(iy)| = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Definition

Wir definieren die **Sinusfunktion** und die **Kosinusfunktion** bei $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Die beiden Potenzreihen konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ und definieren stetige Funktionen.

Bemerkung

Die Sinusfunktion ist **ungerade**, das heisst es gilt $\sin(-z) = -\sin(z)$, und die Kosinusfunktion ist **gerade**, es gilt $\cos(-z) = \cos(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten folgende Relationen zwischen Exponential, Sinus- und Kosinusfunktion.

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$$
$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$
$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

Insbesondere gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Additionsformeln:

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

Bemerkung

Im Fall $z = w \in \mathbb{C}$ ergeben sich insbesondere **Winkelverdopplungsformeln**

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z) \quad \text{und} \quad \cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

Im Fall $w = -z$ folgt die **Kreisgleichung** für Sinus und Kosinus für alle $z \in \mathbb{C}$.

$$1 = \cos(z)^2 + \sin(z)^2$$

Satz

Es gibt genau eine Zahl $\pi \in (0, 4)$ mit $\sin(\pi) = 0$. Für diese Zahl gilt

$$\exp(2\pi i) = 1$$

Korollar

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z) \qquad \cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z)$$
$$\sin(z+\pi) = -\sin(z) \qquad \cos(z+\pi) = -\cos(z)$$
$$\sin(z+2\pi) = \sin(z) \qquad \cos(z+2\pi) = \cos(z)$$

Bemerkung

Der Sinus und der Kosinus sind periodisch mit Periode 2π.

Proposition

Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunkion können wir komplexe Zahlen in **Polarkoordinaten** ausdrücken, das heisst, in der Form

$$z = r\exp(i\theta) = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$$

wobei r der Abstand vom Ursprung $0 \in \mathbb{C}$ zu z ist, also der Betrag $r = |z|$ von z, und θ der Winkel, der zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eingeschlossen ist. Falls $z \neq 0$ gilt, so ist der Winkel θ eindeutig bestimmt, und wird als **Argument** von z bezeichnet und als $\theta = \arg(z)$ geschrieben. Die Menge der komplexen Zahlem mit Absolutbetrag Eins ist demnach

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{\exp(i\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

und wird als der **Einheitskreis** in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Proposition (Existenz von Polarkoordinaten)

Für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $z = r\exp(i\theta)$

Proposition

In Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ neu interpretieren. Sind $z = r\exp(i\varphi)$ und $w = s\exp(i\psi)$ komplexe Zahlen, dann gilt

$$zw = rs\exp(i(\varphi + \psi))$$

Bei Multiplikation von komplexen Zahlen multiplizieren sich die Längen der Vektoren und addieren sich die Winkel.

Definition

Die **Tangensfunktion** und die **Kotangensfunktion** sind durch

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{und} \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

definiert, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) \neq 0$, beziehungsweise $\sin(z) \neq 0$.

Definition

Der **Sinus Hyperbolicus** und der **Kosinus Hyperbolicus** sind die durch die Potenzreihen

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

definierten Funktionen. Es gilt

$$\sinh(z) = -i\sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

und also $\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Der **Tangens** und der **Kotangens Hyperbolicus** sind durch

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad \text{und} \quad \coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cosh(z) \neq 0$, beziehungsweise mit $\sinh(z) \neq 0$. Die Funktionen sinh und tanh sind ungerade und cosh ist gerade. Es gelten folgende Additionsformeln

$$\sinh(z + w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$$
$$\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$, sowie die Hyperbelgleichung

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Des Weiteren gilt

$$\int_a^b \sinh(x)dx = \cosh(b) - \cosh(a) \qquad \text{und} \qquad \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b) - \sinh(a)$$

für alle $a < b \in \mathbb{R}$.

7 Differentialrechnung

7.1 Die Ableitung

In diesem Kapitel definieren wir eine allgemeine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte. Das heisst, jedes Element $x \in D$ ist ein Häufungspunkt von D. Ein Beispiel für solch eine Menge D sind Intervalle. Falls nicht explizit anders erwähnt, sind alle Funktionen als reellwertig vorausgesetzt.

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f bei x_0 **differenzierbar** ist, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir $f'(x_0)$ die **Ableitung** von f bei x_0. Falls f bei jedem Häufungspunkt von D in D differenzierbar ist, dann sagen wir auch, dass f auf D **differenzierbar** ist und nennen die daraus entstehende Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ die **Ableitung** von f. Alternative Notation für die Ableitung von f sind $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{df}{dx}$ oder auch Df. Falls $x_0 \in D$ ein rechtseitiger Häufungspunkt von D ist, dann ist f bei x_0 **rechtseitig differenzierbar**, wenn die **rechtseitige Ableitung**

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x> x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h> 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. **Linksseitige Differenzierbarkeit** und die **Linksseitige Ableitung** $f'_-(x_0)$ werden analog über die Bewegung $x \to x_0$ mit $x < x_0$ definiert.

Definition

Eine **affine** Funktion ist eine Funktion der Form $x \mapsto sx + r$, für reelle Zahlen s und r. Der Graph einer affinen Funktion ist eine nichtvertikale **Gerade** in $\mathbb{R}^2$. Der Parameter s in der Gleichung $y = sx + r$ wird die **Steigung** genannt. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, so wird die Funktion $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0)$ **lineare Approximation** von f bei x_0 oder **Tangente** von f bei x_0 genannt.

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die **höhere Ableitungen** von f, sofern sei existieren, durch

$$f^{(0)} = f\ , \quad f^{(1)} = f'\ , \quad f^{(2)} = f''\ , \ \dots\ , \quad f^{(n+1)} = (f^n)'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $f^{(n)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, heisst f **n-mal differenzierbar**. Falls die n-te Ableitung f^n zusätzlich stetig ist, heisst f **n-mal stetig differenzierbar**. Die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D bezeichnen wir mit $C^n(D)$. Rekursiv definieren wir für $n \geq 1$

$$C^n(D) = \left\{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar und } f' \in C^{n-1}(D) \right\}$$

und sagen $f \in C^n(D)$ sei von **Klasse** C^n. Schliesslich definieren wir

$$C^\infty(D) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(D)$$

und bezeichnen Funktionen $f \in C^\infty(D)$ als **glatt** oder von **Klasse** C^∞

Bemerkung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f ableitbar bei $x_0 \in D$, dann ist f stetig bei x_0.

Proposition

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und ableitbar an der Stelle $x_0 \in D$. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ ableitbar bei x_0 und es gilt:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)(f \cdot g)'(x_0) \qquad = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0)$$

Korollar

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ ebenso n-mal differenzierbar und es gilt $f^{(n)} + g^{(n)} = (f+g)^{(n)}$ sowie

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Insbesondere ist jedes skalare Vielfache n-mal differenzierbar und $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Korollar

Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Satz (Kettenregel)

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ ein bei x_0 differenzierbare Funktion, so dass $y_0 = f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine bei y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Korollar

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen, so dass jeder Punkt in D respektive E ein Häufungspunkt von D respektive E ist. Seien $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ beides n-mal differenzierbare Funktionen. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ auch n-mal differenzierbar.

Korollar (Quotientenregel)

Sei $d \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ bei x_0 differenzierbar. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist, dann ist auch $\frac{f}{g}$ bei x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Satz

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $f : D \to E$ eine stetige, bijektive Abbildung, deren inverse Abbildung $f^{-1} : E \to D$ ebenfalls stetig ist. Falls f in dem Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

7.2 Zentrale Sätze der Differentialrechnung

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 ein **lokales Maximum** hat, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$. Falls es sich um eine strikte Ungleichung handelt, also $f(x) < f(x_0)$, dann hat f in x_0 ein **isoliertes lokales Maximum**. Der Wert $f(x_0)$ wird auch ein **lokaler Maximalwert** von f genannt. Ein **lokales Minimum**, ein **isoliertes lokales Minimum** und ein **lokaler Minimalwert** von f sind analog definiert. Des Weiteren nennen wir x_0 ein **lokales Extremum** von f und $f(x_0)$ einen **lokalen Extremwert** von f, falls f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum in x_0 hat.

Proposition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und f eine reellwertige Funktion auf D. Angenommen f ist in einem lokalen Extremum $x_0 \in D$ differenzierbar und x_0 ist sowohl ein rechtsseitiger als auch ein linksseitiger Häufungspunkt von D. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Korollar

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f. Dann ist mindestens eine der folgenden Aussagen wahr.
(1) x_0 ist ein Randpunkt von I.
(2) f ist nicht ableitbar bei x_0.
(3) f ist bei x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.
Insbesondere sind alle lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion auf einem offenen Intervall Nullstellen der Ableitung.

Satz (Mittelwertsatz, Rolle)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, so existert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz (Mittelwertsatz)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz (Mittelwertsatz nach Cauchy)

Seien f und g stetige Runktionen auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass f und g auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) = f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) \;\Leftrightarrow\; \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$$

Proposition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall das nicht leer ist und nicht aus einem einzigen Punkt besteht. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f' \geq 0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton wachsend}$$

Die Funktion f ist genau dann streng monoton wachsend, wenn es kein nichtleeres, offenes Intervall $J \subseteq I$ gibt mit $f'|_J = 0$. Dies ist äquivalent dazu, dass bei der obigen Äquivalenz ein striktes ungleich Zeichen steht.

Korollar

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann konstant, wenn f differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Interfall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heisst f **konvex**, falls für alle $a < b \in I$ und alle $t \in (0,1)$ die Ungleichung

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

gilt. Wir sagen, dass f **streng konvex** ist, falls in der obigen Ungleichung eine strikte Ungleichung gilt. Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst **(streng) konkav**, wenn $f = -g$ (streng) konvex ist.
Merksatz: "Hat die Katze Sex, wird der Bauch konvex."

Korollar

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $a < x < b \in I$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Proposition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.

Korollar

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, dann ist f konvex. Falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng konvex.

Satz (Regel von de l'Hôpital)

Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktionen. Angenommen die folgenden Hypothesen sind erfüllt.
(1) Die Funktion f und g sind stetig.
(2) Es gilt $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$
(3) Es gilt $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to a} = 0$.
(4) Der Grenzwert $A = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existert.
Dann existert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

7.3 Ableitung trigonometrischer Funktionen

Einige wichtige Ableitungen:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$$
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\arctan'(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

8 Die Ableitung und das Riemann Integral

8.1 Der Fundamentalsatz

Wir legen für dieses Kapitel ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ fest, das nicht leer ist und nicht aus einem einzelnen Punkt besteht. Integrierbar heisst Riemann-integrierbar.

Definition

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst **lokal integrierbar**, falls für alle $a < b \in I$ die eingeschränkte Funktion $f|_{[a,b]}$ integrierbar ist.

Definition

Sei $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Wir nennen $F : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(f)dt = \begin{cases} \int_a^x f(t)dt & \text{falls } a < x \\ 0 & \text{falls } a = x \\ -\int_a^x f(t)dt & \text{falls } a > x \end{cases}$$

ein **partikuläres/ spezielles Integral** von f.

Satz (Fundamentalsatz der Interal- und Differentialrechnung)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei F ein partikuläres Integral von f gegeben durch:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = -\int_x^a f(t)dt$$

Falls f bei $x_0 \in I$ stetig ist, so ist F bei x_0 differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$. Wir nennen die Funktion F **Stammfunktion** von f. Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt so eine Stammfunktion. Zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich durch eine Konstante.

Korollar

$D : C^1(I) \to C^0(I)$ ist surjektiv.

Korollar (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Korollar

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

für alle $x \in (-R, R)$, wobei die Potenzreihe rechts ebenfalls Konvergenzradius R hat.

8.2 Integrationsmethoden

Wir legen für dieses Kapitel ein nichtleeres Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ fest, das nicht nur aus einem isolierten Punkt besteht. Falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, so sind alle Funktionen in diesem Kapitel reellwertige Funktionen mit Definitionsbereich I, die auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq I$ integrierbar sind. Alle Resultate gelten analog für komplexwertige Funktionen.

Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennen wir folgendes Integral das **unbestimmte Integral** mit **Integrationskonstante** C.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Bemerkung

Seien f und g Funktionen, a und b reelle Zahlen. Aus der Linearität der Ableitung folgt

$$\int af(x) + bg(x)\ dx = a \int f(x)dx \ + \ b \int g(x)dx \ + C$$

Definition (Partielle Integration)

Seien f und g Funktionen mit Stammfunktion F, bzw G. Als **partielle Integration** bezeichnet man die folgende Identität

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \ + C$$

Definition (Substitutionsmethode)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall und sei $f : I \to J$ eine differenzierbare Funktion. Ist $G : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $g = G'$, so gilt nach der Kettenregel $G(f(x))' = g(f(x))f'(x)$ für alle $x \in I$. Daraus folgt

$$\int (g \circ f)(x)f'(x)dx = G(f(x)) + C$$

Die Funktion G ist eine Stammfunktion von g, es gilt also $G(u) = \int g(u)du$. Als **Substitutionsregel** bezeichnen wir die Identität

$$\int (g \circ f)(x)f'(x)dx = g(u)du + C$$

wobei $u = f(x)$. Die Substitutionsregel wird auch **Variablenwechsel** genannt, da man sozusagen die Variable u in $\int g(u)du$ durch $u = f(x)$ ersetzt hat.

Bemerkung

Einige wichtige Integrationen **rationaler Funktionen**. Sei dazu $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq I$ und sei $n \geq 2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \log|x-a| + C$$
$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a} + C$$
$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{\log(a^2+x^2)}{2} + C$$
$$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^n}dx = \frac{(a^2+x^2)^{1-n}}{2(1-n)} + C$$

Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Setze $a = \inf(I)$ und $b = \sup(I)$ und wähle $x_0 \in I$. Wir definieren das **uneigentliche Integral** als die Summe von Grenzwerten

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to a} \int_x^{x_0} f(t)dt + \lim_{x \to b} \int_{x_0}^x f(t)dt$$

falls beide dieser Grenzwerte existieren. In dem Fall sagen wir auch, dass das uneigentliche Integral **konvergiert**. Ansonsten nennen wir das uneigentliche Integral **divergent**. Wir benutzen die üblichen Konventionen für die Symbole $-\infty$ und $+\infty$.

Lemma

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negative, lokal integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \sup\left\{ \int_a^b f(x)dx \mid b > a \right\}$$

Satz (Integralsatz für Reihen)

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \geq \int_0^\infty f(x)dx \geq \sum_{n=0}^\infty f(n)$$

Insbesondere gilt die folgende Äquivalenz

$$\sum_{n=0}^\infty f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_0^\infty f(x)dx \text{ konvergiert}$$

8.3 Taylorreihen

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Die n-te **Taylor-Approximation** von f um einen Punkt $x_0 \in D$ ist die Polynomfunktion

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Die Koeffizienten wurden dabei gerade so gewählt, dass $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt. Falls f glatt ist, dann ist die **Taylorreihe** von f um $x_0 \in D$ definiert als die Potenzreihe

$$L(T) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} T^k$$

Ist R der Konvergenzradius dieser Reihe, so konvergiert die Reihe der reellen Zahlen

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Abstand kleiner R von x_0 und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > R$. Oft nennt man diese Summe auch **Taylorreihe**.

Satz (Taylor-Approximation)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ (oder auch $D \to \mathbb{C}$) eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in D$

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

wobei P_n die n-te Taylor-Approximation von f ist.

Korollar (Taylor-Abschätzung)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ (oder auch $D \to \mathbb{C}$) eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und sei $\delta > 0$ und $x_0 \in D$ und setze $M = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right| \mid t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\right\}$. Dann gilt

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M \cdot |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Insbesondere ist $f(x) - P_n(x) = O((x - x_0)^{n+1})$ für $x \longrightarrow x_0$.

Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $x_0 \in I$ ein Punkt im Inneren von I. Eine glatte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst **analytisch** bei x_0 falls ein $\delta > 0$ existiert, derart, dass die Taylorreihe von f um x_0 einen Konvergenzradius $R > \delta$ hat, und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ gilt. Wir sagen f sei analysisch auf I falls f analysisch in jedem Punkt von I ist.

Bemerkung

Analytische Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ sind also dadurch charakterisiert, dass es zu jedem Punkt x_0 im Inneren von I eine Potenzreihe gibt, die in einer Umgebung von x_0 gegen f konvergiert. Eine Abschätzung die garantiert, dass die Taylorreihe von f im Punkt x_0 gegen f konvergiert, ist, dass für ein $\delta > 0$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq cA^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und zwei Konstanten $c, A \geq 1$ gilt. Eine Abschätzung dieser Art findet man beispielsweise für $\exp, \sin, \cos$ und Kombinationen davon.

Satz

Seien $a < b$ reelle Zahlen, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $n \in \mathbb{N}$ und $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$.

(1) (Rechteckregel) Falls f stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})) + F_1$$

wobei der Fehler F_1 durch $|F_1| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max\{|f'(x)| \mid x \in [a,b]\}$ beschränkt ist.

(2) (Sehnentrapezregel) Falls f zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) + F_2$$

wobei der Feher F_2 durch $|F_2| \leq \frac{(b-a)^3}{6n^2} \max\{|f''(x)| \mid x \in [a,b]\}$ beschränkt ist.

(3) (Simpson-Regel) Falls f viermal stetig differenzierbar ist und n gerade ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) + F_3$$

wobei der Fehler F_3 durch $|F_3| \leq \frac{(b-a)^5}{45n^4} \max\left\{\left|f^{(4)}\right| \mid x \in [a,b]\right\}$ beschränkt ist.

9 Topologische Grundbegriffe

9.1 Topologische Räume

Definition

Ein **topologischer Raum** ist ein geordnetes Paar (X, τ) bestehend aus einer Menge X und einer Familie von Teilmengen τ von X die den Axiomen $1, 2, 3$ genügt. Wir nennen die Familie τ eine **Topologie** auf X und Teilmengen $U \subseteq X$ die zur Familie τ gehören **offene** Mengen.

1. $\varnothing \subseteq X$ ist offen, und $X \subseteq X$ ist offen.

2. Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.

3. Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.

Wir nennen eine Teilmenge $F \subseteq X$ deren Komplement offen ist eine **abgeschlossene** Teilmenge. Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heisst **Umgebung** von x, falls eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und $U \subseteq V$ existiert. Ist V offen, so nennen wir V eine **offene Umgebung** von x, und ist V abgeschlossen, so nennen wir V eine **abgeschlossene Umgebung** von x.

Bemerkung

Jeder metrischer Raum liefert einen topologischen Raum.

Definition

Sei X eine Menge. Die Familie aller Teilmengen $\tau = \mathcal{P}(X)$ ist eine Topologie. Bezüglich dieser Topologie sind also alle Teilmengen von X offen. Sie heisst **disktrete Topologie** auf X. Die Familie $\tau = \{\varnothing, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie. Sie wird **triviale Topologie** oder auch **indiskrete Topologie** genannt. Interessante Topologien sind etwa die bereits bekannten Topologie auf $\mathbb{R}$ oder auf $\mathbb{C}$. Wir nennen diese Topologien **Standardtopologien** auf $\mathbb{R}$, bzw $\mathbb{C}$. Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist analog definiert.

Definition

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die **Einschränkung** von τ auf Y ist die Topologie

$$\tau|_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\} = \{Y \cap U \mid U \subseteq X \text{ offen}\}$$

auf Y. Wir nennen sie auch **induzierte Topologie** oder **Unterraumtopologie**. Eine für die Topologie $\tau|_Y$ offene Teilmenge $V \subseteq Y$ nennen wir **relativ offen**, und eine für die Topologie $\tau|_Y$ abgeschlossene Teilmenge nennen wir auch **relativ abgeschlossen** ("offen in der Teilmenge wo es lebt").

Definition

Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Eine **stetige Abbildung** von (X, τ) nach (Y, σ) ist eine Abbildung $f : X \to Y$ so, dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Korollar

Seien X, Y und Z topologische Räume. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stetig. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist die Verknüpfung $g \circ f : X \to Z$ ebenfalls stetig. Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ im Allgemeinen nicht stetig.

Definition

Eine bijektive, stetige Abbildung deren inverses ebenfalls stetig ist, heisst **Homöomorphismus**.

Proposition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in D$ folgendes gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U) \subseteq D$ offen, für die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ induzierte Topologie auf D.

Definition

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Menge

$$Y^\circ = \{x \in Y \mid \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } U \subseteq Y\}$$

wird das **Innere** von Y genannt, die Menge

$$\overline{Y} = \{x \in Y \mid U \cap Y \neq \varnothing \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } x\}$$

wird **Abschluss** von Y genannt. Der **Rand** von Y wird durch $\partial Y = \overline{Y} \backslash Y^\circ$ definiert. Die Teilmenge $Y \subseteq X$ heisst **dicht**, falls $\overline{Y} = X$ gilt.

Definition

Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und sei $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heisst **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$, falls für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$mit

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in U$$

existiert. Ein Punkt $x \in X$ heisst **Häufungspunkt** der Folge, falls für jede Umgebung U von x und jedes $N \in \mathbb{N}$ein $n \geq N$ mit $x_n \in U$.

Definition

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Wir nennen (X, τ) einen **Hausdorff-Raum**, falls alle Punkte $x_1 neq x_2$ von X Umgebungen $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ existiert.

Proposition

Sei (X, τ) ein Hausdorff'scher topologischer Raum und $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in X. Dann hat $(x_n)_{n=0}^\infty$ höchstens einen Grenzwert $a \in X$. In dem Fall, schreibe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Hausdorff'schen topologischen Räumen heisst **folgenstetig**, falls für jede konvergente Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgendes folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)_{n=0}^\infty = f(x)$$

Bemerkung

Stetig impliziert folgenstetig. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen aber nicht.

Definition

Seien X und Y topologische Räume. Wir bezeichnen als **Produkttopologie** die Topologie auf $X \times Y$, deren offene Menge gerade diejenigen Teilmengen $U \subseteq X \times Y$ sind, die folgende Eigenschaften erfüllen: Für jedes $(x, y) \in U$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq X$ von x und eine offene Umgebung $W \subseteq Y$ von y, mit $V \times W \subseteq U$.

Proposition

Seien X, Y und Z topologische Räume. Eine Abbildung $f : Z \to X \times Y$ ist genau dann stetig für die Produkttopologie auf $X \times Y$, wenn die folgenden beiden Verknüpfung stetig sind.

$$f_X : Z \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X \quad \text{und} \quad f_Y : Z \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$$

9.2 Topologie auf metrischen Räumen

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$ eine reelle Zahl, so schreiben wir

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

und nennen die Menge $B(x, r)$ **offener Ball** oder **offene Kreisscheibe** mit Zentrum x und Radius r.

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq$X heisst **offen**, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, derart, dass $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ gilt. Die damit definierte Topologie τ_d auf der Menge X wird die von der Metrik **induzierte Topologie** genannt.

Lemma

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn für jede konvergente Folge in X mit Grenzwert in U fast alle Folgenglieder in U liegen.
2. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in A mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch der Grenzwert in A liegt.

Proposition

Sei $d \in \mathbb{N}$. Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist vollständig.

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

1. Wir sagen, f ist $\varepsilon - \delta$**–stetig**, falls für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in X$ gilt.
2. Wir sagen, dass f **folgenstetig** ist, falls für jede konvergente Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X mit Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert, mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
3. Wir sagen, f ist **topologisch stetig**, falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Proposition

Seien X und Y metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) Die Funktion f ist $\varepsilon - \delta$–stetig.
(2) Die Funktion f ist folgenstetig.
(3) Funktion f ist topologisch stetig.

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Die Funktion f heisst **gleichmässig stetig**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$ auch $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ gilt.

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Die Funktion f heisst **Lipschitz-stetig**, falls es eine reelle Zahl $L \geq 0$ gibt, genannt **Lipschitz-Konstante**, mit

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$. Es gelten die Implikationen

$$f \text{ ist Lipschitz-stetig} \implies f \text{ ist gleichmässig stetig} \implies f \text{ ist stetig}$$

und im Allgemeinen sind die umgekehrten Implikationen falsch.

Satz (Banach'sche Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum. Sei $T : X \to X$ eine Abbildung und $0 \leq \lambda < 1$ eine reelle Zahl mit der Eigenschaft, dass

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt. Dann existiert genau ein Element $a \in X$ mit $T(a) = a$. Die Zahl λ nennt man **Lipschitz-Konstante** und die Funktion T eine **Lipschitz-Kontraktion**. Ein Punkt $x \in X$ mit $T(x) = x$ heisst **Fixpunkt** der Abbildung T, und der Satz besagt also, dass eine Lipschitz-Kontraktion genau einen Fixpunkt besitzt.

9.3 Kompaktheit

Definition

Sei X ein topologischer Raum, und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine **offene Überdeckung** von A ist eine Familie offener Mengen $\mathcal{U}$ von X, so, dass

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

gilt. Eine **Teilüberdeckung** der Überdeckung $\mathcal{U}$ von A ist eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von A mit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Eine **endliche offene Überdeckung** ist eine offene Überdeckung durch eine endliche Familie offener Mengen.

Definition

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir sagen, A sei **kompakt**, falls jedde offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wie nennen X einen kompakten Topologischen Raum wenn X als Teilmenge von X kompakt ist.

Proposition

Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn X das folgende **Schachtelungsprinzip** erfüllt: Für jede Kollektion $\mathcal{A}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt, gilt auch

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \varnothing$$

Korollar

Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.

Proposition

Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und sei $A \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von Y.

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Wir sagen, X sei **folgenkompakt**, falls jede Folge in X einen Häufungspunkt in X besitzt. (Alternativ: ... falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.) Ein Teilraum $Y \subseteq X$ heisst folgenkompakt, falls Y als eigenständiger topologischer Raum folgenkompakt ist.

Definition

Wir nennen einen metrischen Raum (X, d) **kompakt**, wenn X als topologischer Raum, also X bezüglich der von der Metrik d induzierten Topologie, kompakt ist.

Definition

Ein metrischer Raum (X, d) heisst **beschränkt**, falls es ein $R > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass $d(x, y) \leq R$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Definition

Sei X ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X **total beschränkt** ist, falls es für jedes $r > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{j=0}^{n} B(x_j, r)$$

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Eine reelle Zahl $\lambda > 0$ heisst **Lebesgue Zahl** zu dieser Überdeckung, falls für alle $x \in X$ ein $i \in I$ existiert mit $B(x, \lambda) \subseteq U_i$.

Satz

Sei X ein metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) Mit der von der Metrik induzierten Topologie ist X ein kompakter topologischer Raum.

(2) Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt, das heisst, X ist folgenkompakt.

(3) Jede unenendliche Teilmenge von X besitzt einen Häufungspunkt.

(4) Jede stetige, reellwertige Funktion auf X ist beschränkt.

(5) Jede stetige, reellwertige Funktion auf X nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

(6) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.

(7) Der metrische Raum X ist total beschränkt und vollständig.

Proposition

Seien X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Falls X kompakt ist, so ist f gleichmässig stetig.

Proposition

Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Ist A kompakt, so ist A beschränkt und abgeschlossen. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Definition

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, reellwertige Funktion auf einem metrischen Raum X. Für $x \in X$ und $\delta > 0$ ist die **Oszillation** oder **Schwankung** von f bei x wie folgt definiert.

$$\omega(f, x, \delta) = \lim_{\delta \to 0} (\sup f(B(x, \delta)) - \inf f(B(x, \delta)))$$

Proposition

Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Angenommen es gibt $\eta \geq 0$, so dass $\omega(f, x) \leq \eta$ für alle $x \in X$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ folgendes gilt:

$$\omega(f, x, \delta) < \eta + \varepsilon$$

Lemma

Eine folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.

Satz (Heine-Borel)

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 0$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

9.4 Topologische Vektorräume

In diesem Kapitel bezeichnen wir mit $\mathbb{K}$ den Körper der reellen Zahlen, oder den Körper der komplexen Zahlen.

Definition

Ein **topologischer Vektorraum** über $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ zusammen mit der Hausdorff'schen Topologie τ auf V, derart, dass die Abbildungen

$$m : \mathbb{K} \times V \to V \qquad \text{und} \qquad s : V \times V \to V$$

gegeben durch $m(a, v) = av$ und $s(v, w) = v + w$ stetig sind, bzgl. der Produkttopologie auf $\mathbb{K} \times V$ bzw. auf $V \times V$.

Proposition

Sei V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, versehen mit der Topologie die durch die Metrik $d(v, w) = \|v - w\|$ induziert wird. Dann sind die obigen Abbildungen stetig, und V wird mit dieser Topologie zu einem topologischen Vektorraum.

Proposition

Sei K ein kompakter metrischer Raum, und es bezeichne $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$. Dann definiert

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_2 \mid x \in K\}$$

eine Norm auf $C(K,\mathbb{R}^d)$ und $C(K,\mathbb{R}^d)$ ist bezüglich dieser Norm vollständig. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ in $C(K,\mathbb{R}^d)$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen $f \in C(K,\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $(f_n)_{n=0}^\infty$ gleichmässig gegen f konvergiert, das heisst, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und alle $x \in K$ die Abschätzung $\|f_n(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon$ gilt. Die Norm $\|\cdot\|_\infty$ wird **Supremumsnorm** genannt. Die davon induzierte Topologie auf $C(K)$ heisst **Topologie der gleichmässigen Konvergenz**.

Definition

Sei D eine Menge, und sei V ein Unterraum des Vektorraums aller $\mathbb{R}^d$-wertigen Funktionen auf D. Die **Topologie der punktweisen Konvergenz** ist die Topologie auf V, deren offene Mengen $U \subseteq V$ wie folgt charakterisiert sind: Für jedes $f \in U$ existiert eine endliche Teilmenge $T \subseteq D$ und $\varepsilon > 0$, so, dass die sogenannte **Standardumgebung**

$$B(f,T,\varepsilon) = \{f' \in V \mid \|f(x) - f'(x)\|_2 < \varepsilon \text{ für alle } x \in T\}$$

in U enthalten ist.

Proposition

Sei D eine Menge, und sei V der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf D. Die Topologie der punktweisen Konvergenz ist hausdorff'sch und kompatibel mit der Skalarmultiplikation und Vektorsumme. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert gegen $f \in V$ bezüglich dieser Topologie genau dann wenn die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^\infty$ punktweise gegen f konvergiert.

Definition

Sei X ein topologischer Raum und sei $V = C(X,\mathbb{R}^d)$ der Vektorraum aller $\mathbb{R}^d$-wertigen, stetigen Funktionen auf X. Die **Topologie der kompakten Konvergenz** ist die Topologie auf V, deren offene Mengen $U \subseteq V$ wie folgt charakterisiert sind: Für jedes $f \in U$ existiert eine kompakte Teilmenge $T \subseteq X$ und $\varepsilon > 0$, so, dass die sogenannte **Standardumgebung**

$$B(f,T,\varepsilon) = \{f' \in V \mid \|f(x) - f'(x)\|_2 < \varepsilon \text{ für alle } x \in T\}$$

in U enthalten ist.

Proposition

Sei X ein topologischer Raum, und sei V der Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X. Die Topologie der kompakten Konvergenz ist hausdorff'sch und kompatibel mit der Skalarmultiplikation und Vektorsumme. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert gegen $f \in V$ bezüglich dieser Topologie genau dann wenn für jede kompakte Teilmenge $T \subseteq X$ die Folge von Funktionen $(f_n|_T)_{n=0}^\infty$ auf T gleichmässig gegen $f|_T$ konvergiert.

9.5 Zusammenhang

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein **Weg** oder **Pfad** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$. Wir nennen $\gamma(0)$ den **Startpunkt** und $\gamma(1)$ den **Endpunkt**. Dabei sagen wir auch, dass γ ein Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ ist. Einen Pfad γ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ nennen wir **geschlossen**, oder auch eine **Schlaufe**.

Definition (Geometrisch)

Ein topologischer Raum X heisst **wegzusammenhängend**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ eine Pfad $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$ existiert.

Definition (Topologisch)

Ein topologischer Raum X heisst **zusammenhängend**, falls $\varnothing$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die offen und abgeschlossen sind.

Definition (Alternativ)

Ein topologischer Raum X heisst **zusammenhängend**, falls für alle $U_1 \subseteq X$ und $U_2 \subseteq X$ offen, mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ und $U_1 \cup U_2 = 0$ direkt folgt, dass $U_1 = \varnothing$ und $U_2 = X$, oder $U_2 = \varnothing$ und $U_1 = X$.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ eines topologischen Raumes X heisst **Zusammenhangskomponente** von X, falls U nichtleer, offen, abgeschlossen und zusammenhängend ist.

Definition

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes heisst **zusammenhängend**, falls Y bezüglich der Unterraumtopologie als eigenständiger topologischer Raum zusammenhängend ist. Im gleichen Sinn sprechen wir von Zusammenhangskomponenten von Y.

Proposition

Sei X ein topologischer Raum und seien Y_1 und Y_2 zusammenhängende Teilräume. Falls der Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ nicht-leer ist, dann ist die Vereinigung $Y_1 \cup Y_2$ zusammenhängend.

Proposition

Sei X ein topologischer Raum und seien Y_1 und Y_2 wegzusammenhängende Teilräume. Falls der Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ nicht-leer ist, dann ist die Vereinigung $Y_1 \cup Y_2$ wegzusammenhängend.

Proposition

Eine nichtleere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X ein Intervall ist.

Proposition

Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, dann ist $f(A) \subseteq Y$ zusammenhängend.

Korollar (Zwischenwertsatz)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $x \in I$ zwischen a und b, so dass $f(x) = c$ gilt.

Proposition

Jeder zusammenhängender topologische Raum ist zusammenhängend.

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge. Dann ist U genau dann wegzusammenhängend, wenn U zusammenhängend ist.

Korollar

Für alle $n \geq 1$ und $r > 0$ sind der topologische Raum $\mathbb{R}^n$, sowie die Teilräume $B(x,r)$ und $\overline{B(x,r)}$ von $\mathbb{R}^n$, zusammenhängend.

Korollar

Für alle $n \geq 2$ ist der topologische Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zusammenhängend.

Definition

Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 Pfade in X mit demselben Anfangspunkt $x_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und demselben Endpunkt $x_1 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Eine **Homotopie** von γ_0 nach γ_1 ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \qquad \text{und} \qquad H(s,0) = x_0, \quad H(s,1) = x_1$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $s \in [0,1]$. Wir sagen γ_1 sei **homotop** zu γ_0, falls es eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 gibt.

Definition

Ein topologischer Raum X heisst **einfach zusammenhängend**, falls er wegzusammenhängend ist und falls für alle $x_0, x_1 \in X$ alle Pfade von x_0 nach x_1 homotop zueinander sind.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge. Wir sagen, dass U ...

(1) **zusammenhängend** ist, wenn sich die Menge U nicht als disjuknkte Vereinigung zweier offener, nichtleerer Teilmengen von U schreiben lässt.

(2) **wegzusammenhängend** ist, wenn zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in U$ ein Weg in U von x_0 nach x_1 existiert.

(3) **einfach zusammenhängend** ist, wenn zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in U$ ein Weg in U von x_0 nach x_1 existert, und zwischen zwei solchen Wegen eine Homotopie existiert.

(4) **sternförmig** ist, wenn ein $x_0 \in U$ existiert, so dass für alle $x_1 \in U$ und $t \in [0,1]$ auch $(1-t)x_0 + tx_1 \in U$ gilt.

(5) **konvex** ist, wenn für alle $x_0, x_1 \in U$ und alle $t \in [0,1]$ auch $(1-t)x_0 + tx_1 \in U$ gilt.

10 Mehrdimensionale Differentialrechnung

10.1 Die Ableitung

Für dieses Kapitel definieren wir eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$. Des Weiteren ist in diesem Kapitel $\|\cdot\|$ immer die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ gemeint. Als letzte Vorbemerkung ist zu betonen, dass die Ableitung von f an einer Stelle $x_0 \in U$ nicht eine Zahl sein wird, sondern eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n\mathbb{R}^m$.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heisst f bei $x_0 \in U$ **differenzierbar** oder **ableitbar**, falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|f(x_0 + x) - f(x_0) - L(x)\|}{\|x\|} = 0 \tag{4}$$

gilt. Die lineare Abbildung L wird die **totale Ableitung**, das **Differential** oder die **Tangentialabbildung** genannt. Wir schreiben sie als

$$L = Df(x_0)$$

Die Funktion f heisst **ableitbar** oder **differenzierbar**, falls f bei jedem Punkt in U differenzierbar ist.

Bemerkung

1. L ist durch (4) eindeutig bestimmt.
2. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig.
3. Die Ableitung von $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

   $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \tag{5}$$

   Dies kann man als lineare Abbildung auffassen, $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $L(h) \mapsto f'(x_0) \cdot h$ und es gilt:

   $$(5) \Leftrightarrow 0 = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} \right|$$

4. Beachte, dass $(Df)(x_0)$ jetzt eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist.
5. Ist f in $x_0 \in U$ differenzierbar, so können wir folgendes schreiben

   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + R(h)$$

   mit $R(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)$ einem Restterm, der folgendes erfüllt:

   $$\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$$

   Also $\|R(h)\| = O(\|h\|)$.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Die **Ableitung** von f **entlang eines Vektors** $v \in \mathbb{R}^n$ ist an einer Stelle $x_0 \in U$ durch

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s}$$

definiert, falls der Grenzwert existiert. Man spricht auch von der **Richtungsableitung** in die Richtung v bei x_0. Im Spezialfall, wo $v = e_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ ist, wird der obige Grenzwert

$$\partial_j f(x_0) = \partial_{x_j} f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + se_j) - f(x_0)}{s}$$

auch die **partielle Ableitung** in der j-ten Koordinate (oder der Variable x_j) bei $x_0 \in U$ genannt, falls er existiert. Wir schreiben mitunter auch $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$. Existiert die partielle Ableitung in der j-ten Koordinate an jedem Punkt in U, so erhält man also eine Funktion $\partial_j f : U \to \mathbb{R}^m$.

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f in Richtung v, und es gilt:

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)(v)$$

Definition

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, welche ableitbar ist an einem Punkt $x \in U$. Dann ist für $a \in U$ die **Jacobi-Matrix** im Punkt a definiert durch

$$J_f(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Lemma

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Es bezeichne $\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die j-te Komponente. Dann ist f genau dann bei $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn die Komponenten $f_j = \pi_j \circ f$ für jedes $j \in \{1, dots, m\}$ bei x_0 differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\pi_j \circ Df(x_0) = D(\pi_j \circ f)(x_0) = Df_j(x_0)$$

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Falls für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_j f$ auf ganz U existiert und eine stetige Funktion definiert, so ist f auf ganz U differenzierbar.

Definition

Wir nennen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung als Funktion von $x \in U$

$$Df : U \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

stetig ist.

Proposition

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind.

Satz (Kettenregel)

Seien $k, m, n \geq 1$ und seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Sei $f : U \to V$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar und $g : V \to \mathbb{R}^k$ bei $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ bei x_0 differenzierbar, und die totale Ableitung von $(g \circ f)$ bei x_0 ist gegeben durch:

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

Bemerkung

Wir betrachten den Spezialfall $n = 1$ für die Kettenregel. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion mit Werten in einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Sei weiter $f : V \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar. Dann ergibt die Kettenregel, dass $f \circ \gamma$ differenzierbar ist, und dass die Formel

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

für alle $t \in I$ gilt. Sollte noch zusätzlich $k = 1$ sein, so ist $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ und $Df(\gamma(t))\gamma'(t)$ in Matrixform ausgedrückt das Matrixprodukt der $1 \times m$-Matrix $Df(\gamma(t))$ mit der $m \times 1$-Matrix $\gamma'(t)$. Wir interpretieren in diesem Fall $Df(x)$ für $x \in V$ auch als Spaltenvektor

$$\mathrm{grad} f(x) = \nabla f(x) = (Df(x))^T \in \mathbb{R}^m$$

und nennen dies den **Gradienten der Funktion** f bei der Stelle x. In dieser Schreibweise erhalten wir die Formel

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

für alle $t \in I$.

Proposition

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\partial_v f(x) = Df(x)(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\|$$

für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, mit Gleichheit genau dann, wenn $\nabla f(x)$ und v linear abhängig sind. Dies bedeutet, dass der Gradient von f an einem Punkt in die Richtung der grössten Richtungsableitung zeigt, die Richtung des grössten Anstiegs von f um x kennzeichnet. Des Weiteren gibt $\|\nabla f(x)\|$ die Steigung in dieser Richtung an.

Satz (Mittelwertsatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x_0 + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Dann existiert ein $t \in (0,1)$ so, dass für $\xi = x_0 + th$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(\xi)(h) = \partial_h f(\xi)$$

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $Df(x_0) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.

Definition

Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y heisst **lokal Lipschitz-stetig**, falls für jedes $x_0 \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f|_{B(x_0,\varepsilon)}$ Lipschitz-stetig ist.

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige differenzierbare Funktion. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig. Falls U zusätzlich konvex und die Ableitung beschränkt ist, dann ist f sogar Lipschitz-stetig.

10.2 Höhere Ableitungen und Taylor-Approximationen

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige differenzierbare Funktion. Dies bedeutet, dass die partielle Ableitung von f auf ganz U existieren und stetige Funktionen auf U sind. Die totale Ableitung von f können wir als eine stetige Funktion

$$Df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

betrachten. Falls die Vektorwertige Funktion auf U selbst wieder stetig differenzierbar ist, so sagen wir, f sei **zweimal stetig differenzierbar**. Die Ableitung von Df ist dann eine stetige Funktion

$$D^2 f : U \to \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\right)$$

die wir **zweite totale Ableitung** von f nennen.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $d \geq 1$. Wir sagen, dass f **d-mal stetig differenzierbar** ist, falls für alle $j_1, \ldots, j_d \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung

$$\partial_{j_1} \partial_{j_2} \ldots \partial_{j_d} f(x)$$

an jedem Punkt $x \in U$ existiert, und in Abhängigkeit von $x \in U$ eine stetige Funktion auf U definiert. Wir schreiben

$$C^d(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist } d\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

für den Vektorraum der d-mal stetig differenzierbaren $\mathbb{R}^m$-wertigen Funktionen auf U. Wir nennen die Funktion f **glatt**, falls f beliebig oft stetig differenzierbar ist. Wir schreiben

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist } d\text{-mal stetig differenzierbar für alle } d \geq 1\}$$

für den Vektorraum der glatten $\mathbb{R}^m$-wertigen Funktionen auf U.

Satz (Satz von Schwarz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt $\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Bemerkung

Es gilt:

$$\partial_k \partial_j = D^2 f(x)(e_j, e_k)$$
$$\partial_j \partial_k = D^2 f(x)(e_k, e_j)$$

Von vorher wissen wir, dass die linken Seiten der Gleichungen auch gleich sind, und somit folgt, da die bilineare Abbildung symmetrisch ist:

$$D^2 f(x)(v, w) = D^2 f(x)(w, v)$$

Definition

Die **Hesse-Matrix** $H(x) = (H_{ij}(x))_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ bei $x \in U$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$H_{ij}(x) = \partial_i \partial_j f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Der Satz von Schwarz besagt, dass $H(x)$ eine symmetrische Matrix ist.

Satz (Taylor)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(d+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} D^k f(x)(h,\ldots,h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{d!} D^{d+1} f(x+th)(h,\ldots,h) dt$$

Man nennt dies die **Taylor Entwicklung mit Restglied** von f an der Stelle x. Der Hauptterm

$$P(h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} D^k f(x)(h,\ldots,h)$$

ist gerade wie in der eindimensiomalen Taylor-Approximation eine Polynomiale Funktion, diesmal allerdings in d Variablen. Dabei ist $D^k f(x)(h,\ldots,h)$ gerade der homogene Teil vom Grad k. Das Integral

$$R(h) = \int_0^1 \varphi^{d+1}(t) \frac{(1-t)^d}{d!} dt$$

heisst **Restglied**. Die Abschätzung $R(h) = O(\|h\|^{d+1})$ folgt aus dem eindimensiomalen Fall.

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und sei $x_0 \in U$ ein Punkt an dem f differenzierbar ist und ein lokales Extremum annimmt. Dann ist $Df(x_0) = 0$.

Definition

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Wir sagen, A sei **positiv definit**, falls alle Eigenwerte von A positiv (und reell) sind. A ist **negativ definit**, falls alle Eigenwerte kleiner als 0 sind. Sonst ist A **indefinit**

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar, und sei $x_0 \in U$ mit $Df(x_0) = 0$. Sei $H(x_0)$ die Hesse Matrix von f im Punkt x_0.

1. Ist $H(x_0)$ positiv definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Minimum an.
2. Ist $H(x_0)$ negativ definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Maximum an.
3. Ist $H(x_0)$ indefinit und nicht ausgeartet/ nicht singulär (=kein Eigenwert ist 0), so hat f bei x_0 kein lokales Extremum.

10.3 Parameterintegrale

Definition

Seien $a < b$ reelle Zahlen, sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Integral der Form

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

wird als **Parameterintegral** bezeichnet. Dabei ist x der **Parameter** und t die **Integrationsvariable**. Wir setzen voraus, dass die Funktion f in $n+1$ Variablen zumindest stetig ist, so, dass insbesondere für jedes fixe $x \in U$ die Abbildung $t \mapsto f(x,t)$ stetig, und somit Riemann-integrierbar ist.

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $a < b$ reelle Zahlen und $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert das Parameterintegral

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

eine stetige Funktion $F : U \to \mathbb{R}$. Falls die partielle Ableitung $\partial_k f$ für $k = 1, \dots, n$ existieren und auf $U \times [a,b]$ stetig sind, dann ist F stetig differenzierbar, und es gilt für alle $x \in U$ und $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\partial_k F(x) = \int_a^b \partial_k f(x,t)dt$$

Korollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : U \times (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetigen partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Seien $\alpha, \beta : U \to (a,b)$ stetig differenzierbar. Dann ist das Parameterintegral mit veränderlichen Grenzen

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)dt$$

stetig differenzierbar auf U, und es gilt für alle $x \in U$

$$\partial_k F(x) = f(x, \beta(x))\partial_k \beta(x) - f(x, \alpha(x))\partial_k \alpha(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_k f(x,t)dt$$

Definition

Die durch das Parameterintegral

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t) - nt)dt$$

definierte Funktion $J_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird **Bessel-Funktion erster Gattung** genannt, und löst die Differentialgleichung

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - n^2)u(x) = 0$$

Definition

Die **Bessel-Funktion zweiter Gattung** ist durch das uneigentliche Integral

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin(t) - nt) x \sin(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\exp(t) + (-1)^n \exp(-nt)) \exp(-x \sinh(t)) dt$$

für $x \in (0, \infty)$ definiert. Es kann gezeigt werden, dass Y_n die Differentialgleichung in der obigen Definition auch erfüllt. Des Weiteren sind J_n und Y_n linear unabhängig.

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Der **Träger** oder **Support** von f ist definiert als

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

Die Funktion f hat **kompakten Träger** genau dann, wenn $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ für ein $R >> 0$.

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger. Die **Faltung** von f mit ψ ist die Funktion $\psi \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(\psi \circ f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y) f(y) dy$$

Falls $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq [-R, R]$, dann ist folgendes ein eigentliches Integral

$$\int_{-R-|x|}^{+R+|x|} \psi(x-y) f(y) dy$$

Bemerkung

1. Es gilt $\psi \circ f = f \circ \psi$.
2. Die Faltung ist kommutativ, assoziativ und bilinear (distributiv). Das heisst, es bildet einen Ring ohne Einselement.
3. Ist f stetig und ψ glatt, dann ist $\psi \circ f$ auch glatt und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi \circ f)(x) = (\psi' \circ f)(x)$$

Definition

Wir nennen **Glättungskern** eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

1) ψ ist glatt.

2) $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq [-\delta, +\delta]$ für kleines δ.

3) $\psi(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$

Korollar

Ist ψ ein Glättungskern mit $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq [-\delta, +\delta]$, dann ist $2\psi(2x)$ ein Glättungskern mit Support in $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$. Im Allgemeinen gilt:

$$\psi_n = 2^n \psi(2^n x) \subseteq [-\delta \cdot s^{-n}, \delta \cdot 2^{-n}]$$

Setzen wir $f_n = \psi_n \circ f : \psi_n(x) = 2^n \psi(2^n x)$, so konvergiert $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen f auf jedem kompakten Intervall.

10.4 Wegintegrale

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg. Wir definieren die **Länge** von γ als

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Hier soll $\|\gamma'(t)\|$ als **Geschwindigkeit** des Weges zur Zeit t gelesen werden.

Definition

Eine stetige Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heisst **stückweise stetig differenzierbar**, falls eine Zerlegung von $[a,b]$: $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = b$ existiert, so, dass $\gamma|_{[s_{k-1},s_k]}$ für alle $k \in \{1,\dots,N\}$ stetig differenzierbar ist. Wir sagen in dem Fall γ sei **stückweise stetig differenzierbar bezüglich** dieser Zerlegung, und definieren die **Länge** von γ durch

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{\mathbb{N}} \int_{S_{k-1}}^{s_k} \left\|(\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(t)\right\| dt$$

Definition

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion. Entlang eines stetigen differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to U$ definieren wir das **skalare Wegintegral** als

$$\int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Definition

Wie benutzen den Term **Gebiet** für offene zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Vektorfeld** auf U ist eine Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$. Stetige, stetig differenzierbare oder glatte Vektorfelder sind dementsprechend Funktionen $F : U \to \mathbb{R}^n$.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offene Teilmenge und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren das **Arbeitsintegral/Wegintegral des Vektorfeldes** F entlang eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to U$ durch

$$\int_\gamma F dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$$

Ist γ stückweise stetig differenzierbar bezüglich einer Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, so ist das Integral als Summe von Integralen über Intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ zu lesen.

Definition

Eine stetige, orientierungserhaltende Reparametrisierung von $\gamma : [a,b] \to U$ ist eine Verknüpfung $\gamma \circ \psi$ mit

$$[c,d] \xrightarrow{\psi} [a,b] \xrightarrow{\gamma} U$$

wobei ψ stetig ist und $\psi(c) = a$ und $\psi(d) = b$.

Lemma

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ändert sich der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma F dt$ nicht unter orientierungserhaltenden Reparametrisierungen von γ.

Lemma

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gibt es eine stetig differenzierbare Reparametrisierung $\varphi = \gamma \circ \psi$. Darüberhinaus kann man $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ einrichten.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Eine stetige differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heisst **Potential** für F, falls $F = \operatorname{grad}(f)$ gilt. Ist f ein Potential, so ist auch $f + c$ für $c \in \mathbb{R}$ ein Potential. Ist U zusammenhängend, so ist jedes weitere Potential von dieser Form.

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Angenommen es existiert ein Potential $f : U \to \mathbb{R}$ für F. Dann gilt:

$$\int_\gamma F dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

für jeden stückweise stetig differenzierbaren Pfad $\gamma : [0,1] \to U$.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heisst F **konservativ**, falls für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [0,1] \to U$ und $\eta : [0,1] \to U$ die Implikation

$$\gamma(0) = \eta(0) \quad \text{und} \quad \gamma(1) = \eta(1) \quad \Longrightarrow \quad \int_\gamma F dt = \int_\eta F dt$$

gilt.

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist F genau dann konservativ, wenn F ein Potential besitzt.

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei F ein stetig differenzierbares konservatives Vektorfeld auf U, mit Komponenten $F_1, \ldots, F_n$. Dann gilt

$$\partial_j F_k = \partial_k F_j$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Man nennt diese Gleichung auch **Integrabilitätsbedingung**. Ausgeschrieben gilt dann

$$\partial_j F_k = \partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f = \partial_k F_j$$

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offe, und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das den Integrabilitätsbedingung

$$\partial_k F_j = \partial_k F_j$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ genügt. Seien $\gamma_0 : [0,1] \to U$ und $\gamma_1 : [0,1] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Pfade mti dem selben Anfangspunkt x_0 und dem selben Endpunkt x_1. Sind γ_0 und γ_1 homotop, so gilt

$$\int_{\gamma_0} F dt = \int_{\gamma_1} F dt$$

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U ist genau dann konservativ, falls es den Integrabilitätsbedingungen genügt.

Lemma

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbar Vektorfeld, das den Integrabilitätsbedingungen genügt. Dann ist F konservativ.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : V \to U$ eine stetig differenzierbare Funktion. Das Vektorfeld $\varphi^* F$ auf V, gegeben durch

$$\varphi^* F : x \mapsto \sum_{k=1}^{m} \langle \partial_k \varphi(x), F(\varphi(x)) \rangle \, e_k$$

heisst **Pullback** von F, oder das entlang φ **zurückgezogene** Vektorfeld. Die dadurch entstehende Abbildung

$$\varphi^* : \{\text{Stetige Vektorfelder auf } U\} \to \{\text{Stetige Vektorfelder auf } V\}$$

nennen wir **Zurückziehen** von Vektorfeldern.

Proposition

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\varphi : V \to U$ offen und sei $\varphi : V \to U$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(1) Die vorher betrachtete Abbildung φ^* ist linear.

(2) Sei $W \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\psi : W \to V$ stetig differenzierbar. Dann gilt $\psi^* \varphi^* F = (\varphi \circ \psi)^* F$ für jedes stetige Vektorfeld F auf U. Ausserdem gilt $\mathrm{id}_U^* F = F$.

(3) Sei $\gamma : [0,1] \to V$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt für jedes stetige Vektorfeld F auf U

$$\int_\gamma \varphi^* F dt = \int_{\varphi \circ \gamma} F dt$$

(4) Ist F ein Vektorfeld von Klasse C^k auf U und $\varphi : V \to U$ von Klasse C^{k+1}, dann ist φF von Klasse C^k.

(5) Sei F ein Vektorfeld von Klasse C^1 auf U und $\varphi : V \to U$ von Klasse C^2. Erfüllt F die Integrabilitätsbedingungen, dann erfüllt $\varphi^* F$ ebenfalls die Integrabilitätsbedingungen.

Lemma

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig mit kompaktem Träger $K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$, sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$. Es existiert eine glatte Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgendes gilt

$$\left\| f(x) - \tilde{f}(x) \right\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad B(x, \delta) \cap K = \varnothing \Longrightarrow \tilde{f}(x) = 0$$

Lemma

Seien $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega$. Sind die Pfade γ_0 und γ_1 homotop, so existiert ein Pfad $\varpi : [0,1] \to \Omega$ mit $\varphi(0) = \gamma_0$ und $\varphi(1) = \gamma_1$.

11 Anfänge der Differentialgeometrie

11.1 Sätze zur impliziten Funktion und zur Inversen Abbildung

Satz (Satz der impliziten Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $(x_0, y_0) \in U$ und sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, die die folgende Bedingungen erfüllt.

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. Für alle $k = 1, \ldots, m$ existiert die partielle Ableitung $\partial_{y_k} F : U \to \mathbb{R}^m$ und ist stetig.
3. Die Matrix $A = (\partial_{y_k} F_j(x_0, y_0))_{j,k} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ ist invertierbar.

Dann existiert $r > 0$ und $s > 0$ und eine stetige Funktion $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$, so dass für alle $(x, y) \in B(x_0, r) \times B(y_0, s)$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = f(x)$ gilt.

Satz (Ableitung der impliziten Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $(x_0, y_0) \in U$ und sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften aus dem obigen Satz und sei $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$ die stetige lokale Lösungsfunktion aus dem obigen Satz. Angenommen F ist d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$. Dann ist die Funktion f ebenso d-mal stetig differenzierbar und die Ableitung von f bei $x \in B(x_0, r)$ ist durch

$$Df(x) = -\left((D_y F)(x, f(x))\right)^{-1} \circ (D_x F)(x, f(x))$$

gegeben. Hier bedeutet $D_x F(x_1, y_1)$ die totale Ableitung der Funktion $x \mapsto F(x, y_1)$ am Punkt x_1 und $D_y F(x_1, y_1)$ die totale Ableitung der Funktion $y \mapsto F(x_1, y)$ am Punkt y_1. Es gilt: $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $D_y F(x, f(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und $D_x F(x, f(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Satz (Satz zur inversen Abbildung)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare Funktion mit $d \geq 1$. Sei $x_0 \in U$ so, dass $Df(x_0)$ invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von x_0 und eine offene Umgebung $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $y_0 = f(x_0)$, so dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv ist, und die Umkehrabbildung ebenso d-mal stetig differenzierbar ist. Des weiteren gilt für alle $x \in U_0$ und $y = f(x) \in V_0$

$$(Df^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}$$

("Ableitung der Inverse = Inverse der Ableitung")

Definition

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive, glatte Funktion $f : U \to V$ mit glatter Inversen $f^{-1} : V \to U$ wird **Diffeomorphismus** genannt. Sind f und f^{-1} jeweils nur d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$, so nennen wir f einen **C^d-Diffeomorphismus**.

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare, injektive Funktion mit $d \geq 1$. Angenommen $Df(x)$ sei für jeden Puntk $x \in U$ invertierbar. Dann ist $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ ist ein C^d-Diffeomorphismus mit

$$(Df^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}$$

für alle $x \in U$ und $y = f(x) \in V$.

11.2 Teilmannigfaltigkeiten des Euklidischen Raumes

Definition

Sei $0 \leq k \leq n$ für $n \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ist eine k-dimensionale **Teilmannigfaltigkeit**, falls für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^n$ von p und ein Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi_p(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$\varphi_p(U_p \cap M) = \{y \in V_p \mid y_i = 0 \text{ für alle } i > k\} = V_p \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$$

gilt. Wir nennen den Diffeomorphismus φ eine **Karte** von M um p, und den zu φ inversen Diffeomorphismus $\varphi^{-1} : V \to U_p$ eine **Parametrisierung** von M um p. Eine Familie von Karten $(U_i, V_i, \varphi_i)_{i \in I}$ nennen wir Atlas, falls jeder Punkt von M im Definitionsbereich eine Karte ist.

Proposition

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p von p in $\mathbb{R}^n$, eine glatte Funktion $f_p : \tilde{U}_p \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $\tilde{U}_p \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gibt, so dass

$$M \cap U_p = P_\sigma(\text{Graph}(f_p))$$

gilt. Hierbei bezeichnet $P_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die von σ induzierte Permutation der Koordinaten.

Satz (Satz vom konstanten Rang)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion. Die Nullstellenmenge $M = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ ist eine $(n-m)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeite von $\mathbb{R}^n$, falls für alle $p \in M$ die lineare Abbildung $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist. Das heisst, die Jacobi-Matrix muss vollen Rang haben, also Rang m, für alle $p \in M$.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x \in U$ heisst **kritischer Punkt** von f, falls $Df(x)$ Rang kleiner als $\min(m, n)$ hat, andernfalls nennt man $x \in U$ einen **regulären Punkt** der Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$. Das Bild eines kritischen Punktes unter f nennt man einen **kritischen Wert**; Punkte in $\mathbb{R}^m$ im Komplement der kritischen Werte von f heissen **reguläre Werte**.

Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Der **Tangentialraum** von M bei $p \in M$ ist durch

$$T_pM = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\delta, \delta) \to M \;\; \text{differenzierbar mit } \gamma(0) = p \;,\; \delta > 0\}$$

definiert. Das **Tengentialbündel** von M ist durch

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid p \in M \;,\; v \in T_pM\}$$

Die Abbildung $\pi : TM \to M$ gegeben durch $\pi(p, v) = p$ heisst **kanonische Projektion**, und die Abbildung $0_M : M \to TM$ gegeben durch $0_M(p) = (p, 0)$ heisst **Nullschnitt**. Eine Abbildung $s : M \to TM$ heisst **Schnitt** von TM oder auch **Vektorfeld** auf M, falls $\pi \circ s = \text{id}_M$ gilt.

Satz

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\psi : V \to U$ ein Diffeomorphismus mit $U \cap M = \psi(V \cap \mathbb{R}^k)$. Dann ist die Abbildung $T\psi : (V \cap \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \to T(M \cap U)$ gegeben durch

$$T\psi(y, h) = (\psi(y), D\psi(y)(h))$$

eine Bijektion. Insbesondere ist für $p = \psi(y_0)$ der Tangentialraum T_pM =Im$D\psi(y_0)$ ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion und $M = F^{-1}(0)$. Falls für alle $p \in M$ die lineare Abbildung $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist, so ist das Tengentialbündel der Mannigfaltigkeit M gegeben durch

$$TM = \{(p, v) \in U \times \mathbb{R}^n \mid F(p) = 0 \text{ und } DF(p)(v) = 0\}$$

11.3 Extremwertprobleme

Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension k, und $p \in M$. Der Raum der **Normalvektoren** an M bei p ist definiert als das orthogonale Komplement

$$N_pM = (T_pM)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v\rangle = 0 \ \text{ für alle } v \in T_pM\}$$

zum Tangentialraum $T_pM \subseteq \mathbb{R}^n$. Dies ist ein Vektorraum der Dimension $n - k$. Als **Normalenbündel** bezeichnen wir

$$NM = (TM)^\perp = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid p \in M \ , \ w \in (T_pM)^\perp\}$$

und definieren wie auch für das Tangentialbündel die kanonische Projektion und den Nullschnitt.

Bemerkung

Sei M als Niveaumenge gegeben und $M = F^{-1}(0)$, mit $F : U \to \mathbb{R}^m$, so, dass 0 ein regulärer Wert ist. Sei $p \in M$. Dann ist also $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv (hat vollen Rang) und T_pM =Ker$DF(p)$. Konkret:

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}F_1(p) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}F_m(p) \end{pmatrix}$$

Also folgt:

$$v \in T_pM \Leftrightarrow DF(p)v = 0 \Leftrightarrow \langle \mathrm{grad}F_i(p), v\rangle = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$$

Also folgt $\mathrm{grad}F_i(p) \in N_pM \ \ \forall i = 1, \ldots, m$. Da $DF(p)$ Rang= m hat, also vollen Rang, bilden die Vektoren $\{\mathrm{grad}F_i(p) \mid i = 1, \ldots, m\}$ eine Basis von N_pM.

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Angenommen $f|_M$ nimmt in $p \in M$ ein lokales Extremum an. Dann ist $\mathrm{grad}f(p)$ ein Normalvektoren an M bei p.

Bemerkung (Kochrezept für Extremabestimmung)

Strategie um lokale Extrema von $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge M zu finden (Extrema unter Nebenbedingungen):

1) Berechne N_pM für (fast) alle $p \in M$.

2) Finde alle $p \in M$ mit $\mathrm{grad}f(p) \in N_pM$. Diese Punkte p sind dann Kandidaten für lokale Extrema.

3) Alle Punkte $p \in M$ an denen N_pM nicht definiert ist, oder f nicht differenzierbar ist, sind auch Kandidaten.

4) Entscheide ad-hoc ob und welche Kandidaten Extrema sind.

Definition (Lagrange Multiplikatoren)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ mit 0 als regulären Wert und definiere $M = F^{-1}(0)$ als eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k = n - m$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ von Klasse C^1. Die zu f und F assoziierte **Lagrange Funktion** ist

$$L : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$L(x, \lambda) = f(x) - \langle \lambda, F(x) \rangle = f(x) - \sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j F_j(x)$$

Die Komponenten $\lambda \in \mathbb{R}^m$ werden **Lagrange-Multiplikatoren** genannt.

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit gegeben als Nullstellenmenge einer glatten Funktion $F : U \to \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die $f|_M$ in $p \in M$ ein lokales Extremum annimmt, und sei L die zu F und f gehörige Lagrange-Funktion. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so, dass die Gleichungen

$$\partial_{x_i} L(p, \lambda) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_{\lambda_j} L(p, \lambda) = 0$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \cdots\}$ erfüllt sind.

12 Mehrdimensionale Integralrechnung

12.1 Das Riemann-Integral für Quader

Definition

Unter einem **Quader** verstehen wir eine Teilmenge Q von $\mathbb{R}^n$ die ein Produkt von Intervallen ist, also

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n$$

für Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Falls die Länge der Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ alle übereinstimmen, so nennen wir Q euch einen **Würfel**. Für $n = 2$ sprechen wir auch von Rechtecken.

Definition

Für beschränkte nichtleere Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ ist das **Volumen** des Quaders $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ in $\mathbb{R}^n$ durch

$$\mathrm{vol}(Q) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

definiert, mit $a_k = \inf I_k$ und $b_k = \sup I_k$.

Definition

Sei $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ ein beschränkter, abgeschlossener Quader mit $I_k = [a_k, b_k]$. Unter einer **Zerlegung** von Q verstehen wir die Vorgabe einer Zerlegung für jedes Intervall I_k. Ist so eine Zerlegung gegeben, also

$$a_k = x_{k,0} < \cdots < x_{k,l(k)} = b_k$$

für jedes k, dann nennen wir für ein $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $1 \le \alpha_k \le l(k)$ eine **Adresse** zu dieser Zerlegung. Für jede solche Adresse schreiben wir

$$Q_\alpha = \prod_{k=1}^{n} [x_{k,\alpha_k - 1}, x_{k,\alpha_k}]$$

für den entsprechenden abgeschlossenen Teilquader von Q. Mit anderen Worten ist $Q_\alpha \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}^n$ die Teilmenge aller jener $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ für die $x_{k,\alpha_k - 1} \le t_k \le x_{k,\alpha_k}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Mittels vollständiger Induktion zeigt man die **Additionsformel**

$$\mathrm{vol}(Q) = \sum_\alpha \mathrm{vol}(Q_\alpha)$$

wobei die Summe sich über alle Adressen zur gegebenen Zerlegung erstreckt. Eine **Verfeinerung** der Zerlegung ist eine Zerlegung

$$a_k = y_{k,0} \le \cdots \le y_{k,m(k)} = b_k \qquad k = 1, \ldots, n$$

so, dass für jedes fixe k die Zerlegung $a_k = y_{k,0} \le \cdots \le y_{k,m(k)} = b_k$ von I_k eine Verfeinerung von $a_k = x_{k,0} \le \cdots \le x_{k,l(k)} = b_k$ ist. Zu zwei beliebigen Zerlegungen von Q existiert stets eine gemeinsame Verfeinerung.

Definition

Sie $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine **Treppenfunktion** auf Q ist eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ derart, dass die Zerlegung von Q existiert, so, dass für jede Adresse α die Funktion f konstant auf dem offenen Teilquader Q_α° ist. Wir sagen in dem Fall auch, f sei eine Treppenfunktion bezüglich dieser Zerlegung von Q. Ist c_α der konstante Wert von f auf dem offenen Teilquader Q_α°, so schreiben wir

$$\int_Q f(x)dx = \sum_\alpha c_\alpha \mathrm{vol}(Q_\alpha)$$

wobei die Summe sich über alle Adressen zur gegebenen Zerlegung erstreckt. Wir nennen diese Zahl **Integral** von f über Q.

Definition

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $\mathcal{TF}$ bezeichne den Vektorraum der Treppenfunktionen auf Q, und $f : Q \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Dann definieren wir die Menge der **Untersummen** $\mathcal{U}(f)$ und **Obersummen** $\mathcal{O}(f)$ von f durch

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_Q u \; dx \mid u \in \mathcal{TF} \text{ und } u \leq f \right\} \qquad \mathcal{O}(f) = \left\{ \int_Q o \; dx \mid o \in \mathcal{TF} \text{ und } f \leq o \right\}$$

Falls f beschränkt ist, so sind die Mengen nicht leer. Aufgrund der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen gilt, falls f beschränkt ist, die Ungleichung

$$\sup \mathcal{U}(f) \leq \inf \mathcal{O}(f)$$

Definition

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion. Wir nennen $\sup \mathcal{U}(f)$ das **untere**, und $\inf \mathcal{O}(f)$ das **obere Integral** von f. Die Funktion f heisst **Riemann-integrierbar**, falls $\sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$ gilt. Der gemeinsame Wert wird in diesem Fall als das **Riemann-Integral** von f bezeichnet, und wird wie folgt geschrieben

$$\int_Q f(x) dx = \sup \mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$$

Proposition

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen u und o auf Q gibt, die folgendes erfüllen

$$u \leq f \leq o \qquad \text{und} \qquad \int_Q (o - u) dx \; < \varepsilon$$

Proposition

Sie $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, und es beizeichne $\mathcal{R}(Q)$ die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf Q. Dann ist $\mathcal{R}(Q)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der Punktweisen Addition und Multiplikation, und Integration

$$\int_Q : \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R}$$

ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Die Integration ist ausserdem monoton und erfüllt die Dreiecksungleichung: Es gilt

$$f \leq g \implies \int_Q f(x) dx \leq \int_Q g(x) dx \qquad \text{und} \qquad \left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| \, dx$$

für alle $f, g \in \mathcal{R}(Q)$. Insbesondere ist $|f|$ Riemann-integrierbar. Des Weiteren gilt $\mathcal{TF}(Q) \subseteq \mathcal{R}(Q)$.

Definition

Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ wird **Lebesgue-Nullmenge** oder einfach **Nullmenge** genannt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Familie von offenen Quadern $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass folgendes gilt

$$N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_k) \; < \varepsilon$$

Bemerkung

Wir sagen, dass eine Aussage A über Elemente $x \in \mathbb{R}^n$ für **fast alle** $x \in \mathbb{R}^n$ wahr ist, falls

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \neg A(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

Lemma

Eine Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge. Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.

Proposition

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren ist keine Nullmenge.

Proposition

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist der Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in Q\} \subseteq \mathbb{R}^n$ von f eine Nullmenge.

Satz (Lebesgue-Kriterium)

Eine reellwertige, beschränkte Funktion auf einem abgeschlossenen Quader Q ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie fast überall stetig ist, das heisst, falls die folgende Menge eine Nullmenge ist

$$N = \{x \in Q \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

Korollar

Sei Q ein abgeschlossener Quader mit nicht-leerem Inneren. Dann ist jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Definition (Oszillationsmass)

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $x \in \mathbb{Q}$ und $\delta > 0$. Wir definieren

$$\omega(f, x, \delta) := \sup\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\} - \inf\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\}$$

wobei $B_\infty(y, \delta)$ für den Ball bezüglich der Supremumsnorm steht. So ein Ball ist ein offener achsenparalleler Würfel mit Zentrum x und Kantenlänge 2δ. Es gilt $\delta' < \delta \Rightarrow \omega(f, x, \delta') \leq \omega(f, x, \delta)$. Wir definieren den Grenzwert

$$\omega(f, x) := \lim_{\delta \to 0} \omega(f, x, \delta)$$

als das **Oszillationsmass**. Es gilt ausserdem $\omega(f, x) = 0 \Leftrightarrow f$ ist stetig bei x.

Lemma

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem metrischen Raum X. Für jedes $\eta \geq 0$ ist die Teilmenge $N_\eta = \{x \in X \mid \omega(f, x) \geq \eta\}$ ⊆X abgeschlossen.

Lemma

Sei $K \subseteq Q$ kompakt und sei $\eta > 0$ mit $\omega(f, x) \leq \eta \ \forall x \in K$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\omega(f, x, \delta) \leq \eta + \varepsilon$ für alle $x \in K$.

Proposition

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen $f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ gibt, die folgendes erfüllen

$$f_- \leq f \leq f_+ \qquad \text{und} \qquad \int_Q (f_+ - f_-) dx < \varepsilon$$

12.2 Das Riemann-Integral über Jordan-messbare Mengen

Definition

Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$ heisst **Jordan-messbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader Q in $\mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt, so dass die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_B$ auf Q Riemann-integrierbar ist. Das **Volumen** oder **Jordan-Mass** von B ist in diesem Fall wie folgt definiert

$$\operatorname{vol}(B) = \int_Q \mathbb{1}_B dx$$

Dieses ist unabhängig von der Wahl von Q, solange $B \subseteq Q$ gilt.

Bemerkung

Jordan-Messbarkeit $\neq$ Lebesque-Messbarkeit.

Korollar (zum Lebesgue-Kriterium)

Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn B beschränkt ist und der Rand ∂B eine Nullmenge ist. Sind $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2$ und $B_1 \backslash B_2$ Jordan-messbar.

Proposition

Sei $Q \subset R^{n-1}$ ein abgeschlossener Quader und seien $f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, und sei $D \subseteq \mathbb{Q}$ Jordan-messbar. Dann ist die folgende Menge Jordan-messbar

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in D, f_-(x) \leq y \leq f_+(x)\}$$

Definition

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge und sei f eine reellwertige Funktion auf B. Dann heisst f **Riemann-integrierbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt, so dass die durch

$$f_!(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \in Q \backslash B \end{cases}$$

gegebene Funktion $f_! : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Wir schreiben in diesem Fall

$$\int_B f \ dx \ = \ \int_Q f_! \ dx$$

und nennen diese Zahl das **Riemann-Integral** von f über B. Dieses ist unabhängig von der Wahl von Q und es gilt Linearität, Monotonie und Dreiecksungleichung für $\int_B (-) \ dx$.

Korollar (Lebesgue-Kriterium)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und sei $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn f auf B fast überall stetig ist, das heisst, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. Insbesondere ist jede beschränkte Funktion auf einer Jordan-messbaren Menge Riemann-integrierbar.

Proposition

Sind $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B_1 \cup B_2 \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann sind $f|_{B_1}$ und $f|_{B_2}$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{B_1 \cup B_2} f \ dx = \int_{B_1} f \ dx + \int_{B_2} f \ dx - \int_{B_1 \cap B_2} f \ dx$$

Satz (Fubini)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Quader, und $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Für $x \in P$, schreibe $f_x : Q \to \mathbb{R}$ für die Funktion $f_x(y) = f(x,y)$, und definiere

$$F_-(x) = \sup \mathcal{U}(f_x) \qquad \text{und} \qquad F_+(x) = \inf \mathcal{O}(f_x)$$

Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq P$ so, dass für alle $x \notin N$ die Funktion f_x Riemann-integrierbar ist, also

$$F_-(x) = F_+(x) = \int_Q f_x(y)dy = \int_Q f(x,y)dy$$

gilt. Die Funktion F_- und F_+ auf P sind beide Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{P\times Q} f(x,y)d(x,y) = \int_P F_-(x)dx = \int_Q F_+(x)dx = \int_P \int_Q f(x,y)dydx$$

Korollar

Sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$\int_Q f dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \ldots dx_1$$

falls alle Parameterintegrale existieren. Andernfalls können die Parameterintegrale durch Suprema von Untersummen oder auch durch Infima von Obersummen ersetzt werden.

Korollar

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine Jordan-messbare Menge, seien $\varphi_-, \varphi_+ : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ die Jordan-messbare Teilmenge

$$B = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid \varphi_-(x) \le y \le \varphi_+(x)\}$$

Für jede Riemann-integrierbare Funktion f auf B gilt

$$\int_B f(x,y)d(x,y) = \int_D \left(\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Korollar (Prinzip von Cavalieri)

Sei $B \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge. Dann gilt

$$\mathrm{vol}(B) = \int_a^b \mathrm{vol}(B_t)dt$$

wobei für $t \in [a,b]$ die Teilmenge $B_t \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ durch $B_t = \left\{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (t,y) \in B\right\}$ gegeben ist, und für fast alle $t \in [a,b]$ Jordan-messbar ist.

Bemerkung

Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda C = \{\lambda x \mid x \in C\}$ auch messbar und es gilt $\mathrm{vol}(\lambda C) = |\lambda|^n \cdot \mathrm{vol}(C)$.

12.3 Mehrdimensionale Substitutionsregel

Definition

Sei $n \geq 1$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der **Träger** oder **Support** einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}} \subseteq U$$

Achtung! Der Abschluss liegt in U. Im Allgemeinen ist dies nicht das selbe wie der Abschluss davon in $\mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass f **kompakten Träger** hat, falls $\operatorname{supp}(f)$ eine kompakte Teilmenge von U ist. Hat f kompakten Träger, so ist $\operatorname{supp}(f)$ beschränkt und damit ist $f(x) = 0$ für alle $x \in U \backslash Q$ für ein grosses Quader Q. Wir definieren weiter das Integral

$$\int_U f dx = \int_{Q \cap U} f|_{Q \cap U} dx$$

als Integral über f über einen Quader, der $\operatorname{supp}(f)$ enthält, falls es existiert, und nennen in dem Fall f Riemann-integrierbar. Dabei braucht U nicht unbedingt beschränkt oder Jordan-messbar zu sein.

Satz

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus und sie $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist die Funktion $\Phi^* f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(\Phi^* f)(x) = (f \circ \Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))|$ Riemann-integrierbar, hat kompakten Träger, und es gilt

$$\int_Y f(y) dy = \int_X (f \circ \Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))| \, dx$$

Proposition

Seien X und Y offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und sei $\Phi : X \to Y$ ein Homeomorphismus. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Funktion und schreibe $g = f \circ \Phi$.

1. Ist f Riemann-integrierbar, so ist auch g Riemann-integrierbar.
2. Es gilt $\operatorname{supp}(g) = \Phi^{-1}(\operatorname{supp}(f))$.

Lemma

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung die durch eine obere Dreiecksmatrix gegeben ist, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x)) dx$$

Lemma

Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist $f \circ L$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = |\det(L)| \int_{\mathbb{R}^n} f(L(x)) dx$$

Korollar

Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge. Dann ist $L(B)$ Jordan-messbar, und es gilt $\operatorname{vol}(L(B)) = |\det L| \operatorname{vol}(B)$.

Korollar

Sei $L \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit Spalten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das **Parallelotop**

$$P = L([0,1]^n) = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i v_i \mid 0 \le s_i \le 1 \right\}$$

Jordan-messbar und es gilt $\mathrm{vol}(P) = |\det(L)| = \sqrt{\mathrm{gram}(v_1, \ldots, v_n)}$. Hierbei ist gram die **Gramsche Determinante**.

Lemma

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $Q_0 \subseteq X$ ein achsenparalleler abgeschlossener Würfel mit Kantenlänge $2r > 0$ und Mittelpunkt $x_0 \in X$. Wir setzen $y_0 = \Phi(x_0)$, $L = D\Phi(x_0)$ und

$$\sigma = \max \left\{ \|D\Phi(x) - L\|_{\mathrm{op}} \mid x \in Q_0 \right\}$$

Für jede reelle Zahl s mit $\sigma \left\|L^{-1}\right\|_{\mathrm{op}} \sqrt{n} \le s < 1$ gilt

$$y_0 + (1-s)L(Q_0 - x_0) \subseteq \Phi(Q_0) \subseteq y_0 + (1+s)L(Q_0 - x_0)$$

Lemma

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus und sei $K_0 \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft. Für jeden Würfel Q_0 mit Mittelpunkt x_0, Kantenlänge kleiner als δ und $Q_0 \cap K_0 \neq \varnothing$ gilt

$$\frac{\mathrm{vol}(\Phi(Q_0))}{1+\varepsilon} \le |\det D\Phi(x_0)| \, \mathrm{vol}(Q_0) \le \frac{\mathrm{vol}(\Phi(Q_0))}{1-\varepsilon}$$

12.4 Uneigentliche Mehrfachintegrale

Definition

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine **Ausschöpfung** von B ist eine Folge Jordan-messbarer Teilmengen $(B_m)_{m=0}^\infty$ mit

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots \qquad \text{und} \qquad B = \bigcup_{m=0}^\infty B_m$$

und wir nennen B **ausschöpfbar**, falls solch eine Ausschöpfung existiert.

Korollar

Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ausschöpfbar. Insbesondere gibt es eine Ausschöpfung $(K_m)_{m=0}^\infty$ von U durch kompakte Jordan-messbare Teilmengen.

Definition

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ausschöpfbar, und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f auf B **uneigentlich Riemann-integrierbar** ist, falls für jede Ausschöpfung $(B_m)_{m=0}^\infty$ von B mit der Eigenschaft, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|_{B_m}$ Riemann-integrierbar ist, der Grenzwert

$$\int_B f dx := \lim_{m \to \infty} \int_{B_m} f dx$$

existeirt und von der Wahl solch einer Ausschöpfung unabhängig ist. Diesen Grenzwert nennen wir in dem Fall das **uneigentliche Integral** von f über B.

Proposition

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge, sei $(B_m)_{m=0^\infty}$ eine Ausschöpfung von B und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann gelten

1) $\mathrm{vol}(B) = \lim_{m\to\infty} vol(B_m)$

2) $\int_B f dx = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f dx$

Insbesondere ist f über B uneigentlich Riemann-integrierbar, und das uneigentliche Riemann-Integral ist das gewöhnliche Riemann-Integral.

Satz

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, sei $f : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion und sei $(B_m)_{m=0}^\infty$ eine Ausschöpfung von B so dass $f|_{B_m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$I = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f dx$$

existiert, so ist f uneigentlich Riemann-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral ist gleich I.

Bemerkung

Ist B ausschöpfbar und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist f uneigentlich Riemann-integrierbar, falls

$$f_+ = \max(f, 0) \qquad \text{und} \qquad f_- = \max(-f, 0)$$

uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Des weiteren gilt $f = f_+ - f_-$.

Bemerkung

Das uneigentliche Integral in mehreren Variablen ist nicht kompatibel mit dem uneigentlichen Integral in einer Variablen.

Satz

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to$Y ein Diffeomorphismus. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist die Funktion $(f \circ \Phi) |\det(D\Phi)|$ uneigentlich Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Y f \ dx = \int_X (f \circ \Phi) |\det(D\Phi)| \ dx$$

Beispiel (Gauss'sche Glockenkurve)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch $f(x) = \exp(-x^2)$. Man nennt diese Funktion **Dichtefunktion**. Dann ist die Stammfunktion gegeben als

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2) dt$$

Diese Funktion heisst **Verteilungsfunktion** der Normalverteilung. Wenn wir den Grenzwert des Integrals mit $x \to \infty$ berechnen wollen, erhalten wir

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$$

Am einfachsten berechnet man dies, indem man I^2 berechnet.

13 Globale Integralsätze

13.1 Der Divergenzsatz und der Satz von Green in der Ebene

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld auf U. Die **Divergenz** (Quellenstärke) von F ist die Funktion $\operatorname{div}(F) : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{tr}(Df) = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \cdots + \partial_n F_n$$

Definition

Sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein stückweise stetig differenzierbarer Pfad. Sei $t \in [a,b]$ so, dass γ bei t differenzierbar ist. Wir schreiben

$$n_\gamma(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$$

und bezeichnen diesen Vektor als **Aussennormale** oder **Normalenvektor** an γ im Punkt $\gamma(t)$. Dieser Vektor zeigt bezüglich der Laufrichtung nach rechts. Wichtig ist, dass die Laufrichtung immer im gegenuhrzeigersinn ist, damit die Aussennormale tatsächlich nach aussen zeigt. Für $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ist gilt:

$$\left\langle v, n_{\gamma'(t)} \right\rangle = v_1 \gamma_2'(t) - v_2 \gamma_1'(t) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \gamma_1'(t) \\ v_2 & \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = v \times \gamma'(t) = v \wedge \gamma'(t)$$

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein stückweise stetig differenzierbarer Pfad. Das **Flussintegral** von F entlang γ ist das Integral

$$\int_\gamma F \; dn_\gamma = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), n_\gamma(t) \rangle \, dt$$

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $B \subseteq U$ beschränkt und zusammenhängend mit glattem Rand. Sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ von Klasse C^1. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} F(x) \; dx = \int_{\partial B} F \; dn = \int_\gamma F \; dn_\gamma$$

für eine Kurve $\gamma : [a,b] \to U$ die ∂B parametrisiert.

Bemerkung

Das Flussintegral bleibt unter Reparametrisierung eines Pfades unverändert.

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B = [a,b] \times [c,d] \subseteq U$ ein Rechteck. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(F) \; dx = \int_{\partial B} F \; dn$$

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt für alle $x_0 \in U$

$$\operatorname{div}(F)(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{4h^2} \int_{\partial(x_0 + [-h,h]^2)} F \; dn$$

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen, so, dass das Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ in U enthalten ist, und sei $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für den Bereich $B = \{(x,y) \in U \mid x \in [a,b],\ c \leq y \leq \varphi(x)\}$

$$\int_B \operatorname{div}(F) \; dx = \int_{\partial B} F \; dn$$

Definition

Eine abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst ein **glatt berandeter Bereich**, falls es für jeden Punkt $p \in B$ eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^n$ von p gibt und ein glatter Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi_p(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass folgendes gilt

$$\varphi_p(U_p \cap B) = \{y \in V_p \mid y_n \leq 0\}$$

Korollar

Aus der obigen Definition folgt insbesondere, dass der Rand ∂B eines glatt berandeten Bereichs B eine $n-1$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Korollar

Wenn ein Bereich B lokal um jeden Punkt aussieht wie das Gebiet unter dem Graphen einer glatten reellwertigen Funktion in $(n-1)$ Variablen, geeignet rotiert, dann ist der Bereich B glatt berandet.

Lemma

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit Null als regulären Wert. Dann ist die abgeschlossene Teilmenge

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \geq 0\}$$

glatt berandet und $\partial B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) = 0\}$

Satz

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $U_1, \ldots, U_N$ eine (endliche) offene Überdeckung von K. Dann existieren glatte Funktionen $\eta_0, \ldots, \eta_N : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit:

1) $\operatorname{supp}(\eta_0) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash K$

2) $\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$ für $i = 1, \ldots, N$

3) $\eta_0 + \cdots + \eta_N = 1$

Lemma

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist die durch

$$(\psi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y) f(y) dy$$

definierte Funktion $\psi * f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt, mit Träger in $\operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(f)$.

Lemma

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\delta \in (0, \varepsilon)$ und eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ so dass

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad , \quad \text{supp}(\psi) \subseteq B(0, \delta) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi \ dx \ = 1$$

für alle $x \in K$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Für jede solche Funktion ψ gilt $|(\psi * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in K$.

Definition

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Eine **Parametrisierung des Randes** von B ist eine endliche Kollektion stetig differenzierbarer Wege $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \partial B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. (Überdeckend) Es gilt $\partial B = \bigcup_{k=1}^K \gamma_k\left([a_k, b_k]\right)$.
2. (Keine Überschneidungen ausser an den Enden) Falls $\gamma_j(s) = \gamma_k(t)$ für $(j, s) \neq (k, t)$ gilt, so gilt $s \in \{a_j, b_j\}$ und $t \in \{a_k, b_k\}$.
3. (Aufeinanderfolgend) Für jedes $j \in \{1, \ldots, K\}$ existiert genau ein $k \in \{1, \ldots, K\}$ mit $\gamma_j(b_j) = \gamma_k(a_k)$.
4. (Regularität) Es gilt $\gamma_k'(t) \neq 0$ für alle k und $t \in (a_k, b_k)$.

Die Parametrisierung $\gamma_1, \ldots, \gamma_K$ heisst **positiv orientiert**, wenn für jedes k und jedes $t \in (a_k, b_k)$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\gamma(t) + \lambda n_\gamma(t) \in B^\circ$ für alle $\lambda \in (0, \varepsilon)$. Dabei ist $n_\gamma(t) = (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ die Aussennormale an γ.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand eine positiv orientiert Parametrisierung $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \partial B \ , \ldots, \ \gamma_K : [a_k, b_k] \to \partial B$ besitzt. Sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Umgebung U von B. Das **Wegintegral** oder **Arbeitsintegral** von F entlang ∂B ist durch

$$\int_{\partial B} F \ dt \ = \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle F(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t) \rangle \, dt$$

definiert. Das **Flussintegral** von F durch den Rand ∂B ist durch

$$\int_{\partial B} F \ dn \ = \sum_{k=1}^K \int_{a_k}^{b_k} \langle F(\gamma_k(t)), n_\gamma(t) \rangle \, dt$$

definiert. Diese Integrale sind unabhängig von der Wahl der positiv orientierten Parametrisierung.

Satz (Divergenzsatz in der Ebene)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $B \subseteq U$ glatt berandet und kompakt. Sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld der Klasse C^1. Dann gilt

$$\int_B \text{div}(F) dx = \int_{\partial B} F \ dn$$

Bemerkung

Der Satz gilt auch für Bereiche $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch das Innere von Rechtecken R_i abgedeckt werden kann, so dass $B \cap R_i$ geeignet rotiert das Gebiet unter einem Graphen einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion ist. Salopp heisst die, das B "endlich viele Ecken" haben kann.

Satz (Satz von Green)

Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt für jeden glatt berandeten, kompakten Bereich $B \subseteq U$

$$\int_B \text{rot}(F) dx = \int_{\partial B} F \ dt$$

Wobei $\text{rot}(F) = \partial_2 F_1(x) - \partial_1 F_2(x)$

Definition

Wir sagen, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^2$ **rotationsfrei** ist, falls $\operatorname{rot}(F) = 0$.

Korollar

Dass F rotationsfrei ist, bedeutet in anderen Worten gerade, dass F die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

Satz (Jordanscher Kurvensatz)

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ein glatter, regulärer, einfacher, geschlossener Weg. Dann kann man das Komplement von $\Gamma = \gamma([0,1])$ eindeutig als disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma = \operatorname{Inn}(\Gamma) \cup \operatorname{Auss}(\Gamma) \quad , \quad \operatorname{Inn}(\Gamma) \cap \operatorname{Auss}(\Gamma) = \varnothing$$

schreiben, wobei dasd Innere $\operatorname{Inn}(\Gamma)$ eine offene, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge und das Äussere $\operatorname{Auss}(\Gamma)$ eine offene, unbeschränkte, zusammenhängende Teilmenge ist. Des Weiteren gilt $\partial \operatorname{Inn}(\gamma) = \partial \operatorname{Auss}(\gamma) = \Gamma$.

13.2 Oberflächenintegrale

Definition

Eine **Fläche** $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit. Wir werden an zwei Arten von Flächen interessiert sein:

(1) Die Fläche S ist der Rand eines kompakten, glatt berandeten Bereiches $B \subset \mathbb{R}^3$. Beispielsweise können S also eine Sphäre oder ein Torus sein. Wir sprechen informell von einer **geschlossenen Fläche**

(2) Die Fläche S ist Teil einer Grösseren Fläche M, so, dass der Abschluss von S in M kompakt ist, und der Rand von S in M eine glatte Kurve, das heisst, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 1. Ein Beispiel für so eine Fläche ist die obere Hemisphäre von $\mathbb{S}^2$. Wir sprechen informell von einer **Fläche mit Rand**.

Um eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ lokal zu beschreiben, werden wir Karten und Parametrisierungen verwenden. Wir identifizieren im Folgenden $\mathbb{R}^2$ mit dem Unterraum $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^2$.

Definition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Also existiert für jeden Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von p und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ auf eine weitere Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass

$$\varphi(U \cap S) = \{x \in V \mid x_3 = 0\} = V \cap \mathbb{R}^2$$

gilt. Den Diffeomorphismus φ_p bezeichnet man als **Karte** für die Teilmannigfaltigkeit S von $\mathbb{R}^3$ um p und den zu φ inversen Diffeomorphismus $\psi : V \to U$ als **Parametrisierungen** von S um p. Die Diffeomorphismen φ und ψ schränken sich zu

$$\varphi : U \cap S \to V \cap \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad \psi : V \cap \mathbb{R}^2 \to U \cap S$$

ein. Sind $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ Karten für S, so bezeichnet man den Diffeomorphismus

$$\alpha_{12} : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\varphi_1} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

als **Kartenwechsel**, **Transitionsabbildungen** oder auch **Übergangsmorphismus**. Dieser Diffeomorphismus schränkt sich zu

$$\alpha_{12} : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^2 \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^2$$

ein. Wir werden die Terminologie nun leicht adaptieren, und Kartenbereiche nicht als in $\mathbb{R}^3$ offene Mengen definieren, sondern als relativ offene Mengen von S, mit Wertebereichen offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.

Definition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Wir nennen **Atlas** für S eine Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ von S durch relativ offene Teilmengen $U_i \subseteq S$, genannt **Kartenbereiche**, zusammen mit Homeomorphismen $\varphi_i : U_i \to V_i$ auf offene Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ genannt **Kartenabbildungen**, so dass die **Parametrisierung** $\psi_i = \varphi_i^{-1}$

$$\psi_i : V_i \to U_i \subseteq \mathbb{R}^3$$

glatt sind, und so, dass die **Kartenwechsel** oder **Transitionsabbildungen** $\alpha_{ij} : V_i \to V_j$ gegeben durch

$$\alpha_{ij} : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

glatt sind.

Definition

Eine **zweidimensionale, reelle Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum X, zusammen mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X und Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \to V_i$ mit $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, für alle $i \in I$ so, dass alle Transitionsabbildungen

$$\alpha_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

glatt sind.

Definition

Sei X eine 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ heisst **glatt** (C^∞), falls für jede Karte $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^2$ von X die Verknüpfung $V \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ glatt ist.

Bemerkung

Eine Mannigfaltigkeit X mit Atlas $(U_i \xrightarrow{\varphi} V_i)_{i \in I}$ können wir uns vorstellen als

$$\left(\biguplus V_i\right) \big/ \alpha_{ij}(X)$$

wobei $\biguplus V_i$ die disjunkte Vereinigung von allen V_i ist. Ist X aus einer Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ gegben, so erhalten wir

$$\varphi_i^{-1} : V_i \to U_i \subseteq \mathbb{R}^3$$

welches kompatibel mit der obigen Verklebung ist.

Definition

Sei X eine 2-dimensionale reelle Teilmannigfaltigkeit mit Atlas $(\varphi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{R}^2)_{i \in I}$. Eine **Immersion** von X nach $\mathbb{R}^3$ ist eine injektive, abgeschlossene Abbildung $h : X \to \mathbb{R}^3$ sodass für jedes $i \in I$ und $x \in V_i$

$$D(h \circ \varphi_i^{-1})(x)$$

injektiv ist.

Bemerkung

Ist $h : X \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, dann ist $h(x) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

Definition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, bzw eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir sagen ein Atlas $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ sei **orientiert**, falls für alle Kartenwechsel α_{ij} die Jacobi-Determinante

$$\det(D\alpha_{ij}) > 0$$

positiv ist. Wir sagen S sei **orientierbar**, falls S einen orientierten Atlas besitzt.

Definition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, bzw eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Ein stetiges **normiertes Normalenfeld** ist ein stetiger Schnitt des Normalenbündels von S, also eine stetige Abbildung $n : S \to \mathbb{R}^3$ mit $n(p) \in (T_p S)^\perp$, so, dass $\|n(p)\| = 1$ für alle $p \in S$ gilt.

Proposition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, bzw eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. S ist genau dann orientierbar, wenn ein stetiges normiertes Normalenfeld existiert.

Lemma

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich. Dann ist der Rand $S = \partial B$ orientierbar, und es gibt ein eindeutiges stetiges normiertes Normalenfeld $n : S \to \mathbb{R}^3$ so, dass $p + \varepsilon n(p) \notin B$ für alle $p \in S$ und alle genügent kleinen $\varepsilon > 0$ gilt.

Definition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, und $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $(\varpi_i : U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein endlicher Atlas von S mit Parametrisierung $\psi_i = \varphi_i^{-1} : V_i \to U_i \subseteq S$, und seien $(\eta_i : S \to [0,1])_{i\in I}$ stetige Funktionen mit

$$\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i\in I} \eta_i = 1$$

also eine stetige Zerlegung der Eins auf S. Schreibe $f_i = \eta_i f$. Wir definieren das **skalare Oberflächenintegral** von f auf S als

$$\int_S f \, dA = \sum_{i\in I} \int_{V_i} (f_i \circ \psi_i) \|\partial_1 \psi_i \wedge \partial_2 \psi_i\| \, dx$$

falls die zweidimensionale Riemann-Integrale rechterhand existieren. Der **Flächeninhalt** von F ist durch

$$\operatorname{vol}(S) = \int_S dA = \sum_{i\in I} \int_{V_i} \|\partial_1 \psi_i \wedge \partial_2 \psi_i\| \, dx$$

definiert.

Bemerkung

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Falls X durch Kartenbereiche $U_1, \ldots, U_N$ abgedeckt ist, bis auf eine Vereinigung von Punkten und Kurven, mit $U_1, \ldots, U_N$ disjunkt, dann gilt

$$\int_X f \, dA = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} f|_{U_i} dA$$

Definition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche und sei $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein endlicher orientierter Atlas von S mit Parametrisierungen $\psi_i = \varphi_i^{-1}$, und sei $(\eta_i)_{i\in I}$ eine stetige Zerlegung der Eins auf S mit $\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge die S enthält, und sei F ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann definieren wir das **Flussintegral** von F über S durch

$$\int_S F \, dn = \sum_{i\in I} \int_{V_i} \langle \eta_i F \circ \psi_i, \partial_1 \psi_i \wedge \partial_2 \psi_i \rangle \, dx$$

13.3 Der Divergenzsatz im dreidimensionalen Raum

Proposition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Rechteck, $z_0 \in \mathbb{R}$ und $\varphi : Q \to [z_0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass der abgeschlossene Bereich under dem Graphen von φ

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{Q}\ ,\ z_0 \leq z \leq \varphi(x, y)\}$$

in U liegt. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(F)\ dx \ = \ \int_{\partial B} F\ dn$$

Satz (Divergenzsatz/ Satz von Gauss)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld, definiert auf einer offenen Umgebung von B. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(F)\ dx \ = \ \int_{\partial B} F\ dn$$

13.4 Der Satz von Stokes im dreidimensionalen Raum

Bemerkung

Flächen mit Rand $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sind abgeschlossene Teilmengen einer 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$, so, dass der Rand von S relativ in M eine eindimensionale Teilmannigfaltigkeit ist.

Bemerkung

Eine wichtige Familie glatt berandeter Flächen sind Graphen glatter Funktionen. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so ist für jeden glatt berandeten Bereich $B \subseteq U$ der Graph

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B \ \text{ und } z = f(x, y)\}$$

eine glatt berandete Fläche. Die Projektion von S auf B ist eine Karte für ganz S. Lokal kann jede glatt berandete Fläche als Graph beschrieben werden.

Definition

Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Die **Wirbelstärke** oder **Rotation** von F ist das Vektorfeld auf U definiert durch

$$\operatorname{rot}(F(x)) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$$

Satz (Satz von Stokes)

Sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Sei $S \subseteq U$ eine glatt berandete, kompakte und orientierbare Fläche. Dann gilt

$$\int_S \operatorname{rot}(F)\ dn \ = \ \int_{\partial S} F\ dt$$

14 Gewöhnliche Differentialgleichungen

14.1 Differentialgleichungssysteme

Wir fixieren ein offenes, nichtleeres Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Wir schreiben $C^\infty(I)$ für den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller glatten Funktionen $I \to \mathbb{C}$.

Definition

Wir schreiben $D : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ für die Ableitung $Df = f'$, aufgefasst als $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus des Vektorraums $C^\infty(I)$. Ein linearer **Differentialoperator** der Ordnung $d \geq 0$ ist eine lineare Abbildung

$$L : C^\infty(I) \to C^\infty(I) \quad , \qquad \sum_{i=0}^{d} L = a_i D^i$$

die sich als Linearkombination von $D^0 = \mathrm{id}$, $D^1 = D$, $D^2 = D \circ D$, ... mit Koeffizienten $a_i \in C^\infty(I)$ schreibt. Als lineare, gewöhnliche **Differentialgleichung** der Ordnung d bezeichnen wir die Gleichung $Lu = g$ für einen vorgegebenen Differentialoperator L und eine vorgegebene **Störfunktion** $g \in C^\infty(I)$. Als **Anfangswertproblem** bezeichnet man das lineare Gleichungssystem bestehend aus dieser Differentialgleichung und d Gleichungen

$$\begin{aligned} &Lu = g \\ &u(x_0) = w_0 \quad , \quad Du(x_0) = w_1 \quad , \ldots , \quad D^{d-1}u(x_0) = w_{d-1} \end{aligned}$$

für vorgegebene **Anfangswerte** $w_0, w_1, \ldots, w_{d-1} \in \mathbb{R}$.

Korollar

Um die Lösung der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ zu finden, setzen wir $u(x) = \exp(\alpha x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$. Damit gilt $D^i u = \alpha^i u$ und

$$Lu = \sum_{i=0}^{d} a_i D^i u = \sum_{i=1}^{d} a_i \alpha^i u$$

Daher ist $u(x) = \exp(\alpha x)$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $Lu = 0$, wenn $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des sogenannten **charakteristischen Polynoms** des Operators L

$$p(T) = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$$

ist. Ist α eine reelle Nullstelle von $p(T)$, dann ist durch $u(x) = \exp(\alpha x)$ eine reellwertige Lösung gegeben. Bei reellen Koeffizienten und einer komplexen Nullstelle $\alpha = \beta + \gamma i \in \mathbb{C}$ mit $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist $\overline{\alpha} = \beta - \gamma i$ ebenso eine Nullstelle von $p(T)$. Dann sind alle Linearkombinationen $s \exp(\alpha) + t \exp(\overline{\alpha} x)$ und insbesondere

$$\frac{\exp(\alpha x) + \exp(\overline{\alpha} x)}{2} = \exp(\beta x)\cos(\gamma x) \quad , \quad \frac{\exp(\alpha x) + \exp(\overline{\alpha} x)}{2i} = \exp(\beta x)\sin(\gamma x)$$

Lösungen von $Lu = 0$. Man beachte, dass $\exp(\alpha x)$ und $\exp(\overline{\alpha} x)$ gleichen $\mathbb{C}$-Unterraum von Lösungen zu $Lu = 0$ aufspannen wie $\exp(\beta x)\cos(\gamma x)$ und $\exp(\beta x)\sin(\gamma x)$.

Korollar

Wir betrachten nun den Fall, in dem das charakteristische Polynom des Differentialoperators L eine mehrfache Nullstelle hat. Dazu untersuchen wir Linearkombinationen von Funktionen des Types $f(x) = x^n \exp(\alpha x)$.
Hierbei ist n die Vielfachheit einer Nullstelle α. Als Lösungsansatz summieren wir über all die Nullstellen und alle Vielfachheiten. Angenommen wir haben zwei Nullstellen λ_1 und λ_2 mit Vielfachheiten μ_1 bzw μ_2. Dann ist der Ansatz von u gegeben als

$$u = \sum_{i=0}^{\mu_1 - 1} c_i x^i e^{\lambda_1 x} + \sum_{j=0}^{\mu_2 - 1} c_j x^j e^{\lambda_2 x}$$

wobei c_i und c_j Koeffizienten sind, welche mit den Anfangsbedingungen herausgefungen werden müssen. Wichtig ist, dass die Koeffizienten in den beiden Summen verschieden sind. Die Notation ist etwas ungünstig, da mehrere Koeffizienten den gleichen Intex haben könnten.

Definition

Wir bezeichnen den $\mathbb{C}$-Vektorraum der von diesen Funktionen aufgespannt wird, also

$$\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I) = \langle x^n \exp(\alpha x) \mid n \in \mathbb{N} \ , \ \alpha \in \mathbb{C} \rangle$$

als Raum der **Exponentialpolynome**. Zusammen mit der üblichen Multiplikation bilden Exponentialpolynome eine $\mathbb{C}$-Algebra. Die Ableitung definiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$D : \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I) \to \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I) \quad , \qquad D(x^n e^{\alpha x}) = n x^{n-1} e^{\alpha x} + \alpha x^n e^{\alpha x}$$

die die Leibnitz-Regel $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ erfüllt.

Proposition

Die Funktion $\{x \mapsto x^n \exp(\alpha x) \mid n \in N, \alpha \in \mathbb{C}\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$.

Proposition

Sei $p \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom von Grad $d \geq 1$, das mittels

$$p(T) = a \prod_{j=1}^{k} (T - \alpha_j)^{d_j}$$

in d Linearfaktoren zerfällt, wobei wie annehmen, dass $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$ gilt. Sei $L = p(D)$ der Differentialoperator mit charakteristischem Polynom p. Dann hat die zugehörige homogene Differentialgleichung $Lu = 0$ die d linear unabhängigen Lösungen $u(x) = x^n \exp(\alpha_j x)$ für $0 \leq n \leq n_j$ und $1 \leq j \leq k$.

Bemerkung

Wir wenden uns nun den inhomogenen Problem zu. Für ein Polynom $p(T) \in \mathbb{C}[T]$ und eine Störfunktion $g \in \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ gibt es ein einfaches Verfahren, mit dem man eine Lösung u_0 der inhomogenen Differentialgleichung $p(D)u = g$ finden kann.

1. Falls $g(t) = q(t)e^{\alpha t}$ für ein Polynom q vom Grad n und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha) \neq 0$, dann definiert man $u_0(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, wobei $Q(T)$ ein Polynom vom Grad n mit noch zu bestimmenden Koeffizienten ist. Nun berechnet man $p(D)u_0$ und bestimmt Koeffizienten so dass $p(D)u_0 = g$ gilt.

2. Falls $g(x) = q(x)e^{\alpha x}$ für ein Polynom $q(T)$ vom Grad n und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha) = 0$, dann wiederholt man obiges Verfahren, allerdings mit dem Ansatz $u_0(t) = Q(t)t^m e^{\alpha t}$, wobei m die Vielfachheit der Nullstelle α von $p(T)$ angibt.

3. Ein allgemeines $g \in \mathrm{PE}_{\mathbb{C}}(I)$ lässt sich als Linearkombination von Ausdrücken wie oben darstellen. Auf Grund der Linearität von $p(D)$ kann man also obiges Verfahren für Summanden der Form $q(x)e^{\alpha x}$ in g anwenden und dann die resultierenden Lösungsfunktionen addieren.

Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subseteq I \times \mathbb{R}^d$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(t) = F(t, u(t))$$

für eine unbekannte Funktion u bezeichnen wir als **d-dimensionale Differentialgleichungssysteme erster Ordnung**. Dabei ist der Definitionsbereich einer Lösung u möglicherweise nur ein Teilintervall von I. Damit die obere Gleichung überhaupt Sinn ergibt, muss $(t, u(t)) \in U$ für alle t im Definitionsbereich von u gelten. Zu $(t_0, x_0) \in U$ nennen wir die Gleichung

$$u'(t) = F(t, u(t)) \quad , \qquad u(t_0) = x_0$$

ein **Anfangswertproblem** zum **Anfangswert** x_0 bei $t_0 \in I$. Die Differentialgleichung heisst **autonom**, falls F konstant bezüglich der Variablen t ist.

Proposition

Sei $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem für differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$

$$u'(t) = Au \quad , \qquad u(t_0) = x_0$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $u(t) = \exp(A(t - t_0))x_0$.

Definition (**Trennung der Variablen / Variablenseparation**)

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$u'(t) = f(t)g(u(t))$$

für Funktionen f und g. Solch eine Differentialgleichung bezeichnet man als **separierbar**, da auf der rechten Seite ein Produkt von zwei Funktionen steht, von denen eine nur von der Variablen t, und die andere nur von der "Variablen" $u = u(t)$ abhängt. Wir teilen durch $g(u(t))$ und integrieren:

$$\int \frac{u'(t)}{g(u(t))} \, dt \;=\; \int f(t) \, dt \; + C$$

Im Integral linkerhand können wir die Substitution $s = u(t)$ vornehmen. Ist also G eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ und F eine Stammfunktion von f, so erhalten wir $G(u(t)) = F(t) + C$ für eine Integrationskonstante C. Falls G invertierbar ist, ergibt sich damit die Lösung

$$u(t) = G^{-1}(F(t) + C)$$

der Differentialgleichung.

14.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

Satz

Sei $d \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $(t_0, x_0) \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^d$ stetig. Angenommen F ist "lokal Lipschitz-stetig im Ort", das heisst, für alle $(t_1, x_1) \in U$ existieren $\varepsilon > 0$ und $L \geq 0$, so dass für alle $(t, x_2), (t, x_3) \in B((t_1, x_1), \varepsilon) \cap U$ die Abschätzung

$$||F(t, x_2) - F(t, x_3)|| \leq L \, ||x_2 - x_3||$$

gilt. Dann existert ein (nicht unbedingt beschränktes) Intervall $I = I_{max} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt $(t, u(t)) \in U$ für alle $t \in I$, und u ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) & \text{für alle } t \in I \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2. Für jede weitere Lösung $v : J \to \mathbb{R}^d$ desselben Anfangswertproblems definiert auf einm offen Intervall J mit $t_0 \in J$ gilt $J \subseteq I$ und $u|_J = v$.
3. Die Grenzwerte $\lim\limits_{t \to a}(t, u(t))$ und $\lim\limits_{t \to b}(t, u(t))$ existieren nicht in U.

Bemerkung

Die Hypothesen sind erfüllt, wenn F von Klasse C^1 ist.

Bemerkung

Informell besagt der Satz von Picard-Lindelöf, dass jedes Anfangswertproblem für ein im Ort lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld eine eindeutige Lösung hat.

Korollar

Sie $d \geq 1$ und $a_0, \dots, a_{d-1} \in C^\circ(D, \mathbb{R})$ für $D \in \mathbb{R}$ offen, $t_0 \in D$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Dann existert ein maximales offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ zusammen mit $u : I \to \mathbb{R}^d$ eindeutig bestimmt durch

$$u^{(d)} + a_{d-1}u^{(d-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0$$

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \\ \vdots \\ d^{(d-1)}(t_0) \end{pmatrix} = x_0$$

Insbesondere gilt $\dim\ker(L) = d$.

Proposition

Sei $r > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und sei

$$F : (t_0 - r, t_0 + r) \times B(x_0, r) \to \mathbb{R}^d$$

eine stetige Funktion. Angenommen es existieren Konstanten $C \geq 1$ und $L > 0$ so dass

$$\|F(t,x)\| \leq C \qquad \text{und} \qquad \|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \leq L\,\|x_1 - x_2\|$$

für alle $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$ und $x, x_1, x_2 \in B(x_0, r)$ gilt. Dann existiert für jedes $\delta > 0$ mit $\delta < \min\left\{\frac{r}{2C}, \frac{r}{2L}\right\}$ eine eindeutige differenzierbare Funktion $u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to B(x_0, r)$ die folgendes erfüllt:

$$\begin{cases} u(t_0) = x_0 \\ u'(t) = F(t, u(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \end{cases}$$

Lemma

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit f differenzierbar auf (a,b) und $f'(t) = g(t)\ \forall t \in (a,b)$. Dann ist f bei b linksseitig ableitbar und $f'(b) = g(b)$.

Definition (Die Quasilineare Partielle Differentialgleichung in zwei Variablen)

Sei $u(x,y)$ eine Funktion in zwei Variablen mit

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

eine Funktion in 5 Variablen und linear in den "letzten beiden. Seien a, b, c Funktionen in 3 Variablen sodass die folgende Gleichung erfüllt ist

$$a(x,y,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \quad \Longleftrightarrow \quad a(x,y,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - c(x,y,u) = 0$$

Wir definieren eine Funktion F in 3 Variablen und einen Normalenvektor n an dem Graphen von u im Punkt (x,y,z).

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \\ c(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$n(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $n(x,y,z) = \operatorname{grad}(u(x,y) - z)$. Damit vereinfacht sich die Differentialgleichung zu

$$\langle F(x,y,u), n(x,y,u) \rangle = 0$$

Der Graph von u "fliesst" entlang dem Vektorfeld F, i.e.: Für alle (x,y,z) mit $z = u(x,y)$ im Graphen von u ist $F(x,y,z)$ tangential an den Graphen.

Satz (Cauchy-Kovalevskaya)

Sei $F = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld auf (einer offenen Menge in) $\mathbb{R}^3$ mit $a(x, y, z) \neq 0$. Dann hat die Differentialgleichung

$$\begin{cases} a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = c \\ u(0, y) = f(y) \end{cases}$$

(mit f gegeben von Klasse C^1) eine eindeutige Lösung für kleine x, i.e. $|x| < T(y)$.