1 Recap Lineare Algebra I

Definition (**Gruppen**)
Ein Tupel $(G, *, e)$ ist eine Gruppe falls folgendes erfüllt ist:

G1) Assiziativität: $(a * b) * c = a * (b * c)$

G1) Neutrales Element: $\exists e \in G$ mit

a) $e * a = a \ \forall a \in G$
b) $\forall a \in G \ \exists a' \in G$ mit $a * a' = e$

Eine Gruppe heisst **abelsch**, wenn $a * b = b * a \ \forall a, b \in G$.

Definition (**Gruppenhomomorphismus**)
Seien $(G, \circ_G, e_G)$ und $(H, \circ_H, e_H)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heisst **Gruppenhomomorphismus** wenn $\forall a, b \in G$ folgendes gilt:

$$\varphi(a \circ_G b) = \varphi(a) \circ_H \varphi(b)$$

Definition (**Ring**)
Ein **Ring** ist ein Tupel $(R, +, \cdot, 0)$ bestehend aus einer Menge R, zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und ein neutrales Element $0 \in R$ sodass:

R1) $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe

R1) die Multiplikation ist assoziativ

R1) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = ab + ac$ und $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Ein Ring heisst **kommutativ**, wenn $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in R$. Ein Element $1 \in R$ heisst **Einselement**, wenn $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \forall a \in R$. Ein Element $0 \in R$ heisst **Nullelement**, wenn $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \forall a \in R$.

Definition
Ein Ring heisst **Nullteilerfrei**, wenn $\forall a, b \in R$ gilt: $a \cdot b \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.

Definition (**Körper**)
Ein **Körper** ist ein Tupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit

K1) $(K, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe

K1) $(K \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe

K1) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = ab + ac$ und $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Definition (**Vektorraum**)
Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung $+$ und einer äusseren Verknüpfung $\cdot$ heisst K**-Vektorraum** wenn:

V1) $(V, +, 0_V)$ eine abelsche Gruppe bildet mit 0 als neutralem Element

V1) Skalare Multiplikation erfüllt $\forall \lambda \in K \ \forall v, w \in V$:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)v &= \lambda v + \mu v \qquad & \lambda(\mu v) &= (\lambda \mu) v \\ \lambda(v + w) &= \lambda v + \lambda w \qquad & 1 \cdot v &= v \end{aligned}$$

Definition (**Lineare Abbildungen**)
Eine Abbildung $F : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen V, W heisst K**-linear**, wenn $\forall v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

L1) $F(v + w) = F(v) + F(w)$

L1) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$

Bemerkung
Wir nennen F einen

- **Isomorphismus**, wenn F bijektiv ist
- **Endomorphismus**, wenn $V = W$
- **Automorphismus**, wenn $V = W$ und F bijektiv

Bemerkung

a) Sind $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig, so sind auch $(F(v_i))_{i \in I}$ linear abhängig.

b) Ist F ein Isomorphismus, so ist auch $F^{-1} : W \to V$ linear.

Definition
$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{F : V \to W \mid F \text{ ist } K\text{-linear}\}$

$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$

Bemerkung
Ist $F : V \to W$ linear, so gilt:

a) F surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = W$

b) F injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(F) = \{0\}$

c) F injektiv und $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, so sind auch die Bilder $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig.

Definition
Eine Teilmenge X eines K-Vektorraumes V heisst **affiner Unterraum**, falls es ein $v \in V$ und einen Untervektorraum $W \subset V$ gibt, sodass $X = v + W := \{v + w \mid w \in W\} = \{u \in V \mid \exists w \in W \text{ mit } u = v + w\}$

Korollar
Zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräumen gibt es genau dann einen Isomorphismus, wenn $\dim(V) = \dim(W)$.

Satz (**Fakrorisierungssatz**)
Sei $F : V \to W$ linear und $A = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von V mit $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Definieren wir $U = \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_r)$ so gilt:

1) $V = U \oplus \mathrm{Ker} F$

2) Die Einschränkung $F|_U : U \to \mathrm{Im} F$ ist ein Isomorphismus

3) Bezeichnet $P : V = U \oplus \mathrm{Ker} F \to U$, $v = u + v' \mapsto u$, die Projektion auf den ersten Summanden, so ist $F = (F|_U) \circ P$. In Form eines Diagrammes hat man

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "F"] & \\ U \arrow[r, "F|_U"'] & ImF \subset W \end{tikzcd}$$

Insbesondere hat jede nichtleere Faser $F^{-1}(w)$ mit U genau einen Schnittpunkt, und es ist $P(v) = F^{-1}(F(v)) \cap U$. Man kann also $F : V \to W$ zerlegen (fakrorisieren) in drei Anteile: Parallelprojektion, Isomorphismus und Inklusion des Bildes.

Satz
Sei V ein K-VR und $U \subset V$ ein UVR. Daann kann man die Menge V/U auf genau eine Weise so zu einem K-Vektorraum machen, dass die kanonische Abbildung $\varrho : V \to V/U$ gegeben durch $v \mapsto v + U$ linear wird. Weiter gilt:

1) ϱ ist surjektiv

2) $\operatorname{Ker}\varrho = U$

3) $\dim V/U = \dim V - \dim U$ falls $\dim V < \infty$

4) Der Quotientenvekrorraum V/U hat folgende universelle Eigenschaft: Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $U \subseteq \operatorname{Ker} F$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{F} : V/U \to W$ mit $F = \overline{F} \circ \varrho$. Das kann man in Form eines kommutativen Diagrammes schreiben

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varrho"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\overline{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Man nennt V/U den **Quotientenvekrorraum** von V nach U. Diese Bezeichnung entspricht der Vorstellung, dass man U aus V "herausdividiert", weil U in V/U zur Null wird.

2 Trigonalisierung

Definition
Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus und $W \subset V$ ein UVR. W heisst **F-invariant**, wenn $F(W) \subset W$ ($\Leftrightarrow \forall w \in W :\ F(w) \in W$)

Bemerkung
Ist $W \subset V$ ein F-invarianter UVR, so ist $P_{F|_W}$ ein Teiler von P_F. Also $P_F(t) = P_{F|_W}(t) \cdot Q(t)$. (Erinnerung: $F|_W : W \to W$ mit $w \mapsto F(w)$.)

Definition
Unter einer **Fahne** (V_r) in einem n-dimensionalen Vektorraum V versteht man eine Kette

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

von UVR mit $\dim V_r = r$. Ist $F \in \operatorname{End}(V)$, so heisst die Fahne F-invariant, wenn

$$F(V_r) \subset V_r \qquad \text{für alle } r \in \{0, \dots, n\}$$

Bemerkung
Für $F \in \operatorname{End}(V)$ sind folgende Bedingungen gleichwertig:

i) Es gibt eine F-invariante Fahne in V.

ii) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}}(F)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Ist das der Fall, so heisst F **trigonalisierbar**.

Definition
Eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$ heisst **trigonalisierbar**, wenn $A : K^n \to K^n$ mit $v \mapsto Av$ trigonalisierbar ist. Das heisst, es existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ sodass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Satz (**Trigonalisierungssatz**)
Für einen Endomorphismus F eines n-dimensionalen K-VR sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) F ist trigonalisierbar.

ii) Das charakteristische Polynom P_F zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$P_F = \pm(t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Korollar
Jeder Endomorphismus eines endlich-dimensionalen komplexen VR ist trigonalisierbar.

Algorithmus zur Bestimmung der Trigonalform

1. Schritt
Wir betrachten $W_1 = K^n$ mit der Basis $\mathcal{B}_1 = \mathcal{K}$ und den Endomorphismus $A_1 = A$. Zu λ_1 berechnet man einen Eigenvektor $V_1 \in K^n$. Nach dem Austauschlemma bestimmt man ein $j_1 \in \{1, \dots, n\}$, so dass

$$\mathcal{B}_2 := (v_1, e_1, \dots, \hat{e}_{j_1}, \dots, e_n)$$

wieder eine Basis von K^n ist. Das Zeichen ˆ bedeutet dabei, dass e_{j_1} ausgelassen wird. Wir betrachten die Transformationsmatrix $S_1^{-1} := T^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$ mit der Basis $\mathcal{B}_2$ als Spalten. Dann ist

$$A_2 := S_1 \cdot A \cdot S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

2. Schritt
Wir betrachten W_2 mit der Basis

$$\mathcal{B}_2' := (e_1, \dots, \hat{e}_{j_1}, \dots, e_n)$$

und den Endomorphismus A_2'. Es ist

$$P_{A_2'} = \pm(t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$$

Zu λ_2 berechnet man einen Eigenvektor $v_2 \in W_2$, und man wählt ein $j_2 \neq j_1$, so dass

$$\mathcal{B}_3' := (v_2, e_1, \dots, \hat{e}_{j_1}, \dots, \hat{e}_{j_2}, \dots, e_n)$$

eine Basis von W_2 ist, also

$$\mathcal{B}_3 := (v_1, v_2, e_1, \dots, \hat{e}_{j_1}, \dots, \hat{e}_{j_2}, \dots, e_n)$$

eine Basis von K^n ist. Mit der Transformationsmatrix $S_2^{-1} = T^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_1}$ erhält man

$$A_3 = S_2 \cdot A \cdot S_2^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3' & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Bei der Berechnung von S_2 kann man benutzen, dass

$$T^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_1} = T^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} \cdot T^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2} \qquad \text{und} \qquad T^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T^{\mathcal{B}_3'}_{\mathcal{B}_2'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Spätestens im $(n-1)$-ten Schritt erhält man eine obere Dreiecksmatrix A_n, denn A_n' ist eine (1×1)-Matrix. Also ist

$$D := A_n = S_{n-1} \cdot A \cdot S_{n-1}^{-1}$$

eine obere Dreiecksmatrix.

3 Potenzen eines Endomorphismus

Bemerkung
Das Einsetzen eines Endomorphismus in Polynome ist beschrieben durch die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi_F : K[t] &\to \mathrm{End}(V)\\ P(t) &\mapsto P(F)\end{aligned}$$

Dies ist ein Homomorphismus von Ringen und auch von K-VR. Das Bild

$$K[F] = \{P(F) : P(t) \in K[t]\} \subset \mathrm{End}(V)$$

ist ein kommutativer Unterring des (nicht kommutativen) Ringes $\mathrm{End}(V)$, und der Kern

$$\mathcal{I}_F := \{P(t) \in K[t] : \ P(F) = 0\} \subseteq K[t]$$

heisst **Ideal** von F.

Satz (Satz von Cayley-Hamilton)
Sei V ein endlichdimensionaler K Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$ und $P_F \in K[t]$ sein charakteristisches Polynom. Dann ist

$$P_F(F) = 0 \in \mathrm{End}(V)$$

Insbesondere gilt für jede Matrix $A \in M(n \times n; K)$

$$P_A(A) = 0 \in M(n \times n; K)$$

Definition
Eine Teilmenge $\mathcal{I}$ eines kommutativen Ringes R heisst **Ideal**, wenn gilt:

I1) $P, Q \in \mathcal{I} \Rightarrow P - Q \in \mathcal{I}$

I1) $P \in \mathcal{I}$, $Q \in R \Rightarrow Q \cdot P \in \mathcal{I}$

Satz
Zu jedem Ideal $\mathcal{I} \subseteq K[t]$ mit $\mathcal{I} \neq \{0\}$ gibt es ein eindeutiges Polynom M mit folgenden Eigenschaften:

1) M ist normiert, d.h. $M = t^d + \ldots$, wobei $d = \deg M$.

2) Für jedes $P \in \mathcal{I}$ gibt es ein $Q \in K[t]$ mit $P = Q \cdot M$.

M heisst **Minimalpolynom** von $\mathcal{I}$, im Fall $\mathcal{I} = \mathcal{I}_F$ Minimalpolynom von F.

Satz
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

1) M_F teilt P_F

2) P_F teilt M_F^n

Definition
Man nennt $F \in \mathrm{End}_K(V)$ **nilpotent**, wenn $F^k = 0$ für ein $k \geq 1$.

Satz
Ist $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und $n = \dim V$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

i) F ist nilpotent

ii) $F^d = 0$ für ein d mit $1 \leq d \leq n$

iii) $P_F = \pm t^n$

iv) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

4 Die Jordansche Normalform

Definition
Sei λ ein Eigenwert von $F \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim V = n < \infty$. Dann definieren wir den **Hauptraum** (verallgemeinerter Eigenraum) von F bzgl λ als

$$\mathrm{Hau}(F; \lambda) = \mathrm{Ker}\,(F - \lambda id)^r$$

wobei r die algebraische Vielfachheit von λ ist. (d.h. $P_F(t) = (t-\lambda)^r \cdot (\ldots))$

Bemerkung
Es gilt $\mathrm{Eig}(F, \lambda) = \mathrm{Ker}(F - \lambda \mathrm{id}) \subset \mathrm{Hau}(F; \lambda)$

Satz (**Satz über die Hauptraumzerlegung**)
Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und

$$P_F = \pm(t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Es sei $V_i := \mathrm{Hau}(F; \lambda_i) \subset V$ für jedes λ_i der Hauptraum. Dann gilt:

1) $F(V_i) \subset V_i$ und $\dim V_i = r_i$ für $i = 1, \ldots, k$

2) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$

3) F hat eine Zerlegung $F = F_D + F_N$ mit
   a) F_D diagonalisierbar
   b) F_N nilpotent
   c) $F_D \circ F_N = F_N \circ F_D$

4) F_D und F_N lassen sich als Polynome in F schreiben. Insbesondere kommutieren sie mit F.

5) Die Zerlegung $F = F_D + F_N$ ist eindeutig wenn man a),b) und c) verlangt.

Korollar
Sei $A \in M(n \times n; K)$, so dass $P_A = \pm(t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n; K)$ derart, dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} + N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k E_{r_k} + N_k \end{pmatrix} := \tilde{A}$$

mit $\lambda_i E_{r_i} + N_i$ Blöcken für alle $i = 1, \ldots, k$ welche wie folgt gegeben sind:

$$\lambda_i E_{r_i} + N_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M(r_i \times r_i\ ; K)$$

mit nilpotenten N_i. Insbesondere ist $\tilde{A} = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix und N nilpotent (strikte obere Dreiecksmatrix) ist. Und es gilt $D \cdot N = N \cdot D$.

Lemma (Lemma von Fitting)
Zu einem $G \in \mathrm{End}_K(V)$ betrachten wir die beiden Zahlen

$$d := \min\left\{l \in \mathbb{N} : \ \mathrm{Ker}(G^l) = \mathrm{Ker}(G^{l+1})\right\}$$
$$r := \mu(P_G\ ; 0)$$

wobei $G^0 := \mathrm{id}_V$. Dann gilt:

1) $d = \min\left\{l : \ \mathrm{Im}\ G^l = \mathrm{Im}\ G^{l+1}\right\}$

2) Ker G^{d+1} = Ker G^d, Im G^{d+1} = Im G^d für alle $i \in \mathbb{N}$.

3) Die Räume $U :=$ Ker G^d und $W :=$ Im G^d sind G-invariant.

4) $(G|U)^d = 0$ und $G|_W : W \to W$ ist ein Isomorphismus.

5) Für das Minimalpolynom von $G|_U$ gilt $M_{G|_U} = t^d$.

6) $V = U \oplus W$, $\dim U = \mu(P_G, 0) = r \geq d$, $\dim W = n - r$.

Insbesondere gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(G) = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad N^d = 0 \quad \text{und} \quad C \in \mathrm{GL}(n-r\ ; K)$$

Definition
Wir definieren die **Jordanmatrix** als

$$J_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M(k \times k\ ; K)$$

J_k ist nilpotent und $(J_k)^k = 0$. k ist die minimale Potenz mit dieser Eigenschaft.

Theorem
Sei G ein nilpotenter Endomorphismus eines K-VR V und $d := \min\left\{l : G^l = 0\right\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $s_1, \dots, s_d \in \mathbb{N}$ mit

$$s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot s_3 + \dots + d \cdot s_d = r = \dim V$$

und eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(G) = \begin{pmatrix} J_d & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & J_d & & & & & & \\ & & & J_{d-1} & & & & 0 & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & J_{d-1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & & & J_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix}$$

mit s_d-mal J_d, s_{d-1}-mal J_{d-1}, ..., s_1-mal J_1. Beachte: $J_1 = 0$.

Definition (**Jordansche Normalform**)
Sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$ derart, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, also

$$P_F = \pm(t - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{r_k}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so, dass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} + N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k E_{r_k} + N_k \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda_i E_{r_i} + N_i$ als Blöcken, wobei N_i für $1, \dots, k$ in der Normalform ist. Ausgeschrieben bedeutet das

$$\lambda_i E_{r_i} + N_i = \begin{pmatrix} J_k(\lambda_i) & 0 & \\ & J_k(\lambda_i) & 0 \\ & & J_k(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

mit

$$J_k(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

und Nullen auf der Nebendiagonalen, wo keine 1-en sind. Solch J_k nennt man **Jordanblöcke** der Länge d zu λ_i. der oberste und grösste Jordanblock in $\lambda_i R_{r_i} + N_i$ hat die Grösse d_i mit

$$1 \leq d_i = \min\left\{l : N_i^l = 0\right\} \leq r_i$$

das ist die Vielfachheit der Nullstelle λ_i im Minimalpolynom von F. Für $1 \leq j \leq d_i$ seien $s_j^{(i)} \geq 0$ die Anzahl der Jordanblöcke der Grösse j zu λ_i in $\lambda_i E_{r_i} + N_i$. Es ist $s_{d_i}^{(i)} \leq 1$, und durch Abzählung der Längen folgt:

$$d_i s_{d_i}^{(i)} + (d-1) s_{d_i - 1}^{(i)} + \dots + s_1^{(i)} = r_i$$

Des Weiteren gilt: $r_1 + \dots + r_k = n$.
Die Reihenfolge der Jordanblöcke ist unwesentlich, da sie durch eine Permutation der Basisvektoren beliebig verändert werden kann.

Korollar
Für ein $F \in \mathrm{End}_k(V)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) F ist diagonalisierbar

ii) $M_F = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von F bezeichnen.

iii) Es gibt paarweise verschiedene $\lambda_1, \dots \lambda_m \in K$, so, dass

$$(F - \lambda_1 \mathrm{id}_V) \circ \dots \circ (F - \lambda_m \mathrm{id}_V) = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$$

Korollar
Allgemein gilt für ein $F \in \mathrm{End}_K(V)$:

$$M_F(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{d_k}$$

wobei d_i die Länge des grössten Jordanblockes zu λ_i ist.

5 Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Definition
Das **kanonische Skalarprodukt** ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Schreibt man x und y als Spaltenvektoren, so ist:

$$\langle x, y\rangle = x^T \cdot y = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Formal muss folgendes erfüllt sein für $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:
(1) (Bilinearität) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$
$\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$
$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$
$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$
(2) (Symmetrie) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
(3) (Positive Definitheit) $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Definition
Die **Norm** ist definiert als eine Abbildung:

$$\begin{aligned} \|\ \| &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

N1 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N1 $\lambda x = |\lambda| \|x\|$

N1 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition
Analog zur Norm, kann man den **Abstand** definieren

$$\begin{aligned} d &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ d(x, y) &:= \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften

D1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

D1 $d(x, y) = d(y - x)$

D1 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Satz (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)
$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ und $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ genau dann, wenn x und y linear unabhängig sind.

Definition
Wir definieren den Winkel ϑ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ als

$$\vartheta = \angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

mit

$$\begin{aligned} \angle(x, y) &= \angle(y, x) \\ \angle(x, y) &= \angle(\alpha x, \beta y) \\ \langle x, y\rangle &= \cos(\angle(x, y)) \cdot \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

Definition
Wir sagen $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind **orthogonal** zueinander, schreibe $x \perp y$, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.

6 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Definition
Wir definieren das **Vektorprodukt** als eine Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &(x, y) \mapsto x \times y := (x_2 y_x - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned}$$

mit
(1) $(x + x') \times y = x \times y + x' \times y$
$x \times (y + y') = x \times y + x \times y'$
$\lambda x \times y = \lambda(x \times y)$
$x \times \lambda y = \lambda(x \times y)$
(2) $y \times y = -y \times x$ also $x \times x = 0$
(3) $x \times y = 0 \Leftrightarrow x, y$ sind linear abhängig

Bemerkung
Für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle x \times y, z\rangle &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \\ \langle x \times y, x\rangle &= \langle x \times y, y\rangle = 0 \\ \|x \times y\|^2 &= \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \\ \|x \times y\| &= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \angle(x, y) \end{aligned}$$

7 Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

Definition
Wir definieren das **kanonische Skalarprodukt** als eine Abbildung $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$(z, w) \mapsto \langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} := z^T \overline{w} = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$$

mit folgenden Eigenschaften (Sei $\langle\ ,\ \rangle$ immer $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$):
(1) $\langle z + z', w\rangle = \langle z, w\rangle + \langle z', w\rangle$
$\langle z, w + w'\rangle = \langle z, w\rangle + \langle z, w'\rangle$
$\langle \lambda z, w\rangle = \lambda \langle z, w\rangle$
$\langle z, \lambda w\rangle = \overline{\lambda} \langle z, w\rangle$
(2) $\langle w, z\rangle = \overline{\langle z, w\rangle}$
(3) $\langle z, z\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\langle z, z\rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0$
für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definition
Wir können analog die **Norm** in $\mathbb{C}^n$ definieren:

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &z \mapsto \|z\| := \sqrt{\langle z, z\rangle_{\mathbb{C}}} \end{aligned}$$

8 Bilinearformen und Sesquilinearformen

Definition
Sei K ein Körper und seien V_1, V_2, W K-VR. eine Abbildung $s : V_1 \times V_2 \to W$ gegeben durch $(v, w) \mapsto s(v, w)$ heisst **Bilinearform**, wenn gilt:

B1 $s(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 s(v_1, w) + \alpha_2 s(v_2, w)$

B1 $s(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 s(v, w_1) + \beta_2 s(v, w_2)$

Die Abbildung s heisst **symmetrisch**, falls $s(v,w) = s(w,v)$ und **alternierend** oder **schiefsymmetrisch**, wenn $s(w,v) = -s(v,w)$.

Definition
Sei V ein endlich dimensionaler K-VR, $s : V \times V \to K$ eine Bilinearform und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Die darstellende Matrix von s bezüglich $\mathcal{B}$ ist $M_{\mathcal{B}}(s) =: A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n\,; K)$ definiert durch

$$a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

Bemerkung
Sei s eine Bilinearform auf V mit Basis $\mathcal{B}$ und $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ das zugehörige Koordinatensystem. Wir betrachten die Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(s)$ und für $v, w \in V$ die Koordinaten $x = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$, $y = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$. Dann gilt:

$$s(v,w) = x^T A y$$

Satz
Sei V ein endlichdimensionaler K-VR und $\mathcal{B}$ eine Basis. Dann ist die Abbildung $s \mapsto M_{\mathcal{B}}(s)$ von den Bilinearformen auf V in $M(n \times n\,; K)$ bijektiv, und s ist genau dann symmetrisch, wenn $M_{\mathcal{B}}(s)$ symmetrisch ist.

Lemma
Gegeben seien $A, B \in M(n \times n\,; K)$ derart, dass

$$x^T A y = x^T B y$$

für alle Spaltenvektoren $x, y \in K^n$. Dann ist $A = B$.

Bemerkung (**Transformationsformel**)
Sei V ein endlichdimensionaler VR mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und sei $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ die entsprechende Transformationsmatrix. Für jede Bilinearform s auf V gilt dann:

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T \cdot M_{\mathcal{A}}(s) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Man beachte, dass für einen <u>Endomorphismus</u> F von V gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} \cdot M_{\mathcal{A}}(F) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Definition
Ist $s : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, so erhält man daraus eine Abbildung $q : V \to K$ gegeben durch $v \mapsto q(v) := s(v,v)$. Sie heisst die zu s gehörige **quadratische Form**. Da s bilinear ist, folgt: $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$. Ist insbesondere $V = K^n$ und s durch eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})$ gegeben, so ist

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 a_{ij} x_i x_j$$

das ist ein homogenes quadratisches Polynom.

Bemerkung (**Polarisierung**)
Ist $\operatorname{char}(K) \neq 2$, so gilt für jede symmetrische Bilinearform s und die zugehörige quadratische Form q auf V

$$s(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

Insbesondere ist s also aus q rekonstruierbar.

Definition
Sei V ein komplexer VR. Eine Abbildung $F : V \to V$ heisst **semilinear**, wenn für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$F(v + \lambda w) = F(v) + \overline{\lambda} F(w)$$

Definition
Sei V ein komplexer VR. Eine Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{C}$ heisst **sesquilinear**, wenn sie linear im ersten Argument ist, und semilinear im zweiten, dh.

S1 $s(v + \lambda v', w) = s(v,w) + \lambda s(v', w)$

S1 $s(v, w + \lambda w') = s(v,w) + \overline{\lambda} s(v, w')$

Die Abbildung heisst **hermitisch**, wenn zusätlich

H $s(w,v) = \overline{s(v,w)}$

Bemerkung (Matrix Schreibweise)
Ist $\mathcal{A}$ Basis von V und $A = M_{\mathcal{A}}(s) = \left(s(v_i, v_j)\right)_{ij}$, $v = \Phi_{\mathcal{A}}(x)$ und $w = \Phi_{\mathcal{A}}(y)$, so ist

$$s(v,w) = x^T A \overline{y}$$

Ist $\mathcal{B}$ eine weitere Basis, $B = M_{\mathcal{B}}(s)$ und $T = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, so hat man die **Transformationsformel**

$$B = T^T A \overline{T}$$

Weiter ist die Sesquilinearformen s genau dann hermitisch, wenn die Matrix $A = M_{\mathcal{A}}(s)$ hermitisch ist, dh.

$$A^T = \overline{A} \iff A = \overline{(A^T)} = A^\dagger$$

Schliesslich hat man auch noch im Komplexen für Sesquilinearformen eine Polarisierung

$$s(v,w) = \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw)\right)$$

Definition
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei V ein $\mathbb{K}$-VR und $s : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform (bzw. hermitische Form). Dann heisst s **positiv definit**, wenn $s(v,v) > 0$ für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$. Man beachte, dass auch im hermitischen Fall $s(v,v) \in \mathbb{R}$ ist. Eine symmetrische (bzw. hermitische) Matrix A heisst **positiv definiert**, wenn $x^T A \overline{x} > 0$ für jeden Spaltenvektore $x \neq 0$ aus $\mathbb{K}^n$.

Definition
Zur Abkürzung nennt man eine positiv definite symmetrische Bilinearform bzw. hermitische Form ein **Skalarprodukt**, und einen reellen bzw Komplexen Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt einen **euklidischen** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw **unitären** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Vektorraum.

Definition
Sei V ein euklidischer bzw. unitärer VR mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Wir definieren die **Norm** als $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und die **Metrik** als $d(v,w) = \|w - v\|$

Satz (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)

Ist V ein euklidischer bzw unitärer VR, so gilt $\forall v, w \in V$

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

und die Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Definition
Sei V ein euklidischer bzw unitärer VR.

a) Zwei Vektoren $v, w \in V$ heissen **orthogonal** $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$

b) Zwei UVR $U, W \subset V$ heissen **orthogonal** $U \perp W \Leftrightarrow u \perp w \ \forall u \in U \ , \ \forall w \in W$

c) Ist $U \subset V$ ein UVR, so definiert man sein **orthogonales Komplement** $U^\perp := \{v \in V \ : \ v \perp u \ \forall u \in U\}$. Es gilt $U^\perp \subset V$.

d) Eine Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ in V heisst **orthogonal**, wenn $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$. Sie heisst **orthonormal**, falls zusätlich $\|v_i\| = 1 \ \forall i$. Und **Orthonormalbasis**, falls sie auch eine Basis ist, dh. eine Basis mit $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

e) Ist $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, so heisst die direkte Summe **orthogonal**: $V = V_1 \ominus \cdots \ominus V_k$ falls $V_i \perp V_j \ \forall i \neq j$

Bemerkung
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine orthogonale Familie in V und $v_i \neq 0 \ \forall i$, so gilt:

a) Die Familie $(\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n$ mit $\alpha_i := \|v_i\|^{-1}$ ist orthonormal.

b) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

Bemerkung
Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $v \in V$ beliebig. Setze man $\lambda_i := \langle v, v_i\rangle$ so ist $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$

Satz (**Orthonormalisierungssatz**)
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer VR und $W \subset V$ ein UVR mit Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_m)$. Dann gibt es eine Ergänzung zu einer Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n)$ von V.

Korollar
Jeder endlichdimensionaler euklidische bzw. unitäre VR besitzt eine Orthonormalbasis.

Korollar
Ist W UVR eines euklidischen bzw. unitären VR V, so gilt: $V = W \ominus W^\perp$ und $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

Gram-Schmidt Algorithmus

Sei eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gegeben. Ziel ist es, eine ONB zu bauen. Gehe dafür wie folgt vor:

1) Setze $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$

2) Setze $w_2 = \frac{1}{\|w_2'\|} \cdot w_2'$ mit $w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1\rangle \cdot w_1$

3) ...

4) Setze $w_n = \frac{1}{\|w_n'\|} \cdot w_n'$ mit $w_n' = v_n - \langle v_n, w_1\rangle \cdot w_1 - \cdots - \langle v_n, w_{n-1}\rangle \cdot w_{n-1}$

So erhält man eine ONB $(w_1, \ldots, w_n)$ von V.

Definition
Sei V ein endlichdimensionaler VR und seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ gegeben, wobei $m \leq n$. Dann nennt man

$$G(v_1, \ldots, v_m) := \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \ldots & \langle v_1, v_m\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, v_1\rangle & \ldots & \langle v_m, v_m\rangle \end{pmatrix}$$

die **Gramsche Determinante** von $v_1, \ldots, v_m$.

Bemerkung
Es gilt stets $G(v_1, \ldots, v_m) \geq 0$ und $G(v_1, \ldots, v_m) > 0 \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig.

Definition (**Ungleichung von Hadamard**)
Seien $v_1, \ldots, v_m$ beliebige Vektoren in einem n-dimensionalen Vektorraum V mit $m \leq n$. Dann ist

$$\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_m) \leq \|v_1\| \cdot \cdots \cdot \|v_m\|$$

und Gleichheit besteht genau dann, wenn die v_i paarweise orthogonal sind, dh. wenn der aufgespannte Spat ein Quadrat ist.

9 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Definition
Sei V ein euklidischer bzw. unitärer VR und F ein Endomorphismus von F. Dann heisst F **Orthogonal** bzw. **unitär**, wenn

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \ \ \forall v, w \in V$$

Bemerkung
Ein orthogonales bzw. unitäres $F \in \operatorname{End}(V)$ hat folgende weitere Eigenschaften

a) $\|F(v)\| = \|v\| \ \ \forall v \in V$

b) $v \perp w \Rightarrow F(v) \perp F(w)$

c) F ist Isomorphismus und F^{-1} ist orthogonal bzw. unitär.

d) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von F, so ist $|\lambda| = 1$

e) Sei $G \in \operatorname{End}(V)$ auch orthogonal/unitär, dann ist $F \circ G$ wieder orthogonal/unitär.

Lemma
Ist $F \in \operatorname{End}(V)$ mit $\|F(v)\| = \|v\| \ \ \forall v \in V$, so ist F orthogonal bzw. unitär.

Definition
Eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n : \mathbb{R})$ heisst **orthogonal**, falls $A^{-1} = A^T$ und entsprechend heisst $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ **unitär**, wenn $A^{-1} = \overline{(A^T)} = A^\dagger$. Es gilt, $|\det A|^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$. Man nennt A **eigentlich orthogonal**, wenn $\det A = +1$. Das heisst, A ist orientierungstreu. Es gibt drei Gruppen von orthogonalen Matrizen

1. **(orthogonale Gruppe)**
   $O(n) := \left\{A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) : \ A^{-1} = A^T\right\}$

2. **(spezielle orthogonale Gruppe)**
   $SO(n) := \{A \in O(n) : \ \det A = 1\}$

3. **(unitäre Gruppe)**
   $$U(n) := \left\{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}):\ A^{-1} = \overline{(A^T)}\right\}$$

Bemerkung
Für $A \in M(n \times n;\mathbb{K})$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) A ist orthogonal bzw. unitär

ii) Die Spalten von A sind eine Orthogonalbasis von $\mathbb{K}^n$.

iii) Die Zeilen von A sind eine Orthogonalbasis von $\mathbb{K}^n$.

Satz
Sei V ein euklidischer, bzw unitärer VR mit einer Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ und F ein Endomorphismus von V. Dann gilt: F orthogonal (bzw. unitär) $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(F)$ orthogonal (bzw. unitär)

Lemma
Ist $A \in O(2)$, so gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$, so dass

$$A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

Im ersten Fall ist $A \in SO(2)$, die Abbildung ist eine **Drehung**. Im zweiten Fall ist $\det A = -1$, die Abbildung ist eine **Spiegelung**.

Bemerkung
Ist $\det A = +1$, so gibt es nur im Fall $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ Eigenwerte, nämlich $+1$ bzw. -1 mit jeweils Vielfachheit 2. Ist $\det A = -1$, so gibt es Eigenwerte $+1$ und -1 und die zugehörigen Eigenvektore stehen senkrecht aufeinander.

Bemerkung
Sie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ orthogonal. Dan hat P_F Grad 3 und insbesondere eine reelle NST, also hat F einen reellen Eigenwert $\lambda = \pm 1$. Sei w_1 ein Eigenvektor dazu (o.B.d.A $\|w_1\| = 1$). Nun können wir ihn zu einer Orthogonalbasis (w_1, w_2, w_3) ergänzen. Bezeichnet $W \subset \mathbb{R}^3$ die von w_2 und w_3 aufgespannte Ebene, so folgt, dass $F(W) = W$ Also ist

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & A' & \\ 0 & & \end{pmatrix} =: A$$

mit $A' \in SO(2)$. Weiter ist $\det A = \lambda_1 \cdot \det A'$. Nun gibt es eine Fallunterscheidung: Sei $\det F = \det A = +1$.

1. Ist $\lambda_1 = -1$, so muss $\det A' = -1$ sein. Daher kann man w_2 und w_3 als Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_2 = +1$ und $\lambda_3 = -1$ wählen, dh.
   $$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$
2. Ist $\lambda_1 = +1$, so muss auch $\det A' = +1$ sein, also gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$, so dass
   $$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

Ist $\det F = -1$, so gibt es bei geeigneter Wahl von w_2 und w_3 für A die Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

Theorem
Jeder unitäre Endomorphismen F eines unitären VR besitzt eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von F. Insbesondere ist er diagonalisierbar.

Korollar
Zu $A \in U(n)$ gibt es ein $S \in U(n)$ mit

$$\overline{(S^T)} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_i| = 1\ \forall i = 1, \ldots, n$.

Theorem
Ist F ein orthogonaler Endomorphismus eines euklidischen VR V, so gibt es in V eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ derart, dass für $j = 1, \ldots, k$:

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}+1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k\end{pmatrix}$$

mit

$$A_j = \begin{pmatrix}\cos(\vartheta_j) & -\sin(\vartheta_j)\\ \sin(\vartheta_j) & \cos(\vartheta_j)\end{pmatrix} \in SO(2)$$

mit $\vartheta_j \in [0, 2\pi[$ aber $\vartheta_j \neq 0, \pi$

Lemma
Zu einem orthogonalen Endomorphismus F eines euklidischen VR V mit $\dim V \geq 1$ gibt es stets einen UVR $W \subset V$ mit

$$F(W) \subset W \quad \text{und} \quad 1 \leq \dim W \leq 2$$

10 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer VR bezeichnet. Zu einem $F \in \mathrm{End}(V)$ definieren wir den **adjungierten Endomorphismus** F^{ad}, charakterisert durch

$$\langle F(v), w\rangle = \left\langle v, F^{\mathrm{ad}}(w)\right\rangle$$

Bemerkung
Es gilt $M_{\mathcal{B}}(F^{\mathrm{ad}}) = (M_{\mathcal{B}}(F))^{\dagger}$

Definition
Ein Endomorphismus F eines euklidischen bzw. unitären VR V heisst **selbstadjungieret**, wenn

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

Satz
Sei F ein Endomorphismus von V und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt: F selbstadjungieret $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(F)$ symmetrisch bzw. hermitisch.

Lemma
Ist F selbstadjungieret, so sind (auch im komplexen Fall) alle Eigenwerte reell. Insbesondere hat eine hermitische Matrix nur reelle Eigenwerte.

Theorem
Ist F ein selbstadjungiereter Endomorphismus eines euklidischen bzw. unitären VR, so gibt es eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von F besteht. Insbesondere ist F diagonalisierbar.

Korollar
Ist $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ eine symmetrische bzw. hermitische Matrix, so gibt es eine orthogonale bzw. unitäre Matrix S, so dass

$$S^\dagger \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Korollar
Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte eines selbstadjungierten oder unitären Endomorphismus F von V, so ist

$$V = \mathrm{Eig}(F; \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(F; \lambda_k)$$

Algorithmus zur Berechnung einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

1) Man bestimme die Linearfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms $P_F = \pm(t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k}$ wobei $\lambda_1, ..., \lambda_k$ paarweise verschieden sind.

2) Für jeden Eigenwert λ der Vielfachheit r bestimme man eine Basis von $\mathrm{Eig}(F; \lambda)$ durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

3) Man orthonormalisiere die in 2) erhaltene Basen mit dem Gram-Schmidt Verfahren und zwar unabhängig voneinander in den verschiedenen Eigenräumen.

4) Die k Basen der Eigenräume aus 3) bilden zusammen die gesuchte Basis aus Eigenvektoren von V.

Bemerkung
Sei $A \in M(n \times n\ ; K)$. Wenn wie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ haben, so gilt

$$T := \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = T_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}}$$

und

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} := D$$

oder analog $T \cdot D \cdot T^T = A$.

Lemma
Jede symmetrische Matrix $A \in M(n \times n\ ; \mathbb{R})$ hat einen reellen Eigenwert.

Theorem (Sazt von Courant-Fischer)
Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer VR mit $n = \dim V$ und $F \in \mathrm{End}(V)$ ein selbstadjungiereter Endomorphismus. (Also gilt $\langle x, Fx \rangle = \langle x, Fx \rangle$.) Seien die Eigenwerte von F der Grösse nach geordnet $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Dann gilt

$$\lambda_k = \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle} = \max_{\substack{U \subset V \\ \dim U = n-k+1}} \min_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

Die erste Extremisierung wird dabei über UVR $U \subset V$ der angegebenen Dimension durchgeführt, die zweite über nichtverschwindende Vektoren in U. Man beachte, dass für den grössten und kleinsten Eigenwert insbesondere gilt

$$\lambda_n = \max_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

$$\lambda_1 = \min_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

11 Hauptachsentransformation

Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen

Sei $A \in M(n \times n\ ; \mathbb{R})$ symmetrisch und s die durch A beschriebene Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

1) Ist $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarpdoduktes bestehend aus Eigenvektoren des Endomorphimsus A, so ist

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{, dh. } s(w_i, w_j) = \lambda_i \cdot \delta_{ij}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind.

2) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}'$ des $\mathbb{R}^n$, so dass

$$M_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & & 0 \\ & -E_k & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = D'$$

d.h. es gibt ein $T' \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ mit $D' = (T')^T \cdot A \cdot T^T$

Vorsicht! Die Eigenwerte von A sind nur Invarianten des Endomorphimsus, für eine Bilinearform ist der Begriff Eigenwert sinnlos.

Bemerkung
Betrachte die quadratische Gleichung $q(x) = s(x,x) = x^T A x = 1$ mit $x \in \mathbb{R}^n$. Die Lösungsmenge nennt man **Quadrik**. Falls A positiv definit ist, so ist dies ein Elipsoid. Die Hauptachsen entsprechen gerade den Eigenvektoren von A.

Korollar
Eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n\ ; \mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn ihre Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiv sind.

Korollar
Sei $A \in M(n \times n\ ; \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $P_A = (-1)^n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + \alpha_0$ ihr charakteristisches Polynom. Dann gilt: A positiv definit $\Leftrightarrow (-1)^j \alpha_j > 0$ für $j = 0, \dots, (n-1)$.

Lemma
Das reelle Polynom $f(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$ hat reelle NST $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, also $f(t) = (t-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(t-\lambda_n)$, also

a) $(\lambda_i < 0 \ \forall i) \Leftrightarrow (\alpha_i > 0 \ \forall i)$

b) $(\lambda_i > 0 \ \forall i) \Leftrightarrow ((-1)^{n-i}\alpha_i > 0 \ \forall i)$

Definition
Wir definieren den **Ausartungsraum** von s als:

$$V_0 := \{v \in V \ : \ s(v,w) = 0 \ \forall w \in V\} \subset V$$

Wir definieren den **Rang** von s als $\text{rang}(s) := \dim V - \dim V_0$.

Bemerkung
Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $A = M(s)$, so ist

$$\begin{aligned} V_0 &= \text{Ker}A = \{v \in V \mid Av = 0\} \\ &= \left\{v \in V \mid w^T A v = 0 \ \forall w \in V\right\} \end{aligned}$$

und $\text{rang}(A) = \text{rang}(s)$. Ist für allgemeine V die Matrix $A = M(s)$ bzgl irgendeiner Basis, so ist $\text{rang}(s) = \text{rang}(A)$.

Diagonalisierung einer quadratischen Form

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit $n := \dim V$ und s eine symmetrische Bilinearform mit der zugehörigen quadratischen Form q auf V. Dann gibt es eine Basis
$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$
von V mit folgenden Eigenschaften: Es ist $r = \text{rang}(s)$ und für

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \quad \text{gilt} \quad q(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i^2$$

Insbesondere hat man eine Zerlegung $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ mit $q(v) > 0$ für $0 \neq v \in V_+$, $q(v) < 0$ für $0 \neq v \in V_-$ und $q(v) = 0$ für $v \in V_0$.

Satz (Trägheitssatz von Sylvester)
Hat man für eine quadratische Form q auf einem $\mathbb{R}$-VR V zwei Zerlegungen $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0 = V'_+ \oplus V'_- \oplus V'_0$ mit $q(v) > 0$ für $0 \neq v \in V_+$ und $0 \neq v \in V'_+$, sowie $q(v) < 0$ für $0 \neq v \in V_-$ und $0 \neq v \in V'_-$ so folgt: $\dim V'_+ = \dim V_+$ und $\dim V'_- = \dim V_-$.
Die Zahlen $r_+(q) := \dim V_+$ und $r_-(q) := \dim V_-$ sind also neben dem Rang weitere Invarianten der quadratischen Form. Das Paar $(r_+(q), r_-(q))$ wird auch **Signatur** von q genannt.

Korollar
Sei $A \in M(n\times n\,;\mathbb{R})$ symmetrisch und $S \in \text{GL}(n:\mathbb{R})$. Dann haben A und $S^T A S$ mit Vielfachheit gezählt die gleichen Anzahl positiver und negativer Eigenwerte. Insbesondere ist $S^T S = S^T E_n S$ positiv definit.

Vorsicht! Beachte, dass die Eigenwerte von $S^{-1}AS$ gleich denen von A sind. Die von $S^T AS$ sind im Allgemeinen unterschiedlich, aber das Korollar sagt, dass zumindest die Vorzeichen erhalten bleiben.

Satz (Orthogonalisierungssatz)
Sei V ein endlichdimensionaler VR über einem Körper K mit $\text{char}(K) \neq 2$ und $s : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V mit $s(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$.

Bemerkung
Ist $q : V \to K$ die zur Bilinearform $s : V \times V \to K$ gehörige quadratische Form, und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ wie im obigen Satz, so folgt, mit $\alpha_j = q(v_j)$, dass für $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$ gilt: $q(v) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$. Die α_j sind dabei nicht eindeutig durch s festgelegt. Ersetzt man zB. v_j durch βv_j, so muss man $\alpha_j = q(v_j)$ ersezen durch $\beta^2 \alpha_j$. Insbesondere, falls $K = \mathbb{C}$, kann man so alle α_j zu 1 oder 0 werden lassen.

Korollar
Zu einer symmetrischen Matrix $A \in M(n \times n\,;K)$ gibt es ein $S \in \text{GL}(n;K)$, so dass

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Algorithmus zur Bestimmung von S und D im reellen Fall

1) Wir schreiben die Matrix A und die Einheitsmatrix E_n übereinander. Also $\frac{A}{E_n}$
2) Wir führen in beiden Matrizen jeweils elementare Spaltenumformung durch, und dann, <u>nur in A</u> noch die zugehörige Zeilentransformation. Dies ergibt mit $C_1, \ldots, C_r$ die entsprechenden Elementarpatrizen. $\frac{C_r^T \cdot\ldots C_1^T \cdot A \cdot C_1 \cdot\dots\cdot C_r}{C_1 \cdot\dots\cdot C_r} = \frac{D}{S}$
3) Hat man die Diagonalmatrix D erzeugt, so gilt
   $S^T \cdot A \cdot S = D$

Bemerkung
Sei $A \in M(n \times n\,;\mathbb{R})$ und $S \in \text{GL}(n;\mathbb{R})$, so dass

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

so folt: A positiv definit $\Leftrightarrow \alpha_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Definition
Sei A_k die linke obere k-reihige und k-spaltige Teilmatrix von A. Ihre Determinante $\det A_k$ heisst **Hauptminor** von A.

Satz (Hauptminoren-Kriterium für Definitheit)
Für eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n\,;\mathbb{R})$ gilt:
A positiv definit $\Leftrightarrow \det A_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$

Theorem
Sei $A \in M(n\times n\,;\mathbb{C})$ eine hermitische Matrix, also $A^\dagger = \overline{(A^T)} = A$. Sei s die entsprechende hermitische Sesquilinearform auf dem $\mathbb{C}^n$, also $s(x,y) = x^T A \overline{y}$. Dann gilt:

(1) Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{C}^n$ (bzgl. des kanonischen Skalarproduktes), so dass

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} =: D$$

diagonal ist, mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ den Eigenwerten von A. Äquivalent in Matrixform: Es gibt eine unitäre Matrix $U \in U(n)$ so dass $U^T A \overline{U}$.

(2) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}'$ des $\mathbb{C}^n$ und Zahlen k, l, so dass

$$M_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & -E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Äquivalent, in Matrixform: Es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ so dass $S^T A \overline{S} = D'$.

(3) Die Zahlen k, l aus (2) sind die Anzahl der positiven bzw negativen Eigenwerte von A, mit Vielfachheit gezählt, und unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}'$. Alternativ, in Matrixform: Für jede invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sodass $S^T A \overline{S}$ die diagonal ist, befinden sich genau k positive und genau l negative Enträge auf der Diagonalen von $S^T A \overline{S}$.

Theorem
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine hermitische Matrix. Dann sind äquivalent:

(1) A ist positiv definit, also $x^T A \overline{x} > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$

(2) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(3) Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so dass $S^T A \overline{S}$ diagonal ist mit positiven Diagonaleinträgen.

(4) Es gibt eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ so dass $A = T^\dagger T$

(5) Sei $P_A(t) = (-t)^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 \in \mathbb{R}[t]$ das charakteristische Polynom von A. Dann gilt $(-1)^j \alpha_j > 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$

(6) Sei $A_k \in M(k \times k, \mathbb{C})$ die $k \times k$ Untermatrix von A "oben links". Dann gilt $\det A_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$

Algorithmus zur Bestimmung von S und D im komplexen Fall

Analog zum reellen Fall, nur, dass man bei der Zeilentransformation von A jeweils die Koeffizienten komplex konjugieren muss.

Definition
Man nennt eine Bilinearform bzw. Sesquilinearform s auf dem $\mathbb{K}$-VR V **positiv semidefinit**, falls $s(v, v) \geq 0 \ \forall v \in V$. Man nennt s **negativ definit**, falls $s(v, v) < 0 \ \forall v \neq 0 \in V$ und negativ semidefinit, falls $s(v, v) \leq 0 \forall v \in V$. Eine symmetrische bzw. hermitische Matrix A ist positiv oder negativ (semi)definit, falls entsprechendes für die zugehörige Bilinearform $s(x, y) = x^T A \overline{y}$ auf $\mathbb{K}^n$ gilt. Es gilt:

(1) A negativ definit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit

(2) A negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv semidefinit

12 Dualräume

Definition
Ist V ein K-VR, so heisst

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \to K : \ \varphi \text{ linear}\}$$

der **Dualraum** von V. Die Elemente von V^* heissen Linearformen auf V. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. So gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau eine lineare Abbildung $v_i^* : V \to K$ mit $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

Bemerkung
Für jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ist $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ eine Basis von V^*. Man nennt $\mathcal{B}^*$ die zu $\mathcal{B}$ **duale Basis**.

Korollar
Zu jedem $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt es ein $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$.

Korollar
Zu jeder Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt es einen Isomorphismus $\Psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ mit $\Psi_{\mathcal{B}}(v_i) = v_i^*$.
Vorsicht! Dieser Isomorphismus hängt von der Auswahl der Basis ab, ebenso ist φ aus dem ersten Korollar abhängig von der Ergänzung.

Definition
Ist V ein K-VR und $U \subset V$ ein UVR, so heisst

$$U^0 := \{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \ \forall u \in U\} \subset V^*$$

der zu U **orthogonale Raum** (oder der **Annullator** von U).

Satz
Für jeden UVR $U \subset V$ gilt $\dim U^0 = \dim V - \dim U$. Genauer gilt: Ist $(u_1, \ldots, u_k)$ Basis von U und $B = (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r)$ Basis von V, so bilden die Linearformen $v_1^*, \ldots, v_r^*$ aus $\mathcal{B}^*$ eine Basis von U^0.

Definition
Seien V und W K-VR und seien F und ψ lineare Abbildungen. Es gelte

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\psi \circ F"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Dann ist $\psi \in W^*$ und es folgt $\psi \circ F \in V^*$. Also können eine **duale Abbildung** $F^* : W^* \to V^*$ mit $\psi \mapsto F^*(\psi) := \psi \circ F$ erklären. Aus

$$\begin{aligned} F^*(\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 + \psi_2) &= (\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2) \circ F \\ &= \lambda(\psi_1 \circ F) + \lambda_2(\psi_2 \circ F) \\ &= \lambda F^*(\psi_1) + \lambda_2 F^*(\psi_2) \end{aligned}$$

folgt die Linearität von F^*. Also hat man noch abstrakter eine Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V*)$ mit $F \mapsto F^*$, die ein Vektorraumisomorphismus ist.

Satz
Gegeben seien K-VR V und W mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, sowie eine lineare Abbildung $F : V \to W$. Dann gilt

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(F^*) = \left(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)\right)^T$$

Kurz ausgedrückt: Die duale Abbildung wird bezüglich der dualen Basen durch die transponierte Matrix beschriebe.

Satz
Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen VR, so gilt

$$\mathrm{Im} F^* = (\mathrm{Ker} F)^0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Ker} F^* = (\mathrm{Im} F)^0$$

Korollar
Unter den obigen Voraussetzungen gilt $\mathrm{rang} F^* = \mathrm{rang} F$.

Korollar
Für jede Matrix $A \in M(n \times n; K)$ gilt: Zeilenrang A = Spaltenrang A.

Definition
Den Dualraum kann man zu jedem VR bilden, also auch zu V^*. Auf diese Weise erhält man zu V den **Bidualraum** $V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$.

Satz
Für jeden endlichdimensionalen K-VR V ist die kanonische Abbildung $\iota : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus. Man kann also V mit V^{**} identifizieren und in suggestiver Form $V(\varphi) = \varphi(v)$.

Korollar
Für jede lineare Abbildung $F : V \to W$ gilt $F^{**} = F$. (Sofern man V und V^{**} und W und W^{**} jeweils mit ι identifizieren kann.)

Bemerkung
Für jeden UVR $W \subset V$ gilt $(W^0)^0 = W \subset V \cong V^{**}$.

13 Dualität und Skalarprodukte

Definition
Eine Abbildung $\varphi : V_1 \times V_k \to W$ heisst **multilinear** (oder **k-linear**), wenn sie linear in jedem Argument ist, also
$\varphi(v_1, \dots, v_i' + \lambda v_i'', \dots, v_n) = \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \lambda\varphi(v_1, \dots, v_i'', \dots, v_n)$
Im Fall $k = 2$ heisst φ bilinear. Für ein bilineare $b : V \to W \to K$ haben wir lineare Abbildungen $b_v : W \to K$ mit $w \mapsto b(v, w)$ für ein fixes $v \in V$ und $b_w : V \to K$ mit $v \mapsto b(v, w)$ für ein fixes $w \in W$.
Die Abbildungen $v \mapsto b_v$ und $w \mapsto b_w$ sind ihrerseits linear, sodass man lineare Abbildungen erhält:
$b' : V \to W^*$ mit $v \mapsto b_v \in W^*$
$b'' : W \to V^*$ mit $w \mapsto b_w \in V^*$

Satz
Sind V und W endlichdimensional und ist $b : V \times W \to K$ eine nicht ausgeartete Bilinearform, so sind die folgenden Abbildungen Isomorphismen.
$b' : V \to W^*$ und $b'' : W \to V^*$

Korollar
In einem euklidischen VR V ist die Abbildung $\Psi : V \to V^*$ mit $v \mapsto \langle v, \ \rangle$ ein kanonischer Isomorphismus.

Satz
Sei V ein euklidischer VR und $\Psi : V \to V^*$ der kanonische Isomorphismus. Dann gilt:

1) Für jeden UVR $U \subset V$ ist $\Psi(U^\perp) = U^0$ mit $U^\perp \subset V$
2) Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die duale Basis, so ist $\Psi(v_i) = v_i^*$

Definition
Seien V und W euklidische VR, und sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dazu konstruieren wir eine lineare Abbildung $F^{\mathrm{ad}} : W \to V$ mit $\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle \ \forall v \in V$ und $\forall w \in W$. Sind Φ und Ψ die kanonischen Isomorphismen, so ist dies äquivalent dazu, dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Phi"'] & W \arrow[l, "F^{\mathrm{ad}}"'] \arrow[d, "\Psi"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "F^*"] \end{tikzcd}$$

dh. $F^{\mathrm{ad}} = \Phi^{-1} \circ F^* \circ \Psi$. Es gilt nämlich:
$\Psi(w) = \langle \ , w\rangle$ also $F^*(\Psi(w)) = \langle F(\ ), w\rangle$ und
$F^*(\Psi(w)) = \Psi(F^{\mathrm{ad}}(w)) = \left\langle \ , F^{\mathrm{ad}}(w)\right\rangle$

Bemerkung
Sind V und W euklidische VR mit Orthonormalbasen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, so gilt für jede lineare Abbildung $F : V \to W$: $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F^{\mathrm{ad}}) = \left(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)\right)^T$

Satz
Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen, so gilt $\mathrm{Im}F^{\mathrm{ad}} = (\mathrm{Ker}F)^\perp$ und $\mathrm{Ker}F^{\mathrm{ad}} = (\mathrm{Im}F)^\perp$. Insbesondere hat man im Fall $V = W$ orthogonale Zerlegungen $V = \mathrm{Ker}F \ominus \mathrm{Im}F^{\mathrm{ad}} = \mathrm{Ker}F^{\mathrm{ad}} \ominus \mathrm{Im}F$. Ist überdies F selbstadjungiert, dh. $F = F^{\mathrm{ad}}$, so gilt: $V = \mathrm{Ker}F \ominus \mathrm{Im}F$

Definition
Sei V ein $\mathbb{C}$-VR. Sei eine sesquilineare Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben. So erhält man wegen der Linearität im ersten Argument eine Abbildung $s'' : V \to V^*$ mit $v \mapsto \langle \ , v\rangle$. Ist V ein unitärer VR und $F \in \mathrm{End}(V)$, so ist die adjungierte Abbildung $F^{\mathrm{ad}} := \Psi^{-1} \circ F^* \circ \Psi$ wieder $\mathbb{C}$-linear.

Satz
Sei F ein Endomorphismus eines unitären VR V. Der dazu adjungierte Endomorphismus F^{ad} hat folgende Eigenschaften:

1) $\langle F(v), w\rangle = \left\langle v, F^{ad}(w)\right\rangle \ \forall v, w \in V$
2) $\mathrm{Im}F^{\mathrm{ad}} = (\mathrm{Ker}F)^\perp$ und $\mathrm{Ker}F^{\mathrm{ad}} = (\mathrm{Im}F)^\perp$
3) Ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt $M_{\mathcal{B}}(F^{\mathrm{ad}}) = (M_{\mathcal{B}}(F))^\dagger = \overline{((M_{\mathcal{B}}(F))^T)}$

Bemerkung
Sowohl im reellen als auch im komplexen Fall gilt $(F^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = F$. Insbesondere gilt auch $\langle v, F(w)\rangle = \left\langle F^{\mathrm{ad}}(v), w\right\rangle \ \forall v, w$

Definition
Ein Endomorphismus F eines unitären VR V heisst **normal**, wenn $F \circ F^{\mathrm{ad}} = F^{\mathrm{ad}} \circ F$. Entsprechend heisst eine Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ **normal**, wenn $A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A$

Bemerkung
Jedes unitäre F ist normal und jedes selbstadjungierte F ist normal.

Satz
Ist V unitär und $F \in \mathrm{End}(V)$ normal, so gilt $\mathrm{Ker}F^{\mathrm{ad}} = \mathrm{Ker}F$ und $\mathrm{Im}F^{\mathrm{ad}} = \mathrm{Im}F$. Insbesondere hat man eine orthogonale Zerlegung $V = \mathrm{Ker}F \ominus \mathrm{Im}F$.

Korollar
Ist F normal, so ist $\mathrm{Eig}(F; \lambda) = \mathrm{Eig}(F^{\mathrm{ad}}; \overline{\lambda}) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Theorem (Spektralsatz)
Für einen Endomorphismus F eines unitären $\mathbb{C}$-VR V sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) Es gibt eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von F.

ii) F ist normal.

Korollar
Ein $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ ist genau dann normal, wenn es ein $S \in U(n)$ gibt, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

14 Tensorprodukt

Bemerkung
Seien V bzw. W Vektorräume über K mit Basen $(v_i)_{i\in I}$ bzw. $(w_j)_{j\in J}$. Ist U ein weiterer K-VR, so gibt es zu einer beliebigen vorgegebenen Familie $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ in U genau eine bilineare Abbildung $\xi : V \times W \to U$ mit $\xi(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall (i,j) \in I \times J$

Theorem
Seien V und W Vektorräume über K. Dann gibt es einen K-VR $V \otimes_K W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\eta : V \times W \to V \times_K W$ die folgende universelle Eigenschaft haben: Zu jedem K-VR U zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\xi : V \times W \to U$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\otimes : V \otimes_K W \to U$ mit $\xi = \xi_\otimes \circ \eta$. Das kann man durch ein kommutatives Diagramm illustrieren:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\
V \otimes_K W \arrow[r, "\xi_\otimes"'] & U
\end{tikzcd}$$

Weiter gilt: Falls $\dim V, \dim W < \infty$, so ist
$\dim(V \otimes_K W) = (\dim V) \cdot (\dim W)$.
Falls klar ist, welches K Grundkörper ist, schreibt man nur $\otimes$ statt $\otimes_K$. Man nennt $V \otimes_K W$ das **Tensorprodukt** von V und W über K. Die Elemente von $V \otimes_K W$ heissen **Tensoren**.

Korollar (Rechenregeln für Tensoren)
Ist $\eta : V \times W \to V \otimes W$ und $v \otimes w := \eta(v, w)$, so gilt für $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$:

a) $v \otimes w + v' \otimes w = (v + v') \otimes w$ und $v \otimes w + v \otimes w' = v \otimes (w + w')$

b) $(\lambda \cdot v) \otimes w = v \otimes (\lambda \cdot w) = \lambda \cdot (v \otimes w)$

Bemerkung
Der VR $V \otimes W$ ist durch die universelle Eigenschaft eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt. Sei $V \tilde{\otimes} W$ und $\tilde{\eta} : V \times W \to V \tilde{\otimes} W$ ein anderes Paar aus VR und bilinearen Abbildungen, das die universelle Eigenschaft erfüllt. Dann gibt es Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
 & V \times W \arrow[dl, "\tilde{\eta}"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
V \tilde{\otimes} W \arrow[rr, shift right, "\exists ! \tilde{\eta}_\otimes"'] & & V \otimes W \arrow[ll, shift right, "\exists ! \eta_\otimes"']
\end{tikzcd}$$

Betrachte:

$$\begin{tikzcd}
 & V \times W \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
V \otimes W \arrow[rr, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, shift right, "\eta_\otimes \circ \tilde{\eta}_\otimes"'] & & V \otimes W
\end{tikzcd}$$

Es ist $\eta_\otimes \circ \tilde{\eta}_\otimes \circ \eta = \eta_\otimes \circ \tilde{\eta} = \eta$. Wegen der Eindeutigkeit der universellen Eigenschaft gilt also $\eta_\otimes \circ \tilde{\eta}_\otimes = \mathrm{id}_{V \tilde{\otimes} W}$. Man spricht deswegen normalerweise von dem Tensorprodukt $V \otimes W$ von V und W.

Definition
Sei $s : V \times W \to K$ eine Bilinearform. Schreibe $\mathrm{Bil}(V, W; K)$ für den VR solcher bilinearer Abbildungen, also $s \in \mathrm{Bil}(V, W; K)$. Wir erhalten die lineare Abbildung $s_\otimes : V \otimes W \to K$ mit $s(v, w) = s(v \otimes w)$. Also $s_\otimes \in (V \otimes W)^*$. Die Abbildung $\mathrm{Bil}(V, W; K) \to (V \otimes W)^*$ mit $s \mapsto s_\otimes$ ist wieder linear. Sei umgekehrt $\varphi \in (V \otimes W)^*$, dann ist $\varphi \circ \eta \in \mathrm{Bil}(V, W; K)$ mit $\eta : V \times W \to V \otimes W$ bilinear. Die Abbildungen $\mathrm{Bil}(V, W; K) \to (V \otimes W)^*$ mit $s \mapsto s_\otimes$ und $(V \otimes W)^* \to \mathrm{Bil}(V, W; K)$ mit $\varphi \mapsto \varphi \circ \eta$ sind zueinander invers.

Bemerkung
Für zwei Linearformen $\varphi \in V^*$ und $\psi \in W^*$ ist das Produkt

$$\varphi \cdot \psi : V \times W \to K \quad \text{mit} \quad (v, w) \mapsto \varphi(v) \cdot \psi(v)$$

eine Bilinearform, die zugehörige Abbildung

$$(\varphi \cdot \psi)_\otimes : V \otimes W \to K \quad \text{mit} \quad v \otimes w \mapsto \varphi(v) \cdot \psi(w)$$

ist linear, also ist $(\varphi \cdot \psi)_\otimes \in (V \otimes W)^*$. Die so entstandene Abbildung

$$V^* \times W^* \to (V \otimes W)^* \quad \text{mit} \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \cdot \psi)_\otimes$$

ist wiederum bilinear, dh. sie wird zu einer linearen Abbildung

$$V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^* \quad \text{mit} \quad \varphi \otimes \psi \mapsto (\varphi \cdot \psi)_\otimes$$

Das $\varphi \otimes \psi$ eine Linearform auf $V \otimes W$ erklärt, kann man auch sehen:

$$(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) := \varphi(v) \cdot \psi(w)$$

Bemerkung
Die durch Multiplikation mit Skalaren in W erhaltene Abbildung

$$\begin{aligned} V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W) \quad &\text{mit} \quad (\varphi, w) \mapsto \varphi(\ ) \cdot w \\ \text{wobei} \quad \varphi(\ ) \cdot w : V \to W \quad &\text{mit} \quad v \mapsto \varphi(v) \cdot w \end{aligned}$$

ist bilinear, dazu gehört die lineare Abbildung

$$V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W) \quad \text{mit} \quad \varphi \otimes w \mapsto \varphi(\ ) \cdot w$$

Das kann man wieder kürzer ausdrücken durch

$$(\varphi \otimes w)(v) := \varphi(v) \cdot w$$

Satz
Sind V und W endlich-dimensionale VR, so sind die beiden kanonischen Abbildungen

$$\begin{aligned} &\alpha : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^* \quad \text{und} \\ &\beta : V^* \otimes W^* \to \mathrm{Hom}(V, W) \end{aligned}$$

Isomorphismen.

Satz
$V^* \otimes W^* \cong (V \otimes W)^*$ und $(V \otimes W)^* \cong \mathrm{Bil}(V, W; K)$

Korollar
Sei $u \in K^m \otimes K^n \cong J^{m \cdot n}$, also $u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} e_i \otimes e_j$ mit $e_i \in K^m$ und $e_j \in K^n$ Basisvektoren. Die Koordinaten u_{ij} kann man auf drei Weisen aufschreiben:

(i) Als Matrix $(u_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(m \times n; K)$

(ii) Als $m \cdot n$ Vektor wobei man die Basen von $K^m \otimes K^n$ wie folgt ordnet: $e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_1, \ldots, e_m \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, \ldots, e_m \otimes e_2, \ldots, e_1 \otimes e_n, \ldots, e_m \otimes e_n$.

(iii) Als $m \cdot n$ Vektor wobei man die Basen von $K^m \otimes K^n$ wie folgt ordnet: $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, \ldots, e_1 \otimes e_n, e_2 \otimes e_1, \ldots, e_2 \otimes e_1, \ldots, e_m \otimes e_1, \ldots, e_m \otimes e_n$.

Definition
Sind V und W K-VR, so heisst eine bilineare Abbildung

$$\xi : V \times V \to W$$

symmetrisch, wenn $\xi(v, v') = \xi(v', v)$ für alle $v, v' \in V$ **alternierend**, wenn $\xi(v, v) = 0$ für alle $v \in V$

Bemerkung
Ist ξ alternierend, so gilt $\xi(v', v) = -\xi(v, v')\ \forall v, v' \in V$. Im Fall $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung (also alternierend $\Leftrightarrow$ schiefsymmetrisch).

Definition
$S(V) := \mathrm{span}(v \otimes v' - v' \otimes v)_{v,v' \in V} \subset V \otimes V$ und
$A(V) := \mathrm{span}(v \otimes v)_{v \in V} \subset V \otimes V$

Lemma
Für jedes bilineare $\xi : V \times V \to W$ gilt:
ξ symmetrisch $\Leftrightarrow$ $S(V) \subset \mathrm{Ker}\xi_\otimes$
ξ alternierend $\Leftrightarrow$ $A(V) \subset \mathrm{Ker}\xi_\otimes$

Theorem
Für jeden K-VR V mit $\dim V \geq 2$ gibt es einen K-VR $V \wedge V$ zusammen mit einer alternierenden Abbildung $\wedge : V \times V \to V \wedge V$, die folgende universelle Eigenschaft haben: zu jedem K-VR W zusammen mit einer alternierenden Abbildung $\xi : V \times V \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\wedge$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[d, "\wedge"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ V \wedge V \arrow[r, "\exists!\ \xi_\wedge"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist durch $v_i \wedge v_j := \wedge(v_i, v_j)$ mit $1 \leq i < j \leq n$ eine Basis von $V \wedge V$ gegeben. Insbesondere ist

$$\dim(V \wedge V) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Korollar (Rechenregeln für das äussere Produkt)
Für $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

a) $(v + v') \wedge w = v \wedge w + v' \wedge w$ und $v \wedge (w + w') = v \wedge w + v \wedge w'$

b) $(\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w) = \lambda(v \wedge w)$

c) $v \wedge v = 0$ und $v' \wedge v = -v \wedge v'$

Theorem
Zu jedem K-VR V gibt es einen K-VR $V \vee V$ und eine symmetrische bilineare Abbildung $\vee : V \times V \to V \vee V$ mit folgender universellen Eigenschaft: Sei $\xi : V \times V \to W$ symmetrisch (und bilineare), dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\vee \to W$, sodass

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[d, "\vee"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ V \vee V \arrow[r, "\exists!\ \xi_\vee"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so bilden die Vektoren $v_i \vee v_j = \vee(v_i, v_j)$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ eine Basis von $V \vee V$. Insbesondere ist

$$\dim(V \vee V) = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$V \vee V$ heisst 2. symmetrische Potenz von V (Symmetrischer Produktraum).

Proposition
Sei nun $\mathrm{Bil}(V; K) = \mathrm{Bil}(V, V; K)$ der Raum der bilinearen Abbildungen $V \times V \to K$ und $\mathrm{Alt}^2(V, K) \subset \mathrm{Bil}(V; K)$ der UVR der alternierenden Bilinearformen und $\mathrm{Sym}^2(V; K) \subset \mathrm{Bil}(V; K)$ der UVR der symmetrischen Bilinearformen. Dann haben wir folgende Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} V^* \wedge V^* \arrow[r, "(1a)"] & \mathrm{Alt}^2(V;K) \arrow[r, "(2a)"] \arrow[d] & (V \wedge V)^* \arrow[d] \\ V^* \otimes V^* \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "(1)"] & \mathrm{Bil}(V;K) \arrow[r, "\overset{(2)}{\cong}"] & (V \otimes V)^* \\ V^* \vee V^* \arrow[r, "(1s)"] & \mathrm{Sym}^2(V;K) \arrow[r, "\overset{(2s)}{\cong}"] \arrow[u] & (V \vee V)^* \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Die Abbildungen $(2a)$, $(2s)$ und (2) erhalten wir aus der universellen Eigenschaften. Die Abbildung $(1a)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} V^* \wedge V^* &\to \mathrm{Alt}^2(V; K) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto ((v, w) \mapsto \varphi(v)\psi(w) - \varphi(w)\psi(v)) \end{aligned}$$

Die Abbildung $(1s)$ ist

$$\begin{aligned} V^* \vee V^* &\to \mathrm{Sym}^2(V; K) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto ((v, w) \mapsto \varphi(v)\psi(w) + \varphi(w)\psi(v)) \end{aligned}$$

Satz
Ist $\dim V < \infty$, so ist $(1a)$ ein Isomorphismus, und falls zusätlich $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist $(1s)$ auch ein Isomorphismus.

Definition
Seien V, V', W, W' K-VR und $F : V \to V'$, $G : W \to W'$ lineare Abbildungen. Dann ist das Tensorprodukt der Abbildungen F und G die eindeutig definierte lineare Abbildung

$$F \otimes G : V \otimes W \to V' \otimes W'$$

so dass $(F \otimes G)(v \otimes w) = F(v) \otimes G(w)\ \forall v \in V,\ w \in W$. Etwas ausführlicher sind die linearen Abbildungen $V \otimes W \to V' \otimes W'$ nach der universellen Eigenschaft für $V \otimes W$ bijektiv zu den linearen Abbildungen $V \times W \to V' \otimes W'$. Die bilineare Abbildung $(v, w) \mapsto F(v) \otimes G(w)$ entspricht dabei der linearen Abbildung $F \otimes G$.

Satz
Für V, V', W, W' endlich dimensionale K-VR ist das Tensorprodukt von Abbildungen

$$\begin{aligned} \otimes : \mathrm{Hom}_K(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_K(W, W') \\ \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W') \end{aligned}$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Bemerkung
Wir wollen uns nun anschauen, wie die Matrix von $F \otimes G$ bezüglich einer Basis aussieht. Sei dazu $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von $V, \mathcal{A}' = (v_1', \ldots, v_{m'}')$ eine Basis von $V', \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W und $\mathcal{B}' = (w_1', \ldots, w_{n'}')$ eine Basis von W'. Seien $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}(F)$ und $B = (b_{ij}) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(G)$ die entsprechenden Matrizen von F und G. Eine Basis von $V \otimes W$ ist gegeben durch die Familie $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := (v_i \otimes w_j)_{i=1,\ldots,n}$. Um die Koordinaten von Vektoren bezüglich dieser Basis als Spaltenvektoren schreiben zu können, und entsprechend auch Matrizen aufschreiben zu können, müssen wir die Elemente dieser Basis noch ordnen. Genauer: Wir hatten die Matrix einer Abbildung definiert bezüglich Basen, deren Indexmenge $1, 2 \ldots$ war. Wir müssen also die Indexmenge in der Familie $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ noch von $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ auf die Indexmenge $\{1, \ldots, mn\}$ abändern. Es gibt hierfür zwei natürliche Möglichkeiten:

- Wir können die Ordnung

  $$\mathcal{C}_1 := (v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_1, \ldots, v_m \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \ldots, v_m \otimes w_n)$$

  verwenden, und entsprechend die Ordnung

  $$\mathcal{C}_1' := (v_1' \otimes w_1', v_2' \otimes w_1', \ldots, v_{m'}' \otimes w_1', v_1' \otimes w_2', \ldots, v_{m'}' \otimes w_{n'}')$$

  für die entsprechende Basis von $V' \otimes W'$

- Wir können die Ordnung

  $$\mathcal{C}_2 := (v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \ldots, v_1 \otimes w_n, v_2 \otimes w_1, \ldots, v_m \otimes w_n)$$

  verwenden, und entsprechend die Ordnung

  $$\mathcal{C}_2' := (v_1' \otimes w_1', v_1' \otimes w_2', \ldots, v_1' \otimes w_{n'}', v_2' \otimes w_1', \ldots, v_{m'}' \otimes w_{n'}')$$

  für die entsprechende Basis von $V' \otimes W'$

In jedem Falle ist

$$(F \otimes G)(v_i \otimes w_j) = F(v_i) \otimes G(w_j) = \sum_{i'=1}^{m'} \sum_{j'=1}^{n'} a_{i'i} b_{j'j} v_{i'}' \otimes w_{j'}'$$

Übersetzt in Matrizenform heisst dies:

$$M_{C_1'}^{C_1}(F \otimes G) = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{n'1} & Ab_{n'2} & \cdots & Ab_{n'n} \end{pmatrix} \in M(m'n' \times mn, K)$$

$$M_{C_2'}^{C_2}(F \otimes G) = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m'1}B & a_{m'2}2B & \cdots & a_{m'm}B \end{pmatrix} \in M(m'n' \times mn, K)$$

Definition
Sei G eine Gruppe und V ein K-VR. Dann ist eine Darstellung von G auf V ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ wobei $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der Vektorraumisomorphismen von V ist. Man sagt auch G *wirkt auf* V.

Satz
Sei G eine endliche Gruppe und ρ eine Darstellung von G auf dem K-VR V. Nehme an, dass $\mathrm{char}(K)$ die Gruppenordnung $|G|$ nicht teilt, also dass $|G| \neq 0$ in K ist. Dann ist die kanonische Abbildung $V^G \to V_G$ ein Isomorphismus,, und die inverse Abbildung ist gegeben durch die Symmetrisierung

$$\Sigma_G : V_G \to V^G$$
$$v + U \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v)$$

Bemerkung
Wir wenden dies nun an auf das symmetrische und äussere Produkt. Sei dazu immer vereinfachend K ein Körper der Charakteristik 0, so dass die entsprechende Voraussetzung im Satz immer erfült ist, und so dass wir alternierende Bilinearformen mit schiefsymmetrischen identifizieren können. Das symmetrische Produkt haben wir als die Koinvarianten definiert

$$\vee^n V = (\otimes^n V)_{S_n} = {}^{\otimes^n V}\!/_{S^n(v)}$$

wobei hier die Wirkung der symmetrischen Gruppe S_n, ohne Vorzeichen, zu Grunde gelegt ist. Das äussere Produkt kann man analog definieren als die Koinvarianten

$$\wedge^n V = (\otimes^n V)_{S_n}$$

wobei nun aber die Darstellung mit Vorzeichen verwendet wird. (Man beachte, dass die Darstellung in der Notation unterschlagen wird, und dass hier char $(K) = 0$ angenommen ist. Je nach Kontext und Anwendung wird das symmetrische bzw. äussere Produkt manchmal auch als Invarianten definiert. Dies ist gerechtfertigt durch den obigen Satz, der insbesondere besagt, dass (Achtung: in Charakteristik 0) Invarianten und Koinvarianten natürlich identifiziert werden können,

$$(\otimes^n V)_{S_n} \cong (\otimes^n V)^{S_n}$$

Der Raum der Bilinearformen auf dem endlich dimensionalen Vektorraum V sind z.B. identifiziert mit $(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$. Die symmetrischen Bilinearformen sind gerade die, die invariant sind unter der S_2 -Wirkung (ohne Vorzeichen)

$$\mathrm{Sym}^2(V; K) \cong (V^* \otimes V^*)^{S_2} \subset \mathrm{Bil}(V; K)$$

Wir haben gesehen, dass man dies identifizieren kann mit $V^* \vee V^* = (V^* \otimes V^*)_{S_2}$ falls char $(K) \neq 2$ Analoges gilt für das äussere Produkt, wobei man dabei in diesem Fall noch die Beschränkung an die Charakteristik fallen lassen konnte.

15 Multilineare Algebra

Definition
Eine Abbildung $\xi : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ heisst **multilinear** oder **k-fach linear**, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ und fest gewählnte $v_j \in V_j$ $(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k)$ die Abbildung

$$V_i \to W \quad \text{mit} \quad v \mapsto \xi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k)$$

K-linear ist. Kurz ausgedrückt: ξ heisst multilinear, wenn sie linear ist in jedem Argument.

Theorem

Zu K-VR $V_1, \dots, V_k$ gibt es einen K-VR $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ zusammen mit einer universellen multilinearen Abbildung

$$\eta : V_1 \times \cdots \times V_k \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \quad \text{mit}$$
$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

dh. zu jeder multilinearen Abbildung $\xi : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\otimes$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \arrow[r, "\xi_\otimes"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sind alle V_j endlichdimensional mit Basen $(v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)})$ für $j = 1, \dots, k$, so ist eine Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ gegeben durch die Produkte $v_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^{(k)}$ mit $1 \le i_j \le r_j$. Insbesondere ist $\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k) = \dim V_1 \cdot \cdots \cdot \dim V_k$.

Bemerkung
Sei $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ eine andere Basis von V. Sei $A = a_{ij} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ die entsprechende Transformationsmatrix, so dass (mit $A^{-1} = a_{ji}$)

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} w_j \quad \text{und} \quad w_i = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ji} v_j$$

Dann gilt für die Dualbasis:

$$v_i^* = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} w_j^* \quad \text{und} \quad w_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^*$$

Definition
Sind V und W K-VR, so heisst eine k-fach lineare Abbildung $\xi : V^k \to W$

- **symmetrisch**, wenn für jede Permutation $\sigma \in \mathbf{S}_k$ $\xi(v_1, \dots, v_k) = \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ gilt.
- **antisymmetrisch**, wenn $\xi(v_1, \dots, v_k) = 0$, falls $v_i = v_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \ne j$

Bemerkung
Ist ξ alternierend und $\sigma \in \mathbf{S}_k$, so ist $\xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \xi(v_1, \dots, v_k)$

Definition
In $\bigotimes^k V$ betrachten wir die folgenden UVR:

- $S^k(V) \coloneqq \operatorname{span}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)})$
  wobei $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in \bigotimes^k V$ und $\sigma \in \mathbf{S}_k$
- $A^k(V) \coloneqq \operatorname{span}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$
  wobei $v_i = v_j$ für ein (i, j) mit $i \ne j$

Lemma
Für jedes k-fach lineare $\xi : V^k \to W$ gilt:

- ξ symmetrisch $\Leftrightarrow$ $S^k(V) \subset \operatorname{Ker} \xi_\otimes$
- ξ alternierend $\Leftrightarrow$ $A^k(V) \subset \operatorname{Ker} \xi_\otimes$

Theorem
Zu einem K-VR V und einer natürlichen Zahl $k \ge 1$ gibt es einen K-VR $\bigwedge^k V$ zusammen mit einer universellen alternierenden Abbildung $\wedge : V^k \to \bigwedge^k V$, dh. zu jeder alternierenden Abbildung $\xi : V^k \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\wedge$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[d, "\wedge"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ \bigwedge^k V \arrow[r, "\xi_\wedge"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so ist eine Basis von $\bigwedge^k V$ gegeben durch die Produkte

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{mit } 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$$

Insbesondere ist $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$ für $1 \le k \le n = \dim V$. Für $k > n$ setzt man $\bigwedge^k V = 0$. $\bigwedge^k V$ heisst **k-te äussere Potenz** oder **äusseres Produkt** der Ordnung k von V.

Theorem
Zu jedem K-VR V und einer natürlichen Zahl $k \ge 1$ gibt es einen K-VR $\bigvee^k V$ zusammen mit einer symmetrischen Abbildung $\vee : V^k \to \bigvee^k V$, sodass für jede symmetrische Abbildung $\xi : V^k \to W$ genau ein $\xi_\vee$ existiert, sodass

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[d, "\vee"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ \bigvee^k V \arrow[r, "\exists!\ \xi_\vee"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so ist eine Basis von $\bigwedge^k V$ gegeben durch die Produkte

$$v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k} \quad \text{mit } 1 \le i_i \le \cdots \le i_k \le n$$

Insbesondere ist $\dim \bigvee^k V = \binom{n+k-1}{k}$. $\bigvee^k V$ heisst **k-te symmetrische Potenz** oder **symmetrische Produkte** der Ordnung k von V.

16 Die Singulärwertzerlegung

Definition
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ eine reelle oder komplexe Matrix. Dann gibt es Matrizen $U \in O(m)$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw $U \in U(m)$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und $V \in O(n)$ bzw. $V \in U(n)$ und eine "diagonale" Matrix $K \in M(m \times n, \mathbb{R})$ der Form

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

mit Diagonaleinträgen $\sigma_j \in \mathbb{R}$, $\sigma_j \ge 0$ so dass $A = UDV^\dagger$. Diese Zerlegung heisst **Singulärwertzerlegung** von A, und die nichtnegativen reellen Zahlen $\sigma_1, \dots, \sigma_{\min\{m,n\}}$ heissen **Singulärwerte** von A. In der Regel ordnet man die Singulärwerte so, dass $\sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_{\min\{m,n\}}$.

Definition (Alternativ)
Zu $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ vom Rang r gibt es Matrizen $\tilde{U} \in M(m \times r, \mathbb{K})$ und $\tilde{V} \in M(n \times r, \mathbb{K})$ mit orthonormalen Spalten und Zahlen $\sigma_1 \ge$

$\dots \geq \sigma_r > 0$ so dass $A = \tilde{U}\tilde{D}(\tilde{V})^\dagger$ mit

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r \end{pmatrix}$$

Um diese Zerlegung aus obiger Definition zu erhalten, ordnet man zunächst die Singulärwerte wie angegeben. Dann definiert man $\tilde{U}$ als die ersten r Spalten von U und $\tilde{V}$ als die ersten r Spalten von V. Umgekehrt erhält man U aus $\tilde{U}$ einfach, indem man die durch die Spalten von $\tilde{U}$ gegebene orthonormale Familie zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^m$ fortsetzt.

Bemerkung

- Der Rang von A ist gleich dem Rang von D.
- Der Rang von A ist die Anzahl der nicht verschwindenden Singulärwerte von A.
- Die ersten $\min\{m,n\}$ Spalten von U (bzw V) sind linke bzw. rechte **Singulärvektoren** von A. Genauer nennt man **Einheitsvektoren** $u \in \mathbb{K}^m$, $v \in \mathbb{K}^n$ linke bzw. rechte Singulärvektoren zum Singulärwert $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ falls gilt: $Av = \sigma u$ und $A^\dagger u = \sigma v$.
- Man kann die Singulärwertzerlegung auch nochmals äquivalent "matrixfrei" umformulieren: Sei $F \in \mathrm{Hom}(V,W)$ eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen unitären bzw. euklidisch VR V und W. Dann gibt es Orthonormalbasen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W so dass $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = D \in M(n\times m, \mathbb{R})$ Diagonalform hat mit nichtnegativen reellen Diagonaleinträgen.

Lemma
Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ eine beliebige Matrix vom Rang r. Dann sind die hermitischen (bzw. symmetrischen) Matriizen $A^\dagger A$ und $AA^\dagger$ positiv semidefinit und haben Rang r. Genauer gilt, dass $\mathrm{Ker} A^\dagger A = \mathrm{Ker} A$ und dass $\mathrm{Im} AA^\dagger = \mathrm{Im} A$

Bemerkung
Die Singulärwerte von A sind durch A eindeutig bestimmt. Sei nämlich $A = UDV^\dagger$ eine Singulärwertzerlegung von A. Dann gilt: $AA^\dagger = UDD^TU^\dagger$. Also sind die Singulärwerte von A gerade die Wurzeln der grössten $\min\{m,n\}$ Eigenwerte von $AA^\dagger$ (und $A^\dagger A$).

Korollar
Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix und $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ die Singulärwerte von A mit $p := \min\{m,n\}$. Dann gilt:

$$\sigma_j = \min_{\substack{U\subset\mathbb{K}^n \\ \dim U = n-j+1}} \max_{\substack{u\in U \\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \min_{\substack{U\subset K^m \\ \dim U = m-j+1}} \max_{\substack{u\in U \\ u\neq 0}} \frac{\|A^\dagger u\|}{\|u\|}$$

wobei $A^\dagger u \in \mathbb{K}^m$ und $u \in \mathbb{K}^n$. Insbesondere gilt:

$$\sigma_1 = \max_{\substack{u\in\mathbb{K}^n \\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \max_{\substack{u\in\mathbb{K}^n \\ \|u\|=1}} \|Au\|$$

Definition
Die **Spektralnorm** (oder 2-Norm) von $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ ist der maximale Singulärwert von A:

$$\|A\|_2 := \sigma_1(A) = \max_{\substack{u\in\mathbb{K}^n \\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \max_{\substack{u\in\mathbb{K}^n \\ \|u\|=1}} \|Au\|$$

Bemerkung
Dies ist einfach die von der üblichen 2-Norm auf $\mathbb{K}^m$ bzw. $\mathbb{K}^n$ abgeleitete natürliche Operatornorm. Allgemeiner kann man für $F \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit V,W (sagen wir) endlichdimensionalen normierten (nicht Null-)VR die folgende Norm erklären

$$\|F\|_{V,W} := \max_{\substack{v\in V \\ v\neq 0}} \frac{\|F(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

Definition
Wir suchen das (bzw. ein) $x \in \mathbb{K}^n$ das den Fehler $\|Ax-b\|$ minimiert, bzw äquivalen den quadratischen Fehler $E(x) := \|Ax-b\|^2$ minimiert. Aus der Analysis wissen wir, dass ein solches x erfüllt $0 = DE(x)$ (Ableitung von E). Das heisst, es muss für alle $h \in \mathbb{K}^n$ gelten:

$$\begin{aligned} 0 = DE(x)h &= D((Ax-b)^\dagger(Ax-b))h \\ &= D(x^\dagger A^\dagger Ax - b^\dagger Ax - x^\dagger A^\dagger b + b^\dagger b)h \\ &= h^\dagger A^\dagger Ax + x^\dagger A^\dagger Ah - b^\dagger Ah - h^\dagger A^\dagger b \\ &= 2\mathrm{Re}(h^\dagger(A^\dagger Ax - A^\dagger b)) \end{aligned}$$

Also muss gelten: $A^\dagger Ax = A^\dagger b$. Falls $A^\dagger A$ invertierbar ist, so ist $x = (A^\dagger A)^{-1}Ab$. Sei nun $A = \tilde{U}\tilde{D}\tilde{V}^\dagger$ die Singulärwertzerlegung in der reduzierten Form, insbesondere ist also $\tilde{D} \in M(r \times r;\mathbb{R})$ invertierbar. Dann folgt: $\tilde{V}\tilde{D}^2\tilde{V}^\dagger x = \tilde{V}\tilde{D}\tilde{U}^\dagger b$. Diese Gleichung hat die Lösung: $x = \tilde{V}\tilde{D}^{-1}\tilde{U}^\dagger b$, dann folgt: $\tilde{V}\tilde{D}^2\tilde{V}^\dagger\tilde{V}\tilde{D}^{-1}\tilde{U}^\dagger b = \tilde{V}\tilde{D}\tilde{U}^\dagger b$. Man nennt die Matrix $\tilde{V}\tilde{D}^{-1}\tilde{U}^\dagger$ auch **Pseudoinverse** von A.

Definition
Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix. Dann definieren wir die **Frobenius-Norm** von A als

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\dagger A)}$$

wobei hier tr die Spur ist, das heisst die Summe der Diagonalelemente. Dies ist einfach die übliche 2-Norm auf $\mathbb{K}^{m\cdot n} \cong M(m\times n, \mathbb{K})$. Dies kommt von folgendem Skalarprodukt auf dem Raum $M(m \times n, \mathbb{K})$.

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T\overline{B}) = \mathrm{tr}(B^\dagger A)$$

Bemerkung (Eigenschaften tr)

- $\mathrm{tr}(B^T) = \mathrm{tr}(B)$
- $\mathrm{tr}(B^\dagger) = \mathrm{tr}(\overline{B^T}) = \overline{\mathrm{tr}(B)}$
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für $A \in M(m \times n;\mathbb{K})$ und $B \in M(n \times m;\mathbb{K})$

Lemma

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix und $U \in M(m \times m, \mathbb{K})$ und $V \in M(n \times n, \mathbb{K})$ unitär bzw. orthogonal. Dann gilt

$$\|A\|_F = \|UAV\|_F = \left\|UAV^\dagger\right\|_F = \|D\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_p^2}$$

falls $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ (mit $p = \min\{m,n\}$) die Singulärwerte von A sind.

Theorem (Eckart-Young-Mirsky)
Sei $A = UDV^\dagger$ die Singulärwertzerlegung von A und seien die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots$ wie oben der Grösse nach sortiert. Seien $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von U und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ die Spalten von V und seien $U_k = (u_1 \ \ldots \ u_k) \in M(m \times k, \mathbb{K})$ und $V_k(v_1 \ \ldots \ v_k) \in M(n \times k, \mathbb{K})$ die Matrizen bestehend aus ersten k Spalten von U bzw. V. Sei

$$A_k := U_k D_k V_k^\dagger = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j u_j v_j^\dagger$$

mit

$$D_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{pmatrix} \in M(k \times k, \mathbb{R})$$

Dann gilt für jede Matrix $B \in M(m \times n, \mathbb{K})$ vom Rang höchstens k, dass

$$\|A - B\|_F \geq \|A - A_k\| = \sqrt{\sum_{j=k+1}^{r} \sigma_j^2}$$

Also ist A_k eine Lösung des Optimierungsproblemes.

Bemerkung
Tatsächlich kann man hier auch die Frobeniusnorm durch die Spektralnorm ersetzen, man hat also für das gleiche A_k und alle B vom Rang $\leq k$ auch

$$\|A - B\|_2 \geq \|A - A_k\| = \sigma_{k+1}$$

Korollar
Seien $A, B \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $i, j = 1, 2, \ldots$ beliebig. Dann gilt

$$\sigma_{i+j-1}(A + B) \leq \sigma_i(A) + \sigma_j(B)$$

Falls hierbei ein Index grösser ist als $\min\{m,n\}$ so definiert man den entsprechenden Singulärwert als 0.

Bemerkung
$\sigma_1(A - A_j) = \sigma_{j+1}(A) \ \forall A \in M(m \times n, \mathbb{K})$

Satz
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine quadratische reelle Matrix und $A = UDV^T$ die Singulärwertzerlegung. Dann minimiert $R_0 = UV^T$ den Abstand $\|A - R\|_F$ unter allen orthogonalen Matrizen $R \in O(n)$.

17 Verallgemeinerung der Jordanschen Normalform

Definition

Setze für ein $A \in M(k \times k, \mathbb{K})$:

$$A^{\otimes s} := \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} \in M(ks \times ks; \mathbb{K})$$

Theorem
Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ und V ein $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n < \infty$ dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. ($P_F(t) = \pm(t - \lambda_1)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (t - \lambda_k)^{r_k}$) mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Sei $V_j = \mathrm{Ker}((F - \lambda_j \mathrm{id})^{r_j})$ der zu λ_j gehörige Verallgemeinerte Eigenraum und $d_{jr} = \dim \mathrm{Ker}((F - \lambda_j \mathrm{id}_V)^r)$ für $r = 1, 2, \ldots$ und setze $d_{jr} = 0$ für $r \leq 0$. Dann gilt:

(i) $\dim V_j = r_j$ und V zerfällt in die F-invarianten UVR V_j: $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$

(ii) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}}(F) =$

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1)^{\oplus s_{11}} & & & \\ & J_2(\lambda_1)^{\oplus s_{12}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_1}(\lambda_1)^{\oplus s_{1r_1}} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda_2)^{\oplus s_{21}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(\lambda_k)^{\oplus s_{kr_k}} \end{pmatrix}$$

Achtung! Eine Matrix, hat nicht als ganzes Platz!

Dabei gilt $s_{jr} = 2d_{jr} - d_{j(r+1)} - d_{j(r-1)}$

(iii) Das Minimalpolynom ist $M_F(t) = (t - \lambda_1)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (t - \lambda_k)^{l_k}$ mit l_j dem grössten Intex mit $s_{jl_j} \neq 0$.

Man beachte auch, dass (wie wir gezeigt haben) für $r > r_j$ gilt, dass $d_{jr} = d_{jr_j} = \dim V_j$. Insbesondere ist auch $s_{jr} = 0$ für $r > r_j$. Ausserdem gilt

$$r_j = \dim V_j = s_{j1} + 2s_{j2} + \cdots r_j s_{jr_j}$$

Wir wollen auch kurz an die Konstruktion der Basis $\mathcal{B}$ erinnern. Wir brauchen dazu nur den Fall zu betrachten, dass alle Eigenwerte gleich sind, indem wir separat Basen auf jedem V_j definieren. Sei also der notationellen Einfachheit halber gleich $k = 1$ oben, und setze $s_r := s_{1r}$ und $G := (F - \lambda_1 id_V)$. Dann betrachten wir die Untervektorräume

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_d = V$$

mit $U_r = \mathrm{Ker}\, G^r$ und für ein $d \leq n$ so dass $U_d = V$. Dann wählen wir $w_1^{(d)}, \ldots, w_{s_d}^{(d)} \in U_d = V$ so, dass die Bilder in U_d / U_{d-1} eine Basis von U_d / U_{d-1} bilden. Dann wählen wir $w_1^{(d-1)}, \ldots, w_{s_{d-1}}^{(d-1)} \in U_{d-1}$ so, dass die Bilder von

$$Gw_1^{(d)}, \ldots, Gw_{s_d}^{(d)}, w_1^{(d-1)}, \ldots, w_{s_{d-1}}^{(d-1)} \in U_{d-1}$$

eine Basis von U_{d-1}/U_{d-2} bilden, usw. Unsere Basis ist dann

$$\mathcal{B} = (w_1^{(1)}, \ldots, w_{s_1}^{(1)}, Gw_1^{(2)}, w_1^{(2)}, \ldots, Gw_{s_2}^{(2)}, w_{s_2}^{(2)}, \ldots, G^{d-1} w_{s_d}^{(d)}, \ldots, Gw_{s_d}^{(d)}, w_{s_d}^{(d)})$$

Wir wollen die jeweils "höchsten" Vektoren $w_i^{(j)}$ auch zyklische Vektoren nennen, um sie von den anderen Basiselementen zu unterscheiden, die durch anwenden von G erhalten werden.
Aus der Konstruktion folgt auch die Formel in (ii). Genauer ist s_r eindeutig bestimmt durch die Rekursionsformel (absteigende Rekursion)

$$s_r = \dim U_r - \dim U_{r-1} - (s_{r+1} + \cdots + s_d)$$

Diese Rekursion wird gelöst durch $s_r = 2\dim U_r - \dim U_{r-1} - \dim U_{r+1}$, denn mit $d_r := \dim U_r = d_{1r}$ gilt

$$\begin{aligned} s_d &= \dim U_d - \dim U_{d-1} = 2\dim U_d - \dim U_{d-1} - \dim U_{d+1} \\ s_r &= d_r - d_{r-1} - (s_{r+1} + \cdots + s_d) \\ &= d_r - d_{r-1} - \underbrace{(-d_r + 2d_{r+1} - d_{r+2} + \cdots - d_{d-1} + 2d_d - d_{d+1})}_{\text{Teleskopsumme}} \\ &= d_r - d_{r-1} - (-d_r + d_{r+1} + d_d - \underbrace{d_{d+1}}_{=d_d}) \\ &= 2d_r - d_{r-1} - d_{r+1} \end{aligned}$$

Satz
Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ ein reelles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann hat f eine Zerlegung $f = a(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)\cdot g_1\dots g_m$, wobei $a \in \mathbb{R}$ und die $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die reellen NST sind und die $g_j \in \mathbb{R}[t]$ normierte quadratische Polynome ohne reelle NST sind. Insbesondere ist hier $n = k + 2m$ und falls n ungerade ist, muss f mindestens eine reelle NST haben.

Korollar
Sei nun $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus des endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-VR V. Fasst man die gleichen Faktoren wie im obigen Satz zusammen, hat man eine Faktorisierung des charakteristischen Polynoms
$P_F(t) = \pm(t-\lambda_1)^{r_1}\dots(t-\lambda_k)^{r_k}\cdot g_1^{q_1}\dots g_m^{q_m}$,
wobei $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die paarweise verschiedenen reellen NST sind und $g_1,\dots,g_m \in \mathbb{R}[t]$ paarweise verschiedene normierte quadratische reelle Polynome ohne reelle NST. Es gilt insbesondere
$n = \dim V = r_1 + \cdots + r_k + 2(q_1 + \cdots + q_m)$
Betrachte nun einen quadratischen Faktor g_j mit nicht-reellen NST $\mu_j, \overline{\mu}_j \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Sei $\mu_j = a_j + ib_j$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Dann ist
$g_j = t^2 - 2\mathrm{Re}(\mu_j)t + |\mu_j|^2 = t^2 - 2a_jt + a_j^2 + b_j^2 = (t-a_j)^2 + b_j^2 = P_{A_j}(t)$
das charakteristische Polynom der Matrix

$$A_j := \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$$

Beachte auch, dass diese Matrix eine Drehstreckung beschreibt, also von er Form cR ist mit $c = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \in \mathbb{R}_{>0}$, $R \in SO(2)$. Schliesslich definieren wir noch für $A \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ die Block-Jordanmatrix

$$J_r(A) := \begin{pmatrix} A & E_2 & & & \\ & A & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E_2 \\ & & & & A \end{pmatrix}$$

Theorem
Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ für einen $\mathbb{K}$-VR V mit $n = \dim V < \infty$. Sei $P_F(t) = \pm(t-\lambda_1)^{r_1}\dots(t-\lambda_k)^{r_k}\cdot g_1^{q_1}\dots g_m^{q_m}$ das charakteristische Polynom. Sei $V_j = \mathrm{Ker}(F - \lambda_j \mathrm{id}_V)^{r_j}$ für $j = 1,\dots,k$ und $V_j' = \mathrm{Ker}(g_j(F))^{q_j}$ für $j = 1,\dots,m$. Sei ausserdem $d_{jr} = \dim \mathrm{Ker}(F - \lambda_j \mathrm{id}_V)^r$ und $d_{jr}' \dim \mathrm{Ker}(g_j(F)^r)$ für $r = 1,2,\dots$ und setze $d_{jr} = d_{jr}' = 0$ für $r \leq 0$. Dann gilt:

(i) Es gilt $\dim V_j = r_j$ und $\dim V_j' = 2q_j$ und V zerfällt wie folgt in F-invariante UVR: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \oplus V_1' \cdots \oplus V_m'$

(ii) Es gibt eine reelle Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{\mathbb{B}}(F) =$

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1)^{\oplus s_{11}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{r_k}(\lambda_k)^{\oplus s_{kr_k}} & & \\ & & & J_1(A_1)^{\oplus s_{11}'} & \\ & & & & J_2(A_1)^{\oplus s_{12}'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & J_{q_1}(A_1)^{\oplus s_{1q_1}'} & & & \\ & & J_1(A_2)^{\oplus s_{2q_1}'} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{q_m}(A_m)^{\oplus s_{mq_m}'} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, hat nicht als ganzes platz!

für A_j wie im obigen Korollar. Dabei gilt: $s_{jr} = 2d_{jr} - d_{j(r+1)}d_{j(r-1)}$ für $j = 1,\dots,k$ und alle r und $2s_{jr}' = 2d_{jr}' - d_{j(r+1)}' - d_{j(r-1)}'$ für $j = 1,\dots,m$ und alle r.

(iii) Das Minimalpolynom ist $M_F(t) = (t-\lambda_1)^{l_1}\dots(t-\lambda_k)^{l_k}\cdot g_1^{l_1'}\dots g_m^{l_m'}$ mit l_j bzw. l_j' den grössten Indizes mit jeweils $s_{jl_j} \neq 0$ bzw. $s_{sl_j'}' \neq 0$.

Korollar
Zwei reelle Matrizen sind **ähnlich** (über $\mathbb{R}$) genau wenn ihre charakteristischen Polynome übereinstimmen und zusätzlich alle Zahlen d_{jr}, d_{jr}' wie im Theorem.

Korollar
Zwei reelle Matrizen sind ähnlich über $\mathbb{R}$ genau dann, wenn sie ähnlich über $\mathbb{C}$ sind.

Korollar
Jede reelle Matrix ist ähnlich zu ihrer Transponierten.

Definition
Sei $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 0$. Dann ist die **Begleitmatrix** von f die folgende $n\times n$ Matrix:

$$B_f := \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz
Das charakteristische und das Minimalpolynom von B_f sind gleich f, bis auf Vorzeichen $(-1)^n P_{B_f} = M_{B_f} = f$

Definition

- Sei R ein kommutativer Ring und $f, g \in R\backslash\{0\}$. Dann heisst f **teilt** g, oder in Symbolen $f \mid g$, falls ein $h \in R$ existiert mit $fh = g$. Falls f das Element g nicht teilt schreiben wir $f \nmid g$.

- Ein **Ideal** $I \subset R$ des kommutativen Ringes R ist ein Unterring, für den zusätzlich $IR \subset I$ gilt. Äquivalent und expliziter: Für $f, g \in I$, $h \in R$ ist $f - g \in I$ und $fh \in I$. Für $I_1, I_2 \subset R$ Ideale sind $I_1 \cap I_2$ und $I_1 + I_2$ auch wieder Ideale.

- Für jeden Körper K ist der Polynomring $K[t]$ ein Hauptidealring. Konkret gibt es zu jedem Ideal $\{0\} \neq I \subset K[t]$ ein eindeutiges normiertes Polynom kleinsten Grades in I und heisst Minimalpolynom von I.

- Für jeden Körper K ist $K[t]$ ein faktorieller Ring, dh. er hat keine Nullteiler: aus $fg = 0$ folgt $f = 0$ oder $g = 0$.

Für Polynome $f, g \in K[t]$ mit $(f, g \neq 0)$ definieren wir den **grössten gemeinsamen Teiler** $\mathrm{ggT}(f, g) \in K[t]$ von f und g als das normierte Polynom vom grössten Grad, das sowohl f als auch g teilt. Dies ist auch das Minimalpolynom von $fK[t] + gK[t]$, also $\mathrm{ggT}(f, g) = M_{fK[t]+gK[t]}$. Insbesondere existieren in diesem Fall also $a, b \in K[t]$ so dass $\mathrm{ggT}(f, g) = af + bg$.

Ebenso definieren wir das **kleinste gemeinsame Vielfaches** $\mathrm{kgV}(f, g)$ als das Polynom vom kleinsten Grad, dass sowohl von f als auch von g geteilt wird. Es ist dann $\mathrm{kgV}(f, g) = M_{fK[t] \cap gK[t]}$ das Minimalpolynom des Schnittes der von f und g erzeugten Ideale.

Lemma
Für ein Polynom $f \in K[t]$ positiven Grades sind äquivalent:

- Aus $f = gh$ folgt, dass ein $0 \neq c \in K$ existiert, so dass $f = cg$ oder $f = ch$. (Also hat f keine nichttrivialen Teiler, also nur die Teiler c und cf für $0 \neq x \in K$. Man sagt auch f ist **irreduzibel**.)

- Aus $f \mid gh$ (für $0 \neq g, h \in K[t]$) folgt, dass $f \mid g$ oder $f \mid h$. (amsn sagt in diesem Fall auch f ist **prim**)

Satz (Primfaktorzerlegung für Polynome)
Sei $0 \neq f \in K[t]$ ein Polynom. Dann gibt es irreduzible normierte Polynome (positiven Grades) $p_1, \ldots, p_n \in K[t]$ (mit $n \geq 0$) und ein $0 \neq c \in K$ so dass $f = c \cdot p_1 \ldots p_n$. Diese Faktorisierung ist eindeutig, bis auf der Anordnung der p_j.

Definition
Ein Ideal $I \subset R$ in einem kommutativen Ring R heisst **maximal**, falls $I \neq R$ und es kein Ideal J gibt, so dass $I \subsetneq J \subsetneq R$. I heisst **prim**, falls $I \neq R$ und für alle $f, g \in R$ gilt $fg \in I \Rightarrow f \in I \vee g \in I$. Im Fall $R = K[t]$ folgt direkt aus der Definition, dass ein Ideal ein Primideal ist, genau dann, wenn sein Minimalpolynom prim ist.
Ebenso ist das Ideal maximal, genau dann, wenn sein Minimalpolynom keine nicht-trivialen Teiler hat, also irreduzibel ist. Also sind für $K[t]$ die Primideale und die maximalen Ideale identisch.

Lemma
Sei $I \subsetneq R$ ein Ideal im kommutativen Ring mit Eins R. Dann gilt:

- I ist maximal genau dann, wenn R/I mit der von R geerbten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

- I ist genau dann prim, wenn R/I nullteilerfrei ist.

Definition (Jordansche Normalform)
Wir definieren nun die Matrix

$$\tilde{E}_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$

mit einem Eintrag 1 unten links und sonst nur Nullen. Ausserdem definieren wir für $A \in M(n \times n, K)$

$$\tilde{J}_r := \begin{pmatrix} A & \tilde{E}_n & & & \\ & A & \tilde{E}_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \tilde{E}_n \\ & & & & A \end{pmatrix}$$

Für ein irreduzibles normiertes Polynom f nennen wir $\tilde{J}_r(B_f)$ den zu f gehörigen Jordanblock der grösse nr.

Theorem (Jordansche Normalform)
Sei V ein endlichdimensionaler K-VR und $F \in \mathrm{End}(V)$. Sei $P_F = \pm p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms in irreduzible normierte Polynome $p_1, \ldots, p_k$, die wir als paarweise verschieden annehmen können. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}}$ blockdiagonal ist, wobei die Blöcke auf der Blockdiagonalen alle Jordanblöcke von der Form $\tilde{J}_r(B_{p_j})$ sind mit $j = 1, \ldots, k$ und $r = 1, \ldots, r_j$. Sei dabei s_{jr} die Anzahl der Jordanblöcke von der Grösse $\tilde{J}_r(B_{p_j})$. Dann gilt für alle j

$$\sum_{r=1}^{r_j} s_{jr} = r_j \cdot \deg p_j = \sum_{j=1}^{r_j} s_{jr} \cdot \deg p_j \cdot r$$

und

$$s_{jr} = \frac{1}{\deg p_j}\big(2 \dim \mathrm{Ker}(p_j(F)^r) - \dim \mathrm{Ker}(p_j(F)^{r+1}) - \dim \mathrm{Ker}(p_j(F)^{r-1})\big)$$

Insbesondere ist also die Jordansche Normalform wieder eindeutig,, bis auf Permutation der Diagonalblöcke.

Satz
Sei V ein endlichdimensionaler K-VR und $F \in \mathrm{End}(V)$. Sei $P_F = \pm p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms von F in irreduzible Polynome. Sei $V_j := \mathrm{Ker}\left(p_j^{r_j}(F)\right)$. Dann zerfällt V in die direkte Summe der F-invarianten UVR V_j; $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Ferner gilt für das charakteristische Polynom der Einschränkung $F \mid V_j$ von F auf den invarianten UVR V_j, dass $P_{F|V_j} = \pm p_j^{r_j}$. Insbesondere ist also $\dim_K(V_j) = r_j \cdot \deg p_j$.

18 Beweise

18.1 Tensorprodukt

Wir wählen Basen $(v_i)_{i \in I}$ von V und $(w_j)_{j \in J}$ von W und definieren $V \otimes W$ als den Vektorraum der endlichen Linearkombinationen von formalen Ausdrücken der Form $v_i \otimes w_j$. Präziser ausgedrückt betrachten wir den K -Vektorraum

$$\mathrm{Abb}(I \times J, K) = \{\tau : I \times J \to K\}$$

$V \otimes W := \{\tau : I \times J \to K : \tau(i, j) \neq 0$ für nur endlich viele $(i, j) \in I \times J\}$ Dann ist $v_i \otimes w_j \in V \otimes W$ die Abbildung, deren Wert an der einzigen Stelle (i,j) gleich 1 und sonst 0 ist. Offenbar ist $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von $V \otimes W$, denn für $\tau \in V \otimes W$ gilt

$$\tau = \sum_{i,j} \tau(i,j)\,(v_i \otimes w_j)$$

wobei nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sind. Also haben wir ein Erzeugendensystem. Ist

$$\tau := \sum_{i,j} \alpha_{ij}\,(v_i \otimes w_j) = 0$$

so gilt $\tau(i,j) = \alpha_{ij} = 0$, weil die Nullabbildung überall den Wert Null hat. Zur Definition von η genügt es

$$\eta\,(v_i, w_j) := v_i \otimes w_j$$

zu setzen. sind beliebige Vektoren

$$v = \sum_i{}' \lambda_i v_i \in V \quad \text{und} \quad w = \sum_j \mu_j w_j \in W$$

gegeben, so ist wegen der Bilinearität von η

$$v \otimes w := \eta(v,w) = \eta\left(\sum_i{}' \lambda_i v_i, \sum_j{}' \mu_j w_j\right) = \sum_{i,j}{}' \lambda_i \mu_j\,(v_i \otimes w_j)$$

Nun zur universellen Eigenschaft: Ist $\xi : V \times W \to U$ gegeben, so betrachten wir die Vektoren $u_{ij} := \xi\,(v_i, w_j) \in U$. Wegen der Bedingung $\xi = \xi_\otimes \circ \eta$ muss

$$\xi_\otimes \circ \eta(v_i, w_j) = \xi_\otimes\,(v_i \otimes w_j) = u_{ij}$$

sein. Es gibt genau eine lineare Abbildung $\xi_\otimes : V \otimes W \to U$ mit dieser Eigenschaft. Weiter ist

$$\xi_\otimes\left(\sum_{i,j}{}' \alpha_{ij}\,(v_i \otimes w_j)\right) = \sum_{i,j}{}' \alpha_{ij} u_{ij}$$

Also ist $\xi_\otimes(v \otimes w) = \xi(v,w)$ für alle $(v,w) \in V \times W$, und die universelle Eigenschaft ist bewiesen.
Der Zusatz über die Dimensionen ist klar, denn besteht I aus m und J aus Elementen, so besteht $I \times J$ aus $m \cdot n$ Elementen.

18.2 Das äussere Produkt

Wir erklären das äußere Produkt als Quotientenvektorraum des Tensorproduktes:

$$V \wedge V := (V \otimes V)/A(V)$$

Bezeichnet

$$\varrho : V \otimes V \to V \wedge V$$

die kanonische Abbildung, so erklären wir $\wedge := \varrho \circ \eta$. Für $v, v' \in V$ ist also

$$v \wedge v' := \wedge\,(v,v') = \varrho\,(\eta\,(v,v')) = \varrho\,(v \otimes v')$$

Die Abbildung $\wedge$ ist bilinear und auch alternierend. Zum Beweis der universellen Eigenschaft betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[dr, "\eta"] \arrow[drr, "\xi"] \arrow[dd, "\wedge"'] & & \\
 & V \otimes V \arrow[r, "\xi_\otimes"] \arrow[dl, "\varrho"] & W \\
V \wedge V \arrow[urr, "\xi_\wedge"'] & &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Zu ξ gibt es ein eindeutiges lineares $\xi_\otimes$ und nach der universellen Eigenschaft des Quotienten ein eindeutiges lineares $\xi_\wedge$. Aus der Kommutativität des Diagramms $(*)$ folgt

$$\xi_\wedge\,(v \wedge v') = \xi\,(v, v')$$

Es bleibt die Behauptung über die Basis von $V \wedge V$ zu zeigen, das ist die einzige Schwierigkeit. Da $V \otimes V$ von Tensoren der Form $v_i \otimes v_j$ erzeugt wird, erzeugen die Produkte $v_i \wedge v_j$ den Raum $V \wedge V$. Wegen $v_i \wedge v_i = 0$ und $v_j \wedge v_i = -v_i \wedge v_j$ sind schon die $\binom{n}{2}$ Produkte

$$v_i \wedge v_j \quad \text{mit } i < j$$

ein Erzeugendensystem, und es genügt, die lineare Unabhängigkeit zu beweisen. Dazu betrachten wir den Vektorraum $W = K^N$ mit $N = \binom{n}{2}$ und wir bezeichnen die kanonische Basis von K^N mit

$$(e_{ij})_{1\le i<j\le n}$$

Eine alternierende Abbildung $\xi : V \times V \to K^N$ konstruieren wir wie folgt: sind

$$v = \sum \lambda_i v_i \quad \text{und} \quad v' = \sum \mu_i v_i$$

in V gegeben, so betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \mu_1 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$$

und bezeichnen mit $a_{ij} := \lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i$ den entsprechenden 2 -Minor von A Dann ist durch

$$\xi\,(v, v') := \sum_{i<j} a_{ij} e_{ij}$$

eine sehr gute alternierende Abbildung gegeben: wegen der universellen Eigenschaft muß

$$\xi_\wedge\,(v_i \wedge v_j) = \xi\,(v_i, v_j) = e_{ij}$$

sein, und aus der linearen Unabhängigkeit der e_{ij} in K^N folgt die Behauptung. Die so erhaltene Abbildung

$$\xi_\wedge : V \wedge V \to K^N$$

ist ein Isomorphismus. Er liefert eine etwas konkretere Beschreibung des äußeren Produktes.

18.3 Tensor mit Homomorphismen

Seien U, V, W, Z endlich dimensionale K -Vektorräume, $A \in \operatorname{Hom}(U,V), B \in \operatorname{Hom}(W,Z)$ und betrachten Sie die lineare Abbildung [1]

$$\Psi : \operatorname{Hom}(V,W) \to \operatorname{Hom}(U,Z), F \mapsto B \circ F \circ A$$

Zeigen Sie, dass unter der Identifikation Hom $(V,W) \cong V^* \otimes W$ aus der Vorlesung Ψ identifiziert werden kann mit dem Homomorphismus

$$\Phi : V^* \otimes W \to U^* \otimes Z, \quad \Phi = A^* \otimes B$$

wobei A^* die zu A duale Abbildung ist. Lösung: Wir erinnern an die Identifikation

$$f_{V,W} : V^* \otimes W \overset{\overset{\sim}{\to}}{\operatorname{Hom}}\,(V,W), \quad \varphi \otimes w \mapsto \varphi() \cdot w$$

Wir wollen also argumentieren, dass folgendes Diagramm kommutiert Seien $u \in U$ und $\varphi \otimes w \in V^* \otimes W$. Da $V^* \otimes W$ von Tensoren der Form $\varphi \otimes w$ erzeugt wird, genügt es die Behauptung hierfür zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}((\Psi \circ f_{V,W})(\varphi \otimes w))(u) &= (B \circ f_{V,W}(\varphi, w) \circ A)(u)\\ &= B((\varphi \circ A)(u) \cdot w)\\ &= \varphi(A(u)) \cdot B(w)\\ &= A^*(\varphi)(u) \cdot B(w)\\ &= f_{U,Z}((A^* \otimes B)(\varphi \otimes w))(u)\\ &= ((f_{U,Z} \circ \Phi)(\varphi \otimes w))(u)\end{aligned}$$

18.4 Symmetrisches Produkt

Sei $U = \operatorname{span}\{v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V\} \subset V \otimes V$. Wir definieren das symmetrische Produkt $V \vee V$ als den Quotientenvektorraum

$$V \vee V = (V \otimes V)/U$$

Die universelle Eigenschaft folgt nun direkt aus der universellen Eigenschaft des Quotienten: Die bilineare Abbildung ξ induziert eine eindeutige Abbildung $\xi' : V \otimes V \to W$, so dass ξ genau die Komposition $V \times V \to V \otimes V \to W$ ist. Symmetrie der Abbildung ξ bedeutet gerade, dass $U \subset \operatorname{Ker}(\xi')$. Um die Behauptung bzgl. der Basis zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass

$$U = \operatorname{span}\{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid i < j\}$$

Sei $\tilde{U} = \operatorname{span}\{v_i \otimes v_j\}_{i \leqslant j} \subset V \otimes V$. Es genügt zu zeigen, dass $U \oplus \tilde{U} = V \otimes V$ Dann bildet $\tilde{U}$ isomorph auf $V \vee V$ ab und die Bilder der $v_i \otimes v_j$ bilden eine Basis des Quotienten. Nun ist für $i \leqslant j$ aber $v_j \otimes v_i = -(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i) + v_i \otimes v_j \in U + \tilde{U}$, also ist die Basis $\{v_i \otimes v_j\}_{i,j}$ von $V \otimes V$ komplett in $U + \tilde{U}$ enthalten und folglich $U + U' = V \otimes V$ Andererseits ist $\dim U \leqslant \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\dim \tilde{U} \leqslant \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $\dim U + \tilde{U} \leqslant n^2 = \dim V \otimes V$ Insgesamt daher $V \otimes V = U \oplus \tilde{U}$.

18.5 k-faches symmetrisches Produkt

Es sei S_k die symmetrische Gruppe. Wir betrachten den Untervektorraum des k -fachen Tensorprodukts

$$S^k(V) = \operatorname{span}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - v_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma k} \mid v_i \in V, \sigma \in S_k\} \subset \bigotimes^k V$$

Wir definieren das symmetrische Produkt als den Quotientenvektorraum

$$\bigvee^k V = \bigotimes^k V / S^k(V)$$

und bezeichnen mit $v_1 \vee \cdots \vee v_k$ die Restklasse von $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ im Quotienten. Hierdurch ist ein K -Vektorraum wohldefiniert. Die Abbildung

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \vee \cdots \vee v_k$$

definiert die gesuchte symmetrische multilineare Abbildung

$$\vee : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to \bigvee^k V$$

Die universelle Eigenschaft folgt nun ganz parallel zu Serie 9, Aufg. 3 unmittelbar aus der Definition einer symmetrischen multilinearen Abbildung, zusammen mit der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums.

Wir zeigen schließlich die Behauptung bzgl. der Basis. Da $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}$ eine Basis des Tensorprodukts bilden, erzeugen die Bilder, also $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ das symmetrische Produkt $\bigvee^k V$. Da aber für alle $\sigma \in S_k$

$$v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k} = v_{\sigma i_1} \vee \cdots \vee v_{\sigma i_k}$$

wird $V^k V$ erzeugt durch alle $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ mit $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k$. Wir zeigen noch die lineare Unabhängigkeit. Sei hierfür

$$N = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

die Anzahl solcher $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$. Wir definieren eine Surjektion (tatsächlich ein Isomorphismus)

$$\bigvee^k V \to K^N$$

Sei $e_{i_1,\ldots,i_k}$ eine Basis von K^N. Für $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \in V$ definiert die Zuordnung

$$(w_1, \ldots, w_k) \mapsto \sum_{i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k} \left(\sum_{\sigma \in S_k} a_{1\sigma i_1} \cdots a_{k\sigma i_k} \cdot e_{i_1,\ldots,i_k} \right)$$

eine symmetrische multilineare Abbildung

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to K^N$$

Aus der universellen Eigenschaft erhalten wir daher eine lineare Abbildung

$$\bigvee^k V \to K^N$$

mit $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k} \mapsto e_{i_1,\ldots,i_k}$. Die Abbildung ist insbesondere surjektiv und die $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ daher linear unabängig.