2 Operátorok, potenciálosság

Matematika G3 – Vektoranalízis
Utoljára frissítve: 2025. október 18.

2.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 2.1 : Nabla-operátor

Az $\mathbb{R}^n$-beli Descartes-koordinátarendszerben, ahol $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ egy tetszőleges pont koordinátái, a standard bázis pedig $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1; \hat{\boldsymbol{e}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ a Nabla egy olyan formális differenciáloperátor, melynek koordinátái a parciális derivált operátorok, vagyis:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^\top,$$

Differenciáloperátorok:

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, ahol $\boldsymbol{r}$ az $\mathbb{R}^3$-beli Descartes koordináta-rendszerben $\boldsymbol{r} = (x; y; z)$.

Rotáció	**Divergencia**	**Gradiens**
$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$	$\operatorname{div} \boldsymbol{v}$	$\operatorname{grad} \varphi$
$\nabla \times \boldsymbol{v}$	$\langle \nabla; \boldsymbol{v} \rangle$	$\nabla \cdot \varphi$
$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$	$\left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\rangle$	$\begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix}$
$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\varphi} = \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\varphi} = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}_{\operatorname{rot} \boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\operatorname{div} \boldsymbol{v}} = \mathbb{R}$	$\mathcal{R}_{\operatorname{grad} \varphi} = \mathbb{R}^3$

Speciális esetek:

- ha $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, akkor a vektromező forrásmentes,
- ha $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, akkor a vektromező örvénymentes.

Definíció 2.2 : Laplace-operátor

A Laplace-operátor egy másodrendű differenciáloperátor az n dimenziós térben. Megadja egy skalármező gradiensének divergenciáját, azaz:

$$\Delta \varphi = \langle \nabla; \nabla \rangle \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi.$$

!$\Phi; \Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármezők, $\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}; \boldsymbol{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezők, $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ pedig skalárok.

- Teljesül a linearitás:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) &= \lambda \operatorname{grad} \Phi + \mu \operatorname{grad} \Psi \\ \operatorname{rot}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \quad + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{w} \\ \operatorname{div}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad + \mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

- Zérusság:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi &\equiv \boldsymbol{0} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &\equiv 0 \end{aligned}$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\Phi \Psi) &= \Phi \operatorname{grad} \Psi + \Psi \operatorname{grad} \Phi \\ \operatorname{div}(\Phi \boldsymbol{v}) &= \Phi \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{grad} \Phi \rangle \\ \operatorname{rot}(\Phi \boldsymbol{v}) &= \Phi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} \Phi \end{aligned}$$

- Egyéb szabályok:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \Delta \boldsymbol{v} \\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\mathbf{D}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - (\mathbf{D}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u}; \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \rangle \\ \operatorname{grad}(\langle \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v} \rangle) &= (\mathbf{D}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} + (\mathbf{D}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Definíció 2.3 : Skalárpotenciálosság

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező skalárpotenciálos, ha létezik olyan $\varphi : V \to \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$.

Definíció 2.4 : Vektorpotenciálosság

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező vektorpotenciálos, ha létezik olyan $\boldsymbol{u} : V \to V$ vektormező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$.

Tétel 2.1 : Örvény- és forrásmentesség

Legyen $\boldsymbol{v} : V \to V$ mindenhol értelmezett, legalább egyszer differenciálható vektormező. Ekkor:

- $\boldsymbol{v}$ skalárpotenciálos $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, hiszen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv \boldsymbol{0}$, (**örvénymentes**)
- $\boldsymbol{v}$ vektorpotenciálos $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, hiszen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \equiv 0$. (**forrásmentes**)

Potenciálfüggvények számítása:

Legyen φ skalármező $\boldsymbol{v}$ vektormező skalárpotenciálja. Ebben az esetben tudjuk, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$, vagyis

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}; \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^\top.$$

Ilyen esetben a potenciálfüggvény az alábbi módon számítható:

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_0^{x_1} v_1(\xi; x_2; \dots; x_n)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{x_2} v_2(0; \xi; \dots; x_n)\,\mathrm{d}\xi + \dots + \int_0^{x_n} v_n(0; 0; \dots; \xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Legyen $\boldsymbol{u}$ vektormező $\boldsymbol{v}$ vektormező vektorpotenciálja. A potenciál számtalan alakban előállhat, ezért keressük ezt az alábbi alakban:

$$\boldsymbol{u} = (u_x; u_y; 0)^\top$$

A potenciál komponensei az alábbi módon számíthatóak:

$$u_x = \int_0^z v_y(x; y; \zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \qquad u_y = \int_0^x v_z(\xi; y; 0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z v_x(x; y; \zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Határozzuk meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (zx)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (xy)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező skalár- és vektorpotenciálját!

A vektormező rotációja $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, vagyis $\exists V(\boldsymbol{r}) : \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} V$, ahol V a vektormező skalárpotenciálja.

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{r}) &= \int_0^x v_x(\xi; y; z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y v_y(0; \xi; z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^z v_z(0; 0; \xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^x yz\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y 0\cdot z\,\mathrm{d}\xi + \int_0^z 0\cdot 0\,\mathrm{d}\xi = xyz. \end{aligned}$$

A vektormező divergenciája $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, vagyis $\exists \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) : \boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$, ahol $\boldsymbol{u}$ a vektormező vektorpotenciálja.

Keressük a potenciált $\boldsymbol{u} = (u_x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (u_y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ alakban! Ekkor:

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^z v_y(x; y; \zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^z x\zeta\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2}xz^2, \\ u_y &= \int_0^x v_z(\xi; y; 0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z v_x(x; y; \zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^x \xi y\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z y\zeta\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}yz^2. \end{aligned}$$

A potenciálok tehát:

$$V(\boldsymbol{r}) = xyz, \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} xz^2 \\ x^2y - yz^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi skalármezők gradiensét! Hattassa a függvényekre a Laplace-operátort is!
   a) $\varphi(\boldsymbol{r}) = 6x^y + \sin e^z$
   b) $\psi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^2/2$
   c) $\chi(\boldsymbol{r}) = xy + xz + yz$
   d) $\omega(\boldsymbol{r}) = 2x^2y + xz^2 + 6y$
2. Számítsa ki az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját! Hol lesznek forrásmentesek, illetve örvénymentesek?
   a) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$
   b) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = (3xy + z^2)\,\hat{\boldsymbol{i}} + (6e^z)\,\hat{\boldsymbol{j}} + (-5x^y)\,\hat{\boldsymbol{k}}$
   c) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (\ln(xy/z))\,\hat{\boldsymbol{i}} + (\ln(yz/x))\,\hat{\boldsymbol{j}} + (\ln(zx/y))\,\hat{\boldsymbol{k}}$
   d) $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\|\boldsymbol{r}\| + \|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{r}$ $\qquad (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$
3. Bizonyítsa be a következő azonosságokat, amennyiben φ, ψ skalármezők, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ pedig vektormezők!
   a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi \equiv \boldsymbol{0}$
   b) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \equiv 0$
   c) $\operatorname{grad}(\Phi\Psi) = \Phi\operatorname{grad}\Psi + \Psi\operatorname{grad}\Phi$
   d) $\Delta(\Phi\Psi) = (\Delta\Phi)\Psi + 2\langle\operatorname{grad}\Phi;\operatorname{grad}\Psi\rangle + \Psi(\Delta\Phi)$
   e) $\operatorname{div}(\Phi\boldsymbol{v}) = \langle\operatorname{grad}\Phi;\boldsymbol{v}\rangle + \Phi\operatorname{div}\boldsymbol{v}$
   f) $\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \langle\operatorname{rot}\boldsymbol{v};\boldsymbol{w}\rangle - \langle\boldsymbol{v};\operatorname{rot}\boldsymbol{w}\rangle$
4. Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektormezők skalár- illetve vektorpotenciálisak-e! Ha igen, adja meg a potenciálfüggvényeket! A valós konsztansokat legyenek zérusak, valamint a vektorpotenciált – amennyiben létezik – olyan módon adja meg, hogy a harmadik komponense zérus legyen.
   a) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y+z)\,\hat{\boldsymbol{i}} + (x+z)\,\hat{\boldsymbol{j}} + (x+y)\,\hat{\boldsymbol{k}}$
   b) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = (e^{x+\sin y})\,\hat{\boldsymbol{i}} + (e^{x+\sin y}\cos y)\,\hat{\boldsymbol{j}} + (0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$
   c) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (2zx^3)\,\hat{\boldsymbol{i}} + (3z)\,\hat{\boldsymbol{j}} + (-3x^2z^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$