

5

Lineáris leképezések II

Matematika G2 – Lineáris Algebra

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

5.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 5.1: Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen V a T test feletti vektortér, $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. \mathbf{v} -t a $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés sajátvektorának mondjuk, ha önmaga skalárszorosa megy át a leképezés során, azaz $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, $\lambda \in T$. λ -t a \mathbf{v} sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

Ha a \mathbf{v} sajátvektora a φ -nek, akkor annak skalárszorosa is az.

Tétel 5.1: Sajátértékek számítása

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix sajátértékei a

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

Határozzuk meg az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet, és ennek alapján a sajátértékek:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

A sajátvektorokat az $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

1. A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ egyenletet **karakterisztikus egyenletnek** nevezzük.

A $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ polinomot **karakterisztikus polinomnak** nevezzük.

Tétel 5.2: Főtengelytétel

Szimmetrikus mátrix sajátvektorai ortogonálisak és a sajátértékek mindig valósak.

Antiszimmetrikus mátrix sajátvektorai páronként konjugáltak és a sajátértékek mindig tisztán képzetesek.



Ha \mathbf{A} háromszögmátrix, akkor a sajátértékek a főátlóbeli elemek.

Definíció 5.2: Hasonlóság

Azt mondjuk, hogy az \mathbf{A} és $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan \mathbf{T} invertálható mátrix, hogy

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Jele: $\mathbf{A} \sim \hat{\mathbf{A}}$.

Definíció 5.3: Diagonalizálhatóság

Az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix és egy \mathbf{T} invertálható mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Tétel 5.3: Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Legyen \mathbf{A} egy $n \times n$ -es mátrix. Az \mathbf{A} mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha létezik n darab lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az \mathbf{A} sajátértékeiből, míg a \mathbf{T} transzformációs mátrix \mathbf{A} sajátvektoraiból áll:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n].$$

Sajátvektorok koordinátarendszere:

Egy φ leképezés mátrixa tetszőlegesen sok bázisban felírható. Ha φ -t egy a leképezés sajátvektorával párhuzamos vektorra haddatjuk, akkor az nyújtásnak felel meg. Ha $\dim \varphi = n$, és n darab lineárisan független sajátvektorral rendelkezünk, akkor φ mátrix-reprezentációja a sajátvektorok által felírt bázisban diagonális lesz.

Invariáns mennyiségek:

Legyen \mathbf{A} egy 3×3 -as mátrix, amelynek sajátértékei λ_1 , λ_2 és λ_3 . Ekkor az alábbi mennyiségek bármely \mathbf{A} -hoz hasonló mátrix esetén invariánsak:

- $I_1 = \text{tr } \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
- $I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$,
- $I_3 = \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Mátrixfüggvények:

Legyen \mathbf{A} egy $n \times n$ -es, \mathbf{T} mátrix segítségével diagonalizálható mátrix, amelyre szeretnénk haddatni az f függvényt. Ekkor az $f(\mathbf{A})$ mátrixot a következő módon számíthatjuk ki:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}.$$

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix tizedik hatványát!

Az \mathbf{A} mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig $\mathbf{v}_1(1; 1)$ és $\mathbf{v}_2(1; -1)$. Legyen $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$. Ekkor az \mathbf{A} mátrix diagonális alakja:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján:

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29525 & -29524 \\ -29524 & 29525 \end{bmatrix}.$$

Definíció 5.4: Sajátaltér

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ és legyen λ_i az \mathbf{A} egy sajátértéke. A λ_i -hez tartozó sajátaltér az alábbi halmaz:

$$E_{\lambda_i} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}\}.$$

Ez az \mathbb{R}^n egy altere.

Algebrai és geometriai multiplicitás:

Ha a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$ karakterisztikus egyenletnek λ_i k -szoros gyöke, akkor azt mondjuk, hogy a λ_i -nek az algebrai multiplicitása k . Ebben az esetben a λ_i sajátértékhez tartozó sajátaltér d dimenziója (geometriai multiplicitása) $1 \leq d \leq k$.

A geometriai multiplicitás sosem nagyobb az algebrainál.

A diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy a geometriai és algebrai multiplicitások minden sajátérték esetén megegyeznek.

Diagonalizálható-e az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix?

Először határozzuk meg az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 6 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 6) = 0.$$

Láthatjuk, hogy a $\lambda_{12} = -1$ sajátérték algebrai multiplicitása 2. Keressük meg a hozzá tartozó sajátvektort/sajátvektorokat. Oldjuk meg az $(\mathbf{A} - 1\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenletet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 - v_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underbrace{t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + \underbrace{t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$

Láthatjuk, hogy a λ_{12} sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója 2, amely megegyezik az algebrai multiplicitással, tehát az \mathbf{A} mátrix diagonalizálható.

Diagonalizálható-e az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix?

Először határozzuk meg az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0.$$

Láthatjuk, hogy a $\lambda = 2$ sajátérték algebrai multiplicitása 2.

A sajátvektorok meghatározása az $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenlet segítségével:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A \mathbf{A} mátrix nem diagonalizálható, mivel a sajátértékhez tartozó geometriai multiplicitás (vagyis a sajátaltér dimenziója) 1.

Ha egy 2×2 -es mátrix λ sajátértékéhez tartozó algebrai és geometriai multiplicitás is 2, akkor a mátrix diagonális.

Kvadratikus formák és másodrendű görbék:

Egy csupa másodfokú tagot tartalmazó kétváltozós polinom átírható mátrixos alakba:

$$\rho(x; y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Ha $\rho(x; y) = C$, akkor az egyenlet egy origó középpontú másodrendű görbét ír le. Az \mathbf{A} mátrix definitisége alapján a görbe lehet

- ellipszis, ha \mathbf{A} definit, (sajátértékek azonos előjelűek)
- parabola, ha \mathbf{A} szemidefinit, (egyik sajátérték nulla)
- hiperbola, ha \mathbf{A} indefinit. (sajátértékek ellentétes előjelűek)

Amennyiben a görbe egyenlete nem csak másodfokú tagokat tartalmaz, akkor azzal egy általános másodrendű görbét írunk le:

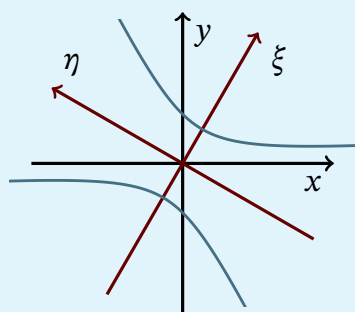
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + f = 0.$$

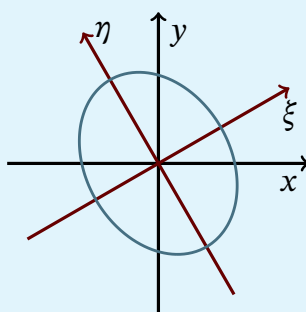
Legyenek \mathbf{A} mátrix sajátértékei λ_1 és λ_2 , és legyen \mathbf{v}_1 a λ_1 -hez, \mathbf{v}_2 pedig a λ_2 -höz tartozó egység hosszúságú sajátvektor. Képezzük a \mathbf{T} transzformációs mátrixot, amelynek oszlopai tartalmazzák a \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 vektorokat, vagyis $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$. A mátrix segítségével az általános másodrendű görbe egyenlete átírható kanonikus alakra:

$$\underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{T}}_{\xi^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}}_{\Lambda} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}}_{\xi} + \underbrace{\mathbf{k}^T \mathbf{T}}_{\kappa^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}}_{\xi} + f = 0,$$

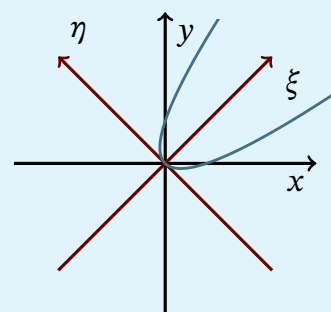
ahol $\xi = [\xi \quad \eta]^T$ az \mathbf{A} mátrix sajátkoordinátái, Λ diagonális mátrix, melynek főátlójában az \mathbf{A} mátrix sajátértékei szerepelnek, κ pedig tartalmazza a ξ és η irányba való eltolást.



Hiperbola



Ellipszis



Parabola

A Λ mátrix főátlójába a sajátértékeket olyan sorrendben kell beírni, amilyen sorrendben a sajátvektorokat a \mathbf{T} mátrixba rendeztük.

5.2. Feladatok

1. Adja meg az alábbi mátrixok sajátvektorait és sajátértékeit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. A leképezés mátrixainak felírása nélkül adja meg a lehető legtöbb sajátértéket és sajátvektort!

- a) z -tengely körüli 45° -os forgatás,
- b) xy síkra vetítés,
- c) xy síkra tükrözés.

3. Diagonizálhatóak-e a harmadik feladatban szereplő \mathbf{E} , \mathbf{D} és \mathbf{B} mátrixok?

4. A sajátértékek kiszámítása nélkül mondjuk meg a lehető legtöbb sajátérték-sajátvektor párt!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a harmadik feladatban szereplő \mathbf{B} mátrix tizedik hatványát!

6. Határozzuk meg az $e^{10\mathbf{B}}$ függvényt, ha \mathbf{B} a harmadik feladatban szereplő mátrix!

7. Milyen alakzatot írnak le az alábbi másodrendű görbék? Írja fel a kanonikus egyenletüket!

a) $-3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy = 144$

b) $57x^2 + 43y^2 + 14\sqrt{3}xy = 576$

c) $2x^2 - 5 = 0$