5 Integrálátalakító tételek, mérnöki példák

Matematika G3 – Vektoranalízis
Utoljára frissítve: 2025. október 06.

5.1. Elméleti áttekintő

Tétel 5.1 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\boldsymbol{\gamma} : [a; b] \to \mathcal{C} \subseteq U$, $t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t)$ folytonos görbe, $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(\boldsymbol{q}) - \varphi(\boldsymbol{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

Körintegrál jelölése:

Ha $\boldsymbol{\gamma}$ zárt görbe, akkor a $\varphi(\boldsymbol{r})$ skalármező egy $\boldsymbol{\gamma}$ görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}s.$$

A Gradiens-tételből következik, hogy skalárpotenciálos vektormező zárt görbe mentén vett körintegrálja zérus.

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y+z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x+z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x+y)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt a $z = 0$ síkon lévő, origó középpontú, $r = 3$ sugárú kör mentén!

Vizsgáljuk meg, hogy a vektormező skalárpotenciálos-e:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x(x+z) - \partial_y(y+z) \\ \partial_y(x+y) - \partial_z(x+z) \\ \partial_z(y+z) - \partial_x(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

Mivel a vektormező skalárpotenciálos, ezért létezik olyan skalármező, melynek gradiense maga a $\boldsymbol{v}$ vektormező. Az integrál értéke tehát csak a kezdő- és végpontoktól függ, melyek jelen esetben megegyeznek, vagyis az integrál értéke zérus:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = 0.$$

Tétel 5.2 : Stokes-tétel

Legyen $\boldsymbol{\varrho} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az $\boldsymbol{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ a $\boldsymbol{\varrho}$ peremét indukált, jobbézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle \,.$$

Ha $\boldsymbol{v}$ skalárpotenciálos, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt a $P_1(0;1;0)$, $P_2(2;0;0)$ és $P_3(0;0;0)$ által meghatározott háromszög mentén!

Határozzuk meg a $\boldsymbol{v}$ vektormező rotációját:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{0}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Stokes-tétel Maxwell III. és IV. egyenletében

A Stokes-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. A harmadik és negyedik egyenlet a mágneses tér és az elektromos tér közötti kapcsolatot írja le:

$$\begin{aligned} &(III) && \Rightarrow && \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}} && \Rightarrow && \text{elektromos tér – mágneses tér változása,} \\ &(IV) && \Rightarrow && \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}} && \Rightarrow && \text{mágneses tér – elektromos tér változása,} \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{E}$ az elektromos tér, $\boldsymbol{B}$ a mágneses tér, $\boldsymbol{j}$ az áram sűrűség, μ_0 a mágneses permeabilitás és ε_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Stokes-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} &(III) && \Rightarrow && \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{E}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = -\iint_{\mathcal{S}} \langle \dot{\boldsymbol{B}}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle \,, \\ &(IV) && \Rightarrow && \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{B}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle \,. \end{aligned}$$

A III. egyenlet azt mondja ki, hogy változó mágneses tér maga körül balkézszabály szerint elektormos teret indukál, míg a IV. egyenlet azt jelenti, hogy az elektromos tér változása jobbkézszabály szerint mágneses teret indukál.

5.2. Feladatok

1. Adott egy $\boldsymbol{F}(x;y) = (2xy)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2 + 2y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ erőtér. Vizsgálja meg, hogy az $\boldsymbol{F}$ erőtér konzervatív-e! Amennyiben igen, adja meg egy olyan potenciálfüggvényt, melyre $\varphi(0;0) = 0$. Számítsa ki a $P_1(0;0)$ és $P_2(1;1)$ pontok közötti egyenes szakaszon végzett munkát!

2. Egy $Q = 8{,}85\pi$ mC nagyságú ponttöltés közelében az elektrosztatikus térerősséget az
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \qquad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$$
vektormező írja le. Mutassa meg, hogy az $\boldsymbol{E}$ vektormező konzervatív, és vezesse le a potenciálfüggvényt $\varphi(\infty) = 0$ határfeltétel mellett! Számítsa ki a $q = 1\,\mu$C próbatöltés által a $P_1(1;0;0)$ és $P_2(2;0;0)$ pontok között végzett munkát, ha $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$.

3. Egy nagyon hosszú, áramjárta vezető belsejében a mágneses indukció jó közelítéssel lineárisan változik a keresztmetszetben:
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (ky)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-kx)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$
Igazolja, hogy a $\boldsymbol{B}$ vektormező forrásmentes, majd adja meg a $\boldsymbol{B}$ vektormező vektorpotenciálját $\boldsymbol{A} = (A_x;A_y;0)$ alakban, melyre $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ teljesül. Mi k mértékegysége?

4. Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y\sin x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2\cos y - \cos x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (v_3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Határozza meg v_3-at, ha tudjuk, hogy $\boldsymbol{v}$ tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrálja zérus!

5. Egy $R = 1$ sugarú, kör keresztmetszetű, z tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (2xy + z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2 + z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (y - x)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$
vektormező írja le. Adja meg a $z = 1$ síkban lévő keresztmetszet menti cirkulációt! (A cirkuláció a vektormező zárt görbe menti integrálja.)

6. Jelölje $\mathcal{S}$ az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ egyenletű forgáshiperboloid $z = -1$ és $z = 1$ síkok közötti részét. Határozza meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y^3)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\mathcal{S}$ peremén vett integrálját!

7. Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt az $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ és $C(0;0;1)$ csúcsokkal meghatározott háromszögvonal mentén!