

1

Ismétlés, operátorok

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 05.

1.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 1.1 : Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet, T test. A $(V; +, \circ)$ a T test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V; +)$ Abel-csoport,

- $\forall \mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z} \in V : (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}),$ (asszociativitás)
- $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{x} \in V : \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$ (zéruselem)
- $\forall \mathbf{x} \in V : \exists -\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0},$ (inverzelem)
- $\forall \mathbf{x}; \mathbf{y} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$ (kommutativitás)

2. $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda \circ \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ (\mu \circ \mathbf{x}),$

3. ha ε a T -beli egységelem, akkor $\forall \mathbf{x} \in V : \varepsilon \circ \mathbf{x} = \mathbf{x},$

4. teljesül a disztributivitás:

- $\forall \lambda \in T \wedge \forall \mathbf{x}; \mathbf{y} \in V : \lambda \circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \circ \mathbf{x} + \lambda \circ \mathbf{y},$
- $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda + \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ \mathbf{x} + \mu \circ \mathbf{x}.$

A legfeljebb másodfokú polinomok halmaza az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve vektortér.

Definíció 1.2 : Lineáris függetlenség

A $(V; +; \circ)$ vektortér $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorait lineárisan függetlennek mondjuk, ha a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

vektoregyenletnek **csak a triviális megoldása** létezik, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ha az egyenletnek nem csak a triviális megoldása létezik, akkor a vektorok lineárisan függők.

A legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében a

$$\{ x^2 - x - 2; x + 1; x^2 + x \}$$

vektorhármas lineárisan összefüggő, hiszen:

$$(1) \cdot (x^2 - x - 2) + (2) \cdot (x + 1) + (-1) \cdot (x^2 + x) = 0.$$

Definíció 1.3 : Altér

Legyen $(V; +; \circ) \mathbb{R}$ feletti vektortér, valamint $\emptyset \neq L \subset V$. L -t altérnek nevezzük a V -ben, ha $(L; +; \circ)$ ugyancsak vektortér.

A legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében az olyan polinomok halmaza, melyekben a x -es tag együtthatója nulla, altér, hiszen a szokásos műveletekre zárt.

1. Összeadásra zárt:

$$(a_2x^2 + \underline{0x} + a_0) + (b_2x^2 + \underline{0x} + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + \underline{0x} + (a_0 + b_0).$$

2. Skalárral való szorzásra zárt:

$$\lambda \cdot (a_2x^2 + \underline{0x} + a_0) = (\lambda a_2)x^2 + \underline{0x} + (\lambda a_0).$$

Definíció 1.4 : Generátorrendszer

Legyen V vektortér, valamint $\emptyset \neq G \subset V$. G által generált altérnek nevezzük azt a legszűkebb alteret, amely tartalmazza G -t. Jele: $\mathcal{L}(G)$.

G generátorrendszere V -nek, ha $\mathcal{L}(G) = V$.

A legfeljebb másodfokú polinomok egy lehetséges **generátorrendszere**:

$$\{ 1; 1 + x; x + x^2; x^2 \}.$$

Definíció 1.5 : Bázis

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V bázisának nevezzük.

A legfeljebb másodfokú polinomok egy lehetséges **bázisa**:

$$\{ 1; x; x^2 \}.$$

Definíció 1.6 : Vektortér dimenziója

Végesen generált vektortér dimenzióján a bázisainak közös tagszámát értjük.

A legfeljebb másodfokú polinomok vektortere **dimenziója 3**, hiszen tetszőleges bázisának három eleme van. Egy másik lehetséges bázis:

$$\{ 1 + x + x^2; x + x^2; x^2 \}.$$

Definíció 1.7 : Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1 -beli vektor ($\forall \mathbf{a}; \mathbf{b} \in V_1$) és T -beli skalár ($\lambda \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \quad \sim$ additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \varphi(\mathbf{a}) \quad \sim$ homogén (skalár kiemelhető).

Definíció 1.8 : Lineáris leképezés rangja

Egy lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját. $\text{rg } \varphi = \dim \varphi(V_1)$.

Definíció 1.9 : Leképezés magtere

Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker \varphi := \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V_1 \wedge \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

Definíció 1.10 : Leképezés defektusa

A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $\text{def } \varphi$ -vel jelöljük.

Tétel 1.1 : Rang-nullitás tétele

Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\text{rg } \varphi + \text{def } \varphi = \dim V_1.$$

Lineáris leképezés mátrixa

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = n$, valamint $\dim V_2 = k$. Legyen $\{\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n\}$ bázis V_1 -ben, és $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_k\}$ bázis V_2 -ben. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi(\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} \mathbf{b}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}_{k \times n}.$$

Az \mathbf{A} mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $\mathbf{x} \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ az \mathbf{x} koordinátái, ekkor a képe:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi(\mathbf{a}_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$



Tetszőleges lineáris leképezés rangja megegyezik bármely bázisra vonatkozó mátrix-reprezentációjának rangjával. $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, $\dim V_1 = m$, $\dim V_2 = n \Rightarrow \varphi \leftrightarrow \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $\text{rg } \varphi = \text{rg } \mathbf{A}$.

Tekintsük a $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x; y) \mapsto (y + x; 2x)$ leképezést.

A leképezés lineáris, hiszen a **összegre tagonként hat**:

$$\varphi \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1 + y_2) + (x_1 + x_2) \\ 2(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2 + x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \varphi \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

valamint a skalárral való szorzás esetén a **skalár kiemelhető**:

$$\varphi \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha y + \alpha x \\ 2\alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(y + x) \\ \alpha(2x) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} y + x \\ 2x \end{bmatrix} = \alpha \varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A leképezés mátrixa a standard bázisra vonatkozóan:

$$\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A **leképezés rangja** a mátrix rangjával egyezik meg:

$$\text{rg } \varphi = \text{rg } \mathbf{A} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

A leképezés **defektusa** a rang-nullitás tétele alapján:

$$\text{def } \varphi = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rg } \varphi = 2 - 2 = 0.$$

A leképezés **inverzének** mátrixa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

A (4; 2) vektor ősképe:

$$\varphi^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.11 : Bázistranszformáció

Legyenek $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ és $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisok V -ben. Ekkor a $\mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ bázistranszformáció \mathbf{T} mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_1 &= t_{11}\mathbf{b}_1 + t_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{n1}\mathbf{b}_n \\ \hat{\mathbf{b}}_2 &= t_{12}\mathbf{b}_1 + t_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{n2}\mathbf{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_j &= t_{1j}\mathbf{b}_1 + t_{2j}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{nj}\mathbf{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_n &= t_{1n}\mathbf{b}_1 + t_{2n}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{nn}\mathbf{b}_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Jelölje egy adott vektor koordinátáit a \mathcal{B} bázisban \mathbf{x} , a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisban pedig \mathbf{x}' . Legyen továbbá \mathbf{T} a $\mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ bázistranszformációs mátrixa.

Ekkor a két koordinátarendszer közötti kapcsolatot a következő egyenletek írják le:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}' \quad \text{és} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}.$$

A \mathbf{T} mátrix oszlopai a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisvektorok \mathcal{B} bázisra vonatkozó koordinátái.

Egy vektor standard normális bázisban felírt alakja: $\mathbf{x}(2; 1)$. Adjuk meg a $\hat{\mathbf{b}}_1(1; 0)$ és $\hat{\mathbf{b}}_2(1; 1)$ bázisra való áttérés mátrixát, valamint a vektor koordinátáit ebben a bázisban!

A transzformációs mátrix és ennek inverze:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A vektor koordinátái az új bázisban:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tétel 1.2 : Lineáris leképezés mátrixa új bázisban

Legyen $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ és $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisok V -ben. A φ leképezés \mathcal{B} bázisra vonatkozó mátrixa \mathbf{A} , $\hat{\mathcal{B}}$ bázisra vonatkozó mátrixa pedig $\hat{\mathbf{A}}$. Jelölje \mathbf{T} a \mathcal{B} bázisról a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Jelölje egy adott vektor koordinátáit a \mathcal{B} bázisban \mathbf{x} , a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisban pedig \mathbf{x}' .

Legyen φ leképezés \mathcal{B} -re vonatkoztatott mátrixa \mathbf{A} , $\hat{\mathcal{B}}$ -re vonatkoztatott mátrixa $\hat{\mathbf{A}}$.

A $\mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ áttérés mátrixa \mathbf{T} . A vektor képei az adott bázisokban: $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}' = \varphi(\mathbf{x}')$.

Ekkor az alábbi gondolatmenet alapján könnyebben megérthetjük, hogy melyik oldalról milyen mátrixszal kell szoroznunk különböző transzformációk során:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{T}\mathbf{x}' \\ \mathbf{y} &= \mathbf{T}\mathbf{y}' \\ \mathbf{y} &= \mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}' \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{y}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}' &= \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\hat{\mathbf{A}}}\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Tekintsük a $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x; y) \mapsto (y + x; 2x)$ leképezést. Adjuk meg a leképezés a standard normális, illetve a $\hat{\mathbf{b}}_1(1; 0)$ és $\hat{\mathbf{b}}_2(1; 1)$ bázisra vonatkoztatott mátrixát!

Korábban már minden szükséges mátrixot meghatároztunk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A leképezés mátrixa a $\{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2\}$ bázisra vonatkoztatva:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.12 : Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen V a T test feletti vektortér, $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. \mathbf{v} -t a $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés sajátvektorának mondjuk, ha önmaga skalárszorosaiba megy át a leképezés során, azaz $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}, \lambda \in T$. λ -t a \mathbf{v} sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

Ha a \mathbf{v} sajátvektora a φ -nek, akkor annak skalárszorosa is az.

Tétel 1.3 : Sajátértékek számítása

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Határozzuk meg az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet, és ennek alapján a sajátértékek:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

A sajátvektorokat az $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

1. A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow \mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

! Ha \mathbf{A} háromszögmátrix, akkor a sajátértékek a főátlóbeli elemek.

Definíció 1.13 : Diagonalizálhatóság

Az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix és egy \mathbf{T} invertálható mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Tétel 1.4 : Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Legyen \mathbf{A} egy $n \times n$ -es mátrix. Az \mathbf{A} mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha létezik n darab lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az \mathbf{A} sajátértékeiből, míg a \mathbf{T} transzformációs mátrix \mathbf{A} sajátvektoraiból áll:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n].$$

Invariáns mennyiségek:

Legyen \mathbf{A} egy 3×3 -as mátrix, amelynek sajátértékei λ_1 , λ_2 és λ_3 . Ekkor az alábbi mennyiségek bármely \mathbf{A} -hoz hasonló mátrix esetén invariánsak:

- $I_1 = \text{tr } \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
- $I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$,
- $I_3 = \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

A karakterisztikus polinom a skalárinvariánsok segítségével:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3.$$

Diagonalizáljuk az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot és adjuk a skalárinvariánsait!

Mivel a mátrix felső háromszögmátrix, sajátértékei a főátló elemei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 3$. A skalárinvariánsok:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 11, \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

Definíció 1.14 : Szimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

Definíció 1.15 : Antiszimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix antiszimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$.

Kvadratikus mátrix felbontása szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)}_{\text{Szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)}_{\text{Antiszimmetrikus}}$$

Függvénytípusok:

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, akkor φ skalármező.

Ha $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, akkor \mathbf{v} vektormező.

Koordinátavektor jelölése:

Jelölje a \mathbf{r} koordinátavektor az \mathbb{R}^n -beli koordináták rendezett n -esét!

Definíció 1.16 : Gradiens

Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármező. Ekkor a φ gradiensének nevezzük a következő vektormezőt:

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_1 \varphi(\mathbf{r}) \\ \partial_2 \varphi(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \partial_n \varphi(\mathbf{r}) \end{bmatrix}.$$

A gradiens a legnagyobb növekedés irányát mutatja meg, nagysága pedig a növekedés mértékét. Mindig merőleges a szintfelületekre.

Adjuk meg a $\varphi(\mathbf{r}) = xyz$ skalármező gradiensét!

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_1 \varphi(\mathbf{r}) \\ \partial_2 \varphi(\mathbf{r}) \\ \partial_3 \varphi(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.17 : Jacobi-mátrix

Legyen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ vektormező. Ekkor a \mathbf{v} Jacobi-mátrixának nevezzük a következő $k \times n$ -es mátrixot:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1(\mathbf{r})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1(\mathbf{r})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial v_1(\mathbf{r})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2(\mathbf{r})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2(\mathbf{r})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial v_2(\mathbf{r})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_k(\mathbf{r})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_k(\mathbf{r})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial v_k(\mathbf{r})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad}^\top v_1(\mathbf{r}) \\ \text{grad}^\top v_2(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \text{grad}^\top v_k(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times n}$$

Definíció 1.18 : Divergencia

Legyen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektormező, amelynek Jacobi-mátrixa $\mathbf{J} = \mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Ekkor a \mathbf{v} divergenciájának nevezzük a következő skalármézőt:

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{tr } \mathbf{J} = J_{11} + J_{22} + \dots + J_{nn}$$

A divergencia tehát a vektormező Jacobi-mátrixának nyoma.

Ahol a divergencia zérus, ott a mező forrásmentes.

Ha a divergencia pozitív, akkor a mező forrás jellegű.

Ha a divergencia negatív, akkor a mező nyelő jellegű.

Definíció 1.19 : Vektorinvariáns

Legyen $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ ferdeszimmetrikus mátrix, azaz $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^\top$. Ekkor létezik egy egyértelmű $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ vektor, úgy, hogy

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Ekkor az \mathbf{a} vektort a \mathbf{S} mátrix vektorinvariánsának nevezzük. Gyakori jelölés:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{a}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{axl}(\mathbf{S}) = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} S_{32} \\ S_{13} \\ S_{21} \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\mathbf{a}(1; 2; 3)$ és $\mathbf{x}(x; y; z)$ vektorok vektoriális szorzatát mátrixszorzás segítségével!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y + 2z \\ 3x - z \\ y - 2x \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.20 : Rotáció

Legyen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, melynek Jacobi-mátrixa $\mathbf{J} = \mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Ekkor a \mathbf{v} rotációjának nevezzük a következő vektormezőt:

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{axl}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T) = \text{axl} \left(\begin{bmatrix} 0 & J_{12} - J_{21} & J_{13} - J_{31} \\ J_{21} - J_{12} & 0 & J_{23} - J_{32} \\ J_{31} - J_{13} & J_{32} - J_{23} & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} J_{32} - J_{23} \\ J_{13} - J_{31} \\ J_{21} - J_{12} \end{bmatrix}.$$

A rotáció tehát a vektormező Jacobi-mátrixának ferdeszimmetrikus részéből származtatható.

Ahol a rotáció zérus, ott a mező örvénymentes.

Adjuk meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz)\hat{\mathbf{i}} + (xz)\hat{\mathbf{j}} + (xy)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a Jacobi-mátrix segítségével!

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x(yz) & \partial_y(yz) & \partial_z(yz) \\ \partial_x(xz) & \partial_y(xz) & \partial_z(xz) \\ \partial_x(xy) & \partial_y(xy) & \partial_z(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

A divergencia:

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{tr } \mathbf{J} = J_{11} + J_{22} + J_{33} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

A rotáció:

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{axl}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T) = \begin{bmatrix} J_{32} - J_{23} \\ J_{13} - J_{31} \\ J_{21} - J_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - z \\ y - y \\ x - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.21 : Nabla-operátor

Az \mathbb{R}^n -beli Descartes-koordinátarendszerben, ahol $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ egy tetszőleges pont koordinátái, a standard bázis pedig $\{\hat{\mathbf{e}}_1; \hat{\mathbf{e}}_2; \dots; \hat{\mathbf{e}}_n\}$ a Nabla egy olyan formális differenciáloperátor, melynek koordinátái a parciális derivált operátorok, vagyis:

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T,$$

A Nabla-operátor segítségével a gradiens, divergencia és rotáció műveletek egyszerűbben felírhatók:

- $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi,$
- $\text{div } \mathbf{v} = \langle \nabla; \mathbf{v} \rangle,$
- $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}.$

Adjuk meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz)\hat{\mathbf{i}} + (xz)\hat{\mathbf{j}} + (xy)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a Nabla-operátor segítségével!

A divergencia:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \langle \nabla; \mathbf{v} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{\partial yz}{\partial x} + \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial xy}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

A rotáció:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y(xy) - \partial_z(xz) \\ \partial_z(yz) - \partial_x(xy) \\ \partial_x(xz) - \partial_y(yz) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.22 : Laplace-operátor

A Laplace-operátor egy másodrendű differenciáloperátor az n dimenziós térben. Megadja egy skalármező gradiensének divergenciáját, azaz:

$$\Delta \varphi = \langle \nabla; \nabla \rangle \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi.$$

Hattassuk a Laplace-operátort a $\varphi(\mathbf{r}) = xyz$ skalármezőre!

$$\Delta \varphi = \langle \nabla; \nabla \rangle \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} = \frac{\partial yz}{\partial x} + \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial xy}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

1.2. További feladatok

1. Adja meg a $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés mátrixát a standard normális, illetve az $\mathbf{b}_1(1; 0; 0)$, $\mathbf{b}_2(1; 1; 0)$ és $\mathbf{b}_3(1; 1; 1)$ vektorok alkotta bázisban. Adja meg a leképezés magterének és képterének dimenzióját is!

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x - y \\ y + z \\ y - z \end{bmatrix}$$

2. Bontsa fel az \mathbf{A} mátrixot szimmetrikus és antiszimmetrikus komponensekre!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Adja meg a φ és ψ leképezések Jacobi-mátrixát!

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 + z \\ yz^2 \end{bmatrix} \quad \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sin \ln(xy^2) \\ \sqrt{e^{xy} + \tan y} \end{bmatrix}$$

4. Adja meg az alábbi leképezések gradienseit! ($C \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$)

a) $f(\mathbf{r}) = C \cdot \mathbf{r}^2$

b) $g(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|$

c) $h(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{a}; \mathbf{r} \rangle$

5. Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező divergenciáját és rotációját! Mely halmazokon forrás-, illetve örvénymentes a mező?

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2 - y^2)\hat{\mathbf{i}} + (y^2 - z^2)\hat{\mathbf{j}} + (z^2 - x^2)\hat{\mathbf{k}}$$

6. Adja meg az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját! ($C \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$)

a) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = C \cdot \mathbf{r}$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } |\mathbf{r}|$

c) $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \ln |\mathbf{r}|$