

**10**

# Többváltozós függvények

Matematika G2 – Többváltozós analízis

Utoljára frissítve: 2025. április 14.

## 10.1. Elméleti Áttekintő

### Többváltozós függvények jelölése:

Legyen  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  függvény. Ekkor a függvény az alábbi formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{f}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{bmatrix},$$

ahol az  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1; 2; \dots; k\}$  függvényeket komponensfüggvényeknek nevezünk.

### Speciális elnevezések:

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  vektor-vektor függvény,
- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vektor-skalár függvény,
- $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  skalár-vektor függvény.

### Definíció 10.1: Gömbkörnyezet

Legyen  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ . Ekkor a  $\mathbf{p}$  pont  $\varepsilon$  sugarú nyílt környezetén (gömbkörnyezetén) a

$$B_\varepsilon(\mathbf{p}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \varepsilon\} \text{ halmazt értjük.}$$

### Definíció 10.2: Többváltozós függvény határértéke

Tekintsük az  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  leképezést. Azt mondjuk, hogy az  $f$  határértéke  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  pontban  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$ , ha az  $\mathbf{A}$  tetszőleg  $\varepsilon > 0$  sugarú gömbkörnyezetéhez létezik az  $\mathbf{a}$ -nak olyan  $\delta(\varepsilon)$  sugarú gömbkörnyezete, hogy

$$\mathbf{x} \in B_{\delta(\varepsilon)}(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{A}).$$

### Tétel 10.1: Az átviteli elv általánosítása

Az  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  függvény határértéke az  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  pontban akkor és csak akkor  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$ , ha  $\forall \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{a}$  sorozat esetén  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{A}$ .

**Definíció 10.3: Iránymenti derivált**

Legyen  $I \in \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és legyen adva egy  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  egységegvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az  $f$  függvény  $\mathbf{a}$  pontbeli  $\mathbf{v}$  irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük. Jele:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

Amennyiben  $\mathbf{v}$  az  $n$ -dimenziós téren az  $i$ -edik irányba mutat, akkor azt parciális deriválnak nevezzük, jelölései:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \partial_i f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = f'_{x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

Adjuk meg az  $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$  függvény parciális deriváltjait az  $P(1; 2)$  pontban!

Először határozzuk meg a parciális deriváltakat parametrikusan, majd számoljuk ki a  $P(1; 2)$  pontbeli értékeket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} &= 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \right|_P = 3 + 20 + 12 + 5 = 40, \\ \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} &= 5x^2 + 6xy - 36y^2 - 6 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right|_P = 5 + 12 - 144 - 6 = -133. \end{aligned}$$

**Definíció 10.4: Gradiens**

Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvény  $\mathbf{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$  pontbeli gradiensén az alábbi oszlopvektort értjük:

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\mathbf{a}) \\ \partial_2 f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)^T$$

A gyakrolatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v},$$

ahol  $\mathbf{v}$  egységegvektor!

## 10.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények határértékét az origóban!

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad g(x; y) = \frac{x-y}{x+y}$$

2. Határozza meg az alábbi határértéket!

a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow \infty}} \frac{xy - 1}{y + 1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + y + 2z}{x - z + xy}$

3. Határozza meg az alábbi függvények origóban lévő határértékeit

a)  $f(x; y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ ,      ha egy  $x = r_n \cos \varphi_n$ ,  $y = r_n \sin \varphi_n$ ,  $r_n \rightarrow \infty$ ,  
 b)  $g(x; y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ ,      ha egy  $y = mx^k$  görbe mentén közelítjük az origót.

4. Határozza meg az alábbi határértékeket!

a)  $\lim_{(x; y) \rightarrow (\infty; \infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$       c)  $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; \infty)} x \cos^2 y$   
 b)  $\lim_{(x; y) \rightarrow (\infty; \infty)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$       d)  $\lim_{(x; y) \rightarrow (\infty; 0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$

5. Definíció alaján határozza meg az  $f(x; y) = x^2 - 2xy - 4y^2$  függvény deriváltját a  $P(1; -1)$  pontban a  $v(1; -1)$  irány mentén!

6. Határozza meg az alábbi függvények parciális deriváltjait!

a)  $f(x; y) = x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$   
 b)  $g(x; y) = x^y$   
 c)  $h(x; y) = e^{x^2y} - 2x^2y^3 \sin(\ln x + y)$

7. Határozza meg az alábbi függvények gradiensét a megadott pontokban!

a)  $f(x; y) = \ln(x + y)$        $P_a(-2; 3)$   
 b)  $g(x; y; z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$        $P_b(3; -4; 7)$

8. Határozza meg azon pontoknak a halmazát amelyen az  $f$  függvény gradiense nullvektor!

$$f(x; y) = 3x^2 - 4xy + 2x + y^2 + 1$$