

5

Integrálátalakító tételek, mérnöki példák

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. október 07.

5.1. Erőtér vizsgálata

Adott egy $\mathbf{F}(x; y) = (2xy)\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + 2y)\hat{\mathbf{j}}$ erőter. Vizsgálja meg, hogy az \mathbf{F} erőter konzervatív-e! Amennyiben igen, adja meg egy olyan potenciálfüggvényt, melyre $\varphi(0; 0) = 0$. Számítsa ki a $P_1(0; 0)$ és $P_2(1; 1)$ pontok közötti egyenes szakaszon végzett munkát!

Az \mathbf{F} erőter konzervatív, hiszen $\partial_y F_x = \partial_x F_y$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2y).$$

A potenciálfüggvény:

$$\varphi(x; y) = \int_0^x F_x(\xi; y) d\xi + \int_0^y F_y(0; \eta) d\eta = \int_0^x 2\xi y d\xi + \int_0^y (0^2 + 2\eta) d\eta = x^2 y + y^2.$$

A végzett munka:

$$\int_{(0;0) \rightarrow (1;1)} \langle \mathbf{F}; d\mathbf{r} \rangle = \varphi(1; 1) - \varphi(0; 0) = 1^2 \cdot 1 + 1^2 - 0 = 2.$$

Ha az erőter nem lenne konzervatív, akkor először a két pontot összekötő szakasz paraméterezését kellene megadni:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 1], \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A végzett munka:

$$\int_c \langle \mathbf{F}; d\mathbf{r} \rangle = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)); \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 2t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (3t^2 + 2t) dt = 2.$$

5.2. Elektrosztatikus tér vizsgálata

Egy $Q = 8,85\pi$ mC nagyságú ponttöltés közelében az elektrosztatikus tér:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}.$$

A vektormező konzervatív, hiszen az értelmezési tartományán ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$) örvénymentes:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} (2yz - 2zy) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} (2zx - 2xz) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} (2xy - 2yx) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

A gömbszimmetria miatt:

$$E(r) = |\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Ennek r szerinti primitív függvénye:

$$\Phi(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

A potenciálfüggvény tehát:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \Phi(|\mathbf{r}|) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|}.$$

A mező által végzett munka a $P_1(1; 0; 0)$ és $P_2(2; 0; 0)$ pontok között:

$$W_{\text{mező}} = q \int_{(1;0;0) \rightarrow (2;0;0)} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{r} \rangle = q(\varphi(2; 0; 0) - \varphi(1; 0; 0)) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0}.$$

A töltés által végzett munka ennek ellentettje:

$$W_{\text{töltés}} = -W_{\text{mező}} = -\frac{qQ}{8\pi\epsilon_0} = -125 \text{ J}.$$

5.3. Áramjárta vezető

Egy nagyon hosszú, áramjárta vezető belsejében a mágneses indukció jó közelítéssel lineárisan változik a keresztmetszetben:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (ky) \hat{\mathbf{i}} + (-kx) \hat{\mathbf{j}} + (0) \hat{\mathbf{k}}$$

A vektormezőnek létezik vektorpotenciálja, hiszen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(ky) + \frac{\partial}{\partial y}(-kx) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Keressük a $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ alakú vektorpotenciált, ahol $A_z = 0$. Ekkor:

$$\begin{aligned} A_x &= \int_0^z B_y(x; y; \zeta) d\zeta = \int_0^z -kx d\zeta = -kxz, \\ A_y &= -\int_0^z B_x(x; y; \zeta) d\zeta + \int_0^x B_z(\xi; y; 0) d\xi = -\int_0^z ky d\zeta + 0 = -kyz. \end{aligned}$$

Mivel \mathbf{B} mértékegysége a T, így k mértékegysége T m^{-1} .

5.4. Vektormező ismeretlen komponense

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y \sin x) \hat{\mathbf{i}} + (z^2 \cos y - \cos x) \hat{\mathbf{j}} + (v_3) \hat{\mathbf{k}}$. Határozza meg v_3 -at, ha tudjuk, hogy \mathbf{v} tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrálja zérus!

Tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrál zérus, ha a vektormező örvénymentes, vagyis:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \sin x \\ z^2 \cos y - \cos x \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y v_3 - 2z \cos y \\ 0 - \partial_x v_3 \\ \sin x - \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A második koordináta alapján v_3 nem függ x -től, így $v_3 = v_3(y; z)$. Az első koordináta alapján:

$$v_3 = \int 2z \cos y \, dy = 2z \sin y + f(z),$$

ahol $f(z)$ tetszőleges z -függvény, nem befolyásolja a rotációt.

5.5. Áramló folyadék keresztmetszet menti cirkulációja

Egy $R = 1$ sugarú, kör keresztmetszetű, z tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy + z) \hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z) \hat{\mathbf{j}} + (y - x) \hat{\mathbf{k}}$$

vektormező írja le. A $z = 1$ síkban lévő keresztmetszet menti cirkuláció kiszámításához alkalmazzuk a Stokes-tételt:

$$\oint_{\partial S} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

A sebességmező rotációja:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2xy + z \\ x^2 + z \\ y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 + 1 \\ 2x - 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A kör keresztmetszet normálvektora a z tengely irányába mutat, így a cirkuláció zérus.

Ha ezt nem vettük volna észre, akkor a felület paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0; 1] \\ t \in [0; 2\pi] \end{matrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} \right\rangle ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 0 ds dt = 0.$$

Ha a Stokes-tételt sem ismerjük, akkor a kör kerületének paraméterezése:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezése:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \begin{bmatrix} 2 \cos t \sin t + 1 \\ \cos^2 t + 1 \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t \sin t + 1)(-\sin t) + (\cos^2 t + 1) \cos t + (\sin t - \cos t) \cdot 0 dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \cos t \sin^2 t - \sin t + \cos^3 t + \cos t dt = 0. \end{aligned}$$

5.6. Forgáspároloid peremén vett integrál

Jelölje \mathcal{S} az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ egyenletű forgáshiperboloid $z = -1$ és $z = 1$ síkok közötti részét. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2)\hat{\mathbf{i}} + (y^3)\hat{\mathbf{j}} + (z^4)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező \mathcal{S} peremén vett integrálját!

Használjuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja:

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{0}; d\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Amennyiben a Stokes-tételt nem ismerjük, akkor a peremkörök paraméterezése:

$$\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \sin t \\ \sqrt{2} \cos t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezése:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(t)) = \begin{bmatrix} (\sqrt{2} \cos t)^2 \\ (\sqrt{2} \sin t)^3 \\ (\pm 1)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2\sqrt{2} \sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $z = 1$ síkon lévő kör menti integrál:

$$\begin{aligned}\oint_{c_1} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{v}(\gamma_1(t)); \dot{\gamma}_1(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2\sqrt{2} \sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \sin t \\ \sqrt{2} \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2\sqrt{2} \cos^2 t \sin t + 4 \sin^3 t \cos t + 0 dt = 0.\end{aligned}$$

A $z = -1$ síkon lévő kör menti integrál:

$$\begin{aligned}\oint_{c_2} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{v}(\gamma_2(t)); \dot{\gamma}_2(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2\sqrt{2} \sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \sin t \\ \sqrt{2} \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2\sqrt{2} \cos^2 t \sin t + 4 \sin^3 t \cos t + 0 dt = 0.\end{aligned}$$

A két integrál összege 0, ami megegyezik a Stokes-tétel segítségével kapott eredménnyel.

5.7. Háromszög vonal menti integrál

Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2)\hat{\mathbf{i}} + (z^2)\hat{\mathbf{j}} + (x^2)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt az $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ és $C(0; 0; 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög vonal mentén!

Alkalmazzuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja:

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ -2x \\ -2y \end{bmatrix}.$$

A háromszög által meghatározott tértartomány paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 1 - s - t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0; 1] \\ t \in [0; 1 - s] \end{matrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\iint_S \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \int_0^1 \int_0^{1-s} \left\langle \begin{bmatrix} -2(1-s-t) \\ -2s \\ -2t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dt ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-s} -2 + 2s + 2t - 2s - 2t \, dt \, ds \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-s} -2 \, dt \, ds = \int_0^1 -2(1-s) \, ds = -2 + 1 = -1.
\end{aligned}$$

Ha a Stokes-tételt nem ismerjük, akkor a háromszög éleinek paraméterezése:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_{AB}(t) &= \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 1], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{AB}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}_{AB}(t)) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\gamma}_{BC}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 1], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{BC}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}_{BC}(t)) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\gamma}_{CA}(t) &= \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 1], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{CA}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}_{CA}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ t^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Az egyes élek menti integrálok:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_{AB}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^1 \langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}_{AB}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{AB}(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 -t^2 dt = -\frac{1}{3}, \\
\int_{\mathcal{C}_{BC}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^1 \langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}_{BC}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{BC}(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 -t^2 dt = -\frac{1}{3}, \\
\int_{\mathcal{C}_{CA}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^1 \langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}_{CA}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{CA}(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ t^2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 -t^2 dt = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$