

8

Differenciálás II

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 27.

8.1. Elméleti Áttekintő

Implicit függvények differenciálása:

A korábbiakban $y = f(x)$ alakú függvényeket vizsgáltunk. Az ilyen függvények az $x \mapsto f(x)$ hozzárendelés alapján egyértelműen megadják, hogy az egyes őskepekhez ($x \in \mathcal{D}_f$) milyen értékek tartoznak ($y \in \mathcal{R}_f$).

Előfordulhat azonban olyan eset, amikor nehéz, vagy éppen lehetetlen **explicit alakban** megadni egy görbét. Ennek a problémának a feloldására vezessük be az **implicit függvények** fogalmát. Az ilyen függvények esetén az őskepek és képek közötti kapcsolatot az $F(x; y) = 0$ egyenlettel adhatjuk meg.

Ilyen függvények differenciálásakor mindig az összetett függvények deriválási szabályait kell alkalmazni:

$$[g(y)]' = g'(y) \cdot y'$$

Implicit függvény deriváltjai a parciális deriváltak segítségével is meghatározhatóak. Parciális deriválás során az $F(x; y)$ függvényre úgy tekintük, mintha az x és y változói függetlenek lennének egymástól. Az x szerinti parciális derivált esetén y -t, az y szerinti parciális derivált esetén pedig x -et konstansként kezeljük.

Az x szerinti derivált:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Az y szerinti derivált pedig:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial x} = -\frac{F'_y}{F'_x}$$

Az $(f(x))^{g(x)}$ típusú függvényeket az implicit függvény deriválási szabályai szerint is differenciálhatjuk.

$$\begin{aligned} y = f(x)^{g(x)} &\rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x) \rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \\ &\downarrow \\ y' &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\ln^x x$ függvény deriváltját!

$$y = \ln^x x \rightarrow \ln y = x \ln \ln x \rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \ln^x x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$$

A feladat az előző gyakorlaton tanult módszerrel is megoldható:

$$y = e^{x \ln \ln x} \rightarrow y' = e^{x \ln \ln x} \left(1 \cdot \ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln^x x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right).$$

Inverz függvény differenciálása:

Függvény invertálása során a függvény görbét tükrözzük az $y = x$ egyenesre. Jele: $f^{-1}(x)$. Amennyiben az eredeti függvény differenciálható az x_0 pontban, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az inverz függvény deriváltja az $y_0 = f(x_0)$ pontban:

$$\left. \frac{df^{-1}(x)}{dx} \right|_{f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Az inverz függvény létezésének szükséges feltétele, hogy az eredeti függvény bijektív legyen.

Paraméteresen megadott függvények differenciálása:

Paraméteresen megadott függvények esetén egy paraméterünk (t), viszont kettő egyenletünk ($x(t)$ és $y(t)$) van. Az x szerinti derivált:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Az y szerinti derivált pedig ennek a reciproka:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

A második deriváltak:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{(\dot{y}')}{\dot{x}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\dot{x}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{dx'}{dy} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{(\dot{x}')}{\dot{y}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right)}{\dot{y}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \right)}{\dot{y}} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}$$

Tétel 8.1: L'Hôpital-szabály

Legyenek f és g differenciálhatóak az $\alpha \in \mathbb{R}_b$ pont egy környezetében (α -ban nem szükségképpen), továbbá $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0, \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow \alpha} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \alpha} |g(x)| = \infty,$$

$$\text{akkor, ha } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B, \text{ akkor } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = B.$$

Tétel 8.2: Rolle-tétel

Legyen f folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $(a; b)$ intervallumon, továbbá $f(a) = f(b) = 0$, ekkor létezik $\xi \in (a; b)$, melyre teljesül, hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

Tétel 8.3: Lagrange-féle középértéktétel

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $(a; b)$ intervallumon, ekkor létezik olyan $\delta \in (a; b)$ hogy

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tétel 8.4: Cauchy-féle középértéktétel

Legyen f és g függvények folytonosak $[a; b]$ intervallumon és differenciálhatóak $(a; b)$ intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in (a; b)$ esetén. Ekkor létezik olyan $\eta \in (a; b)$ hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

8.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvény deriváltjait! ($y' = dy/dx$ és $x' = dx/dy$)

$$F(x; y) = x^4y + 5y^2x - 4 = 0$$

2. Határozza meg az alábbi függvény első és második deriváltjait, valamint az érintőjének egyenletét a $P(1; 1)$ pontban!

$$\ln y + xy = 1$$

3. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 25$ kör azon pontjait, amelyekben a kör érintőjének meredeksége $3/4$!
4. Írja fel az $f(x) = 5x^3 + x - 7$ függvény inverzét, és annak deriváltját! Adja meg ennek értékét az $f(x_0)$ pontban, ha $x_0 = 1$!
5. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott függvény x szerinti első és második deriváltját. Mekkora lesz az érintő meredeksége a $t = \pi/6$ -hoz tartozó pontban?

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

6. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott kör azon pontjait, ahol az érintő meredeksége $3/4$!

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}$$

7. Határozza meg az alábbi határértékeket a L'Hôpital szabály segítségével!

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(x - 3)}{\ln(e^x - e^3)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

8. Vizsgálja meg, hogy alkalmazható-e a L'Hôpital szabály az alábbi határértékek kiszámítására! Ha igen, alkalmazza, ha nem, indokolja meg!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$$

9. A Rolle-féle középértéktétel segítségével bizonyítsa be, hogy az $f(x) = 3x^5 + 15x - 2$ függvénynek egy valós gyöke van!
10. Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$