

7

Differenciálás I

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 19.

7.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 7.1: Differenciálhányados

Ha létezik és véges a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték, akkor azt az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának, vagy az a pontbeli deriváltjának mondjuk.

Jelölése:

$$f'(a) \quad \text{vagy} \quad \frac{df(a)}{dx}.$$

A differenciálhányados létezésének **szükséges feltétele**, hogy az f függvény **folytonos** legyen az a pontban.

Fontosabb függvények és deriváltjaik:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---------|---------------|
| e^x | e^x |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|------------|---------------------|
| a^x | $a^x \ln a$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---------------|-----------------------|
| x^n | $n \cdot x^{n-1}$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{x^{1/n-1}}{n}$ |

A konstans függvény deriváltja zérus.

Trigonometrikus függvények és deriváltjaik:



| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|----------|-----------------------|
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---------------------------|---------------------------|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

Hiperbolikus függvények és deriváltjaik:

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|-----------|------------------------|---------------------------|--|
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1)$ |
| $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\operatorname{artanh} x$ | $\frac{1}{1 - x^2} \quad (x < 1)$ |
| $\coth x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $\operatorname{arcoth} x$ | $\frac{1}{1 - x^2} \quad (x > 1)$ |

Hiperbolikus azonosságok:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = -i \sin(ix)$$

$$\cosh x = \cos(ix)$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

Műveleti szabályok:

- **Konstans kiemelhető:**

$$(cf)' = cf'$$

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx}$$

- **Összeg- és különbségfüggvény:**

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

- **Szorzatfüggvény:**

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

- **Hányadosfüggvény:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Láncszabály:

A láncszabály segítségével összetett függvényeket tudunk differenciálni. Az összefüggést három különböző jelölésmóddal is felírhatjuk:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{vagy} \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad \text{vagy} \quad \frac{df(g)}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Elemi átalakításos módszer:

Előfordulhat olyan eset, hogy $(f(x))^{g(x)}$ alakú függvényeket kell differenciálni. Ebben az esetben az alábbi átalakítást alkalmazzuk:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Az $e^{g(x) \ln f(x)}$ függvény deriváltja a láncszabály segítségével:

$$\begin{aligned} ((f(x))^{g(x)})' &= (e^{g(x) \ln f(x)})' \\ &= e^{g(x) \ln f(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \\ &= (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\ln^x x$ függvény deriváltját!

Az $\ln^x x$ függvényt $e^{x \ln \ln x}$ alakra hozva, a láncszabály segítségével differenciálható:

$$\begin{aligned} (\ln^x x)' &= (e^{x \ln \ln x})' \\ &= e^{x \ln \ln x} \left(\ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \ln^x x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right). \end{aligned}$$

Geometriai alkalmazás:

Az f függvény a pontbeli **érintőjének egyenlete** onnan következik, hogy $f' = m$, ahol m a meredekséget jelöli, az $y = m \cdot x + b$ egyenes egyenletéből levezetve:

$$f(a) = f'(a) \cdot a + b \quad \rightarrow \quad b = f(a) - f'(a) \cdot a,$$

és mivel

$$\begin{aligned} (a; f(a)) &\in y = m \cdot x + b \\ &\downarrow \\ y &= f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a \end{aligned}$$

Ebből átalakítva:

$$\boxed{y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).}$$

Az $(a; f(a))$ pontbeli **normális egyenlete**:

$$M = \frac{-1}{f'(a)}, \quad \text{és} \quad (a; f(a)) \in y = M \cdot x + B,$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a).}$$

7.2. Feladatok

1. A differenciálhányados definíciója segítségével határozza meg az $f(x) = x^n$ függvény deriváltját az $x = x_0$ pontban!
2. Differenciálhatóak-e az alábbi függvények az $x_0 = 0$ pontban?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^3 + x + 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

3. Adjon példát olyan függvényekre, melyek $\forall x \in \mathbb{R}$ valós számra értelmezve vannak és teljesül, hogy ...
 - a) f mindenhol folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható,
 - b) f mindenhol differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos,
 - c) f mindenhol differenciálható és f' is folytonos,
 - d) f mindenhol differenciálható, de f' az $x_0 = 0$ pontban nem az.
4. Mutassa meg, hogy az alábbi függvényre igaz, hogy bár differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, viszont létezik az x_0 tetszőlegesen kis környezetében olyan pont, ahol nem differenciálható.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin 1/x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

5. Differenciálja az alábbi függvényeket!

$$\text{a) } f(x) = (6x^7 + 7x^4 + 2x^2)^5 + \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\text{b) } g(x) = \ln x \cdot e^x + x^2 \cot x + x^{-1/3}$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{(3x + x^2) \cdot \sinh x \cdot \arctan x}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{artanh} \pi}$$

$$\text{d) } i(x) = \sqrt[3]{\ln \cos^2 x^4}$$

$$\text{e) } j(x) = \ln \arcsin \sqrt{\frac{x^2 + 3}{e^{2x}}}$$

$$\text{f) } k(x) = x^x$$

$$\text{g) } l(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$$

6. Határozza meg az alábbi függvények n -edik deriváltját!

$$\text{a) } f(x) = x^m$$

$$\text{b) } g(x) = \sin x$$

7. Írja fel az $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{x} - 3/2x^2$ függvény $x_0 = 1$ pontban lévő érintő egyenesének egyenletét! Adja meg az érintőre merőleges egyenes egyenletét is!
8. Határozza meg azon pontok halmazát, melyekben az $x^2 + y^2 = 25$ kör érintője párhuzamos a $3x - 4y + 7 = 0$ egyenessel.