

9

Fourier-sorok

Matematika G2 – Valós analízis

Utoljára frissítve: 2025. május 5.

9.1. Elméleti Áttekintő

A 2π szerint periodikus függvények vektortere:

A 2π szerint periodikus függvények az összeadásra és a skalárral való szorzásra egy végtelen dimenziós vektorteret alkotnak.

A vektortér egy bázisa:

$$\{ 1; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots; \cos kx; \sin kx; \dots \}.$$

A vektortéren belül az alábbi módon definiáljuk a skaláris szorzatot:

$$\langle f; g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Az előbb definiált bázis vektorai lineárisan függetlenek, vagyis egymással vett skaláris szorzatuk mindig nulla: ($k \neq l$)

$$\langle 1; \sin kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0,$$

$$\langle 1; \cos kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0,$$

$$\langle \sin kx; \cos lx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(k-l)x] + \sin[(k+l)x] dx = 0,$$

$$\langle \sin kx; \sin lx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(k-l)x] - \cos[(k+l)x] dx = 0,$$

$$\langle \cos kx; \cos lx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(k-l)x] + \cos[(k+l)x] dx = 0.$$

A bázisvektorok hosszai a skaláris szorzat segítségével:

$$\langle 1; 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \|1\| = \sqrt{2\pi}$$

$$\langle \sin kx; \sin kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx = \pi \quad \Rightarrow \quad \|\sin kx\| = \sqrt{\pi},$$

$$\langle \cos kx; \cos kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx = \pi \quad \Rightarrow \quad \|\cos kx\| = \sqrt{\pi}.$$

Láthatjuk, hogy az előbb leírt bázis nem ortonormált, azonban ha az egyes vektorokat normáljuk, akkor ortonormált bázist kapunk:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x; \dots; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx; \dots \right\}$$

Ezek alapján tetszőleges 2π szerint periodikus függvény felírható az alábbi alakban:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

ahol az együtthatók a következő módon számíthatók:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle f; 1 \rangle}{\langle 1; 1 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{\langle f; \cos kx \rangle}{\langle \cos kx; \cos kx \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{\langle f; \sin kx \rangle}{\langle \sin kx; \sin kx \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned}$$

Ezzel analóg módon, ha tekintjük az \mathbb{R}^3 egy standard normális bázisban $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ felírt $\mathbf{v}(v_1; v_2; v_3)$ vektorát és egy másik olyan $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \mathbf{b}_3\}$ bázist, amely bázisvektorai merőlegesek egymásra, akkor az \mathbf{v} vektor koordinátái az új bázisban:

$$v_i = \frac{\langle \mathbf{v}; \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i; \mathbf{b}_i \rangle}.$$

Definíció 9.1: Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy $2p$ szerint periodikus függvény, amely a $[0; 2p]$ intervallumon Riemann-integrálható ($f \in \mathcal{R}[0; 2p]$). Ekkor f Fourier-során az alábbi trigonometrikus sort értjük:

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right).$$

Ha a függvény 2π szerint periodikus:

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$



Ha egy függvény páros, akkor a Fourier-sorában csak a_0 és koszinusz tagok szerepelnek, vagyis $b_k \equiv 0$.



Ha egy függvény páratlan, akkor a Fourier-sorában csak szinusz tagok szerepelnek, vagyis $a_0 \equiv 0$ és $a_k \equiv 0$.

Fourier együtthatók számítása: ($2\pi / 2p$ periodicitás esetén)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx$$

$$b_k = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx$$

Ha az f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor mindegy, hogy a $[0; 2p]$ intervallumon, vagy egy skalárral eltolva az $[a; a + 2p]$ intervallumon integrálunk, vagyis:

$$\int_0^{2p} f(x) dx = \int_a^{a+2p} f(x) dx$$

Tétel 9.1

Ha a 2π szerint periodikus f függvénynek létezik az x_0 pontban a jobb- és baloldali határértéke, továbbá az f függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens, akkor a Fourier-sor összege ezen pontokban a függvény bal- és jobboldali határértékeinek számtani közepe.

Hasznos trigonometrikus összefüggések:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin(t \pm s) = \sin t \cos s \pm \cos t \sin s$$

$$\cos(t \pm s) = \cos t \cos s \mp \sin t \sin s$$

$$2 \sin t \sin s = \cos(t - s) - \cos(t + s)$$

$$2 \cos t \cos s = \cos(t - s) + \cos(t + s)$$

$$2 \sin t \cos s = \sin(t - s) + \sin(t + s)$$

9.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi, 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorát!

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < x \leq 0 \\ \pi, & \text{ha } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \wedge \quad f(x) = f(x + 2k\pi)$$

2. Határozzuk meg az alábbi, 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorát! Adja meg a sorösszeget az $x_0 = \pi$ pontban!

$$f(x) = x, \quad \text{ha } x \in (-\pi; \pi) \quad \wedge \quad f(x) = f(x + 2k\pi)$$

3. Írja fel az alábbi 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát!

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \quad \wedge \quad f(x) = f(x + 2k\pi)$$

4. Adja meg az alábbi trigonometrikus függvények Fourier-sorát!

a) $f(x) = \sin^4 x$

b) $g(x) = \cos 3x \cdot \sin^2 x$

5. Írja fel az alábbi $2p = 2\pi$ szerint periodikus függvény Fourier-sorát!

$$f(x) = x^2, \quad \text{ha } x \in (-2; 2) \quad \wedge \quad f(x) = f(x + 2k)$$