5 Integrálátalakító tételek, mérnöki példák

Matematika G3 – Vektoranalízis
Utoljára frissítve: 2025. október 07.

5.1. Erőtér vizsgálata

Adott egy $\boldsymbol{F}(x;y) = (2xy)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2+2y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ erőtér. Vizsgálja meg, hogy az $\boldsymbol{F}$ erőtér konzervatív-e! Amennyiben igen, adja meg egy olyan potenciálfüggvényt, melyre $\varphi(0;0) = 0$. Számítsa ki a $P_1(0;0)$ és $P_2(1;1)$ pontok közötti egyenes szakaszon végzett munkát!

Az $\boldsymbol{F}$ erőtér konzervatív, hiszen $\partial_y F_x = \partial_x F_y$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+2y).$$

A potenciálfüggvény:

$$\varphi(x;y) = \int_0^{\xi} F_x(\xi;y)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\eta} F_y(0;\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_0^{x} 2\xi y\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{y} (0^2+2\eta)\,\mathrm{d}\eta = x^2y + y^2.$$

A végzett munka:

$$\int_{(0;0)\to(1;1)} \langle \boldsymbol{F}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \varphi(1;1) - \varphi(0;0) = 1^2\cdot 1 + 1^2 - 0 = 2.$$

Ha az erőtér nem lenne konzervatív, akkor először a két pontot összekötő szakasz paraméterezését kellene megadni:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A végzett munka:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{F}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^2+2t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (3t^2+2t)\,\mathrm{d}t = 2.$$

5.2. Elektrosztatikus tér vizsgálata

Egy $Q = 8{,}85\pi$ mC nagyságú ponttöltés közelében az elektrosztatikus tér:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \qquad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}.$$

A vektormező konzervatív, hiszen az értelmezési tartományán ($\mathbb{R}\setminus\{0\}$) örvénymentes:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}(2yz-2zy)\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}(2zx-2xz)\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}(2xy-2yx)\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

A gömbszimmetria miatt:

$$E(r)=|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Ennek r szerinti primitív függvénye:

$$\Phi(r)=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

A potenciálfüggvény tehát:

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\Phi(|\boldsymbol{r}|)=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|}.$$

A mező által végzett munka a $P_1(1;0;0)$ és $P_2(2;0;0)$ pontok között:

$$W_{\text{mező}}=q\int_{(1;0;0)\to(2;0;0)}\langle\boldsymbol{E};\mathrm{d}\mathbf{r}\rangle=q(\varphi(2;0;0)-\varphi(1;0;0))=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0}.$$

A töltés által végzett munka ennek ellentettje:

$$W_{\text{töltés}}=-W_{\text{mező}}=-\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0}=-125\,\mathrm{J}.$$

5.3. Áramjárta vezető

Egy nagyon hosszú, áramjárta vezető belsejében a mágneses indukció jó közelítéssel lineárisan változik a keresztmetszetben:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=(ky)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}+(-kx)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}+(0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

A vektormezőnek létezik vektorpotenciálja, hiszen $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x}(ky)+\frac{\partial}{\partial y}(-kx)+\frac{\partial}{\partial z}(0)=0+0+0=0.$$

Keressük a $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ alakú vektorpotenciált, ahol $A_z=0$. Ekkor:

$$A_x=\int_0^z B_y(x;y;\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z -kx\,\mathrm{d}\zeta=-kxz,$$
$$A_y=-\int_0^z B_x(x;y;\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+\int_0^x B_z(\xi;y;0)\,\mathrm{d}\xi=-\int_0^z ky\,\mathrm{d}\zeta+0=-kyz.$$

Mivel $\boldsymbol{B}$ mértékegysége a T, így k mértékegysége $\mathrm{T\,m^{-1}}$.

5.4. Vektormező ismeretlen komponense

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y \sin x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2 \cos y - \cos x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (v_3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Határozza meg v_3-at, ha tudjuk, hogy $\boldsymbol{v}$ tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrálja zérus!

Tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrál zérus, ha a vektormező örvénymentes, vagyis:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \sin x \\ z^2 \cos y - \cos x \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y v_3 - 2z \cos y \\ 0 - \partial_x v_3 \\ \sin x - \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A második koordináta alapján v_3 nem függ x-től, így $v_3 = v_3(y; z)$. Az első koordináta alapján:

$$v_3 = \int 2z \cos y \,\mathrm{d}y = 2z \sin y + f(z),$$

ahol $f(z)$ tetszőleges z-függvény, nem befolyásolja a rotációt.

5.5. Áramló folyadék keresztmetszet menti cirkulációja

Egy $R = 1$ sugarú, kör keresztmetszetű, z tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (2xy + z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2 + z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (y - x)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

vektormező írja le. A $z = 1$ síkban lévő keresztmetszet menti cirkuláció kiszámításához alkalmazzuk a Stokes-tételt:

$$\oint_{\partial S} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle .$$

A sebességmező rotációja:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2xy + z \\ x^2 + z \\ y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 + 1 \\ 2x - 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A kör keresztmetszet normálvektora a z tengely irányába mutat, így a cirkuláció zérus.

Ha ezt nem vettük volna észre, akkor a felület paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0; 1] \\ t \in [0; 2\pi] \end{matrix}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \int_0^1 0 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = 0.$$

Ha a Stokes-tételt sem ismerjük, akkor a kör kerületének paraméterezése:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezése:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \begin{bmatrix} 2\cos t \sin t + 1 \\ \cos^2 t + 1 \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos t \sin t + 1)(-\sin t) + (\cos^2 t + 1)\cos t + (\sin t - \cos t) \cdot 0 \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -2\cos t \sin^2 t - \sin t + \cos^3 t + \cos t \, \mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

5.6. Forgásparaboloid peremén vett integrál

Jelölje $\mathcal{S}$ az $x^2+y^2-z^2 = 1$ egyenletű forgáshiperboloid $z = -1$ és $z = 1$ síkok közötti részét. Határozza meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y^3)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\mathcal{S}$ peremén vett integrálját!

Használjuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{0}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Amennyiben a Stokes-tételt nem ismerjük, akkor a peremkörök paraméterezése:

$$\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezése:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(t)) = \begin{bmatrix} (\sqrt{2}\cos t)^2 \\ (\sqrt{2}\sin t)^3 \\ (\pm 1)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sqrt{2}\sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $z = 1$ síkon lévő kör menti integrál:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}_1} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}_1(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}_1(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sqrt{2}\sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} -2\sqrt{2}\cos^2 t \sin t + 4\sin^3 t \cos t + 0 \,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

A $z = -1$ síkon lévő kör menti integrál:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}_2} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}_2(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}_2(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sqrt{2}\sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} -2\sqrt{2}\cos^2 t \sin t + 4\sin^3 t \cos t + 0 \,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

A két integrál összege 0, ami megegyezik a Stokes-tétel segítségével kapott eredménnyel.

5.7. Háromszögvonal menti integrál

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt az $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ és $C(0;0;1)$ csúcsokkal meghatározott háromszögvonal mentén!

Alkalmazzuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ -2x \\ -2y \end{bmatrix}.$$

A háromszög által meghatározott tértartomány paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s;t) = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0;1] \\ t \in [0;1-s] \end{matrix}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_0^1 \int_0^{1-s} \left\langle \begin{bmatrix} -2(1-s-t) \\ -2s \\ -2t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-s} -2 + 2s + 2t - 2s - 2t \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-s} -2 \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^1 -2(1-s)\,\mathrm{d}s = -2 + 1 = -1.$$

Ha a Stokes-tételt nem ismerjük, akkor a háromszög éleinek paraméterezése:

$$\gamma_{AB}(t) = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\gamma}_{AB}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(\gamma_{AB}(t)) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{BC}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\gamma}_{BC}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(\gamma_{BC}(t)) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{CA}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\gamma}_{CA}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(\gamma_{CA}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

Az egyes élek menti integrálok:

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma_{AB}(t)); \dot{\gamma}_{AB}(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2 \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3},$$
$$\int_{\mathcal{C}_{BC}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma_{BC}(t)); \dot{\gamma}_{BC}(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2 \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3},$$
$$\int_{\mathcal{C}_{CA}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma_{CA}(t)); \dot{\gamma}_{CA}(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ t^2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2 \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}.$$