

4

Felületek, felületi integrál

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 29.

4.1. Elméleti áttekintő

Definíció 4.1 : Reguláris felület

Legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$. Azt mondjuk, hogy az \mathcal{S} reguláris felület, ha $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}$ ponthoz megadható olyan \mathbf{p} -t tartalmazó $V \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz és $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \cap V$ leképezés, melyre teljesülnek az alábbiak:

- \mathbf{g} differenciálható homeomorfizmus,
- \mathbf{g} immerzió (derivált leképezése injektív).

Ha ezek teljesülnek, akkor \mathbf{g} -t parametrációnak, $V \cap \mathcal{S}$ -t koordinátakörnyezetnek nevezzük.

Definíció 4.2 : Elemi felület

A $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ elemi felület, ha \mathbf{g} legalább egyszer differenciálható és injektív.

Definíció 4.3 : Felszín

Legyen $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ elemi felület. Ekkor a \mathcal{S} felület felszíne:

$$A = \iint_U \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

Definíció 4.4 : Skalármező skalárértékű felületmenti integrálja

Legyen $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\mathbf{g} : U \rightarrow \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s; t \in U$ a felület paraméterezése, $\mathbf{g}(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\| ds dt$, Ekkor a φ skalármező \mathcal{S} felület menti integrálja:

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) dS = \iint_U \varphi(\mathbf{g}(s; t)) \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

Amennyiben a felület $z = \Phi(x; y)$ alakban van megadva, akkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) dS = \iint_U \varphi(x; y; \Phi(x; y)) \sqrt{1 + (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2} dx dy.$$

Definíció 4.5 : Vektormező skalár- és vektorértékű felületmenti integrálja

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\boldsymbol{\varrho} : U \rightarrow \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s; t \in U$ a felület paraméterezése, $\boldsymbol{\varrho}(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS = \partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho} ds dt$, $\hat{\mathbf{n}} = (\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}) / \|\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}\|$. Ekkor a \mathbf{v} vektormező \mathcal{S} felület menti...

- skalárértékű integrálja: $\iint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle = \iint_U \left\langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)); \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\rangle ds dt$,
- vektorértékű integrálja: $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S} = \iint_U \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) ds dt$.

Vektormező felületmenti integrálját fluxusnak is nevezzük. Például a mágneses fluxus a mágneses indukció vektormezőjének felületmenti integrálja:

$$\Phi_B = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle.$$

A felületi normális irányítottsága

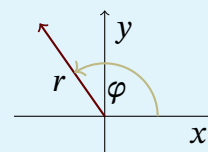
Egy $\boldsymbol{\varrho} : (s; t) \in U \rightarrow \mathcal{S}$ paraméterezett felület...

- kifelé mutató normálisa: $\mathbf{n}_{ki} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t}$,
- befelé mutató normálisa: $\mathbf{n}_{be} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s}$.

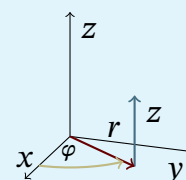
Felület befelé és kifelé mutató normálisa **azonos nagyságú**, de **ellentétes irányú**.

Koordináta-transzformációk

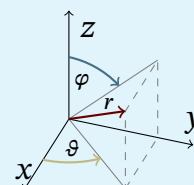
- **Polár:** $x = r \cos \varphi$ $r \in [0; R]$ $|\mathbf{J}| = r$
 $y = r \sin \varphi$ $\varphi \in [0; 2\pi)$



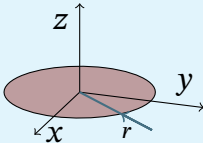
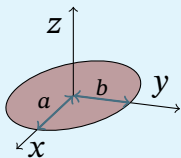
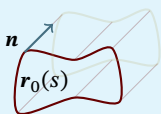
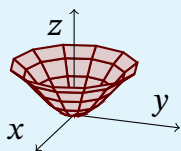
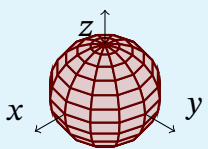
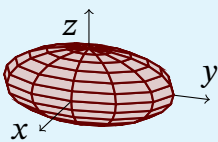
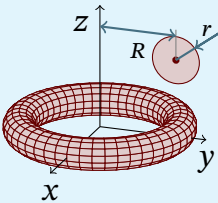
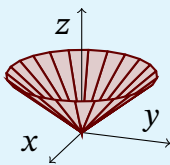
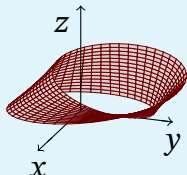
- **Henger:** $x = r \cos \varphi$ $r \in [0; R]$ $|\mathbf{J}| = r$
 $y = r \sin \varphi$ $\varphi \in [0; 2\pi]$
 $z = z$ $z \in \mathbb{R}$



- **Gömb:** $x = r \sin \varphi \cos \vartheta$ $r \in [0; R]$ $|\mathbf{J}| = r^2 \sin \varphi$
 $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$ $\varphi \in [0; \pi]$
 $z = r \cos \varphi$ $\vartheta \in [0; 2\pi]$



Felületek paraméterezése

• Körlap: (xy sík)	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$	$s \in [0; r]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• Ellipszislap: (xy sík)	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} a s \cos t \\ b s \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$	$s \in [0; 1]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• Hengerfelület:	$\varrho(s; t) = \mathbf{r}_0(s) + t\mathbf{n}$	$s \in \mathcal{D}_{\mathbf{r}_0}$ $t \in [0, T]$	
• Forgásfelület: (z tengely körül) ($z = f(x)$)	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ f(s) \end{bmatrix}$	$s \in \mathcal{D}_f$ $t \in [0, 2\pi]$	
• Gömbfelület:	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} R \sin s \cos t \\ R \sin s \sin t \\ R \cos s \end{bmatrix}$	$s \in [0; \pi]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• Ellipszoid:	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} a \sin s \cos t \\ b \sin s \sin t \\ c \cos s \end{bmatrix}$	$s \in [0; \pi]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• Tórusz:	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} (R + r \cos s) \cos t \\ (R + r \cos s) \sin t \\ r \sin s \end{bmatrix}$	$s \in [0; 2\pi]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• Kúp:	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ s \end{bmatrix}$	$s \in [0; U]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• Möbius-szalag:	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} (R + s \cos t/2) \cos t \\ (R + s \cos t/2) \sin t \\ s \sin t/2 \end{bmatrix}$	$s \in [-S; S]$ $t \in [0, 2\pi]$	

4.2. Feladatok

1. Számítsuk ki a megadott felületek felszínét!
 - a) $z = x^2 + y^2$ forgáspároloid $z = 1$ és $z = 4$ síkok közé eső része,
 - b) $\mathbf{r}(s; t) = (e^s \cos t) \hat{\mathbf{i}} + (e^s \sin t) \hat{\mathbf{j}} + (s) \hat{\mathbf{k}}, s \in (-\infty; 0], t \in [0; 2\pi]$.
2. Integrálja a skalármezőket a megadott felületeken!
 - a) $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$, az egységgyömb $z > 0$ részén,
 - b) $\psi(\mathbf{r}) = x + y + z$, a $2x + 2y + z = 4$ sík első tényolcadba tartozó részén.
3. Integrálja a vektormezőket a megadott felületeken! A normális kifelé mutató legyen!
 - $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x + y) \hat{\mathbf{i}} + (x - y) \hat{\mathbf{j}} + (z^2) \hat{\mathbf{k}},$
 $\mathbf{r}(s; t) = (s + t) \hat{\mathbf{i}} + (s - t) \hat{\mathbf{j}} + (s^2 - t^2) \hat{\mathbf{k}}, (s; t) \in [0; 1]^2,$
 - $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 + z^2) \hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z^2) \hat{\mathbf{j}} + (x^2 + y^2) \hat{\mathbf{k}},$
 $r = 2$ sugarú, $x = 2$ síkon lévő körön.
4. Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x) \hat{\mathbf{i}} + (-y) \hat{\mathbf{j}} + (z) \hat{\mathbf{k}}$ vektormező $\mathbf{r}(s; t) = (s + 2t) \hat{\mathbf{i}} + (t) \hat{\mathbf{j}} + (s - t) \hat{\mathbf{k}},$
 $s \in [0; 3], t \in [0; 1]$ felületen vett vektorértékű integrálját! A normális irányítotttsága legyen kifelé mutató!