

## 5

## Integrálátalakító tételek, mérnöki példák

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. október 06.

## 5.1. Elméleti áttekintő

## Tétel 5.1 : Gradiens-tétel

Legyen  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható skalármező,  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{C} \subseteq U$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$  folytonos görbe,  $\gamma(a) = \mathbf{p}$ ,  $\gamma(b) = \mathbf{q}$  pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

## Körintegrál jelölése:

Ha  $\gamma$  zárt görbe, akkor a  $\varphi(\mathbf{r})$  skalármező egy  $\gamma$  görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi(\mathbf{r}) ds.$$

A Gradiens-tételből következik, hogy skalárpotenciális vektormező zárt görbe mentén vett körintegrálja zérus.

Integrálja a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\hat{\mathbf{i}} + (x+z)\hat{\mathbf{j}} + (x+y)\hat{\mathbf{k}}$  vektormezőt a  $z = 0$  síkon lévő, origó középpontú,  $r = 3$  sugarú kör mentén!

Vizsgáljuk meg, hogy a vektormező skalárpotenciális-e:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x(x+z) - \partial_y(y+z) \\ \partial_y(x+y) - \partial_z(x+z) \\ \partial_z(y+z) - \partial_x(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Mivel a vektormező skalárpotenciális, ezért létezik olyan skalármező, melynek gradiense maga a  $\mathbf{v}$  vektormező. Az integrál értéke tehát csak a kezdő- és végpontoktól függ, melyek jelen esetben megegyeznek, vagyis az integrál értéke zérus:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = 0.$$

**Tétel 5.2 : Stokes-tétel**

Legyen  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$  a  $\varphi$  peremét indukált, jobbkézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle.$$

Ha  $\mathbf{v}$  skalárpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen  $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$ .

Integrálja a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y)\hat{\mathbf{i}} + (x)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$  vektormezőt a  $P_1(0; 1; 0)$ ,  $P_2(2; 0; 0)$  és  $P_3(0; 0; 0)$  által meghatározott háromszög mentén!

Határozzuk meg a  $\mathbf{v}$  vektormező rotációját:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{0}; d\mathbf{S} \rangle = 0.$$

**Stokes-tétel Maxwell III. és IV. egyenletében**

A Stokes-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. A harmadik és negyedik egyenlet a mágneses tér és az elektromos tér közötti kapcsolatot írja le:

$$\begin{aligned} (III) \quad &\Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} &&\Rightarrow \quad \text{elektromos tér – mágneses tér változása,} \\ (IV) \quad &\Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} &&\Rightarrow \quad \text{mágneses tér – elektromos tér változása,} \end{aligned}$$

ahol  $\mathbf{E}$  az elektromos tér,  $\mathbf{B}$  a mágneses tér,  $\mathbf{j}$  az áram sűrűség,  $\mu_0$  a mágneses permeabilitás és  $\varepsilon_0$  az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Stokes-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} (III) \quad &\Rightarrow \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{r} \rangle = - \iint_{\mathcal{S}} \langle \dot{\mathbf{B}}; d\mathbf{S} \rangle, \\ (IV) \quad &\Rightarrow \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{B}; d\mathbf{r} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}; d\mathbf{S} \rangle. \end{aligned}$$

A III. egyenlet azt mondja ki, hogy változó mágneses tér maga körül balkézszabály szerint elektromos teret indukál, míg a IV. egyenlet azt jelenti, hogy az elektromos tér változása jobbkézszabály szerint mágneses teret indukál.

## 5.2. Feladatok

- Adott egy  $\mathbf{F}(x; y) = (2xy)\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + 2y)\hat{\mathbf{j}}$  erőter. Vizsgálja meg, hogy az  $\mathbf{F}$  erőter konzervatív-e! Amennyiben igen, adja meg egy olyan potenciálfüggvényt, melyre  $\varphi(0; 0) = 0$ . Számítsa ki a  $P_1(0; 0)$  és  $P_2(1; 1)$  pontok közötti egyenes szakaszon végzett munkát!
- Egy  $Q = 8,85\pi$  mC nagyságú ponttöltés közelében az elektrosztatikus térerősséget az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

vektormező írja le. Mutassa meg, hogy az  $\mathbf{E}$  vektormező konzervatív, és vezesse le a potenciálfüggvényt  $\varphi(\infty) = 0$  határfeltétel mellett! Számítsa ki a  $q = 1 \mu\text{C}$  próbatöltés által a  $P_1(1; 0; 0)$  és  $P_2(2; 0; 0)$  pontok között végzett munkát, ha  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ .

- Egy nagyon hosszú, áramjárta vezető belsejében a mágneses indukció jó közelítéssel lineárisan változik a keresztmetszetben:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (ky)\hat{\mathbf{i}} + (-kx)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$$

Igazolja, hogy a  $\mathbf{B}$  vektormező forrásmentes, majd adja meg a  $\mathbf{B}$  vektormező vektorpotenciálját  $\mathbf{A} = (A_x; A_y; 0)$  alakban, melyre  $\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  teljesül. Mi  $k$  mértékegysége?

- Legyen  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y \sin x)\hat{\mathbf{i}} + (z^2 \cos y - \cos x)\hat{\mathbf{j}} + (v_3)\hat{\mathbf{k}}$ . Határozza meg  $v_3$ -at, ha tudjuk, hogy  $\mathbf{v}$  tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrálja zérus!
- Egy  $R = 1$  sugarú, kör keresztmetszetű,  $z$  tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy + z)\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z)\hat{\mathbf{j}} + (y - x)\hat{\mathbf{k}}$$

vektormező írja le. Adja meg a  $z = 1$  síkban lévő keresztmetszet menti cirkulációt! (A cirkuláció a vektormező zárt görbe menti integrálja.)

- Jelölje  $\mathcal{S}$  az  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  egyenletű forgáshiperboloid  $z = -1$  és  $z = 1$  síkok közötti részét. Határozza meg a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2)\hat{\mathbf{i}} + (y^3)\hat{\mathbf{j}} + (z^4)\hat{\mathbf{k}}$  vektormező  $\mathcal{S}$  peremén vett integrálját!
- Integrálja a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2)\hat{\mathbf{i}} + (z^2)\hat{\mathbf{j}} + (x^2)\hat{\mathbf{k}}$  vektormezőt az  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$  és  $C(0; 0; 1)$  csúcsokkal meghatározott háromszög vonal mentén!