

## 12

# Integrálszámítás III

Matematika G1 – Integrálszámítás

Utoljára frissítve: 2024. november 18.

## 12.1. Elméleti Áttekintő

### Trigonometrikus integrálás:

Trigonometrikus függvények integrálásakor a tanult trigonometrikus azonosságokat kell alkalmaznunk. Ezek közül a legfontosabbak:

$$\begin{aligned}1 &= \sin^2 x + \cos^2 x, \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páros, akkor a függvényt a fenti trigonometrikus azonosságok segítségével át tudjuk alakítani.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páratlan ( $2k + 1$ ), akkor azt felbontjuk egy  $2k$ -s és egy 1-es szögfüggvény szorzataként, majd a már páros fokszámú tagot az előbbi módszerrel tudjuk integrálni.

### Határozott integrál:

Egy függvény  $[a; b]$  intervallumon vett határozott integrálja a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

ahol  $F(x)$  az  $f(x)$  primitív függvénye.

A határozott integrálás során a határozatlan integrálásnál tanult összefüggéseket alkalmazhatjuk. Azonban két integrálási technikánál különösen figyelniük kell az integrálási tartományra:

- Parciális integrálás:  $\int_a^b f g' = [f g]_a^b - \int_a^b f' g,$
- Helyettesítéssel integrálás:  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$

**Görbe alatti terület:**

A határozott integrál segítségével a függvény görbéje és az  $x$ -tengely által bezárt **előjeles** területet tudjuk meghatározni. Amennyiben a függvény képe a tengely alatt van, akkor a terület negatív előjelű lesz.



$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

**Két görbe által bezárt terület:**

Két függvény által bezárt területet a két függvény különbségének integrálásával tudjuk meghatározni:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

**Paraméteres görbe által meghatározott görbevonallú trapéz terület:**

Egy  $\gamma : (x(t); y(t))$  görbe  $t_1$  és  $t_2$  paraméterpontok közötti görbevonallú trapéz területe

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| dt.$$

Határozzuk meg a ciklois egy  $t \in [0; 2\pi]$  intervallumhoz tartozó görbevonallú trapéz területét!

A ciklois paraméteres egyenlete:

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t, \\ y(t) &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$



$$A = \int_0^{2\pi} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t dt = \dots = 3\pi$$

## 12.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi trigonometrikus integrálok értékét!

a)  $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

b)  $\int \cos^5 x \, dx$

c)  $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

2. Oldja meg az alábbi összetett integrálási feladatokat!

a)  $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

b)  $\int \frac{\ln \ln x}{x} \, dx$

c)  $\int |x| \, dx$

d)  $\int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1} \, dx$

e)  $\int (x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1} \, dx$

3. Határozzuk meg az alábbi határozott integrálok értékét!

a)  $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$

b)  $\int_0^1 x \sinh x \, dx$

c)  $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx$

4. Határozza meg az  $f(x) = (x + 1)x(x - 2)$  függvény és az  $x$ -tengely által bezárt geometriai területet!

5. Adja meg az  $f(x) = x^4$  és a  $g(x) = 3x^2 - 2$  függvények által bezárt terület nagyságát!

6. Adja meg egy  $a$  sugarú körvonal  $(x(t) = a \cos t, y(t) = a \sin t)$  alapján a  $t \in [0; 2\pi]$  intervallumhoz tartozó görbevonallú trapéz területét!