

13

Integrálszámítás III

Matematika G1 – Integrálszámítás

Utoljára frissítve: 2024. november 11.

13.1. Elméleti Áttekintő

Improprius integrál:

A Riemann-integrál definíció szerint akkor használható, hogyha az integrációs intervallum véges, valamint ezen intervallumon az integrálandó függvény is korlátos. Előfordulhat azonban olyan eset, hogy

- végtelen tartományon szeretnénk integrálni,
- az integrálandó függvény nem korlátos az integrálási tartományban.



Végtelen tartomány



Nem korlátos függvény

Ezekben az esetekben az improprius integrált hívhatjuk segítségül.

Ívhossz számítása integrálással:

Egy görbét háromféleképpen is definiálhatunk:

- explicit alakban: $y = f(x)$,
- paraméteres alapon: $x = x(t)$, $y = y(t)$,
- polárkoordináta-rendszerben: $r = r(\varphi)$.

Az ívhossz számítására az alábbi képletet használhatjuk:

- explicit: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

- paraméteres: $L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

- polár: $L = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$

Forgástestek térfogata és felszíne:

Egy görbe x tengely körüli megforgatásával egy forgástestet kapunk.

$$\text{explicit:} \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\text{paraméteres:} \quad V = \pi \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) dt \quad A = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Fontos figyelembe venni, hogy a fenti képletek csak a forgástestek palástjának felszínét adják eredményül.

Abban az esetben, hogyha például egy csonkakúpnak a felszínét szeretnénk meghatározni, akkor az alsó és felső alapok felületét hozzá kell adni az előbbi képletekkel kapott eredményhez.

Görbeív súlypontja:

Egy konstans sűrűségű görbe súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

$$\text{explicit:} \quad S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad S_y = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\text{paraméteres:} \quad S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \quad S_y = \frac{1}{L} \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Görbe által meghatározott síktartomány súlypontja:

Egy görbe és az x tengely által meghatározott síktartomány súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

$$\text{explicit:} \quad S_x = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad S_y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$\text{paraméteres:} \quad S_x = \frac{\int_a^b x(t) y(t) \dot{x}(t) dt}{\int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt} \quad S_y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) dt}{\int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt}$$

13.2. Feladatok

1. Milyen a és b paraméterek választása esetén lesz az adott integrál értéke minimális?

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) dx$$

2. Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékeit!

a) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

c) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x+2} dx$

e) $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$

f) $\int_0^1 \ln x dx$

3. Adja meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjének ívhosszát az $x \in [0, 2]$ intervallumon!
4. Számítsa ki a ciklois egy ívének hosszát! ($x(t) = a \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$)
5. Számítsa ki annak a csonkakúpnak a térfogatát, melynek alapja egy $R = 5$ sugarú kör, teteje egy $r = 2$ sugarú kör, magassága pedig $h = 6$!
6. Vezesse le a gömb térfogatának képletét!
7. Adja meg az $f(x) = x^3$ görbe, valamint az $y = 0$ és $x = 1$ egyenesek által határolt rész súlypontjának koordinátáit!