8 Bevezetés

Matematika G3 – Differenciálegyenletek
Utoljára frissítve: 2025. október 26.

8.1. Elméleti áttekintő

Definíció 8.1 : Differenciálegyenlet

Legyen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-szer folytonosan differenciálható függvény, vagyis $y^{(0)} = y$, $y^{(1)} = y'$, $y^{(2)} = y''$, …, $y^{(n)} = y^{(n)}$ folytonos függvények, x független változó. Ekkor az $F\left(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}\right) = 0$ egyenletet y-ra vonatkoztatott, n-edrendű, közönséges differenciálegyenletnek nevezzük.

A **közönséges** arra utal, hogy egy független változót tartalmaz az egyenlet. Ha nem közönséges, akkor **parciális** (többváltozós) a differenciálegyenlet.

A **rend** a legmagasabb fokú deriváltra utal.

A differenciálegyenletek megadási módja alapján:

- **implicit** megadás: $F\left(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}\right) = 0$,
- **explicit** megadás: $y^{(n)} = f(x; y; y'; \ldots; y^{(n-1)})$.

Definíció 8.2 : Lineáris differenciálegyenlet

Azt a differenciálegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény, és annak deriváltjai csak elsőfokon, szorzatuk pedig egyáltalán nem fordul elő, lineáris differenciálegyenletnek mondjuk. Ellenkező esetben nemlineáris.

A következő egyenlet y-ra vonatkoztatott, lineáris, másodrendű közönséges differenciálegyenlet, a független változó x:

$$y'' + 2y' + y = 4e^x.$$

Newton II. törvénye

Az $F = ma$ egyenlet a testre ható erő és a test gyorsulásának kapcsolatát írja le. Mivel a gyorsulás az elmozdulás idő szerinti második deriváltja ($a = \ddot{x}$), ezért a mozgásegyenlet egy másodrendű differenciálegyenlet lesz:

$$F = ma = m\ddot{x}.$$

Szabadesés során megtett út

Szabadesés során a testre ható erő a test tömegével és a gravitációs gyorsulással arányos:

$$F = mg = m\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = g.$$

Ha kétszer integráljuk az egyenletet, akkor megkapjuk a megtett utat:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \int g \, \mathrm{d}t = gt + v_0, \\ x &= \int (gt + v_0) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0. \end{aligned}$$

Ferde hajítás

Egy testet $\boldsymbol{v}(v_x; v_y)$ kezdeti sebességgel elhajítunk. A testre ható erő a gravitációs erő $-y$ irányú. x irányban a testre nem hat erő. A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} (x) \quad & m\ddot{x} = 0 && \Longrightarrow \quad \ddot{x} = 0, \\ (y) \quad & m\ddot{y} = -mg && \Longrightarrow \quad \ddot{y} = -g. \end{aligned}$$

Ha ezeket az egyenleteket kétszer integráljuk, akkor megkapjuk a vízszintes és függőleges elmozdulást:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t + x_0, \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t + y_0. \end{aligned}$$

Az időt kifejezve az $x(t)$ egyenletből, majd ebből a pályák egyenlete:

$$t = \frac{x - x_0}{v_x} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -\frac{g}{2v_x^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) + y_0.$$

A pályák lefele nyíló parabolák.

Definíció 8.3 : Megoldásgörbe

A közönséges differenciálegyenlet megoldásfüggvényének görbéje a differenciálegyenlet integrálgörbéje/megoldásgörbéje.

Végtelen sok megoldásgörbe létezik. Egy n-edrendű differenciálegyenlet esetén n darab tetszőleges konstans jelenik meg a megoldásban.

Definíció 8.4 : Differenciálegyenlet megoldása

Az $F\big(x; y; y'; \dots; y^{(n)}\big) = 0$ differenciálegyenlet megoldása a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ha $\forall x \in \mathbb{R}$-re

$$F\big(x; \varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Az $y'' + 2y' + y = 4e^x$ differenciálegyenlet megoldása a $\varphi(x) = e^x + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ függvény:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^x - C_1e^{-x} + C_2e^{-x} - C_2xe^{-x},\\ \varphi''(x) &= e^x + C_1e^{-x} - 2C_2e^{-x} + C_2xe^{-x}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve a φ, φ', és φ'' kifejezéseket:

$$\begin{aligned}\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) = &\; e^x + C_1e^{-x} - 2C_2e^{-x} + C_2xe^{-x}\\ &+ 2\left(e^x - C_1e^{-x} + C_2e^{-x} - C_2xe^{-x}\right)\\ &+ e^x + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}\\ =&\; 4e^x.\end{aligned}$$

Definíció 8.5 : Cauchy-feladat

Ha az n-ed rendű differenciálegyenlet olyan megoldását keressük, hogy

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \quad \dots, \quad y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$$

feltételeket kiegyenlíti, akkor Cauchy-feladatról / kezdeti érték feladatról beszélünk.

Határozzuk meg az $y'' + 2y' + y = 4e^x$ differenciálegyenlet azon megoldását, amely kielégíti az $y(0) = 2$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket!

Az általános megoldás és ennek deriváltja:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^x + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x},\\ y'(x) &= e^x - C_1e^{-x} + C_2e^{-x} - C_2xe^{-x}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket:

$$\begin{aligned}y(0) &= 1 + C_1 + 0 = 2 &\Rightarrow&\quad C_1 = 1,\\ y'(0) &= 1 + (C_2 - 1) - 0 = 1 &\Rightarrow&\quad C_2 = 1.\end{aligned}$$

Vagyis a keresett partikuláris megoldás:

$$y(x) = e^x + e^{-x} + xe^{-x}.$$

Izoklinák és iránymező

Az $y' = f(x; y)$ differenciálegyenlet izoklinái azok a görbék, amelyek mentén a megoldásgörbék érintőinek meredeksége állandó. Az izoklinák egyenlete:

$$f(x; y) = c.$$

Az iránymező a megoldásgörbék érintőinek irányát mutatja meg egy tetszőleges pontban.

Görbesereg differenciálegyenlete

Minden n-edrendű differenciálegyenlethez tartozik egy n paraméteres g görbesereg:

$$g(x; y; c_1; \dots ; c_n) = 0.$$

Hogyan kapható meg a egy adott görbesereghez tartozó differenciálegyenlet?

- Deriváljuk az egyenletet n-szer.
- Fejezzük ki a $c_1, c_2, \dots , c_n$ paramétereket az egyenletekből.
- Helyettesítsük vissza ezeket az eredeti egyenletbe.

Adja meg az alábbi görbesereg differenciálegyenletét:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x = e^x(c_1 + c_2 x).$$

Deriváljuk az egyenletet kétszer:

$$\begin{aligned} y' &= c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x = e^x(c_1 + c_2 + c_2 x), \\ y'' &= c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x = e^x(c_1 + 2c_2 + c_2 x). \end{aligned}$$

Számítsuk ki $y' - y$ különbséget:

$$y' - y = e^x(c_1 + c_2 + c_2 x) - e^x(c_1 + c_2 x) = c_2 e^x \quad \Longrightarrow \quad c_2 = e^{-x}(y' - y).$$

Az első konstans az eredeti egyenletből:

$$c_1 = y e^{-x} - c_2 x = e^{-x}(y - x(y' - y)) = e^{-x}(y - xy' + xy).$$

A konstansokat helyettesítsük be az y''-s egyenletbe:

$$\begin{aligned} y'' &= e^x(c_1 + 2c_2 + c_2 x) \\ &= (y - xy' + xy) + 2(y' - y) + x(y' - y) \\ &= 2y' - y. \end{aligned}$$

A keresett differenciálegyenlet tehát:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

8.2. Feladatok

1. Osztályozza az alábbi differenciálegyenleteket:

   a) $y' = \cosh x - 3xy$,

   b) $y'' = y'^2 \cos x$,

   c) $\left(1 + y^{(IV)}\right)^2 - y'' = x^3 y''' + xy$,

   d) $y'' = e^y \ln x$.

2. Mik lesznek az izoklinák és a vonalelemek?

   a) $y' = y/x \qquad x > 0$

   b) $y' = -x/y \qquad y < 0$

3. Az $(y')^4 + y^2 = -1$ differenciálegyenlet megoldása-e az $y = x^2 - 1$ függvény?

4. Megoldása-e az $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ függvény az $y'' + 4y = 0$ differenciálegyenletnek?

5. Megoldása-e az $y = \ln x$ függvény az $xy'' + y' = 0$ differenciálegyenletnek?

6. Adja meg az $y'' + 4y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételek melletti megoldását!

7. Adja meg az $y'' + 4y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ és $y'(\pi/4) = 2$ kezdeti feltételek melletti megoldását!

8. Adja meg az alábbi görbeserekek differenciálegyenleteit:

   a) $y = cx^2$,

   b) $x^2 + y^2 = cx$,

   c) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

9. Adja meg az olyan xy síkban elhelyezkedő körök differenciálegyenletét, amelyek az x-tengelyt az origóban érintik!