12 Integrálszámítás III

Matematika G1 – Integrálszámítás

Utoljára frissítve: 2024. november 18.

12.1. Elméleti Áttekintő

Trigonometrikus integrálás:

Trigonometrikus függvények integrálásakor a tanult trigonometrikus azonosságokat kell alkalmaznunk. Ezek közül a legfontosabbak:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x, \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}, \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}, \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x. \end{aligned}$$

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páros, akkor a függvényt a fenti trigonometrikus azonosságok segítségével át tudjuk alakítani.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páratlan $(2k+1)$, akkor azt felbontjuk egy $2k$-s és egy 1-es szögfüggvény szorzataként, majd a már páros fokszámú tagot az előbbi módszerrel tudjuk integrálni.

Határozott integrál:

Egy függvény $[a;b]$ intervallumon vett határozott integrálja a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

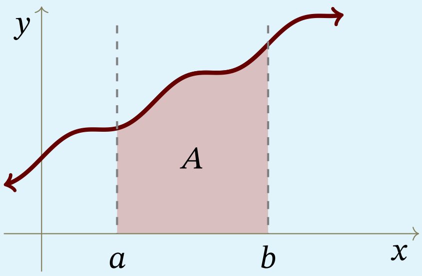
ahol $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye.

A határozott integrálás során a határozatlan integrálásnál tanult összefüggéseket alkalmazhatjuk. Azonban két integrálási technikánál különösen figyelnünk kell az integrálási tartományra:

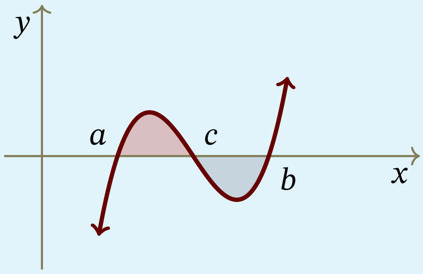
- Parciális integrálás: $\displaystyle\int_a^b f g' = \big[f\,g\big]_a^b - \int_a^b f' g,$
- Helyettesítéses integrálás: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Görbe alatti terület:

A határozott integrál segítségével a függvény görbéje és az x-tengely által bezárt **előjeles** területet tudjuk meghatározni. Amennyiben a függvény képe a tengely alatt van, akkor a terület negatív előjelű lesz.



$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

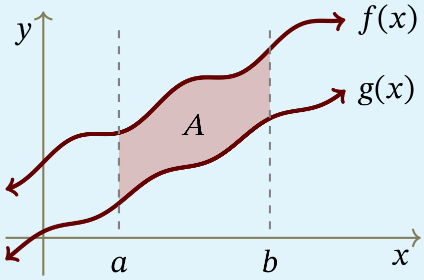


$$A = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Két görbe által bezárt terület:

Két függvény által bezárt területet a két függvény különbségének integrálásával tudjuk meghatározni:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$



Paraméteres görbe által meghatározott görbevonalú trapéz terület:

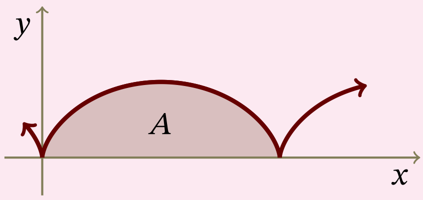
Egy $\gamma : (x(t); y(t))$ görbe t_1 és t_2 paraméterpontok közötti görbevonalú trapéz területe

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t) \cdot y(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Határozzuk meg a ciklois egy $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz területét!

A ciklois paraméteres egyenlete:

$$x(t) = t - \sin t,$$
$$y(t) = 1 - \cos t.$$



$$A = \int_0^{2\pi} |\dot{x}(t) \cdot y(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \cdots = 3\pi$$

12.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi trigonometrikus integrálok értékét!

   a) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x \, \mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

2. Oldja meg az alábbi összetett integrálási feladatokat!

   a) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int \frac{\ln\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int |x| \, \mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1} \, \mathrm{d}x$

   e) $\displaystyle\int (x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x-1} \, \mathrm{d}x$

3. Határozzuk meg az alábbi határozott integrálok értékét!

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int_0^{1} x \sinh x \, \mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2} \, \mathrm{d}x$

4. Határozza meg az $f(x) = (x+1)\,x\,(x-2)$ függvény és az x-tengely által bezárt geometriai területet!

5. Adja meg az $f(x) = x^4$ és a $g(x) = 3x^2 - 2$ függvények által bezárt terület nagyságát!

6. Adja meg egy a sugarú körvonal ($x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$) alapján a $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz területét!