7 Összefoglalás

Matematika G3 – Többváltozós analízis
Utoljára frissítve: 2025. szeptember 08.

7.1. Elméleti áttekintő

Differenciáloperátorok

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, ahol $\boldsymbol{r}$ az $\mathbb{R}^3$-beli Descartes koordináta-rendszerben $\boldsymbol{r} = (x; y; z)$.

Rotáció	Divergencia	Gradiens
$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$	$\operatorname{div} \boldsymbol{v}$	$\operatorname{grad} \varphi$
$\nabla \times \boldsymbol{v}$	$\langle \nabla; \boldsymbol{v} \rangle$	$\nabla \cdot \varphi$
$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$	$\left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\rangle$	$\begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix}$
$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\varphi} = \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\varphi} = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}_{\operatorname{rot} \boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\operatorname{div} \boldsymbol{v}} = \mathbb{R}$	$\mathcal{R}_{\operatorname{grad} \varphi} = \mathbb{R}^3$

Azonosságok

- Teljesül a linearitás:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) &= \lambda \operatorname{grad} \Phi + \mu \operatorname{grad} \Psi \\ \operatorname{rot}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{w} \\ \operatorname{div}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

- Zérusság:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi &\equiv \boldsymbol{0} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &\equiv 0 \end{aligned}$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\Phi \Psi) &= \Phi \operatorname{grad} \Psi + \Psi \operatorname{grad} \Phi \\ \operatorname{div}(\Phi \boldsymbol{v}) &= \Phi \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{grad} \Phi \rangle \\ \operatorname{rot}(\Phi \boldsymbol{v}) &= \Phi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} \Phi \end{aligned}$$

- Egyéb szabályok:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \Delta \boldsymbol{v} \\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\mathbf{D}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - (\mathbf{D}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u}; \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \rangle \\ \operatorname{grad}(\langle \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v} \rangle) &= (\mathbf{D}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} + (\mathbf{D}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Potenciálosság

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező skalárpotenciálos, ha létezik olyan $\varphi : V \to \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Ekkor $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{0}$.

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező vektorpotenciálos, ha létezik olyan $\boldsymbol{u} : V \to V$ vektormező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$. Ekkor $\div\boldsymbol{v} = \div\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$.

Vonalmenti integrálok

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathcal{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\boldsymbol{\gamma}(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mathbf{r} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t$. Ekkor:

- skalármező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_I \varphi(\boldsymbol{\gamma}(t))\,\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

- vektormező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \int_I \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle\,\mathrm{d}t,$$

- vektormező görbe menti vektorértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_I \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Felületi integrálok

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\varrho} : U \to \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s;t \in U$ a felület paraméterezése, $\boldsymbol{\varrho}(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $\mathrm{d}S = \|\partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}\|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \partial_s\boldsymbol{\varrho}\times\partial_t\boldsymbol{\varrho}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, $\hat{\boldsymbol{n}} = (\partial_s\boldsymbol{\varrho}\times\partial_t\boldsymbol{\varrho})/\,\|\partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}\|$. Ekkor:

- skalármező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = \int_U \varphi(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) \left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t}\right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

- vektormező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \int_U \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)); \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t}\right)\right\rangle \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

- vektormező vektorértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_U \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t}\right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Térfogati integrál

Legyen $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\Omega} : D \to \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\boldsymbol{\Omega}(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $\mathrm{d}V = \det(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r; s; t))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$. Ekkor:

- skalármező térfogati integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint_{D} \varphi\left(\boldsymbol{\Omega}(r; s; t)\right) \det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r; s; t)\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Integrálási tételek

- **Gradiens-tétel**:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \varphi(\boldsymbol{\gamma}(a)).$$

  Vagyis ha egy vektormező előáll egy skalármező gradienseként, akkor annak bármely zárt görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

- **Stokes-tétel**:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial \mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle .$$

  A tételből következik, hogy skalárpotenciálos vektormező bármely zárt görbén vett integrálja zérus.

- **Gauss-Osztogradszkij-tétel**:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle .$$

  A tételből következik, hogy vektorpotenciálos vektormező bármely zárt felületen vett integrálja zérus.

- **Green-tétel asszimetrikus alakja**:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi\,\Delta\varphi + \langle \operatorname{grad} \psi; \operatorname{grad} \varphi \rangle\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle .$$

- **Green-tétel szimmetrikus alakja**:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi\,\Delta\varphi + \varphi\,\Delta\psi\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle .$$

7.2. Feladatok

1.