7 Differenciálás I

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

7.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 7.1: Differenciálhányados

Ha létezik és véges a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határérték, akkor azt az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának, vagy az a pontbeli deriváltjának mondjuk.

Jelölése:

$$f'(a) \quad \text{vagy} \quad \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}.$$

A differenciálhányados létezésének **szükséges feltétel**e, hogy az f függvény **folytonos** legyen az a pontban.

Geometriai alkalmazás:

Az f függvény a pontbeli **érintő**jének **egyenlete** onnan következik, hogy $f' = m$, ahol m a meredekséget jelöli, az $y = m \cdot x + b$ egyenes egyenletéből levezetve:

$$f(a) = f'(a)\cdot a + b \quad \to \quad b = f(a) - f'(a)\cdot a,$$

és mivel

$$(a; f(a)) \in y = m\cdot x + b$$
$$\downarrow$$
$$y = f'(a)\cdot x + f(a) - f'(a)\cdot a$$

Ebből átalakítva:

$$\boxed{y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a).}$$

Az $(a; f(a))$ pontbeli **normális egyenlete**:

$$M = \frac{-1}{f'(a)}, \quad \text{és} \quad (a; f(a)) \in Y = M\cdot x + B,$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{f'(a)}\cdot(x-a) + f(a).}$$

7.2. Feladatok

1. A differenciálhányados definíciója segítségével határozza meg az $f(x) = x^n$ függvény deriváltját az $x = x_0$ pontban!

2. Differenciálhatóak-e az alábbi függvények az $x_0 = 0$ pontban?

   a) $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^3 + x + 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

3. Adjon példát olyan függvényekre, melyek $\forall x \in \mathbb{R}$ valós számra értelmezve vannak és teljesül, hogy …

   a) f mindenhol folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható,

   b) f mindenhol differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos,

   c) f mindenhol differenciálható és f' is folytonos,

   d) f mindenhol differenciálható, de f' az $x_0 = 0$ pontban nem az.

4. Mutassa meg, hogy az alábbi függvényre igaz, hogy bár differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, viszont létezik az x_0 tetszőlegesen kis környezetében olyan pont, ahol nem differenciálható.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\sin {}^1\!/_x\right|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

5. Differenciálja az alábbi függvényeket!

   a) $f(x) = (6x^7 + 7x^4 + 2x^2)^5 + \sin^2 x + \cos^2 x$

   b) $g(x) = \ln x \cdot e^x + x^2 \cot x + x^{-1/3}$

   c) $h(x) = \dfrac{(3x + x^2) \cdot \sinh x \cdot \arctan x}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{artanh} \pi}$

   d) $i(x) = \sqrt[3]{\ln \cos^2 x^4}$

   e) $j(x) = \ln \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{e^{2x}}}$

   f) $k(x) = x^x$

   g) $l(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$

6. Határozza meg az alábbi függvények n-edik deriváltját!

   a) $f(x) = x^m$

   b) $g(x) = \sin x$

7. Írja fel az $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{x} - {}^3\!/_{2x^2}$ függvény $x_0 = 1$ pontban lévő érintő egyenesének egyenletét! Adja meg az érintőre merőleges egyenes egyenletét is!

8. Határozza meg azon pontok halmazát, melyekben az $x^2 + y^2 = 25$ kör érintője párhuzamos a $3x - 4y + 7 = 0$ egyenessel.