

## 9

## Elsőrendű és szétválasztható DE

Matematika G3 – Differenciálegyenletek

Utoljára frissítve: 2025. november 01.

## 9.1. Elméleti áttekintő

## Definíció 9.1 : Lipschitz-feltétel

Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre azt monjuk, hogy a  $D$  tartományon az  $y$  változóra nézve kielégíti a Lipschitz-feltételt, ha  $\exists M \in \mathbb{R}^+$ , hogy  $\forall (x; y_1)$  és  $(x; y_2)$  esetén

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq M |y_1 - y_2|.$$

## Tétel 9.1 : Picard-Lindelöf-tétel

Legyen  $y' = f(x, y)$  adott és  $D = I_1 \times I_2$ , ahol  $I_1$  és  $I_2$  nyílt intervallumok,  $(x_0; y_0) \in D$ . Tegyük fel hogy:

- $f$  mindkét változójában folytonos  $D$ -n,
- $f$  kielégíti a Lipschitz-feltételt az  $y$  változójára nézve.

Ekkor az  $y' = f(x; y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltétellel ellátott differenciálegyenletnek  $\exists!$  megoldása, azaz  $\exists \varepsilon > 0$ , hogy  $\varphi : (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ -re teljesül, hogy  $\varphi'(x) = f(x; \varphi(x))$  és  $\forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  esetén  $\varphi(x_0) = y_0$ .

## Tétel 9.2 : Szukcesszív approximáció

Ha az  $y' = f(x; y)$  differenciálegyenletben lévő  $f$  függvényre teljesül, hogy  $|x - x_0| < a \leq \infty$  és  $|y - y_0| < b \leq \infty$  tartományon korlátos és folytonos, továbbá eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, akkor a

$$y_{n+1} := \underbrace{y(x_0)}_{y_0} + \int_{x_0}^x f(t; y_n(t)) dt$$

függvénysorozat  $n \rightarrow \infty$  esetén az  $y' = f(x; y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  differenciálegyenlet megoldásához konvergál az  $|x - x_0| < \min \{a; b/M\}$  intervallumon.

Oldjuk meg az  $y'(x) = x + y(x)$ ,  $y_0 = 0$  Cauchy-feladatot szukcesszív approximációval!

Az iteráció során használt összefüggés:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_0}^x f(t; y_n(t)) dt = 0 + \int_0^x (t + y_n(t)) dt.$$

Számítsuk ki az első pár iterációt:

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 0, \\
 y_1(x) &= \int_0^x (t + 0) dt = \frac{x^2}{2}, \\
 y_2(x) &= \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\
 y_3(x) &= \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \\
 y_4(x) &= \int_0^x \left(t + \frac{t^4}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}, \\
 &\vdots \\
 y_n(x) &= -1 - x + \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}_{\rightarrow e^x} = e^x - 1 - x.
 \end{aligned}$$

### Definíció 9.2 : Szeparábilis differenciálegyenlet megoldása

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

### $y' = f(ax + by + c)$ típusú differenciálegyenlet megoldása

Éljünk az  $f(u)$  helyettesítéssel, ahol  $u(x) = ax + by + c$ , ennek deriváltja pedig  $u' = a + by' = a + bf(u)$ . Ekkor a differenciálegyenlet az alábbi alakra redukálódik:

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx,$$

amelyet integrálással már meg tudunk oldani.

### Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = \exp(2x + 3y - 1)$$

Éljünk az  $u(x) = 2x + 3y - 1$  helyettesítéssel, ennek deriváltja  $u' = 2 + 3y' = 2 + 3e^u$ . A kapott differenciálegyenlet már integrálással megoldható:

$$\int \frac{du}{2 + 3e^u} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^u}{2 + 3e^u}\right) = x + K \Rightarrow \frac{e^u}{2 + 3e^u} = Ce^{2x}.$$

Visszahelyettesítve  $u$ -t, majd átrendezve:

$$\frac{e^{2x+3y-1}}{2 + 3e^{2x+3y-1}} = Ce^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \left( 1 + \ln \frac{C}{1 - Ce^{2x}} \right).$$

**Newton lehűlési törvénye**

A Newton-féle lehűlési törvény azt írja le, hogyan változik egy test hőmérséklete az időben, ha a környezetével hőcserében van. A modell feltevése, hogy a hőmérséklet-változás sebessége arányos a test és a környezet hőmérsékletének különbségével. Ha a környezet hőmérséklete  $x_k$ , a test hőmérséklete pedig  $x(t)$ , akkor az arányosság miatt a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{x} = \alpha(x - x_k).$$

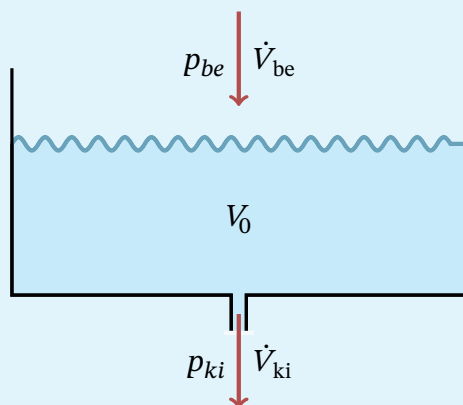
A differenciálegyenlet szétválasztható, így az alábbi megoldáshoz jutunk:

$$\frac{dx}{x - x_k} = \alpha dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_k + C \cdot e^{\alpha t},$$

ahol  $C$  a kezdeti feltételből határozható meg.

**Általános keverési feladat**

Az általános keverési feladat tipikusan olyan helyzetet modellez, amikor egy tartályban lévő oldat koncentrációja az időben változik, mivel az oldatba új anyag áramlik be, illetve ugyanakkor oldat hagyja el a tartályt. A mennyiségi változásokat a koncentráció ( $p$ ), illetve az oldat mennyisége ( $V$ ) írja le. Feltesszük, hogy a tartályban a keverés tökéletes, tehát a koncentráció minden pillanatban egyenletes a térfogat teljes terében.



Ha a bejövő és a kiáramló anyagmennyiség megegyezik ( $\dot{V}_{be} = \dot{V}_{ki} = \dot{V}_e \in \mathbb{R}$ ), akkor:

$$x_{be} = \dot{V}_e \cdot p_{be} \quad x_{ki}(t) = \frac{\dot{V}_e}{V_0} x(t)$$

$$\dot{x}(t) = x_{be} - x_{ki}(t)$$

$$\frac{dx}{x_{be} - x_{ki}(t)} = dt$$

Ha a bejövő és a kiáramló anyagmennyiség nem egyezik meg, azaz  $\dot{V}_{be} \neq \dot{V}_{ki}$ , ekkor:

$$x_{ki}(t) = \frac{\dot{V}_{ki}}{V_0 + (\dot{V}_{be} - \dot{V}_{ki})t} x(t)$$

A keverési folyamat viselkedése mindkét esetben exponenciális közelítést mutat egy egyensúlyi koncentráció felé, hasonlóan a Newton-féle lehűlési törvényhez.

## 9.2. Feladatok

1. Adja meg az  $y' = 3y^{2/3}$  differenciálegyenlet  $y(0) = 0$  kezdeti feltétel melletti megoldását! Vizsgálja meg a megoldás egyértelműségét!
2. Adja meg azt a tértartományt, ahol az  $y' = x^2 + y^2$  differenciálegyenlet megoldása egyértelmű!
3. Adja meg azt a tértartományt, ahol az  $y'' = y + 3\sqrt{y} + e^{y'}$  differenciálegyenlet megoldása egyértelmű!
4. Számítsa ki az  $y' = y$  differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első négy közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel  $y(0) = 1$ !
5. Számítsa ki az  $y' = xy$  differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első négy közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel  $y(0) = 1$ !
6. Oldja meg a következő szétválasztható differenciálegyenleteket!

a)  $(2x + 1)y' - 3y = 0,$

b)  $\sqrt{1 + x^2} y' - \sqrt{1 - y^2} = 0,$

c)  $y' = \frac{1 - x - y}{2x - 2y - 3},$

d)  $xy' = y(1 + \ln x - \ln y),$

e)  $2xyy' = x^2 + y^2,$

f)  $y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2y - 2}, \quad y(0) = -1,$

g)  $xy' = x \cdot e^{y/x} + y, \quad y(1) = 0.$

7. Adja meg azon görbét, amelynek bármely pontjában az érintő a a koordináta-tengelyek közé eső részét az adott pontban felezi!
8. Newton-törvénye értelmében ismert, hogy egy test hőmérsékletének változása a környezet hőmérsékletével való különbséggel arányos. Egy kenyeret a  $t = 0$  időpillanatban kiveszünk a  $200^\circ\text{C}$ -os sütőből, majd hűlni hagyjuk. 20 perc után  $60^\circ\text{C}$ -ra hűl le. Mennyi idő múlva éri el a kenyér hőmérséklete a  $30^\circ\text{C}$ -ot, ha a környezet hőmérséklete  $20^\circ\text{C}$ ?
9. 100 kg 10 %-os sóoldatot tartalmazó edénybe másodpercenként 10 L tiszta víz áramlik be. Mikor lesz a sóoldat koncentrációja 5 %-os, ha a keveredés azonnal megtörténik, és ugyanilyen sebességgel folyik ki az edényből a keverék?