

**10****Elsőrendű lineáris és másodrendű hiányos DE****Matematika G3 – Differenciálegyenletek****Utoljára frissítve: 2025. november 29.****10.1. Elméleti áttekintő****Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet**

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Ha  $q(x) \equiv 0$ , akkor az egyenlet homogén, egyébként inhomogén.

Az általános megoldás a homogén és inhomogén megoldás összegeként adódik:

- A homogén megoldást meghaphatjuk, ha megoldjuk az  $y' + p(x)y = 0$  egyenletet a tanult módszerek alapján.
- Az inhomogén megoldást konstans variálással kaphatjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a homogén megoldásban lévő konstanst  $x$ -től függőnek vesszük, majd megoldjuk az egyenletet.

**Hiányos másodrendű egyenletek**

Az  $y'' = f(x; y; y')$  hiányos, ha  $x, y$ , vagy  $y'$  hiányzik az egyenletből.

1.  $y'' = f(x) \rightarrow y$  és  $y'$  hiányos, kétszer integrálunk

2.  $y'' = f(x; y') \rightarrow p(x) = y'(x)$  helyettesítés,

így  $p$ -re elsőrendű

3.  $y'' = f(y; y') \rightarrow P(y) = y'$  helyettesítés,

ekkor  $y'' = \partial_y P \cdot y' = \partial_y P \cdot P$

így  $P$ -re elsőrendű, szeparábilis

## 10.2. Feladatok

1. Oldja meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket!

$$\begin{aligned} a) \quad & y' - \frac{y}{x} = x e^x, \\ b) \quad & y' + 2xy + x e^{-x^2} = 0, \\ c) \quad & y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \\ d) \quad & y' + y \cos x = \cos x \sin x, \\ e) \quad & y'(1+x^2) + 2xy = \tan x. \end{aligned}$$

2. 10 L vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be 2 L/min sebességgel. Az edényben a folyadék azonnal elkeveredik, majd ugyanilyen sebességgel kifolyik. Mennyi só lesz 5 min műlva az edényben?
3. Egy testet függőlegesen hajítunk lefelé  $v_0$  kezdeti sebességgel. Határozza meg a mozgás sebességének változását, amennyiben a testre csak a nehézségi erő hat, valamint a levegő fékezőereje a sebességgel egyenesen arányos!
4. Oldja meg a következő másodrendű, hiányos differenciálegyenleteket!

$$\begin{aligned} a) \quad & y'' = 6x + \sin x, \\ b) \quad & y''x^2 + \ln x = 1, \\ c) \quad & y'' - \frac{x}{x^2 - 1} y' = 0 \quad (x > 1), \\ d) \quad & y''(1+y^2) = y y'^2, \\ e) \quad & y''^2 - y' = 0, \\ f) \quad & y''y = 1 + y'^2. \end{aligned}$$