2 Mátrixok II

Matematika G2 – Lineáris Algebra

Utoljára frissítve: 2025. február 13.

2.1. Elméleti Áttekintő

A determináns és a lineáris függetlenség kapcsolata:

Definíció szerint a determináns értéke pontosan akkor zérus, ha a mátrix soraiból képzett sorvektorok, vagy oszlopaiból képzett oszlopvektorok lineárisan függőek.

Ha a determináns értéke nem zérus, akkor a vektorok lineárisan függetlenek.

Egy 3×3-as mátrix esetén például:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{array} \\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array}} \end{array} \right]. \end{array}$$

Ha $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{w}$ lineárisan függetlenek, akkor $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Korábban 3 vektor lineáris függetlenségét a vegyesszorzat segítségével vizsgáltuk. 3×3-as mátrixok esetén a vegyesszorzat értéke megegyezik a vektorokból alkotott mátrix determinánsával.

Sarrus-szabály:

3×3-as mátrixok determinánsát a Sarrus-szabály segítségével könnyedén meghatározhatjuk. A szabály nevét Pierre Frédéric Sarrus francia matematikusról kapta.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ - & - & - & & \end{array} \qquad \begin{aligned} \det \mathbf{A} = &+aei + bfg + cdh \\ &- gec - hfa - idb \end{aligned}$$

Definíció 2.1: Mátrix rangja

A mátrix rangjának nevezzük az oszlopvektorai közül a lineárisan függetlenek maximális számát.

Tétel 2.1: Mátrixok rangszámának tétele

Egy mátrix rangja megegyezik maximális el nem tűnő aldeterminánsának rendjével.

A mátrix rangja elemi mátrix átalakítások során nem változik:

- tetszőleges sorát vagy oszlopát egy 0-tól különböző számmal megszorozzuk,
- tetszőleges sorát vagy oszlopát felcseréljük,
- tetszőleges sorához vagy oszlopához egy másik tetszőleges sorát vagy oszlopát adjuk.

Ha egy kvadratikus (négyzetes) mátrix determinánsa nem zérus, akkor rangja maximális.

$$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n} \wedge \det \mathbf{A} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} \mathbf{A} = n$$

Egy $m \times n$-es mátrix rangja nem lehet nagyobb, mint az m és az n közül a kisebbik érték. Ha a mátrix rangja maximális, akkor az m és az n közül a kisebbik érték a rang.

$$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} \mathbf{A} \leq \min\{\, m; n \,\}$$

Csak a nullmátrixnak lehet 0 rangja.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix rangját a definíció segítségével!

Vizsgáljuk meg, hogy oszlopvektorai lineárisan függetlenek-e, vagyis határozzuk meg a mátrix determinánsát:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 = -12.$$

Mivel a determináns értéke nem zérus, az $\mathbf{A}$ mátrix rangja maximális, azaz $\operatorname{rg} \mathbf{A} = 3$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix rangját a tétel segítségével!

A mátrix rangja a legnagyobb el nem tűnő alderermináns rendje:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & &\rightarrow & \det \mathbf{A}_1 &= 1, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & &\rightarrow & \det \mathbf{A}_2 &= 1\cdot 2 - 3\cdot 2 = -4, \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & &\rightarrow & \det \mathbf{A}_3 &= \cdots = -12. \end{aligned}$$

Mivel a legnagyobb el nem tűnő aldeterminány rendje 3, ezért az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 3.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix rangját elemi átalakítások segítségével!

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\mathbf{A} &= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-3S_1) \\ (-2S_1) \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \div(-4) \\ \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2S_2) \\ \\ (+3S_2) \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \div 3 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (+S_3) \\ (-2S_3) \\ \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3
\end{aligned}$$

Definíció 2.2: Reguláris és szinguláris mátrix

Egy kvadratikus mátrixot **regulárisnak** mondunk, ha determinánsa nem zérus.

Ha a kvadratikus mátrix determinánsa 0, **szinguláris** mátrixról beszélünk.

Definíció 2.3: Mátrix inverze

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix inverzét az $\mathbf{A}^{-1}$ jelöli, és az a mátrix, melyre $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{E}$ teljesül.

Egy szinguláris mátrixnak nem létezik inverze.

Reguláris mátrix inverze egyértelmű. Ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, akkor

$$\mathbf{A}^{-1} := \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}}.$$

Egy 2×2-es mátrix adjungáltja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

A mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

A mátrix adjungáltja:

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján az $\mathbf{A}$ mátrix inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Egy 3×3-as mátrix adjungáltja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

3×3-as mátrix adjungáltjának felírásához érdemes először a transzponáltját felírni, például:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\intercal} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Az adjungált i-edik sorában és j-edik oszlopában elhelyezkező α_{ij} elemét a letakarós módszer segítségével határozhatjuk meg.

Az adjungált első sorának elemei:

$$\begin{vmatrix} {}^{+}a_{11} & {}^{-}a_{21} & {}^{+}a_{31} \\ {}^{-}a_{12} & {}^{+}a_{22} & {}^{-}a_{32} \\ {}^{+}a_{13} & {}^{-}a_{23} & {}^{+}a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} {}^{+}a_{11} & {}^{-}a_{21} & {}^{+}a_{31} \\ {}^{-}a_{12} & {}^{+}a_{22} & {}^{-}a_{32} \\ {}^{+}a_{13} & {}^{-}a_{23} & {}^{+}a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} {}^{+}a_{11} & {}^{-}a_{21} & {}^{+}a_{31} \\ {}^{-}a_{12} & {}^{+}a_{22} & {}^{-}a_{32} \\ {}^{+}a_{13} & {}^{-}a_{23} & {}^{+}a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \alpha_{12} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \alpha_{13} = +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

A többi elem hasonló módszerrel számolható.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

A mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 \cdot 5 \cdot 1 - 8 \cdot 2 \cdot 3 = -2.$$

A mátrix transzponáltja:

$$\mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

A mátrix adjungáltja:

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

A mátrix inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 7/2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverz meghatározása Gauss-Jordan eliminációval:

Egy **A** reguláris mátrix inverzés Gauss-Jordan eliminációval is meghatározhatjuk. A módszer során az $(\mathbf{A}|\mathbb{E})$ mátrixot sorműveletek segítségével olyan módon alakítjuk át, hogy ahol eredetileg **A** állt, ott az egységmátrix jelenjen meg. Az átalakított mátrix másik felében az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix fog szerepelni.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] (-3S_1)$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \div(-2)$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right] (-2S_2)$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

2.2. Feladatok

1. Egy síkon vannak-e az $A(2,3,-4)$, $B(3,-1,-6)$, $C(-1,5,2)$ és $D(2,1,-4)$ pontok?

2. Számolja ki azalábbi mátrixok determinánsát Sarrus-szabállyal!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \\ 7 & 9 & -8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Adja meg az azalábbi mátrixok rangját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Vizsgálja az **A** mátrix rangját x függvényében!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ x & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Milyen k érték esetén lesz invertálható az alábbi mátrix?

$$\begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{bmatrix}$$

7. Határozza meg az ismeretlenekeket az alábbi mátrixegyenletben!

$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ -3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & y \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 8 \\ w & 3 \end{bmatrix}$$

8. Adottak az **A**, **B** és **C** mátrixok. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{C} = 2\mathbf{B}\mathbf{C}\boldsymbol{x}$$

9. Számítsa ki az alábbi, komplex elemű mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$$