

**8**  
MO

## Bevezetés

Matematika G3 – Differenciálegyenletek

Utoljára frissítve: 2025. október 26.

### 8.1. Differenciálegyenletek osztályozása

Egyenlet	Megadási mód	Rend	Lineáris?
a) $y' = \cosh x - 3xy$	Explicit	1	lineáris
b) $y'' = y'^2 \cos x$	Explicit	2	nem lineáris
c) $(1 + y^{(IV)})^2 - y'' = x^3 y''' + xy$	Implicit	4	nem lineáris
d) $y'' = e^y \ln x$	Explicit	2	nem lineáris

### 8.2. Izoklinák és vonalelemek

1.  $y' = y/x \quad x > 0$

**Izoklinák:**  $y/x = c \implies y = cx$  – origón áthaladó egyenesek

**Vonalelemek:**  $y' = y/x = cx/x = c$  – állandó meredekségű egyenesek

**Megoldásgörbék:**  $y = Cx$  – origón áthaladó egyenesek

2.  $y' = -x/y \quad y < 0$

**Izoklinák:**  $-x/y = c \implies y = -x/c$  – origón áthaladó egyenesek

**Vonalelemek:**  $y' = -x/y = c$  – állandó meredekségű egyenesek

**Megoldásgörbék:**  $x^2 + y^2 = C$  – origó középpontú félkörök

### 8.3. Megoldás-e I

Az  $(y')^4 + y^2 = -1$  differenciálegyenlet megoldása-e az  $y = x^2 - 1$  függvény?

Az első derivált:

$$y' = 2x.$$

Helyettesítsük be a differenciálegyenletbe:

$$(y')^4 + y^2 = (2x)^4 + (x^2 - 1)^2 = 16x^4 + (x^4 - 2x^2 + 1) = 17x^4 - 2x^2 + 1.$$

Mivel ez a kifejezés nem egyenlő  $-1$ -gyel minden  $x$  értékre, ezért a megadott függvény **nem** megoldása a differenciálegyenletnek.

## 8.4. Megoldás-e II

Megoldása-e az  $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$  függvény az  $y'' + 4y = 0$  differenciálegyenletnek?

Az első és második derivált:

$$\begin{aligned} y' &= 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x, \\ y'' &= -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy  $y'' = -4y$ , tehát

$$y'' + 4y = -4y + 4y = 0,$$

tehát a megadott függvény valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

## 8.5. Megoldás-e III

Megoldása-e az  $y = \ln x$  függvény az  $xy'' + y' = 0$  differenciálegyenletnek?

Az első és második derivált:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x}, \\ y'' &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Helyettesítsük be a differenciálegyenletbe:

$$xy'' + y' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0,$$

tehát a megadott függvény valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

## 8.6. Cauchy-feladat I

Adja meg az  $y'' + 4y = 0$  differenciálegyenlet  $y(0) = 0$  és  $y'(0) = 1$  kezdeti feltételek melletti megoldását!

Az általános megoldás és annak első deriváltja:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \\ y' &= 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x. \end{aligned}$$

Az első egyenletből:

$$y(0) = C_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} = C_2 = 0.$$

A második egyenletből:

$$y'(0) = 2C_1 \underbrace{\cos 0}_{=1} - 2 \cdot 0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 2C_1 = 1 \implies C_1 = \frac{1}{2}.$$

Tehát a keresett megoldás:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

## 8.7. Cauchy-feladat II

Adja meg az  $y'' + 4y = 0$  differenciálegyenlet  $y(0) = 1$  és  $y'(\pi/4) = 2$  kezdeti feltételek mellett megoldását!

Az általános megoldás és annak első deriváltja:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \\ y' &= 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x. \end{aligned}$$

Az első egyenletből:

$$y(0) = C_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} = C_2 = 1.$$

A második egyenletből:

$$y'(\pi/4) = 2C_1 \underbrace{\cos \pi/2}_{=0} - 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin \pi/2}_{=1} = -2 \neq 2.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a megadott kezdeti feltételek mellett nincs megoldás.

## 8.8. Görbeseregek differenciálegyenletei

$$1. \quad y = cx^2:$$

Deriváljuk az egyenletet, és fejezzük ki a  $c$  konstansot:

$$y' = 2cx \quad \text{és} \quad c = \frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = 2\frac{y}{x}.$$

$$2. \quad x^2 + y^2 = cx:$$

Deriváljuk az egyenletet implicit módon:

$$2x + 2yy' = c.$$

Helyettesítsük be az eredeti egyenletbe  $c$ -t:

$$x^2 + y^2 = 2x^2 + 2yy'x \quad \Rightarrow \quad 2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

$$3. \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}:$$

Számítsuk ki az első deriváltat:

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}.$$

Számítsuk ki  $y' - y$  különbséget:

$$y' - y = (c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}) - (c_1 e^x + c_2 e^{2x}) = c_2 e^{2x} \quad \Rightarrow \quad c_2 = e^{-2x}(y' - y).$$

A kapott konstanst helyettesítsük be az eredeti egyenletbe:

$$y = c_1 e^x + e^{-2x} (y' - y) e^{2x} = c_1 e^x + y' - y \implies c_1 = e^{-x} (2y - y').$$

Most számítsuk ki a második deriváltat is, és helyettesítsük be a konstansokat:

$$\begin{aligned} y'' &= c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} \\ &= e^{-x} (2y - y') e^x + 4e^{-2x} (y' - y) e^{2x} \\ &= 2y - y' + 4y' - 4y \\ &= -2y + 3y'. \end{aligned}$$

Végül rendezzük az egyenletet:

$$y'' + 2y - 3y' = 0.$$

## 8.9. Körök differenciálegyenlete

Adja meg az olyan  $xy$  síkban elhelyezkedő körök differenciálegyenletét, amelyek az  $x$ -tengelyt az origóban érintik!

Az ilyen körök egyenlete:

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

Deriváljuk az egyenletet implicit módon:

$$2x + 2(y - r)y' = 0 \implies 2x + 2yy' - 2ry' = 0 \implies r = \frac{x}{y'} + y$$

Helyettesítsük be az eredeti egyenletbe  $r$ -t:

$$x^2 + \left(t - \frac{x}{y'} + y\right)^2 = \left(\frac{x}{y'} + y\right)^2.$$