

4

Numerikus sorozatok I

Matematika G1 – Sorozatok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 10.

4.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 4.1: Sorozat

A pozitív egész számok halmazán értelmezett $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **valós számsorozatnak** hívjuk.

Az $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt **komplex számsorozatnak** nevezzük.

Definíció 4.2: Konvergencia

Az (a_n) sorozatot konvergensnek mondjuk, ha $\exists a \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölése:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ ahol } a \text{ a sorozat határértéke.}$$

Definíció 4.3: Divergencia

Az (a_n) sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

Definíció 4.4: Torlódási pont

Az (a_n) sorozatnak torlódási pontja van az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha az a tetszőlegesen kicsiny környezete a sorozat véges sok elemét tartalmazza.

A sorozat határértéke egyben torlódási pont is, viszont egy torlódási pont nem feltétlenül határérték. Pl.: $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja is van (-1 és 1), viszont egyik sem határérték, hiszen a sorozat divergens.

Definíció 4.5: Sorozat korlátossága

Az (a_n) -t **alulról korlátosnak** nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n > k$, vagyis értékkészlete alulról korlátos.

Az (a_n) -t **felülről korlátosnak** nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n < K$, vagyis értékkészlete felülről korlátos.

Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Definíció 4.6: Sorozat monotonitása

Az (a_n) sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha $a_n \geq a_{n-1}$,
- monoton csökkenő, ha $a_n \leq a_{n-1}$,
- szigorúan monoton növekvő, ha $a_n > a_{n-1}$,
- szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n < a_{n-1}$.

Konvergens sorozat mindig korlátos.

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

Nevezetes határértékek:

- $a^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens,} & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
- $a^n \cdot n^k \rightarrow 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
- $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$
- $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \rightarrow e^r$

Dominancia elv:

$$\log_n a < \sqrt[n]{a} < \log_a n < \sqrt[n]{n} < n < n^a < a^n < n! < n^n$$

A dominancia elvet olyan esetekben érdemes használnunk, amikor egy

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}$$

alakú sorozat határértékét keressük, hiszen segítségével megállapíthatjuk, hogy a nevező vagy a számláló fog gyorsabban nőni.

Tétel 4.1: Rendőrelv

Tegyük fel, hogy (a_n) , (b_n) és (x_n) sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq x_n \leq b_n : \forall n$ -re vagy $n > N_0$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, \text{ ekkor } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

4.2. Feladatok

1. A konvergencia definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e.

a) $a_n = \left| \frac{n+1}{3n-8} \right|$

b) $b_n = \frac{n \cdot (-1)^n - 1}{2n}$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \frac{n^2 - 6n + 7}{n^2 + 12n + 49}$

b) $b_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2}$

c) $c_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

d) $d_n = \frac{\sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{5n^6 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3}} + \frac{n!}{(n+1)! + 3^{2n}}$

e) $e_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

f) $f_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$

3. Igazolja a rendőrelv segítségével, hogy $\frac{n}{3^n} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

4. Határozza meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n^2 - 30n - 21}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos n^3}{2n} - \frac{3n}{6n+1} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\ln n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n+5}$

5. Bizonyítsa be, hogy bármely $k \geq 0$ egész számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k.$$