definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Integrálszámítás BMETE94BG01 12

Matematika G1

Integrálszámítás III

Utoljára frissítve: 2024. november 18.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Trigonometrikus integrálás**:

Trigonometrikus függvények integrálásakor a tanult trigonometrikus azonosságokat kell alkalmaznunk. Ezek közül a legfontosabbak: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$,
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$,
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$,
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páros, akkor a függvényt a fenti trigonometrikus azonosságok segítségével át tudjuk alakítani.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páratlan $(2k+1)$, akkor azt felbontjuk egy $2k$-s és egy 1-es szögfüggvény szorzataként, majd a már páros fokszámú tagot az előbbi módszerrel tudjuk integrálni.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Határozott integrál**:

Egy függvény $[a;b]$ intervallumon vett határozott integrálja a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_a^b f(x)x = F(b) - F(a),$$

ahol $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye.

[style=note, nobreak=true,] A határozott integrálás során a határozatlan integrálásnál tanult összefüggéseket alkalmazhatjuk. Azonban két integrálási technikánál különösen figyelnünk kell az integrálási tartományra:

- Parciális integrálás: $\displaystyle\int_a^b fg' = \Big[f\,g\Big]_a^b - \int_a^b f'g$,

- Helyettesítéses integrálás: $\int_a^b f(x)x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)t$.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Görbe alatti terület**:

A határozott integrál segítségével a függvény görbéje és az x-tengely által bezárt **előjeles** területet tudjuk meghatározni. Amennyiben a függvény képe a tengely alatt van, akkor a terület negatív előjelű lesz.

[thick] [opacity=0, name path=x] (1,0) – (3,0);
[samples=150, smooth, domain=1:3, ultra thick, draw=primaryColor, name path=f] plot (, (sin(*240)/4+)/2 + 1) ;
[of=f and x, on layer=main,]primaryColor!25
[->, draw=ternaryColor] (-.5,0) – (5,0) node [below left] x; [->, draw=ternaryColor] (0,-.5) – (0,3) node [below left] y;
[samples=150, domain=-.5:4, ultra thick, draw=primaryColor, to-to] plot (, (sin(*240)/4+)/2 + 1) ;
[draw=gray, dashed, thick] (1,2.75) – ++(0,-2.75) node[below] a;
[draw=gray, dashed, thick] (3,2.75) – ++(0,-2.75) node[below] b;
at (2,1) A;

$$A = \int_a^b f(x)x$$

[thick] [opacity=0, name path=x] (1,0) – (3,0);
[samples=150, smooth, domain=1:3, ultra thick, draw=primaryColor, name path=f] plot (, (- 1)*(- 2)*(- 3)*1.5) ;
[of=f and x, split, every segment no 0/.style=primaryColor!25, every segment no 1/.style=secondaryColor!25, on layer=main,]
[->, draw=ternaryColor, thick] (-.5,0) – (5,0) node [below left] x; [->, draw=ternaryColor, thick] (0,-1.5) – (0,2) node [below left] y;
[samples=150, smooth, domain=0.75:3.25, ultra thick, draw=primaryColor, to-to] plot (, (- 1)*(- 2)*(- 3)*1.5) ;
[above left] at (1,0) a; [above right] at (2,0) c; [below right] at (3,0) b;

$$A = \int_a^c f(x)x - \int_c^b f(x)x$$

[style=blueBox, nobreak=true,]

Két görbe által bezárt terület:

Két függvény által bezárt területet a két függvény különbségének integrálásával tudjuk meghatározni:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|x.$$

[thick] [->, draw=t
(-.5,0) – (5,0) node
[->, draw=ternaryC
(0,3) node [belo
[samples=150, sm
path=f, domain=1:
draw=primaryCo
(sin(*240)/4+)
[samples=150, sm
path=g, domain=1:
draw=primaryCo
(cos(*240)/6
[of=f and g, on l
]primaryCo
[samples=150
domain=-.5:4, u
draw=primaryCo
(sin(*240)/4+)/2 +
$f(x)$;
[samples=150
domain=-.5:4, u
draw=primaryCo
(cos(*240)/6+)/2)
$g(x)$;
[draw=gray, das
(1,2.75) – ++(0,-2.7
a; [draw=gray, da
(3,2.75) – ++(0,-2.7
b;
at (2,1.5)

[style=blueBox, nobreak=true,] **Paraméteres görbe által meghatározott görbevonalú trapéz terület**:

Egy $\gamma : (x(t); y(t))$ görbe t_1 és t_2 paraméterpontok közötti görbevonalú trapéz területe

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| \, t.$$

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg a ciklois egy $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz területét!

A ciklois paraméteres egyenlete:

$$x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t.$$

[opacity=0, name path=x] (0,0) – (4,0); [samples=150, smooth, name path=f, domain=0:2*pi, ultra thick, draw=primaryColor] plot (1/2 * (- sin(deg())), 1/2 * (1 - cos(deg()))) ; [of=f and x, on layer=main,]primaryColor!25
[-to, draw=ternaryColor, thick] (-.5,0) – (5,0) node [below left] x; [-to, draw=ternaryColor, thick] (0,-.5) – (0,2) node [below left] y;
[samples=150, domain=-1.5:9, ultra thick, draw=primaryColor, to-to, smooth] plot (1/2 * (- sin(deg())), 1/2 * (1 - cos(deg()))) ;
at (1.57079633,.45) A;

$$A = \int_0^{2\pi} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| \, t = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 t = \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t t = \ldots = 3\pi$$

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi trigonometrikus integrálok értékét!
    a) $\int \cos^3 x \sin x x$
    b) $\int \cos^5 x x$
    c) $\int \sin^4 x \cos^2 x x$
2. Oldja meg az alábbi összetett integrálási feladatokat!
    a) $\int \sin \sqrt{x} x$
    b) $\int \frac{\ln \ln x}{x} x$
    c) $\int |x| x$
    d) $\int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1} x$
    e) $\int (x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1} x$
3. Határozzuk meg az alábbi határozott integrálok értékét!
    a) $\int_0^{2\pi} \cos x x$
    b) $\int_0^1 x \sinh x x$
    c) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} x$
4. Határozza meg az $f(x) = (x + 1)\, x\, (x - 2)$ függvény és az x-tengely által bezárt geometriai területet!
5. Adja meg az $f(x) = x^4$ és a $g(x) = 3x^2 - 2$ függvények által bezárt terület nagyságát!
6. Adja meg egy a sugarú körvonal ($x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$) alapján a $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz területét!