10 Többváltozós függvények

Matematika G2 – Többváltozós analízis
Utoljára frissítve: 2025. április 14.

10.1. Elméleti Áttekintő

Többváltozós függvények jelölése:

Legyen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény. Ekkor a függvény az alábbi formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{f}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{bmatrix},$$

ahol az $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in \{1; 2; \dots; k\}$ függvényeket komponensfüggvényeknek nevezzük.

Speciális elnevezések:

- $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ vektor-vektor függvény,
- $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vektor-skalár függvény,
- $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ skalár-vektor függvény.

Definíció 10.1: Gömbkörnyezet

Legyen $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a $\boldsymbol{p}$ pont ε sugarú nyílt környezetén (gömbkörnyezetén) a

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}| < \varepsilon\} \text{ halmazt értjük.}$$

Definíció 10.2: Többváltozós függvény határértéke

Tekintsük az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezést. Azt mondjuk, hogy az f határértéke $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k$, ha az $\boldsymbol{A}$ tetszőleg $\varepsilon > 0$ sugarú gömbkörnyezetéhez létezik az $\boldsymbol{a}$-nak olyan $\delta(\varepsilon)$ sugarú gömbkörnyezete, hogy

$$\boldsymbol{x} \in B_{\delta(\varepsilon)}(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in B_\varepsilon(\boldsymbol{A}).$$

Tétel 10.1: Az átviteli elv általánosítása

Az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény határértéke az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban akkor és csak akkor $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k$, ha $\forall \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ sorozat esetén $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{A}$.

Definíció 10.3: Iránymenti derivált

Legyen $I \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és legyen adva egy $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az f függvény $\boldsymbol{a}$ pontbeli $\boldsymbol{v}$ irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük. Jele:

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda}.$$

Amennyiben $\boldsymbol{v}$ az n-dimenziós téren az i-edik irányba mutat, akkor azt parciális deriváltnak nevezzük, jelölései:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \partial_i f(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_i} f(\boldsymbol{x}) = f'_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda}.$$

Adjuk meg az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény parciális deriváltjait az $P(1; 2)$ pontban!

Először határozzuk meg a parciális deriváltakat parametrikusan, majd számoljuk ki a $P(1; 2)$ pontbeli értékeket:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\right|_P = 3 + 20 + 12 + 5 = 40,$$
$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 5x^2 + 6xy - 36y^2 - 6 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right|_P = 5 + 12 - 144 - 6 = -133.$$

Definíció 10.4: Gradiens

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Az f függvény $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ pontbeli gradiensén az alábbi oszlopvektort értjük:

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\boldsymbol{a}) \\ \partial_2 f(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \right)^{\mathsf{T}}$$

A gyakrolatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v},$$

ahol $\boldsymbol{v}$ egységvektor!

10.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények határértékét az origóban!

$$f(x;y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2>0\\ 0 & \text{ha } x^2+y^2=0\end{cases}\qquad g(x;y)=\frac{x-y}{x+y}$$

2. Határozza meg az alábbi határértéket!

   a) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}} \frac{xy-1}{y+1}$

   b) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{x+y+2z}{x-z+xy}$

3. Határozza meg az alábbi függvények origóban lévő határértékeit

   a) $f(x;y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, 4cm ha egy $x=r_n\cos\varphi_n$, $y=r_n\sin\varphi_n$, $r_n\to\infty$,

   b) $g(x;y)=\frac{x^3y}{x^6+y^2}$, 4cm ha egy $y=mx^k$ görbe mentén közelítjük az origót.

4. Határozza meg az alábbi határértékeket!

   a) $\lim\limits_{(x;y)\to(\infty;\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

   b) $\lim\limits_{(x;y)\to(\infty;\infty)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

   c) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;\infty)} x\cos^2 y$

   d) $\lim\limits_{(x;y)\to(\infty;0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$

5. Definíció alaján határozza meg az $f(x;y)=x^2-2xy-4y^2$ függvény deriváltját a $P(1;-1)$ pontban a $\boldsymbol{v}(1;-1)$ irány mentén!

6. Határozza meg az alábbi függvények parciális deriváltjait!

   a) $f(x;y)=x^3-5x^2y+3xy^2-12y^3+5x-6y+7$

   b) $g(x;y)=x^y$

   c) $h(x;y)=e^{x^2y}-2x^2y^3\sin(\ln x+y)$

7. Határozza meg az alábbi függvények gradiensét a megadott pontokban!

   a) $f(x;y)=\ln(x+y)$ 7cm $P_a(-2;3)$

   b) $g(x;y;z)=z-\sqrt{x^2+y^2}$ 7cm $P_b(3;-4;7)$

8. Határozza meg azon pontoknak a halmazát amelyen az f függvény gradiense nullvektor!

$$f(x;y)=3x^2-4xy+2x+y^2+1$$