9 Elsőrendű és szétválasztható DE

Matematika G3 – Differenciálegyenletek
Utoljára frissítve: 2025. november 01.

9.1. Elméleti áttekintő

Definíció 9.1 : Lipschitz-feltétel

Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre azt monjuk, hogy a D tartományon az y változóra nézve kielégíti a Lipschitz-feltételt, ha $\exists M \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall\ (x; y_1)$ és $(x; y_2)$ esetén

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq M\,|y_1 - y_2|\,.$$

Tétel 9.1 : Picard-Lindelöf-tétel

Legyen $y' = f(x, y)$ adott és $D = I_1 \times I_2$, ahol I_1 és I_2 nyílt intervallumok, $(x_0; y_0) \in D$. Tegyük fel hogy:

- f mindkét változójában folytonos D-n,
- f kielégíti a Lipschitz-feltételt az y változójára nézve.

Ekkor az $y' = f(x; y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel ellátott differenciálegyenletnek $\exists!$ megoldása, azaz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\varphi : (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$-re teljesül, hogy $\varphi'(x) = f\,(x; \varphi(x))$ és $\forall x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ esetén $\varphi(x_0) = y_0$.

Tétel 9.2 : Szukcesszív approximáció

Ha az $y' = f(x; y)$ differenciálegyenletben lévő f függvényre teljesül, hogy $|x - x_0| < a \leq \infty$ és $|y - y_0| < b \leq \infty$ tartományon korlátos és folytonos, továbbá eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, akkor a

$$y_{n+1} := \underbrace{y(x_0)}_{y_0} + \int_{x_0}^{x} f\,(t; y_n(t))\,\mathrm{d}t$$

függvénysorozat $n \to \infty$ esetén az $y' = f(x; y)$, $y(x_0) = y_0$ differenciálegyenlet megoldásához konvergál az $|x - x_0| < \min\{a; b/M\}$ intervallumon.

Oldjuk meg az $y'(x) = x + y(x)$, $y_0 = 0$ Cauchy-feladatot szukcesszív approximációval!

Az iteráció során használt összefüggés:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_0}^{x} f\,(t; y_n(t))\,\mathrm{d}t = 0 + \int_{0}^{x} (t + y_n(t))\,\mathrm{d}t.$$

Számítsuk ki az első pár iterációt:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0,\\
y_1(x) &= \int_0^x (t+0)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2},\\
y_2(x) &= \int_0^x \left(t+\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},\\
y_3(x) &= \int_0^x \left(t+\frac{t^3}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24},\\
y_4(x) &= \int_0^x \left(t+\frac{t^4}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120},\\
&\vdots\\
y_n(x) &= -1-x+\underbrace{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots}_{\to e^x} = e^x-1-x.
\end{aligned}$$

Definíció 9.2 : Szeparábilis differenciálegyenlet megoldása

$$y' = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$y' = f(ax+by+c)$ típusú differenciálegyenlet megoldása

Éljünk az $f(u)$ helyettesítéssel, ahol $u(x) = ax+by+c$, ennek deriváltja pedig $u' = a+by' = a+bf(u)$. Ekkor a differenciálegyenlet az alábbi alakra redukálódik:

$$\frac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)} = \mathrm{d}x,$$

amelyet integrálással már meg tudunk oldani.

Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = \exp(2x+3y-1)$$

Éljünk az $u(x) = 2x+3y-1$ helyettesítéssel, ennek deriváltja $u' = 2+3y' = 2+3e^u$. A kapott differenciálegyenlet már integrálással megoldható:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{2+3e^u} = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^u}{2+3e^u}\right) = x+K \quad \Rightarrow \quad \frac{e^u}{2+3e^u} = Ce^{2x}.$$

Visszahelyettesítve u-t, majd átrendezve:

$$\frac{e^{2x+3y-1}}{2+3e^{2x+3y-1}} = Ce^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}\left(1+\ln\frac{C}{1-Ce^{2x}}\right).$$

Newton lehűlési törvénye

A Newton-féle lehűlési törvény azt írja le, hogyan változik egy test hőmérséklete az időben, ha a környezetével hőcserében van. A modell feltevése, hogy a hőmérsékletváltozás sebessége arányos a test és a környezet hőmérsékletének különbségével. Ha a környezet hőmérséklete x_k, a test hőmérséklete pedig $x(t)$, akkor az arányosság miatt a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{x} = \alpha(x - x_k).$$

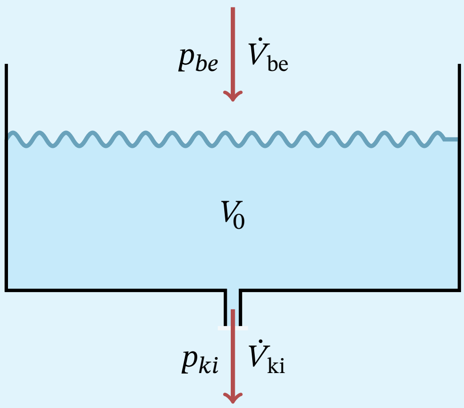
A differenciálegyenlet szétválaszható, így az alábbi megoldáshoz jutunk:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - x_k} = \alpha\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_k + C \cdot e^{\alpha t},$$

ahol C a kezdeti feltételből határozható meg.

Általános keverési feladat

Az általános keverési feladat tipikusan olyan helyzetet modellez, amikor egy tartályban lévő oldat koncentrációja az időben változik, mivel az oldatba új anyag áramlik be, illetve ugyanakkor oldat hagyja el a tartályt. A mennyiségi változásokat a koncentráció (p), illetve az oldat mennyisége (V) írja le. Feltesszük, hogy a tartályban a keverés tökéletes, tehát a koncentráció minden pillanatban egyenletes a térfogat teljes terében.



Ha a bejövő és a kiáramló anyagmennyiség megegyezik ($\dot{V}_{\mathrm{be}} = \dot{V}_{\mathrm{ki}} = \dot{V}_{\mathrm{e}} \in \mathbb{R}$), akkor:

$$x_{\mathrm{be}} = \dot{V}_{\mathrm{e}} \cdot p_{\mathrm{be}} \qquad x_{\mathrm{ki}}(t) = \frac{\dot{V}_{\mathrm{e}}}{V_0}\, x(t)$$

$$\dot{x}(t) = x_{\mathrm{be}} - x_{\mathrm{ki}}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x_{\mathrm{be}} - x_{\mathrm{ki}}(t)} = \mathrm{d}t$$

Ha a bejövő és a kiáramló anyagmennyiség nem egyezik meg, azaz $\dot{V}_{\mathrm{be}} \neq \dot{V}_{\mathrm{ki}}$, ekkor:

$$x_{\mathrm{ki}}(t) = \frac{\dot{V}_{\mathrm{ki}}}{V_0 + (\dot{V}_{\mathrm{be}} - \dot{V}_{\mathrm{ki}})t}\, x(t)$$

A keverési folyamat viselkedése mindkét esetben exponenciális közelítést mutat egy egyensúlyi koncentráció felé, hasonlóan a Newton-féle lehűlési törvényhez.

9.2. Feladatok

1. Adja meg az $y' = 3y^{2/3}$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel melletti megoldását! Vizsgálja meg a megoldás egyértelműségét!

2. Adja meg azt a tértartományt, ahol az $y' = x^2 + y^2$ differenciálegyenlet megoldása egyértelmű!

3. Adja meg azt a tértartományt, ahol az $y'' = y + 3\sqrt{y} + e^{y'}$ differenciálegyenlet megoldása egyértelmű!

4. Számítsa ki az $y' = y$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első négy közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$!

5. Számítsa ki az $y' = xy$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első négy közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$!

6. Oldja meg a következő szétválasztható differenciálegyenleteket!

$$
\begin{array}{lll}
a) & (2x+1)y' - 3y = 0, & \\
b) & \sqrt{1+x^2}\,y' - \sqrt{1-y^2} = 0, & \\
c) & y' = \dfrac{1-x-y}{2x-2y-3}, & \\
d) & xy' = y(1 + \ln x - \ln y), & \\
e) & 2xyy' = x^2 + y^2, & \\
f) & y' = \dfrac{3x^2+4x+2}{2y-2}, & y(0) = -1, \\
g) & xy' = x \cdot e^{y/x} + y, & y(1) = 0.
\end{array}
$$

7. Adja meg azon görbét, amelynek bármely pontjában az érintő a a koordináta-tengelyek közé eső részét az adott pontban felezi!

8. Newton-törvénye értelmében ismert, hogy egy test hőmérsékletének változása a környezet hőmérsékletével való különbséggel arányos. Egy kenyeret a $t = 0$ időpillanatban kiveszünk a 200 °C-os sütőből, majd hűlni hagyjuk. 20 perc után 60 °C-ra hűl le. Mennyi idő múlva éri el a kenyér hőmérséklete a 30 °C-ot, ha a környezet hőmérséklete 20 °C?

9. 100 kg 10 %-os sóoldatot tartalmazó edénybe másodpercenként 10 L tiszta víz áramlik be. Mikor lesz a sóoldat koncentrációja 5 %-os, ha a keveredés azonnal megtörténik, és ugyanilyen sebességgel folyik ki az edényből a keverék?