

1

Mátrixok I

Matematika G2 – Lineáris Algebra**Utoljára frissítve: 2025. február 09.**

1.1. Elméleti Áttekintő

Az előző félévben az \mathbb{R}^n -et, az n -dimenziós oszlopvektorok vektorterét vizsgáltuk. Idén egy általánosabb vektor fogalmat vezetünk be.

A félév elején átismételjük azokat a fogalmakat, amelyeket már az előző félévben az \mathbb{R}^n kontextusában megismertünk. Szó lesz például lineáris kombinációkról, lineáris függetlenségről. Ezeket a fogalmakat eredetileg az \mathbb{R}^n vektortér keretein belül vezettük be, most azonban látni fogjuk, hogy valójában tetszőleges vektortérre alkalmazhatóak.

Definíció 1.1: Abel-csoport

Legyen G nemüres halmaz, és \circ egy művelet. Ekkor a $(G; \circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\forall a; b; c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (asszociativitás)
2. $\exists e \in G : \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$, (egységelem)
3. $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. (inverzelem)
4. $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$ (kommutativitás)

Definíció 1.2: Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és \circ , $+$ két művelet, T test. A $(V; +, \circ)$ a T test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V; +)$ Abel-csoport,
2. $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda \circ \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ (\mu \circ \mathbf{x})$,
3. ha ε a T -beli egységelem, akkor $\forall \mathbf{x} \in V : \varepsilon \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
4. teljesül a disztributivitás:
 - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : \lambda \circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \circ \mathbf{x} + \lambda \circ \mathbf{y}$,
 - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda + \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ \mathbf{x} + \mu \circ \mathbf{x}$.

A $(\mathbb{R}^3; +, \lambda)$ vektortér, ahol $+$ az összeadás, λ pedig a skalárral való szorzást jelöli.

A legfeljebb n -edfokú polinomok a skalárral való szorzásra és az összeadásra vektorteret alkotnak.

Definíció 1.3: Lineáris függetlenség

A $(V; +; \lambda)$ vektortér $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorait lineárisan függetlennek mondjuk, ha a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

vektoregyenletnek **csak a triviális megoldása** létezik, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ha az egyenletnek nem csak a triviális megoldása létezik, akkor a vektorok lineárisan függők.

Definíció 1.4: Altér

Legyen $(V; +; \lambda) \mathbb{R}$ feletti vektortér, valamint $\emptyset \neq L \subset V$. L -t altérnek nevezzük a V -ben, ha $(L; +; \lambda)$ ugyancsak vektortér.

$(\mathbb{R}^3; +; \lambda)$ altere az olyan vektorok halmaza, amelyek első koordinátája 0.

A polinomok vektorterének altere a legfeljebb n -edfokú polinomok vektortere.

Definíció 1.5: Generátorrendszer

Legyen V vektortér, valamint $\emptyset \neq G \subset V$. G által generált altérnek nevezzük azt a legszűkebb alteret, amely tartalmazza G -t. Jele: $\mathcal{L}(G)$.

G generátorrendszere V -nek, ha $\mathcal{L}(G) = V$.

Az \mathbb{R}^3 vektortér generátorrendszere például:

$$\{(1; 0; 0); (1; 1; 0); (0; 1; 1); (0; 0; 1)\}.$$

A legfeljebb másodfokú polinomok vektortérénak generátorrendszere például:

$$\{1; 1+x; x+x^2; x^2\}.$$

Definíció 1.6: Bázis

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V bázisának nevezzük.

Az \mathbb{R}^3 vektortér bázisa például:

$$\{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}.$$

A legfeljebb másodfokú polinomok vektortérénak bázisa például:

$$\{1; x; x^2\}.$$

Definíció 1.7: Vektortér dimenziója

Végesen generált vektortér dimenziójának a bázisainak közös tagszámát értjük.

Definíció 1.8: Mátrix

Egy mátrix vízszintes vonalban elhelyezkedő elemei **sorokat**, míg függőlegesen elhelyezkedő elemei **oszlopokat** alkotnak.

Egy m sorból és n oszloból álló mátrix jelölése:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mátrixok jelölése nyomtatott szövegben: **A**.

Mátrixok jelölése írásban: A.

Az $m \times n$ -es mátrixok halmazának jelölései: $\mathcal{M}_{m \times n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m \times n}$.

A mátrix i -edik sorában és j -edik oszlopában található elemet a_{ij} -vel jelöljük.

A mátrix dimenzióit minden először a sorok számával, majd azt követően az oszlopok számával adják meg.

Definíció 1.9: Mátrix transzponáltja

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix transzponáltja a főátlójára vett tükröképe. Jele: $\mathbf{A}^\top \in \mathcal{M}_{n \times m}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3} \Rightarrow \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$$

Két vektor skaláris szorzatának gyakori jelölései:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}; \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}.$$

Speciális mátrixstruktúrák:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1} \sim \text{oszlopvektor / oszlopmátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times n} \sim \text{sorvektor / sormátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{kvadratikus / négyzetes mátrix}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{egységmátrix}$$

$$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n} \sim \text{nullmátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{diagonális mátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{felső háromszög mátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{szimmetrikus mátrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{antiszimmetrikus mátrix}$$

Definíció 1.10: Mátrixok összege

Két mátrix összegén azt a mátrixot értjük, melyet a két mátrix elemenkénti összeadásával kapunk, azaz, ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m \times n}$, akkor $\mathbf{C} := \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m \times n}$, ahol $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok összegét!

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+5 & 3+4 \\ 4+3 & 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.11: Mátrix és skalár szorzata

Egy mátrix és egy skalár szorzata olyan mátrix, melynek minden eleme skalárszorosa az eredeti mátrix elemeinek, azaz ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbf{C} := \lambda \mathbf{A}$, ahol $c_{ij} := \lambda a_{ij}$.

Határozzuk meg a $\lambda = 2$ skalár és az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix szorzatát!

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.12: Mátrixok szorzata

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times p}$. Ekkor a két mátrix szorzata

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \text{ ahol } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

A mátrixszorzás vizualizálása:

$$\left[\begin{array}{cccc} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} \sum a_{1i}b_{i1} & \dots & \sum a_{1i}b_{ip} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \dots & \sum a_{2i}b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mi}b_{i1} & \dots & \sum a_{mi}b_{ip} \end{array} \right]$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixok szorzatát!

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -5 & -2 \end{array} \right]$$

Definíció 1.13: Szimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Definíció 1.14: Antiszimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix antiszimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Kvadratikus mátrix felbontása szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{Szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{Antiszimmetrikus}}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix szimmetrikus és antiszimmetrikus részét!

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{as} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.15: Determináns

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ kvadratikus mátrix, és $\det : \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. A mátrix i -edik oszlopának elemeit tartalmazó oszlopvektorokat \mathbf{a}_i -vel jelöljük. Az \mathbf{A} determinánsának nevezük $\det \mathbf{A}$ -t, a hozzárendelést pedig az alábbi négy axióma írja le:

1. homogén:

$$\det(\dots \lambda \mathbf{a}_i \dots) = \lambda \det(\dots \mathbf{a}_i \dots),$$

2. additív:

$$\det(\dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}_i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}_i \dots),$$

3. alternáló:

$$\det(\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots),$$

4. \mathbb{E} determinánsa:

$$\det \mathbb{E} = \det(\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \dots \hat{\mathbf{e}}_n) = 1.$$

Ha egy mátrix determinánsa nem zérus, akkor a az oszlopaiból, vagy soriból képzett vektorok lineárisan függetlenek.

Ellenkező esetben lineárisan összefüggőek.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát!

A determináns a kifejtési térel alapján:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

A determináns a definíció alapján:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{3}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{4}{=} -2.$$

1. Az első sor háromszorosát kivonjuk a második sorból.
2. Az első oszlop kétszeresét kivonjuk a második oszlopból.
3. A második oszlopból kiemelünk -2 -t.
4. Az egységmátrix determinánsa 1.

3×3 -as mátrix bármelyik sora vagy oszlopa szerint kifejthető. Az alábbi előjelszabályt kell alkalmazni:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát!

A determináns a kifejtési térel alapján, az első sor szerint:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0.$$

A determináns a kifejtési térel alapján, a második oszlop szerint:

$$\det \mathbf{A} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 5 \cdot (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 0.$$

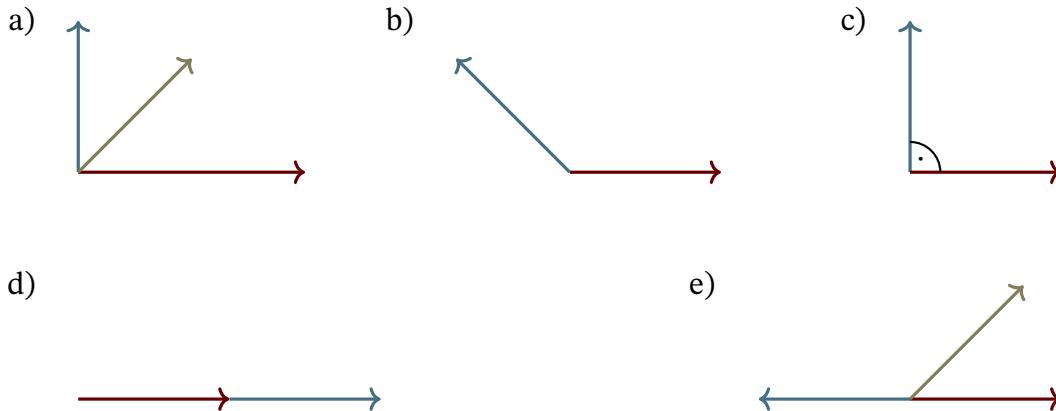
A determináns a definíció alapján:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} 0.$$

1. A második és a harmadik oszlopból kivonjuk az első oszlopot.
2. Amennyiben a mátrixban két oszlop vagy sor azonos, akkor a determináns zérus.

1.2. Feladatok

1. Vizsgálja meg, hogy vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekre...
 - a) \mathbb{R}^3 azon vektorai, amelyek első koordinátája 1,
 - b) \mathbb{R}^3 azon vektorai, amelyek második koordinátája 0,
 - c) a harmadfokú, valós együtthatós polinomok.
2. Döntse el, hogy az alábbi vektorok \mathbb{R}^2 -ben bázist vagy generátorrendszert alkotnak-e!



3. Vizsgálja meg, hogy az $\mathbf{v}_1(1; 2; 3)$, $\mathbf{v}_2(1; 3; -1)$ és $\mathbf{v}_3(1; 0; 0)$ vektorok \mathbb{R}^3 -ban bázist vagy generátorrendszert alkotnak-e!
4. Írja fel az **A** mátrix transzponáltját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Adottak az **A**, **B** és **C** mátrixok. Végezze el az alábbi műveleteket!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ | c) $3\mathbf{A} + \mathbf{C}$ | e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ |
| b) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ | d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ | f) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}\mathbf{C}$ |

6. Adottak az **A** és **B** mátrixok. Végezze el $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ és $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ műveleteket!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Bontsa fel az **A** mátrixot szimmetrikus és antiszimmetrikus összetevőkre!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Számolja ki az **A**, **B**, **C** és **D** mátrixok determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Mutassa meg hogy **A** determinánsa osztható 7-tel!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$