

7

Összefoglalás

Matematika G3 – Többváltozós analízis

Utoljára frissítve: 2025. október 20.

7.1. Gradiens

Adja meg a $\varphi(\mathbf{r}) = 2x^2y + xy^2z + 3xz^2$ skalármező gradiensét a $P(-3; -2; 1)$ pontban!

A gradiens paraméteresen:

$$\text{grad } \varphi = \begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4xy + y^2z + 3z^2 \\ 2x^2 + 2xyz \\ xy^2 + 6xz \end{bmatrix}.$$

A $P(-3; -2; 1)$ pontban:

$$\text{grad } \varphi(-3; -2; 1) = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-2)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \\ 2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot 1 \\ (-3) \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + 4 + 3 \\ 18 + 12 \\ -12 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 30 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

7.2. Divergencia, rotáció

Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (xy^2 - z)\hat{\mathbf{i}} + (yz)\hat{\mathbf{j}} + (xy + 2z)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a $P(-1; 2; -1)$ pontban!

A divergencia paraméteresen:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = y^2 + z + 2.$$

A $P(-1; 2; -1)$ pontban:

$$\text{div } \mathbf{v}(-1; 2; -1) = (2)^2 + (-1) + 2 = 4 - 1 + 2 = 5.$$

A rotáció paraméteresen:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ -1 - y \\ -2xy \end{bmatrix}.$$

A $P(-1; 2; -1)$ pontban:

$$\text{rot } \mathbf{v}(-1; 2; -1) = \begin{bmatrix} (-1) - 2 \\ -1 - 2 \\ -2 \cdot (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

7.3. Skalárpotenciál

Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2)\hat{\mathbf{i}} + (2xy + e^{3z})\hat{\mathbf{j}} + (3ye^{3z})\hat{\mathbf{k}}$ egy olyan φ skalárpotenciálját, melyre $\varphi(\mathbf{0}) = 0$.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \int_0^x v_x(\xi; y; z) d\xi + \int_0^y v_y(0; \eta; z) d\eta + \int_0^z v_z(0; 0; \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^x y^2 d\xi + \int_0^y e^{3z} d\eta + \int_0^z 0 d\zeta = xy^2 + ye^{3z}.\end{aligned}$$

7.4. Skalármező vonalintegrálja

Legyen $\gamma(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$ a $(2; 1) \rightarrow (6; 4)$ egyenes szakasz paraméterezése. Adja meg $x(t)$ és $y(t)$ függvényeket, ha a paramétertartomány $t \in [0; 1]$. Számítsa ki a $\varphi(x; y) = 3x - 4y$ skalármező γ görbe menti integrálját!

A paraméterezés:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 4t \\ 1 + 3t \end{bmatrix}$$

A sebességvektor, és ennek normája:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

A skalármező átparaméterezve:

$$\varphi(\gamma(t)) = 3(2 + 4t) - 4(1 + 3t) = 6 + 12t - 4 - 12t = 2.$$

A vonalintegrál:

$$\int_C \varphi(\mathbf{r}) ds = \int_0^1 \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 2 \cdot 5 dt = 10.$$

7.5. Vektormező vonalintegrálja

Adott az $\mathbf{F}(x; y) = x^2 \cdot \hat{\mathbf{i}} - xy \cdot \hat{\mathbf{j}}$ erőmező. Számítsa ki az erőmező munkáját, az origó középpontú, $r = 1$ sugarú első síknegyedben lévő körív mentén, ha a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú! Mit mondhatunk el, ha a bejárási irányt megfordítjuk?

A kör paraméterezése:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0; \pi/2].$$

A sebességvektor:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezve:

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ -\cos t \sin t \end{bmatrix}.$$

A vonalintegrál:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ -\cos t \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t - \cos^2 t \sin t) dt = -2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt \\ &= -2 \left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -2 \left(0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ha a bejárési irányt megfordítjuk, akkor az integrál előjele is megfordul, vagyis az eredmény $2/3$ lesz.

7.6. Skalármező felületi integrálja

Számítsa ki a $\varphi(x; y; z) = 2x$ skalármező egységgömbön vett felületi integrálját! Segítség: $\varrho(s; t) = (\sin s \cos t) \hat{\mathbf{i}} + (\sin s \sin t) \hat{\mathbf{j}} + (\cos s) \hat{\mathbf{k}}$, $dS = \sin s ds dt$.

A felület paraméterezése:

$$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0; \pi] \\ t \in [0; 2\pi] \end{matrix}.$$

A skalármező átparaméterezve:

$$\varphi(\varrho(s; t)) = 2 \sin s \cos t.$$

A felületi integrál:

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi(\mathbf{r}) dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\varrho(s; t)) \sin s ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin s \cos t \cdot \sin s ds dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt \int_0^{\pi} \sin^2 s ds = 2 \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

7.7. Vektormező felületi integrálja

Számítsa ki a \mathbf{v} vektormező \mathcal{S} felületen vett fluxusát, ha

$$\mathbf{v}(x; y; z) = \begin{bmatrix} xy \\ 2x + y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}(s; t) = \begin{bmatrix} s + 2t \\ -t \\ s^2 + 3t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0; 3] \\ t \in [0; 1] \end{matrix}.$$

A felület normálvektora:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ 4s - 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezve:

$$\mathbf{v}(\mathcal{S}(s; t)) = \begin{bmatrix} (s + 2t)(-t) \\ 2(s + 2t) + (-t) \\ s^2 + 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -st - 2t^2 \\ 2s + 3t \\ s^2 + 3t \end{bmatrix}.$$

A felületi integrál:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle &= \int_0^1 \int_0^3 \mathbf{v}(\mathcal{S}(s; t)) \cdot \mathbf{n} \, ds \, dt = \int_0^1 \int_0^3 \begin{bmatrix} -st - 2t^2 \\ 2s + 3t \\ s^2 + 3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2s \\ 4s - 3 \\ -1 \end{bmatrix} \, ds \, dt \\ &= \int_0^1 \int_0^3 (7s^2 - 6s + 12st - 2s^2t - 4st^2 - 12t) \, ds \, dt = \dots = 30. \end{aligned}$$

7.8. Gradiens tétel

Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2)\hat{\mathbf{i}} + (2xy + e^{3z})\hat{\mathbf{j}} + (3ye^{3z})\hat{\mathbf{k}}$ vektormező $(0; 1; 1) \rightarrow (0; -1; 1)$ szakaszon vett vonalmenti integrálját!

A potenciálfüggvény:

$$\varphi(\mathbf{r}) = xy^2 + ye^{3z}.$$

A vonalintegrál:

$$\int_c \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \varphi(0; -1; 1) - \varphi(0; 1; 1) = (0 \cdot (-1)^2 + (-1) \cdot e^3) - (0 \cdot 1^2 + 1 \cdot e^3) = -2e^3.$$

7.9. Stokes-tétel

Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (z - y)\hat{\mathbf{i}} + (x - z)\hat{\mathbf{j}} + (y - x)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt az alábbi zárt görbén:

1. Az origóból először egy egyenes szakasz mentén eljutunk az $(1; 0; 0)$ pontba.

2. Ezután egy origó középpontú körív mentén az $(-1; 0; 0)$ pontba jutunk. (A körív síkja legyen az xy sík, és a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú.)
3. Végül egy egyenes szakasz mentén visszatérünk az origóba.

A görbe egy félkört határol, melynek paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0; 1] \\ t \in [0; \pi] \end{matrix}.$$

A felület normálvektora:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \cos^2 t + s \sin^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix}.$$

A vektormező rotációja:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z - y \\ x - z \\ y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle &= \int_0^\pi \int_0^1 \text{rot } \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) \cdot \mathbf{n} \, ds \, dt = \int_0^\pi \int_0^1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} \, ds \, dt \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 2s \, ds \, dt = \int_0^\pi [s^2]_0^1 \, dt = \int_0^\pi 1 \, dt = [t]_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

7.10. Gauss-Osztogradskij-tétel

Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x)\hat{\mathbf{i}} + (y)\hat{\mathbf{j}} + (z)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező azon zárt felületen vett felületi integrálját, melyet az $x = y^2 + z^2$ forgáspároloid $z > 0$ része, a $z = 0$ és az $x = 4$ síkok határolnak.

A tértartomány paraméterezése:

$$\boldsymbol{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} s^2 \\ r s \cos t \\ r s \sin t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} r \in [0; 1] \\ s \in [0; 2] \\ t \in [0; \pi] \end{matrix}.$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 2s & 0 \\ s \cos t & r \cos t & -rs \sin t \\ s \sin t & r \sin t & rs \cos t \end{bmatrix}$$

Ennek determinánsának abszolút értéke:

$$|\det \mathbf{D}\mathbf{\Omega}| = 2rs^3.$$

A vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dS} \rangle &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iiint_V 3 \, dV = \int_0^\pi \int_0^2 \int_0^1 3 \cdot 2rs^3 \, dr \, ds \, dt \\ &= 6 \int_0^\pi dt \int_0^2 s^3 \, ds \int_0^1 r \, dr = 6 \cdot \pi \cdot \left[\frac{s^4}{4} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 6 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12\pi. \end{aligned}$$