1 MO

Ismétlés, operátorok

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 07.

1.1. Leképezés vizsgálata

Adja meg a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés mátrixát a standard normális, illetve az $\boldsymbol{b}_1(1;0;0)$, $\boldsymbol{b}_2(1;1;0)$ és $\boldsymbol{b}_3(1;1;1)$ vektorok alkotta bázisban. Adja meg a leképezés magterének és képterének dimenzióját is!

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x-y \\ y+z \\ y-z \end{bmatrix}$$

A leképezés mátrixa a standard bázisban:

$$\varphi\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A bázistranszformáció mátrixa, illetve annak inverze:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A leképezés mátrixa az új bázisban:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A leképezés mátrixának rangja maximális ($\operatorname{rg}\varphi = 3$), hiszen

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1-1) + 1 \cdot (0) + 0 = -4 \neq 0.$$

A magtér dimenziója a rang-nullitás tétel alapján:

$$\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg}\varphi = 3 - 3 = 0.$$

1.2. Mátrix felbontása

Bontsa fel az $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikus és antiszimmetrikus komponensekre!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A szimmetrikus komponens:

$$\mathbf{A}_s = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^\top}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 2 & 5/2 \\ 1/2 & 5/2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az antiszimmetrikus komponens:

$$\mathbf{A}_{as} = \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^\top}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3. Jacobi-mátrix

Adja meg a φ és ψ leképezések Jacobi-mátrixát!

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2+z \\ yz^2 \end{bmatrix} \qquad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sin\ln(xy^2) \\ \sqrt{e^{xy}+\tan y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_\varphi = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_\psi = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\ln(xy^2)}{x} & \dfrac{2\cos\ln(xy^2)}{y} \\ \dfrac{y\,e^{xy}}{2\sqrt{e^{xy}+\tan y}} & \dfrac{x\,e^{xy}+1/\cos^2 y}{2\sqrt{e^{xy}+\tan y}} \end{bmatrix}$$

1.4. Gradiens

Adja meg az alábbi leképezések gradienseit! ($C \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$)

a) $f(\boldsymbol{r}) = C \cdot \boldsymbol{r}^2$

$$\operatorname{grad} f = C \cdot \operatorname{grad}\langle \boldsymbol{r};\boldsymbol{r}\rangle = C \cdot \operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2) = C \cdot \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = 2C \cdot \boldsymbol{r}$$

b) $g(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|$

$$\operatorname{grad} g = \operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

c) $h(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{a};\boldsymbol{r}\rangle$

$$\operatorname{grad} h = \operatorname{grad}(a_1x + a_2y + a_3z) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}$$

1.5. Divergencia és rotáció Jacobi-mátrix alapján

Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektormező divergenciáját és rotációját! Mely halmazokon forrás-, illetve örvénymentes a mező?

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2 - y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y^2 - z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z^2 - x^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

A vektormező Javobi-mátrixa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \\ -2x & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

A divergencia:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{tr} \mathbf{J} = 2x + 2y + 2z.$$

A vektormező a $2x + 2y + 2z = 0$ síkon forrásmentes, hiszen itt a divergencia nulla.

A rotáció:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{axl}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^\top) = \begin{bmatrix} J_{32} - J_{23} \\ J_{13} - J_{31} \\ J_{21} - J_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - (-2z) \\ 0 - (-2x) \\ 0 - (-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{bmatrix}.$$

A vektormező csak az origóban örvénymentes, hiszen itt a rotáció nullvektor.

1.6. Divergencia és rotáció a Nabla-operator segítségével

Adja meg az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját! ($C \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$)

1. $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = C \cdot \boldsymbol{r}$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{bmatrix} \right\rangle = C + C + C = 3C$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Cx \\ Cy \\ Cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y Cz - \partial_z Cy \\ \partial_z Cx - \partial_x Cz \\ \partial_x Cy - \partial_y Cx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ vektormező sehol sem forrásmentes, viszont mindenhol örvénymentes.

2. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} \|\boldsymbol{r}\|$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{3}{\|\boldsymbol{r}\|} - \frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{r}\|^{3/2}} = \frac{3}{\|\boldsymbol{r}\|} - \frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|} = \frac{2}{\|\boldsymbol{r}\|}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \begin{bmatrix} -yz + zy \\ xz - zx \\ -xy + yx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ sehol sem forrásmentes, viszont mindenhol örvénymentes. A divergencia az origóban nincs értelmezve.

3. $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \cdot \ln|\boldsymbol{r}|$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = \left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \boldsymbol{a} \cdot \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right\rangle = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (a_1 x + a_2 y + a_3 z) = \frac{\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{r} \rangle}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \left(\boldsymbol{a} \cdot \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \begin{bmatrix} a_3 y - a_2 z \\ a_1 z - a_3 x \\ a_2 x - a_1 y \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

A $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ vektormező az $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{r} \rangle = 0$ síkon forrásmentes, az $\boldsymbol{r} = t \cdot \boldsymbol{a}$ egyenesen örvénymentes ($t \in \mathbb{R}$). $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ az origóban nincs értelmezve.