8
MO

Bevezetés

Matematika G3 – Differenciálegyenletek
Utoljára frissítve: 2025. október 26.

8.1. Differenciálegyenletek osztályozása

	Egyenlet	Megadási mód	Rend	Lineáris?
a)	$y' = \cosh x - 3xy$	Explicit	1	lineáris
b)	$y'' = y'^2 \cos x$	Explicit	2	nem lineáris
c)	$\left(1 + y^{(\mathrm{IV})}\right)^2 - y'' = x^3 y''' + xy$	Implicit	4	nem lineáris
d)	$y'' = e^y \ln x$	Explicit	2	nem lineáris

8.2. Izoklinák és vonalelemek

1. $y' = y/x \qquad x > 0$

   Izoklinák: ${}^{y}\!/_{x} = c \implies y = cx$ – origón áthaladó egyenesek

   Vonalelemek: $y' = {}^{y}\!/_{x} = {}^{cx}\!/_{x} = c$ – állandó meredekségű egyenesek

   Megoldásgörbék: $y = Cx$ – origón áthaladó egyenesek

2. $y' = -x/y \qquad y < 0$

   Izoklinák: $-{}^{x}\!/_{y} = c \implies y = -{}^{x}\!/_{c}$ – origón áthaladó egyenesek

   Vonalelemek: $y' = -{}^{x}\!/_{y} = c$ – állandó meredekségű egyenesek

   Megoldásgörbék: $x^2 + y^2 = C$ – origó középpontú félkörök

8.3. Megoldás-e I

Az $(y')^4 + y^2 = -1$ differenciálegyenlet megoldása-e az $y = x^2 - 1$ függvény?

Az első derivált:

$$y' = 2x.$$

Helyettesítsük be a differenciálegyenletbe:

$$(y')^4 + y^2 = (2x)^4 + (x^2 - 1)^2 = 16x^4 + (x^4 - 2x^2 + 1) = 17x^4 - 2x^2 + 1.$$

Mivel ez a kifejezés nem egyenlő -1-gyel minden x értékre, ezért a megadott függvény **nem** megoldása a differenciálegyenletnek.

8.4. Megoldás-e II

Megoldása-e az $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ függvény az $y'' + 4y = 0$ differenciálegyenletnek?

Az első és második derivált:

$$\begin{aligned} y' &= 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x, \\ y'' &= -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $y'' = -4y$, tehát

$$y'' + 4y = -4y + 4y = 0,$$

tehát a megadott függvény valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

8.5. Megoldás-e III

Megoldása-e az $y = \ln x$ függvény az $xy'' + y' = 0$ differenciálegyenletnek?

Az első és második derivált:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x}, \\ y'' &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Helyettesítsük be a differenciálegyenletbe:

$$xy'' + y' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0,$$

tehát a megadott függvény valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

8.6. Cauchy-feladat I

Adja meg az $y''+4y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételek melletti megoldását!

Az általános megoldás és annak első deriváltja:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \\ y' &= 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x. \end{aligned}$$

Az első egyenletből:

$$y(0) = C_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} = C_2 = 0.$$

A második egyenletből:

$$y'(0) = 2C_1 \underbrace{\cos 0}_{=1} - 2 \cdot 0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 2C_1 = 1 \implies C_1 = \frac{1}{2}.$$

Tehát a keresett megoldás:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

8.7. Cauchy-feladat II

Adja meg az $y'' + 4y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ és $y'(\pi/4) = 2$ kezdeti feltételek melletti megoldását!

Az általános megoldás és annak első deriváltja:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x,$$
$$y' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x.$$

Az első egyenletből:

$$y(0) = C_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} = C_2 = 1.$$

A második egyenletből:

$$y'(\pi/4) = 2C_1 \underbrace{\cos \pi/2}_{=0} - 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin \pi/2}_{=1} = -2 \neq 2.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a megadott kezdeti feltételek mellett nincs megoldás.

8.8. Görbeseregek differenciálegyenletei

1. $y = cx^2$:

   Deriváljuk az egyenletet, és fejezzük ki a c konstansot:

   $$y' = 2cx \quad \text{és} \quad c = \frac{y}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad y' = 2\frac{y}{x}.$$

2. $x^2 + y^2 = cx$:

   Deriváljuk az egyenletet implicit módon:

   $$2x + 2yy' = c.$$

   Helyettesítsük be az eredeti egyenletbe c-t:

   $$x^2 + y^2 = 2x^2 + 2yy'x \quad \Longrightarrow \quad 2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

3. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$:

   Számítsuk ki az első deriváltat:

   $$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}.$$

   Számítsuk ki $y' - y$ különbséget:

   $$y' - y = \left(c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}\right) - \left(c_1 e^x + c_2 e^{2x}\right) = c_2 e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad c_2 = e^{-2x}(y' - y).$$

A kapott konstanst helyettesítsük be az eredeti egyenletbe:

$$y = c_1 e^x + e^{-2x}(y' - y)e^{2x} = c_1 e^x + y' - y \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = e^{-x}(2y - y').$$

Most számítsuk ki a második deriváltat is, és helyettesítsük be a konstansokat:

$$\begin{aligned} y'' &= c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} \\ &= e^{-x}(2y - y')e^x + 4e^{-2x}(y' - y)e^{2x} \\ &= 2y - y' + 4y' - 4y \\ &= -2y + 3y'. \end{aligned}$$

Végül rendezzük az egyenletet:

$$y'' + 2y - 3y' = 0.$$

8.9. Körök differenciálegyenlete

Adja meg az olyan xy síkban elhelyezkedő körök differenciálegyenletét, amelyek az x-tengelyt az origóban érintik!

Az ilyen körök egyenlete:

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

Deriváljuk az egyenletet implicit módon:

$$2x + 2(y - r)y' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x + 2yy' - 2ry' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r = \frac{x}{y'} + y$$

Helyettesítsük be az eredeti egyenletbe r-t:

$$x^2 + \left(t - \frac{x}{y'} + y\right)^2 = \left(\frac{x}{y'} + y\right)^2.$$