7 Összefoglalás

Matematika G3 – Többváltozós analízis
Utoljára frissítve: 2025. október 20.

7.1. Elméleti áttekintő

Differenciáloperátorok

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, ahol $\boldsymbol{r}$ az $\mathbb{R}^3$-beli Descartes koordináta-rendszerben $\boldsymbol{r} = (x; y; z)$.

Rotáció	**Divergencia**	**Gradiens**
$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$	$\operatorname{div} \boldsymbol{v}$	$\operatorname{grad} \varphi$
$\nabla \times \boldsymbol{v}$	$\langle \nabla; \boldsymbol{v} \rangle$	$\nabla \varphi$
$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$	$\left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\rangle$	$\begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix}$
$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\varphi} = \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\varphi} = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}_{\operatorname{rot} \boldsymbol{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\operatorname{div} \boldsymbol{v}} = \mathbb{R}$	$\mathcal{R}_{\operatorname{grad} \varphi} = \mathbb{R}^3$

Azonosságok

- Teljesül a linearitás:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) &= \lambda \operatorname{grad} \Phi + \mu \operatorname{grad} \Psi \\ \operatorname{rot}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \quad + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{w} \\ \operatorname{div}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad + \mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

- Zérusság:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi &\equiv \boldsymbol{0} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Potenciálosság

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező skalárpotenciálos, ha létezik olyan $\varphi : V \to \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Ekkor $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{0}$.

- $\boldsymbol{v}$ skalárpotenciálos $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, hiszen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv \boldsymbol{0}$ (**örvénymentes**)

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező vektorpotenciálos, ha létezik olyan $\boldsymbol{u} : V \to V$ vektormező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$. Ekkor $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$.

- $\boldsymbol{v}$ vektorpotenciálos $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, hiszen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \equiv 0$ (**forrásmentes**)

Skalárpotenciál

Legyen φ skalármező $\boldsymbol{v}$ vektormező skalárpotenciálja. Ebben az esetben tudjuk, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Ekkor $\boldsymbol{v}$ vektormező skalárpotenciálja:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_0^{x_1} v_1(\xi; x_2; \dots; x_n)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{x_2} v_2(0; \xi; \dots; x_n)\,\mathrm{d}\xi + \cdots + \int_0^{x_n} v_n(0; 0; \dots; \xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Vektorpotenciál

Legyen $\boldsymbol{u}(u_x; u_y; 0)$ vektormező $\boldsymbol{v}$ vektormező vektorpotenciálja. Ebben az esetben tudjuk, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$. Ekkor $\boldsymbol{u}$ komponensei az alábbi módon számíthatóak:

$$u_x = \int_0^{z} v_y(x; y; \zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \qquad u_y = \int_0^{x} v_z(\xi; y; 0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^{z} v_x(x; y; \zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Vonalmenti integrálok

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathcal{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\boldsymbol{\gamma}(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mathbf{r} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t$. Ekkor:

- skalármező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_I \varphi(\boldsymbol{\gamma}(t))\,\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

- vektormező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \int_I \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle\,\mathrm{d}t,$$

Felületi integrálok

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\varrho} : U \to \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s; t \in U$ a felület paraméterezése, $\boldsymbol{\varrho}(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $\mathrm{d}S = \|\partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}\|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, $\hat{\boldsymbol{n}} = (\partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}) / \|\partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}\|$. Ekkor:

- skalármező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = \int_U \varphi(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) \left\| \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

- vektormező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \int_U \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)); \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) \right\rangle \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

Térfogati integrál

Legyen $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\Omega} : D \to \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\boldsymbol{\Omega}(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $\mathrm{d}V = \det(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r; s; t))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$. Ekkor:

- skalármező térfogati integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint_{D} \varphi\left(\boldsymbol{\Omega}(r; s; t)\right) \det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r; s; t)\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Integrálási tételek

- **Gradiens-tétel**:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \varphi(\boldsymbol{\gamma}(a)).$$

  Vagyis ha egy vektormező előáll egy skalármező gradienseként, akkor annak bármely zárt görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

- **Stokes-tétel**:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial \mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle.$$

  A tételből következik, hogy skalárpotenciálos vektormező bármely zárt görbén vett integrálja zérus.

- **Gauss-Osztogradszkij-tétel**:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle.$$

  A tételből következik, hogy vektorpotenciálos vektormező bármely zárt felületen vett integrálja zérus.

Integrálásos összefüggések

- **Belső függvény megjelenik szorzótényezőként**:

$$\int (f \circ g)(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ g)(x) + C, \text{ ahol } F(x) \text{ az } f(x) \text{ primitív függvénye.}$$

- **Hatványfüggvény integrálása**:

$$\int f^{\alpha}(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|f(x)| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$$

7.2. Feladatok

1. Adja meg a $\varphi(\boldsymbol{r}) = 2x^2y + xy^2z + 3xz^2$ skalármező gradiensét a $P(-3; -2; 1)$ pontban!
2. Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (xy^2 - z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (yz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (xy + 2z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a $P(-1; 2; -1)$ pontban!
3. Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (2xy + e^{3z})\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (3ye^{3z})\,\hat{\boldsymbol{k}}$ egy olyan φ skalárpotenciálját, melyre $\varphi(\boldsymbol{0}) = 0$.
4. Legyen $\boldsymbol{\gamma}(t) = x(t) \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{\imath}}} + y(t) \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}$ a $(2; 1) \to (6; 4)$ egyenes szakasz paraméterezése. Adja meg $x(t)$ és $y(t)$ függvényeket, ha a paramétertartomány $t \in [0; 1]$. Számítsa ki a $\varphi(x; y) = 3x - 4y$ skalármező $\boldsymbol{\gamma}$ görbe menti integrálját!
5. Adott az $\boldsymbol{F}(x; y) = x^2 \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{\imath}}} - xy \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}$ erőmező. Számítsa ki az erőmező munkáját, az origó középpontú, $r = 1$ sugarú első síknegyedben lévő körív mentén, ha a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú! Mit mondhatunk el, ha a bejárási irányt megfordítjuk?
6. Számítsa ki a $\varphi(x; y; z) = 2x$ skalármező egységgömbömbön vett felületi integrálját! Segítség: $\boldsymbol{\varrho}(s; t) = (\sin s \cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sin s \sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\cos s)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\mathrm{d}S = \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$.
7. Számítsa ki a $\boldsymbol{v}$ vektormező $\boldsymbol{\varrho}$ felületen vett fluxusát, ha
$$\boldsymbol{v}(x; y; z) = \begin{bmatrix} xy \\ 2x + y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} s + 2t \\ -t \\ s^2 + 3t \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} s \in [0; 3] \\ t \in [0; 1] \end{matrix}.$$
8. Számítsa ki a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (2xy + e^{3z})\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (3ye^{3z})\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $(0; 1; 1) \to (0; -1; 1)$ szakaszon vett vonalmenti integrálját!
9. Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (z - y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x - z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (y - x)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt az alábbi zárt görbén:
   a) Az origóból először egy egyenes szakasz mentén eljutunk az $(1; 0; 0)$ pontba.
   b) Ezután egy origó középpontú körív mentén az $(-1; 0; 0)$ pontba jutunk. (A körív síkja legyen az xy sík, és a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú.)
   c) Végül egy egyenes szakasz mentén visszatérünk az origóba.
10. Határozza meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező azon zárt felületen vett felületi integrálját, melyet az $x = y^2 + z^2$ forgásparaboloid $z > 0$ része, a $z = 0$ és az $x = 4$ síkok határolnak.