Tartalomjegyzék

Definíciók jegyzéke

Tételek jegyzéke

1 Lineáris algebra

A Matematika G2 kurzus első felében lineáris algebrával fogunk foglalkozni. Ez a matematika azon területe, amely számos tudományágban és gyakorlati alkalmazásban meghatározó szerepet játszik. Célunk a vektorterekkel, mátrixokkal és lineáris leképezésekkel kapcsolatos alapvető ismeretek átadása, valamint a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának és megoldásának vizsgálata. A vektorterek és a mátrixok a matematika és a mérnöki tudományok számos területén alapvető szerepet töltenek be, segítenek leírni, megérteni bonyolultabb rendszereket és struktúrákat. A lineáris egyenletrendszerek megoldása szoros kapcsolatban áll a vektorterek és a mátrixok tulajdonságaival. A mátrixok lehetővé teszik a lineáris transzformációk hatékony leírását.

A jegyzet ezen része a lineáris algebra alapjait igyekszik bemutatni: néhány korábban tanult definíció felelevenítését követően, a vektorterek definíciója és azok tulajdonságai, a mátrixműveletek elmélete, majd a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszerei következnek, végül a lineáris leképezések áttekintésével zárul. A célunk, hogy a témák megértéséhez szükséges elméleti ismeretek mellett gyakorlati példákon keresztül is bemutassuk a lineáris algebra széleskörű alkalmazási lehetőségeit.

Ez a jegyzet segít abban, hogy az Olvasó képet kapjon a lineáris algebra fontosságáról és alkalmazásairól.

A fejezetben érintett témakörök

1.1. Alapfogalmak

Definíció 1.1: Csoport

Legyen G nemüres halmaz, és $\circ$ egy művelet. Ekkor a $(G;\circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\forall a;b;c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (**asszociativitás**)
2. $\exists e \in G : \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$, (**egységelem**)
3. $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. (**inverzelem**)

Ha a $\circ$ művelet kommutatív, azaz $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$, akkor a csoportot **Abel-csoport**nak nevezzük.

A $(\mathbb{R};\cdot)$, $(\mathbb{Q};+)$, $(\mathbb{C};+)$ mindegyike Abel-csoport.

Nem csoport $(\mathbb{N};+)$, hiszen nincs inverz elem.

$(\mathbb{Q}^*;+)$ sem csoport, mert nem létezik egységelem.

Definíció 1.2: Gyűrű

Legyen R nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet. Ekkor a $(R;+,\circ)$ gyűrű, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(R;+)$ **Abel-csoport**,
2. $\forall a;b;c \in R : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (**asszociativitás**)
3. teljesül a disztributivitás:
   - $\forall a;b;c \in R : a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$, (+ **disztributív** $\circ$**-ra**)
   - $\forall a;b;c \in R : (a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$. ($\circ$ **disztributív** +**-ra**)

Definíció 1.3: Test

Legyen T nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet. Ekkor a $(T;+,\circ)$ test, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(T;+)$ **Abel-csoport**,
2. $\forall a;b;c \in T : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (**asszociativitás**)
3. $\exists e \in T : \forall a \in F : e \circ a = a \circ e = a$, (**egységelem**)
4. $\forall a \in T \exists a^{-1} \in T : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$, (**inverzelem**)
5. teljesül a **disztributivitás**.

A $(\mathbb{R};+,\cdot)$, $(\mathbb{Q};+,\cdot)$, $(\mathbb{C};+,\cdot)$ mindegyike test.

Definíció 1.4: Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet, T test. A $(V; +, \circ)$ a T test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V; +)$ Abel-csoport,
2. $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : (\lambda \circ \mu) \circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ (\mu \circ \boldsymbol{x})$,
3. ha ε a T-beli egységelem, akkor $\forall \boldsymbol{x} \in V : \varepsilon \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
4. teljesül a disztributivitás:
    - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : \lambda \circ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \lambda \circ \boldsymbol{y}$,
    - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : (\lambda + \mu) \circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \mu \circ \boldsymbol{x}$.

A legfeljebb n-edfokú polinomok a skalárral való szorzásra és az összeadásra vektorteret alkotnak.
A függvények az összeadásra és a skalárral való szorzásra vektorteret alkotnak.

Definíció 1.5: Vektor

A vektortér elemeit vektoroknak nevezzük. Jelölés: $\boldsymbol{x}$, vagy $\underline{x}$.

A zéruselem létezése egyértelmű.

Bizonyítás:

!

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{0}$ és $\hat{\boldsymbol{0}}$ különböző zéruselemek, vagyis $\boldsymbol{0} \neq \hat{\boldsymbol{0}}$. Ebben az esetben

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \hat{\boldsymbol{0}} = \hat{\boldsymbol{0}}.$$

Ez ellentmondás, tehát a zéruselem egyértelmű.

Az ellentett elem létezése egyértelmű.

Bizonyítás:

!

Tegyük fel, hogy $-\boldsymbol{v}$ és $-\hat{\boldsymbol{v}}$ egyaránt $\boldsymbol{v}$ ellentettjei, valamint $-\boldsymbol{v} \neq -\hat{\boldsymbol{v}}$. Ebben az esetben

$$-\hat{\boldsymbol{v}} = (-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) + (-\hat{\boldsymbol{v}}) = (-\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} + (-\hat{\boldsymbol{v}})) = -\boldsymbol{v}.$$

Ez ellentmondás, tehát az ellentett elem egyértelmű.

0-val való szorzás: $\forall \boldsymbol{v} \in V : 0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Bizonyítás:

!

Nullvektorral való szorzás: $\forall \lambda \in T : \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás:

$\lambda \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \lor \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

Bizonyítás:

Definíció 1.6: Lineáris függetlenség

A $(V; +; \lambda)$ vektortér $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ vektorait lineárisan függetlennek mondjuk, ha a

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

vektoregyenletnek **csak a triviális megoldása** létezik, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ha az egyenletnek nem csak a triviális megoldása létezik, akkor a vektorok lineárisan függők.

Definíció 1.7: Altér

Legyen $(V; +; \lambda)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér, valamint $\emptyset \neq L \subset V$. L-t altérnek nevezzük a V-ben, ha $(L; +; \lambda)$ ugyancsak vektortér.

A polinomok vektorterének alterte a legfeljebb n-edfokú polinomok vektortere.

Alterek metszete ugyancsak altér. Alterek uniója azonban általában nem altér.

Definíció 1.8: Generátorrendszer

Legyen V vektortér, valamint $\emptyset \neq G \subset V$. G által generált altérnek nevezzük azt a legszűkebb alteret, amely tartalmazza G-t. Jele: $\mathcal{L}(G)$.

G generátorrendszere V-nek, ha $\mathcal{L}(G) = V$.

Ha G véges generátorrendszere V-nek, akkor G-t végesen generált vektorrendszernek nevezzük.

Definíció 1.9: Bázis

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V bázisának nevezzük.

! Végesen generált vektortérben bármely két bázis azonos tagszámú.

Definíció 1.10: Vektortér dimenziója

Végesen generált vektortér dimenzióján a bázisainak közös tagszámát értjük.

! Legyen $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ a V vektortér egy bázisa. Ekkor tetszőleges V-beli vektor egyértelműen előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

Azaz $\forall \boldsymbol{v} \in V : \exists!(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$, hogy

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n.$$

A $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ szám n-est az $\boldsymbol{v}$ vektor $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázisaira vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Bizonyítás (Egzisztencia):

$\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ lineárisan függetlenek, mert bázis. Ezért $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ már lineárisan függő, így a $\mu\boldsymbol{v} + \xi_1\boldsymbol{b}_1 + \xi_2\boldsymbol{b}_2 + \dots + \xi_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$ vektoregyenletnek létezik triviálistól különböző megoldása, azaz nem lehet $(\mu; \xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ minden eleme egyszerre 0.

Tehát $\mu \neq 0$, mert ellenkező esetben $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ állna fent, így oszthatjuk az egyenletet μ-vel:

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\left(-\frac{\xi_1}{\mu}\right)}_{:=\lambda_1} \boldsymbol{b}_1 + \underbrace{\left(-\frac{\xi_2}{\mu}\right)}_{:=\lambda_2} \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \underbrace{\left(-\frac{\xi_n}{\mu}\right)}_{:=\lambda_n} \boldsymbol{b}_n.$$

Bizonyítás (Unicitás):

Tegyük fel, hogy a $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ és a $(\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_n)$ is a $\boldsymbol{v}$ koordinátái a $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázisban, azaz

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{b}_i \text{ és } \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{b}_i.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$\boldsymbol{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_{0} \boldsymbol{b}_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \mu_2)}_{0} \boldsymbol{b}_2 + \dots + \underbrace{(\lambda_n - \mu_n)}_{0} \boldsymbol{b}_n.$$

Ezzel ellentmondásra jutunk, mivel $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázis, ezért a nullvektornak csak triviális előállítása létezik, ami az együtthatók 0 voltát vonná maga után, az pedig a megfelelő koordináták egyenlőségével ekvivalens. A feltevés tehát hamis.

1.2. Mátrixalgebra

Definíció 1.11: Mátrix

Egy mátrix vízszintes vonalban elhelyezkedő elemei **sorok**at, míg függőlegesen elhelyezkedő elemei **oszlop**okat alkotnak.

Egy m sorból és n oszlopból álló mátrix jelölése:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mátrixok jelölése nyomtatott szövegben: $\mathbf{A}$.

Mátrixok jelölése írásban: $\underline{\underline{A}}$.

Az $m \times n$-es mátrixok halmazának jelölései: $\mathcal{M}_{m\times n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m\times n}$.

A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában található elemet a_{ij}-vel jelöljük.

A mátrix dimenzióit mindig először a sorok számával, majd azt követően az oszlopok számával adják meg.

Speciális mátrixstruktúrák:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1} \quad \sim \quad \text{oszlopvektor / oszlopmátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times n} \quad \sim \quad \text{sorvektor / sormátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \quad \sim \quad \text{kvadratikus / négyzetes mátrix}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \quad \sim \quad \text{egységmátrix}$$

$$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \quad \sim \quad \text{nullmátrix}$$

Definíció 1.12: Mátrix transzponáltja

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix transzponáltja a főátlójára vett tükörképe. Jele: $\mathbf{A}^\intercal \in \mathcal{M}_{n\times m}$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

Definíció 1.13: Szimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal$.

Definíció 1.14: Antiszimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix antiszimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\intercal$.

Antiszimmetrikus mátrixok főátlójában csak nullák szerepelnek.

Definíció 1.15: Mátrixok egyenlősége

Két mátrix akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő helyeken álló elemei egyenlőek.

$$!\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n} : \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \wedge \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij} = b_{ij}$$

Definíció 1.16: Mátrixok összege

Két mátrix összegén azt a mátrixot értjük, melyet a két mátrix elemenkénti összeadásával kapunk, azaz, ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, akkor $\mathbf{C} := \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, ahol $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok összegét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+5 & 3+4 \\ 4+3 & 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.17: Mátrix és skalár szorzata

Egy mátrix és egy skalár szorzata olyan mátrix, melynek minden eleme skalárszorosa az eredeti mátrix elemeinek, azaz ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbf{C} := \lambda\mathbf{A}$, ahol $c_{ij} := \lambda a_{ij}$.

Határozzuk meg a $\lambda = 2$ skalár és az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix szorzatát!

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.18: Mátrixok szorzata

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Ekkor a két mátrix szorzata

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \text{ ahol } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

A mátrixszorzás vizualizálása:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sum a_{1i}b_{i1} & \ldots & \sum a_{1i}b_{ip} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \ldots & \sum a_{2i}b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mi}b_{i1} & \ldots & \sum a_{mi}b_{ip} \end{bmatrix} \end{array}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixok szorzatát!

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 3 & -1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ olyan mátrixok, hogy létezik az $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ mátrixszorzat, akkor az $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ mátrixszorzat is létezik, és ezek egyenlőek.

A mátrixszorzás tehát **asszociatív**.

!

Bizonyítás:

Ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ olyan mátrixok, hogy létezik az $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ szorzat, akkor az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ és az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ mátrixszorzatok is léteznek, valamint $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

Teljesül tehát a **disztributivitás**.

!

Bizonyítás:

Definíció 1.19: Determináns

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ kvadratikus mátrix, és $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény. A mátrix i-edik oszlopának elemeit tartalmazó oszlopvektorokat $\boldsymbol{a}_i$-vel jelöljük. Az $\mathbf{A}$ determinánsának nevezzük $\det \mathbf{A}$-t, a hozzárendelést pedig az alábbi négy axióma írja le:

1. homogén:
$$\det\begin{pmatrix}\cdots & \lambda\boldsymbol{a}_i & \cdots\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix}\cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots\end{pmatrix},$$
2. additív:
$$\det\begin{pmatrix}\cdots & \boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i & \cdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \boldsymbol{b}_i & \cdots\end{pmatrix},$$
3. alternáló:
$$\det\begin{pmatrix}\cdots & \boldsymbol{a}_i & \ldots & \boldsymbol{a}_j & \cdots\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\cdots & \boldsymbol{a}_j & \ldots & \boldsymbol{a}_i & \cdots\end{pmatrix},$$
4. $\mathbb{E}$ determinánsa:
$$\det\mathbb{E} = \det\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \cdots & \hat{\boldsymbol{e}}_n\end{pmatrix} = 1,$$

Ha egy mátrixban van két azonos oszlop, akkor a determinánsa nulla.

!

Bizonyítás:

Egy mátrix determinánsa nem változik, ha az egyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopának skalárszorosát.

!

Bizonyítás:

Tétel 1.1: Kifejtési tétel

$$\det \mathbf{A} = \det(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \ldots; \boldsymbol{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}\hat{\boldsymbol{e}}_j; \boldsymbol{a}_2; \ldots; \boldsymbol{a}_n\right)$$

$$= a_{11}\det(\hat{\boldsymbol{e}}_1; \boldsymbol{a}_2; \ldots; \boldsymbol{a}_n) + a_{21}\det(\hat{\boldsymbol{e}}_2; \boldsymbol{a}_2; \ldots; \boldsymbol{a}_n) + \ldots + a_{n1}\det(\hat{\boldsymbol{e}}_n; \boldsymbol{a}_2; \ldots; \boldsymbol{a}_n)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{n1}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

Jelölje a k. sor és j. oszlop kitakarásával kapott aldeterminánst $\mathbf{A}_{kj}$, ekkor az egyenlőség a következőképpen írható át:

$$a_{11}\mathbf{A}_{11} - a_{21}\mathbf{A}_{21} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}\mathbf{A}_{n1}.$$

Vezessük be a következő jelölést: $\overline{\mathbf{A}}_{kj} = (-1)^{k-1}\mathbf{A}_{kj}$. Így:

$$a_{11}\overline{\mathbf{A}}_{11} + a_{21}\overline{\mathbf{A}}_{21} + \ldots + a_{n1}\overline{\mathbf{A}}_{n1} = \sum_{j=1}^{n} a_{j1}\mathbf{A}_{j1} = \cdots = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{\varepsilon}a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kn}\det\mathbb{E},$$

ahol ε az inverziók száma és $\mathbb{E}$ az egységmátrix.

A kifejtési tételből következményei:

- Nem lényeges, hogy sorról vagy oszlopról beszélünk a determinánssal kapcsolatban:
$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^{\intercal}.$$
- A determináns bármely sora vagy oszlopa alapján kifejthető:
$$\det\mathbf{A} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\overline{\mathbf{A}}_{kj}}_{j\text{-edik oszlop szerint}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{\mathbf{A}}_{ik}}_{i\text{-edik sor szerint}}$$

Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát!

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 2\cdot 6 = 7 - 12 = -5$$

Tétel 1.2: Lineárisan független vektorok

Az $\{\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \dots; \boldsymbol{a}_n\}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\det(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \dots; \boldsymbol{a}_n) \neq 0$.

Bizonyítás:

Definíció 1.20: Mátrix rangja

A mátrix rangjának nevezzük az oszlopvektorai közül a lineárisan függetlenek maximális számát.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix rangját!

Az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 2, mivel a harmadik oszlop a második oszlop skalárszorosaként áll elő.

Tétel 1.3: Mátrixok rangszámának tétele

Egy mátrix rangja megegyezik maximális el nem tűnő aldeterminánsának rendjével.

Bizonyítás:

Definíció 1.21: Mátrix elemi átalakításai

Egy mátrix elemi átalakításainak nevezzük a következőket:

- A mátrix egy tetszőleges sorát vagy oszlopát egy 0-tól különböző számmal megszorozzuk.
- A mátrix egy tetszőleges sorát vagy oszlopát felcseréljük.
- A mátrix egy tetszőleges sorához vagy oszlopához egy másik tetszőleges sorát vagy oszlopát adjuk.

!

Egy mátrix rangja elemi átalakítások során nem változik.

Bizonyítás:

A determináns axiómáit figyelembe véve látható, hogy az elemi átalakítások nem változtatják meg a determináns 0 voltát.

Definíció 1.22: Reguláris és szinguláris mátrix

Egy kvadratikus (négyzetes) mátrixot **regulárisnak** mondunk, ha determinánsa nem zérus.

Ha a kvadratikus mátrix determinánsa 0, **szinguláris** mátrixról beszélünk.

Tétel 1.4: A determinánsok szorzástétele

Legyen $\mathbf{A}; \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix, ekkor $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

Bizonyítás:

!

$(\mathcal{M}_{n\times n}; +; \cdot)$ egységelemes gyűrű, mert...

- $(\mathcal{M}_{n\times n}; +)$ Abel-csoport,
- $(\mathcal{M}_{n\times n}; \cdot)$ asszociatív,
- teljesül a disztributivitás,
- létezik a szorzás egységeleme, amely maga az egységmátrix.

Definíció 1.23: Mátrix inverze

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix inverzét az $\mathbf{A}^{-1}$ jelöli, és az a mátrix, melyre $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{E}$ teljesül.

Tétel 1.5: Ferde kifejtési tétel

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, ekkor
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{A}_{ki} = 0, \text{ ha } j \neq k.$$

Bizonyítás:

Egy szinguláris mátrixnak nem létezik inverze.

Bizonyítás (Indirekt módon):

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ szinguláris mátrix. Tegyük fel, hogy létezik az inverze. Ekkor igaz, hogy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{E}$. Vizsgáljuk meg a következő egyenlőséget:
$$\underbrace{\det \mathbf{A}}_{=0} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = \det\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right) = \underbrace{\det \mathbb{E}}_{=1}.$$
Látjuk, hogy ezzel ellentmondásra jutunk.

Reguláris mátrix inverze egyértelmű. Ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, akkor
$$\mathbf{A}^{-1} := \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}.$$

Bizonyítás:

Egy 3×3-as mátrix adjungáltja:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

1.3. Lineáris egyenletrendszerek

Definíció 1.24: Lineáris egyenletrendszer

Véges sok elsőfokú egyenletet és véges sok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezünk.

Az m egyenletből és n ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

ahol a_{ij} együtthatók, b_j konstansok, x_j ismeretlenek.

Lineáris egyenletrendszer csoportosítása:

- A lineáris egyenletrendszert **megoldható**nak nevezzük, ha létezik megoldása.
- A lineáris egyenletrendszert **ellentmondó**nak nevezzük, ha nincs megoldása.
- A lineáris egyenletrendszert **határozott**nak nevezzük, ha csupán egyetlen megoldása van.
- A lineáris egyenletrendszert **határozatlan**nak nevezzük, ha végtelen sok megoldása van.

Definíció 1.25: Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek

Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha a megoldáshalmazuk megegyezik.

Az ekvivalencia szemponjából az egyenletek és az ismeretlenek sorrendje nem számít.

!

Az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszert kapunk, ha az egyenletrendszer valamelyik egyenletét egy nemnulla számmal szorozzuk, vagy valamelyik egyenlethez a lineáris egyenletrendszer egy másik egyenletét hozzáadjuk.

Bizonyítás:

Lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

Egy lineáris egyenletrendszer felírható $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ alakban, ahol $\mathbf{A}$ az együttható mátrix, $\boldsymbol{x}$ az ismeretlenek vektora, $\boldsymbol{b}$ pedig a konstans vektor.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Tétel 1.6: LER megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

Az $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$, ahol az $(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$ mátrixot kibővített mátrixnak nevezzük.

A feltétel mátrixosan:

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

Bizonyítás:

Definíció 1.26: Homogén lineáris egyenletrendszer

Az $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lineáris egyenletrendszer homogénnek mondjuk, ha $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Ha $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, akkor a lineáris egyenletrendszer inhomogén.

A feltételből következik, hogy homogén lineáris egyenletrendszer ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$) mindig megoldható, hiszen az együttható mátrixból és egy nullvektorból képzett kibővített mátrix rangja mindig meg fog egyezni az együttható mátrix rangjával.

Tekintsük az n egyenletből és n ismeretlenből álló homogén lineáris egyenletrendszert. Ekkor ha az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris, akkor az egyenletrendszernek csak a triviális megoldása létezik. Ha az $\mathbf{A}$ szinguláris, akkor létezik nemtriviális megoldás is.

Megoldási módszerek:

1. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris, akkor invertálható és az $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.
2. Cramer-szabály: ha az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris, akkor az együtthatók az alábbi módon számíthatóak:
$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}},$$
ahol az $\mathbf{A}_i$ mátrixot úgy képezzük, hogy az i-edik oszlopába $\boldsymbol{b}$ vektort írjuk be.
3. Gauss-elimináció: sorműveletekkel alakítjuk a kibővített mátrixot:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \square & \square & \cdots & \square & \square \\ 0 & \square & \cdots & \square & \square \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \circ & \circ \end{array}\right]$$

1.4. Lineáris leképezések

Definíció 1.27: Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1-beli vektor ($\forall \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in V_1$) és T-beli skalár ($\lambda \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b})$ $\sim$ additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{a})$ $\sim$ homogén (skalár kiemelhető).

$\varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ minden lineáris leképezés esetén.
A linearitás miatt $\varphi(-\boldsymbol{a}) = -\varphi(\boldsymbol{a})$.

Definíció 1.28: Homomorfizmus

$$\mathrm{Hom}(V_1; V_2) := \{ \varphi : V_1 \to V_2 \mid \varphi \text{ lineáris} \}$$

Definíció 1.29: Endomorfizmus

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V; V)$$

! ($\mathrm{Hom}(V_1; V_2), +, \lambda$) vektortér $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ felett.

Definíció 1.30: Izomorfizmus

A $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés izomorfizmus, ha lineáris és bijektív.

! Véges dimenziójú vektorterek esetén az egymással izomorf vektorterek dimenziója azonos.

! Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = \dim V_2$. Ekkor $V_1 \simeq V_2$

Bizonyítás:

Tétel 1.7: Lineáris leképezések alaptétele

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és legyen $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \ldots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázis V_1-ben, és $\{\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \ldots; \boldsymbol{a}_n\}$ tetszőleges vektorrendszer V_2-ben. Ekkor egyetlen lineáris leképezés létezik, melyre $\varphi(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{a}_i$, ahol $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bizonyítás (Unicitás, indirekt módon):

Legyenek $\varphi \neq \psi$ lineáris leképezések, melyekre $\varphi(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{a}_i$ és $\psi(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{a}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Legyen $\boldsymbol{x} \in V_1$ tetszőleges, $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{b}_i$. Hattassuk φ-t $\boldsymbol{x}$-re:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi(\boldsymbol{b}_i) = \xi_1 \varphi(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + \xi_n \varphi(\boldsymbol{b}_n) \\
= \\
= \xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \xi_n \boldsymbol{a}_n = \xi_1 \psi(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + \xi_n \psi(\boldsymbol{b}_n) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{b}_i\right) = \psi(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

Ezzel $\varphi = \psi$, ami ellentmond a feltételnek, tehát a feltevés nem igaz.

Bizonyítás (Egzisztencia, konstruktív bizonyítás):

Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, és $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x})$. Ha $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ az $\boldsymbol{x}$ koordinátái, akkor $\varphi(\boldsymbol{x}) = \xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \xi_n \boldsymbol{a}_n$. Hasonló módon legyen $(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$ az $\boldsymbol{y}$ koordinátái. Ekkor:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= (\xi_1 + \eta_1)\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (\xi_n + \eta_n)\boldsymbol{a}_n \\
&= \xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \xi_n \boldsymbol{a}_n + \eta_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \eta_n \boldsymbol{a}_n = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}),
\end{aligned}
$$

$$
\varphi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda \xi_n \boldsymbol{a}_n = \lambda(\xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \xi_n \boldsymbol{a}_n) = \lambda \varphi(\boldsymbol{x}).
$$

Lineáris leképezések mátrixreprezentációja:

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = n$, valamint $\dim V_2 = k$. Legyen $\{\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \ldots; \boldsymbol{a}_n\}$ bázis V_1-ben, és $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \ldots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázis V_2-ben. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$
\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \alpha_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \alpha_{2i}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_{ki}\boldsymbol{b}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}\boldsymbol{b}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{ki} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}_{k \times n}.
$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $\boldsymbol{x} \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ az $\boldsymbol{x}$ koordinátái, ekkor a képét az alábbi módon számíthatjuk:

$$
\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi(\boldsymbol{a}_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{ki} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.
$$

$\varphi : \mathrm{Hom}(V_1; V_2) \to \mathcal{M}_{k\times n}$ izomorfizmus, ahol $\dim V_1 = k$ és $\dim V_2 = n$.
Következmény: $\dim(\mathrm{Hom}(V_1; V_2)) = n \cdot k = \dim V_1 \cdot \dim V_2$.

Legyenek V_1, V_2 és V_3 vektorterek, $\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = m$ és $\dim V_3 = n$. Legyenek $\varphi : V_1 \to V_2$ és $\psi : V_2 \to V_3$ lineáris leképezések, ekkor a V_1-ből V_3-ra való leképezés ($\psi \circ \varphi : V_1 \to V_3$) olyan, hogy ha $\varphi \leftrightarrow \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times k}$ és $\psi \leftrightarrow \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times m}$, akkor $\psi \circ \varphi \leftrightarrow \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n\times k}$, ahol $\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
Speciálisan, ha $V_1 = V_2 = V_3 = V$, $\dim V = n$, akkor $\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n\times n}$.
Következmény: Invertálható lineáris leképezés mátrixa invertálható.

Definíció 1.31: Leképezés magtere

Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker\varphi := \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V_1 \land \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

$\ker\varphi$ altér V_1-ben.

Bizonyítás:

Definíció 1.32: Leképezés defektusa

A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $\operatorname{def}\varphi$-vel jelöljük.

- Nem létezik olyan vektortér, melynek magtere az üreshalmaz (a nullvektor mindig benne van, mert a nullvektor képe mindig nullvektor).
- Invertálható lineáris leképezés magtere a nullvektor.

A φ leképezés injektív, akkor és csak akkor, ha $\ker\varphi = \{\boldsymbol{0}\} \Leftrightarrow \operatorname{def}\varphi = 0$.

Bizonyítás:

Definíció 1.33: Lineáris leképezés rangja

Egy lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját. $\operatorname{rg}\varphi = \dim \varphi(V_1)$.

Tétel 1.8: Rang-nullitás tétele

Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim V_1.$$

Bizonyítás:

!

Tetszőleges lineáris leképezés rangja megegyezik bármely bázisra vonatkozó mátrixreprezentációjának rangjával. $\varphi : V_1 \to V_2$, $\dim V_1 = m$, $\dim V_2 = n \Rightarrow \varphi \leftrightarrow \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\mathbf{A}$.

Bizonyítás:

Tétel 1.9: Másik bázisra való áttérés mátrixa

Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés, $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ és $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisok V-ben. A $\varphi\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots \boldsymbol{b}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\mathbf{A}$, a $\varphi\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\hat{\mathbf{A}}$. Jelölje $\mathbf{S}$ a $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázisról a $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}.$$

Bizonyítás:

- A fenti tételben szereplő $\mathbf{A}$ és $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixok hasonlóak.
- Hasonló mátrixok determinánsa megegyezik.
- Hasonló mátrixok rangja egyenlő.

Definíció 1.34: Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen V a T test feletti vektortér, $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}$-t a $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés sajátvektorának mondjuk, ha önmaga skalárszorosába megy át a leképezés során, azaz $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$, $\lambda \in T$. λ-t a $\boldsymbol{v}$ sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

Ha a $\boldsymbol{v}$ sajátvektora a φ-nek, akkor annak skalárszorosa is.

Tétel 1.10: Sajátértékek számítása

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix sajátértékeit a

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

Bizonyítás:
Legyen $\boldsymbol{v}$ az $\mathbf{A}$ sajátvektora. Ekkor teljesül az $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ egyenlet. Ezt átalakítva:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\boldsymbol{v} - \lambda\mathbb{E}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Így egy olyan homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, amelynek létezik a triviálistól eltérő ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) megoldása, tehát $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$.

A $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$ egyenletet **karakterisztikus egyenlet**nek nevezzük.
A $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E})$ polinomot **karakterisztikus polinom**nak nevezzük.

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:

!

Szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak.

Bizonyítás:

Az n-edrendű szimmetrikus mátrixnak van n darab, páronként egymásra merőleges sajátvektora.

Bizonyítás:

Határozzuk meg az **A** mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet, és ennek alapján a sajátértékek:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

A sajátvektorokat az $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbb{E})\boldsymbol{v}_i = 0$ egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

1. A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.35: Skaláris szorzat

Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér, és $\langle\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvény, melyet skaláris szorzatnak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x} \rangle$ minden $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \in V$ esetén, (**szimmetrikus**)
2. $\langle \lambda \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle$ minden $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, (**homogén**)
3. $\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y} \rangle$ minden $\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y} \in V$ esetén, (**additív**)
4. $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. (**nemnegatív**)

Definíció 1.36: Euklideszi tér

Legyen $\{\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2; \ldots; \boldsymbol{e}_n\}$ kanonikus bázis, melyben

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad \text{ekkor} \quad \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i.$$

Az így előállított $(V, \langle\ \rangle)$ valós euklideszi tér.

Jelölése: $\mathbb{E}^n$: n dimenziós euklideszi tér.

A valós euklideszi térben értelmezhetjük a vektorok hosszát: $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} \rangle}$.

Valamint értelmezhetjük $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorok szögét: $\cos \angle(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \dfrac{\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|} \in [-1; 1]$.

Valós euklideszi terekben érvényesek a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz-egyenlőtlenség:

$$\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{y} \rangle.$$

Ebből következik, hogy a háromszög egyenlőtlenség is teljesül:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

Definíció 1.37: Ortonormált bázis

A $(V, \langle\ \rangle)$ n dimenziós euklideszi tér $\{\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2; \ldots; \boldsymbol{e}_n\}$ bázisát ortonormáltnak mondjuk, ha $\langle \boldsymbol{e}_i; \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, ahol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j, \end{cases}$$

az úgynevezett Kronecker-delta.

Definíció 1.38: Ortogonális transzformáció

Az n dimenziós euklideszi tér $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációját ortogonálisnak mondjuk, ha $\langle \mathcal{A}\boldsymbol{x}; \mathcal{A}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle$, minden $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \in V$ esetén.

- Ortogonális transzformáció normatartó.
- Ortogonális transzformáció szögtartó.
- Ortogonális transzformáció ortonormált bázist ortonormált bázisba visz át.

Definíció 1.39: Bázistranszformáció

Legyenek $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \ldots; \boldsymbol{b}_n\}$ és $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \ldots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisok V-ben. Ekkor a $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \ldots; \boldsymbol{b}_n\} \to \{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \ldots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázistranszformáció $\mathbf{S}$ mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{b}}_1 &= s_{11}\boldsymbol{b}_1 + s_{21}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + s_{n1}\boldsymbol{b}_n \\ \hat{\boldsymbol{b}}_2 &= s_{12}\boldsymbol{b}_1 + s_{22}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + s_{n2}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_j &= s_{1j}\boldsymbol{b}_1 + s_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + s_{nj}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_n &= s_{1n}\boldsymbol{b}_1 + s_{2n}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + s_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

! A bázistranszformáció mátrixa mindig invertálható.

2 Függvénysorozatok, függvénysorok

Lorem ipsum odor amet, consectetuer adipiscing elit. Lobortis ut nec venenatis id himenaeos suscipit; habitant gravida dictum. Etiam praesent ad vestibulum iaculis pretium eros? Semper porttitor enim pharetra malesuada tortor amet odio tellus. Rhoncus sollicitudin cubilia lobortis eros ultricies aenean. Purus dis parturient nec; phasellus eros blandit. Dignissim facilisi torquent mollis, risus turpis a blandit per etiam. Quam sem lacus phasellus mi metus ante. Suspendisse leo duis cursus taciti ante.

Lorem ipsum odor amet, consectetuer adipiscing elit. Lobortis ut nec venenatis id himenaeos suscipit; habitant gravida dictum. Etiam praesent ad vestibulum iaculis pretium eros? Semper porttitor enim pharetra malesuada tortor amet odio tellus. Rhoncus sollicitudin cubilia lobortis eros ultricies aenean. Purus dis parturient nec; phasellus eros blandit. Dignissim facilisi torquent mollis, risus turpis a blandit per etiam. Quam sem lacus phasellus mi metus ante. Suspendisse leo duis cursus taciti ante.

Lorem ipsum odor amet, consectetuer adipiscing elit. Lobortis ut nec venenatis id himenaeos suscipit; habitant gravida dictum. Etiam praesent ad vestibulum iaculis pretium eros? Semper porttitor enim pharetra malesuada tortor amet odio tellus. Rhoncus sollicitudin cubilia lobortis eros ultricies aenean. Purus dis parturient nec; phasellus eros blandit. Dignissim facilisi torquent mollis, risus turpis a blandit per etiam. Quam sem lacus phasellus mi metus ante. Suspendisse leo duis cursus taciti ante.

A fejezetben érintett témakörök

2.1. Alapfogalmak

Definíció 2.1: Függvénysorozat

Az $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sorozatot függvénysorozatnak nevezzük.

Példák függvénysorozatokra:

- $f_n : \mathbb{R} \to [-1;1] \quad f_n(x) = \sin nx$
- $g_n : [0;\infty] \to \mathbb{R} \quad g_n(x) = x^n$
- $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad h_n(x) = e^{nx}$

Definíció 2.2: Függvénysorozat pontbeli konvergenciája

Ha az $x_0 \in I$ pontban az $(f_n(x_0))$ számsorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergens az x_0-ban. A konvergenciahalmaz:

$$H := \{\, x \mid x \in I \wedge (f_n) \text{ konvergens az } x \text{ pontban} \,\}.$$

Példák konvergenciahalmazra:

- $f_n(x) = \sin nx \quad H_{f_n} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
- $g_n(x) = x^n \quad H_{g_n} = [0;1]$
- $h_n(x) = e^{nx} \quad H_{h_n} = \{0\}$

Definíció 2.3: Függvénysorozat határfüggvénye

Az f függvényt az (f_n) függvénysorozat határfüggvényének nevezzük:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in H.$$

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az f határfüggvényhez a H-n, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon; x)$, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon; x)$.

Definíció 2.4: Függvénysorozat egyenletes konvergenciája

Az (f_n) egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $N(\varepsilon)$ úgy, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ minden $x \in E$ esetén.

Az egyenletes konvergenciából következik a pontonkénti konvergencia.

Az állítás azonban megfordítva nem igaz.

Tétel 2.1: Cauchy-kritérium függvénysorozatok konvergenciájára

- Az (f_n) akkor és csak akkor konvergens az $x_0 \in H$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, hogy $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$, ha $n; m > N(\varepsilon)$.
- Az (f_n) akkor és csak akkor konvergens az $H \subset I$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, hogy ha $n; m > N(\varepsilon, x)$, akkor $\forall x \in H$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.
- Az (f_n) akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, hogy ha $n; m > N(\varepsilon)$, akkor $\forall x \in E$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Bizonyítás:

Az első két eset bizonyítása a numerikus sorozatoknál tanultak szerint történik.

A harmadik eset bizonyítása:

($\Rightarrow$) Ha (f_n) egyenletesen konvergens E-n, akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \forall x \in E, \\ |f_m(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad m > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \forall x \in E. \end{aligned}$$

Továbbá, ha $n; m > N(\varepsilon/2)$ és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{<\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$, ha $n; m > N(\varepsilon)$ és $x \in E$. Ekkor f_n Cauchy-sorozat, f_m is az, azaz $f_m \to (x) \to f(x)$, ha $m \to \infty$, Ekkor:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in E.$$

Definíció 2.5: Függvénysor

Legyen $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénysorozat. Képezzük az alábbi függvénysorozatot:

$$\begin{aligned} s_1(x) &:= f_1(x), \\ s_2(x) &:= f_1(x) + f_2(x), \\ &\vdots \\ s_j(x) &:= \sum_{i=1}^{j} f_i(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Az így előálló (s_n) függvénysorozatot az (f_n) függvénysorozatból képzett függvénysornak hívjuk és $\sum f_n$-nel jelöljük.

Definíció 2.6: Függvénysor pontbeli konvergenciája

A $\sum f_n$ függvénysor konvergens az $x_0 \in I$ pontban, ha az (s_n) függvénysorozat konvergens az x_0 pontban.

Definíció 2.7: Függvénysor konvergenciahalmaza

Az $\sum f_n$ függvénysor konvergens a $H \subset I$ halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat konvergens a H-n.

Definíció 2.8: Függvénysor egyenletes konvergenciája

Az $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens az E-n.

Definíció 2.9: Függvénysor összegfüggvénye

Az $\sum f_n$ függvénysorozat összegfüggvénye az $s(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ függvény, ahol $x \in H$.

Tétel 2.2: Cauchy-féle konvergencia kritérium egyenletes konvergenciára

A $\sum f_n$ akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n; m > N(\varepsilon)$, akkor $\forall x \in E$ esetén $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$.

Bizonyítás:

Tétel 2.3: Weierstrass-tétel függvénysorok egyenletes konvergenciájára

Legyen $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénysorozat és $\sum f_n$ a belőle képzett függvénysor, továbbá $\sum a_n$ olyan konvergens numerikus sor, melyre $\forall x \in I$ esetén $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re $n > n_0 \in \mathbb{N}$ esetén.

Ekkor a $\sum f_n$ füffvénysor egyenletesen konvergens.

Bizonyítás:

Definíció 2.10: Függvénysor abszolút konvergenciája

A $\sum f_n$ függvénysort abszolút konvergensnek mondjuk, ha a $\sum |f_n|$ függvénysor konvergens.

A Weierstrass-tételbeli konvergencia abszolút konvergencia is.

Definíció 2.11: Hatványsor

Legyen $f_n(x) := a_n\,(x - x_0)^n$. A belőle képzett

$$\sum f_n(x) = \sum a_n\,(x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük, ahol a_n a hatványsor n-edik együtthatója, x_0 pedig a sorfejtés centruma.

Ha $x_0 = 0$, akkor a hatványsor az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\sum a_n \cdot x^n.$$

Definíció 2.12: Hatványsor konvergenciasugara

A $\sum a_n\,(x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}_b.$$

Tétel 2.4: Függvénysor konvergenciája

Legyen a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az x_0 pontot tartalmazó környezetben, továbbá legyenek a sor tagjai az x_0-ban folytonosak. Ekkor az összegfüggvény is folytonos az x_0 pontban.

Bizonyítás:

Tudjuk, hogy a $\sum f_n$ folytonos és egyenletesen konvergens. Azt akarjuk belátni, hogy $|f(x) - f(x_0)|$ tetszőlegesen kicsivé tehető, mert ekkor az összegfüggvény folytonos.

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le \\ &\le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon/3\ (i)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\varepsilon/3\ (ii)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\varepsilon/3\ (iii)} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ha $n > N(\varepsilon/3) := \max\{N_1(\varepsilon/3); N_2(\varepsilon/3); N_3(\varepsilon/3)\}$.

(i) egyenletes konvergencia miatt,

(ii) folytonosság miatt,

(iii) egyenletes konvergencia miatt.

1. Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye is folytonos.
2. Folytonos függvények egyenletesen konvergens függvénysorának összegfüggvénye is folytonos, ha a függvénysor tagjai folytonosak.

!

Bizonyítás:

Tétel 2.5: Tagonkénti integrálhatóság

Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai integrálhatóak az $[a;b]$ zárt intervallumon. Tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens az $[a;b]$-n és összegfüggvénye folytonos. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás:

Nem korlátos intervallum esetén nem igaz az állítás.

Tétel 2.6: Tagonkénti differenciálhatóság

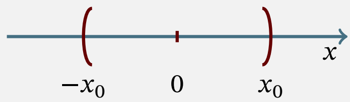
Legyenek az f_n függvénysor tagjai differenciálhatóak a J intervallumon, f_n' függvények folytonosak a J-n, valamint a $\sum f_n'$ és a $\sum f_n$ függvénysorok egyenletesen konvergensek a J-n. Ekkor

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Bizonyítás:

Tétel 2.7: Hatványsor konvergenciája

Ha a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergens az x_0 pontban, akkor az $x < x_0$ helyeken abszolút és egyenletesen konvergens.



Bizonyítás:

Ha a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergens az x_0 pontban, akkor $a_n x^n \to 0$, ha $n \to \infty$. Ekkor tehát korlátos is, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $|a_n x^n| \leq K$.

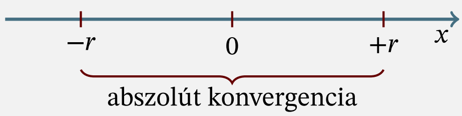
$$|a_n x^n| = \frac{|a_n|}{|x_0|^n}|x_0|^n|x|^n = \underbrace{|a_n x_0^n|}_{\leq K} \underbrace{\left|\frac{x}{x_0}\right|^n}_{<1 \text{ ha } |x|<|x_0|} \to 0$$

Ekkor $|a_n x^n| \leq K \cdot q^n$, tehát $\sum a_n x^n \leq \sum K \cdot q^n = K \cdot \sum q^n$. Láthatjuk, hogy így konvergens geometriai sorral becsülhetjük a hatványsort. Alkalmazva a Weierstrass-tételt, $\sum a_n x^n$ abszolút és egyenletesen is konvergens, ha $|x| < |x_0|$.

Tétel 2.8: Cauchy-Hadamard-tétel

Legyen r a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara. Ha ...

1. $r = 0$, akkor a hatványsor csak az $x_0 = 0$ pontban konvergens,
2. $r = \infty$, akkor a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens,
3. $0 < r < \infty$, akkor a hatványsor konvergens, ha $|x| < r$ és divergens, ha $|x| > r$.



Bizonyítás:

Az első két eset az előző tételek alapján könnyen adódik.

A harmadik esetben a hatványsor konvergens, ha $|x_0| < r$:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x_0^n|} = |x_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x_0|}{r} < 1.$$

Azaz létezik $q < 1$, hogy a $\sum a_n x^n$ hatványsor a gyökteszt miatt konvergens. Mivel x_0 tetszőleges volt ($|x_0| < r$), így minden $|x| < r$ esetén igaz, hogy a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergens. Ugyancsak a gyökteszt miatt a hatványsor divergens, ha $|x| > r$.

Ha a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték létetik, akkor ez megegyezik a $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ határértékkel. Gyakran így számolunk:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Tétel 2.9: Abel második tétele

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara r és ez a hatványsor az $x = r$ pontban konvergens. Ekkor a hatványsor a $[0; r]$ intervallumon egyenletesen konvergens, így az összegfüggvény is folytonos a $[0; r]$ intervallumon. Ha a hatványsor az $x = -r$ pontban konvergens, akkor a hatványsor a $[-r; 0]$ intervallumon egyenletesen konvergens, így az összegfüggvény is folytonos a $[-r; 0]$ intervallumon.

Bizonyítás:

Abel második tételének következményei:

1. A hatványsor összegfüggvénye a konvergencia intervallum belsejében folytonos.
2. A hatványsor konvergenciaintervallum tetszőleges részintervallumán tagonként integrálható, azaz ha $[a; b] \subset (-r; r)$ és $s(x) := \sum a_n x^n$ összegfüggvény, akkor

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\,\mathrm{d}x.$$

3. Ha $s(x)$ a hatványsor összegfüggvénye, akkor

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}.$$

2.2. Taylor-sorok

Tegyük fel, hogy az f függvény $\sum a_n x^n$ hatványsor alakban előállítható.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n\, a_n x^{n-1} \\
f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} \\
f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + \ldots + n\,(n-1)\,(n-2)\, a_n x^{n-3}
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $x = 0$.

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f'(0) &= a_1 \\
f''(0) &= 2a_2 \\
f'''(0) &= 3 \cdot 2a_3 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= n!\, a_n
\end{aligned}$$

Ebből felírva a függvényt:

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Zárt alakra hozva:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad \text{ahol} \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Definíció 2.13: Taylor-polinom

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely az x_0 pontban legalább p-szer differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli p-edik Taylor-polinomja:

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Írjuk fel a $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ függvény $x_0 = 1$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

$p^{(n)}(x)$	$p^{(n)}(1)$
$p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$	6
$p'(x) = 3x^2 + 6x$	9
$p''(x) = 6x + 6$	12
$p'''(x) = 6$	6

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \frac{6}{0!} + \frac{9}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \\
&= 6 + 9(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3
\end{aligned}$$

Tétel 2.10: Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal

Ha az f függvény legalább $(r+1)$-szer differenciálható az $(x;x_0)$ intervallumon és $f^{(k)}$ $\forall k \in \{1;2;\ldots;r\}$ esetén folytonos ay x és x_0 pontokban, akkor $\exists \xi \in (x;x_0)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1}}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}$$

Bizonyítás:
Definiáljuk a következő függvényt:

$$F(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(r)}(t)}{r!}(x-t)^r + \frac{c_{r+1}}{(r+1)!}(x-t)^{(r+1)}.$$

Válasszuk meg a c_{r+1} együtthatót úgy, hogy $F(x) = f(x)$. Differenciáljuk az $F(t)$ függvényt!

$$\begin{aligned} F'(t) = & f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!}\right) + \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{2!}2(x-t)\right) + \\ & + \cdots + \left(\frac{f^{(r+1)(t)}}{r!}(x-t)^r - \frac{f^{(r)}(t)}{r!}r(x-t)^{r-1}\right) - \frac{c_{r+1}}{r!}(r+1)(x-t)^r \end{aligned}$$

Ha felbontjuk a zárójeleket, akkor láthatjuk, hogy az egyes tagok páronként kiejtik egymást. Az egyenlőség az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$F'(t) = \frac{(x-t)^r}{r!}\left(f^{(r+1)} - c_{r+1}\right).$$

A Rolle-tétel alapján $\exists \xi \in (x;x_0)$, hogy $F'(\xi) = 0$. Ekkor:

$$0 = \underbrace{\frac{(x-\xi)^r}{r!}}_{\neq 0}\underbrace{\left(f^{(r+1)} - c_{r+1}\right)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad f^{(r+1)}(\xi) = c_{r+1}.$$

Definíció 2.14: Taylor-sor

Legyen az f függvény az x_0 pontban akárhányszor differenciálható. Ekkot a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 körüli Taylor-sorának nevezzük.

Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sorot Maclaurin-sornak nevezzük.

Tétel 2.11

Az előbb definiált Taylor-sor akkor és csak akkor állítja elő a függvényt az $x = x_0$ pont-ban, ha a maradéktag a nullához tart $n \to \infty$ esetén.

Bizonyítás:

Fontosabb függvények Maclaurin-sorai:

Függvény	Taylor-sor	Konvergencia intervallum
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1; 1]$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{artanh} x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$(-1; 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-1; 1]$
$(1+k)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$(-1; 1)$

2.3. Fourier-sorok

Definíció 2.15: Trigonometrikus polinom

Az alábbi alakú függvényt trigonometrikus polinopmnak nevezzük:

$$t_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Definíció 2.16: Trigonometrikus sor

Az alábbi alakó összeget trigonometrikus sornak nevezzük:

$$t(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

1. Az összegfüggvény, ha létezik 2π szerint periodikus.
2. Ha folytonos a függvény és egyenletesen konvergens, akkor az összegfüggvény is konvergens.

Definíció 2.17: Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy $2p$ szerint periodikus függvény, amely a $[0; 2p]$ intervallumon Riemann-integrálható. Ekkor a függvény Fourier-során az alábbi trigonometrikus sort értjük:

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right],$$

ahol az együtthatók a következők:

$$a_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$a_k = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \mathrm{d}x, \qquad b_k = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \mathrm{d}x$$

Ha az f függvény előáll a fenti típusú összegként, akkor az együtthatók csak ilyenek lehetnek.

Ha az f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor mindegy, hogy a $[0; 2p]$ intervallumon, vagy egy skalárral eltolva az $[a; a + 2p]$ intervallumon integrálunk, vagyis:

$$\int_0^{2p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2p} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tétel 2.12

Ha a 2π szerint periodikus f függvénynek létezik az x_0 pontban a jobb- és baloldali határértéke, továbbá az f függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens, akkor a Fourier-sor összege ezen pontokban a függvény bal- és jobboldali határértékeinek számtani középe.

Bizonyítás:

Ha az f függvény folytonos az x_0 pontban, akkor a Fourier-sor összege ebben a pontban a függvény határértékével egyezik meg.

Tétel 2.13

Ha a 2π szerint periodikus, integrálható f függvény szakaszonként monoton és az x_0 pontban differenciálható, akkor az f függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens.

Bizonyítás:

Ha egy függvény páros, akkor a Fourier-sorában csak a_0 és koszinusz tagok szerepelnek, vagyis $b_k \equiv 0$.

Bizonyítás:

!

Ha egy függvény páratlan, akkor a Fourier-sorában csak szinusz tagok szerepelnek, vagyis $a_0 \equiv 0$ és $a_k \equiv 0$.

Bizonyítás:

Állítsuk elő az f függvény Fourier-sorát, $f(x) = x^2$, ha $x \in [-\pi; \pi]$ és $f(x) = f(x+2k\pi)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Mivel a függvény páros, ezért a Fourier-sorában csak a_0 és a_k tagok szerepelnek. Az integrációs intervallumot $[-\pi; \pi]$-re választjuk.

Az a_0 együttható:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \frac{\pi^3}{3}.$$

Az a_k meghatározása:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{2x \cos kx}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{2 \sin kx}{k^3} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi \cos k\pi}{k^2} + \frac{2\pi \cos(-k\pi)}{k^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi \cos k\pi}{k^2} \right) = \frac{4}{k^2} \cos k\pi = \frac{4}{k^2} (-1)^k.$$

A Fourier-sor tehát:

$$F(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

3 Többváltozós analízis

Lorem ipsum odor amet, consectetuer adipiscing elit. Lobortis ut nec venenatis id himenaeos suscipit; habitant gravida dictum. Etiam praesent ad vestibulum iaculis pretium eros? Semper porttitor enim pharetra malesuada tortor amet odio tellus. Rhoncus sollicitudin cubilia lobortis eros ultricies aenean. Purus dis parturient nec; phasellus eros blandit. Dignissim facilisi torquent mollis, risus turpis a blandit per etiam. Quam sem lacus phasellus mi metus ante. Suspendisse leo duis cursus taciti ante.

Lorem ipsum odor amet, consectetuer adipiscing elit. Lobortis ut nec venenatis id himenaeos suscipit; habitant gravida dictum. Etiam praesent ad vestibulum iaculis pretium eros? Semper porttitor enim pharetra malesuada tortor amet odio tellus. Rhoncus sollicitudin cubilia lobortis eros ultricies aenean. Purus dis parturient nec; phasellus eros blandit. Dignissim facilisi torquent mollis, risus turpis a blandit per etiam. Quam sem lacus phasellus mi metus ante. Suspendisse leo duis cursus taciti ante.

Lorem ipsum odor amet, consectetuer adipiscing elit. Lobortis ut nec venenatis id himenaeos suscipit; habitant gravida dictum. Etiam praesent ad vestibulum iaculis pretium eros? Semper porttitor enim pharetra malesuada tortor amet odio tellus. Rhoncus sollicitudin cubilia lobortis eros ultricies aenean. Purus dis parturient nec; phasellus eros blandit. Dignissim facilisi torquent mollis, risus turpis a blandit per etiam. Quam sem lacus phasellus mi metus ante. Suspendisse leo duis cursus taciti ante.

A fejezetben érintett témakörök

3.1. Alapfogalmak

Definíció 3.1: Gömbkörnyezet

Legyen $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a $\boldsymbol{p}$ pont ε sugarú nyílt környezetén (gömbkörnyezetén) a

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}| < \varepsilon\} \text{ halmazt értjük.}$$

A továbbiakban $\mathbb{E}^n$ jelölje az n dimenziós euklideszi teret.

Definíció 3.2: Pontsorozat konvergenciája

A $(\boldsymbol{p}_n)$ $\mathbb{E}^n$-beli pontsorozat konvergens, ha $\exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{E}^n$, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $n > N(\varepsilon)$ esetén $\boldsymbol{p}_n \in B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$.

Ekkor a $\boldsymbol{p}$ pontot a sorozat határértékének, vagy határpontjának nevezzük.

Tétel 3.1: Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel

Végtelen, korlátos, $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmazból kiválasztható konvergens pontsorozat részsorozata. Ezen sorozat határértéke (határpontja) a ponthalmaz torlódási pontja.

Bizonyítás:

Többváltozós függvények jelölése:

Legyen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény. Ekkor a függvény az alábbi formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{f}(x_1; x_2; \dots ; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots ; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots ; x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1; x_2; \dots ; x_n) \end{bmatrix},$$

ahol az $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1; 2; \dots ; k\}$ függvényeket komponensfüggvényeknek nevezzük.

Speciális elnevezések:

- $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ vektor-vektor függvény,
- $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vektor-skalár függvény,
- $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ skalár-vektor függvény.

Definíció 3.3: Többváltozós függvény határértéke

Tekintsük az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezést. Azt mondjuk, hogy az f határértéke $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k$, ha az $\boldsymbol{A}$ tetszőleg $\varepsilon > 0$ sugarú gömbkörnyezetéhez létezik az $\boldsymbol{a}$-nak olyan $\delta(\varepsilon)$ sugarú gömbkörnyezete, hogy

$$\boldsymbol{x} \in B_{\delta(\varepsilon)}(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in B_{\varepsilon}(\boldsymbol{A}).$$

Definíció 3.4: Többváltozós függvény folytonossága

Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{f} : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés folytonos az értelmezési tartományának egy belső pontjában ($\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}_f$), ha az adott pontbeli határértéke megegyezik az adott pontbeli függvényértékkel, vagyis

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Tétel 3.2: Átviteli elv egyváltozós függvényekre

Az f függvény határértéke az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban akkor és csak akkor A, ha $\forall x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.

Tétel 3.3: Az átviteli elv általánosítása

Az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény határértéke az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban akkor és csak akkor $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k$, ha $\forall \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ sorozat esetén $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{A}$.

Definíció 3.5: Többváltozós függvény differenciálhatósága

Legyen $I \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^k$ leképezés. Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{f}$ differenciálható az $\boldsymbol{a} \in I$ pontban, ha $\exists A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés és $\boldsymbol{w} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény, hogy

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \quad \text{és} \quad \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}, \quad \text{hogy} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

!

Ha az $\boldsymbol{f} : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény differenciálható az $\boldsymbol{a} \in I$ pontban, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás:

Legyen $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, ekkor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = A(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{h}) = A(\boldsymbol{h}) + \dfrac{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|}$.

Ha $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, akkor $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{h})/\|\boldsymbol{h}\| \to \boldsymbol{0}$, azaz $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|$ tetszőlegesen kicsivé tehető, hiszen $\mathscr{A}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ tetszőleges lineáris leképezésre igaz. Az állítás így igaz.

Ha létezik az $\boldsymbol{f} : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvénynek az $\boldsymbol{a} \in I$ pontbeli deriváltja, akkor az $\mathscr{A}$ lineáris lekézezés egyértelmű.

Bizonyítás (Indirekt módon):

Tegyük fel, hogy $A_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ két különböző lineáris leképezés egyaránt az $\boldsymbol{f}$ függvénynek az $\boldsymbol{a}$ pontbeli deriváltja. Ekkor

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A_1(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} \quad \text{és} \quad \lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A_2(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}.$$

Vonjuk ki egymásból a két kifejezést:

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{\|A_1(\boldsymbol{h}) - A_2(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Mivel A_1 és A_2 lineáris leképezések, ezért a különbségük is az, ebből

$$A_1(\boldsymbol{h}) - A_2(\boldsymbol{h}) = \underbrace{(A_1 - A_2)}_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{h}).$$

Vizsgáljuk a $\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{u}$ esetet. Ekkor, ha $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, akkor $\lambda \to 0$ is igaz. Tehát

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\mathscr{B}(\lambda\boldsymbol{u})}{\|\lambda\boldsymbol{u}\|} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda\mathscr{B}(\boldsymbol{u})}{|\lambda|\,\|\boldsymbol{u}\|} = \boldsymbol{0}.$$

Mivel tetszőleges $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\lambda/|\lambda| = \pm 1$, ezért $\mathscr{B}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$. Azaz $\mathscr{B}$ lineáris leképezés, méghozzá a nulla leképezés, ezért $A_1 = A_2$, ami ellentmond a feltételezésnek.

Definíció 3.6: Többváltozós függvény differenciálhatósága

Az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés differenciálható az értelmezési tartományának egy adott pontjában, ha ebben a pontban a komponensfüggvényei is differenciálhatóak.

!

Legyen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ differenciálhatóak az $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban. Ekkor az $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ is differenciálható az $\boldsymbol{a}$ pontban, és

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a}).$$

!

Legyen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ differenciálható a z $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}_f$ pontban, és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\lambda\boldsymbol{f}$ is differenciálható az $\boldsymbol{a}$ pontban, és

$$(\lambda\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{a}) = \lambda\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}).$$

!

Legyen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ leképezések, $\forall x \in \mathcal{D}_f$-re $f(x) \in \mathcal{D}_g$, továbbá $\boldsymbol{f}$ differenciálható az $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}_f$ pontban és $\boldsymbol{g}$ differenciálható az $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ pontban. Ekkor a $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ is differenciálható az $\boldsymbol{a}$ pontban, és

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})) \circ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}).$$

3.2. Iránymenti és parciális deriváltak

Definíció 3.7: Iránymenti derivált

Legyen $I \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és legyen adva egy $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az f függvény $\boldsymbol{a}$ pontbeli $\boldsymbol{v}$ irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük. Jele:

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda}.$$

Amennyiben $\boldsymbol{v}$ az n-dimenziós téren az i-edik irányba mutat, akkor azt parciális deriváltnak nevezzük, jelölései:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \partial_i f(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_i} f(\boldsymbol{x}) = f'_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - \lambda, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda}.$$

Adjuk meg az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény parciális deriváltjait az $(1; 2)$ pontban!

Először határozzuk meg a parciális deriváltakat parametrikusan, majd számoljuk ki az $(1; 2)$ pontbeli értékeket:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\right|_{(1;2)} = 3 + 20 + 12 + 5 = 40,$$

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 5x^2 + 6xy - 36y^2 - 6 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right|_{(1;2)} = 5 + 12 - 144 - 6 = -133.$$

Definíció 3.8: Gradiens

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Az f függvény $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ pontbeli gradiensén az alábbi oszlopvektort értjük:

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\boldsymbol{a}) \\ \partial_2 f(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^\intercal$$

A gyakrolatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Számítsuk ki az $f(x;y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény $\boldsymbol{v}(3;4)$ irányú deriváltját az $(1;2)$ pontban!

A gradiens az előző példában számolt parciális deriváltak alapján:

$$\operatorname{grad} f(1;2) = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált számításához még szükségünk van az $\boldsymbol{v}$ irányú egységvektorra:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{e}}_v = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(1;2) = \operatorname{grad} f(1;2) \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 40 \cdot 3/5 - 133 \cdot 4/5 = -82{,}4.$$

Definíció 3.9: Jacobi-mátrix

Legyen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés. Ekkor $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) = \mathbf{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, ahol $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_{k\times n}$. A $\mathbf{J}$ mátrixot az $\boldsymbol{f}$ függvény Jacobi-mátrixának nevezzük, melynek elemei:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \operatorname{grad}^\intercal f_1(\boldsymbol{a}) \\ \operatorname{grad}^\intercal f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}^\intercal f_k(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix}$$

Tétel 3.4: Young-tétel

Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{a} \in I$, továbbá $\boldsymbol{a}$-nak létezik olyan környezete, amelyben f összes p-edrendű parciális deriváltja létezik és folytonos. Ekkor

$$\partial_i \partial_j f(\boldsymbol{a}) = \partial_j \partial_i f(\boldsymbol{a}), \quad i; j \in \{1; 2; \dots; n\},$$

azaz a parciális deriváltak sorrendje p-ed rendig felcserélhető.

Bizonyítás:

3.3. Középértéktételek

Definíció 3.10

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$. Az H halmazt konvexnek mondjuk, ha minden $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in H$ és $\lambda \in [0; 1]$ esetén $\lambda\boldsymbol{a} + (1 - \lambda)\boldsymbol{b} \in H$ teljesül.

Ami konvex, az összefüggő, de fordítva nem igaz.

Tétel 3.5: Lagrange-tétel

Legyen $f : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos és (totálisan) differenciálható az $(a; b)$-n. Ekkor létezik $\xi \in (a; b)$, hogy

$$\|f(b) - f(a)\| = \|f'(\xi)\| \cdot (b - a).$$

Bizonyítás:
Legyen $\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}$ és $\varphi(t) := \langle f(b) - f(a); f(t)\rangle$. Ekkor

$$\begin{aligned}\varphi(b) - \varphi(a) &= \langle f(b) - f(a); f(b)\rangle - \langle f(b) - f(a); f(a)\rangle = \\ &= \langle f(b) - f(a); f(b) - f(a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|^2.\end{aligned}$$

A Lagrange-féle középértéktétel felírva φ-re, $\exists \xi \in (a; b)$, hogy

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi) \cdot (b - a) \quad \text{és} \quad \varphi'(t) = \langle f(b) - f(a); f'(t)\rangle.$$

Ekkor

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b) - f(a), f'(\xi)\rangle \cdot (b - a) \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(\xi)\| \cdot (b - a).$$

Tehát

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(\xi)\| \cdot (b - a)$$

Az egyszerűsítés után következik, hogy

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)\| \cdot (b - a).$$

Tétel 3.6

Legyen $H \subset \mathbb{R}^l$, $f : H \to \mathbb{R}^m$ továbbá H konvex és nyílt, valamint f differenciálható H-n. Ekkor minden $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in H$ esetén létezik $\xi \in H$ az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$-t összekötő szakaszon, hogy

$$\|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\| \leq \|f'(\xi)\| \cdot \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Bizonyítás:
Legyen $\gamma : [0; 1] \to H$ az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$-t összekötő szakasz. Azaz $\gamma(t) = t\boldsymbol{a} + (1 - t)\boldsymbol{b}$. Az $f \circ \gamma$-ra alkalmazva a Lagrange-tételt adódik a bizonyítás állítása.

Definíció 3.11

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezés, melyre $\forall \boldsymbol{x} \in H$-ra $\|f'(\boldsymbol{x})\| < M$ teljesül. Ekkor $\|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\| \leq M\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|$ a Lagrange-féle középértéktétel miatt adódik. Az ilyen f leképezést Lipschitz-feltételnek eleget tevőnek mondjuk.

Tétel 3.7

Legyen adott $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ és annak r sugarú környezete $B_r(\boldsymbol{a})$, valamint az $f : B_r(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$ leképezés. Tegyük fel, hogy létezik az összes parciális derivált $B_r(\boldsymbol{a})$-n. Ekkor minden $\boldsymbol{b} \in B_r(\boldsymbol{a})$ esetén létezik $\xi \in B_r(\boldsymbol{a})$, melyre

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| > \|\xi - \boldsymbol{a}\| \quad \text{és} \quad \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\| = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\xi)(b_i - a_i),$$

ahol $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ és $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$.

Bizonyítás:

3.4. Szélsőértékszámítás

Definíció 3.12: Többváltozós függvény maximuma

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f-nek az $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int} H$ pontban lokális maximuma van, ha létezik az $\boldsymbol{a} \in U \subset H$ környetzete, hogy $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x}) \;\; \forall \boldsymbol{x} \in U$-ra.

Definíció 3.13: Többváltozós függvény minimuma

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f-nek az $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int} H$ pontban lokális minimuma van, ha létezik az $\boldsymbol{a} \in U \subset H$ környetzete, hogy $f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x}) \;\; \forall \boldsymbol{x} \in U$-ra.

Definíció 3.14: Stacionárius pont

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int} H$ és léteznek az f parciális deriváltjai az $\boldsymbol{a}$ pontban. Ha $\forall i \in \{1; 2; \ldots; n\}$-re $\partial_i f(\boldsymbol{a}) = 0$, akkor az $\boldsymbol{a}$ a függvény stacionárius pontja.

Tétel 3.8

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ha az f függvény az összes változója szerint parciálisan differenciálható az $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int} H$ pontban, és ott lokális szélsőértéke van, akkor az $\boldsymbol{a}$ stacionárius pontja az f függvénynek.

Bizonyítás:

Definíció 3.15: Lineáris forma

Legyen a V a T test feletti vektortér. Ha a $\varphi : V \to \mathbb{R}$ leképezés lineáris, vagyis

$$\varphi(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{x}) + \mu \varphi(\boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \in V, \lambda; \mu \in \mathbb{R},$$

akkor a φ-t lineáris formának is hívjuk.

Definíció 3.16: Billineáris forma

Legyen $\psi : V \times V \to \mathbb{R}$ mindkét változójában lineáris, azaz

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y}) &= \lambda_1 \psi(\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{y}) + \lambda_2 \psi(\boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y} \in V, \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \psi(\boldsymbol{x}; \mu_1 \boldsymbol{y}_1 + \mu_2 \boldsymbol{y}_2) &= \mu_1 \psi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}_1) + \mu_2 \psi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}_2) \qquad \forall \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}_1; \boldsymbol{y}_2 \in V, \mu_1; \mu_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ekkor a ψ-t bilineáris formának mondjuk.

A ψ bilineáris forma szimmetrikus, ha $\psi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\psi(\boldsymbol{y};\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x};\boldsymbol{y}\in V$-re.
A ψ bilineáris forma antiszimmetrikus, ha $\psi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=-\psi(\boldsymbol{y};\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x};\boldsymbol{y}\in V$-re.

Definíció 3.17: Kvadratikus forma

Legyen $\eta : V\to\mathbb{R}$. Ha létezik olyan $\psi : V\times V\to\mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma, hogy $\eta(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x}\in V$-re, akkor az η-t kvadratikus formának, vagy kvadratikus alaknak nevezzük.

Az η kvadratikus forma...

- pozitív definit, ha $\eta(\boldsymbol{x})>0 \quad \forall \boldsymbol{x}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$,
- negatív definit, ha $\eta(\boldsymbol{x})<0 \quad \forall \boldsymbol{x}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$,
- pozitív szemidefinit, ha $\eta(\boldsymbol{x})\geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$,
- negatív szemidefinit, ha $\eta(\boldsymbol{x})\leq 0 \quad \forall \boldsymbol{x}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$.

Ha ezek egyike sem teljesül, indefinit kvadratikus formáról beszélünk.

Tétel 3.9

Legyen $f : H\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az f függvény az összes változója szerint parciálisan differenciálható az $\boldsymbol{a}\in\operatorname{int}H$ pont valamely környezetében. Legyen továbbá az $\boldsymbol{a}$ stacionárius pontja az f-nek és $Q : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ olyan kvadratikus forma, melynek mátrixa:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{a})=\begin{bmatrix}\partial_1^2 f(\boldsymbol{a}) & \partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \partial_1\partial_n f(\boldsymbol{a})\\ \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a}) & \partial_2^2 f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \partial_2\partial_n f(\boldsymbol{a})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_n\partial_1 f(\boldsymbol{a}) & \partial_n\partial_2 f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \partial_n^2 f(\boldsymbol{a})\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times n}.$$

- Ha Q pozitív definit, akkor az $\boldsymbol{a}$ pontban az f-nek lokális minimuma van.
- Ha Q negatív definit, akkor az $\boldsymbol{a}$ pontban az f-nek lokális maximuma van.
- Ha Q indefinit, akkor az $\boldsymbol{a}$ pontban az f-nek nincs szélsőértéke.

Tétel 3.10

Legyen $n=2$ és teljesüljenek az előző tétel feltételei. Ekkor

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{a})=\det\mathbf{Q}(\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}\partial_1^2 f(\boldsymbol{a}) & \partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a})\\ \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a}) & \partial_2^2 f(\boldsymbol{a})\end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \mathcal{S}(\boldsymbol{a})=\operatorname{tr}\mathbf{Q}(\boldsymbol{a})=\partial_1^2 f(\boldsymbol{a})+\partial_2^2 f(\boldsymbol{a})$$

- Ha $\mathcal{D}(\boldsymbol{a})>0$ és $\mathcal{S}(\boldsymbol{a})>0$, akkor az $\boldsymbol{a}$ pontban az f-nek lokális minimuma van.
- Ha $\mathcal{D}(\boldsymbol{a})>0$ és $\mathcal{S}(\boldsymbol{a})<0$, akkor az $\boldsymbol{a}$ pontban az f-nek lokális maximuma van.
- Ha $\mathcal{D}(\boldsymbol{a})<0$, akkor az $\boldsymbol{a}$ pontban az f-nek nincs szélsőértéke.

TODO: SOME EXAMPLE

TODO: SOME EXAMPLE

Definíció 3.18

Legyen $m; n \in \mathbb{Z}^+$, $m > n$, $H \in \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{g} : H \to \mathbb{R}^n$ leképezések, továbbá $H_0 := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in H \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$. Ha az f függvény H_0-ra való leszűkítésének ($f|_{H_0}$) az $\boldsymbol{a}$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor azt mondjuk, hogy az f-nek az $\boldsymbol{a}$ pontban feltételes szélsőértéke van a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ feltétellel.

Definíció 3.19: Lagrange féle multiplikátor

Legyen $m; n \in \mathbb{Z}^+$, $m > n$, $H \in \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{g} : H \to \mathbb{R}^n$ leképezések, továbbá $H_0 := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in H \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$. Tegyük fel, hogy az f és $\boldsymbol{g}_i$ függvények minden parciális deriváltja folytonos a H halmazon. Ha az f függvény az $\boldsymbol{a} \in H_0$ pontban feltételes szélsőértéke van a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ feltétellel és a

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(\boldsymbol{a}) & \partial_2 g_1(\boldsymbol{a}) & \cdots & \partial_n g_1(\boldsymbol{a}) \\ \partial_1 g_2(\boldsymbol{a}) & \partial_2 g_2(\boldsymbol{a}) & \cdots & \partial_n g_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n(\boldsymbol{a}) & \partial_2 g_n(\boldsymbol{a}) & \cdots & \partial_n g_n(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} = n \text{ (maximális)},$$

akkor léteznek olyan $\lambda_1; \lambda_2; \ldots \lambda_n$ skalárok, hogy

$$\partial_i f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \partial_i g_k(\boldsymbol{a}) = 0 \quad \forall i \in \{1; 2; \ldots; m\}.$$

A $\lambda_1; \lambda_2; \ldots \lambda_n$ skalárokat Lagrange-féle multiplikátoroknak nevezzük.

3.5. Integrálszámítás

Definíció 3.20: Primitív függvény

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\boldsymbol{f} : H \to \mathbb{R}^n$. Az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt az $\boldsymbol{f}$ függvény primitív függvényének nevezzük, ha $\forall \boldsymbol{x} \in H$-ra $F'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ teljesül, azaz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) & f_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Tétel 3.11: Primitív függvény létezésének szükséges feltétele

Ha $D \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ és $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $\boldsymbol{f}$ primitív függvénye, akkor $\partial_i f_j = \partial_j f_i$, ahol $i; j \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

Bizonyítás:

Ha f-nek létetik a primiv függvénye, akkor $\partial_i F = f_i$, valamint $\partial_j F = f_j$. Alkalmazzuk a Young-tételt:

$$\partial_j f_i = \partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F = \partial_i f_j.$$

Tétel 3.12: Primitív függvény létezésének elégséges feltétele

Legyen $D \in \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt halmaz. Ha $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és $\forall i; j \in \{1; 2; \ldots; n\}$-re $\partial_i f_j = \partial_j f_i$, akkor $\boldsymbol{f}$-nek létezik primitív függvénye.

Bizonyítás:

Definíció 3.21

Ha $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, ..., $a_n < b_n$, $a_i; b_i \in \mathbb{R}^n$, $i; j \in \{1; 2; \ldots; n\}$, akkor az

$$[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \cdots \times [a_n; b_n]$$

sorozatot $\mathbb{R}^n$-beli zárt intervallumnak nevezzük. Az

$$(a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \times \cdots \times (a_n; b_n)$$

sorozatot $\mathbb{R}^n$-beli nyílt intervallumnak hívjuk.

Legyen $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$. Ekkor

$$[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \dots \times [a_n; b_n] = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}].$$

Legyen $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$. Ekkor

$$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \operatorname{int}[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}].$$

Definíció 3.22

Legyen $I = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

- Az intervallum térfogata:

$$\operatorname{vol} I = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

- Az intervallum térfogata:

$$\operatorname{diam} I = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}.$$

- Az intervallum beosztásán egy olyan $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ sorozatot értünk, melyre

$$\bigcup_{i=1}^{k} I_i = I \text{ és } \operatorname{int} I_i \cap \operatorname{int} I_j = \emptyset, \text{ha } i \neq j.$$

- Az intervallum egy $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ egy beosztásának σ finomságán a legnagyobb átmérőjű részintervallum átmérőjét értjük:

$$\sigma(d) = \max\{\operatorname{diam} I_i\}.$$

- Az $e : \{J_1; J_2; \dots; J_k\}$ beosztást a d beosztás finomításának nevezzük, ha létezik olyan J_m $m \in \{1; 2; \dots n\}$, melyre $J_m \subset I_n$ $n \in \{1; 2; \dots k\}$.

Legyen $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ az I intervallum egy beosztása, ekkor:

$$\operatorname{vol} I = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol} I_i.$$

!

Bizonyítás:

Bármely beosztás normál beosztássá tehető.

Bizonyítás:

Definíció 3.23

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ zárt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ha $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ egy beosztása I-nek, akkor ...

- a d beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg:

$$\underline{S}(f;d) := \sum_{i=1}^{k} \inf\{f(I_i)\} \operatorname{vol} I_i.$$

- a d beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg:

$$\bar{S}(f;d) := \sum_{i=1}^{k} \sup\{f(I_i)\} \operatorname{vol} I_i.$$

- a d beosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$\Omega(f;d) = \underline{S}(f;d) - \bar{S}(f;d).$$

- Legyen $\boldsymbol{x}_i \in I_i$, ekkor a d beosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg:

$$\sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{x}_i) \operatorname{vol} I_i.$$

Legyen $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ és $e := \{J_1; J_2; \dots; J_k\}$ az I intervallum egy beosztása, ekkor ha e finomabb beosztás mint d igazak az alábbiak:

- $\underline{S}(f;d) \le \underline{S}(f;e)$
- $\bar{S}(f;d) \ge \bar{S}(f;e)$
- $\Omega(f;d) \le \Omega(f;e)$

Bizonyítás:

Az I tetszőleges d_1 és d_2 beosztása esetén $\underline{S}(f;d_1) \leq \bar{S}(f;d_2)$.

Bizonyítás:

!

Mivel ezen állítás szerint egy tetszőleges beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg nem nagyobb egy másik tetszőlegesen választott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összegnél, ezért az alsó illetve felső integrálközelítő összegek halmaza felülről illetve alulról korlátos.

Definíció 3.24

Az $\underline{S}(f) := \sup\{\underline{S}(f;d)\}$, ahol d beosztása I-nek. Az $\underline{S}(f)$-t alsó Darboux-integrálnak nevezzük.

Az $\bar{S}(f) := \inf\{\bar{S}(f;d)\}$, ahol d beosztása I-nek. Az $\bar{S}(f)$-t felső Darboux-integrálnak nevezzük.

Definíció 3.25

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvényt Riemann-integrálhatónak mondjuk, ha $\underline{S}(f) = \bar{S}(f)$. Ezt a közös értéket

$$\int_I f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\text{-szel vagy } \int_I f\text{-fel jelöljük.}$$

Az I intervallumon vett Riemann-integrálható függvények összességét $\mathcal{R}(I)$-vel jelöljük.

Tétel 3.13: Darboux-tétel

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha a d beosztás finomsága kisebb $\delta(\varepsilon)$-nál ($\sigma(d) < \delta(\varepsilon)$), akkor $\underline{S}(f) - \underline{S}(f;d) < \varepsilon$ és $\bar{S}(f;d) - \bar{S}(f) < \varepsilon$.

Bizonyítás:

Tétel 3.14

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ zárt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az alábbi állítások igazak:

1. $f \in \mathcal{R}(I)$.
2. Oszcillációs kritérium: $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $\sigma(d) < \delta$, akkor $\Omega(f; d) < \varepsilon$.
3. A Darboux-tételből levezethető, hogy létezik $A \in \mathcal{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ beosztása I-nek, melyre $\sigma(d) < \delta(\varepsilon)$, akkor
$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(t_i) \operatorname{vol} I_i - A\right| < \varepsilon, \text{ ahol } t_i \in I_i.$$

A harmadik pontban szereplő A érték az f függvény I-n vett Riemann-integrálja.

Definíció 3.26

Az $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt Lebesgue szerint nullmérékűnek mondjuk, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ intervallumrendszer, melyre az intervallumok uniója lefedi H-t ($H \subset \bigcup I_i$), és $\operatorname{vol} I_i < \varepsilon$ teljesül.

!

Legyen $H_1; H_2; \dots; H_n \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue szerint nullmérékű halmazok sorozata. Ekkor
$$\bigcup H_i \text{ugyancsak nullmérékű.}$$

Bizonyítás:

Definíció 3.27

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $I_r(\boldsymbol{a})$ jelölje az $\boldsymbol{a}$ körüli r sugarú nyílt kockát, ahol

$$\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \text{ és } I_r(\boldsymbol{a}) = \bigcup_i (a_i - r; a_i + r).$$

Ekkor:

$$m_r(\boldsymbol{a}) := \inf\{f(\boldsymbol{x}) | I \cap I_r(\boldsymbol{a})\},$$
$$M_r(\boldsymbol{a}) := \sup\{f(\boldsymbol{x}) | I \cap I_r(\boldsymbol{a})\}.$$

Megállapíthatjuk, hogy ha r csökken, akkor m_r nem csökkenhet és M_r nem nőhet, azaz m_r monoton növekvő és M_r monoton csökkenő ha r csökken. Ez alapján:

$$m(\boldsymbol{x}) := \lim_{r \to 0} m_r(\boldsymbol{x}),$$
$$M(\boldsymbol{x}) := \lim_{r \to 0} M_r(\boldsymbol{x}).$$

Az $m : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt alsó burkológörbének, és az $M : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt felső burkológörbének nevezzük.

!

Az f függvény folytonos az $\boldsymbol{x}_0 \in D_f$ pontban, akkor és csak akkor, ha $m(\boldsymbol{x}_0) = M(\boldsymbol{x}_0)$.

Bizonyítás:

Tétel 3.15: Lebesgue-tétel

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény Riemann-integrálható, akkor és csak akkor, ha f szakadási helyeinek halmaza Lebesgue szerint nullmérékű.

Bizonyítás:

! Legyenek $f, g \in \mathcal{R}(I)$, ekkor $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$, ahol $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ és

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

! Legyen $f \leq g$ és $f; g \in \mathcal{R}(I)$, ekkor

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Az előző állításból következik, hogy ha $f \in \mathcal{R}(I)$, akkor $f \in \mathcal{R}(I)$, valamint

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

A teljes felbontáshoz tartozó integrál a részintervallumokhoz tartozó integrálok összege. Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ egy beosztása. Ekkor $f \in \mathcal{R}(I)$ akkor és csak akkor, ha

$$f|_{I_i} \in \mathcal{R}(I) \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; k\}\text{-re és} \quad \int_I f = \sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} f|_{I_i}$$

! **Bizonyítás**:

Tétel 3.16: Középértéktétel

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos integrálható függvény, $m = \inf f(I)$ és $M = \sup f(I)$. Ekkor

$$m \operatorname{vol} I \leq \int_I f \leq M \operatorname{vol} I.$$

Bizonyítás:

Definíció 3.28

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, és I_H a H-t tartalmazó legszűkebb tégla. Ekkor értelmezhetjük az f-nek I_H-ra való kiterjesztését: $\hat{f} : I_H \to \mathbb{R}$, melyre

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

!

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, és legyen $I \supset H$ zárt intervallum. Továbbá legyen $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$, melyre

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \int_H f = \int_I \hat{f}.$$

Bizonyítás:

Ha I legszűkebb tégla, akkor a definíció szerint igaz az egyenlőség. Ha I nem a legszűkebb tégla, akkor az intervallum additivitást alkalmazva belátható hogy a hozzávett részek integrálközelítő értéke 0, azaz igaz az állítás.

Definíció 3.29: Diffeomorfizmus

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ és $G \subset \mathbb{R}^n$ két nemüres tartomány, valamint $\varphi : D \to G$ leképezést diffeomorfizmusnak nevezzük, ha φ bijekció (kölcsönösen egyértelmű), folytonosan differenciálható és $\forall \boldsymbol{x} \in D$-re $|\varphi'(\boldsymbol{x})| \neq 0$.

!

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ Reimann-integrálható függvény, továbbá $\varphi : G \to D$ diffeomorfizmus. Ekkor

$$\int_D f = \int_G f \circ \varphi \cdot |\varphi'|,$$

ahol $|\varphi'|$ a Jacobi-mátrix determinánsa.