6 Integrálátalakító tételek

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 07.

6.1. Elméleti áttekintő

Tétel 6.1 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\boldsymbol{\gamma} : [a;b] \to \mathcal{C} \subseteq U$, $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ folytonos görbe, $\mathbf{r}(a) = \boldsymbol{p}$, $\mathbf{r}(b) = \boldsymbol{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(\boldsymbol{q}) - \varphi(\boldsymbol{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

Körintegrál jelölése:

Ha $\boldsymbol{\gamma}$ zárt görbe, akkor a $\varphi(\boldsymbol{r})$ skalármező egy $\boldsymbol{\gamma}$ görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s.$$

A Gradiens-tételből következik, hogy skalárpotenciálos vektormező zárt görbe mentén vett körintegrálja zérus.

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y+z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x+z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x+y)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt a $z = 0$ síkon lévő, origó középpontú, $r = 3$ sugárú kör mentén!

Vizsgáljuk meg, hogy a vektormező skalárpotenciálos-e:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x(x+z) - \partial_y(y+z) \\ \partial_y(x+y) - \partial_z(x+z) \\ \partial_z(y+z) - \partial_x(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

Mivel a vektormező skalárpotenciálos, ezért létezik olyan skalármező, melynek gradiense maga a $\boldsymbol{v}$ vektormező. Az integrál értéke tehát csak a kezdő- és végpontoktól függ, melyek jelen esetben megegyeznek, vagyis az integrál értéke zérus:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = 0.$$

Tétel 6.2 : Stokes-tétel

Legyen $\boldsymbol{\varrho} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az $\boldsymbol{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ a $\boldsymbol{\varrho}$ peremét indukált, jobbézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle .$$

Ha $\boldsymbol{v}$ skalárpotenciálos, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt a $P_1(0;1;0)$, $P_2(2;0;0)$ és $P_3(0;0;0)$ által meghatározott háromszög mentén!

Határozzuk meg a $\boldsymbol{v}$ vektormező rotációját:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{0}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Stokes-tétel Maxwell III. és IV. egyenletében

A Stokes-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. A harmadik és negyedik egyenlet a mágneses tér és az elektromos tér közötti kapcsolatot írja le:

$$\begin{array}{llll} (III) & \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}} & \Rightarrow & \text{elektromos tér – mágneses tér változása,} \\ (IV) & \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}} & \Rightarrow & \text{mágneses tér – elektromos tér változása,} \end{array}$$

ahol $\boldsymbol{E}$ az elektromos tér, $\boldsymbol{B}$ a mágneses tér, $\boldsymbol{j}$ az áram sűrűség, μ_0 a mágneses permeabilitás és ε_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Stokes-tétel segítségével:

$$\begin{array}{ll} (III) \quad \Rightarrow & \displaystyle\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{E}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = -\iint_{\mathcal{S}} \langle \dot{\boldsymbol{B}}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle , \\ (IV) \quad \Rightarrow & \displaystyle\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{B}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle . \end{array}$$

A III. egyenlet azt mondja ki, hogy változó mágneses tér maga körül balkézszabály szerint elektormos teret indukál, míg a IV. egyenlet azt jelenti, hogy az elektromos tér változása jobbkézszabály szerint mágneses teret indukál.

Tétel 6.3 : Gauss-Osztogradszkij-tétel

Legyen $\boldsymbol{\Omega} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, irányított,parametrizált tértartomány. Legyen továbbá $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ az $\boldsymbol{\Omega}$ peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle .$$

Ha $\boldsymbol{v}$ vektorpotenciálos, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$.

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xy^2z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (2xyz^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt az első térnyolcadban lévő egységkocka felületén kifele mutató irányítással!

Határozzuk meg a $\boldsymbol{v}$ vektormező divergenciáját:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial x^2yz}{\partial x} + \frac{\partial xy^2z}{\partial y} + \frac{\partial 2xyz^2}{\partial z} = 8xyz.$$

A Gauss-Osztogradszkij-tétel alapján:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 8xyz \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 1.$$

Gauss-Osztogradszkij-tétel Maxwell I. és II. egyenletében

A Gauss-Osztogradszkij-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. Az első két egyenlet az elektromos és mágneses tér forrásosságát írja le:

$$\begin{aligned} &(I) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \text{elektromos tér forrásos,} \\ &(II) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{mágneses tér forrásmentes,} \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{E}$ az elektromos tér, $\boldsymbol{B}$ a mágneses tér, ρ az elektromos töltéssűrűség, ε_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Gauss-Osztogradszkij-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} &(I) \quad \Rightarrow \quad \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{E}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, \mathrm{d}V, \\ &(II) \quad \Rightarrow \quad \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{B}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}V = 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet azt mondja ki, hogy zárt felületen áthaladó elektromos tér fluxusa arányos az elektromos töltéssűrűség térfogati integráljával. A második egyenlet pedig azt jelenti, hogy a mágneses tér fluxusa zárt felületen zérus, a mágneses tér forrásmentes.

Tétel 6.4 : Green-tétel asszimetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi\, \Delta\varphi + \langle \operatorname{grad} \psi; \operatorname{grad} \varphi \rangle \, \mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle \, .$$

$\psi = 1$ választásával visszanyerjük a Gauss-Osztogradszkij-tételt:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta\varphi \, \mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \underbrace{\operatorname{grad} \varphi}_{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \left\langle \underbrace{\operatorname{grad} \varphi}_{\boldsymbol{v}}; \mathrm{d}\mathbf{S} \right\rangle .$$

Tekintsünk egy $R = 1\,\mathrm{m}$ sugarú tömör alumínium gömböt, amelynek stacionárius hőmérséklet-eloszlása $\varphi(\boldsymbol{r}) = T_0(1 - \boldsymbol{r}^2)$ függvény írja le, ahol $T_0 = 10\,\mathrm{K}$ a gömb belső hőmérséklete. Határozza meg a gömb felületén kifelé irányuló összes $\dot{Q}$ hőáramot, ha a hőfluxus sűrűsége $\boldsymbol{q} = -\lambda \operatorname{grad} \varphi$, ahol $\lambda = 205\,\mathrm{W/(m\,K)}$ az alumínium hővezetési tényezője, és

$$\dot{Q} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{q}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle \, .$$

Használjuk a Green-tétel asszimetrikus alakját $\psi = -\lambda$ állandó választással:

$$\dot{Q} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle -\lambda \operatorname{grad} \varphi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = -\iiint_{\mathcal{V}} \psi\, \Delta\varphi + \left\langle \underbrace{\operatorname{grad} \lambda}_{=\boldsymbol{0}}; \operatorname{grad} \varphi \right\rangle \mathrm{d}V = -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta\varphi \, \mathrm{d}V.$$

Számítsuk ki a térfogat belsejében a $\Delta\varphi$ értékét:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -6T_0.$$

A hőáram összesen:

$$\dot{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{-\lambda(-6T_0)}_{=\text{const}} \mathrm{d}V = -\lambda(-6T_0)\frac{4\pi R^3}{3} = 8\pi\lambda T_0 R^3 \approx 5{,}15 \cdot 10^4\,\mathrm{W}.$$

Tétel 6.5 : Green-tétel szimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi\, \Delta\varphi + \varphi\, \Delta\psi \;\; \mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle$$

6.2. Feladatok

1. Egy automata raktárrendszer ferromágneses manipulátora egy előre számított mágneses potenciálmezőben mozog. A számított Joule-potenciál a munkatérben
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = 2x^2y + 3yz.$$
A csípőkaron lévő, $Q = 1\,\mathrm{C}$ ekvivalens töltéssel modellezett végfogót a vezérlőnek az
$$A(0;0;0) \to B(2;1;3)$$
pontok között kell mozgatnia. Mennyi munkát végez a mágneses tér a végfogón, és miért nem kell törődnünk az útvonal pontos alakjával? ($\boldsymbol{F} = -Q\,\mathrm{grad}\,\varphi$, a munka az erő pálya menti integrálja)

2. Egy mágneses rendszer vezérlője egy
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (y\,\sin x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2\,\cos y - \cos x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (b_3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$
vektormezővel modellezett mágneses teret hoz létre. Határozza meg b_3 értékét, ha
   a) $\boldsymbol{B}$ bármely zárt görbe menti cirkulációja zérus,
   b) $\boldsymbol{B}$ bármely zárt felület menti fluxusa zérus.

3. Egy $R = 1$ sugarú, kör keresztmetszetű, z tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (2xy + z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2 + z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (y - x)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$
vektormező írja le. Adja meg a $z = 1$ síkban lévő keresztmetszet menti cirkulációt! (A cirkuláció a vektormező zárt görbe menti integrálja.)

4. Jelölje $\mathcal{S}$ az $x^2+y^2-z^2 = 1$ egyenlezű forgáshiperboloid $z = -1$ és $z = 1$ síkok közötti részét. Határozza meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y^3)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\mathcal{S}$ peremén vett integrálját!

5. Egy fotonikus chipeket hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségelosztással ($\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, az ellipszoid egyenlete pedig:
$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

6. Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara $R = 0{,}02\,\mathrm{m}$, A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmérséklet-mező jó közelítéssel
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = T_c - \alpha \boldsymbol{r}^2, \quad \alpha = 1{,}3 \cdot 10^5\,\mathrm{K/m^2}.$$
Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha
$$q_{\text{hő}} = -\lambda \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathrm{grad}\,\varphi; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle\,, \quad \lambda = 0{,}2\,\mathrm{W/(m\,K)}.$$