13

Integrálszámítás III

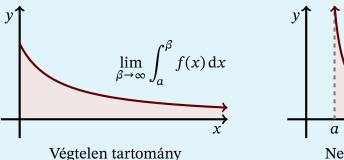
Matematika G1 – Integrálszámítás Utoljára frissítve: 2024. november 11.

13.1. Elméleti Áttekintő

Improprius integrál:

A Riemann-integrál definíció szerint akkor használható, hogyha az integrációs intervallum véges, valamint ezen intervallumon az integrálandó függvény is korlátos. Előfordulhat azonban olyan eset, hogy

- · végtelen tartományon szeretnénk integrálni,
- az integrálandó függvény nem korlátos az integrálási tartományban.



Nem korlátos függvény

 $\lim_{\alpha \to a^+} \int_{-\infty}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x$

Ezekben az esetekben az improprius integrált hívhatjuk segítségül.

Ívhossz számítása integrálással:

Egy görbét háromféleképpen is definiálhatunk:

- explicit alakban: y = f(x),
- paraméteres alapban: x = x(t), y = y(t),
- polárkoordináta-rendszerben: $r = r(\varphi)$.

Az ívhossz számítására az alábbi képletet használhatjuk:

• explicit:
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

• paraméteres:
$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

• polár:
$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)} \, \mathrm{d}\varphi$$

Forgástestek térfogata és felszíne:

Egy görbe *x* tengely körüli megforgatásával egy forgástestet kapunk.

explicit:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \qquad A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

paraméteres:
$$V = \pi \int_a^b y^2(t)\dot{x}(t) dt \qquad A = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Fontos figyelembe venni, hogy a fenti képletek csak a forgástestek palástjának felszínét adják eredményül.

Abban az esetben, hogyha például egy csonkakúpnak a felszínét szeretnénk meghatározni, akkor az alső és felső alapok felületét hozzá kell adni az előbbi képletekkel kapott eredményhez.

Görbeív súlypontja:

Egy konstans sűrűségű görbe súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

explicit:
$$S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$
 $S_y = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$

paraméteres:
$$S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$
 $S_y = \frac{1}{L} \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$

Görbe által meghatározott síktartomány súlypontja:

Egy görbe és az x tengely által meghatározott síktartomány súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

explicit:
$$S_x = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$S_y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

paraméteres:
$$S_x = \frac{\int_a^b x(t) y(t) \dot{x}(t) dt}{\int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt} \qquad S_y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) dt}{\int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt}$$

13.2. Feladatok

1. Milyen a és b paraméterek választása esetén lesz az adott integrál értéke minimális?

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) \, \mathrm{d}x$$

2. Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékeit!

a)
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$$
 c) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x+2} dx$ e) $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$
b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ d) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$ f) $\int_0^1 \ln x dx$

- 3. Adja meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjének ívhosszát az $x \in [0, 2]$ intervallumon!
- 4. Számítsa ki a ciklois egy ívének hosszát! $(x(t) = a \cdot (t \sin t), y(t) = a \cdot (1 \cos t), t \in [0, 2\pi])$
- 5. Számítsa ki annak a csonkakúpnak a térfogatát, melynek alapja egy R=5 sugarú kör, teteje egy r=2 sugarú kör, magassága pedig h=6!
- 6. Vezesse le a gömb térfogatának képletét!
- 7. Adja meg az $f(x) = x^3$ görbe, valamint az y = 0 és x = 1 egyenesek által határolt rész súlypontjának koordinátáit!