12

Integrálszámítás III

Matematika G1 – Integrálszámítás Utoljára frissítve: 2024. november 18.

12.1. Elméleti Áttekintő

Trigonometrikus integrálás:

Trigonometrikus függvények integrálásakor a tanult trigonometrikus azonosságokat kell alkalmaznunk. Ezek közül a legfontosabbak:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páros, akkor a függvényt a fenti trigonometrikus azonosságok segítségével át tudjuk alakítani.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páratlan (2k + 1), akkor azt felbontjuk egy 2ks és egy 1-es szögfüggvény szorzataként, majd a már páros fokszámú tagot az előbbi módszerrel tudjuk integrálni.

Határozott integrál:

Egy függvény [a;b] intervallumon vett határozott integrálja a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

ahol F(x) az f(x) primitív függvénye.

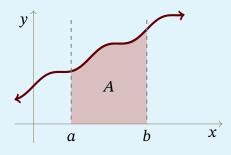
A határozott integrálás során a határozatlan integrálásnál tanult összefüggéseket alkalmazhatjuk. Azonban két integrálási technikánál különösen figyelnünk kell az integrálási tartományra:

• Parciális integrálás:
$$\int_a^b f g' = \left[f \, g \right]_a^b - \int_a^b f' g,$$

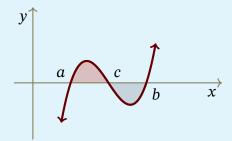
• Helyettesítéses integrálás:
$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Görbe alatti terület:

A határozott integrál segítségével a függvény görbéje és az *x*-tengely által bezárt **előjeles** területet tudjuk meghatározni. Amennyiben a függvény képe a tengely alatt van, akkor a terület negatív előjelű lesz.



$$A = \int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x$$

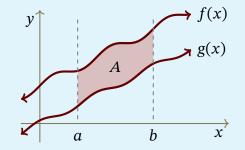


$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

Két görbe által bezárt terület:

Két függvény által bezárt területet a két függvény különbségének integrálásával tudjuk meghatározni:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$



Paraméteres görbe által meghatározott görbevonalú trapéz terület:

Egy γ : (x(t);y(t))görbe t_1 és t_2 paraméterpontok közötti görbevonalú trapéz területe

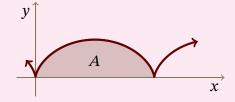
$$A = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Határozzuk meg a ciklois egy $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz területét!

A ciklois paraméteres egyenlete:

$$x(t) = t - \sin t,$$

$$y(t) = 1 - \cos t.$$



$$A = \int_0^{2\pi} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \dots = 3\pi$$

12.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi trigonometrikus integrálok értékét!

a)
$$\int \cos^3 x \sin x \, dx$$

b)
$$\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$$

c)
$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

2. Oldja meg az alábbi összetett integrálási feladatokat!

a)
$$\int \sin \sqrt{x} \, dx$$

b)
$$\int \frac{\ln \ln x}{x} \, \mathrm{d}x$$

c)
$$\int |x| dx$$

$$d) \int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1} \, dx$$

e)
$$\int (x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1} \, dx$$

3. Határozzuk meg az alábbi határozott integrálok értékét!

a)
$$\int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

b)
$$\int_0^1 x \sinh x \, \mathrm{d}x$$

c)
$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2} \, \mathrm{d}x$$

- 4. Határozza meg az f(x) = (x + 1)x(x 2) függvény és az x-tengely által bezárt geometriai területet!
- 5. Adja meg az $f(x) = x^4$ és a $g(x) = 3x^2 2$ függvények által bezárt terület nagyságát!
- 6. Adja meg egy a sugarú körvonal ($x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$) alapján a $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz területét!