5 Lineáris leképzések II

Matematika G2 – Lineáris Algebra

Utoljára frissítve: 2025. május 5.

5.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 5.1: Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen V a T test feletti vektortér, $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}$-t a $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés sajátvektorának mondjuk, ha önmaga skalárszorosába megy át a leképezés során, azaz $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$, $\lambda \in T$. λ-t a $\boldsymbol{v}$ sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

Ha a $\boldsymbol{v}$ sajátvektora a φ-nek, akkor annak skalárszorosa is az.

Tétel 5.1: Sajátértékek számítása

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix sajátértékei a

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet, és ennek alapján a sajátértékek:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

A sajátvektorokat az $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbb{E})\boldsymbol{v}_i = 0$ egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

1. A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = t_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = t_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$ egyenletet **karakterisztikus egyenlet**nek nevezzük.

A $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E})$ polinomot **karakterisztikus polinom**nak nevezzük.

Tétel 5.2: Főtengelytétel

Szimmetrikus mátrix sajátvektorai ortogonálisak és a sajátértékek mindig valósak.

Antiszimmetrikus mátrix sajátvektorai páronként konjugáltak és a sajátértékek mindig tisztán képzetesek.

! Ha $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, akkor a sajátértékek a főátlóbeli elemek.

Definíció 5.2: Hasonlóság

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ és $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan $\mathbf{T}$ invertálható mátrix, hogy

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Jele: $\mathbf{A} \sim \hat{\mathbf{A}}$.

Definíció 5.3: Diagonalizálhatóság

Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix és egy $\mathbf{T}$ invertálható mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Tétel 5.3: Diagonizálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha létezik n darab lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, míg a $\mathbf{T}$ transzformációs mátrix $\mathbf{A}$ sajátvektoraiból áll:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}.$$

Sajátvektorok koordinátarendszere:

Egy φ leképezés mátrixa tetszőlegesen sok bázisban felírható. Ha φ-t egy a leképezés sajátvektorával párhuzamos vektorra hattatjuk, akkor az nyújtásnak felel meg. Ha $\dim \varphi = n$, és n darab lineárisan független sajátvektorral rendelkezik, akkor φ mátrixreprezentációja a sajátvektorok által felírt bázisban diagonális lesz.

Invariáns mennyiségek:

Legyen $\mathbf{A}$ egy 3×3-as mátrix, amelynek sajátértékei λ_1, λ_2 és λ_3. Ekkor az alábbi mennyiségek bármely $\mathbf{A}$-hoz hasonló mátrix esetén invariánsak:

- $I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
- $I_2 = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)\right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$,
- $I_3 = \det\mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Mátrixfüggvények:

Legyen $\mathbf{A}$ egy $n\times n$-es, $\mathbf{T}$ mátrix segítségével diagonizálható mátrix, amelyre szeretnénk hattatni az f függvényt. Ekkor az $f(\mathbf{A})$ mátrixot a következő módon számíthatjuk ki:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}.$$

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix tizedik hatványát!

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig $\boldsymbol{v}_1(1;1)$ és $\boldsymbol{v}_2(1;-1)$. Legyen $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális alakja:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján:

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29525 & -29524 \\ -29524 & 29525 \end{bmatrix}.$$

Definíció 5.4: Sajátaltér

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ és legyen λ_i az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke. A λ_i-hez tartozó sajátaltér az alábbi halmaz:

$$E_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{v} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda_i\boldsymbol{v}\}.$$

Ez az $\mathbb{R}^n$ egy altere.

Algebrai és geometriai multiplicitás:

Ha a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$ karakterisztikus egyenletnek λ_i k-szoros gyöke, akkor azt mondjuk, hogy a λ_i-nek az algebrai multiplicitása k. Ebben az esetben a λ_i sajátértékhez tartozó sajátaltér d dimenziója (geometriai multiplicitása) $1 \leq d \leq k$.

A geometriai multiplicitás sosem nagyobb az algebrainál.

A diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy a geometriai és algebrai multiplicitások minden sajátérték esetén megegyeznek.

Diagonalizálható-e az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix?

Először határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 6 = -(\lambda+1)^2(\lambda-6) = 0.$$

Láthatjuk, hogy a $\lambda_{12} = -1$ sajátérték algebrai multiplicitása 2. Keressük meg a hozzá tartozó sajátvektort/sajátvektorokat. Oldjuk meg az $(\mathbf{A} - 1\mathbb{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ egyenletet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = -v_2 - v_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1} + t_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2}$$

Láthatjuk, hogy a λ_{12} sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója 2, amely megegyezik az algebrai multiplicitással, tehát az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható.

Diagonizálható-e az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix?

Először határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0.$$

Láthatjuk, hogy a $\lambda = 2$ sajátérték algebrai multiplicitása 2.

A sajátvektorok meghatározása az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ egyenlet segítségével:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{A}$ mátrix nem diagonalizálható, mivel a sajátértékhez tartozó geometriai multiplicitás (vagyis a sajátaltér dimenziója) 1.

Ha egy 2×2-es mátrix λ sajátértékéhez tartozó algebrai és geometriai multiplicitás is 2, akkor a mátrix diagonális.

Kvadratikus formák és másodrendű görbék:

Egy csupa másodfokú tagot tartalmazó kétváltozós polinom átírható mátrixos alakba:

$$\rho(x;y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{x}.$$

Ha $\rho(x;y) = C$, akkor az egyenlet egy origó középpontú másodrendű görbét ír le. Az $\mathbf{A}$ mátrix definitsége alapján a görbe lehet

- ellipszis, ha $\mathbf{A}$ definit, (sajátértékek azonos előjelűek)
- parabola, ha $\mathbf{A}$ szemidefinit, (egyik sajátérték nulla)
- hiperbola, ha $\mathbf{A}$ indefinit. (sajátértékek ellentétes előjelűek)

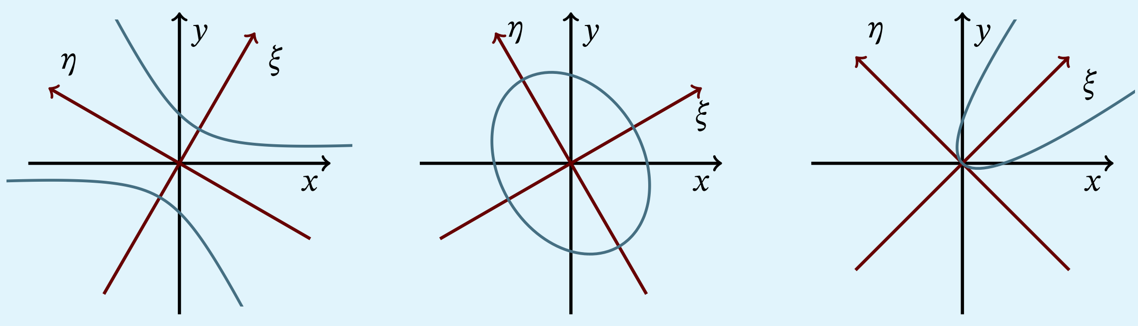
Amennyiben a görbe egyenlete nem csak másodfokú tagokat tartalmaz, akkor azzal egy általános másodrendű görbét írunk le:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad + \quad dx + ey \quad + f &= 0, \\ \underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{k}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + f &= 0. \end{aligned}$$

Legyenek $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ_1 és λ_2, és legyen $\boldsymbol{v}_1$ a λ_1-hez, $\boldsymbol{v}_2$ pedig a λ_2-höz tartozó egységhosszúságú sajátvektor. Képezzük a $\mathbf{T}$ transzformációs mátrixot, amelynek oszlopai tartalmazzák a $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ vektorokat, vagyis $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$. A mátrix segítségével az általános másodrendű görbe egyenlete átírható kanonikus alakra:

$$\underbrace{\boldsymbol{x}^\top \mathbf{T}}_{\boldsymbol{\xi}^\top} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\xi}} + \underbrace{\boldsymbol{k}^\top \mathbf{T}}_{\boldsymbol{\varkappa}^\top} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\xi}} + f = 0,$$

ahol $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix}^\top$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátkoordinátái, $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonális mátrix, melynek főátlójában az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei szerepelnek, $\boldsymbol{\varkappa}$ pedig tartalmazza a ξ és η irányba való eltolást.



Hiperbola Ellipszis Parabola

A $\boldsymbol{\Lambda}$ mátrix főátlójába a sajátértékeket olyan sorrendben kell beírni, amilyen sorrendben a sajátvektorokat a $\mathbf{T}$ mátrixba rendeztük.

5.2. Feladatok

1. Adja meg az alábbi mátrixok sajátvektorait és sajátértékeit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. A leképezés mátrixainak felírása nélkül adja meg a lehető legtöbb sajátértélet és sajátvektort!
   a) z-tengely körüli 45°-os forgatás,
   b) xy síkra vetítés,
   c) xy síkra tükrözés.
3. Diagonizálhatóak-e a harmadik feladatban szereplő **E**, **D** és **B** mátrixok?
4. A sajátértékek kiszámítása nélkül mondjuk meg a lehető legtöbb sajátérték-sajátvektor párt!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a harmadik feladatban szereplő **B** mátrix tizedik hatványát!
6. Határozzuk meg az $e^{10\mathbf{B}}$ függvényt, ha **B** a harmadik feladatban szereplő mátrix!
7. Milyen alakzatot írnak le az alábbi másodrendű görbék? Írja fel a kanonikus egyenletüket!
   a) $-3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy = 144$
   b) $57x^2 + 43y^2 + 14\sqrt{3}xy = 576$
   c) $2x^2 - 5 = 0$