11 Differenciálás I

Matematika G2 – Többváltozós analízis
Utoljára frissítve: 2025. április 22.

11.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 11.1: Iránymenti derivált

Legyen $I \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és legyen adva egy $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az f függvény $\boldsymbol{a}$ pontbeli $\boldsymbol{v}$ irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük.

Definíció 11.2: Gradiens

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Az f függvény $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ pontbeli gradiense:

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

A gyakrolatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Számítsuk ki az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény $\boldsymbol{v}(3; 4)$ irányú deriváltját az $(1; 2)$ pontban!

A gradiens az előző példában számolt parciális deriváltak alapján:

$$\operatorname{grad} f(1; 2) = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált számításához még szükségünk van az $\boldsymbol{v}$ irányú egységvektorra:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{e}}_v = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(1; 2) = \operatorname{grad} f(1; 2) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_v = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 40 \cdot 3/5 - 133 \cdot 4/5 = -82{,}4.$$

Kétváltozós függvény esetén az gyakran az irányvektort az x-tengellyel bezárt szög (α) segítségével adjuk meg. Ekkor az egységvektor:

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}.$$

Magasabb rendű iránymenti deriváltak:

Az elsőrendű iránymenti derivált:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{e}}} = \operatorname{grad} f \cdot \hat{\boldsymbol{e}}.$$

A másodrendű iránymenti derivált:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \hat{\boldsymbol{e}}^2} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{e}}}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad} f \cdot \hat{\boldsymbol{e}}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}.$$

Adott irányú érintő egyenes kétváltozós függvények esetén:

A $z = f(x;y)$ függvény segítségével a 3D-s térben egy felületet adhatunk meg. Ezen felület egy $P_0(x_0;y_0)$ pontbeli, $\hat{\boldsymbol{e}}(e_x;e_y)$ irányú érintő egyenese:

$$\frac{x-x_0}{e_x} = \frac{y-y_0}{e_y} = \frac{z-z_0}{\partial_{\hat{\boldsymbol{e}}} f(x_0;y_0)}, \quad \text{ahol } z_0 = f(x_0;y_0).$$

Amennyiben az irány egybeesik az x-tengellyel, akkor:

$$x - x_0 = \frac{z-z_0}{\partial_x f(x_0;y_0)} \quad \Rightarrow \quad \partial_x f(x_0;y_0)(x-x_0) = z - z_0.$$

Amennyiben az irány egybeesik az y-tengellyel, akkor:

$$y - y_0 = \frac{z-z_0}{\partial_y f(x_0,y_0)} \quad \Rightarrow \quad \partial_y f(x_0;y_0)(y-y_0) = z - z_0.$$

Érintősík megadása kétváltozós függvény esetében:

Az érintősík független az iránytól, azt csak a felületből kimutató normális, vagyis a gradiens adja meg. Az $\boldsymbol{x}_0$ pontban felírt normálvektor:

$$\boldsymbol{n}_{\text{be}} = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ -1 \end{bmatrix}_{|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \qquad \boldsymbol{n}_{\text{ki}} = \begin{bmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{bmatrix}_{|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0},$$

ahol $\boldsymbol{n}_{\text{be}}$ a befele, $\boldsymbol{n}_{\text{ki}}$ pedig a kifele mutató normálvektor. Ezek alapján az érintősík egyenlete:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}(y-y_0) = z - z_0.$$

Implicit függvény parciális deriváltjai:

Amennyiben a változók közötti kapcsolat nem írható fel explicit ($z = f(x;y)$) módon, akkor az implicit függvénymegadási módszerhez tudunk fordulni. Ez többváltozós esetben $F(x;y;z) = 0$ alakban tudjuk megtenni.

Ilyen esetben a z-től függő tagokat összetett függvényként kell kezelnünk, a parciális deriváltak pedig a következőek:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Teljes differenciál:

Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény teljes differenciálja:

$$Df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

Kétváltozós esetben:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Definíció 11.3: Jacobi-mátrix

Legyen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés. Ekkor $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) = \mathbf{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, ahol $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_{k\times n}$. A $\mathbf{J}$ mátrixot az $\boldsymbol{f}$ függvény Jacobi-mátrixának nevezzük, melynek elemei:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \mathrm{grad}^\top f_1(\boldsymbol{a}) \\ \mathrm{grad}^\top f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}^\top f_k(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix}$$

11.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és irányszög vagy irányvektor mentén!

   a) $f(x;y) = x^3 - 3xy^2 + 4y^4$, $P_a(1,1)$, $\alpha = 45°$,

   b) $g(x;y;z) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P_b(1;0;1)$, $\boldsymbol{v}_b = [3,2,-5]^\top$.

2. Határozza meg azon pontok halmazát, amin nem létezik az $f(x;y) = \ln\left(x^2 + xy\right)$ függvény $\alpha = 150°$-os irányhoz tartozó iránymenti deriváltja!

3. Határozza meg az alábbi függvények első és második iránymenti deriváltjait az adott pontban és irányrányszög vagy irányvektor mentén!

   a) $f(x;y) = 4x^4y + y^3x^2$, $P_a(1;1)$, $\alpha = 45°$,

   b) $g(x;y;z) = \sqrt{14}\,xyz + \sqrt{14}\,x^2y^2z^2$, $P_b(1;1;1)$, $\boldsymbol{v}_b = [1;1;1]^\top$.

4. Határozza meg az $f(x;y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ függvény $P(0;1)$ ponthoz és $\alpha = 60°$ irányhoz tartozó érintőegyenesének egyenletét!

5. Határozza meg a $f(x;y) = \sin xy$ függvény érintősíkjának egyenletét a $P(\pi/3;2)$ pontban!

6. Határozza meg azon pontok halmazát, ahol a $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$ felület érintősíkja párhuzamos a $2x - y + 5z - 25 = 0$ síkkal!

7. Határozza meg az $f(x;y) = \arctan xy$ függvény teljes differenciálját paraméteresen a $P_7(x_0;y_0)$ és a $Q_7(1;2)$ pontban!

8. Határozza meg egy henger térfogat mérésének a relatív hibáját, ha ismert, hogy a sugár 1%-os és a magasság 2%-os hibával lett mérve!

9. Határozza meg az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ függvény Jakobi mátrixát!

$$\boldsymbol{f}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z\sin x \\ z^2 + z\sin y \end{bmatrix}$$