

6 MO

Integrálatalakító tételek II

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. október 06.

6.1. Gömb térfogata, gömbi integrál

Vezesse le az R sugarú gömb térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$ skalármező térfogati integrálját a gömbön!

A tértartomány paraméterezése:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \sin s \cos t \\ r \sin s \sin t \\ r \cos s \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r \in [0; R] \\ s \in [0; \pi] \\ t \in [0; 2\pi] \end{array}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t & r \cos s \cos t & -r \sin s \sin t \\ \sin s \sin t & r \cos s \sin t & r \sin s \cos t \\ \cos s & -r \sin s & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa az utolsó sor alapján kifejtve:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) &= -\cos s \cdot \begin{vmatrix} r \cos s \cos t & -r \sin s \sin t \\ r \cos s \sin t & r \sin s \cos t \end{vmatrix} + r \sin s \cdot \begin{vmatrix} \sin s \cos t & -r \sin s \sin t \\ \sin s \sin t & r \sin s \cos t \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos s (\cos^2 t \cos s \sin s + \sin^2 t \cos s \sin s) + r^2 \sin s (\sin^2 s \cos^2 t + \sin^2 s \sin^2 t) \\ &= r^2 \cos s \cdot \cos s \sin s + r^2 \sin s \cdot \sin^2 s \\ &= r^2 \sin s. \end{aligned}$$

A gömb térfogata tehát:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{V}} dV = \iiint_D \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) dr ds dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin s dr ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \sin s ds dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin s ds dt = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^3}{3} \cos s \right]_0^{\pi} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3} dt = \left[\frac{2R^3}{3} t \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

A skalármező átparaméterezése:

$$\varphi(\mathbf{\Omega}(r; s; t)) = \frac{1}{\|\mathbf{\Omega}(r; s; t)\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 \sin^2 s \cos^2 t + r^2 \sin^2 s \sin^2 t + r^2 \cos^2 s}} = \frac{1}{r}.$$

A skalármező térfogati integrálja a gömbön:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{r}) dV = \iiint_D \varphi(\mathbf{\Omega}(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) dr ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{r} r^2 \sin s dr ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r \sin s dr ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \sin s ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2}{2} \sin s ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^2}{2} \cos s \right]_0^\pi dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt \\
 &= [R^2 t]_0^{2\pi} = 2\pi R^2.
 \end{aligned}$$

6.2. Henger térfogata

Vezesse le az R sugarú, h magasságú henger térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ skalármező térfogati integrálját a hengerben!

A tértartomány paraméterezése:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ s \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r \in [0; R] \\ s \in [0; h] \\ t \in [0; 2\pi] \end{array}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & -r \sin t \\ \sin t & 0 & r \cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa:

$$\det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) = r.$$

A henger térfogata tehát:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\mathcal{V}} dV = \iiint_D \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) dr ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R r dr ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{R^2}{2} ds dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2}{2} s \right]_0^h dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 h}{2} dt = \left[\frac{R^2 h}{2} t \right]_0^{2\pi} = \pi R^2 h.
 \end{aligned}$$

A skalármező átparaméterezése:

$$\varphi(\mathbf{\Omega}(r; s; t)) = (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 = r^2.$$

A skalármező térfogati integrálja a hengerben:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{r}) dV = \iiint_D \varphi(\mathbf{\Omega}(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) dr ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R r^2 \cdot r dr ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R r^3 dr ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{R^4}{4} ds dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^4}{4} s \right]_0^h dt = \int_0^{2\pi} \frac{R^4 h}{4} dt \\
 &= \left[\frac{R^4 h}{4} t \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4 h}{2}.
 \end{aligned}$$

6.3. Vektormező ismeretlen komponense

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y \sin x) \hat{\mathbf{i}} + (z^2 \cos y - \cos x) \hat{\mathbf{j}} + (v_3) \hat{\mathbf{k}}$. Határozza meg v_3 -at, ha tudjuk, hogy \mathbf{v} tetszőleges zárt felületen vett felületi integrálja zérus!

A Gauss-Osztogradszkij tétel szerint:

$$\oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV,$$

vagyis a tetszőleges zárt felületen vett felületi integrál akkor zérus, ha a vektormező divergenciája zérus. Tehát:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(y \sin x) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2 \cos y - \cos x) + \frac{\partial v_3}{\partial z} = y \cos x - z^2 \sin y + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = -y \cos x + z^2 \sin y.$$

Integráljuk ezt z szerint:

$$v_3 = \int (-y \cos x + z^2 \sin y) dz = -yz \cos x + \frac{z^3}{3} \sin y + f(x; y),$$

ahol $f(x; y)$ tetszőleges függvény, nem befolyásolja a divergenciát.

6.4. Zárt felületi integrálok

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. Adja meg a vektormező alábbi zárt felületeken vett felületi integráljait:

a) az $R = 2$ sugarú gömb felületén befelé mutató irányítással:

$$I = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = - \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = -3 \cdot \operatorname{Vol}(\mathcal{V}) = -3 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = -4\pi R^3 = -32\pi.$$

- b) az $x^2 + y^2 = 4$ hengerfelületen, amelyet a $z = -1$ és $z = 1$ síkok zárnak le, kifelé mutató irányítással:

$$I = \oint_{\partial \mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 3 \cdot \operatorname{Vol}(\mathcal{V}) = 3 \cdot (\pi R^2 h) = 3 \cdot (\pi \cdot 2^2 \cdot 2) = 24\pi.$$

- c) a $z = x^2 + y^2$ forgáspároloid és a $z = 4$ sík által határolt test felületén kifelé mutató irányítással:

Itt már nem tudjuk kapásból felírni a tértartomány térfogatát, így parametrizálnunk kell a tértartományt:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r s \cos t \\ r s \sin t \\ r^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r \in [0; 2] \\ s \in [0; 1] \\ t \in [0; 2\pi] \end{matrix}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t & r \cos t & -rs \sin t \\ s \sin t & r \sin t & rs \cos t \\ 2r & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa:

$$\det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) = 2r^3 s \cos^2 t + 2r^2 s \sin^2 t = 2r^3 s (\cos^2 t + \sin^2 t) = 2r^3 s.$$

A felületi integrál:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\partial \mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 3 \cdot \iiint_{\mathcal{V}} dV \\ &= 3 \cdot \iiint_D \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) dr ds dt = 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 2r^3 s dr ds dt \\ &= 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{r^4}{2} \right]_0^2 s ds dt = 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 8s ds dt \\ &= 3 \cdot \int_0^{2\pi} [4s^2]_0^1 dt = 3 \cdot \int_0^{2\pi} 4 dt = 12 \cdot [t]_0^{2\pi} = 24\pi. \end{aligned}$$

Akár hengerkoordinátákkal is megoldhattuk volna a feladatot:

A helyettesítés:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} r \in [0; 2] \\ t \in [0; 2\pi] \\ z \in [r^2; 4] \end{matrix}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; t; z) = \begin{bmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa:

$$\det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; t; z)) = r.$$

A felületi integrál:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{\partial V} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 3 \cdot \iiint_V dV \\
 &= 3 \cdot \iiint_D \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; t; z)) dr dt dz = 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r dz dr dt \\
 &= 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4 - r^2) dr dt = 3 \cdot \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 dt \\
 &= 3 \cdot \int_0^{2\pi} (8 - 4) dt = 12 \cdot [t]_0^{2\pi} = 24\pi.
 \end{aligned}$$

6.5. Faraday-kalitka

Egy fotonikus chipeket hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségelosztással ($\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m, az ellipszoid egyenlete pedig:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

A nettó töltés kiszámításához a Gauss-törvényt alkalmazzuk:

$$\oint_{\partial V} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{S} \rangle = \frac{Q_{\text{net}}}{\varepsilon_0},$$

ahol \mathbf{E} az elektromos térerősség, ε_0 a vákuum permittivitása, Q_{net} pedig a kalitka belsejében lévő nettó töltés.

A vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 3.$$

A tértartomány nagysága:

$$\operatorname{Vol}(V) = \frac{4\pi}{3} \sqrt{5 \cdot 19 \cdot 4} = \frac{8\pi\sqrt{95}}{3}$$

A Gauss-törvény alapján a nettó töltés:

$$Q_{\text{net}} = \varepsilon_0 \oint_{\partial V} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{S} \rangle = \varepsilon_0 \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 3 \varepsilon_0 \operatorname{Vol}(V) = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 8\pi\sqrt{95} \approx 2,17 \text{ nC}.$$

6.6. Hőáram

Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara $R = 0,02$ m, A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmérséklet-mező jó közelítéssel

$$\varphi(\mathbf{r}) = T_c - \alpha r^2, \quad \alpha = 1,3 \cdot 10^5 \text{ K/m}^2.$$

Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha

$$q_{\text{hő}} = - \oint_{\partial V} \langle \lambda \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \rangle, \quad \lambda = 0,2 \text{ W}/(\text{m K}).$$

Használjuk a Green-tétel asszimmetrikus alakját $\psi = -\lambda$ állandó választással:

$$q_{\text{hő}} = \oint_{\partial V} \langle -\lambda \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \rangle = - \iiint_V \psi \Delta \varphi + \underbrace{\left\langle \operatorname{grad} \lambda; \operatorname{grad} \varphi \right\rangle}_{=0} dV = -\lambda \iiint_V \Delta \varphi dV.$$

A hőmérséklet-mező Laplace-operátora:

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(-2\alpha \mathbf{r}) = -2\alpha \operatorname{div} \mathbf{r} = -6\alpha.$$

A tértartomány nagysága:

$$\operatorname{Vol}(V) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

A teljes hőáram:

$$\begin{aligned} q_{\text{hő}} &= -\lambda \iiint_V \Delta \varphi dV = 6\alpha \lambda \operatorname{Vol}(V) = \lambda 6\alpha \frac{4\pi R^3}{3} \\ &= 8\pi\alpha\lambda R^3 = 8\pi \cdot 0,2 \cdot 1,3 \cdot 10^5 \cdot (0,02)^3 \approx 5,23 \text{ W}. \end{aligned}$$