definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Lineáris Algebra BMETE94BG02 4

Matematika G2

Lineáris leképzések I

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Lineáris leképezés**] Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1-beli vektor ($\forall a; b \in V_1$) és T-beli skalár ($\lambda \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

c

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{additív (összegre tagonként hat),}$$

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) \quad \text{homogén (skalár kiemelhető).}$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Leképezés magtere**] Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker\varphi := \{\ v \mid v \in V_1 \wedge \varphi(v) = \ \}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Leképezés defektusa**] A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $def\varphi$-vel jelöljük.

[style=note, nobreak=true,] Nem létezik olyan vektortér, melynek magtere az üreshalmaz (a nullvektor mindig benne van, mert a nullvektor képe mindig nullvektor).

[style=note, nobreak=true,] Invertálható lineáris leképezés magtere a nullvektor.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 4: Lineáris leképezés rangja**] Egy lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját. $\varphi = \dim\varphi(V_1)$.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: Rang-nullitás tétele**] Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi + def \varphi = \dim V_1.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Lineáris leképezések mátrixreprezentációja:**

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = n$, valamint $\dim V_2 = k$. Legyen $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ bázis V_1-ben, és $\{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ bázis V_2-ben. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}b_1 + \alpha_{2i}b_2 + \ldots + \alpha_{ki}b_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}b_j \quad \Rightarrow \quad A := \alpha_{11}\alpha_{2i} \cdots \alpha_{1n}\alpha_{21}\alpha_{2i} \cdots \alpha_{2n} \vdots \vdots \ddots \vdots \alpha_{k1}\alpha_{ki} \cdots \alpha_{knk\times}$$

Az A mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $x \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ az x koordinátái, ekkor a képét az alábbi módon számíthatjuk:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi(a_i) = \alpha_{11}\alpha_{2i} \cdots \alpha_{1n}\alpha_{21}\alpha_{2i} \cdots \alpha_{2n} \vdots \vdots \ddots \vdots \alpha_{k1}\alpha_{ki} \cdots \alpha_{kn}\xi_1\xi_2 \vdots \xi_n.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 5: Bázistranszformáció**] Legyenek $\{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ és $\{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \ldots; \hat{b}_n\}$ bázisok V-ben. Ekkor a $\{b_1; b_2; \ldots; b_n\} \to \{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \ldots; \hat{b}_n\}$ bázistranszformáció T mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}_1 &= t_{11}b_1 + t_{21}b_2 + \ldots + t_{n1}b_n \\ \hat{b}_2 &= t_{12}b_1 + t_{22}b_2 + \ldots + t_{n2}b_n \\ &\vdots \\ \hat{b}_j &= t_{1j}b_1 + t_{2j}b_2 + \ldots + t_{nj}b_n \\ &\vdots \\ \hat{b}_n &= t_{1n}b_1 + t_{2n}b_2 + \ldots + t_{nn}b_n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad T = t_{11}t_{12} \cdots t_{1n}t_{21}t_{22} \cdots t_{2n} \vdots \vdots \ddots \vdots t_{n1}t_{n2} \cdots t_{nn}$$

[style=note, nobreak=true,] A T bázistranszformációs mátrix segítségével a régi és új bázisban felírt vektorok kordinátái közötti kapcsolat mátrixosan:

$$x = Tx' \quad s \quad x' = T^{-1}x.$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 2: Lineáris leképezés mátrixa új bázisban**] Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés, $\{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ és $\{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \ldots; \hat{b}_n\}$ bázisok V-ben. A φ $\{b_1; b_2; \ldots b_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa A, a φ $\{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \ldots; \hat{b}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\hat{A}$. Jelölje T a $\{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ bázisról a $\{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \ldots; \hat{b}_n\}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{A} = T^{-1}AT.$$

[style=note, nobreak=true,] A A és $\hat{A}$ mátrix hasonló.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Alap geometriai leképezések:**

- **Tükrözés** valamely tengelyre: 3 $T_x = 100$

0 -1 0

0 0 -1

x$-tengelyretkrzs$

$$T_y = -10001000 - 1$$

y-tengelyre tükrözés

$$T_z = -1000 - 10001$$

z-tengelyre tükrözés

Vetítés valamely tengelyre: 3 $T_x = 100$

0 0 0

0 0 0

x$-tengelyrevetts$

$$T_y = 000010000$$

y-tengelyre vetítés

$$T_z = 000000001$$

z-tengelyre vetítés

Tükrözés valamely síkra: 3 $T_{xy} = 100$

0 1 0

0 0 -1

xy$skratkrzs$

$$T_{yz} = -100010001$$

yz síkra tükrözés

$$T_{xz} = 1000 - 10001$$

xz síkra tükrözés

$T_{xy} = 100$
Vetítés valamely síkra: 3
0 1 0

0 0 0

xy$skravetts$

$$T_{yz} = 000010001$$

yz síkra vetítés

$$T_{xz} = 100000001$$

xz síkra vetítés

$T_x = \lambda 00$
λ-szoros **nyújtás** valamely irányban: 3
0 1 0

0 0 1

x$irnyba$

$$T_y = 1000\lambda 0001$$

y irányba

$$T_z = 10001000\lambda$$

z irányba

Forgatás $+\alpha$ szöggel: 9 $\mathrm{R}_x(\alpha) = 100$
$0 \cos\alpha - \sin\alpha$
$0 \sin\alpha \cos\alpha \quad \sim \quad$ x$tengelykrliforgats$
$R_y(\alpha) = \cos\alpha 0 \sin\alpha$
010
$-\sin\alpha 0 \cos\alpha \quad \sim \quad y tengelykrliforgats$
$R_z(\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha 0$
$\sin\alpha \cos\alpha 0$
$001 \quad \sim \quad z tengelykrliforgats$

[style=note, nobreak=true,] Ha egymás után több transzformációt kell végrehajtani A, B, C sorrendben, akkor:

$$x' = CBAx.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 6: Ortogonális transzformáció**] Az n dimenziós euklideszi tér $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációját ortogonálisnak mondjuk, ha $\langle \mathcal{A}x; \mathcal{A}y \rangle = \langle x; y \rangle$, minden $x; y \in V$ esetén.

[style=note, nobreak=true,] Egy ortogonális transzformáció Q mátrixának inverze megegyezik a transzponáltjával.

Amennyiben $\det Q = 1$, akkor a transzformáció orientációtartó.

Amennyiben $\det Q = -1$, akkor a transzformáció orientációváltó.

[style=example, nobreak=true] A két dimenziós térben való forgatás orientációtartó, hiszen

$$\det Q = \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha \cos\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

0.2 Feladatok

1. Állapítsa meg, hogy az alábbi leképezések lineárisak-e?

$$\varphi :^2 \to ^2; \quad xy \mapsto x + y5xy \qquad\qquad \psi :^2 \to ^3; \quad xy \mapsto xyx + y$$

2. Határozza meg a $P(5;-4;-1)$ pont koordinátáit az $a_1(2;1;0)$, $a_2(0;2;1)$ és $a_3(1;0;2)$ vektorok által meghatározott bázisban!

3. Írja fel az $\{i, j, k\}$ és a $\{z_1, z_2, z_3\}$ ortonormált bázisok közti báziscsere mátrixát!

4. A harmadik feladatban meghatározott báziscsere mátrixát felhasználva oldja meg a második feladatot!

5. Írja fel a 2D Descartes koordinátarendszer α fokos elforgatásával nyert új koordinátarendszerbe mutató báziscsere mátrixát!

6. Adjuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az alábbi vektorba viszi át a bázisodat:

$$i \mapsto 213, \quad j \mapsto 555, \quad k \mapsto 00-1.$$

   Mi lesz a $P(1;1;1)$ pont képe?

7. Adja meg az első feladatban szereplő leképezések mátrixait!

8. Határozza meg az origón áthaladó $u(a;b;c)$ normálisú $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$ síkra vonatkozó tükrözés mátrixát!

9. Adott egy lineáris leképezés a szokásos $\{i, j\}$ bázisban. Írja fel a leképezés mátrixát az $\{f_1; f_2\}$ bázisban, ha $f_1(2;1)$ és $f_2(1;1)$.

10. Adott két lineáris leképezés mátrixa A és B. Mit ad eredményül...4
    a) $(A + B)r$,
    b) ABr,
    c) A^2r,
    d) $A^{-1}r$?

11. Egy φ leképezés mátrixa A. Döntsük el, hogy:

    $A = 123-10-23-14$

    a) $P(2;0;1) \in \ker\varphi$,
    b) mi $Q'(1;4;0)$ őosképe,
    c) $\varphi = ?$
    d) $def\varphi = ?$

12. Mennyi a leképezés defektusa...2
    a) x tengelyre való vetítés esetén,
    b) yz síkra való vetítés esetén?

13. Írja fel annak a leképezésnek a mátrixát amely z körül α szöggel forgat, majd tükröz az xy síkra, végül x irányba 2-szeres, z irányba 3-szoros nagyítást végez!

14. Írja fel azt a leképezést, amely az $y = x$ és $z = 0$ egyenletrendszerű egyenesre tükröz!

15. Írja fel az e egyenes körül pozizív y irányból 90°-os forgatás mátrixát a szokásos, illetve a $v_1(1; 0; 0)$, $v_2(1; 1; 0)$ és $v_3 = (1; 1; 1)$ bázisokban, ha az egyenes egyenletrendszere:
$$e : \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \quad s \quad z = 0.$$

16. Adja meg a α és β paramétereket, hogy a φ leképezés A mátrixa orientciótartó és skalárisszorzattartó legyen (ortogonális)!
$$A = \alpha\beta0100001$$