

10**Elsőrendű lineáris és másodrendű hiányos DE****Matematika G3 – Differenciálegyenletek****Utoljára frissítve: 2025. november 09.****10.1. Elméleti áttekintő****Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet**

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Ha $q(x) \equiv 0$, akkor az egyenlet homogén, egyébként inhomogén.

Az általános megoldás a homogén és inhomogén megoldás összegeként adódik:

- A homogén megoldást meghaphatjuk, ha megoldjuk az $y' + p(x)y = 0$ egyenletet a tanult módszerek alapján.
- Az inhomogén megoldást konstans variálással kaphatjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a homogén megoldásban lévő konstanst x -től függőnek vesszük, majd megoldjuk az egyenletet.

Hiányos másodrendű egyenletek

Az $y'' = f(x; y; y')$ hiányos, ha x, y , vagy y' hiányzik az egyenletből.

1. $y'' = f(x) \rightarrow y$ és y' hiányos, kétszer integrálunk

2. $y'' = f(x; y') \rightarrow p(x) = y'(x)$ helyettesítés,

így p -re elsőrendű

3. $y'' = f(y; y') \rightarrow P(y) = y'$ helyettesítés,

ekkor $y'' = \partial_y P \cdot y' = \partial_y P \cdot P$

így P -re elsőrendű, szeparábilis

10.2. Feladatok

1. Oldja meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket!

$$\begin{aligned} a) \quad & y' - \frac{y}{x} = x e^x, \\ b) \quad & y' + 2xy + x e^{-x^2} = 0, \\ c) \quad & y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \\ d) \quad & y' + y \cos x = \cos x \sin x, \\ e) \quad & y'(1+x^2) + 2xy = \tan x. \end{aligned}$$

2. 10 L vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be 2 L/min sebességgel. Az edényben a folyadék azonnal elkeveredik, majd ugyanilyen sebességgel kifolyik. Mennyi só lesz 5 min műlva az edényben?
3. Egy testet függőlegesen hajítunk lefelé v_0 kezdeti sebességgel. Határozza meg a mozgás sebességének változását, amennyiben a testre csak a nehézségi erő hat, valamint a levegő fékezőerelye a sebességgel egyenesen arányos!
4. Oldja meg a következő másodrendű, hiányos differenciálegyenleteket!

$$\begin{aligned} a) \quad & y'' = 6x + \sin x, \\ b) \quad & y''x^2 + \ln x = 1, \\ c) \quad & y'' - \frac{x}{x^2 - 1} y' = 0 \quad (x > 1), \\ d) \quad & y''(1+y^2) = y y'^2, \\ e) \quad & y''^2 - y' = 0, \\ e) \quad & y''y = 1 + y'^2. \end{aligned}$$