

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2, 0)+0.5*(0, 1)) node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kiteintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Többszörös analízis BMETE94BG02 12

Matematika G2

Differenciálás II

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Többszámú Taylor-formula:**

Az egyváltozós függvényekhez hasonló módon, az n -edrendű Taylor-polinom: $T_0 = f(x_0)$

$$T_1 = T_0 + f'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)y(y - y_0)$$

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} [[order = 2]f''(x_0)(x - x_0)^2 + [order = 2]f''(x_0)y(y - y_0)^2 + 2f'(x_0)x, y(x - x_0)(y - y_0)]$$

⋮

[style=blueBox, nobreak=true,] **Többszámú függvények szélsőérték-számítása:**

Szélsőérték létezésének **szükséges** feltétele, hogy az adott pontban a parciális deriváltak eltűnjenek, vagyis

$$\forall i : f'(x_0)x_i = 0.$$

Szélsőérték létezésének **elégés** feltétele, hogy az adott pontban felírt Hesse-mátrix pozitív definit legyen. Ezen mátrix az alábbi módon írható fel:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{11}(x_0) & f''_{12}(x_0) & \cdots & f''_{1n}(x_0) \\ f''_{21}(x_0) & f''_{22}(x_0) & \cdots & f''_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(x_0) & f''_{n2}(x_0) & \cdots & f''_{nn}(x_0) \end{pmatrix}$$

A determinánsa alapján:

- ha $\det H > 0$, akkor lokális szélsőérték van,
- ha $\det H < 0$, akkor nincsen szélsőérték,
- ha $\det H = 0$, akkor nem lehet eldönteni.

Amennyiben $\det H > 0$, akkor a szélsőérték jellege

- lokális maximum, ha H főátlóra feszített aldeterminánsai váltakozó előjelűek,
- lokális minimum, ha H főátlóra feszített aldeterminánsai pozitívak.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Feltételes szélsőérték egy görbe mentén:**

Amennyiben egy f függvény egy adott $g = 0$ görbe menti szélsőértékeit szeretnénk megkeresni, akkor az

$$F = f + \lambda g$$

függvényre kell megoldanunk a szélsőérték-feladatot.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Feltételes szélsőérték egy görbe által bezárt területen:**

Amennyiben egy f függvény szélsőértékeit egy adott $g = 0$ görbe által bezárt tartományán szeretnénk megkeresni, akkor:

- először megkeressük a lokális szélsőértékeket, és ezekből kiválasztjuk azokat, amelyek a tartomány belsejébe esnek.
- utána pedig megkeressük a görbe peremére eső szélsőértékeket az előző módszer alapján.

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az $f(x; y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ függvény első és második Taylor polinomját a $P(1; -2)$ pontban!
2. Határozza meg az $f(x; y; z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény első és második Taylor polinomjait a $P_2(\pi/4; \pi/4; \pi/6)$ pontban!
3. Végezzen szélsőérték vizsgálatot az $f(x; y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ függvényen!
4. Határozza meg az $f(x; y) = x^2 + xy + y^2 + 8x + 8y$ függvény egy darab szélsértékét!
5. Ellenőrizze, hogy az $f(x; y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$ függvénynek a $P_1(\pi/2; \pi/2)$ és $P_2(0; 0)$ pontokban szélsőérték helye van!
6. Határozza meg azt a csomagméretet, amely esetén egy $V = 4,5 \text{ dm}^3$ térfogatú téglatest alakú csomag a legkevesebb zsineg felhasználásával az alábbi ábrán látható módon bekötözhető!

[thick] $(0, 1.5) - (4, 1.5) - (5.5, 2.5) - (4, 1.5) - (4, 0) - (0, 0) - (4, 0) - (5.5, 1) -$
 $(5.5, 2.5) - (1.5, 2.5) - (0, 1.5) - \text{cycle} ;$

[ultra thick, primaryColor] $(1.333, 0) - ++(0, 1.5) - ++(1.5, 1) - (2.667, 0) -$
 $++(0, 1.5) - ++(1.5, 1) - (0.75, 2) - ++(4, 0) - ++(0, -1.5) ;$
7. Határozza meg annak a derékszögű hasábnak a minimális térfogatát, amely éleinek összege l hosszú!
8. Határozza meg a $f(x; y) = x^2 y^2$ függvény szélsőértékét az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe mentén!
9. Határozza meg az $f(x; y) = x^2 + y^2 + xy - x$ függvény globális maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 \leq 1$ tartományon!