definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Komplex számok BMETE94BG01 3

Matematika G1

Komplex számok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

0.1 Elméleti Áttekintő

0.1.1 A komplex számok megadási módjai

[style=blueBox, nobreak=true,] **Algebrai alak**:

A komplex számok (C) algebrai alakja:

$$z = a + b,$$

ahol $a, b \in$ valós számok, és $= \sqrt{-1}$ az **imaginárius egység**. A komplex szám **valós rész**e $\{z\} = a$, **képzetes rész**e pedig $\{z\} = b$.

[thick, scale=0.75] [->] (-.5, 0) – (5, 0) node[right] $\Re$; [->] (0, -.5) – (0, 3) node[above] $\Im$; [draw=gray, dashed] (1.5,0) node[below] a – (1.5, 2.5) – (0, 2.5) node[left] b; [fill=primaryColor] (1.5, 2.5) circle (0.1) node[above right] $z = a + b$;

[style=note, nobreak=true,] Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részük is megegyezik. ($z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{z_1\} = \{z_2\} \wedge \{z_1\} = \{z_2\}$)

[style=blueBox, nobreak=true,]

Trigonometrikus alak:

Térjünk át az eddigi Descartes-féle koordinátarendszerről a **polárkoordináta-rendszer**re, amelyben

- a komplex szám hossza: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- valós tengellyel bezárt szöge: $\varphi = \arg z$.

Ebből az alábbi alakot kapjuk:

$$z = *r\varphi.$$

[scale=2/3] in
(0,0)
in 0, 1, 2 [lig
(+ 0.5); [primar

//in
2/π/2/above,
4/π/left,
7/7π/4/below r
(0,0
[fill=cyan!10] at

[-to, ultra thi
node [above rig

[secondaryColo
– (60:2.5); [seco

[secondaryColo

[draw=primary
to-to] (150
node[midway, a
rotate=60, in

[ultra thick,
(1.4,0) arc
angle=
[fill=cyan!10, in
sep=
[fill=primaryC

[style=blueBox, nobreak=true,] **Exponeciális alak**:

Induljunk ki a trigonometrikus alakból, és használjuk fel az alábbi azonosságokat:

$$\cos\varphi = \cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, s \sin\varphi = \sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

A trigonometrikus alakba helyettesítve megkapjuk az exponeciális alakot:

$$z = *r\varphi = r\left(\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} + \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\right) = re^{\varphi}.$$

0.2 Műveletek komplex számokkal

[style=blueBox, nobreak=true,]

Konjugált:

Egy $z = a + b$ komplex szám konjugáltját úgy kapjuk meg, hogy tükrözzük a valós tengelyre, vagyis

$$\overline{z} = \overline{a + b} = a - b.$$

[ultra t
draw=ternaryC
– (3, 0) node [b
draw=ternary
-1.5) – (0, 1.5) n
[-to, draw=secon
(+30:2.5) c
node[above,
draw=prima
(-30:2.5) co
node[belov
(O) at (0,0)
pic[to-to, "φ", d
angle eccentr
radius=1
angle=X–O–A
draw=terna
eccentricit
radius=1
angle=

[style=blueBox, nobreak=true,] **Inverz**:

Egy $z = a + b$ komplex szám inverze:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - b}{a^2 + b^2}.$$

Komplex szám inverzének hossza az eredeti szám hosszának a reciproka.

[ultra thick] [-to, draw=ternaryColor, thick] (-1, 0) – (3, 0) node [below left] $\Re$; [-to, draw=ternaryColor, thick] (0, -1.5) – (0, 1.5) node [below left] $\Im$; [-to, draw=secondaryColor] (0,0) – (+30:2.5) coordinate (A) node[above, pos=.7] z; [-to, draw=primaryColor] (0,0) – (-30:1.5) coordinate (B) node[below, pos=.7] z^{-1} ; (O) at (0,0); (X) at (1,0); pic[to-to, "φ", draw=ternaryColor, angle eccentricity=0.7, angle radius=1.2cm, thick] angle=X–O–A; pic[to-to, "φ", draw=ternaryColor, angle eccentricity=0.7, angle radius=1.2cm, thick] angle=B–O–X;

[scale=1/2
rotate=-2(
[draw=ternary
(2,3) node[midw
[draw=ternary
(
node[midway,a
[dashed, draw=
(7,4) (5,
[primaryColor
node[anchor
[secondaryColo
node[anchor=

[style=blueBox, nobreak=true,]

Összeadás és kivonás:

Algebrai alakban, a vektorműveletekhez hasonlóan:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2).$$

[ultra t
draw=ternaryC
– (3, 0) node [l
draw=ternaryC
– (0,4.5) nod
[-to, draw=secon
(15:1.5) coordin
z_1; [-to, draw=
(0,0) – (45:3)
node[
[-to, draw=prim
(60:4.5) coordin
z_1

[style=blueBox, nobreak=true,]

Szorzás:

Algebrai alakban: $\mathrm{z}_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)$
Trigonometrikus alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Exponenciális alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

[ultra t
draw=ternaryC
– (3, 0) node [l
draw=ternaryC
– (0,3.5) nod
[-to, draw=secon
(60:3.5) coordin
z_1; [-to, draw=
(0,0) – (45:2.5
node[
[-to, draw=prim
(15:1.4) coordin
z_1

[style=blueBox, nobreak=true,]

Osztás:

Trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

[style=blueBox, nobreak=true,]

Hatványozás:

Trigonometrikus alakban:

$$z^n = *r^n n\varphi$$

Exponenciális alakban:

$$z^n = r^n e^{\cdot n\varphi}$$

[ultra t
draw=ternaryC
0) – (2.5, 0) no
[-to, draw=terna
-1) – (0,2.75)
[-to, draw=secon
(20:1.25) n
[-to, draw=prim
(50:1.5625) no
draw=prima
(75:1.953125) n
draw=prima
(100:2.441406
[-to, draw=prim
(125:3.0517578

[style=note, nobreak=true,] Ha egy komplex számot az n-edik hatványra emelünk, akkor

- hossza az n-szeresére nő,
- argumentuma is az n-szeresére nő.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Gyökvonás**:

Trigonometrikus alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}, aholk \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$$

Exponenciális alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{\cdot\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, aholk \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$$

[style=note, nobreak=true,] Tetszőleges komplex szám n-edik gyökei egy olyan szabályos n-szög csúcsai, amelynek középpontja az origó.

[ultra thick, scale=.9] [-to, draw=primaryColor] (-2, 0) – (2, 0) node [right] $\Re$; [-to, draw=primaryColor] (0, -2) – (0, 2) node [above] $\Im$;

(P) at (318:1.5);

deg $in30, 102, 174, 246, 318[draw = primaryColor](\deg : 1.5)coordinate(C)circle(0.1); [dashed, gray](P$

[xshift=-6cm] [-to, draw=primaryColor] (-2, 0) – (2, 0) node [right] $\Re$; [-to, draw=primaryColor] (0, -2) – (0, 2) node [above] $\Im$;

(P) at (300:1.5);

deg $in30, 120, 210, 300[draw = primaryColor](\deg : 1.5)coordinate(C)circle(0.1); [dashed, gray](P) -$

[dashed, gray] (0,0) circle (1.5); [below] at (0,-2) $\sqrt[4]{z}$;

[xshift=-12cm] [-to, draw=primaryColor] (-2, 0) – (2, 0) node [right] $\Re$; [-to, draw=primaryColor] (0, -2) – (0, 2) node [above] $\Im$;

(P) at (315:1.5);
$\deg in 75, 195, 315 [draw = primaryColor](\deg : 1.5) coordinate(C) circle(0.1); [dashed, gray](P) - -(C$

[dashed, gray] (0,0) circle (1.5); [below] at (0,-2) $\sqrt[3]{z}$;

0.3 Feladatok

1. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!
   a) $\overline{(2{-}e^{\pi 3})}$
   b) $5{+}3-2i\cdot\overline{*345\cdot *2270\cdot e^{5\pi 12}}$
   c) $5e^{7\pi 13}{*}4135\cdot\overline{(12)}\cdot\left(2\sqrt{3}+2\right)$
2. Végezze el az alábbi hatványozásokat!
   a) $(-1)^{16}$
   b) $(3+5)^4\cdot(21-35)^5\cdot(1{+}1{-})^4$
3. Végezze el az alábbi gyökvonásokat!
   a) $\sqrt[3]{-8}$
   b) $\sqrt[4]{1}$
   c) $\sqrt{3+4}$
4. Oldja meg a következő egyenleteket!
   a) $z^4-81=0$
   b) $z^2-6z+13=0$
5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
   $\{\, z_{\,1}+2z_2=1+$
   $3z_1+z_2=2-3i$
6. Adja meg a geometriai helyét azoknak a komplex számoknak, amelyekre …
   a) $\{z\}>0,$
   b) $|z-a|=|z-b|$, ahol $a,b\in C$,
   c) $|z|<1-\{z\}$.
7. Egy négyzet két szomszédos csúcsát jelölje a $z_1=3+2$ és a $z_2=5+4$ komplex szám. Hol található a többi csúcs?
8. Írja fel a $(-2;1)$ középpontú, 4 sugarú kör egyenletét a komplex számsíkon!