

## 11

## Differenciálás I

Matematika G2 – Többszörös analízis

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

## 11.1. Elméleti Áttekintő

## Definíció 11.1: Iránymenti derivált

Legyen  $I \in \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és legyen adva egy  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az  $f$  függvény  $\mathbf{a}$  pontbeli  $\mathbf{v}$  irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük.

## Definíció 11.2: Gradiens

Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvény  $\mathbf{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$  pontbeli gradiense:

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)^T$$

A gyakorlatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Számítsuk ki az  $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$  függvény  $\mathbf{v}(3; 4)$  irányú deriváltját az  $(1; 2)$  pontban!

A gradiens az előző példában számolt parciális deriváltak alapján:

$$\text{grad } f(1; 2) = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált számításához még szükségünk van az  $\mathbf{v}$  irányú egységvektorra:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(1; 2) = \text{grad } f(1; 2) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 40 \cdot 3/5 - 133 \cdot 4/5 = -82,4.$$

Kétváltozós függvény esetén az gyakran az irányvektort az  $x$ -tengellyel bezárt szög ( $\alpha$ ) segítségével adjuk meg. Ekkor az egységvektor:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

### Magasabb rendű iránymenti deriváltak:

Az elsőrendű iránymenti derivált:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}} = \text{grad } f \cdot \hat{\mathbf{e}}.$$

A másodrendű iránymenti derivált:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \hat{\mathbf{e}}^2} = \text{grad} \left( \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}} = \text{grad} (\text{grad } f \cdot \hat{\mathbf{e}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}.$$

### Adott irányú érintő egyenes kétváltozós függvények esetén:

A  $z = f(x; y)$  függvény segítségével a 3D-s térben egy felületet adhatunk meg. Ezen felület egy  $P_0(x_0; y_0)$  pontbeli,  $\hat{\mathbf{e}}(e_x; e_y)$  irányú érintő egyenese:

$$\frac{x - x_0}{e_x} = \frac{y - y_0}{e_y} = \frac{z - z_0}{\partial_{\hat{\mathbf{e}}} f(x_0; y_0)}, \quad \text{ahol } z_0 = f(x_0; y_0).$$

Amennyiben az irány egybeesik az  $x$ -tengellyel, akkor:

$$x - x_0 = \frac{z - z_0}{\partial_x f(x_0; y_0)} \Rightarrow \partial_x f(x_0; y_0)(x - x_0) = z - z_0.$$

Amennyiben az irány egybeesik az  $y$ -tengellyel, akkor:

$$y - y_0 = \frac{z - z_0}{\partial_y f(x_0; y_0)} \Rightarrow \partial_y f(x_0; y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

### Érintősík megadása kétváltozós függvény esetében:

Az érintősík független az iránytól, azt csak a felületből kimutató normális, vagyis a gradiens adja meg. Az  $\mathbf{x}_0$  pontban felírt normálvektor:

$$\mathbf{n}_{\text{be}} = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ -1 \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad \mathbf{n}_{\text{ki}} = \begin{bmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0},$$

ahol  $\mathbf{n}_{\text{be}}$  a befele,  $\mathbf{n}_{\text{ki}}$  pedig a kifelé mutató normálvektor. Ezek alapján az érintősík egyenlete:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (y - y_0) = z - z_0.$$

**Implicit függvény parciális deriváltjai:**

Amennyiben a változók közötti kapcsolat nem írható fel explicit ( $z = f(x; y)$ ) módon, akkor az implicit függvénymegadási módszerhez tudunk fordulni. Ez többváltozós esetben  $F(x; y; z) = 0$  alakban tudjuk megtenni.

Ilyen esetben a  $z$ -től függő tagokat összetett függvényként kell kezelnünk, a parciális deriváltak pedig a következők:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

**Teljes differenciál:**

Egy  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény teljes differenciálja:

$$Df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Kétváltozós esetben:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

**Definíció 11.3: Jacobi-mátrix**

Legyen  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  leképezés. Ekkor  $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ , ahol  $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_{k \times n}$ . A  $\mathbf{J}$  mátrixot az  $\mathbf{f}$  függvény Jacobi-mátrixának nevezzük, melynek elemei:

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{|x=\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \text{grad}^\top f_1(\mathbf{a}) \\ \text{grad}^\top f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad}^\top f_k(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

## 11.2. Feladatok

- Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és irány-szög vagy irányvektor mentén!
  - $f(x; y) = x^3 - 3xy^2 + 4y^4$ , 7cm  $P_a(1, 1)$ , 10cm  $\alpha = 45^\circ$ ,
  - $g(x; y; z) = e^{-(x^2+y^2)}$ , 7cm  $P_b(1; 0; 1)$ , 10cm  $\mathbf{v}_b = [3, 2, -5]^T$ .
- Határozza meg azon pontok halmazát, amin nem létezik az  $f(x; y) = \ln(x^2 + xy)$  függvény  $\alpha = 150^\circ$ -os irányhoz tartozó iránymenti deriváltja!
- Határozza meg az alábbi függvények első és második iránymenti deriváltjait az adott pontban és irányrészszög vagy irányvektor mentén!
  - $f(x; y) = 4x^4y + y^3x^2$ , 7cm  $P_a(1; 1)$ , 10cm  $\alpha = 45^\circ$ ,
  - $g(x; y; z) = \sqrt{14}xyz + \sqrt{14}x^2y^2z^2$ , 7cm  $P_b(1; 1; 1)$ , 10cm  $\mathbf{v}_b = [1; 1; 1]^T$ .
- Határozza meg az  $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2)$  függvény  $P(0; 1)$  ponthoz és  $\alpha = 60^\circ$  irányhoz tartozó érintőegyeneseinek egyenletét!
- Határozza meg a  $f(x; y) = \sin xy$  függvény érintősíkjának egyenletét a  $P(\pi/3; 2)$  pontban!
- Határozza meg azon pontok halmazát, ahol a  $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$  felület érintősíkja párhuzamos a  $2x - y + 5z - 25 = 0$  síkkal!
- Határozza meg az  $f(x; y) = \arctan xy$  függvény teljes differenciálját paraméteresen a  $P_7(x_0; y_0)$  és a  $Q_7(1; 2)$  pontban!
- Határozza meg egy henger térfogat mérésének a relatív hibáját, ha ismert, hogy a sugár 1%-os és a magasság 2%-os hibával lett mérve!
- Határozza meg az  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvény Jakobi mátrixát!

$$\mathbf{f}(x; y; z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z \sin x \\ z^2 + z \sin y \end{bmatrix}$$