

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Integrálszámítás BMETE94BG01 12

# Matematika G1

## Integrálszámítás III

Utoljára frissítve: 2024. november 18.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Trigonometrikus integrálás:**

Trigonometrikus függvények integrálásakor a tanult trigonometrikus azonosságokat kell alkalmaznunk. Ezek közül a legfontosabbak:  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ ,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páros, akkor a függvényt a fenti trigonometrikus azonosságok segítségével át tudjuk alakítani.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páratlan ( $2k + 1$ ), akkor azt felbontjuk egy  $2k$ -s és egy 1-es szögfüggvény szorzataként, majd a már páros fokszámú tagot az előbbi módszerrel tudjuk integrálni.

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Határozott integrál:**

Egy függvény  $[a; b]$  intervallumon vett határozott integrálja a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

ahol  $F(x)$  az  $f(x)$  primitív függvénye.

[ style=note, nobreak=true, ] A határozott integrálás során a határozatlan integrálásnál tanult összefüggéseket alkalmazhatjuk. Azonban két integrálási technikánál különösen figyelniünk kell az integrálási tartományra:

- Parciális integrálás:  $\int_a^b f g' = [f g]_a^b - \int_a^b f' g,$

- Helyettesítéses integrálás:  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Görbe alatti terület:**

A határozott integrál segítségével a függvény görbéje és az  $x$ -tengely által bezárt **előjeles** területet tudjuk meghatározni. Amennyiben a függvény képe a tengely alatt van, akkor a terület negatív előjelű lesz.

```
[thick] [opacity=0, name path=x] (1,0)
    - (3,0);
[samples=150, smooth, domain=1:3,
ultra thick, draw=primaryColor, name
path=f] plot (, (sin(*240)/4+)/2 + 1) ;
[ of=f and x, on layer=main,
]primaryColor!25
[->, draw=ternaryColor] (-.5,0) - (5,0)
    node [below left]  $x$ ; [->,
draw=ternaryColor] (0,-.5) - (0,3)
    node [below left]  $y$ ;
[samples=150, domain=-.5:4, ultra
thick, draw=primaryColor, to-to] plot
(, (sin(*240)/4+)/2 + 1) ;
[draw=gray, dashed, thick] (1,2.75) -
++(0,-2.75) node[below]  $a$ ;
[draw=gray, dashed, thick] (3,2.75) -
++(0,-2.75) node[below]  $b$ ;
    at (2,1)  $A$ ;
```

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

```
[thick] [opacity=0, name path=x] (1,0)
    - (3,0);
[samples=150, smooth, domain=1:3,
ultra thick, draw=primaryColor, name
path=f] plot (, (- 1)*(- 2)*(- 3)*1.5) ;
[ of=f and x, split, every segment no
0/.style=primaryColor!25, every
segment no
1/.style=secondaryColor!25, on
layer=main, ]
[->, draw=ternaryColor, thick] (-.5,0)
- (5,0) node [below left]  $x$ ; [->,
draw=ternaryColor, thick] (0,-1.5) -
(0,2) node [below left]  $y$ ;
[samples=150, smooth,
domain=0.75:3.25, ultra thick,
draw=primaryColor, to-to] plot (, (-
1)*(- 2)*(- 3)*1.5) ;
[above left] at (1,0)  $a$ ; [above right] at
(2,0)  $c$ ; [below right] at (3,0)  $b$ ;
```

$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

[thick] [->, draw=t  
 (-.5,0) – (5,0) node  
 [->, draw=ternaryC  
 (0,3) node [belo  
 [samples=150, sm  
 path=f, domain=1:  
 draw=primaryCo  
 (sin(\*240)/4+)  
 [samples=150, sm  
 path=g, domain=1:  
 draw=primaryCo  
 (cos(\*240)/6+)  
 [ of=f and g, on l  
 ]primaryCo  
 [samples=150  
 domain=-.5:4, u  
 draw=primaryCo  
 (sin(\*240)/4+))/2 +  
 f(x) ;  
 [samples=150  
 domain=-.5:4, u  
 draw=primaryCo  
 (cos(\*240)/6+))/2)  
 g(x) ;  
 [draw=gray, das  
 (1,2.75) – ++(0,-2.7  
 a; [draw=gray, da  
 (3,2.75) – ++(0,-2.7  
 b;  
 at (2,1.5)

### Két görbe által bezárt terület:

[ style=blueBox, nobreak=true, ] Két függvény által bezárt területet a két függvény különbségének integrálásával tudjuk meghatározni:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

### [ style=blueBox, nobreak=true, ] Paraméteres görbe által meghatározott görbevon- alú trapéz terület:

Egy  $\gamma : (x(t); y(t))$  görbe  $t_1$  és  $t_2$  paraméterpontok közötti görbevon-  
alú trapéz területe

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| dt.$$

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg a ciklois egy  $t \in [0; 2\pi]$  intervallumhoz tartozó görbevon-  
alú trapéz területét!

A ciklois paraméteres egyenlete:

$$x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t.$$

```
[opacity=0, name path=x] (0,0) -- (4,0);
[samples=150, smooth, name path=f,
  domain=0:2*pi, ultra thick,
  draw=primaryColor] plot (1/2 * (-
  sin(deg())) , 1/2 * (1 - cos(deg())));
[ of=f and x, on layer=main,
  ]primaryColor!25
[-to, draw=ternaryColor, thick] (-.5,0) --
  (5,0) node [below left] x; [-to,
  draw=ternaryColor, thick] (0,-.5) -- (0,2)
  node [below left] y;
[samples=150, domain=-1.5:9, ultra thick,
  draw=primaryColor, to-to, smooth] plot
(1/2 * (- sin(deg())) , 1/2 * (1 - cos(deg())));
;
at (1.57079633,.45) A;
```

$$A = \int_0^{2\pi} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| t = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 t = \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t t = \dots = 3\pi$$

## 0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi trigonometrikus integrálok értékét!

a)  $\int \cos^3 x \sin x \, x$

b)  $\int \cos^5 x \, x$

c)  $\int \sin^4 x \cos^2 x \, x$

2. Oldja meg az alábbi összetett integrálási feladatokat!

a)  $\int \sin \sqrt{x} \, x$

b)  $\int \frac{\ln \ln x}{x} \, x$

c)  $\int |x| \, x$

d)  $\int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1} \, x$

e)  $\int (x^2 - 3x + 2) \sqrt{2x - 1} \, x$

3. Határozzuk meg az alábbi határozott integrálok értékét!

a)  $\int_0^{2\pi} \cos x \, x$

b)  $\int_0^1 x \sinh x \, x$

c)  $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} \, x$

4. Határozza meg az  $f(x) = (x + 1)x(x - 2)$  függvény és az  $x$ -tengely által bezárt geometriai területet!

5. Adja meg az  $f(x) = x^4$  és a  $g(x) = 3x^2 - 2$  függvények által bezárt terület nagyságát!

6. Adja meg egy  $a$  sugarú körvonal  $(x(t) = a \cos t, y(t) = a \sin t)$  alapján a  $t \in [0; 2\pi]$  intervallumhoz tartozó görbevonallú trapéz területét!