

2

Operátorok, potenciálosság

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 06.

2.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 2.1 : Nabla-operátor

Az \mathbb{R}^n -beli Descartes-koordinátarendszerben, ahol $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ egy tetszőleges pont koordinátái, a standard bázis pedig $\{\hat{\mathbf{e}}_1; \hat{\mathbf{e}}_2; \dots; \hat{\mathbf{e}}_n\}$ a Nabla egy olyan formális differenciáloperátor, melynek koordinátái a parciális derivált operátorok, vagyis:

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T,$$

Differenciáloperátorok:

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, ahol \mathbf{r} az \mathbb{R}^3 -beli Descartes koordináta-rendszerben $\mathbf{r} = (x; y; z)$.

Rotáció	Divergencia	Gradiens
$\text{rot } \mathbf{v}$	$\text{div } \mathbf{v}$	$\text{grad } \varphi$
$\nabla \times \mathbf{v}$	$\langle \nabla; \mathbf{v} \rangle$	$\nabla \cdot \varphi$
$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$	$\left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\rangle$	$\begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix}$
$\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\varphi} = \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\varphi} = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}_{\text{rot } \mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\text{div } \mathbf{v}} = \mathbb{R}$	$\mathcal{R}_{\text{grad } \varphi} = \mathbb{R}^3$

Speciális esetek:

- ha $\text{div } \mathbf{v} = 0$, akkor a vektormező forrásmentes,
- ha $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor a vektormező örvénymentes.

Definíció 2.2 : Laplace-operátor

A Laplace-operátor egy másodrendű differenciáloperátor az n dimenziós térben. Megadja egy skalármező gradiensének divergenciáját, azaz:

$$\Delta \varphi = \langle \nabla; \nabla \rangle \varphi = \text{div grad } \varphi.$$

$\Phi, \Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármezők, $\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezők, $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ pedig skalárok.

- Teljesül a linearitás:

$$\text{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi$$

$$\text{rot}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{div}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}$$

- Zérusság:

$$\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\text{grad}(\Phi \Psi) = \Phi \text{grad } \Psi + \Psi \text{grad } \Phi$$

$$\text{div}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{div } \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad } \Phi \rangle$$

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad } \Phi$$

- Egyéb szabályok:

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u} + (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u}$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}; \text{rot } \mathbf{v} \rangle$$

$$\text{grad}(\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle) = (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

Definíció 2.3 : Skalárpotenciálosság

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező skalárpotenciális, ha létezik olyan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$.

Definíció 2.4 : Vektorpotenciálosság

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan $\mathbf{u} : V \rightarrow V$ vektormező, hogy $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$.

Tétel 2.1 : Örvény- és forrásmentesség

Legyen $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ mindenhol értelmezett, legalább egyszer differenciálható vektormező. Ekkor:

$$\mathbf{v} \text{ skalárpotenciális} \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ hiszen } \text{rot grad } \varphi \equiv \mathbf{0}, \quad (\text{örvénymentes})$$

$$\mathbf{v} \text{ vektorpotenciális} \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0, \text{ hiszen } \text{div rot } \mathbf{u} \equiv 0. \quad (\text{forrásmentes})$$

Potenciálfüggvények számítása:

Legyen φ skalármező \mathbf{v} vektormező skalárpotenciálja. Ebben az esetben tudjuk, hogy $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, vagyis

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^T.$$

Ilyen esetben a potenciálfüggvény az alábbi módon számítható:

$$V(\mathbf{r}) = \int_0^{x_1} \mathbf{v}(\xi; x_2; \dots; x_n) d\xi + \int_0^{x_2} \mathbf{v}(0; \xi; \dots; x_n) d\xi + \dots + \int_0^{x_n} \mathbf{v}(0; 0; \dots; \xi) d\xi.$$

Legyen \mathbf{u} vektormező \mathbf{v} vektormező vektorpotenciálja. A potenciál számtalan alakban előállhat, ezért keressük ezt az alábbi alakban:

$$\mathbf{u} = (u_x; u_y; 0)^T$$

A potenciál komponensei az alábbi módon számíthatóak:

$$u_x = \int_0^z v_y(x; y; \xi) d\xi, \quad u_y = \int_0^x v_z(\xi; y; 0) d\xi - \int_0^z v_x(x; y; \xi) d\xi.$$

Határozzuk meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz)\hat{\mathbf{i}} + (zx)\hat{\mathbf{j}} + (xy)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező skalár- és vektorpotenciálját!

A vektormező rotáciája $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, vagyis $\exists V(\mathbf{r}) : \mathbf{v} = \text{grad } V$, ahol V a vektormező skalárpotenciálja.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \int_0^x v_x(\xi; y; z) d\xi + \int_0^y v_y(0; \xi; z) d\xi + \int_0^z v_z(0; 0; \xi) d\xi \\ &= \int_0^x yz d\xi + \int_0^y 0 \cdot z d\xi + \int_0^z 0 \cdot 0 d\xi = xyz. \end{aligned}$$

A vektormező divergenciája $\text{div } \mathbf{v} = 0$, vagyis $\exists \mathbf{u}(\mathbf{r}) : \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$, ahol \mathbf{u} a vektormező vektorpotenciálja.

Keressük a potenciált $\mathbf{u} = (u_x)\hat{\mathbf{i}} + (u_y)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$ alakban! Ekkor:

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^z v_y(x; y; \xi) d\xi = \int_0^z x\xi d\xi = \frac{1}{2}xz^2, \\ u_y &= \int_0^x v_z(\xi; y; 0) d\xi - \int_0^z v_x(x; y; \xi) d\xi = \int_0^x \xi y d\xi - \int_0^z y\xi d\xi = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}yz^2. \end{aligned}$$

A potenciálok tehát:

$$V(\mathbf{r}) = xyz, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} xz^2 \\ x^2y - yz^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi skalármezők gradiensét! Hattassa a függvényekre a Laplace-operátort is!

a) $\varphi(\mathbf{r}) = 6x^y + \sin e^z$

b) $\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2/2$

c) $\chi(\mathbf{r}) = xy + xz + yz$

d) $\omega(\mathbf{r}) = 2x^2y + xz^2 + 6y$

2. Számítsa ki az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját! Hol lesznek forrásmentesek, illetve örvénymentesek?

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$

b) $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (3xy + z^2)\hat{\mathbf{i}} + (6e^z)\hat{\mathbf{j}} + (-5x^y)\hat{\mathbf{k}}$

c) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\ln(xy/z))\hat{\mathbf{i}} + (\ln(yz/x))\hat{\mathbf{j}} + (\ln(zx/y))\hat{\mathbf{k}}$

d) $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{a}\|\mathbf{r} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3)$

3. Bizonyítsa be a következő azonosságokat, amennyiben φ, ψ skalármezők, \mathbf{v}, \mathbf{w} pedig vektormezők!

a) $\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$

b) $\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$

c) $\text{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \text{ grad } \Psi + \Psi \text{ grad } \Phi$

d) $\Delta(\Phi\Psi) = (\Delta\Phi)\Psi + 2\langle \text{grad } \Phi; \text{grad } \Psi \rangle + \Psi(\Delta\Phi)$

e) $\text{div}(\Phi\mathbf{v}) = \langle \text{grad } \Phi; \mathbf{v} \rangle + \Phi \text{ div } \mathbf{v}$

f) $\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \text{rot } \mathbf{v}; \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{w} \rangle$

4. Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektormezők skalár- illetve vektorpotenciálisak-e! Ha igen, adja meg a potenciálfüggvényeket! A valós konstansokat legyenek zérusak, valamint a vektorpotenciált – amennyiben létezik – olyan módon adja meg, hogy a harmadik komponense zérus legyen.

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y + z)\hat{\mathbf{i}} + (x + z)\hat{\mathbf{j}} + (x + y)\hat{\mathbf{k}}$

b) $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (e^{x+\sin y})\hat{\mathbf{i}} + (e^{x+\sin y} \cos y)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$

c) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (2zx^3)\hat{\mathbf{i}} + (3z)\hat{\mathbf{j}} + (-3x^2z^2)\hat{\mathbf{k}}$