definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Integrálszámítás BMETE94BG01 11

Matematika G1

Integrálszámítás II

Utoljára frissítve: 2024. november 04.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] A **parciális integrálás** módszerének bevezetéséhez írjuk fel két függvény szorzatának deriváltját:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integráljuk x szerint az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' x = \int f'(x) \cdot g(x) x + \int f(x) \cdot g'(x) x.$$

Az integrálás és a deriválás műveletei egymás inverzei, így az egyenlet bal oldala az alábbi alakot ölti:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) x + \int f(x) \cdot g'(x) x$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$\int f(x) \cdot g'(x) x = f(x) g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) x.$$

Amennyiben bevezetjük az $f(x) = u$, $g(x) = v$, $u = ux$, $v = vx$ jelöléseket, akkor megkapjuk a parciális integrálás egy másik gyakran használt alakját:

$$\int uv = uv - \int vu.$$

[style=note, nobreak=true,] A parciális integrálás módszerét az alábbi esetekben érdemes alkalmazni:

- polinom és trigonometrikus/exponenciális függvény szorzatának integrálása:

$$\int x \sin x x, \qquad \int x \cos x x, \qquad \int x\, e^x x,$$

- exponenciális és trigonometrikus függvények szorzatának integrálása:

$$\int e^x \sin x x, \qquad \int e^x \cos x x,$$

- logaritmus függvények integrálása,
- egyéb esetek, ahol egy szorzatfüggvényt kell integrálni.

[style=blueBox, nobreak=true,] Egy **racionális törtfüggvény** polinomok hányadosaként áll elő. Általános alakja:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Amennyiben a nevező fokszáma kisebb, mint a számlálóé, vagyis $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, akkor a **polinomosztás** módszeréhez kell folyamodnunk, mely elvégzése után a törtfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$R(x) = T(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

hol $T(x)$ egy újabb polinom, $S(x)$ fokszáma pedig már kisebb, mint $Q(x)$ fokszáma.

Ezután **parciális törtekké** bontjuk a $S(x)/Q(x)$ hányadost, majd ezeket, illetve a $T(x)$ polinomot integráljuk.

Amennyiben a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma, vagyis $\deg P(x) < \deg Q(x)$, akkor polinomosztás nélkül tudjuk parciális törtekké bontani a függvényt.

A parciális törtekre való bontáshoz az **algebra alaptételét** használjuk fel, miszerint bármely valós együtthatós polinom felbontható első és másodrendű kifejezések szorzatára, vagyis

$$p(x) = A \cdot \underbrace{\prod (x - a_i)}_{valsgykk} \cdot \underbrace{\prod (x^2 + p_i x + q_i)}_{komplexgykk}.$$

Valós gyökök esetén a_i maga a polinom gyöke, míg komplex gyökök esetén

$$x^2 + p_i x + q_i = (x - z_i)(x - \overline{z}_i) = x^2 - 2(z_i)x + |z_i|^2.$$

Vegyük például a $p(x) = x^5 - 13x^4 + 73x^3 - 193x^2 + 232x - 100$ polinomot, melynek gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4 + 3i$, $x_5 = 4 - 3i$. Ekkor a polinom felbontható:

$$p(x) = \underbrace{(x-1)}_{x_1} \cdot \underbrace{(x-2)^2}_{x_2, x_3} \cdot \underbrace{(x^2 - 6x + 25)}_{x_4, x_5}.$$

[style=example, nobreak=true] Hozzuk $R(x) = T(x) + S(x)/Q(x)$ alakra ($\deg S < \deg Q$) az $R(x) = P(x)/Q(x)$ függvényt, ahol $P(x) = x^3 - 12x^2 - 42$ és $Q(x) = x - 3$. Végezzük el a polinomosztást:

$$\begin{array}{rlllll}
 & (x^3 & -12x^2 & gray+0x & -42) & \div\ (x-3) = primar \\
primaryColorx^2\cdot(x-3) \to & -\ (x^3 & -3x^2 & gray+0x & gray+0x) & \\
\hline
 & & -9x^2 & gray+0x & -42 & \\
secondaryColor - 9x\cdot(x-3) \to & & -\ (-9x^2 & +27x & gray+0\ ) & \\
\hline
 & & & -27x & -42 & \\
ternaryColor - 27\cdot(x-3) \to & & & -\ (-27x & +81) & \\
\hline
 & & & & -123 &
\end{array}$$

Az eredmény tehát:

$$R(x) = x^2 - 9x - 27 - \frac{123}{x-3}.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Félszöges tangens helyettesítés**:

Amennyiben trigonometrikus ($\sin x$, $\cos x$) függvényekből álló racionális törtfüggvényeket szeretnénk integrálni, akkor az alábbi helyettesítés alkalmazásával közönséges, t-től függő racionális törtfüggvényeket kapunk:

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \to \quad x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ilyen esetben a $\sin x$ és $\cos x$ trigonometrikus függvényeket a következő módon helyettesítjük:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad s \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Egy ilyen integrál általános alakja:

$$\int R(\sin x; \cos x)x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}.$$

[style=note, nobreak=true,] **Félszöges tangens helyettesítés levezetése**:

Használjuk az alábbi trigonometrikus azonosságokat: $\sin x = 2\sin(x2)\cos(x2)$,
$\cos x = \cos^2(x2) - \sin^2(x2)$,
$1 = \cos^2(x2) + \sin^2(x2)$.

Ezek alapján a $\sin x$ és $\cos x$ trigonometrikus függvényeket a következő módon helyettesíthetjük: $\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2\sin(x2)\cos(x2)}{\cos^2(x2)+\sin^2(x2)} \overset{*}{=} \frac{2\tan(x2)}{1+\tan^2(x2)} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \left(* : \cdot\ \frac{1/\cos^2(1x)}{1/\cos^2(1x)}\right)$
$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2(x2)-\sin^2(x2)}{\cos^2(x2)+\sin^2(x2)} \overset{*}{=} \frac{1-\tan^2(x2)}{1+\tan^2(x2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. $\quad \left(* : \cdot\ \frac{1/\cos^2(1x)}{1/\cos^2(1x)}\right)$

Végül pedig $t = \tan(x2)$ alapján:

$$x = 2\arctan t \quad \to \quad xt = \frac{2}{1+t^2} \quad \to \quad x = \frac{2t}{1+t^2}$$

[style=example, nobreak=true] **A koszekáns integrálása**:

$$\int \csc x x = \int \frac{1}{\sin x} x = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2t}{1+t^2} = \int \frac{t}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

[style=learnMore] [scale=2.5, thick] [->, shorten >=-5mm, shorten <=-5mm] (-1,0) – (1,0) node[below right] ξ; [->, shorten >=-5mm, shorten <=-5mm] (0,-1) – (0,1) node[above left] η;
(0,0) circle (1);
(O) at (0,0); (A) at (50:1); (B) at (-1,0); (C) at (0,0.46630766); (D) at (1,1.19175359); (E) at (O-|A);
[ultra thick, draw=primaryColor] (O) – (A) node [midway, above, rotate=50] 1 – (E) node [midway, above, rotate=90] $\sin x$ – cycle node[midway, below] $\cos x$;
[ultra thick, draw=secondaryColor] (B) – (O) node[below, midway] 1 – (C) node[left, midway] t – cycle ;
[dashed, draw=ternaryColor, ultra thick, shorten >=-20mm, shorten <=-10mm] (B) – (A) node [above=8mm, right=10mm] e ;
[fill=primaryColor, thick] (B) node[above left] $(-1;0)$ circle (0.03) ; [fill=primaryColor, thick] (A) node[below=1mm, right=2mm] $(\xi_2;\eta_2)$ circle (0.03) ;
pic [draw, "$x2$", angle eccentricity=.75, angle radius=1.5cm,] angle = O–B–C;
pic [draw, "x", angle eccentricity=.65, angle radius=1cm,] angle = E–O–A;
[below left] at (240:1) k;

A k egységkör egyenlete a $\xi\eta$ k
ordinátarendszerben:

$$k : \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Az e egyenes átmegy a $(-1;0)$ ponto
meredeksége pedig t. Egyenlete:

$$e : \eta = t(\xi + 1).$$

Helyettesítsük be az egyenes egyenletét
kör egyenletébe:

$$\xi^2 + (t(\xi + 1))^2 = 1$$

Fejezzük ki a ξ, majd η koordinátákat a t függvényében!

$$0 = \xi^2 + t^2(\xi+1)^2 - 1 = \xi^2 + t^2\xi^2 + 2t^2\xi + t^2 - 1 = (1+t^2)\xi^2 + 2t^2\xi + t^2 - 1$$

Használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét!

$$\xi_{12} = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4(1+t^2)(t^2-1)}}{2(1+t^2)} = \frac{-t^2 \pm \sqrt{(t^4 - (t^4-1))}}{1+t^2} = \frac{\pm 1 - t^2}{1+t^2}$$

Az egyenlet egyik megoldásából visszakaphatjuk a $(-1;0)$ pontot:

$$\xi_1 = \frac{-1-t^2}{1+t^2} = -1 \quad \to \quad \eta_1 = t(\xi_1 + 1) = t(-1+1) = 0.$$

A másik megoldásból pedig a $(\xi_2; \eta_2)$ pontot:

$$\xi_2 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \rightarrow \quad \eta_2 = t(\xi_2 + 1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = t\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

A kék háromszög alapján:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{t}{1} \quad \rightarrow \quad t = \tan\frac{x}{2}.$$

A piros háromszög alapján:

$$\sin x = \eta_2 = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \xi_2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

[style=note, nobreak=true,] A két háromszög bejelölt szögeinek aránya kerületi és középponti szögek tételéből következik, amely kimondja, hogy adott körben adott ívhez tartozó kerületi szög mindig fele az ívhez tartozó középponti szögnek.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Félszöges tangens hiperbolikusz helyettesítés**:

A trigonometrikus függvényekhez nagyon hasonló ez az eset is, viszont itt hiperbolikus ($\sinh x$, $\cosh x$) függvényekből álló racionális törtfüggvényeket szeretnénk integrálni. A helyettesítés:

$$u = \tanh\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2u}{1-u^2}$$

Ilyen esetben a $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvényeket a következő módon helyettesítjük:

$$\sinh x = \frac{2u}{1-u^2} \quad s \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Egy ilyen integrál általános alakja:

$$\int R(\sinh x; \cosh x) x = \int R\left(\frac{2u}{1-u^2}; \frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{2u}{1-u^2}.$$

[style=note, nobreak=true,] **Félszöges tangens hiperbolikusz helyettesítés levezetése**:

Használjuk az alábbi hiperbolikus azonosságokat: $\sinh x = 2\sinh(x2)\cosh(x2)$,
$\cosh x = \cosh^2(x2) + \sinh^2(x2)$,
$1 = \cosh^2(x2) - \sinh^2(x2)$.

Ezek alapján a $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvényeket a következő módon helyettesíthetjük: $\sinh x = \frac{\sinh x}{1} = \frac{2\sinh(x2)\cosh(x2)}{\cosh^2(x2)-\sinh^2(x2)} = \frac{2\tanh(x2)}{1-\tanh^2(x2)} = \frac{2u}{1-u^2}$,

$\cosh x = \frac{\cosh x}{1} = \frac{\cosh^2(x2)+\sinh^2(x2)}{\cosh^2(x2)-\sinh^2(x2)} = \frac{1+\tanh^2(x2)}{1-\tanh^2(x2)} = \frac{1+u^2}{1-u^2}$.

Végül pedig $u = \tanh(x2)$ alapján:

$$x = 2u \quad \to \quad xu = \frac{2}{1-u^2} \quad \to \quad x = \frac{2u}{1-u^2}$$

[style=example, nobreak=true] **A koszekáns hiperbolikusz integrálása**:

$$\int cschxx = \int \frac{1}{\sinh x}x = \int \frac{1-u^2}{2u}\frac{2u}{1-u^2} = \int \frac{u}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C$$

[style=learnMore] [scale=2.25, thick] [->] (-1.35,0) – (2,0) node[below left] ξ; [->] (0,-1.5) – (0,1.75) node[below left] η; [domain=1:1.75, samples=100, smooth, -to] plot (, sqrt(^{2} − 1)); $[domain = 1 : 1.75, samples = 100, smooth, -to]plot(, -sqrt(^2 -1));$ (O) at (0,0); (A) at (1.54308063,1.17520119); (B) at (-1,0); (C) at (0,0.46211716); (D) at (1,0.76159416); (E) at (O-|A); [ultra thick, draw=primaryColor] (O) – (E) node [pos=.35, below] $\cosh x$ – (A) node [midway, below, rotate=90] $\sinh x$; [ultra thick, draw=secondaryColor] (B) – (O) node[below, midway] 1 – (C) node[left, midway] u – cycle ; [dashed, draw=ternaryColor, ultra thick, shorten >=-10mm, shorten <=-10mm] (B) – (A) node [above=6mm, right=6mm] e ; [fill=primaryColor, thick] (B) node[above=1mm] $(-1;0)$ circle (0.06) ; [fill=primaryColor, thick] (A) node[above left] $(\xi_2;\eta_2)$ circle (0.06) ;

Az egységhiperbola egyenlete a $\xi\eta$ k ordinátarendszerben:

$$h : \xi^2 - \eta^2 = 1.$$

Az e egyenes átmegy a $(-1;0)$ ponto meredeksége pedig u. Egyenlete:

$$e : \eta = u(\xi + 1).$$

Helyettesítsük be az egyenes egyenletét hiperbola egyenletébe:

$$\xi^2 - (u(\xi+1))^2 = 1.$$

Fejezzük ki a ξ, majd η koordinátákat a u függvényében!

$$0 = \xi^2 - u^2(\xi+1)^2 - 1 = \xi^2 - u^2\xi^2 - 2u^2\xi - u^2 - 1 = (1-u^2)\xi^2 - 2u^2\xi - u^2 - 1$$

Használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét!

$$\xi_{12} = \frac{2u^2 \pm \sqrt{4u^4 + 4(1-u^2)(u^2+1)}}{2(1-u^2)} = \frac{u^2 \pm \sqrt{(u^4 + (1-u^4))}}{1-u^2} = \frac{\pm 1 + u^2}{1-u^2}$$

Az egyenlet egyik megoldásából visszakaphatjuk a $(-1;0)$ pontot:

$$\xi_1 = \frac{-1+u^2}{1-u^2} = -1 \quad \to \quad \eta_1 = u(\xi_1 + 1) = u(-1+1) = 0.$$

A másik megoldásból pedig a $(\xi_2; \eta_2)$ pontot:

$$\xi_2 = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad \to \quad \eta_2 = u(\xi_2+1) = u\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}+1\right) = u\left(\frac{1+u^2+1-u^2}{1-u^2}\right) = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Hasonló háromszögek alapján:

$$u = \frac{\sinh x}{1+\cosh x} = \tanh\frac{x}{2}.$$

Az egységhiperbola parametrikus egyenlete alapján:

$$\cosh x = \xi_2 = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad s \quad \sinh x = \eta_2 = \frac{2u}{1-u^2}.$$

[style=note, nobreak=true,]

$$\tanh\frac{x}{2} = \frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}} \cdot \frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} = \frac{(e^x-e^{-x})/2}{1+(e^x+e^{-x})/2} = \frac{\sinh x}{1+\cosh x}$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Speciális helyettesítések összefoglaló**:

- $R(\sin x; \cos x)$

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- $R(\sinh x; \cosh x)$

$$u = \tanh\frac{x}{2} \quad x = \frac{2u}{1-u^2} \quad \sinh x = \frac{2u}{1-u^2} \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

- $R(e^x; e^{2x}; \ldots)$

$$t = e^x \quad x = \frac{t}{t}$$

- $R(x; \sqrt{1-x^2})$

$$x = \sin t \quad t = \arcsin x \quad x = \sqrt{1-x^2} \cdot t$$
$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

- $R(x; \sqrt{x^2+1})$

$$x = \sinh t \quad t = x \quad x = \sqrt{x^2+1} \cdot t$$
$$1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

- $R(x^{ac}; x^{bc}; \ldots)$

$$x = t^c \quad x = cx^{1-1c}t$$

[style=note, nobreak=true,] A $t = \tan(x2)$ és $u = \tanh(x2)$ helyettesítésekhez tartozó levezetéseket nem szükséges fejből tudni, csupán a megértés érdekében szerepelnek az elméleti áttekintőben.

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálok értékét! (Ajánlott módszer: parciális integrálás.)

   a) $\displaystyle\int x \cos x x$

   b) $\displaystyle\int (x^2 - 1) \sin 3x x$

   c) $\displaystyle\int \ln x x$

   d) $\displaystyle\int x \arctan x x$

   e) $\displaystyle\int e^x \sin x x$

   f) $\displaystyle\int \sin^2 x x$

   g) $\displaystyle\int e^{\arccos x} x$

2. Integrálja az alábbi racionális törtfüggvényeket!

   a) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 26}{x^2 - 7x + 12} x$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 (x-2)^2} x$

   c) $\displaystyle\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 8} x$

3. Határozza meg az alábbi integrálok értékét! (Ajánlott módszer: helyettesítéses integrálás.)

   a) $\displaystyle\int \frac{1}{5 + 3\cos x} x$

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cosh x + 2\sinh x}$

   c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} x$

   d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$

   e) $\displaystyle\int \frac{e^x + 2}{e^x + e^{2x}} x$