6 MO

Integrálátalakító tételek II

Matematika G3 – Vektoranalízis
Utoljára frissítve: 2025. október 06.

6.1. Gömb térfogata, gömbi integrál

Vezesse le az R sugarú gömb térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\boldsymbol{r}) = 1/\|\boldsymbol{r}\|$ skalármező térfogati integrálját a gömbön!

A tértartomány paraméterezése:

$$\boldsymbol{\Omega}(r;s;t) = \begin{bmatrix} r\sin s\cos t \\ r\sin s\sin t \\ r\cos s \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} r &\in [0;R] \\ s &\in [0;\pi] \\ t &\in [0;2\pi] \end{aligned}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t) = \begin{bmatrix} \sin s\cos t & r\cos s\cos t & -r\sin s\sin t \\ \sin s\sin t & r\cos s\sin t & r\sin s\cos t \\ \cos s & -r\sin s & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa az utolsó sor alapján kifejtve:

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)\right) &= -\cos s \cdot \begin{vmatrix} r\cos s\cos t & -r\sin s\sin t \\ r\cos s\sin t & r\sin s\cos t \end{vmatrix} + r\sin s \cdot \begin{vmatrix} \sin s\cos t & -r\sin s\sin t \\ \sin s\sin t & r\sin s\cos t \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos s\left(\cos^2 t\cos s\sin s + \sin^2 t\cos s\sin s\right) + +r^2\sin s\left(\sin^2 s\cos^2 t + \sin^2 s\sin^2 t\right) \\ &= r^2\cos s\cdot\cos s\sin s + r^2\sin s\cdot\sin^2 s \\ &= r^2\sin s. \end{aligned}$$

A gömb térfogata tehát:

$$\begin{aligned} V = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V &= \iiint_D \det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R r^2\sin s\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{R^3}{3}\cos s\right]_0^{\pi}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2R^3}{3}\mathrm{d}t = \left[\frac{2R^3}{3}t\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

A skalármező átparaméterezése:

$$\varphi(\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2\sin^2 s\cos^2 t + r^2\sin^2 s\sin^2 t + r^2\cos^2 s}} = \frac{1}{r}.$$

A skalármező térfogati integrálja a gömbön:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint_{D} \varphi(\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)) \det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{1}{r} r^2 \sin s\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r \sin s\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2}{2} \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^2}{2}\cos s\right]_0^{\pi} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R^2\,\mathrm{d}t \\
&= \left[R^2 t\right]_0^{2\pi} = 2\pi R^2.
\end{aligned}
$$

6.2. Henger térfogata

Vezesse le az R sugarú, h magasságú henger térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$ skalármező térfogati integrálját a hengerben!

A tértartomány paraméterezése:

$$
\boldsymbol{\Omega}(r;s;t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ s \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} r &\in [0;R] \\ s &\in [0;h] \\ t &\in [0;2\pi] \end{aligned}
$$

A Jacobi-mátrix:

$$
\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & -r\sin t \\ \sin t & 0 & r\cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Ennek determinánsa:

$$
\det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)\right) = r.
$$

A henger térfogata tehát:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V = \iiint_{D} \det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{R} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{h} \frac{R^2}{2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2}{2}s\right]_0^h \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 h}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{R^2 h}{2}t\right]_0^{2\pi} = \pi R^2 h.
\end{aligned}
$$

A skalármező átparaméterezése:

$$
\varphi(\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)) = (r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 = r^2.
$$

A skalármező térfogati integrálja a hengerben:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint_{D} \varphi(\boldsymbol{\Omega}(r;s;t))\det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}(r;s;t)\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^R r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{R^4}{4}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{4}s\right]_0^h \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{R^4 h}{4}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{R^4 h}{4}t\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4 h}{2}.
\end{aligned}$$

6.3. Vektormező ismeretlen komponense

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y\sin x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2\cos y - \cos x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (v_3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Határozza meg v_3-at, ha tudjuk, hogy $\boldsymbol{v}$ tetszőleges zárt felületen vett felületi integrálja zérus!

A Gauss-Osztogradszkij tétel szerint:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v};\mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V,$$

vagyis a tetszőleges zárt felületen vett felületi integrál akkor zérus, ha a vektormező divergenciája zérus. Tehát:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}(y\sin x) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2\cos y - \cos x) + \frac{\partial v_3}{\partial z} = y\cos x - z^2\sin y + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = -y\cos x + z^2\sin y.$$

Integráljuk ezt z szerint:

$$v_3 = \int \left(-y\cos x + z^2\sin y\right)\mathrm{d}z = -yz\cos x + \frac{z^3}{3}\sin y + f(x;y),$$

ahol $f(x;y)$ tetszőleges függvény, nem befolyásolja a dirvergenciát.

6.4. Zárt felületi integrálok

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$. Adja meg a vektormező alábbi zárt felületeken vett felületi integráljait:

a) az $R = 2$ sugarú gömb felületén befelé mutató irányítással:

$$I = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v};\mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = -\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = -3\cdot\mathrm{Vol}(\mathcal{V}) = -3\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = -4\pi R^3 = -32\pi.$$

b) az $x^2 + y^2 = 4$ hengerfelületen, amelyet a $z = -1$ és $z = 1$ síkok zárnak le, kifelé mutató irányítással:

$$I = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = 3 \cdot \mathrm{Vol}(\mathcal{V}) = 3 \cdot (\pi R^2 h) = 3 \cdot (\pi \cdot 2^2 \cdot 2) = 24\pi.$$

c) a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid és a $z = 4$ sík által határolt test felületén kifelé mutató irányítással:

Itt már nem tudjuk kapásból felírni a tértartomány térfogatát, így parametrizálnunk kell a tértartományt:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r\,s\cos t \\ r\,s\sin t \\ r^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} r \in [0; 2] \\ s \in [0; 1] \\ t \in [0; 2\pi] \end{matrix}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} s\cos t & r\cos t & -rs\sin t \\ s\sin t & r\sin t & rs\cos t \\ 2r & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa:

$$\det(\mathbf{D\Omega}(r; s; t)) = 2r^3 s\cos^2 t + 2r^2 s\sin^2 t = 2r^3 s(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2r^3 s.$$

A felületi integrál:

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = 3 \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V \\ &= 3 \cdot \iiint_D \det(\mathbf{D\Omega}(r; s; t)) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 2r^3 s \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\ &= 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{r^4}{2}\right]_0^2 s \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = 3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 8s \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\ &= 3 \cdot \int_0^{2\pi} \left[4s^2\right]_0^1 \mathrm{d}t = 3 \cdot \int_0^{2\pi} 4 \, \mathrm{d}t = 12 \cdot [t]_0^{2\pi} = 24\pi. \end{aligned}$$

Akár hengerkordinátákkal is megoldhattuk volna a feladatot:

A helyettesítés:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in [0; 2] \\ t \in [0; 2\pi] \\ z \in [r^2; 4] \end{matrix}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D\Omega}(r; t; z) = \begin{bmatrix} \cos t & -r\sin t & 0 \\ \sin t & r\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa:

$$\det(\mathbf{D\Omega}(r; t; z)) = r.$$

A felületi integrál:

$$I = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V = 3 \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V$$
$$= 3 \cdot \iiint_{D} \det(\mathbf{D\Omega}(r;t;z))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = 3 \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$
$$= 3 \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(4-r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = 3\cdot\int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}t$$
$$= 3\cdot\int_0^{2\pi}(8-4)\,\mathrm{d}t = 12\cdot[t]_0^{2\pi} = 24\pi.$$

6.5. Faraday-kalitka

Egy fotonikus chipeket hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségelosztással ($\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, az ellipszoid egyenlete pedig:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

A nettó töltés kiszámításához a Gauss-törvényt alkalmazzuk:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{E}; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \frac{Q_{\mathrm{net}}}{\varepsilon_0},$$

ahol $\boldsymbol{E}$ az elektromos térerősség, ε_0 a vákuum permittivitása, Q_{net} pedig a kalitka belsejében lévő nettó töltés.

A vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 3.$$

A tértartomány nagysága:

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}) = \frac{4\pi}{3}\sqrt{5\cdot 19\cdot 4} = \frac{8\pi\sqrt{95}}{3}$$

A Gauss-törvény alapján a nettó töltés:

$$Q_{\mathrm{net}} = \varepsilon_0 \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{E}; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \varepsilon_0 \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = 3\,\varepsilon_0\ \mathrm{Vol}(\mathcal{V}) = 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 8\pi\sqrt{95} \approx 2{,}17\,\mathrm{nC}.$$

6.6. Hőáram

Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara $R = 0{,}02\,\mathrm{m}$, A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmérséklet-mező jó közelítéssel

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = T_c - \alpha\boldsymbol{r}^2, \quad \alpha = 1{,}3\cdot 10^5\,\mathrm{K/m^2}.$$

Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha

$$q_{\text{hő}} = -\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \lambda \operatorname{grad} \varphi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle, \quad \lambda = 0{,}2\,\mathrm{W}/(\mathrm{m\,K}).$$

Használjuk a Green-tétel asszimetrikus alakját $\psi = -\lambda$ állandó választással:

$$q_{\text{hő}} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle -\lambda \operatorname{grad} \varphi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = -\iiint_{\mathcal{V}} \psi\, \Delta\varphi + \left\langle \underbrace{\operatorname{grad} \lambda}_{=0}; \operatorname{grad} \varphi \right\rangle \mathrm{d}V = -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta\varphi\, \mathrm{d}V.$$

A hőmérséklet-mező Laplace-operátora:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(-2\alpha \boldsymbol{r}) = -2\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{r} = -6\alpha.$$

A tértartomány nagysága:

$$\operatorname{Vol}(\mathcal{V}) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

A teljes hőáram:

$$\begin{aligned} q_{\text{hő}} &= -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta\varphi\, \mathrm{d}V = 6\alpha\lambda \operatorname{Vol}(\mathcal{V}) = \lambda\, 6\, \alpha\, \frac{4\pi R^3}{3} \\ &= 8\pi\alpha\lambda R^3 = 8\pi \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^5 \cdot (0{,}02)^3 \approx 5{,}23\,\mathrm{W}. \end{aligned}$$