4 Lineáris leképzések I

Matematika G2 – Lineáris Algebra

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

4.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 4.1: Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1-beli vektor $(\forall \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in V_1)$ és T-beli skalár $(\lambda \in T)$ esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b})$ $\sim$ additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{a})$ $\sim$ homogén (skalár kiemelhető).

Definíció 4.2: Leképezés magtere

Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker\varphi := \left\{ \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V_1 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \right\}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

Definíció 4.3: Leképezés defektusa

A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $\operatorname{def}\varphi$-vel jelöljük.

Nem létezik olyan vektortér, melynek magtere az üreshalmaz (a nullvektor mindig benne van, mert a nullvektor képe mindig nullvektor).

Invertálható lineáris leképezés magtere a nullvektor.

Definíció 4.4: Lineáris leképezés rangja

Egy lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját. $\operatorname{rg}\varphi = \dim\varphi(V_1)$.

Tétel 4.1: Rang-nullitás tétele

Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim V_1.$$

Lineáris leképezések mátrixreprezentációja:

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és dim $V_1 = n$, valamint dim $V_2 = k$. Legyen $\{\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \dots; \boldsymbol{a}_n\}$ bázis V_1-ben, és $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázis V_2-ben. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \alpha_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \alpha_{2i}\boldsymbol{b}_2 + \dots + \alpha_{ki}\boldsymbol{b}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}\boldsymbol{b}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{ki} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}_{k\times n}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $\boldsymbol{x} \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ az $\boldsymbol{x}$ koordinátái, ekkor a képét az alábbi módon számíthatjuk:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi(\boldsymbol{a}_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{ki} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

Definíció 4.5: Bázistranszformáció

Legyenek $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ és $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisok V-ben. Ekkor a $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\} \to \{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázistranszformáció $\mathbf{T}$ mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{b}}_1 &= t_{11}\boldsymbol{b}_1 + t_{21}\boldsymbol{b}_2 + \dots + t_{n1}\boldsymbol{b}_n \\ \hat{\boldsymbol{b}}_2 &= t_{12}\boldsymbol{b}_1 + t_{22}\boldsymbol{b}_2 + \dots + t_{n2}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_j &= t_{1j}\boldsymbol{b}_1 + t_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \dots + t_{nj}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_n &= t_{1n}\boldsymbol{b}_1 + t_{2n}\boldsymbol{b}_2 + \dots + t_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{T}$ bázistranszformációs mátrix segítségével a régi és új bázisban felírt vektorok koordinátái közötti kapcsolat mátrixosan:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{T}\boldsymbol{x}' \quad \text{és} \quad \boldsymbol{x}' = \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Tétel 4.2: Lineáris leképezés mátrixa új bázisban

Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés, $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ és $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisok V-ben. A φ $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots \boldsymbol{b}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\mathbf{A}$, a φ $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\hat{\mathbf{A}}$. Jelölje $\mathbf{T}$ a $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \dots; \boldsymbol{b}_n\}$ bázisról a $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

A $\mathbf{A}$ és $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix hasonló.

Alap geometriai leképezések:

- **Tükrözés** valamely tengelyre:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x-tengelyre tükrözés — y-tengelyre tükrözés — z-tengelyre tükrözés

- **Vetítés** valamely tengelyre:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x-tengelyre vetítés — y-tengelyre vetítés — z-tengelyre vetítés

- **Tükrözés** valamely síkra:

$$\mathbf{T}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

xy síkra tükrözés — yz síkra tükrözés — xz síkra tükrözés

- **Vetítés** valamely síkra:

$$\mathbf{T}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

xy síkra vetítés — yz síkra vetítés — xz síkra vetítés

- λ-szoros **nyújtás** valamely irányban:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

x irányba — y irányba — z irányba

- **Forgatás** $+\alpha$ szöggel:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \sim x \text{ tengely körüli forgatás}$$

$$\mathbf{R}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \sim y \text{ tengely körüli forgatás}$$

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim z \text{ tengely körüli forgatás}$$

Ha egymás után több transzformációt kell végrehajtani **A**, **B**, **C** sorrendben, akkor:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{CBA}\boldsymbol{x}.$$

Definíció 4.6: Ortogonális transzformáció

Az n dimenziós euklideszi tér $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációját ortogonálisnak mondjuk, ha $\langle \mathcal{A}\boldsymbol{x}; \mathcal{A}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle$, minden $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \in V$ esetén.

Egy ortogonális transzformáció **Q** mátrixának inverze megegyezik a transzponáltjával.

Amennyiben $\det \mathbf{Q} = 1$, akkor a transzformáció orientációtartó.

Amennyiben $\det \mathbf{Q} = -1$, akkor a transzformáció orientációváltó.

A két dimenziós térben való forgatás orientációtartó, hiszen

$$\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

4.2. Feladatok

1. Állapítsa meg, hogy az alábbi leképezések lineárisak-e?

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ 5xy \end{bmatrix} \qquad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$$

2. Határozza meg a $P(5; -4; -1)$ pont koordinátáit az $\boldsymbol{a}_1(2; 1; 0)$, $\boldsymbol{a}_2(0; 2; 1)$ és $\boldsymbol{a}_3(1; 0; 2)$ vektorok által meghatározott bázisban!

3. Írja fel az $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ és a $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3\}$ ortonormált bázisok közti báziscsere mátrixát!

4. A harmadik feladatban meghatározott báziscsere mátrixát felhasználva oldja meg a második feladatot!

5. Írja fel a 2D Descartes koordinátarendszer α fokos elforgatásával nyert új koordinátarendszerbe mutató báziscsere mátrixát!

6. Adjuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az alábbi vektorba viszi át a bázisodat:

$$\boldsymbol{i} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j} \mapsto \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Mi lesz a $P(1; 1; 1)$ pont képe?

7. Adja meg az első feladatban szereplő leképezések mátrixait!

8. Határozza meg az origón áthaladó $\boldsymbol{u}(a; b; c)$ normálisú $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$ síkra vonatkozó tükrözés mátrixát!

9. Adott egy lineáris leképezés a szokásos $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ bázisban. Írja fel a leképezés mátrixát az $\{\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_2\}$ bázisban, ha $\boldsymbol{f}_1(2; 1)$ és $\boldsymbol{f}_2(1; 1)$.

10. Adott két lineáris leképezés mátrixa $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$. Mit ad eredményül…

    a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{r}$, b) $\mathbf{AB}\boldsymbol{r}$, c) $\mathbf{A}^2\boldsymbol{r}$, d) $\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{r}$?

11. Egy φ leképezés mátrixa $\mathbf{A}$. Döntsük el, hogy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

    a) $P(2; 0; 1) \in \ker \varphi$,
    b) mi $Q'(1; 4; 0)$ ősképe,
    c) $\operatorname{rg} \varphi = ?$
    d) $\operatorname{def} \varphi = ?$

12. Mennyi a leképezés defektusa…

    a) x tengelyre való vetítés esetén, b) yz síkra való vetítés esetén?

13. Írja fel annak a leképezésnek a mátrixát amely z körül α szöggel forgat, majd tükröz az xy síkra, végül x irányba 2-szeres, z irányba 3-szoros nagyítást végez!

14. Írja fel azt a leképezést, amely az $y = x$ és $z = 0$ egyenletrendszerű egyenesre tükröz!

15. Írja fel az e egyenes körül pozizív y irányból 90°-os forgatás mátrixát a szokásos, illetve a $\boldsymbol{v}_1(1;0;0)$, $\boldsymbol{v}_2(1;1;0)$ és $\boldsymbol{v}_3 = (1;1;1)$ bázisokban, ha az egyenes egyenletrendszere:

$$e : \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \quad \text{és} \quad z = 0.$$

16. Adja meg a α és β paramétereket, hogy a φ leképezés $\mathbf{A}$ mátrixa orientciótartó és skalárisszorzattartó legyen (ortogonális)!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$