

## 12

## Differenciálás II

Matematika G2 – Többszámú változós analízis

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

## 12.1. Elméleti Áttekintő

## Többszámú változós Taylor-formula:

Az egyváltozós függvényekhez hasonló módon, az  $n$ -edrendű Taylor-polinom:

$$T_0 = f(\mathbf{x}_0)$$

$$T_1 = T_0 + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) \right]$$

$$\vdots$$

## Többszámú változós függvények szélsőérték-számítása:

Szélsőérték létezésének **szükséges** feltétele, hogy az adott pontban a parciális deriváltak eltűnjenek, vagyis

$$\forall i : \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0.$$

Szélsőérték létezésének elégséges feltétele, hogy az adott pontban felírt Hesse-mátrix pozitív definit legyen. Ezen mátrix az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

A determinánsa alapján:

- ha  $\det \mathbf{H} > 0$ , akkor lokális szélsőérték van,
- ha  $\det \mathbf{H} < 0$ , akkor nincsen szélsőérték,
- ha  $\det \mathbf{H} = 0$ , akkor nem lehet eldönteni.

Amennyiben  $\det \mathbf{H} > 0$ , akkor a szélsőérték jellege

- lokális maximum, ha  $\mathbf{H}$  főátlóra feszített aldeterminánsai váltakozó előjelűek,
- lokális minimum, ha  $\mathbf{H}$  főátlóra feszített aldeterminánsai pozitívak.

**Feltételes szélsőérték egy görbe mentén:**

Amennyiben egy  $f$  függvény egy adott  $g = 0$  görbe menti szélsőértékeit szeretnénk megkeresni, akkor az

$$F = f + \lambda g$$

függvényre kell megoldanunk a szélsőérték-feladatot.

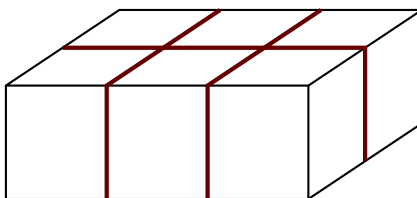
**Feltételes szélsőérték egy görbe által bezárt területen:**

Amennyiben egy  $f$  függvény szélsőértékeit egy adott  $g = 0$  görbe által bezárt tartományán szeretnénk megkeresni, akkor:

- először megkeressük a lokális szélsőértékeket, és ezekből kiválasztjuk azokat, amelyek a tartomány belsejébe esnek.
- utána pedig megkeressük a görbe peremére eső szélsőértékeket az előző módszer alapján.

## 12.2. Feladatok

1. Határozza meg az  $f(x; y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$  függvény első és második Taylor polinomját a  $P(1; -2)$  pontban!
2. Határozza meg az  $f(x; y; z) = \sin x \sin y \sin z$  függvény első és második Taylor polinomjait a  $P_2(\pi/4; \pi/4; \pi/6)$  pontban!
3. Végezzen szélsőérték vizsgálatot az  $f(x; y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$  függvényen!
4. Határozza meg az  $f(x; y) = x^2 + xy + y^2 + 8/x + 8/y$  függvény egy darab szélsőértékét!
5. Ellenőrizze, hogy az  $f(x; y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$  függvénynek a  $P_1(\pi/2; \pi/2)$  és  $P_2(0; 0)$  pontokban szélsőérték helye van!
6. Határozza meg azt a csomagméretet, amely esetén egy  $V = 4,5 \text{ dm}^3$  térfogatú téglatest alakú csomag a legkevesebb zsineg felhasználásával az alábbi ábrán látható módon bekötözhető!



7. Határozza meg annak a derékszögű hasábnak a minimális térfogatát, amely éleinek összege  $l$  hosszú!
8. Határozza meg a  $f(x; y) = x^2 y^2$  függvény szélsőértékét az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletű görbe mentén!
9. Határozza meg az  $f(x; y) = x^2 + y^2 + xy - x$  függvény globális maximumát és minimumát az  $x^2 + y^2 \leq 1$  tartományon!