9 Fourier-sorok

Matematika G2 – Valós analízis
Utoljára frissítve: 2025. május 04.

9.1. Elméleti Áttekintő

A 2π szerint periodikus függvények vektortere:

A 2π szerint periodikus függvények az összeadásra és a skalárral való szorzásra egy végtelen dimenziós vektorteret alkoznak.

A vektortér egy bázisa:

$$\{\ 1; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \ldots; \cos kx; \sin kx; \ldots;\ \}.$$

A vektortéren belül az alábbi módon definiáljuk a skaláris szorzatot:

$$\langle f; g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az előbb definiált bázis vektorai lineárisan függetlenek, vagyis egymással vett skaláris szorzatuk mindig nulla: $(k \neq l)$

$$\begin{aligned}
\langle 1; \sin kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x = 0,\\
\langle 1; \cos kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,\mathrm{d}x = 0,\\
\langle \sin kx; \cos lx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin[(k-l)x] + \sin[(k+l)x]\,\mathrm{d}x = 0,\\
\langle \sin kx; \sin lx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(k-l)x] - \cos[(k+l)x]\,\mathrm{d}x = 0,\\
\langle \cos kx; \cos lx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(k-l)x] + \cos[(k+l)x]\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

A bázisvektorok hosszai a skaláris szorzat segítségével:

$$\begin{aligned}
\langle 1; 1\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x = 2\pi && \Rightarrow \quad \|1\| = \sqrt{2\pi}\\
\langle \sin kx; \sin kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2}\,\mathrm{d}x = \pi && \Rightarrow \quad \|\sin kx\| = \sqrt{\pi},\\
\langle \cos kx; \cos kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2}\,\mathrm{d}x = \pi && \Rightarrow \quad \|\cos kx\| = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy az előbb leírt bázis nem ortonormált, azonban ha az egyes vektorokat normáljuk, akkor ortonormált bázist kapunk:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x; \ldots ; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx; \ldots \right\}$$

Ezek alapján tetszőleges 2π szerint periodikus függvény felírható az alábbi alakban:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big),$$

ahol az együtthatók a következő módon számíthatóak:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\langle f; 1\rangle}{\langle 1; 1\rangle} &&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,\\
a_k &= \frac{\langle f; \cos kx\rangle}{\langle \cos kx; \cos kx\rangle} &&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,\mathrm{d}x,\\
b_k &= \frac{\langle f; \sin kx\rangle}{\langle \sin kx; \sin kx\rangle} &&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ezzel analóg módon, ha tekintjük az $\mathbb{R}^3$ egy standard normális bázisban $\{\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$ felírt $\boldsymbol{v}(v_1; v_2; v_3)$ vektorát és egy másik olyan $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \boldsymbol{b}_3\}$ bázist, amely bázisvektorai merőlegesek egymásra, akkor az $\boldsymbol{v}$ vektor koordinátái az új bázisban:

$$v_i = \frac{\langle \boldsymbol{v}; \boldsymbol{b}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{b}_i; \boldsymbol{b}_i\rangle}.$$

Definíció 9.1: Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy $2p$ szerint periodikus függvény, amely a $[0; 2p]$ intervallumon Riemann-integrálható ($f \in \mathcal{R}[0; 2p]$). Ekkor f Fourier-során az alábbi trigonometrikus sort értjük:

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right).$$

Ha a függvény 2π szerint periodikus:

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

! Ha egy függvény páros, akkor a Fourier-sorában csak a_0 és koszinusz tagok szerepelnek, vagyis $b_k \equiv 0$.

! Ha egy függvény páratlan, akkor a Fourier-sorában csak szinusz tagok szerepelnek, vagyis $a_0 \equiv 0$ és $a_k \equiv 0$.

Fourier együtthatók számítása: (2π / $2p$ periodicitás esetén)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a_0 = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad a_k = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad b_k = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\mathrm{d}x$$

Ha az f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor mindegy, hogy a $[0; 2p]$ intervallumon, vagy egy skalárral eltolva az $[a; a+2p]$ intervallumon integrálunk, vagyis:

$$\int_0^{2p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2p} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tétel 9.1

Ha a 2π szerint periodikus f függvénynek létezik az x_0 pontban a jobb- és baloldali határértéke, továbbá az f függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens, akkor a Fourier-sor összege ezen pontokban a függvény bal- és jobboldali határértékeinek számtani középe.

Hasznos trigonometrikus összefüggések:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin(t \pm s) = \sin t\cos s \pm \cos t\sin s$$

$$\cos(t \pm s) = \cos t\cos s \mp \sin t\sin s$$

$$2\sin t\sin s = \cos(t-s) - \cos(t+s)$$

$$2\cos t\cos s = \cos(t-s) + \cos(t+s)$$

$$2\sin t\cos s = \sin(t-s) + \sin(t+s)$$

9.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi, 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorát!

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < x \le 0 \\ \pi, & \text{ha } \quad 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad \wedge \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$$

2. Határozzuk meg az alábbi, 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorát! Adja meg a sorösszeget az $x_0 = \pi$ pontban!

$$f(x) = x, \quad \text{ha} \quad x \in (-\pi; \pi) \qquad \wedge \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$$

3. Írja fel az alábbi 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát!

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x < \pi \\ 0, & \pi \le x < 2\pi \end{cases} \qquad \wedge \qquad f(x) = f(x + 2k\pi)$$

4. Adja meg az alábbi trigonometrikus függvények Fourier-sorát!

   a) $f(x) = \sin^4 x$

   b) $g(x) = \cos 3x \cdot \sin^2 x$

5. Írja fel az alábbi $2p = 2\pi$ szerint periodikus függvény Fourier-sorát!

$$f(x) = x^2, \quad \text{ha} \quad x \in (-2; 2) \qquad \wedge \qquad f(x) = f(x + 2k)$$