

12

Integrálszámítás III

Matematika G1 – Integrálszámítás

Utoljára frissítve: 2024. november 18.

12.1. Elméleti Áttekintő

Trigonometrikus integrálás:

Trigonometrikus függvények integrálásakor a tanult trigonometrikus azonosságokat kell alkalmaznunk. Ezek közül a legfontosabbak:

$$\begin{aligned}1 &= \sin^2 x + \cos^2 x, \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páros, akkor a függvényt a fenti trigonometrikus azonosságok segítségével át tudjuk alakítani.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páratlan ($2k + 1$), akkor azt felbontjuk egy $2k$ -s és egy 1-es szögfüggvény szorzataként, majd a már páros fokszámú tagot az előbbi módszerrel tudjuk integrálni.

Határozott integrál:

Egy függvény $[a; b]$ intervallumon vett határozott integrálja a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

ahol $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye.

A határozott integrálás során a határozatlan integrálásnál tanult összefüggéseket alkalmazhatjuk. Azonban két integrálási technikánál különösen figyelniünk kell az integrálási tartományra:

- Parciális integrálás: $\int_a^b f g' = [f g]_a^b - \int_a^b f' g,$
- Helyettesítéssel integrálás: $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$

Görbe alatti terület:

A határozott integrál segítségével a függvény görbéje és az x -tengely által bezárt **előjeles** területet tudjuk meghatározni. Amennyiben a függvény képe a tengely alatt van, akkor a terület negatív előjelű lesz.



$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

Két görbe által bezárt terület:

Két függvény által bezárt területet a két függvény különbségének integrálásával tudjuk meghatározni:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

**Paraméteres görbe által meghatározott görbevonallú trapéz terület:**

Egy $\gamma : (x(t); y(t))$ görbe t_1 és t_2 paraméterpontok közötti görbevonallú trapéz területe

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| dt.$$

Határozzuk meg a ciklois egy $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonallú trapéz területét!

A ciklois paraméteres egyenlete:

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t, \\ y(t) &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$



$$A = \int_0^{2\pi} |\dot{x}(t) \cdot y(t)| dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t dt = \dots = 3\pi$$

12.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi trigonometrikus integrálok értékét!

a) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

b) $\int \cos^5 x \, dx$

c) $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

2. Oldja meg az alábbi összetett integrálási feladatokat!

a) $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

b) $\int \frac{\ln \ln x}{x} \, dx$

c) $\int |x| \, dx$

d) $\int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1} \, dx$

e) $\int (x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1} \, dx$

3. Határozzuk meg az alábbi határozott integrálok értékét!

a) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$

b) $\int_0^1 x \sinh x \, dx$

c) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx$

4. Határozza meg az $f(x) = (x + 1)x(x - 2)$ függvény és az x -tengely által bezárt geometriai területet!

5. Adja meg az $f(x) = x^4$ és a $g(x) = 3x^2 - 2$ függvények által bezárt terület nagyságát!

6. Adja meg egy a sugarú körvonal $(x(t) = a \cos t, y(t) = a \sin t)$ alapján a $t \in [0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó görbevonallú trapéz területét!