

## 9

# Differenciálás III

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 27.

## 9.1. Elméleti Áttekintő

### Teljes függvényvizsgálat lépései:

1. Értelmezési tartomány ( $\mathcal{D}_f$ )  
Zérushelyek ( $x$  tengelymetszet)  
Paritás ( $f(x) = f(-x)$  – páros,  $f(x) = -f(-x)$  – páratlan)  
Periodicitás ( $f(x) = f(x + kp)$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}$ )  
Határérték ( $\pm\infty$ -ben, szakadási pontokban, határpontokban)
2.  $f'(x)$  vizsgálata: monotonitás, lokális szélsőértékek
  - $f'(x) > 0$  – monoton nő
  - $f'(x) < 0$  – monoton csökken
3.  $f''(x)$  vizsgálata: konvexitás, konkávitás, inflexiós pontok
  - $f''(x) > 0$  – konvex
  - $f''(x) < 0$  – konkáv
4. Lineáris aszimptoták keresése:
  - Az  $x = a$  egyenes függőleges aszimptota, ha  $\lim_{x \rightarrow a^+} = \pm\infty$ , vagy  $\lim_{x \rightarrow a^-} = \pm\infty$ .
  - Az  $y = b$  egyenes vízszintes aszimptota, ha  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = b$ .
  - Ferde aszimptotákat  $y = mx + b$  alakban keressük, ahol
$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx.$$
5. Táblázat készítése, ábrázolás és értékkészlet leolvasása az ábráról

### Tétel 9.1: Lokális szélsőérték

Ha az  $f$  függvény deriválható az értelmezési tartományának egy  $x_0$  belső pontjában, akkor az  $x_0$ -beli lokális szélsőérték létezésének

- szükséges feltétele:  $f'(x_0) = 0$ ,
- elégséges feltétele:
  1.  $f'(x_0) = 0$  és  $f'$  előjelet vált az  $x_0$ -ban
  2. ha  $f$  második deriváltja is létezik az  $x_0$ -ban, akkor  $f''(x_0) \neq 0$ .
    - Ha  $f''(x_0) > 0$ , akkor  $f$ -nek lokális minimuma van az  $x_0$ -ban.
    - Ha  $f''(x_0) < 0$ , akkor  $f$ -nek lokális maximuma van az  $x_0$ -ban.

**Tétel 9.2: Inflexiós pont**

Ha az  $f$  függvény kétszer deriválható az értelmezési tartományának egy  $x_0$  belső pontjában, akkor az  $x_0$ -beli inflexiós pont létezésének

- szükséges feltétele:  $f''(x_0) = 0$ ,
- elégséges feltétele:  $f''(x)$  előjelet vált az  $x_0$ -ban, vagy  $f'''(x_0) \neq 0$ .

**Szöveges feladatok**

Ezen a gyakorlaton olyan szöveges feladatokkal fogunk foglalkozni, amelyekben valamilyen szélsőértéket kell meghatároznunk.

Tudjuk, hogy egy  $f$  függvénynek az értelmezési tartományának egy  $x_0$  pontjában akkor van szélsőértéke, ha  $f'(x_0) = 0$  és  $f'(x)$  előjelet vált az  $x_0$  pontban, vagy  $f''(x_0) \neq 0$ .

Ezen feladatok esetén fontos, hogy a feladat elolvasása után a szöveg alapján felírjuk az alapösszefüggéseket. Ezután meg kell határoznunk azt a függvényt, amelynek a szélsőértékét keressük. Miután meghatároztuk a függvény szélsőértékeit, ellenőriznünk kell, hogy valóban szélsőértéke-e.

**9.2. Feladatok**

1. Végezze el az  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9}$  függvény teljes vizsgálatát!
2. Határozza meg az 1 literes felül nyitott legkisebb felszínű hengert!
3. Határozza meg a legnagyobb térfogatú  $h$  alkotójú kúpot!
4. Határozza meg az  $r$  sugarú körbe írt legnagyobb területű derékszögű négyszöget!
5. Egy  $a$  szélességű csatornából derékszögben kinyúlik egy  $b$  szélességű csatorna. Határozza meg mekkora azon gerenda hossza, amely befordítható egyik csatornából a másikba!
6. A gazda épp a kocsmában mulat, mikor neje felhívja, hogy hol van. (Természetesen titokban ment meccset nézni). A gazda, nehogy lebukjon, azt hazudja, hogy a szomszédnál van és sietve indul haza. Azonban, hogy a kocsmaszagot lemossa magáról, elhatározza, hogy megfürdik a patakban. Milyen úton halad, ha a lehető leggyorsabban akar hazaérni?

