definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Valós analízis BMETE94BG02 6

Matematika G2

Függvénysorozatok

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Numerikus sor**] Legyen $(a_n) : N \to$ numerikus sorozat, amelyből képezzük az alábbi sorozatot:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Az így képzett (s_n)-t az (a_n) sorozatból képzett numerikus sornak mondjuk.

Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens, ha az s_n sorozat konvergens, továbbá $\sum a_n$ sor divergens, ha s_n sorozat divergens.

Az s_n sorozat határértékét a $\sum a_n$ sor összegének hívjuk:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Numerikus sorozat konvergencia tesztek:**

- **Majoráns kritérium:**

$$\text{ha } \sum a_n < \sum b_n \text{ és } \sum b_n \text{ konvergens, akkor } \sum a_n \text{ is konvergens.}$$

- **Minoráns kritérium:**

$$\text{ha } \sum a_n > \sum b_n \text{ és } \sum b_n \text{ divergens, akkor } \sum a_n \text{ is divergens.}$$

- **Hányadosteszt:**

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} |a_{n+1} a_n| = q \text{ és } q < 1, \text{ akkor } \sum a_n \text{ konvergens.}$$

- **Gyökteszt:**

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \text{ és } q < 1, \text{ akkor } \sum a_n \text{ konvergens.}$$

- **Integrálkritérium:** ha $x \geq 1$ esetén $f(x)$ nemnegatív és csökkenő, akkor

$$\sum |f_n| \text{ konvergens, ha } \int_1^\infty f(x)x \text{ konvergens.}$$

- **Leibniz-sor:**

$$\sum (-1)^n a_n \text{ konvergens, ha } (a_n) \text{ monoton csökkenő nullsorozat.}$$

[style=note, nobreak=true,] A $\sum a_n$ sorozat abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ is konvergens.

A $\sum a_n$ sorozat feltételesen konvergens, ha $\sum a_n$ konvergens, de $\sum |a_n|$ divergens.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Függvénysorozat**] Az $f_n : I \subset R \to R$ sorozatot függvénysorozatnak nevezzük.

[style=note, nobreak=true,] Egy függvénysor értelmezése tartománya azon halmaz, ahol az összes f_n tagfüggvény értelmezve van:

$$f = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Függvénysorozat pontbeli konvergenciája**] Ha az $x_0 \in I$ pontban az $(f_n(x_0))$ számsorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergens az x_0-ban. A konvergenciahalmaz:

$$K := \{\ x \mid x \in I \wedge (f_n) konvergensazxpontban\ \}.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 4: Függvénysorozat határfüggvénye**] Az f függvényt az (f_n) függvénysorozat határfüggvényének nevezzük:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in K.$$

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az f határfüggvényhez a K-n, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon; x)$, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon; x)$.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 5: Függvénysorozat egyenletes konvergenciája**] Az (f_n) egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $N(\varepsilon)$ úgy, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ minden $x \in E$ esetén.

[style=blueBox, nobreak=true,] Ha az (f_n) függvénysorozat folytonos és egyenletesen konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)x.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] Ha az (f_n) függvénysorozat folytonos és az (f'_n) függvénysorozat is folytonos és egyenletesen konvergens, valamint az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'.$$

0.2 Feladatok

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? 2

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos^n(\pi 2))^{4n}}{n^n+1}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+1n)^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2-1}$

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

2. Határozza meg az alábbi függvénysorozatok értelmezési tartományát, konvergencia tartományát és határfüggvényét! 2

   a) $f_n(x) = x^n$

   b) $f_n(x) = \dfrac{x^{n+2}+1}{x^n}$

   c) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$

   d) $f_n(x) = (\ln x)^n$

   e) $f_n(x) = n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

   f) $f_n(x) = n\cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$

3. Egyenletesen konvergens-e az alábbi függvénysorozat a $(2;5)$ intervallumon?

$$f_n(x) = \frac{2x^3n^2}{x^2n^2+5}$$

4. Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n^4x^2+3)}{x^2+n^3}x = 0$$

5. Létezik-e az alábbi függvénysorozat deriváltja?

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin\left[n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

6. Adja meg az f_n függvénysorozat összegfüggvényét a $[0;2]$ intervallumon! Egyenletesen konvergens-e az összegfüggvény a konvergencia-intervallumon?

$$f_n = \{\, n^2 x, ha \quad 0 \le x \le 1n \ \wedge \ n \in N^+ 1x, ha \quad 1n \le x \le 2 \ \wedge \ n \in N^+$$