1 Vektorok

Matematika G1 – Analitikus geometria

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 07.

1.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 1.1: Vektor

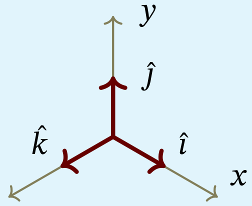
Egy (v_1, v_2, v_3) valós számokból alló rendezett számhármast a térben ($\mathbb{R}^3$) vektornak nevezünk. Jelölése: $\boldsymbol{v}$ (nyomtatott szöveg), $\underline{v}$ / $\vec{v}$ (kézzel írott szöveg).

A vektorok geometriai értelemben olyan irányított szakaszok, melyeknek hossza és iránya van.

Vektorok megadása:

Egy tetszőleges $\boldsymbol{v}$ $(v_1; v_2; v_3)$ vektor a standard normális bázisban

$$\boldsymbol{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}.$$



$$\hat{\imath} = (1; 0; 0)$$
$$\hat{\jmath} = (0; 1; 0)$$
$$\hat{k} = (0; 0; 1)$$

Vektorok típusai:

- **kötött vektor**: fix kezdőponttal rendelkezik,
- **szabad vektor**: nincs fix kezdőpontja,
- **helyvektor**: olyan kötött vektor, amelynek kezdőpontja az origó.

Vektor hossza:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

- Ha $|\boldsymbol{v}| = 0$, akkor $\boldsymbol{v}$ **nullvektor**. (Jele: $\boldsymbol{0}$)
- Ha $|\boldsymbol{v}| = 1$, akkor $\boldsymbol{v}$ **egységvektor**.

A nullvektor iránya nem definiált.

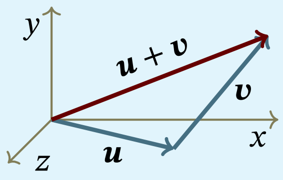
Egy adott $\boldsymbol{v}$ vektorhoz tartozó egységvektor:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_v = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|} & \frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|} & \frac{v_3}{|\boldsymbol{v}|} \end{pmatrix}$$

Háromszög-egyenlőtlenség:

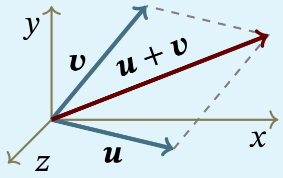
Minden $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ vektorpárra igaz, hogy

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|.$$



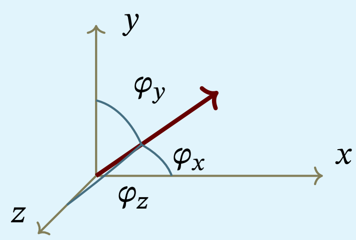
Paralelogramma-szabály:

Ha az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorokkal, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának azon átlója, amely a közös pontból indul.



Vektor koordinátatengelyekkel bezárt szöge:

$$\cos\varphi_x = \frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \cos\varphi_y = \frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \cos\varphi_z = \frac{v_3}{|\boldsymbol{v}|}$$



Kollinearitás:

Az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ kollineárisak, ha $\boldsymbol{v}$ előáll $\boldsymbol{u}$ és egy $\lambda \in \mathbb{R}$ szorzataként. Amennyiben $\lambda > 0$, akkor a két vektor azonos irányú.

Komplanaritás:

Tetszőleges számú vektor komplanáris, ha azok egy síkban helyezkednek el.

Definíció 1.2: Lineáris függetlenség

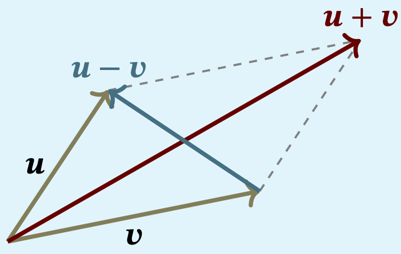
Egy $\{\boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{v}_2; \ldots; \boldsymbol{v}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független, ha a $\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ egyenletnek csak a triviális megoldása létezik. (Azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.)

- A nullvektor minden vektorral lineárisan függő.
- Két vektor akkor lineárisan független, ha nem kollineáris.
- Ha két vektor nem kollineáris, akkor egyértelműen meghatároznak egy síkot, azaz bármely velük koplanáris vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként.
- 3D koordinátarendszerben 3-nál több vektor biztos, hogy lineárisan összefüggő. (Feltéve, hogy nincs köztük nullvektor.)
- 3 vektor lineárisan független ha nem koplanáris. (3D-ben)

Vektorok összege és különbsége:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3)$$
$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=(u_1-v_1;u_2-v_2;u_3-v_3)$$

- **Kommutatív**: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
- **Asszociatív**: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$



Skalárral való szorzás:

Skalárral való szorzás esetén a vektor ($\boldsymbol{v}$) minden koordinátáját megszorozzuk a $\lambda\in\mathbb{R}$ skalárral, vagyis:
$$\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{v}=(\lambda v_1;\lambda v_2;\lambda v_3).$$

A skalárral való szorzás eredménye egy vektor, melynek hossza az eredeti vektor hosszának skalárszorosa.

Vektorok skaláris szorzata: (Scalar / Dot product)

Az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok skaláris szorzata:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

Két vektor skaláris szorzatának eredménye egy skalár.

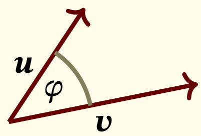
A skaláris szorzat tulajdonságai:

- $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$ (kommutatív)
- $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ (disztributív)
- $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{u}|^2$
- $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{0}=0$
- $(\lambda\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=\lambda(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$

A skaláris szorzat geometriai jelentése:

A skaláris szorzás segítségével kiszámítható az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok közötti szög.

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$$



Az $\boldsymbol{u}$ vektor $\boldsymbol{v}$ vektorra vett párhuzamos és merőleges komponense:

$$\boldsymbol{u}_{||}=(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_v)\,\hat{\boldsymbol{e}}_v \quad \text{és} \quad \boldsymbol{u}_\perp=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{||},$$

ahol $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ a $\boldsymbol{v}$ irányába mutató egységvektor.

Vektoriális szorzat / keresztszorzat (Cross product):

Az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok keresztszorzata:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}.$$

Két vektor keresztszorzatának eredménye egy vektor, amely merőleges mindkét vektorra, iránya pedig a jobbkéz szabály szerinti.

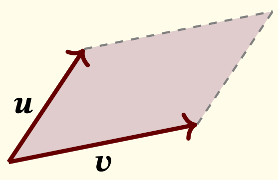
A keresztszorzat tulajdonságai:

- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ (antikommutatív)
- $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$ (disztributív)
- $\boldsymbol{u} \times (\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$
- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ kollineárisak, vagy ha valamelyikük nullvektor.

A keresztszorzat geometriai jelentése:

Az $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vektor hossza megegyezik az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területével.

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin \varphi$$



Vegyesszorzat:

Az $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{w}$ vektorok vegyes szorzata:

$$\boldsymbol{uvw} = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

A vegyesszorzat eredménye egy skalár.

A vegyesszorzat tulajdonságai:

- $\boldsymbol{uvw} = \boldsymbol{wuv} = \boldsymbol{vwu} = -\boldsymbol{vuw} = -\boldsymbol{wvu} = -\boldsymbol{uwv}$ (ciklikus csere)
- lineáris mindhárom változójában: $(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v})\boldsymbol{wz} = \lambda \boldsymbol{uwz} + \mu \boldsymbol{vwz}$
- Ha $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{w}$ vektorok egy síkban helyezkednek el, akkor vegyesszorzatuk nulla.

A vegyesszorzat geometriai jelentése:

3 vektor vegyesszorzata megadja az általuk kifeszített paralelepipedon térfogatát, illetve az általuk kifeszített tetraéder térfogatának hatszorosát.

1.2. Feladatok

1. Legyen $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ két tetszőleges vektor. Milyen α és β paraméterek esetén lesznek kollineárisak, ha az $\{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független?

   a) $\begin{cases}\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{v}=4\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{a}-3\alpha\boldsymbol{b}+\beta\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\end{cases}$

2. Legyen az $\{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Lineárisan független lesz-e az $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{s};\boldsymbol{t}\}$ vektorrendszer?

   a) $\begin{cases}\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{s}=5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{t}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\end{cases}$

3. Legyen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ közös középpontú komplanáris vektorok. ($\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ nem kollineáris) Bizonyítsa be, hogy az $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ vektorok végpontja akkor és csakis akkor esik egy egyenesre, ha $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ előállításban $\alpha+\beta=1$.
4. Számítsa ki az $\boldsymbol{a}(7;-1;6)$ és $\boldsymbol{b}(2;20;2)$ vektorok által bezárt szöget!
5. Milyen z esetén lesz a $\boldsymbol{b}(6;-2;z)$ vektor merőleges az $\boldsymbol{a}(2;-3;1)$ vektorra?
6. Ha az $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ vektor merőleges a $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ vektorra, az $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ vektor pedig merőleges a $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ vektorra, mekkora $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ bezárt szögének koszinusza?
7. Az $ABCD$ téglalap ismert csúcsainak koordinátái: $A(2;6;0)$, $B(1;2;3)$, $C(-2;8;z)$. Mennyi z értéke? Hol van D pont?
8. Számítsa ki az $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ keresztszorzatot, amennyiben $\boldsymbol{a}(-4;2;1)$ és $\boldsymbol{b}(-2;7;8)$.
9. Hozza egyszerűb alakra a $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a})$ kifejezést!
10. Kollineárisak-e az $\boldsymbol{a}(-3;4;7)$ és $\boldsymbol{b}(2;5;1)$ vektorok?
11. Mekkora az ABC háromszög területe, ha csúcsai: $A(1;0;2)$, $B(-1;4;7)$ és $C(5;-2;1)$?
12. Igaz-e, hogy ha $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, akkor $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$?
13. Lehet-e az $\boldsymbol{a}(6;2;-3)$ és $\boldsymbol{b}(-3;6;-2)$ vektor egy kocka egy csúcsából induló élvektorok? Ha igen, határozzuk meg a harmadik élt!
14. Lineárisan független-e az $\boldsymbol{a}(2;3;-1)$, $\boldsymbol{b}(1;-1;3)$ és $\boldsymbol{c}(1;9;-11)$ vektor?
15. Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata V. Mekkora az $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ és $\boldsymbol{t}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
16. Milyen α paraméter esetén lesz az $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, illetve lineárisan független, ha $\boldsymbol{a}(3;\alpha;0)$, $\boldsymbol{b}(0;3;\alpha)$ és $\boldsymbol{c}(1;0;-1)$?
17. Határozza meg $\boldsymbol{a}(-1;2;1)$ vektor $\boldsymbol{b}(1;2;2)$ vektorra vett vetületét!