

6

Integrálatalakító tételek II

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. október 06.

6.1. Elméleti áttekintő

Definíció 6.1 : Térfogat

Legyen $\Omega : D \rightarrow \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\Omega(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $dV = \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt$. Ekkor a térfogat:

$$\text{Vol } \mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} dV = \iiint_D |\det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t))| dr ds dt.$$

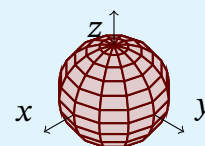
Definíció 6.2 : Térfogati integrál

Legyen $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\Omega : D \rightarrow \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\Omega(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $dV = \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt$. Ekkor a φ skalármező térfogaton vett integrálja:

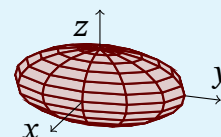
$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{r}) dV = \iiint_D \varphi(\Omega(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt.$$

Tértartományok paraméterezése

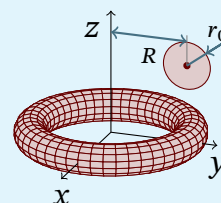
• **Gömb:** $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \sin s \cos t \\ r \sin s \sin t \\ r \cos s \end{bmatrix}$ $r \in [0; R]$
 $s \in [0; \pi]$
 $t \in [0, 2\pi]$



• **Ellipszoid:** $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} a r \sin s \cos t \\ b r \sin s \sin t \\ c r \cos s \end{bmatrix}$ $r \in [0; 1]$
 $s \in [0; \pi]$
 $t \in [0, 2\pi]$



• **Tórusz:** $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} (R + r \cos s) \cos t \\ (R + r \cos s) \sin t \\ r \sin s \end{bmatrix}$ $r \in [0; r_0]$
 $s \in [0; 2\pi]$
 $t \in [0, 2\pi]$



Tétel 6.1 : Gauss-Osztogradszkij-tétel

Legyen $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, irányított, parametrizált tértartomány. Legyen továbbá $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ az Ω peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Ha \mathbf{v} vektorpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$.

Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2yz)\hat{\mathbf{i}} + (xy^2z)\hat{\mathbf{j}} + (2xyz^2)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt az első tényolcadban lévő egységkocka felületén kifelé mutató irányítással!

Határozzuk meg a \mathbf{v} vektormező divergenciáját:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial x^2yz}{\partial x} + \frac{\partial xy^2z}{\partial y} + \frac{\partial 2xyz^2}{\partial z} = 8xyz.$$

A Gauss-Osztogradszkij-tétel alapján:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 8xyz \, dz \, dy \, dx = 1.$$

Gauss-Osztogradszkij-tétel Maxwell I. és II. egyenletében

A Gauss-Osztogradszkij-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. Az első két egyenlet az elektromos és mágneses tér forrásosságát írja le:

$$(I) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{elektromos tér forrásos,}$$

$$(II) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \text{mágneses tér forrásmentes,}$$

ahol \mathbf{E} az elektromos tér, \mathbf{B} a mágneses tér, ρ az elektromos töltéssűrűség, ϵ_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Gauss-Osztogradszkij-tétel segítségével:

$$(I) \Rightarrow \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV,$$

$$(II) \Rightarrow \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{B}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0.$$

Az első egyenlet azt mondja ki, hogy zárt felületen áthaladó elektromos tér fluxusa arányos az elektromos töltéssűrűség térfogati integráljával. A második egyenlet pedig azt jelenti, hogy a mágneses tér fluxusa zárt felületen zérus, a mágneses tér forrásmentes.

Tétel 6.2 : Green-tétel asszimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \langle \text{grad } \psi; \text{grad } \varphi \rangle dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle.$$

$\psi = 1$ választásával visszanyerjük a Gauss-Osztogradszkij-tételt:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \underbrace{\text{grad } \varphi}_{\mathbf{v}} dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \left\langle \underbrace{\text{grad } \varphi}_{\mathbf{v}}; d\mathbf{S} \right\rangle.$$

Tekintsünk egy $R = 1$ m sugarú tömör alumínium gömböt, amelynek stacionárius hőmérséklet-eloszlása $\varphi(\mathbf{r}) = T_0(1 - r^2)$ függvény írja le, ahol $T_0 = 10$ K a gömb belső hőmérséklete. Határozza meg a gömb felületén kifelé irányuló összes \dot{Q} hőáramot, ha a hőfluxus sűrűsége $\mathbf{q} = -\lambda \text{ grad } \varphi$, ahol $\lambda = 205$ W/(m K) az alumínium hővezetési tényezője, és

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{q}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Használjuk a Green-tétel asszimmetrikus alakját $\psi = -\lambda$ állandó választással:

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle -\lambda \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle = - \iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \underbrace{\langle \text{grad } \lambda; \text{grad } \varphi \rangle}_{=0} dV = -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV.$$

Számítsuk ki a térfogat belsejében a $\Delta \varphi$ értékét:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -6T_0.$$

A hőáram összesen:

$$\dot{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{-\lambda(-6T_0)}_{=\text{const}} dV = -\lambda(-6T_0) \frac{4\pi R^3}{3} = 8\pi\lambda T_0 R^3 \approx 5,15 \cdot 10^4 \text{ W}.$$

Tétel 6.3 : Green-tétel szimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \text{ grad } \varphi - \varphi \text{ grad } \psi; d\mathbf{S} \rangle$$

6.2. Feladatok

1. Vezesse le az R sugarú gömb térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$ skalármező térfogati integrálját a gömbön! A tértartomány ajánlott paraméterezése:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \sin s \cos t \\ r \sin s \sin t \\ r \cos s \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r \in [0; R] \\ s \in [0; \pi] \\ t \in [0; 2\pi] \end{matrix}$$

2. Vezesse le az R sugarú, h magasságú henger térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ skalármező térfogati integrálját a hengerben! A tértartomány ajánlott paraméterezése:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \cos s \\ r \sin s \\ t \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r \in [0; R] \\ s \in [0; 2\pi] \\ t \in [0; h] \end{matrix}$$

3. Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y \sin x) \hat{\mathbf{i}} + (z^2 \cos y - \cos x) \hat{\mathbf{j}} + (v_3) \hat{\mathbf{k}}$. Határozza meg v_3 -at, ha tudjuk, hogy \mathbf{v} tetszőleges zárt felületen vett felületi integrálja zérus!

4. Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. Adja meg a vektormező alábbi zárt felületeken vett felületi integráljait:

- az $R = 2$ sugarú gömb felületén befelé mutató irányítással,
- az $x^2 + y^2 = 4$ hengerfelületen, amelyet a $z = -1$ és $z = 1$ síkok zárnak le, kifelé mutató irányítással,
- a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid és a $z = 4$ sík által határolt test felületén kifelé mutató irányítással.

5. Egy fotonikus chipeket hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségelosztással ($\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m, az ellipszoid egyenlete pedig:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

6. Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara $R = 0,02$ m. A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmérséklet-mező jó közelítéssel

$$\varphi(\mathbf{r}) = T_c - \alpha r^2, \quad \alpha = 1,3 \cdot 10^5 \text{ K/m}^2.$$

Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha

$$q_{\text{hő}} = - \oint_{\partial V} \langle \lambda \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle, \quad \lambda = 0,2 \text{ W/(m K)}.$$