

1 Vektoranalízis

A fejezetben érintett témakörök

1.1	Ismétlés	2
1.2	Alapfogalmak	3
1.3	Lineáris leképezések	5
1.4	Differenciáloperátorok	7
1.5	Vonalmenti integrál	11
1.6	Felületmenti integrál	15
1.7	Integrálátalakító tételek	17

1.1. Ismétlés

Definíció 1.1.1 : Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet, \mathbb{T} test. A $(V; +, \circ)$ a \mathbb{T} test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V; +)$ Abel-csoport,
2. $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda \circ \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ (\mu \circ \mathbf{x})$,
3. ha ε a T -beli egységelem, akkor $\forall \mathbf{x} \in V : \varepsilon \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
4. teljesül a disztributivitás:
 - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : \lambda \circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \circ \mathbf{x} + \lambda \circ \mathbf{y}$,
 - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda + \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ \mathbf{x} + \mu \circ \mathbf{x}$.

Definíció 1.1.2 : Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon \mathbb{T} test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1 -beli vektor ($\forall \mathbf{a}; \mathbf{b} \in V_1$) és \mathbb{T} -beli skalár ($\lambda \in \mathbb{T}$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \quad \sim \quad \text{additív (összegre tagonként hat),}$
- $\varphi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \varphi(\mathbf{a}) \quad \sim \quad \text{homogén (skalár kiemelhető).}$

Definíció 1.1.3 : Homomorfizmus és endomorfizmus

$$\text{Hom}(V_1; V_2) := \{ \varphi : V_1 \rightarrow V_2 \mid \varphi \text{ lineáris} \}$$

$$\text{End}(V) := \text{Hom}(V; V)$$

Lineáris leképezések mátrixreprezentációja

Legyen V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, $\dim(V_1) = n$ és $\dim(V_2) = k$. Ekkor a $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezést reprezentáló mátrix $n \times k$ dimenziós.

$(\text{Hom}(V_1; V_2); +; \lambda)$ és $(\mathcal{M}_{k \times n}; +; \lambda)$ vektorterek izomorfok egymással.

Definíció 1.1.4 : Skaláris szorzat

Legyen V egy \mathbb{R} feletti vektortér, és $\langle ; \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyet skaláris szorzatnak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}; \mathbf{x} \rangle$ minden $\mathbf{x}; \mathbf{y} \in V$ esetén, (szimmetrikus)
2. $\langle \lambda \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle$ minden $\mathbf{x}; \mathbf{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, (homogén)
3. $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1; \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \rangle$ minden $\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \in V$ esetén, (additív)
4. $\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \geq 0$, egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (nemnegatív)

A skaláris szorzás szimm. bilineáris forma, amely az Euklideszi térben értelmezve van.

1.2. Alapfogalmak

Definíció 1.2.1 : Konvektor

Legyen V egy \mathbb{R} feletti vektortér. $V^* := \text{Hom}(V; \mathbb{R})$ elemeit ($\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$) lineáris funkcionáloknak, lineáris formáknak, vagy 1-formáknak nevezzük. Mivel α lineáris leképezés, ezért

$$\alpha(av + bw) = a\alpha(v) + b\alpha(w) \text{ teljesül.}$$

Definíció 1.2.2 : Duális tér

Legyen $\alpha, \beta \in V^*$, $v \in V$, $a \in \mathbb{R}$. A fenti módon teljesülnek az alábbiak:

- $(\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v)$,
- $(a\alpha)(v) := a\alpha(v)$.

Ekkor V^* vektorterré tehető, V vektortér duális terének nevezzük.

Bázis jelölése

- $\{\hat{e}_1; \hat{e}_2; \dots; \hat{e}_n\}$ – ortonormált / standard bázis
- $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ – tetszőleges bázis

Einstein-féle konvenció

$\exists (r^1; r^2; \dots; r^n)$, melyre teljesül, hogy

$$v = r^1 b_1 + r^2 b_2 + \dots + r^n b_n = \sum_{j=1}^n r^j b_j = r^j b_j$$

Vezessük be a következő 1-formát: $\omega^i : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall v \in V : \omega^i(v) = r^i$ Ekkor v felírható az alábbi alakban:

$$v = \underbrace{\omega^1(v)}_{r^1} b_1 + \underbrace{\omega^2(v)}_{r^2} b_2 + \dots + \underbrace{\omega^n(v)}_{r^n} b_n$$

A fent definiált $\omega^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ 1-formák ($i \in 1; 2; \dots; n$) bázist alkotnak V^* -ban.

Bizonyítás (Egzsiztencia):

Legyen $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ 1-forma:

$$\alpha(\omega^1(v) b_1 + \dots + \omega^n(v) b_n) = \omega^1(v) \alpha(b_1) + \dots + \omega^n(v) \alpha(b_n)$$

$$\alpha(v) = \sum_{j=1}^n \omega^j(v) \alpha(b_j)$$

$$\alpha = \underbrace{\alpha(b_1)}_{r_1} \omega^1 + \dots + \underbrace{\alpha(b_n)}_{r_n} \omega^n = \sum_{j=1}^n r_j \omega^j$$

r_i nem speciális, tetszőleges 1-forma felírható így.

Bizonyítás (Unicitás):

Tegyük fel, hogy:

$$\begin{aligned}\alpha &= r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2 + \dots + r_n \omega^n, \\ \alpha &= s_1 \omega^1 + s_2 \omega^2 + \dots + s_n \omega^n.\end{aligned}$$

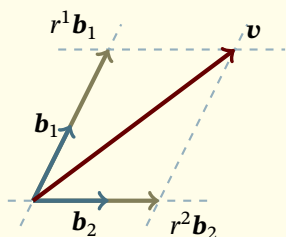
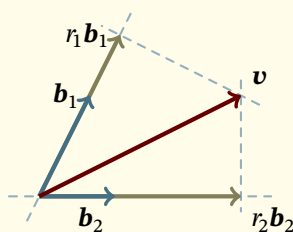
Vonjuk ki egymásból a 2 egyenletet:

$$\mathcal{O} = (r_1 - s_1)\omega^1 + (r_2 - s_2)\omega^2 + \dots + (r_n - s_n)\omega^n$$

Ekkor \mathcal{O} egy 1-forma, melynek bármely vektort a nullvektorba visz, azaz

$$\mathcal{O} : V \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{O}(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \Leftrightarrow \quad r_i = s_i \quad \forall i\text{-re.}$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát nem igaz a feltevés.

Kovariáns és kontravariáns koordináták**Kovariáns koordináták****Kontravariáns koordináták**

$\mathbf{v} = r^1 \mathbf{b}_1 + r^2 \mathbf{b}_2$, ahol $(r^1; r^2)$ a \mathbf{v} vektor kontravariáns koordinátái a $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2\}$ bázisban. r_1 és r_2 pedig \mathbf{v} kovariáns koordinátái, melyek a következőképpen számíthatóak:

$$r_i = \frac{\langle \mathbf{v}; \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|} \cdot \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|} = \underbrace{\frac{\langle \mathbf{v}; \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i; \mathbf{b}_i \rangle}}_{r_i} \cdot \mathbf{b}_i$$

Kovariáns és kontravariáns koordináták ortonormált $\{\hat{\mathbf{e}}_1; \hat{\mathbf{e}}_2; \dots; \hat{\mathbf{e}}_n\}$ bázisban megegyeznek.

Bizonyítás:

1.3. Lineáris leképezések

Definíció 1.3.1 : Lineáris leképezés adjungáltja

Legyen $(V; \langle \cdot; \cdot \rangle)$ Euklideszi tér, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés. A $\varphi^* : V \rightarrow V$ lineáris leképezést a φ leképezés adjungáltjának hívjuk, ha $\forall \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \in V$ -re:

$$\langle \varphi(\mathbf{v}_1); \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1; \varphi^*(\mathbf{v}_2) \rangle$$

$(\varphi^*)^* = \varphi$ – Idempotencia

Bizonyítás:

$$\langle (\varphi^*)^*(\mathbf{v}_1); \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1; \varphi^*(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{v}_1); \mathbf{v}_2 \rangle.$$

φ^* mátrix reprezentációja

Reprezentálja φ -t \mathbf{A} , φ^* -ot pedig \mathbf{A}^* :

$$\langle \varphi(\mathbf{v}); \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}; \varphi^*(\mathbf{w}) \rangle$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{a_{11}}v_1w_1 + \boxed{a_{12}}v_2w_1 + \boxed{a_{21}}v_1w_2 + \boxed{a_{22}}v_2w_2 = \boxed{a_{11}^*}w_1v_1 + \boxed{a_{12}^*}w_2v_1 + \boxed{a_{21}^*}w_1v_2 + \boxed{a_{22}^*}w_2v_2$$

Megállapíthatjuk, hogy $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\top$.

! Szimmetrikus leképezés adjungáltja önmaga.

Leképezés felbontása

Legyen $\varphi \in \text{End}(V)$, ekkor \exists olyan \mathcal{A} és \mathcal{S} antiszimmetrikus és szimmetrikus leképezés, ahol $\varphi = \mathcal{A} + \mathcal{S}$, melyek az endomorfizmusok vektorterét 2 diszjunkt halmazra bontják:

$$\mathcal{A} := \frac{\varphi - \varphi^*}{2} \quad \text{és} \quad \mathcal{S} := \frac{\varphi + \varphi^*}{2}.$$

! **Bizonyítás (Unicitás):**

Tegyük fel hogy φ előáll $\mathcal{A}_1 + \mathcal{S}_1$ és $\mathcal{A}_2 + \mathcal{S}_2$ összegeként is. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, majd vegyük mindkét oldal adjungáltját!

$$\mathcal{O} = \varphi - \varphi = (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) + (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2) = \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{S}}$$

$$\mathcal{O}^* = \mathcal{O} = \overline{\mathcal{A}}^* + \overline{\mathcal{S}}^* = -\overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{S}}$$

Az előző két egyenletből következik, hogy $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{S}}$. Feltevésünk hamisnak bizonyult.

Reguláris mátrix felbontása

Egy $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix felbontható szimmetrikus és ferdeszimmetrikus (antiszimmetrikus) részekre:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^T}{2}.$$

Ha mátrixunk 3×3 -as:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} + \mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}}_{\text{ferdeszimmetrikus}}.$$

Általános esetben:

$$\dim \mathbf{A} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathbf{S} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Az antiszimmetrikus leképezések és a V -beli vektorok között tudunk egy-egyértelmű hozzárendelést találni:

$$\mathbf{A} \in \mathcal{A} \leftrightarrow \mathbf{v} \in V$$

Keressünk egy olyan \mathbf{v} vektort, melyre teljesül az alábbi egyenlet:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +a_{12}w_2 & +a_{13}w_3 \\ -a_{12}w_1 & +a_{23}w_3 \\ -a_{13}w_1 & -a_{23}w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2w_3 & -v_3w_2 \\ v_3w_1 & -v_1w_3 \\ v_1w_2 & -v_2w_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{bmatrix}$$

Definíció 1.3.2 : Vektorinvariáns

Egy antiszimmetrikus lineáris transzformáció mindig leírható egy rögzített vektorral való keresztszorzással. Ez a vektor a leképezés vektorinvariánsa.

Csak ortonormált, Descartes-féle bázisban számítható az előbbi módszerrel egy leképezés vektorinvariánsa.

Definíció 1.3.3 : Lineáris transzformáció nyoma

Egy lineáris transzformáció főátlójában lévő elemek összege minden koordináta-rendszerben ugyanannyi, tehát a koordináta-transzformáció nem befolyásolja. Ezt nevezzük a lineáris leképezés nyomának. (trace / spur)

1.4. Differenciáloperátorok

Legyen $\mathbf{f} : V \rightarrow V$ függvény ($\dim V = n$), melynek vegyük a deriváltját:

$$\mathbf{f}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Df} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_n f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n & \partial_2 f_n & \dots & \partial_n f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad}^\top f_1 \\ \text{grad}^\top f_2 \\ \vdots \\ \text{grad}^\top f_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

Definiáljuk az alábbi fogalmakat:

- $\text{rot } \mathbf{f} := \mathbf{Df} - \mathbf{Df}^*$ – rotáció,
- $\text{div } \mathbf{f} := \text{tr}(\mathbf{Df})$ – divergencia.

$V = \mathbb{R}^3$ esetén:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 & \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 & 0 & \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3 \\ \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 & \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrix vektorinvariánsa:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times \mathbf{f}.$$

∇ - Nabla operátor (formális differenciáloperátor) – nem vektor, de aként viselkedik.

Gradiens, divergencia és rotáció számítása

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi \\ \text{div } \mathbf{v} &= \langle \nabla; \mathbf{v} \rangle \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

Differenciáloperátorok kombinálása

Nem értelmezhető:

$$\text{grad grad}, \quad \text{grad rot}, \quad \text{div div}, \quad \text{rot div}.$$

Laplace-operátor:

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

Tetszőleges \mathbf{v} vektormező és φ skalármező esetén:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{v} &\equiv 0, \\ \text{rot grad } \varphi &\equiv \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Definíció 1.4.1 : Skalárpotenciálosság

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező skalárpotenciális, ha létezik olyan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$.

Definíció 1.4.2 : Vektorpotenciálosság

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan $\mathbf{u} : V \rightarrow V$ vektormező, hogy $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$.

Tétel 1.4.1

Legyen $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ mindenhol értelmezett, legalább egyszer differenciálható vektormező. Ekkor:

- \mathbf{v} skalárpotenciális $\Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, hiszen $\text{rot grad } \varphi \equiv \mathbf{0}$,
- \mathbf{v} vektorpotenciális $\Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0$, hiszen $\text{div rot } \mathbf{u} \equiv 0$.

Bizonyítás (\Rightarrow könnyű, \Leftarrow nehéz):

Ha \mathbf{v} skalárpotenciális $\Rightarrow \exists \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, ekkor $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi \equiv \mathbf{0}$

Ha \mathbf{v} vektorpotenciális $\Rightarrow \exists \mathbf{u} : V \rightarrow V$, hogy $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$, ekkor $\text{div } \mathbf{v} = \text{div rot } \mathbf{u} \equiv 0$

$\Phi, \Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármezők, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezők, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ pedig skalárok.

- Teljesül a linearitás:

$$\text{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi$$

$$\text{rot}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{div}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}$$

- Zérusság:

$$\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\text{grad}(\Phi \Psi) = \Phi \text{grad } \Psi + \Psi \text{grad } \Phi$$

$$\text{div}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{div } \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad } \Phi \rangle$$

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad } \Phi$$

- Egyéb szabályok:

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u} + (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u}$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}; \text{rot } \mathbf{v} \rangle$$

$$\text{grad}(\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle) = (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

3-dimenziós Levi–Civita-szimbólum

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ha } (i; j; k) \text{ az } (1; 2; 3) \text{ páros permutációja} \\ -1 & \text{ha } (i; j; k) \text{ az } (1; 2; 3) \text{ páratlan permutációja} \\ 0 & \text{ha } i = j, \text{ vagy } j = k, \text{ vagy } k = i \end{cases}$$

Vektoriális szorzat esetében

$$(\mathbf{v})_i = (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_j y_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_{123} x_2 y_3 + \varepsilon_{132} x_3 y_2 \\ \varepsilon_{231} x_3 y_1 + \varepsilon_{213} x_1 y_3 \\ \varepsilon_{312} x_1 y_2 + \varepsilon_{321} x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

Minden koordinátában hat tag szerepelne, viszont:

1. $\varepsilon_{223} = \varepsilon_{232} = \varepsilon_{323} = \varepsilon_{332} = 0$,
2. $\varepsilon_{113} = \varepsilon_{131} = \varepsilon_{311} = \varepsilon_{311} = 0$,
3. $\varepsilon_{112} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{221} = 0$.

A nemzérus tagok pedig:

1. $\varepsilon_{123} = +1, \varepsilon_{132} = -1$,
2. $\varepsilon_{231} = +1, \varepsilon_{213} = -1$,
3. $\varepsilon_{312} = +1, \varepsilon_{321} = -1$.

Linearitásos azonosságok bizonyítása

1. $\text{grad}(\lambda\Phi + \mu\Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi$

$$(\text{grad}(\lambda\Phi + \mu\Psi))_i = \partial_i(\lambda\Phi + \mu\Psi) = \lambda \partial_i \Phi + \mu \partial_i \Psi = (\lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi)_i.$$

2. $\text{rot}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}$

$$(\text{rot}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j(\lambda v_k + \mu w_k) = \lambda \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k + \mu \varepsilon_{ijk} \partial_j w_k = (\lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w})_i.$$

3. $\text{div}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}$

$$(\text{div}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}))_i = \partial_i(\lambda v_i + \mu w_i) = \lambda \partial_i v_i + \mu \partial_i w_i = (\lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w})_i.$$

Zérusságos azonosságok bizonyítása

1. $\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$

$$(\text{rot grad } \Phi)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = -\varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_j \Phi = 0,$$

mert $\partial_j \partial_k$ szimmetrikus, ε_{ijk} pedig antiszimmetrikus j, k indexekre.

2. $\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$

$$(\text{div rot } \mathbf{v})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j v_k = -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i v_k = 0,$$

mert $\partial_i \partial_j$ szimmetrikus, ε_{ijk} pedig antiszimmetrikus i, j indexekre.

Deriválási szabályokhoz hasonló azonosságok bizonyítása

1. $\text{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \text{grad} \Psi + \Psi \text{grad} \Phi$

$$(\text{grad}(\Phi\Psi))_i = \partial_i(\Phi\Psi) = \Phi \partial_i \Psi + \Psi \partial_i \Phi = (\Phi \text{grad} \Psi + \Psi \text{grad} \Phi)_i.$$

2. $\text{div}(\Phi\mathbf{v}) = \Phi \text{div} \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad} \Phi \rangle$

$$(\text{div}(\Phi\mathbf{v}))_i = \partial_i(\Phi v_i) = \Phi \partial_i v_i + \langle \mathbf{v}; \partial_i \text{grad} \Phi \rangle = (\Phi \text{div} \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad} \Phi \rangle)_i.$$

3. $\text{rot}(\Phi\mathbf{v}) = \Phi \text{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad} \Phi$

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\Phi\mathbf{v}))_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j(\Phi v_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} (\Phi \partial_j v_k + v_k \partial_j \Phi) \\ &= \Phi \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k + \varepsilon_{ijk} v_k \partial_j \Phi \\ &= \Phi \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k - \varepsilon_{ijk} v_j \partial_k \Phi = (\Phi \text{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad} \Phi)_i. \end{aligned}$$

Egyéb szabályok bizonyítása

1.5. Vonalmenti integrál

Definíció 1.5.1 : Reguláris görbe

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nem feltétlenül korlátos intervallum. Ekkor az $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ immerziót reguláris görbének nevezzük.

Definíció 1.5.2 : Pályasebesség, Ívhossz

A $v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$ függvényt pályasebességnek hívjuk.

A pályasebesség I feletti integrálját a görbe ívhosszának nevezzük:

$$L(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_I ds.$$

Számítsuk ki a $\gamma(t) = (t \cos t) \hat{i} + (t \sin t) \hat{j}, t \in [0; 1]$ görbe ívhosszát!

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \cosh u \sqrt{1 + \sinh^2 u} du = \int_0^1 \cosh^2 u du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \cosh 2u}{2} du \\ &= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4} \right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{\operatorname{arsinh} t}{2} + \frac{t\sqrt{t^2 + 1}}{2} \right]_0^1 = \frac{\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,1478 \end{aligned}$$

Definíció 1.5.3 : Irányított görbe

Egy $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe irányított, ha adott egy rendezés (\leq) a paraméterértékeken. Ekkor $t_1 < t_2$ esetén $\gamma(t_1)$ a görbe korábbi pontja, $\gamma(t_2)$ -höz képest. Ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, akkor a görbe zárt.

Irányítottság szemléltetése

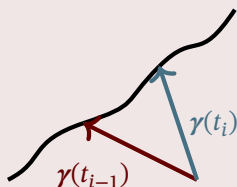


Pozitív irányítottságú görbe

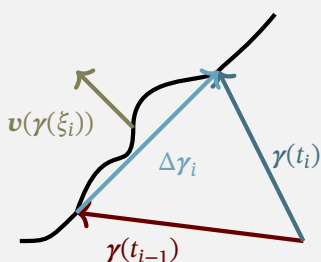


Negatív irányítottságú görbe

Ha létezik a $\sum_i \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$ összeg supremuma, akkor a görbe rektifikálható.



Definíció 1.5.4 : Vonalmenti integrál



Ha a $\sum_i \langle \mathbf{v}(\gamma(\xi_i)); \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle$

összegnek létezik a határértéke a görbe beosztásának minden határon túli finomítására nézve, akkor azt monjuk, hogy a $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező integrálható az $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe mentén, és ezt a \mathbf{v} vektor γ görbe menti vonalintegráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int_c \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle$$

Belátható, hogy a görbe menti integrál létezéséhez elegendő, hogy a vektormező csak a görbe mentén van értelmezve, és ott szakaszonként folytonos.

Tétel 1.5.1

Ha γ egy görbe, melynek paraméteres egyenlete: $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \gamma(t)$, akkor a $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező γ görbén vett (skalárértékű) integrálja:

$$\int_c \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \int_I \langle \mathbf{v}(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

Legyen $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t; t^2; t^3)$ görbe, $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y; y + z; z + x)$ vektormező. Számoljuk ki a görbe menti integrált!

$$\begin{aligned} \int_c \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t + t^2 \\ t^2 + t^3 \\ t^3 + t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (t + t^2) + 2(t^2 + t^3) + 3(t^3 + t) dt \\ &= \int_0^1 (6t + 6t^2 + 5t^3) dt = 6 \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{5t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{37}{2} \end{aligned}$$

Ha a görbe irányítását megváltoztatjuk, akkor az integrál értéke (-1) -szeresére változik.

Tétel 1.5.2 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{C} \subseteq U$, $t \mapsto \gamma(t)$ folytonos görbe, $\gamma(a) = \mathbf{p}$, $\gamma(b) = \mathbf{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); \mathbf{dr} \rangle = \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

Bizonyítás:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); \mathbf{dr} \rangle = \int_a^b \langle \text{grad } \varphi(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d\varphi(\gamma(t))}{dt} dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Tétel 1.5.3 : Gradiens-tétel megfordítása

Ha \mathbf{v} egy olyan folytonosvektormező, hogy a vonalmenti integrál csak a kezdő- és végponttól függ, akkor $\exists \varphi$, skalármező, hogy $\text{grad } \varphi = \mathbf{v}$.

Körintegrál jelölése

Ha γ zárt görbe, akkor a \mathbf{v} vektormező egy γ görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr} \rangle.$$

Ha a görbe menti integrál értéke független az úttól, akkor az integrál bármely zárt görbe mentén zérus.

Bizonyítás:

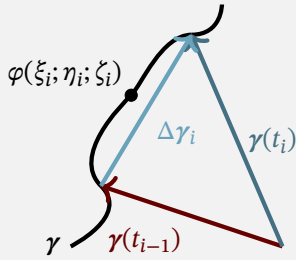
Legyen γ_1 és γ_2 két görbe, melyek kezdő- és végpontjaik megegyeznek. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_1 \rangle = \int_{\mathcal{C}_2} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_2 \rangle.$$

Képezzük a $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ zárt görbét. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr} \rangle = \int_{\mathcal{C}_1} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_1 \rangle - \int_{\mathcal{C}_2} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_2 \rangle = 0.$$



Definíció 1.5.5 : Skalármező görbe menti, ívhossz szerinti integrálja

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma : I \rightarrow \mathcal{C}$$

Finomítsuk a végtelenségig a

$$\sum_i \varphi(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \|\Delta \mathbf{r}_i\|$$

összeget. Így a következő integrált kapjuk:

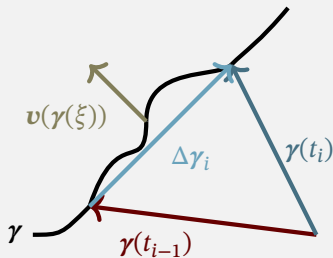
$$\int_{\mathcal{C}} \varphi \, ds.$$

Legyen $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3, t \mapsto (t; t^2; t^4)$. Adjuk meg a $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{1 + 4x^2 + 16yz}$ skalármező γ görbe menti integrálját!

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varphi(\mathbf{r}) \, ds &= \int_0^1 \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6} \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (4t^3)^2} \, dt \\ &= \int_0^1 1 + 4t^2 + 16t^6 \, dt = \left[t + \frac{4}{3}t^3 + \frac{16}{7}t^7 \right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} = \frac{97}{21} \end{aligned}$$

Definíció 1.5.6 : Skalármező vektorértékű vonalintegrálja

$$\int \varphi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \int \varphi(\mathbf{r}) \, dx \\ \int \varphi(\mathbf{r}) \, dy \\ \int \varphi(\mathbf{r}) \, dz \end{bmatrix}$$

Definíció 1.5.7 : Vektormező vektorértékű vonalintegrálja

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma : I \rightarrow \mathcal{C} \quad \xi_i \in [t_{i-1}; t_i]$$

Finomítsuk a végtelenségig a

$$\sum_i \mathbf{v}(\gamma(\xi_i)) \times \Delta \gamma_i$$

összeget. Így a következő integrált kapjuk:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t) \, dt$$

1.6. Felületmenti integrál

Definíció 1.6.1 : Reguláris felület

Legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$. Azt mondjuk, hogy az φ reguláris felület, ha $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}$ ponthoz megadható olyan \mathbf{p} -t tartalmazó $V \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz és $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \cap V$ leképezés, melyre teljesülnek az alábbiak:

- φ differenciálható homeomorfizmus,
- φ immerzió (derivált leképezése injektív).

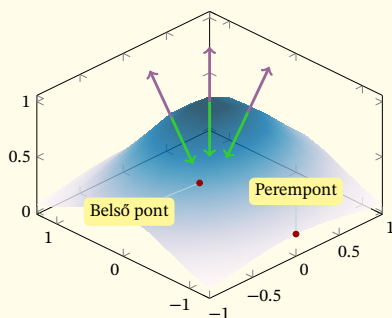
Ha ezek teljesülnek, akkor φ -t parametríciónak, $V \cap \mathcal{S}$ -t koordinátakörnyezetnek nevezük.

Definíció 1.6.2 : Elemi felület

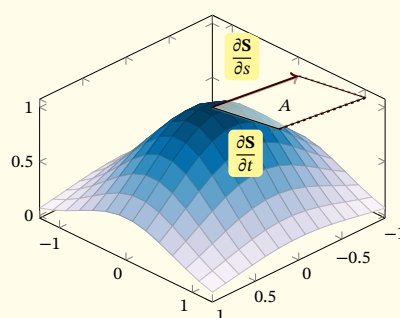
A $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ elemi felület, ha φ legalább egyszer differenciálható és injektív.

$\partial([a; b] \times [a; b])$ a paramétertartomány pereme.

A felület irányítható, ha megadható rajta egy differenciálható egységvektormező.



Irányítás szemléltetése



Elemi felület

Definíció 1.6.3 : Skalármező skalárértékű felületmenti integrálja

Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$. Ekkor finomítsuk minden határon túl a

$$\sum_i \varphi(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta S_i$$

összeget:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) dS.$$

Számítása:

$$\iint_U \varphi(\varphi(s; t)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| ds dt \rightarrow \text{ha a felület paraméterezve van,}$$

$$\iint_U \varphi(x; y; \Phi(x; y)) \sqrt{1 + (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2} dx dy \rightarrow \text{ha } z = \Phi(x; y) \text{ alakban van.}$$

Integráljuk a $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ skalármezőt az egységgömb $z > 0$ részén!

Az egységgömb paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \quad s \in [0; \pi/2], \quad t \in [0; 2\pi], \quad \mathbf{n} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| = \sin s.$$

A skalármező átparaméterezése:

$$\varphi(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) = \sin^2 s \cos^2 t + \sin^2 s \sin^2 t = \sin^2 s.$$

Az integrál kiszámítása:

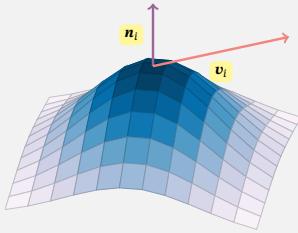
$$\begin{aligned} \int_S \varphi \, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 s \sin s \, dt \, ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 s) \sin s \, ds \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - u^2) \, du = 2\pi \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Definíció 1.6.4 : Skalármező vektorértékű felületmenti integrálja

Felület implicit megadása esetén ($z = \Phi(x; y)$):

$$\int_S \varphi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} = \iint \varphi(x; y; \Phi(x; y)) \begin{bmatrix} \pm \partial_x \Phi \\ \pm \partial_y \Phi \\ \mp 1 \end{bmatrix} dx \, dy$$

Definíció 1.6.5 : Vektormező skalárértékű felületmenti integrálja



$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \boldsymbol{\varrho} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

Finomítsuk minden határon túl a $\sum_i \langle \mathbf{v}_i; \mathbf{n}_i \rangle$ összezet:

$$\int_S \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle = \iint_U \left\langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)); \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| \right\rangle,$$

ahol $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} \, dS$.

Definíció 1.6.6 : Vektormező vektorértékű felületmenti integrálja

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S} = \iint_U \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) ds \, dt$$

1.7. Integrálátalakító tételek

Tétel 1.7.1 : Stokes-tétel

Legyen $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ a φ peremét indukált, jobbkézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle.$$

Ha \mathbf{v} skalárpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = 0$.

Definíció 1.7.1 : Elemi tértartomány

$\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ elemi tértartomány, ha legalább egyszer folytonosan differenciálható leképezés. Ekkor

$$\det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) = \left\| \frac{\partial \Omega(r; s; t)}{\partial r \partial s \partial t} \right\| \neq 0.$$

Definíció 1.7.2 : Térfogat

Készítsünk egy olyan beleírt (c_i) és körülírt (C_i) kockarendszert, melyekre igaz, hogy $c_i \cap c_j$ csak lap, él, vagy csúcs lehet. Ekkor fennáll, hogy:

$$\bigcup_i c_i \subset \mathcal{V} \subset \bigcup_j C_j.$$

Finomítsuk minden határon túl ezeket a kockarendszereket. Ha ezek közös határértékhez tartanak, akkor:

$$\text{Vol } \mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} dV = \iiint_{\mathcal{V}} |\det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t))| dr ds dt.$$

Pozitív az irányítás, ha $\det \mathbf{D}\mathcal{V} > 0$.

Definíció 1.7.3 : Skalármező térfogaton vett skalárértékű integrálja

Legyen $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi tértartomány. Legyen továbbá $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos skalármező. Ekkor a φ térfogaton vett integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi dV = \iiint_D \varphi(\Omega(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt.$$

Tétel 1.7.2 : Gauss-Osztogradszkij-tétel

Legyen $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, irányított, parametrizált tértartomány. Legyen továbbá $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ az Ω peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Ha \mathbf{v} vektorpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$.

Tétel 1.7.3 : Green-tétel asszimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \langle \operatorname{grad} \psi; \operatorname{grad} \varphi \rangle \, dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \rangle.$$

Tétel 1.7.4 : Green-tétel szimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi \, dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi; d\mathbf{S} \rangle$$