definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Függvények BMETE94BG01 6

Matematika G1

Folytonosság

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Cauchy-féle határérték definíció**] Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban A, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$. Jele:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Heine-féle határérték definíció**] Az f függvény határértéke az a pontban akkor és csak akkor A, ha $\forall x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.

[style=note, nobreak=true,] A két definíció teljesen ekvivalens egymással.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: Nevezetes határérték a nullában**]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Folytonosság**] Egy $f :_f \to$ függvény folytonos egy $a \in_f$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta(\varepsilon)$.

[style=statement] A folytonosság definíciója ekvivalens a következővel: f függvény folytonos egy $a \in_f$ pontban, ha

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

[style=note, nobreak=true,] Ha ez nem teljesül, akkor a függvénynek az adott pontban szakadása van. Ez lehet

- **megszüntethető**, tehát a függvény az adott pontban nincsen értelmezve, viszont a pontbeli határértéke létezik,
- **nem megszüntethető**, vagyis nem létezik az adott pontbeli határértéke.

0.2 Feladatok

1. A függvényhatárérték két definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy
$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}.$$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket! 2

   a) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} + \frac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2} \right)$

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{3}{2^{\sqrt{2x}}+1}$

   c) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

   d) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

   e) $\lim_{x\to \pi 6} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

   f) $\lim_{x\to \pi 2} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$

   g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

   h) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

   i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{\tan 5x}$

   j) $\lim_{x\to \pi 2} (\pi 2 - x) \tan x$

   k) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \sin x}{\sin^2 x}$

3. Vizsgálja meg az alábbi függvényt folytonosság szempontjából!
$$f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2}$$

4. Vizsgálja meg az alábbi függvényt folytonossát a nullában!
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

5. Határozza meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy f függvény folytonos legyen!
$$f(x) = \{\ x\ , ha|x| < 1x^2 + ax + b, ha|x| \geq 1$$

6. Határozza meg az alábbi komplexebb határértékeket! 2

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{x^2}$

   b) $\lim_{x\to \pi 4} \tan^{\tan 2x} x$