

# Numerikus sorozatok I

Matematika G1 - Sorozatok

Utoljára frissítve: 2024. október 01.

# 4.1. Elméleti Áttekintő

#### Definíció 4.1: Sorozat

A pozitív egész számok halmazán értelmezett  $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$  függvényt valós számsorozatnak hívjuk.

Az  $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$  függvényt **komplex számsorozat**nak nevezzük.

# Definíció 4.2: Konvergencia

Az  $(a_n)$  sorozatot konvergensnek mondjuk, ha  $\exists a \in \mathbb{R}$  valós szám, hogy  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists N(\varepsilon)$  küszöbszám, hogy ha  $n > N(\varepsilon)$ , akkor  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Jelölése:

 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ , ahol a a sorozat határértéke.

#### Definíció 4.3: Divergencia

Az  $(a_n)$  sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

#### Definíció 4.4: Torlódási pont

Az  $(a_n)$  sorozatnak torlódási pontja van az  $a \in \mathbb{R}$  pontban, ha az a tetszőlegesen kicsiny környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

A sorozat határértéke egyben torlódási pont is, viszont egy torlódási pont nem feltétlenül határérték. Pl.:  $a_n = (-1)^n$  sorozatnak két torlódási pontja is van (-1 és 1), viszont egyik sem határérték, hiszen a sorozat divergens.

#### Definíció 4.5: Sorozat korlátossága

Az  $(a_n)$ -t **alulról korlátos**nak nevezzük, ha  $\forall n$  esetén  $a_n > k$ , vagyis értékkészlete alulról korlátos.

Az  $(a_n)$ -t **felülről korlátos**nak nevezzük, ha  $\forall n$  esetén  $a_n < K$ , vagyis értékkészlete felülről korlátos.

Az  $(a_n)$  sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

## Definíció 4.6: Sorozat monotonitása

Az  $(a_n)$  sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha  $a_n \ge a_{n-1}$ ,
- monoton csökkenő, ha  $a_n \le a_{n-1}$ ,
- szigorúan monoton növekvő, ha  $a_n > a_{n-1}$ ,
- szigorúan monoton csökkenő, ha  $a_n < a_{n-1}$ .

Konvergens sorozat mindig korlátos.

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

# Nevezetes határértékek:

• 
$$a^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens,} & \text{ha } a \le -1. \end{cases}$$

• 
$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$$

• 
$$a^n \cdot n^k \to 0$$
, ha  $|a| < 1$  és  $k \in \mathbb{N}$ 

• 
$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

• 
$$\frac{a^n}{n!} \to 0$$

• 
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

• 
$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \to e^r$$

## Dominancia elv:

$$\log_n a < \sqrt[n]{a} < \log_a n < \sqrt[q]{n} < n < n^a < a^n < n! < n^n$$

A dominancia elvet olyan esetekben érdemes használnunk, amikor egy

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}$$

alakú sorozat határértékét keressük, hiszen segítségével megállapíthatjuk, hogy a nevező vagy a számláló fog gyorsabban nőni.

# Tétel 4.1: Rendőrelv

Tegyük fel, hogy  $(a_n), (b_n)$  és  $(x_n)$  sorozatokra teljesül, hogy  $a_n \le x_n \le b_n$ :  $\forall n$ -re vagy  $n > N_0$ , továbbá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a, \text{ ekkor } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

# 4.2. Feladatok

1. A konvergencia definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e.

a) 
$$a_n = \left| \frac{n+1}{3n-8} \right|$$

b) 
$$b_n = \frac{n \cdot (-1)^n - 1}{2n}$$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) 
$$a_n = \frac{n^2 - 6n + 7}{n^2 + 12n + 49}$$

b) 
$$b_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$$

c) 
$$c_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

d) 
$$d_n = \frac{\sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{5n^6 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3}} + \frac{n!}{(n+1)! + 3^{2n}}$$

e) 
$$e_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

f) 
$$f_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$$

3. Igazolja a rendőrelv segítségével, hogy  $\frac{n}{3^n} \to 0$ , ha  $n \to \infty$ .

4. Határozza meg az alábbi határértékeket!

a) 
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{5n^2 - 30n - 21}$$

d) 
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$$

b) 
$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{\cos n^3}{2n} - \frac{3n}{6n+1} \right)$$

e) 
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}$$

c) 
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

f) 
$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n + 5}$$

5. Bizonyítsa be, hogy bármely  $k \ge 0$  egész számra

$$\lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k.$$