

1

Vektorok

Matematika G1 – Analitikus geometria
Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

1.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 1.1: Vektor

Egy (v_1, v_2, v_3) valós számokból álló rendezett számhármast a térben (\mathbb{R}^3) vektornak nevezünk. Jelölése: \mathbf{v} (nyomtatott szöveg), \underline{v} / \vec{v} (kézzel írott szöveg).

A vektorok geometriai értelemben olyan irányított szakaszok, melyeknek hossza és iránya van.

Vektorok megadása:

Egy tetszőleges \mathbf{v} $(v_1; v_2; v_3)$ vektor a standard normális bázisban

$$\mathbf{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}.$$



$$\hat{i} = (1; 0; 0)$$

$$\hat{j} = (0; 1; 0)$$

$$\hat{k} = (0; 0; 1)$$

Vektorok típusai:

- **kötött vektor:** fix kezdőponttal rendelkezik,
- **szabad vektor:** nincs fix kezdőpontja,
- **helyvektor:** olyan kötött vektor, amelynek kezdőpontja az origó.

Vektor hossza:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

- Ha $|\mathbf{v}| = 0$, akkor \mathbf{v} **nullvektor**. (Jele: $\mathbf{0}$)
- Ha $|\mathbf{v}| = 1$, akkor \mathbf{v} **egységvektor**.

A nullvektor iránya nem definiált.

Egy adott \mathbf{v} vektorhoz tartozó egységvektor:

$$\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{v_1}{|\mathbf{v}|} \quad \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} \quad \frac{v_3}{|\mathbf{v}|} \right)$$

Háromszög-egyenlőtlenség:

Minden \mathbf{u}, \mathbf{v} vektorpárra igaz, hogy

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

**Parallelogramma-szabály:**

Ha az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorokkal, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának azon átlója, amely a közös pontból indul.

**Vektor koordinátatengelyekkel bezárt szöge:**

$$\cos \varphi_x = \frac{v_1}{|\mathbf{v}|} \quad \cos \varphi_y = \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} \quad \cos \varphi_z = \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}$$

**Kollinearitás:**

Az \mathbf{u} és \mathbf{v} kollineárisak, ha \mathbf{v} előáll \mathbf{u} és egy $\lambda \in \mathbb{R}$ szorzataként. Amennyiben $\lambda > 0$, akkor a két vektor azonos irányú.

Komplanaritás:

Tetszőleges számú vektor komplanáris, ha azok egy síkban helyezkednek el.

Definíció 1.2: Lineáris függetlenség

Egy $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független, ha a $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ egyenletnek csak a triviális megoldása létezik. (Azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.)

- A nullvektor minden vektorral lineárisan függő.
- Két vektor akkor lineárisan független, ha nem kollineáris.
- Ha két vektor nem kollineáris, akkor egyértelműen meghatároznak egy síkot, azaz bármely velük koplanáris vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként.
- 3D koordinátarendszerben 3-nál több vektor biztos, hogy lineárisan összefüggő. (Feltéve, hogy nincs köztük nullvektor.)
- 3 vektor lineárisan független ha nem koplanáris. (3D-ben)

Vektorok összege és különbsége:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

- **Kommutatív:** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- **Asszociatív:** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

**Skalárral való szorzás:**

Skalárral való szorzás esetén a vektor (\mathbf{v}) minden koordinátáját megszorozzuk a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, vagyis:

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3).$$

A skalárral való szorzás eredménye egy vektor, melynek hossza az eredeti vektor hosszának skalárszorosa.

Vektorok skaláris szorzata: (Scalar / Dot product)

Az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Két vektor skaláris szorzatának eredménye egy skálár.

A skaláris szorzat tulajdonságai:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (kommutatív)
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (disztributív)
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$
- $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

A skaláris szorzat geometriai jelentése:

A skaláris szorzás segítségével kiszámítható az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok közötti szög.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$$



Az \mathbf{u} vektor \mathbf{v} vektorra vett párhuzamos és merőleges komponense:

$$\mathbf{u}_{||} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_v) \hat{\mathbf{e}}_v \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{||},$$

ahol $\hat{\mathbf{e}}_v$ a \mathbf{v} irányába mutató egységvektor.

Vektoriális szorzat / keresztszorzat (Cross product):

Az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok keresztszorzata:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}.$$

Két vektor keresztszorzatának eredménye egy vektor, amely merőleges mindkét vektorra, iránya pedig a jobbkezes szabály szerinti.

A keresztszorzat tulajdonságai:

- $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (antikommutatív)
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ (disztributív)
- $\mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha \mathbf{u} és \mathbf{v} kollineárisak, vagy ha valamelyikük nullvektor.

A keresztszorzat geometriai jelentése:

Az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektor hossza megegyezik az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok által kifeszített paralelogramma területével.

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \varphi$$

**Vegyesszorzat:**

Az \mathbf{u} , \mathbf{v} és \mathbf{w} vektorok vegyes szorzata:

$$\mathbf{uvw} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

A vegyesszorzat eredménye egy skalár.

A vegyesszorzat tulajdonságai:

- $\mathbf{uvw} = \mathbf{wuv} = \mathbf{vwu} = -\mathbf{vuw} = -\mathbf{wvu} = -\mathbf{uwx}$ (ciklikus csere)
- lineáris mindhárom változójában: $(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v})\mathbf{wz} = \lambda \mathbf{uwz} + \mu \mathbf{vwz}$
- Ha \mathbf{u} , \mathbf{v} és \mathbf{w} vektorok egy síkban helyezkednek el, akkor vegyesszorzatuk nulla.

A vegyesszorzat geometriai jelentése:

3 vektor vegyesszorzata megadja az általuk kifeszített paralelepipedon térfogatát, illetve az általuk kifeszített tetraéder térfogatának hatszorosát.

1.2. Feladatok

1. Legyen \mathbf{u} és \mathbf{v} két tetszőleges vektor. Milyen α és β paraméterek esetén lesznek kollineárisak, ha az $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független?

a)
$$\begin{cases} \mathbf{u} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \\ \mathbf{v} = 4\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \mathbf{u} = 3\mathbf{a} - 3\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c} \\ \mathbf{v} = \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} - \mathbf{c} \end{cases}$$

2. Legyen az $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Lineárisan független lesz-e az $\{\mathbf{r}; \mathbf{s}; \mathbf{t}\}$ vektorrendszer?

a)
$$\begin{cases} \mathbf{r} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{0} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \end{cases}$$

3. Legyen \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} közös középpontú komplanáris vektorok. (\mathbf{a} és \mathbf{b} nem kollineáris) Bizonyítsa be, hogy az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok végpontja akkor és csak akkor esik egy egyenesre, ha $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ előállításban $\alpha + \beta = 1$.
4. Számítsa ki az $\mathbf{a}(7; -1; 6)$ és $\mathbf{b}(2; 20; 2)$ vektorok által bezárt szöget!
5. Milyen z esetén lesz a $\mathbf{b}(6; -2; z)$ vektor merőleges az $\mathbf{a}(2; -3; 1)$ vektorra?
6. Ha az $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorra, mekkora \mathbf{a} és \mathbf{b} bezárt szögének koszinusza?
7. Az $ABCD$ téglalap ismert csúcsainak koordinátái: $A(2; 6; 0)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-2; 8; z)$. Mennyi z értéke? Hol van D pont?
8. Számítsa ki az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ keresztszorzatot, amennyiben $\mathbf{a}(-4; 2; 1)$ és $\mathbf{b}(-2; 7; 8)$.
9. Hozza egyszerűb alakra a $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$ kifejezést!
10. Kollineárisak-e az $\mathbf{a}(-3; 4; 7)$ és $\mathbf{b}(2; 5; 1)$ vektorok?
11. Mekkora az ABC háromszög területe, ha csúcsai: $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 4; 7)$ és $C(5; -2; 1)$?
12. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?
13. Lehet-e az $\mathbf{a}(6; 2; -3)$ és $\mathbf{b}(-3; 6; -2)$ vektor egy kocka egy csúcsából induló élvektorok? Ha igen, határozzuk meg a harmadik élt!
14. Lineárisan független-e az $\mathbf{a}(2; 3; -1)$, $\mathbf{b}(1; -1; 3)$ és $\mathbf{c}(1; 9; -11)$ vektor?
15. Az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata V . Mekkora az $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $\mathbf{t} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
16. Milyen α paraméter esetén lesz az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, illetve lineárisan független, ha $\mathbf{a}(3; \alpha; 0)$, $\mathbf{b}(0; 3; \alpha)$ és $\mathbf{c}(1; 0; -1)$?
17. Határozza meg $\mathbf{a}(-1; 2; 1)$ vektor $\mathbf{b}(1; 2; 2)$ vektorra vett vetületét!