12 Differenciálás II

Matematika G2 – Többváltozós analízis
Utoljára frissítve: 2025. április 22.

12.1. Elméleti Áttekintő

Többváltozós Taylor-formula:

Az egyváltozós függvényekhet hasonló módon, az n-edrendű Taylor-polinom:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= f(\boldsymbol{x}_0) \\
T_1 &= T_0 + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y}(y - y_0) \\
T_2 &= T_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x \, \partial y}(x - x_0)(y - y_0)\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Többváltozós függvények szélsőérték-számítása:

Szélsőérték létezésének **szükséges** feltétele, hogy az adott pontban a parciális deriváltak eltűnjenek, vagyis

$$\forall i : \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = 0.$$

Szélsőérték létezésének elégséges feltétele, hogy az adott pontban felírt Hesse-mátrix pozitív definit legyen. Ezen mátrix az alábbi módon írható fel:

$$
\mathbf{H} = \begin{bmatrix}
\partial_1^2 f(\boldsymbol{x}_0) & \partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \partial_1\partial_n f(\boldsymbol{x}_0) \\
\partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{x}_0) & \partial_2^2 f(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \partial_2\partial_n f(\boldsymbol{x}_0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\partial_n\partial_1 f(\boldsymbol{x}_0) & \partial_n\partial_2 f(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \partial_n^2 f(\boldsymbol{x}_0)
\end{bmatrix}.
$$

A determinánsa alapján:

- ha $\det \mathbf{H} > 0$, akkor lokális szélsőérték van,
- ha $\det \mathbf{H} < 0$, akkor nincsen szélsőérték,
- ha $\det \mathbf{H} = 0$, akkor nem lehet eldönteni.

Amennyiben $\det \mathbf{H} > 0$, akkor a szélsőérték jellege

- lokális maximum, ha $\mathbf{H}$ főátlóra feszített aldeterminánsai váltakozó előjelűek,
- lokális minimun, ha $\mathbf{H}$ főátlóra feszített aldeterminánsai pozitívak.

Feltételes szélsőérték egy görbe mentén:

Amennyiben egy f függvény egy adott $g = 0$ görbe menti szélsőértékeit szeretnénk megkeresni, akkor az

$$F = f + \lambda g$$

függvényre kell megoldanunk a szélsőérték-feladatot.

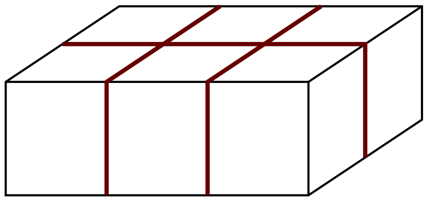
Feltételes szélsőérték egy görbe által bezárt területen:

Amennyiben egy f függvény szélsőértékeit egy adott $g = 0$ görbe által bezárt tartományán szeretnénk megkeresni, akkor:

- először megkeressük a lokális szélsőértékeket, és ezekből kiválasztjuk azokat, amelyek a tartomyán belsejébe esnek.
- utána pedig megkeressük a görbe peremére eső szélsőértékeket az előző módszer alapján.

12.2. Feladatok

1. Határozza meg az $f(x;y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ függvény első és második Taylor polinomját a $P(1;-2)$ pontban!
2. Határozza meg az $f(x;y;z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény első és második Taylor polinomjait a $P_2(\pi/4;\pi/4;\pi/6)$ pontban!
3. Végezzen szélsőérték vizsgálatot az $f(x;y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ függvényen!
4. Határozza meg az $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 + 8/x + 8/y$ függvény egy darab szélsértékét!
5. Ellenőrizze, hogy az $f(x;y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ függvénynek a $P_1(\pi/2;\pi/2)$ és $P_2(0;0)$ pontokban szélsőérték helye van!
6. Határozza meg azt a csomagméretet, amely esetén egy $V = 4{,}5\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú téglatest alakú csomag a legkevesebb zsineg felhasználásával az alábbi ábrán látható módon bekötözhető!



7. Határozza meg annak a derékszögű hasábnak a minimális térfogatát, amely éleinek összege l hosszú!
8. Határozza meg a $f(x;y) = x^2y^2$ függvény szélőértékét az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe mentén!
9. Határozza meg az $f(x;y) = x^2 + y^2 + xy - x$ függvény globális maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 \leq 1$ tartományon!