definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Lineáris Algebra BMETE94BG02 2

calc, matrix, patterns, patterns.meta

Matematika G2

Mátrixok II

Utoljára frissítve: 2025. február 17.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **A determináns és a lineáris függetlenség kapcsolata:**

Definíció szerint a determináns értéke pontosan akkor zérus, ha a mátrix soraiból képzett sorvektorok, vagy oszlopaiból képzett oszlopvektorok lineárisan függőek.

Ha a determináns értéke nem zérus, akkor a vektorok lineárisan függetlenek.

Egy 3×3-as mátrix esetén például:

$$A = \begin{bmatrix} & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ u & a_{21} & v & a_{22} & w & a_{23} \\ & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ha u, v és w lineárisan függetlenek, akkor $\det A \neq 0$.

[style=note, nobreak=true,] Korábban 3 vektor lineáris függetlenségét a vegyesszorzat segítségével vizsgáltuk. 3×3-as mátrixok esetén a vegyesszorzat értéke megegyezik a vektorokból alkotott mátrix determinánsával.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sarrus-szabály:**

$3{\times}3$-as mátrixok determinánsát a Sarrus-szabály segítségével könnyedén meghatározhatjuk. A szabály nevét Pierre Frédéric Sarrus francia matematikusról kapta.

[ampersand replacement=&]
$[matrixofmathnodes, columnsep = 2mm,](sarrus)a\&b\&c\&a\&b$
d & e & f & d & e
g & h & i & g & h

;

[red!40!gray, ultra thick, opacity=.5] (sarrus-1-1.center) – (sarrus-3-3.center) (sarrus-1-2.center) – (sarrus-3-4.center) (sarrus-1-3.center) – (sarrus-3-5.center) ;

[blue!40!gray, ultra thick, opacity=.5] (sarrus-3-1.center) – (sarrus-1-3.center) (sarrus-3-2.center) – (sarrus-1-4.center) (sarrus-3-3.center) – (sarrus-1-5.center) ;

[black, thick] (sarrus-1-1.north west) – (sarrus-3-1.south west) (sarrus-1-3.north east) – (sarrus-3-3.south east) ;

ıin 1,2,3 [above=-2.0mm, red!40!gray] at (sarrus-1-ı.north) +; [below=-1.5mm, blue!40!gray] at (sarrus-3-ı.south) −;

[] at (5,.25) $\det A = +aei + bfg + cdh$; [] at (5,-.25) $\qquad - gec - hfa - idb$;

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Mátrix rangja**] A mátrix rangjának nevezzük az oszlopvektorai közül a lineárisan függetlenek maximális számát.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: Mátrixok rangszámának tétele**] Egy mátrix rangja megegyezik maximális el nem tűnő aldeterminánsának rendjével.

[style=note, nobreak=true,] A mátrix rangja elemi mátrix átalakítások során nem változik:

- tetszőleges sorát vagy oszlopát egy 0-tól különböző számmal megszorozzuk,
- tetszőleges sorát vagy oszlopát felcseréljük,
- tetszőleges sorához vagy oszlopához egy másik tetszőleges sorát vagy oszlopát adjuk.

[style=note, nobreak=true,] Ha egy kvadratikus (négyzetes) mátrix determinánsa nem zérus, akkor rangja maximális.

$$A \in \mathcal{M}_{n\times n} \wedge \det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A = n$$

[style=note, nobreak=true,] Egy $m \times n$-es mátrix rangja nem lehet nagyobb, mint az m és az n közül a kisebbik érték. Ha a mátrix rangja maximális, akkor az m és az n közül a kisebbik érték a rang.

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad A \leq \min\{\ m; n\ \}$$

[style=note, nobreak=true,] Csak a nullmátrixnak lehet 0 rangja.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az $A = 123$
321
213 mátrix rangját a definíció segítségével!

Vizsgáljuk meg, hogy oszlopvektorai lineárisan függetlenek-e, vagyis határozzuk meg a mátrix determinánsát:

$$\det A = 123321213 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -12.$$

Mivel a determináns értéke nem zérus, az A mátrix rangja maximális, azaz $A = 3$.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az $A = 123$
321
213 mátrix rangját a tétel segítségével!

A mátrix rangja a legnagyobb el nem tűnő alderermináns rendje: 9 $\mathrm{A}_1 = 1 \quad \rightarrow$ $\det A_1 = 1$,
$A_2 = 12$
$32 \quad \rightarrow \quad \det A_2 = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4$,
$A_3 = 123$
321
$213 \quad \rightarrow \quad \det A_3 = \ldots = -12$. Mivel a legnagyobb el nem tűnő aldetermináns rendje 3, ezért az A mátrix rangja 3.

[style=example, nobreak=true] x[1]>p1 F[1]>$x1 <$ Határozzuk meg az $A = 123$
321
213 mátrix rangját elemi átalakítások segítségével!

$$\mathrm{A} \ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (-3S_1)$$
$(-2S_1)$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \div (-4)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad (-2S_2)$$
$(+3S_2)$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$\div 3$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\ + S_3)$$
$(-2S_3)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Reguláris és szinguláris mátrix**] Egy kvadratikus mátrixot **regulárisnak** mondunk, ha determinánsa nem zérus.

Ha a kvadratikus mátrix determinánsa 0, **szinguláris** mátrixról beszélünk.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Mátrix inverze**] Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix inverzét az A^{-1} jelöli, és az a mátrix, melyre $A \cdot A^{-1} =$ teljesül.

[style=note, nobreak=true,] Egy szinguláris mátrixnak nem létezik inverze.

[style=blueBox, nobreak=true,] Reguláris mátrix inverze egyértelmű. Ha $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, akkor

$$A^{-1} := \frac{A}{\det A}.$$

Egy 2×2-es mátrix adjungáltja:

$$A = abcd \quad \Rightarrow \quad A = d - b - ca$$

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az $A = 12$
34 mátrix inverzét!

A mátrix determinánsa:

$$\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

A mátrix adjungáltja:

$$A = 4 - 2 - 31.$$

Ezek alapján az A mátrix inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot 4 - 2 - 31 = -213/2 - 1/2.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] Egy 3×3-as mátrix adjungáltja:

$$A = a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33} \quad \Rightarrow \quad A = +a_{22}a_{23}a_{32}a_{33} - a_{12}a_{13}a_{32}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} - a_{21}a_{23}a_{31}a_{33} + a$$

[style=note, nobreak=true,] 3×3-as mátrix adjungáltjának felírásához érdemes először a transzponáltját felírni, például:

$$A = a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33} \quad \Rightarrow \quad A^{=} a_{11}a_{21}a_{31}a_{12}a_{22}a_{32}a_{13}a_{23}a_{33}$$

Az adjungált i-edik sorában és j-edik oszlopában elhelyezkező α_{ij} elemét a letakarós módszer segítségével határozhatjuk meg.

Az adjungált első sorának elemei:

[ampersand replacement=&]
$[matrix of math nodes, column sep = 2mm,](m)^{+}a_{11}\&^{-}a_{21}\&^{+}a_{31}$
$^{-}a_{12}\&^{+}a_{22}\&^{-}a_{32}$
$^{+}a_{13}\&^{-}a_{23}\&^{+}a_{33}$
;

[primaryColor, line width=5mm, opacity=.5] (m-1-1.west) – (m-1-3.east) ;
[primaryColor, line width=8mm, opacity=.5] (m-1-1.north) – (m-3-1.south) ;

[black, thick] (m-1-1.north west) – (m-3-1.south west) (m-1-3.north east) – (m-3-3.south east) ;

at (0,-2.25) $\alpha_{11} = +a_{22}a_{32}$
a$_{23}a_{33}$;

[xshift=5cm] $[matrix of math nodes, column sep = 2mm,](m)^{+}a_{11}\&^{-}a_{21}\&^{+}a_{31}$
$^{-}a_{12}\&^{+}a_{22}\&^{-}a_{32}$
$^{+}a_{13}\&^{-}a_{23}\&^{+}a_{33}$
;

[secondaryColor, line width=5mm, opacity=.5] (m-1-1.west) – (m-1-3.east) ;
[secondaryColor, line width=8mm, opacity=.5] (m-1-2.north) – (m-3-2.south) ;

[black, thick] (m-1-1.north west) – (m-3-1.south west) (m-1-3.north east) – (m-3-3.south east) ;

at (0,-2.25) $\alpha_{12} = -a_{12}a_{32}$

a$_{13}a_{33}$;

[xshift=10cm] $[matrix of math nodes, column sep = 2mm,](m)^{+}a_{11}\&^{-}a_{21}\&^{+}a_{31}{}^{-}a_{12}\&^{+}a_{22}\&^{-}a_{32}{}^{+}a_{13}\&$

[primaryColor, line width=5mm, opacity=.5] (m-1-1.west) – (m-1-3.east) ; [primaryColor, line width=8mm, opacity=.5] (m-1-3.north) – (m-3-3.south) ;

[black, thick] (m-1-1.north west) – (m-3-1.south west) (m-1-3.north east) – (m-3-3.south east) ;

at (0,-2.25) $\alpha_{13} = +a_{12}a_{22}$
$a_{13}a_{23}$;

A többi elem hasonló módszerrel számolható.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az $A = 123$
345
568
mátrix inverzét!

A mátrix determinánsa:

$$\det A = 1 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 \cdot 5 \cdot 1 - 8 \cdot 2 \cdot 3 = -2.$$

A mátrix transzponáltja:
$$A^{=}135246358.$$

A mátrix adjungáltja:

$$A = +4658-2638+2435-3558+1538-1335+3546-1526+1324 = 22-21-74-24-2.$$

A mátrix inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot 22-21-74-24-2 = -1-11-1/27/2-21-21.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Inverz meghatározása Gauss-Jordan eliminációval:**

Egy A reguláris mátrix inverzés Gauss-Jordan eliminációval is meghatározhatjuk. A módszer során az $(A|)$ mátrixot sorműveletek segítségével olyan módon alakítjuk át, hogy ahol eredetileg A állt, ott az egységmátrix jelenjen meg. Az átalakított mátrix másik felében az A^{-1} mátrix fog szerepelni.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az $A = 12$
34 mátrix inverzét! x[1]>p1 F[1]>x1 < $\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\!\left|\right]$ $(-3S_1)$

$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{matrix}\right|\!\left|\right]$ $\div(-2)$

$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{matrix}\right|\!\left|\right]$ $(\,-2S_2)$

$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{matrix}\right|\!\left|\right]$

0.2 Feladatok

1. Egy síkon vannak-e az $A(2;3;-4)$, $B(3;-1;-6)$, $C(-1;5;2)$ és $D(2;1;-4)$ pontok?
2. Számolja ki azalábbi mátrixok determinánsát Sarrus-szabállyal!

   $A = 492357816 \qquad B = 357563214 \qquad C = 843{-}56{-}279{-}8 \qquad D = 4{-}302{-}12157$

3. Adja meg az azalábbi mátrixok rangját! 9 A = 1 2 3
   3 2 1
   2 1 3 B = 1 3 -2
   -2 -6 4
   -1 -3 2
   C = 1 1 2 3
   2 4 5 2
   -1 1 -1 0 D = 1 2 3 4 5
   2 3 4 5 6
   5 6 7 8 9
   4 5 6 7 8
4. Vizsgálja az A mátrix rangját x függvényében!

   $$A = 1 - 1 - 33x4101171732241$$

5. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét!

   $$A = 1234 \qquad B = 4526 \qquad C = 133134143 \qquad D = 123321213$$

6. Milyen k érték esetén lesz invertálható az alábbi mátrix?

   $$k - 122k - 1$$

7. Határozza meg az ismeretlenekeket az alábbi mátrixegyenletben!

   $$x5 - 3z7y06 = -148w3$$

8. Adottak az A, B és C mátrixok. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet!

   $$A = 4311 \qquad B = 1234 \qquad C = 1 - 12 - 3 \qquad \Rightarrow \qquad AX + C = 2BCX$$

9. Számítsa ki az alábbi, komplex elemű mátrix rangját!

   $$12i1 + 2i3i3 - i4i - 3 - 1 + 4i$$