# 1

# **Vektorok**

Matematika G1 – Analitikus geometria Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

# 1.1. Elméleti Áttekintő

## Definíció 1.1: Vektor

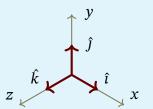
Egy  $(v_1, v_2, v_3)$  valós számokból alló rendezett számhármast a térben  $(\mathbb{R}^3)$  vektornak nevezünk. Jelölése:  $\boldsymbol{v}$  (nyomtatott szöveg),  $\underline{v}$  /  $\overrightarrow{v}$  (kézzel írott szöveg).

A vektorok geometriai értelemben olyan irányított szakaszok, melyeknek hossza és iránya van.

# Vektorok megadása:

Egy tetszőleges  $\boldsymbol{v}$  ( $v_1; v_2; v_3$ ) vektor a standard normális bázisban

$$\boldsymbol{v} = v_1 \hat{\imath} + v_2 \hat{\jmath} + v_3 \hat{k}.$$



$$\hat{i} = (1; 0; 0)$$

$$\hat{j} = (0; 1; 0)$$

$$\hat{k} = (0; 0; 1)$$

# Vektorok típusai:

- kötött vektor: fix kezdőponttal rendelkezik,
- szabad vektor: nincs fix kezdőpontja,
- helyvektor: olyan kötött vektor, amelynek kezdőpontja az origó.

#### Vektor hossza:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

- Ha |v| = 0, akkor v nullvektor. (Jele: 0)
- Ha |v| = 1, akkor v egységvektor.

A nullvektor iránya nem definiált.

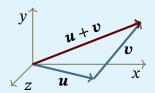
#### Egy adott *v* vektorhoz tartozó egységvektor:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{v} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ |\boldsymbol{v}| & |\boldsymbol{v}| & |\boldsymbol{v}| \end{pmatrix}$$

# Háromszög-egyenlőtlenség:

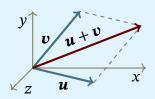
Minden **u**, **v** vektorpárra igaz, hogy

$$|u+v|\leq |u|+|v|.$$



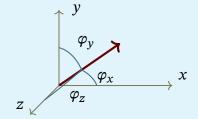
### Paralelogramma-szabály:

Ha az  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  vektorokkal, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának azon átlója, amely a közös pontból indul.



### Vektor koordinátatengelyekkel bezárt szöge:

$$\cos \varphi_x = \frac{v_1}{|\mathbf{v}|} \quad \cos \varphi_y = \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} \quad \cos \varphi_z = \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}$$



#### Kollinearitás:

Az  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  kollineárisak, ha  $\boldsymbol{v}$  előáll  $\boldsymbol{u}$  és egy  $\lambda \in \mathbb{R}$  szorzataként. Amennyiben  $\lambda > 0$ , akkor a két vektor azonos irányú.

#### Komplanaritás:

Tetszőleges számú vektor komplanáris, ha azok egy síkban helyezkednek el.

#### Definíció 1.2: Lineáris függetlenség

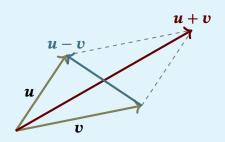
Egy  $\{v_1; v_2; ...; v_n\}$  vektorrendszer lineárisan független, ha a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$  egyenletnek csak a triviális megoldása létezik. (Azaz  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ .)

- A nullvektor minden vektorral lineárisan függő.
- Két vektor akkor lineárisan független, ha nem kollineáris.
- Ha két vektor nem kollineáris, akkor egyértelműen meghatároznak egy síkot, azaz bármely velük koplanáris vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként.
- 3D koordinátarendszerben 3-nál több vektor biztos, hogy lineárisan összefüggő. (Feltéve, hogy nincs köztük nullvektor.)
- 3 vektor lineárisan független ha nem koplanáris. (3D-ben)

### Vektorok összege és különbsége:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$
  
 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$ 

- Kommutatív: u + v = v + u
- Asszociatív: (u+v)+w=u+(v+w)



#### Skalárral való szorzás:

Skalárral való szorzás esetén a vektor (v) minden koordinátáját megszorozzuk a  $\lambda \in \mathbb{R}$  skalárral, vagyis:

$$\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{v} = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3).$$

**A skalárral való szorzás eredménye egy vektor**, melynek hossza az eredeti vektor hosszának skalárszorosa.

Vektorok skaláris szorzata: (Scalar / Dot product)

Az  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  vektorok skaláris szorzata:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Két vektor skaláris szorzatának eredménye egy skalár.

#### A skaláris szorzat tulajdonságai:

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$  (kommutatív)
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  (disztributív)
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$
- $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

# A skaláris szorzat geometriai jelentése:

A skaláris szorzás segítségével kiszámítható az  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  vektorok közötti szög.

 $u\varphi$ 

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$$

Az  $\boldsymbol{u}$  vektor  $\boldsymbol{v}$  vektorra vett párhuzamos és merőleges komponense:

$$\mathbf{u}_{||} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_v) \,\hat{\mathbf{e}}_v \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{||},$$

ahol  $\hat{\boldsymbol{e}}_v$  a  $\boldsymbol{v}$  irányába mutató egységvektor.

# Vektoriális szorzat / keresztszorzat (Cross product):

Az  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  vektorok keresztszorzata:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}.$$

**Két vektor keresztszorzatának eredménye egy vektor**, amely merőleges mindkét vektorra, iránya pedig a jobbkéz szabály szerinti.

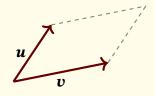
# A keresztszorzat tulajdonságai:

- $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  (antikommutatív)
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$  (disztributív)
- $\mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$  akkor és csak akkor, ha  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  kollineárisak, vagy ha valamelyikük nullvektor.

# A keresztszorzat geometriai jelentése:

Az  $u \times v$  vektor hossza megegyezik az u és v vektorok által kifeszített paralelogramma területével.

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\varphi$$



#### Vegyesszorzat:

Az **u**, **v** és **w** vektorok vegyes szorzata:

$$uvw = u \cdot (v \times w)$$

A vegyesszorzat eredménye egy skalár.

#### A vegyesszorzat tulajdonságai:

- uvw = wuv = vwu = -vuw = -wvu = -uwv (ciklikus csere)
- lineáris mindhárom változójában:  $(\lambda u + \mu v)wz = \lambda uwz + \mu vwz$
- Ha **u**, **v** és **w** vektorok egy síkban helyezkednek el, akkor vegyesszorzatuk nulla.

#### A vegyesszorzat geometriai jelentése:

3 vektor vegyesszorzata megadja az általuk kifeszített paralelepipedon térfogatát, illetve az általuk kifeszített tetraéder térfogatának hatszorosát.

#### 1.2. Feladatok

1. Legyen  $\boldsymbol{u}$  és  $\boldsymbol{v}$  két tetszőleges vektor. Milyen  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterek esetén lesznek kollineárisak, ha az  $\{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}\}$  vektorrendszer lineárisan független?

a) 
$$\begin{cases} \mathbf{u} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \\ \mathbf{v} = 4\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \mathbf{u} = 3\mathbf{a} - 3\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c} \\ \mathbf{v} = \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} - \mathbf{c} \end{cases}$$

2. Legyen az  $\{a; b; c\}$  vektorrendszer lineárisan független. Lineárisan független lesz-e az  $\{r; s; t\}$  vektorrendszer?

a) 
$$\begin{cases} r = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c} \\ t = \mathbf{0} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} r = a + b + c \\ s = b + c \\ t = a + c \end{cases}$$

- 3. Legyen a, b és c közös középpontú komplanáris vektorok. (a és b nem kollineáris) Bizonyítsa be, hogy az a, b, c vektorok végpontja akkor és csakis akkor esik egy egyenesre, ha  $c = \alpha a + \beta b$  előállításban  $\alpha + \beta = 1$ .
- 4. Számítsa ki az a(7; -1; 6) és b(2; 20; 2) vektorok által bezárt szöget!
- 5. Milyen z esetén lesz a b(6; -2; z) vektor merőleges az a(2; -3; 1) vektorra?
- 6. Ha az  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  vektor merőleges a  $7\mathbf{a} 5\mathbf{b}$  vektorra, az  $\mathbf{a} 4\mathbf{b}$  vektor pedig merőleges a  $7\mathbf{a} 2\mathbf{b}$  vektorra, mekkora  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  bezárt szögének koszinusza?
- 7. Az ABCD téglalap ismert csúcsainak koordinátái: A(2;6;0), B(1;2;3), C(-2;8;z). Mennyi z értéke? Hol van D pont?
- 8. Számítsa ki az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  keresztszorzatot, amennyiben  $\mathbf{a}(-4; 2; 1)$  és  $\mathbf{b}(-2; 7; 8)$ .
- 9. Hozza egyszerűb alakra a  $(3\boldsymbol{a} \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a})$  kifejezést!
- 10. Kollineárisak-e az  $\boldsymbol{a}(-3;4;7)$  és  $\boldsymbol{b}(2;5;1)$  vektorok?
- 11. Mekkora az ABC háromszög területe, ha csúcsai: A(1;0;2), B(-1;4;7) és C(5;-2;1)?
- 12. Igaz-e, hogy ha  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ , akkor  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ?
- 13. Lehet-e az a(6; 2; -3) és b(-3; 6; -2) vektor egy kocka egy csúcsából induló élvektorok? Ha igen, határozzuk meg a harmadik élt!
- 14. Lineárisan független-e az a(2; 3; -1), b(1; -1; 3) és c(1; 9; -11) vektor?
- 15. Az a, b és c vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata V. Mekkora az r = 2a + 3b + 4c, s = a b + c és t = 2a + 4b c vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
- 16. Milyen  $\alpha$  paraméter esetén lesz az  $\{a, b, c\}$  vektorrendszer lineárisan függő, illetve lineárisan független, ha  $a(3; \alpha; 0)$ ,  $b(0; 3; \alpha)$  és c(1; 0; -1)?
- 17. Határozza meg a(-1;2;1) vektor b(1;2;2) vektorra vett vetületét!