6 Integrálátalakító tételek II

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. október 06.

6.1. Elméleti áttekintő

Definíció 6.1 : Térfogat

Legyen $\mathbf{\Omega} : D \to \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\mathbf{\Omega}(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $\mathrm{d}V = \det(\mathbf{D\Omega}(r; s; t))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$. Ekkor a térfogat:

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \left|\det\left(\mathbf{D\Omega}(r; s; t)\right)\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

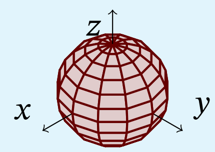
Definíció 6.2 : Térfogati integrál

Legyen $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\mathbf{\Omega} : D \to \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\mathbf{\Omega}(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $\mathrm{d}V = \det(\mathbf{D\Omega}(r; s; t))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$. Ekkor a φ skalármező térfogaton vett integrálja:

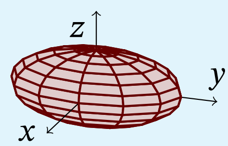
$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint_{D} \varphi\left(\mathbf{\Omega}(r; s; t)\right) \det\left(\mathbf{D\Omega}(r; s; t)\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Tértartományok paraméterezése

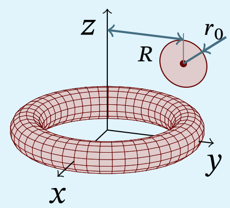
- **Gömb:** $$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r\sin s\cos t \\ r\sin s\sin t \\ r\cos s \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} r \in [0; R] \\ s \in [0; \pi] \\ t \in [0, 2\pi] \end{array}$$



- **Ellipszoid:** $$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} a\,r\sin s\cos t \\ b\,r\sin s\sin t \\ c\,r\cos s \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} r \in [0; 1] \\ s \in [0; \pi] \\ t \in [0, 2\pi] \end{array}$$



- **Tórusz:** $$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} (R + r\cos s)\cos t \\ (R + r\cos s)\sin t \\ r\sin s \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} r \in [0; r_0] \\ s \in [0; 2\pi] \\ t \in [0, 2\pi] \end{array}$$



Tétel 6.1 : Gauss-Osztogradszkij-tétel

Legyen $\boldsymbol{\Omega} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, irányított,parametrizált tértartomány. Legyen továbbá $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ az $\boldsymbol{\Omega}$ peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle .$$

Ha $\boldsymbol{v}$ vektorpotenciálos, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$.

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xy^2z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (2xyz^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt az első térnyolcadban lévő egységkocka felületén kifele mutató irányítással!

Határozzuk meg a $\boldsymbol{v}$ vektormező divergenciáját:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial x^2yz}{\partial x} + \frac{\partial xy^2z}{\partial y} + \frac{\partial 2xyz^2}{\partial z} = 8xyz.$$

A Gauss-Osztogradszkij-tétel alapján:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 8xyz \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 1.$$

Gauss-Osztogradszkij-tétel Maxwell I. és II. egyenletében

A Gauss-Osztogradszkij-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. Az első két egyenlet az elektromos és mágneses tér forrásosságát írja le:

$$\begin{aligned} &(I) &&\Rightarrow && \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} &&\Rightarrow && \text{elektromos tér forrásos,} \\ &(II) &&\Rightarrow && \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 &&\Rightarrow && \text{mágneses tér forrásmentes,} \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{E}$ az elektromos tér, $\boldsymbol{B}$ a mágneses tér, ρ az elektromos töltéssűrűség, ε_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Gauss-Osztogradszkij-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} &(I) &&\Rightarrow && \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{E}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, \mathrm{d}V, \\ &(II) &&\Rightarrow && \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{B}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}V = 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet azt mondja ki, hogy zárt felületen áthaladó elektromos tér fluxusa arányos az elektromos töltéssűrűség térfogati integráljával. A második egyenlet pedig azt jelenti, hogy a mágneses tér fluxusa zárt felületen zérus, a mágneses tér forrásmentes.

Tétel 6.2 : Green-tétel asszimetrikus alakja

Legyenek $\varphi;\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi\,\Delta\varphi + \langle \operatorname{grad}\psi; \operatorname{grad}\varphi\rangle \,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad}\varphi; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle\,.$$

$\psi = 1$ választásával visszanyerjük a Gauss-Osztogradszkij-tételt:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta\varphi \,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \underbrace{\operatorname{grad}\varphi}_{\boldsymbol{v}} \,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \left\langle \underbrace{\operatorname{grad}\varphi}_{\boldsymbol{v}}; \mathrm{d}\mathbf{S} \right\rangle .$$

Tekintsünk egy $R = 1\,\mathrm{m}$ sugarú tömör alumínium gömböt, amelynek stacionárius hőmérséklet-eloszlása $\varphi(\boldsymbol{r}) = T_0(1 - \boldsymbol{r}^2)$ függvény írja le, ahol $T_0 = 10\,\mathrm{K}$ a gömb belső hőmérséklete. Határozza meg a gömb felületén kifelé irányuló összes $\dot{Q}$ hőáramot, ha a hőfluxus sűrűsége $\boldsymbol{q} = -\lambda \operatorname{grad}\varphi$, ahol $\lambda = 205\,\mathrm{W/(m\,K)}$ az alumínium hővezetési tényezője, és

$$\dot{Q} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{q}; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle\,.$$

Használjuk a Green-tétel asszimetrikus alakját $\psi = -\lambda$ állandó választással:

$$\dot{Q} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle -\lambda \operatorname{grad}\varphi; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = -\iiint_{\mathcal{V}} \psi\,\Delta\varphi + \left\langle \underbrace{\operatorname{grad}\lambda}_{=\boldsymbol{0}}; \operatorname{grad}\varphi \right\rangle \mathrm{d}V = -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta\varphi \,\mathrm{d}V.$$

Számítsuk ki a térfogat belsejében a $\Delta\varphi$ értékét:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -6T_0.$$

A hőáram összesen:

$$\dot{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{-\lambda(-6T_0)}_{=\text{const}} \,\mathrm{d}V = -\lambda(-6T_0)\frac{4\pi R^3}{3} = 8\pi\lambda T_0 R^3 \approx 5{,}15 \cdot 10^4\,\mathrm{W}.$$

Tétel 6.3 : Green-tétel szimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi;\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi\,\Delta\varphi + \varphi\,\Delta\psi \;\;\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad}\varphi - \varphi \operatorname{grad}\psi; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle$$

6.2. Feladatok

1. Vezesse le az R sugarú gömb térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\boldsymbol{r}) = 1/\|\boldsymbol{r}\|$ skalármező térfogati integrálját a gömbön! A tértartomány ajánlott paraméterezése:
$$\boldsymbol{\Omega}(r;s;t) = \begin{bmatrix} r\sin s\cos t \\ r\sin s\sin t \\ r\cos s \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} r \in [0;R] \\ s \in [0;\pi] \\ t \in [0;2\pi] \end{matrix}$$

2. Vezesse le az R sugarú, h magasságú henger térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$ skalármező térfogati integrálját a hengerben! A tértartomány ajánlott paraméterezése:
$$\boldsymbol{\Omega}(r;s;t) = \begin{bmatrix} r\cos s \\ r\sin s \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} r \in [0;R] \\ s \in [0;2\pi] \\ t \in [0;h] \end{matrix}$$

3. Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y\sin x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2\cos y - \cos x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (v_3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Határozza meg v_3-at, ha tudjuk, hogy $\boldsymbol{v}$ tetszőleges zárt felületen vett felületi integrálja zérus!

4. Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$. Adja meg a vektormező alábbi zárt felületeken vett felületi integráljait:
   a) az $R = 2$ sugarú gömb felületén befelé mutató irányítással,
   b) az $x^2 + y^2 = 4$ hengerfelületen, amelyet a $z = -1$ és $z = 1$ síkok zárnak le, kifelé mutató irányítással,
   c) a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid és a $z = 4$ sík által határolt test felületén kifelé mutató irányítással.

5. Egy fotonikus chipeket hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségelosztással ($\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m, az ellipszoid egyenlete pedig:
$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

6. Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara $R = 0{,}02\,\mathrm{m}$, A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmérséklet-mező jó közelítéssel
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = T_c - \alpha\boldsymbol{r}^2, \quad \alpha = 1{,}3 \cdot 10^5\,\mathrm{K/m^2}.$$
Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha
$$q_{\text{hő}} = -\oiint_{\partial V} \langle \lambda \operatorname{grad}\varphi; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle, \quad \lambda = 0{,}2\,\mathrm{W/(m\,K)}.$$