

## 5

## Lineáris leképezések II

Matematika G2 – Lineáris Algebra

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

## 5.1. Elméleti Áttekintő

## Definíció 5.1: Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen  $V$  a  $T$  test feletti vektortér,  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .  $\mathbf{v}$ -t a  $\varphi : V \rightarrow V$  lineáris leképezés sajátvektorának mondjuk, ha önmaga skalárszorosa megy át a leképezés során, azaz  $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ ,  $\lambda \in T$ .  $\lambda$ -t a  $\mathbf{v}$  sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

Ha a  $\mathbf{v}$  sajátvektora a  $\varphi$ -nek, akkor annak skalárszorosa is az.

## Tétel 5.1: Sajátértékek számítása

Az  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$  mátrix sajátértékei a

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

Határozzuk meg az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet, és ennek alapján a sajátértékek:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

A sajátvektorokat az  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$  egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

1. A  $\lambda_1 = 1$  sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A  $\lambda_2 = 3$  sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$  egyenletet **karakterisztikus egyenletnek** nevezzük.

A  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$  polinomot **karakterisztikus polinomnak** nevezzük.

### Tétel 5.2: Főtengelytétel

Szimmetrikus mátrix sajátvektorai ortogonálisak és a sajátértékek mindig valósak.

Antiszimmetrikus mátrix sajátvektorai páronként konjugáltak és a sajátértékek mindig tisztán képzetesek.



Ha  $\mathbf{A}$  háromszögmátrix, akkor a sajátértékek a főátlóbeli elemek.

### Definíció 5.2: Hasonlóság

Azt mondjuk, hogy az  $\mathbf{A}$  és  $\hat{\mathbf{A}}$  mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan  $\mathbf{T}$  invertálható mátrix, hogy

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Jele:  $\mathbf{A} \sim \hat{\mathbf{A}}$ .

### Definíció 5.3: Diagonalizálhatóság

Az  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan  $\mathbf{\Lambda}$  diagonális mátrix és egy  $\mathbf{T}$  invertálható mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

### Tétel 5.3: Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Legyen  $\mathbf{A}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $\mathbf{A}$  mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha létezik  $n$  darab lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az  $\mathbf{A}$  sajátértékeiből, míg a  $\mathbf{T}$  transzformációs mátrix  $\mathbf{A}$  sajátvektoraiból áll:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n].$$

### Sajátvektorok koordinátarendszere:

Egy  $\varphi$  leképezés mátrixa tetszőlegesen sok bázisban felírható. Ha  $\varphi$ -t egy a leképezés sajátvektorával párhuzamos vektorra haddatjuk, akkor az nyújtásnak felel meg. Ha  $\dim \varphi = n$ , és  $n$  darab lineárisan független sajátvektorral rendelkezünk, akkor  $\varphi$  mátrix-reprezentációja a sajátvektorok által felírt bázisban diagonális lesz.

**Invariáns mennyiségek:**

Legyen  $\mathbf{A}$  egy  $3 \times 3$ -as mátrix, amelynek sajátértékei  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  és  $\lambda_3$ . Ekkor az alábbi mennyiségek bármely  $\mathbf{A}$ -hoz hasonló mátrix esetén invariánsak:

- $I_1 = \text{tr } \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,
- $I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$ ,
- $I_3 = \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ .

**Mátrixfüggvények:**

Legyen  $\mathbf{A}$  egy  $n \times n$ -es,  $\mathbf{T}$  mátrix segítségével diagonalizálható mátrix, amelyre szeretnénk haddatni az  $f$  függvényt. Ekkor az  $f(\mathbf{A})$  mátrixot a következő módon számíthatjuk ki:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}.$$

Számítsuk ki az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix tizedik hatványát!

Az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1 = 1$  és  $\lambda_2 = 3$ . A hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig  $\mathbf{v}_1(1; 1)$  és  $\mathbf{v}_2(1; -1)$ . Legyen  $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ . Ekkor az  $\mathbf{A}$  mátrix diagonális alakja:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján:

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29525 & -29524 \\ -29524 & 29525 \end{bmatrix}.$$

**Definíció 5.4: Sajátaltér**

Legyen  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$  és legyen  $\lambda_i$  az  $\mathbf{A}$  egy sajátértéke. A  $\lambda_i$ -hez tartozó sajátaltér az alábbi halmaz:

$$E_{\lambda_i} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}\}.$$

Ez az  $\mathbb{R}^n$  egy altere.

**Algebrai és geometriai multiplicitás:**

Ha a  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$  karakterisztikus egyenletnek  $\lambda_i$   $k$ -szoros gyöke, akkor azt mondjuk, hogy a  $\lambda_i$ -nek az algebrai multiplicitása  $k$ . Ebben az esetben a  $\lambda_i$  sajátértékhez tartozó sajátaltér  $d$  dimenziója (geometriai multiplicitása)  $1 \leq d \leq k$ .

A geometriai multiplicitás sosem nagyobb az algebrainál.

A diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy a geometriai és algebrai multiplicitások minden sajátérték esetén megegyeznek.

Diagonalizálható-e az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix?

Először határozzuk meg az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékeit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 6 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 6) = 0.$$

Láthatjuk, hogy a  $\lambda_{12} = -1$  sajátérték algebrai multiplicitása 2. Keressük meg a hozzá tartozó sajátvektort/sajátvektorokat. Oldjuk meg az  $(\mathbf{A} - 1\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  egyenletet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 - v_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underbrace{t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + \underbrace{t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$

Láthatjuk, hogy a  $\lambda_{12}$  sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója 2, amely megegyezik az algebrai multiplicitással, tehát az  $\mathbf{A}$  mátrix diagonalizálható.

Diagonalizálható-e az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix?

Először határozzuk meg az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékeit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0.$$

Láthatjuk, hogy a  $\lambda = 2$  sajátérték algebrai multiplicitása 2.

A sajátvektorok meghatározása az  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  egyenlet segítségével:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A  $\mathbf{A}$  mátrix nem diagonalizálható, mivel a sajátértékhez tartozó geometriai multiplicitás (vagyis a sajátaltér dimenziója) 1.

Ha egy  $2 \times 2$ -es mátrix  $\lambda$  sajátértékéhez tartozó algebrai és geometriai multiplicitás is 2, akkor a mátrix diagonális.

**Kvadratikus formák és másodrendű görbék:**

Egy csupa másodfokú tagot tartalmazó kétváltozós polinom átírható mátrixos alakba:

$$\rho(x; y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Ha  $\rho(x; y) = 0$ , akkor az egyenlet egy origó középpontú másodrendű görbét ír le. Az  $\mathbf{A}$  mátrix definitisége alapján a görbe lehet

- ellipszis, ha  $\mathbf{A}$  definit, (sajátértékek azonos előjelűek)
- parabola, ha  $\mathbf{A}$  szemidefinit, (egyik sajátérték nulla)
- hiperbola, ha  $\mathbf{A}$  indefinit. (sajátértékek ellentétes előjelűek)

Amennyiben a görbe egyenlete nem csak másodfokú tagokat tartalmaz, akkor azzal egy általános másodrendű görbét írunk le:

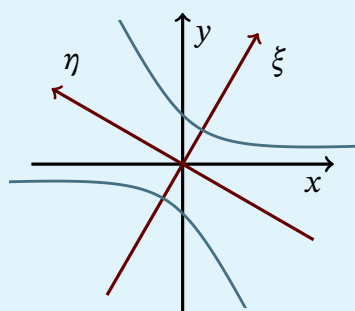
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + f = 0.$$

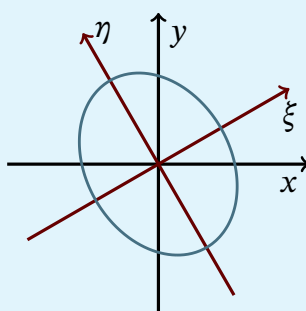
Legyenek  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ , és legyen  $\mathbf{v}_1$  a  $\lambda_1$ -hez,  $\mathbf{v}_2$  pedig a  $\lambda_2$ -höz tartozó egység hosszúságú sajátvektor. Képezzük a  $\mathbf{T}$  transzformációs mátrixot, amelynek oszlopai tartalmazzák a  $\mathbf{v}_1$  és  $\mathbf{v}_2$  vektorokat, vagyis  $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ . A mátrix segítségével az általános másodrendű görbe egyenlete átírható kanonikus alakra:

$$\underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{T}}_{\xi^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}}_{\Lambda} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}}_{\xi} + \underbrace{\mathbf{k}^T \mathbf{T}}_{\kappa^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}}_{\xi} + f = 0,$$

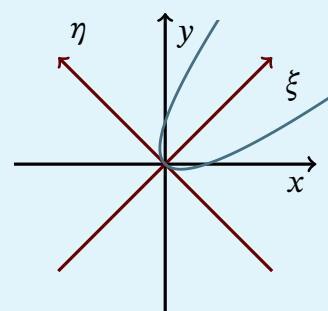
ahol  $\xi = [\xi \quad \eta]^T$  az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátkoordinátái,  $\Lambda$  diagonális mátrix, melynek főátlójában az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei szerepelnek,  $\kappa$  pedig tartalmazza a  $\xi$  és  $\eta$  irányba való eltolást.



Hiperbola



Ellipszis



Parabola

A  $\Lambda$  mátrix főátlójába a sajátértékeket olyan sorrendben kell beírni, amilyen sorrendben a sajátvektorokat a  $\mathbf{T}$  mátrixba rendeztük.

## 5.2. Feladatok

1. Adja meg az alábbi mátrixok sajátvektorait és sajátértékeit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. A leképezés mátrixainak felírása nélkül adja meg a lehető legtöbb sajátértéket és sajátvektort!

- a)  $z$ -tengely körüli  $45^\circ$ -os forgatás,
- b)  $xy$  síkra vetítés,
- c)  $xy$  síkra tükrözés.

3. Diagonizálhatóak-e a harmadik feladatban szereplő  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  és  $\mathbf{B}$  mátrixok?

4. A sajátértékek kiszámítása nélkül mondjuk meg a lehető legtöbb sajátérték-sajátvektor párt!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a harmadik feladatban szereplő  $\mathbf{B}$  mátrix tizedik hatványát!

6. Határozzuk meg az  $e^{10\mathbf{B}}$  függvényt, ha  $\mathbf{B}$  a harmadik feladatban szereplő mátrix!

7. Milyen alakzatot írnak le az alábbi másodrendű görbék? Írja fel a kanonikus egyenletüket!

a)  $-3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy = 144$

b)  $57x^2 + 43y^2 + 14\sqrt{3}xy = 576$

c)  $2x^2 - 5 = 0$