

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kiteintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex, ,**

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q) + (1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Többszörös analízis BMETE94BG02 14

## Matematika G2

# Integrálás II

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Integráltranszformációk:**

Előfordulhat olyan eset, amikor egy adott  $A$  tartományon nehéz elvégezni az integrálást, de létezik egy olyan koordináta-transzformáció, amely által az integrálás egyszerűbbé válik. Ha létezik egy egyértelmű  $\varphi$  leképezés az  $A$  tartományról az  $A'$  tartományra, akkor az integrálás a következő módon történik:

$$\int_A f(x) dx = \int_{A'} f(\varphi(x')) |J_\varphi| dx',$$

ahol  $J_\varphi$  a leképezés Jacobi-mátrixa.

**2D polárkoordináták:**

```

[thick] [draw = primaryColor, -to] (-0.25,0) -
(2.75,0) node[below]  $x$ ;
[draw = primaryColor, -to] (0,-0.25) - (0,1.75)
node[left]  $y$ ;
(O) at (0,0); (X) at (1,0);
[draw=secondaryColor]
(30:2) coordinate(P)  $-x = r \cos \varphi$ 
(0,0) node[above, midway,  $y = r \sin \varphi$ 
rotate=30]  $r$  ;
[fill=primaryColor] (P)
circle(2pt);
pic[ " $\varphi$ ", draw = secondaryColor, ->, angle radius=1.5cm, angle eccentricity=.7, ] angle = X-O-P;

```

$$|J_\varphi| = \cos \varphi - r \sin \varphi$$

$$\sin \varphi r \cos \varphi = r$$

### 3D hengerkoordináták:

```

[scale=.8, thick]
(0, 0) node[circle, fill, inner sep=1] (orig) -- (2/2,
2*2/3) coordinate (a) ;
[dashed] (orig) -- (2/2, -
2/7) coordinate (phi) --
(a);
[fill=primaryColor] (a)
circle(2.5pt);
[dashed] (orig) ellipse (2
and 2/3);
[-to, draw = primary-
Color] (orig) -- ++(-
1.5*2/5, -1.5*2/3) co- $x = r \cos \varphi$ 
ordinate (x) node[right] $y = r \sin \varphi$ 
 $x$  ; [-to, draw = pri- $z = z$ 
maryColor] (orig) --
++(1.25*2, 0) coordinate
(y) node[above]  $y$  ; [-to,
draw = primaryColor]
(orig) -- ++(0, 1.25*2)
coordinate (z) node[right]
 $z$  ;
[draw=secondaryColor,
text=secondaryColor, -to,
" $\varphi$ "] angle = x-orig-phi;
[draw=secondaryColor]
(orig) -- (phi) node[above,
midway]  $r$ ;

```

$$|J_\varphi| = \cos \varphi - r \sin \varphi$$

$$\sin \varphi r \cos \varphi$$

$$001 = r$$

### 3D gömbkoordináták:

```

[ scale=.8, thick ]
(0, 0) node[ circle, fill, inner sep=1 ] (orig) -- (2/3,
2/2) coordinate (a);
[ dashed ] (orig) -- (2/3, -
2/5) node (phi) -- (a);
(orig) circle (2); [ dashed ]
(orig) ellipse (2 and 2/3);
[ fill=primaryColor ] (a)
circle(2.5pt);
[-to, draw = primary-
Color] (orig) -- ++(-
1.5*2/5, -1.5*2/3) co-
ordinate (x) node[right]  $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ 
 $|J_\varphi| = s_\vartheta c_\varphi - r s_\vartheta s_\varphi c_\vartheta c_\varphi$ 
 $x$  ; [-to, draw = pri-  $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ 
 $s_\vartheta s_\varphi r s_\vartheta c_\varphi c_\vartheta s_\varphi$ 
maryColor] (orig) --  $-z = r \cos \vartheta$   $c_\vartheta 0r = r^2 \sin \vartheta$ 
++(1.25*2, 0) coordinate
(y) node[above]  $y$  ; [-to,
draw = primaryColor]
(orig) -- ++(0, 1.25*2)
coordinate (z) node[right]
 $z$  ;
[draw=secondaryColor,
text=secondaryColor, -to,
" $\varphi$ "] angle = x-orig-phi;
[draw=secondaryColor,
text=secondaryColor, to-,
" $\vartheta$ ", angle radius=8mm]
angle = a-orig-z;

```

[ style=note, nobreak=true, ] Fontos, hogy a Jacobi-mátrix determinánsával való szorzást ne felejtsük el!

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Görbék megadása:**

Görbék esetén egy futó változót használunk.

**Egyenes:**

$$r(t) = r_0 + tv,$$

ahol  $r_0$  az egyenes egy pontja,  $v$  az egyenes irányvektora,  $t \in \mathbb{R}$  pedig a futó paraméter.

**Kör:**

$$r(t) = R \cdot \cos \varphi R \cdot \sin \varphi,$$

ahol  $r$  a kör sugara,  $\varphi \in [0; 2\pi]$  pedig a futó paraméter.

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Felületek megadása:**

Felületek esetén két futó paraméterre van szükségünk.

**Körlap:**

$$\rho(r; \varphi) = r \cos \varphi r \sin \varphi,$$

ahol  $r \in [0; R]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

**Hengerfelület:**

$$\rho(t; s) = r_0(t) + sv,$$

ahol  $r_0(t)$  az alapgörbe,  $v$  pedig az irányvektor,  $t, s \in$  pedig a futó paraméterek.

**Forgásfelület:**

$$\{ \begin{array}{l} x(t) = f(t) \\ z(t) = g(t) \end{array} \Rightarrow \rho(t; s) = f(t) \cos s f(t) \sin sg(t).$$

## 0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi felületi integrálokat!

a)  $\int_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} T$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x; y \geq 0\}$$

b)  $\int_T x^2 + y^2 T$

$$T = \{(x; y) \mid (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$$

```
[thick] [draw =
primaryColor, -to]
(-1.85,0) -- (1.85,0)
node[below] x; [draw =
primaryColor, -to]
(0,-1.35) -- (0,1.35)
node[left] y;
[ternaryColor] (0,0) circle
(1);
[ draw = secondaryColor,
pattern = north east
lines, pattern color =
secondaryColor, ] (0,0) --
(1,0) arc (0:90:1) -- cycle;
[ fill = white, fill
opacity=.5, text
opacity=1 ] at (0.4,0.4) T;
[above right=-.5mm] at
(1,0) 1; [above
right=-.5mm] at (0,1) 1;
[thick] [draw =
primaryColor, -to]
(-0.35,0) -- (3.35,0)
node[below] x; [draw =
primaryColor, -to]
(0,-0.35) -- (0,2.35)
node[left] y;
[dashed,
draw=ternaryColor] (0,
1.33) node[left] 2 -- (1.33,
1.33) (2, 0) node[below] 3
-- (2, 0.67) ;
[ secondaryColor, pattern
= north east lines,
pattern color =
secondaryColor, ] (2,
1.33) circle (.67);
[ fill = white, fill
opacity=.5, text
opacity=1 ] at (2, 1.33) T;
```

c)  $T|2xy|T$

$$T = \left\{ (x; y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \wedge x; y \geq 0 \right\}$$

```

[thick] [draw =
primaryColor, -to]
(-1.85,0) -- (1.85,0)
node[below] x; [draw =
primaryColor, -to]
(0,-1.35) -- (0,1.35)
node[left] y;
[ ternaryColor, ] (0,0)
ellipse (1.2 and 0.8);
[ draw = secondaryColor,
pattern = north east
lines, pattern color =
secondaryColor, ] (0,0) --
(1.2,0) arc (0:90:1.2 and
0.8) -- cycle;
[ fill = white, fill
opacity=.5, text
opacity=1 ] at (0.45, 0.3)
T;
[above right=-.5mm] at
(1.2,0) 3; [above
right=-.5mm] at (0,0.8) 2;

```



d)  $T4xy^3T$

$$T = \left\{ (x; y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$$

```
[thick] [draw =
primaryColor, -to]
(-1.85,0) -- (1.85,0)
node[below] x; [draw =
primaryColor, -to]
(0,-1.35) -- (0,1.35)
node[left] y;
[ternaryColor] (0,0) circle
(1) circle (.5);
[ draw = secondaryColor,
pattern = north east
lines, pattern color =
secondaryColor, ] (30:.5)
-- (30:1) arc (30:90:1) --
(90:.5) arc (90:30:.5) --
cycle;
[ fill = white, fill
opacity=.5, text
opacity=1, inner
sep=.5mm, ] at (60:.75) T;
[above left=-.5mm] at
(.5,0) 1; [below
right=-.5mm] at (0,.5) 1;
[above right=-.5mm] at
(1,0) 2; [above
right=-.5mm] at (0,1) 2;
```

e)  $r \sin(x^2 + y^2) T$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 2^2 \wedge x; y \geq 0\}$$

```
[thick] [draw =
primaryColor, -to]
(-1.85,0) -- (1.85,0)
node[below] x; [draw =
primaryColor, -to]
(0,-1.35) -- (0,1.35)
node[left] y;
[ternaryColor] (0,0) circle
(1);
[ draw = secondaryColor,
pattern = north east
lines, pattern color =
secondaryColor, ] (0,0) --
(1,0) arc (0:90:1) -- cycle;
[ fill = white, fill
opacity=.5, text
opacity=1 ] at (0.4,0.4) T;
[above right=-.5mm] at
(1,0) 2; [above
right=-.5mm] at (0,1) 2;
```

2. Határozza meg az alábbi improprius integrálok értékét! 2

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x^2-y^2} xy$

b)  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x$

3. Határozza meg a gömb térfogatát egy hármas-integrál segítségével:

$$V = {}_V V$$

$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

```

[scale=.75, thick]
(0, 0) node[circle, fill,
inner sep=1] (orig) --
(2/3, 2/2) node[circle, fill,
inner sep=0.7,
label=above:x] (a) ;
[dashed] (orig) -- (2/3,
-2/5) node (phi) -- (a);
(orig) circle (2); [dashed]
(orig) ellipse (2 and 2/3);
[-to, draw =
primaryColor] (orig) --
++(-1.5*2/5, -1.5*2/3)
coordinate (x) node[right]
x ; [-to, draw =
primaryColor] (orig) --
++(1.25*2, 0) coordinate
(y) node[above] y ; [-to,
draw = primaryColor]
(orig) -- ++(0, 1.25*2)
coordinate (z) node[right]
z ;
[draw=secondaryColor,
text=secondaryColor, -to,
"\varphi"] angle = x-orig-phi;
[draw=secondaryColor,
text=secondaryColor, to-,
"\vartheta", angle radius=8mm]
angle = a-orig-z;

```

4. Adja meg az alábbi integrál értékét, ha  $V$  az  $r = 1$  sugarú,  $z = 0$  és  $z = 2$  síkok által határolt  $z$ -tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú henger a tér első tényolcadában elhelyezkedő része!

$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 \wedge x; y \geq 0\}$$

$$vz \cdot \sqrt{x^2 + y^2} V$$

[scale=.75, thick]  
 (0, 0) node[circle, fill,  
 inner sep=1] (orig) –  
 (2/2, 2\*2/3) coordinate  
 (a) ;  
 [dashed] (orig) – (2/2,  
 -2/7) coordinate (phi) –  
 (a);  
 [fill=primaryColor] (a)  
 circle(2.5pt);  
 [dashed] (orig) ellipse  
 (2 and 2/3);  
 [-to, draw =  
 primaryColor] (orig) –  
 ++(-1.5\*2/5, -1.5\*2/3)  
 coordinate (x)  
 node[right] x ; [-to,  
 draw = primaryColor]  
 (orig) – ++(1.25\*2, 0)  
 coordinate (y)  
 node[above] y ; [-to,  
 draw = primaryColor]  
 (orig) – ++(0, 1.25\*2)  
 coordinate (z)  
 node[right] z ;  
 [draw=secondaryColor,  
 text=secondaryColor,  
 -to, "φ"] angle =  
 x-orig-phi;  
 [draw=secondaryColor]  
 (orig) – (phi)  
 node[above, midway] r;

5. Határozza meg az  $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  függvény egységgömbön vett integrálját!
6. Határozza meg az  $r(t)$  vezérgörbájű  $v$  irányvektorú hengerefelületet!  

$$v(t) = t^2 + 15t^3t - 2 \quad v = 123$$
7. Adja meg a 2 sugarú,  $z$  tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú, origó központú körhenger felületének egyenletét!
8. Adja meg azon tórusz felületének egyenletét, amelyet az  $xz$  síkban elhelyezkedő,  $(x; z) = (5; 0)$  középpontú,  $r = 3$  sugarú kör  $z$  tengely körül való forgatásával kapunk!