

10

Elsőrendű lineáris és másodrendű hiányos DE

Matematika G3 – Differenciálegyenletek

Utoljára frissítve: 2025. november 29.

10.1. Elméleti áttekintő

Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Ha $q(x) \equiv 0$, akkor az egyenlet homogén, egyébként inhomogén.

Az általános megoldás a homogén és inhomogén megoldás összegeként adódik:

- A homogén megoldást meghaphatjuk, ha megoldjuk az $y' + p(x)y = 0$ egyenletet a tanult módszerek alapján.
- Az inhomogén megoldást konstans variálással kaphatjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a homogén megoldásban lévő konstanst x -től függőnek vesszük, majd megoldjuk az egyenletet.

Hiányos másodrendű egyenletek

Az $y'' = f(x; y; y')$ hiányos, ha x , y , vagy y' hiányzik az egyenletből.

1. $y'' = f(x)$ → y és y' hiányos, kétszer integrálunk
2. $y'' = f(x; y')$ → $p(x) = y'(x)$ helyettesítés,
így p -re elsőrendű
3. $y'' = f(y; y')$ → $P(y) = y'$ helyettesítés,
akkor $y'' = \partial_y P \cdot y' = \partial_y P \cdot P$
így P -re elsőrendű, szeparábilis

10.2. Feladatok

1. Oldja meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket!

$$a) \quad y' - \frac{y}{x} = x e^x,$$

$$b) \quad y' + 2xy + x e^{-x^2} = 0,$$

$$c) \quad y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1,$$

$$d) \quad y' + y \cos x = \cos x \sin x,$$

$$e) \quad y'(1+x^2) + 2xy = \tan x.$$

2. 10 L vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be 2 L/min sebességgel. Az edényben a folyadék azonnal elkeveredik, majd ugyanilyen sebességgel kifolyik. Mennyi só lesz 5 min múlva az edényben?

3. Egy testet függőlegesen hajítunk lefelé v_0 kezdeti sebességgel. Határozza meg a mozgás sebességének változását, amennyiben a testre csak a nehézségi erő hat, valamint a levegő fékezőereje a sebességgel egyenesen arányos!

4. Oldja meg a következő másodrendű, hiányos differenciálegyenleteket!

$$a) \quad y'' = 6x + \sin x,$$

$$b) \quad y''x^2 + \ln x = 1,$$

$$c) \quad y'' - \frac{x}{x^2-1} y' = 0 \quad (x > 1),$$

$$d) \quad y''(1+y^2) = y y'^2,$$

$$e) \quad y''^2 - y' = 0,$$

$$f) \quad y''y = 1 + y'^2.$$