14 Integrálás II

Matematika G2 – Többváltozós analízis

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

14.1. Elméleti Áttekintő

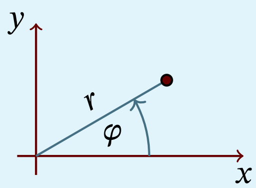
Integráltranszformációk:

Előfordulhat olyan eset, amikor egy adott A tartományon nehéz elvégezni az integrálást, de létezik egy olyan koordináta-transzformáció, amely által az integrálás egyszerűbbé válik. Ha lézezik egy egyértelmű φ leképezés az A tartományról az A' tartományra, akkor az integrálás a következő módon történik:

$$\iint_A f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathbf{A} = \iint_{A'} f(\boldsymbol{x}')\,|\mathbf{J}_\varphi|\,\mathrm{d}\mathbf{A}',$$

ahol $\mathbf{J}_\varphi$ a leképezés Jacobi-mátrixa.

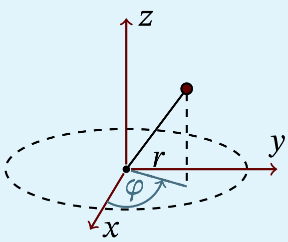
2D polárkoordináták:



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$|\mathbf{J}_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

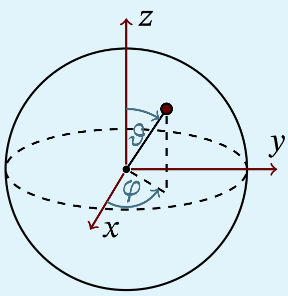
3D hengerkoordináták:



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z$$

$$|\mathbf{J}_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

3D gömbkoordináták:



$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta$$

$$|\mathbf{J}_\varphi| = \begin{vmatrix} s_\vartheta c_\varphi & -r s_\vartheta s_\varphi & c_\vartheta c_\varphi \\ s_\vartheta s_\varphi & r s_\vartheta c_\varphi & c_\vartheta s_\varphi \\ c_\vartheta & 0 & r \end{vmatrix} = r^2\sin\vartheta$$

Fontos, hogy a Jacobi-mátrix determinánsával való szorzást ne felejtsük el!

Görbék megadása:

Görbék esetén egy futó változót használunk.

Egyenes:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},$$

ahol r_0 az egyenes egy pontja, v az egyenes irányvektora, $t \in \mathbb{R}$ pedig a futó paraméter.

Kör:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\varphi \end{bmatrix},$$

ahol r a kör sugara, $\varphi \in [0; 2\pi]$ pedig a futó paraméter.

Felületek megadása:

Felületek esetén két futó paraméterre van szükségünk.

Körlap:

$$\boldsymbol{\rho}(r;\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix},$$

ahol $r \in [0; R]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Hengerfelület:

$$\boldsymbol{\rho}(t;s) = \boldsymbol{r}_0(r) + s\boldsymbol{v},$$

ahol $\boldsymbol{r}_0(t)$ az alapgörbe, $\boldsymbol{v}$ pedig az irányvektor, $t, s \in \mathbb{R}$ pedig a futó paraméterek.

Forgásfelület:

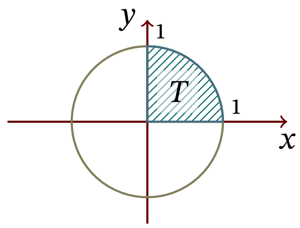
$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ z(t) = g(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\rho}(t;s) = \begin{bmatrix} f(t)\cos s \\ f(t)\sin s \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

14.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi felületi integrálokat!

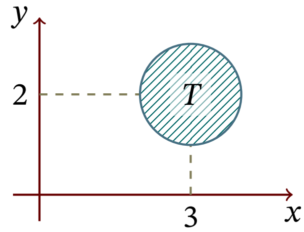
a) $$\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,\mathrm{d}T$$

$$T=\left\{(x;y)\mid x^2+y^2\le 1\ \wedge\ x;y\ge 0\right\}$$



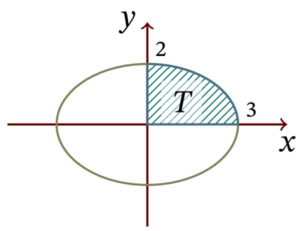
b) $$\iint_T x^2+y^2\,\mathrm{d}T$$

$$T=\left\{(x;y)\mid (x-3)^2+(y-2)^2\le 1\right\}$$



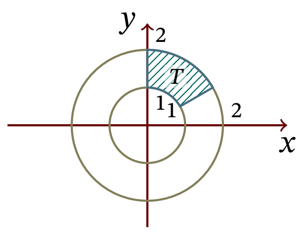
c) $$\iint_T |2xy|\,\mathrm{d}T$$

$$T=\left\{(x;y)\ \middle|\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\ \wedge\ x;y\ge 0\right\}$$



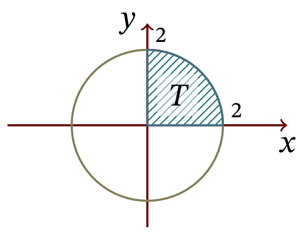
d) $$\iint_T 4xy^3\,\mathrm{d}T$$

$$T=\left\{(x;y)\ \middle|\ 1\le x^2+y^2\le 4\ \wedge\ x\ge 0\ \wedge\ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$$



e) $$\iint_T \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}T$$

$$T=\left\{(x;y)\mid x^2+y^2\le 2^2\ \wedge\ x;y\ge 0\right\}$$



2. Határozza meg az alábbi improprius integrálok értékét!

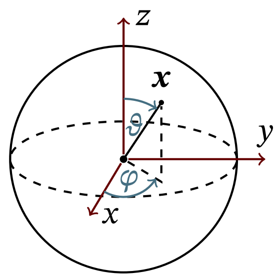
a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

b) $$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg a gömb térfogatát egy hármas-integrál segítségével:

$$V=\iiint_V \mathrm{d}V$$

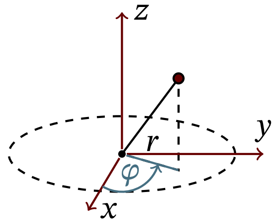
$$V=\left\{(x;y;z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$$



4. Adja meg az alábbi integrál értékét, ha V az $r = 1$ sugarú, $z = 0$ és $z = 2$ síkok által határolt z-tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú henger a tér első térnyolcadában elhelyezkedő része!

$$\iiint_V z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}V$$

$$V = \left\{(x;y;z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 2 \ \wedge \ x;y \geq 0\right\}$$



5. Határozza meg az $f(x;y;z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ függvény egységgömbön vett integrálját!

6. Határozza meg az $\boldsymbol{r}(t)$ vezérgörbéjű $\boldsymbol{v}$ irányvektorú hengerefelületet!

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ 5t \\ 3t - 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7. Adja meg a 2 sugarú, z tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú, origó központú körhenger felületének egyenletét!

8. Adja meg azon tórusz felületének egyenletét, amelyet az xz síkban elhelyezkedő, $(x;z) = (5;0)$ középpontú, $r = 3$ sugarú kör z tengely körül való forgatásával kapunk!