definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Kalkulus BMETE94BG01 7

Matematika G1

Differenciálás I

Utoljára frissítve: 2024. október 19.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Differenciálhányados**] Ha létezik és véges a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték, akkor azt az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának, vagy az a pontbeli deriváltjának mondjuk.

Jelölése:

$$f'(a) \quad vagy \quad f(a)x.$$

[style=note, nobreak=true,] A differenciálhányados létezésének **szükséges feltétel**e, hogy az f függvény **folytonos** legyen az a pontban.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Fontosabb függvények és deriváltjaik**:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$1x$	$\log_a x$	$1x \ln a$	$\sqrt[n]{x}$	$x^{1n-1}n$

[style=note, nobreak=true,] A konstans függvény deriváltja zérus.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Trigonometrikus függvények és deriváltjaik**:

[ultra thick, scale=.85] [gray, thick] (-2.75,0)–(3,0); [gray, thick] (0,-2.75)–(0,3); (0,0) circle [radius=2.5]; [primaryColor] (0,0)–(40:4); [draw=secondaryColor] (40:2.5) – (40:2.5 |- 0,0) coordinate (t) node[left, pos=.7] $\sin x$; [draw=secondaryColor] (t) – (0,0) node[below, midway] $\cos x$; [draw=secondaryColor] (0:2.5) – ++(0,2.08) coordinate (t) node[right, midway] $\tan x$; [draw=secondaryColor] (90:2.5) – ++(3,0) coordinate (t) node[above, midway] $\cot x$;

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$1\sqrt{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-1\sqrt{1-x^2}$
$\tan x$	$1\cos^2 x$	$\arctan x$	$11+x^2$
$\cot x$	$-1\sin^2 x$	x	$-11+x^2$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hiperbolikus függvények és deriváltjaik**:

[ultra thick, scale=.85] [gray, thick] (-2.75,0)–(2.75,0); [gray, thick] (0,-2.75)–(0,2.75); [gray, dashed, thick] (2.5, 2.5) – (-2.5, -2.5); [gray, dashed, thick] (2.5, -2.5) – (-2.5, 2.5); [domain=0:1.5] plot (cosh(), sinh()); [domain=0:1.5] plot (cosh(), -sinh()); [domain=0:1.5] plot (-cosh(), sinh()); [domain=0:1.5] plot (-cosh(), -sinh()); [draw=secondaryColor] (0, 1.175) – (1.543, 1.175) node [midway, above] $\cosh x$ – (1.543, 0) node [midway, right] $\sinh x$;

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	
$\sinh x$	$\cosh x$	x	$1\sqrt{x^2+1}$	
$\cosh x$	$\sinh x$	x	$1\sqrt{x^2-1}$	$(x>1)$
$\tanh x$	$1\cosh^2 x$	x	$11-x^2$	$(\lvert x\rvert<1)$
$\coth x$	$-1\sinh^2 x$	x	$11-x^2$	$(\lvert x\rvert>1)$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hiperbolikus azonosságok**: $9\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\sinh x = -\sin(x)$ $\cosh x = \cos(x)$

$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x-1}{2}$ $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x+1}{2}$

$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Műveleti szabályok**:

Konstans kiemelhető	(cf)' = cf'	1exc x(cf)) = c fx
Összeg- és különbségfüggvény	(f ±g)' = f' ±g'	x(f ±g) = fx ±gx
Szorzatfüggvény	(fg)' = f'g + fg'	x(fg) = fxg + fgx
Hányadosfüggvény	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$	x$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fxg - fgx}{g^2}$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Láncszabály**:

A láncszabály segítségével összetett függvényeket tudunk differenciálni. Az összefüggést három különböző jelölésmóddal is felírhatjuk:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad vagy \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad vagy \quad f(g)x = f(g)g \cdot gx$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Elemi átalakításos módszer**:

Előfordulhat olyan eset, hogy $(f(x))^{g(x)}$ alakú függvényeket kell differenciálni. Ebben az esetben az alábbi átalakítást alkalmazzuk:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Az $e^{g(x)\ln f(x)}$ függvény deriváltja a láncszabály segítségével: $\left((f(x))^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)'$
$= e^{g(x)\ln f(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$
$= (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$.

[style=note, nobreak=true,] Határozzuk meg az $\ln^x x$ függvény deriváltját!

Az $\ln^x x$ függvényt $e^{x\ln\ln x}$ alakra hozva, a láncszabály segítségével differenciálható: $(\ln^x x)' = \left(e^{x\ln\ln x}\right)'$
$= e^{x\ln\ln x}\left(\ln\ln x + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)$
$= \ln^x x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)$.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Geometriai alkalmazás**:

Az f függvény a pontbeli **érintő**jének **egyenlete** onnan következik, hogy $f' = m$, ahol m a meredekséget jelöli, az $y = m\cdot x + b$ egyenes egyenletéből levezetve:

$$f(a) = f'(a)\cdot a + b \quad \rightarrow \quad b = f(a) - f'(a)\cdot a,$$

és mivel (a; f(a)) ∈y = m ·x + b
↓
$y = f'(a)\cdot x + f(a) - f'(a)\cdot a$ Ebből átalakítva:

$$y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a).$$

Az $(a; f(a))$ pontbeli **normális egyenlete**: M = -1$\frac{}{f'(a), \quad s \quad (a;f(a))\in y=M\cdot x+B, y=\frac{-1}{f'(a)}\cdot(x-a)+f(a).}$

0.2 Feladatok

1. A differenciálhányados definíciója segítségével határozza meg az $f(x) = x^n$ függvény deriváltját az $x = x_0$ pontban!
2. Differenciálhatóak-e az alábbi függvények az $x_0 = 0$ pontban? 2

   a) $f(x) = \{ \sin^2 x, hax \leq 0$
   $x^2, hax > 0$

   b) $f(x) = \{ \arctan x, hax > 0$
   $0, hax = 0$
   $x^3 + x + 1, hax < 0$

3. Adjon példát olyan függvényekre, melyek $\forall x \in$ valós számra értelmezve vannak és teljesül, hogy ...

   a) f mindenhol folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható,

   b) f mindenhol differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos,

   c) f mindenhol differenciálható és f' is folytonos,

   d) f mindenhol differenciálható, de f' az $x_0 = 0$ pontban nem az.

4. Mutassa meg, hogy az alábbi függvényre igaz, hogy bár differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, viszont létezik az x_0 tetszőlegesen kis környezetében olyan pont, ahol nem differenciálható.
$$f(x) = \{ x^2 \left|\sin 1x\right|, hax \neq 00, hax = 0$$

5. Differenciálja az alábbi függvényeket!

   a) $f(x) = (6x^7 + 7x^4 + 2x^2)^5 + \sin^2 x + \cos^2 x$

   b) $g(x) = \ln x \cdot e^x + x^2 \cot x + x^{-1/3}$

   c) $h(x) = \dfrac{(3x + x^2) \cdot \sinh x \cdot \arctan x}{(1 + \cos x) \cdot \pi}$

   d) $i(x) = \sqrt[3]{\ln \cos^2 x^4}$

   e) $j(x) = \ln \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{e^{2x}}}$

   f) $k(x) = x^x$

   g) $l(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$

6. Határozza meg az alábbi függvények n-edik deriváltját! 2

a) $f(x) = x^m$

b) $g(x) = \sin x$

7. Írja fel az $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{x} - 32x^2$ függvény $x_0 = 1$ pontban lévő érintő egyenesének egyenletét! Adja meg az érintőre merőleges egyenes egyenletét is!

8. Határozza meg azon pontok halmazát, melyekben az $x^2 + y^2 = 25$ kör érintője párhuzamos a $3x - 4y + 7 = 0$ egyenessel.