

## 6

# Integrálátlakító tételek II

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. október 06.

## 6.1. Elméleti áttekintő

### Definíció 6.1 : Térfogat

Legyen  $\Omega : D \rightarrow \mathcal{V}$  paraméterezett tértartomány, ahol  $r; s; t \in D$  a tértartomány paramétere,  $\Omega(D) = \mathcal{V}$  a tértartomány képe,  $dV = \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt$ . Ekkor a térfogat:

$$\text{Vol } \mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} dV = \iiint_D |\det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t))| dr ds dt.$$

### Definíció 6.2 : Térfogati integrál

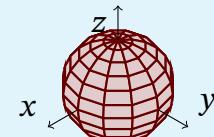
Legyen  $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező,  $\Omega : D \rightarrow \mathcal{V}$  paraméterezett tértartomány, ahol  $r; s; t \in D$  a tértartomány paramétere,  $\Omega(D) = \mathcal{V}$  a tértartomány képe,  $dV = \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt$ . Ekkor a  $\varphi$  skalármező térfogaton vett integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{r}) dV = \iiint_D \varphi(\Omega(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt.$$

### Tértartományok paraméterezése

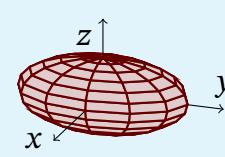
- Gömb:**  $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \sin s \cos t \\ r \sin s \sin t \\ r \cos s \end{bmatrix}$

$r \in [0; R]$
$s \in [0; \pi]$
$t \in [0, 2\pi]$



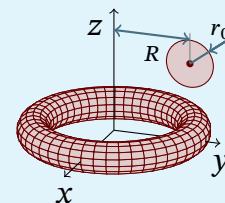
- Ellipszoid:**  $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} a r \sin s \cos t \\ b r \sin s \sin t \\ c r \cos s \end{bmatrix}$

$r \in [0; 1]$
$s \in [0; \pi]$
$t \in [0, 2\pi]$



- Tórusz:**  $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} (R + r \cos s) \cos t \\ (R + r \cos s) \sin t \\ r \sin s \end{bmatrix}$

$r \in [0; r_0]$
$s \in [0; 2\pi]$
$t \in [0, 2\pi]$



### Tétel 6.1 : Gauss-Osztogradszkij-tétel

Legyen  $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ , irányított, parametrikus tétartomány. Legyen továbbá  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a  $\partial\mathcal{V} = S$  az  $\Omega$  peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Ha  $\mathbf{v}$  vektorpotenciálos, akkor az integrál értéke zérus, hiszen  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ .

Integrálja a  $\mathbf{v}(r) = (x^2yz)\hat{\mathbf{i}} + (xy^2z)\hat{\mathbf{j}} + (2xyz^2)\hat{\mathbf{k}}$  vektormezőt az első térfolycadban lévő egységkocka felületén kifele mutató irányítással!

Határozzuk meg a  $\mathbf{v}$  vektormező divergenciáját:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial x^2yz}{\partial x} + \frac{\partial xy^2z}{\partial y} + \frac{\partial 2xyz^2}{\partial z} = 8xyz.$$

A Gauss-Osztogradszkij-tétel alapján:

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 8xyz dz dy dx = 1.$$

### Gauss-Osztogradszkij-tétel Maxwell I. és II. egyenletében

A Gauss-Osztogradszkij-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. Az első két egyenlet az elektromos és mágneses tér forrásosságát írja le:

$$(I) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{elektromos tér forrásos},$$

$$(II) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \text{mágneses tér forrásmentes},$$

ahol  $\mathbf{E}$  az elektromos tér,  $\mathbf{B}$  a mágneses tér,  $\rho$  az elektromos töltéssűrűség,  $\epsilon_0$  az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Gauss-Osztogradszkij-tétel segítségével:

$$(I) \Rightarrow \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV,$$

$$(II) \Rightarrow \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{B}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0.$$

Az első egyenlet azt mondja ki, hogy zárt felületen áthaladó elektromos tér fluxusa arányos az elektromos töltéssűrűség térfogati integráljával. A második egyenlet pedig azt jelenti, hogy a mágneses tér fluxusa zárt felületen zérus, a mágneses tér forrásmentes.

**Tétel 6.2 : Green-tétel asszimetrikus alakja**

Legyenek  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszeresen folytonos skalármezők,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  parametrizált, irányított tértartomány,  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \langle \operatorname{grad} \psi; \operatorname{grad} \varphi \rangle dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \rangle.$$

$\psi = 1$  választásával visszanyerjük a Gauss-Osztogradszkij-tételt:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \underbrace{\operatorname{grad} \varphi}_{\mathbf{v}} dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \underbrace{\left\langle \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \right\rangle}_{\mathbf{v}}.$$

Tekintsünk egy  $R = 1$  m sugarú tömör alumínium gömböt, amelynek stacionárius hőmérséklet-eloszlása  $\varphi(\mathbf{r}) = T_0(1 - \mathbf{r}^2)$  függvény írja le, ahol  $T_0 = 10$  K a gömb belső hőmérséklete. Határozza meg a gömb felületén kifelé irányuló összes  $\dot{Q}$  hőáramot, ha a hőfluxus sűrűsége  $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} \varphi$ , ahol  $\lambda = 205 \text{ W}/(\text{m K})$  az alumínium hővezetési tényezője, és

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{q}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Használjuk a Green-tétel asszimetrikus alakját  $\psi = -\lambda$  állandó választással:

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle -\lambda \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \rangle = - \iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \left\langle \underbrace{\operatorname{grad} \lambda}_{=0}; \operatorname{grad} \varphi \right\rangle dV = -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV.$$

Számítsuk ki a térfogat belsejében a  $\Delta \varphi$  értékét:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -6T_0.$$

A hőáram összesen:

$$\dot{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{-\lambda(-6T_0)}_{=\text{const}} dV = -\lambda(-6T_0) \frac{4\pi R^3}{3} = 8\pi\lambda T_0 R^3 \approx 5,15 \cdot 10^4 \text{ W}.$$

**Tétel 6.3 : Green-tétel szimmetrikus alakja**

Legyenek  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszeresen folytonos skalármezők,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  parametrizált, irányított tértartomány,  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi; d\mathbf{S} \rangle$$

## 6.2. Feladatok

1. Vezesse le az  $R$  sugarú gömb térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a  $\varphi(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$  skalármező térfogati integrálját a gömbön! A tértartomány ajánlott paraméterezése:

$$\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \sin s \cos t \\ r \sin s \sin t \\ r \cos s \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r \in [0; R] \\ s \in [0; \pi] \\ t \in [0; 2\pi] \end{array}$$

2. Vezesse le az  $R$  sugarú,  $h$  magasságú henger térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a  $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$  skalármező térfogati integrálját a hengerben! A tértartomány ajánlott paraméterezése:

$$\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \cos s \\ r \sin s \\ t \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r \in [0; R] \\ s \in [0; 2\pi] \\ t \in [0; h] \end{array}$$

3. Legyen  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y \sin x) \hat{\mathbf{i}} + (z^2 \cos y - \cos x) \hat{\mathbf{j}} + (v_3) \hat{\mathbf{k}}$ . Határozza meg  $v_3$ -at, ha tudjuk, hogy  $\mathbf{v}$  tetszőleges zárt felületen vett felületi integrálja zérus!

4. Legyen  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ . Adja meg a vektormező alábbi zárt felületeken vett felületi integráljait:

- a) az  $R = 2$  sugarú gömb felületén befelé mutató irányítással,
- b) az  $x^2 + y^2 = 4$  hengerfelületen, amelyet a  $z = -1$  és  $z = 1$  síkok zárnak le, kifelé mutató irányítással,
- c) a  $z = x^2 + y^2$  forgásparaboloid és a  $z = 4$  sík által határolt test felületén kifelé mutató irányítással.

5. Egy fotonikus chipeket hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségesztővel ( $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ ) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m, az ellipszoid egyenlete pedig:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

6. Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara  $R = 0,02$  m, A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmér-séklemező jó közelítéssel

$$\varphi(\mathbf{r}) = T_c - \alpha \mathbf{r}^2, \quad \alpha = 1,3 \cdot 10^5 \text{ K/m}^2.$$

Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha

$$q_{\text{hő}} = - \iint_{\partial V} \langle \lambda \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \rangle, \quad \lambda = 0,2 \text{ W/(m K)}.$$