3
MO

Görbék, görbementi integrál

Matematika G3 – Vektoranalízis
Utoljára frissítve: 2025. szeptember 22.

3.1. Görbék ívhossza

a) $\boldsymbol{\gamma}_1(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sqrt{6}t^2/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;2]$

$$L = \int_0^2 \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_1(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \sqrt{1^2 + (\sqrt{6}t)^2 + (3t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^2 1 + 3t^2\,\mathrm{d}t = \left[t + t^3\right]_0^2 = 10$$

b) $\boldsymbol{\gamma}_2(t) = (t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0;1]$

$$L = \int_0^1 \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{u_1}^{u_2} \cosh u\sqrt{1 + \sinh^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_{u_1}^{u_2} \cosh^2 u\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \cosh 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{\operatorname{arsinh} t}{2} + \frac{t\sqrt{t^2+1}}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1{,}1478$$

c) $\boldsymbol{\gamma}_3(t) = (e^t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (e^t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (e^t)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;2\pi]$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_3(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t) + e^{2t}(\sin t + \cos t) + e^{4t}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{3}e^t\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{3}e^t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1) \approx 925{,}7667$$

d) $\boldsymbol{\gamma}_4(t) = (t - \sin t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (1 - \cos t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0;2\pi]$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_4(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8$$

3.2. Ívhossz szerinti paraméterezés

Adja meg a $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t+3)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + ((2\sqrt{2}/3)t^{3/2})\,\hat{\boldsymbol{k}}$ görbe egységsebességű paraméterezését!

A görbe sebességvektora, és ennek abszolóz értéke:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{2t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = \sqrt{1 + 2t + t^2} = |1 + t|.$$

Az ívhossz szerinti integrál:

$$L(t) = \int_0^t |1 + \tau|\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t (1 + \tau)\, \mathrm{d}\tau = t + \frac{t^2}{2}.$$

Ennek inverze:

$$t(L) = -1 + \sqrt{1 + 2L}.$$

Az egységsebességű paraméterezés:

$$\boldsymbol{\gamma}_s(L) = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1 + 2L} + 3 \\ (-1 + \sqrt{1 + 2L})^2/2 \\ (2\sqrt{2}/3)(-1 + \sqrt{1 + 2L})^{3/2} \end{bmatrix}$$

3.3. Skalármezők görbe menti skalárértékű integrálja

a) $\varphi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{1 + 4x^2 + 16yz}, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;1]$

$$\int_\gamma \varphi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}s = \int_0^1 \varphi(\boldsymbol{\gamma}(t))\, \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6}\sqrt{1^2 + (2t)^2 + (4t^3)^2}\, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 1 + 4t^2 + 16t^6\, \mathrm{d}t = \left[t + \frac{4}{3}t^3 + \frac{16}{7}t^7\right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} = \frac{97}{21}$$

b) $\psi(\boldsymbol{r}) = 2x,$ a $(3;0)$ és $(0;4)$ pontokat összekötő szakasz mentén

A szakasz paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 - 3 \\ 4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3t \\ 4t \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = 5.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_\gamma \psi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}s = \int_0^1 \psi(\boldsymbol{\gamma}(t))\, \|\boldsymbol{\gamma}\|\, \mathrm{d}t = \int_0^1 2(3 - 3t) \cdot 5\, \mathrm{d}t = 30\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 15.$$

c) $\chi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2,$ első síknegyedbeli egységköríven, pozitív irányítással

A görbe paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = 1.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_\gamma \chi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} \chi(\boldsymbol{\gamma}(t))\,\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

d) $\omega(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$, $\quad r = 2$ sugarú, origó középpontú, pozitív irányítású körön

A görbe paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2 sint \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = 2.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_\gamma \omega(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \omega(\boldsymbol{\gamma}(t))\,\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + 4\sin^2 t)\cdot 2\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 8\,\mathrm{d}t = 16\pi.$$

3.4. Vektormezők görbe menti skalárértékű integrálja

a) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (y+z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x+z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x+y)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\;\boldsymbol{\gamma}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\;t \in [0;1]$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle &= \int_0^1 \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^2+t^3 \\ t+t^3 \\ t+t^2 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t^2 + t^3 + 2t^2 + 2t^4 + 3t^3 + 3t^4)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (3t^2 + 4t^3 + 5t^4)\,\mathrm{d}t = \left[t^3 + t^4 + t^5\right]_0^1 = 3\end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (-yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2+y^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\;\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (2t)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\;t \in [0;2]$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle &= \int_0^2 \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \begin{bmatrix} -2t\sin t \\ 2t\cos t \\ \cos^2 t + \sin^2 t \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 2t(\sin^2 t + \cos^2 t) + 2(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 2t + 2\,\mathrm{d}t = \left[t^2 + 2t\right]_0^2 = 8\end{aligned}$$

c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = (y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\;$ az $(1;0)$ pontból a $(0;2)$ pontba

- Az egyenes szakasz mentén:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 2t \\ 1-t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 (-2t + 2 - 2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2 - 4t\,\mathrm{d}t = \left[2t - 2t^2\right]_0^1 = 0$$

- Az ellipszis mentén:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;\pi/2], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}r(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} 2\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix} \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

- A gradiens-tételt felhasználva: a $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ vektormező potenciálfüggvénye:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = xy, \quad \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}).$$

A gradiens-tétel szerint a görbementi integrál értéke csak a kezdő- és végponttól függ, ezért a két pontot összekötő tetszőleges görbe mentén az integrál értéke:

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(0;2) - \varphi(1;0) = 0 - 0 = 0.$$

3.5. Vektormező görbementi vektorértékű integrálja

Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2 - x^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (2yz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (-x^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $t \in [0;1]$ görbe menti vektorértékű integrálját!

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^4 - t^2 \\ 2t^5 \\ -t^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} 6t^7 + 2t^3 \\ -t^2 - 3t^6 + 3t^4 \\ -2t^3 \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \cdots = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -17/105 \\ -1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$