7 Összefoglalás

Matematika G3 – Többváltozós analízis
Utoljára frissítve: 2025. október 20.

7.1. Gradiens

Adja meg a $\varphi(\boldsymbol{r}) = 2x^2y + xy^2z + 3xz^2$ skalármező gradiensét a $P(-3; -2; 1)$ pontban!

A gradiens paraméteresen:

$$\operatorname{grad}\varphi = \begin{bmatrix} \partial_x\varphi \\ \partial_y\varphi \\ \partial_z\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4xy + y^2z + 3z^2 \\ 2x^2 + 2xyz \\ xy^2 + 6xz \end{bmatrix}.$$

A $P(-3; -2; 1)$ pontban:

$$\operatorname{grad}\varphi(-3; -2; 1) = \begin{bmatrix} 4\cdot(-3)\cdot(-2) + (-2)^2\cdot 1 + 3\cdot 1^2 \\ 2\cdot(-3)^2 + 2\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot 1 \\ (-3)\cdot(-2)^2 + 6\cdot(-3)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + 4 + 3 \\ 18 + 12 \\ -12 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 30 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

7.2. Divergencia, rotáció

Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (xy^2 - z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (yz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (xy + 2z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a $P(-1; 2; -1)$ pontban!

A divergencia paraméteresen:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = y^2 + z + 2.$$

A $P(-1; 2; -1)$ pontban:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}(-1; 2; -1) = (2)^2 + (-1) + 2 = 4 - 1 + 2 = 5.$$

A rotáció paraméteresen:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ -1 - y \\ -2xy \end{bmatrix}.$$

A $P(-1; 2; -1)$ pontban:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(-1; 2; -1) = \begin{bmatrix} (-1) - 2 \\ -1 - 2 \\ -2\cdot(-1)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

7.3. Skalárpotenciál

Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2)\,\hat{\boldsymbol{i}} + (2xy + e^{3z})\,\hat{\boldsymbol{j}} + (3ye^{3z})\,\hat{\boldsymbol{k}}$ egy olyan φ skalárpotenciálját, melyre $\varphi(\boldsymbol{0}) = 0$.

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \int_0^x v_x(\xi; y; z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y v_y(0;\eta;z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z v_z(0;0;\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x y^2\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y e^{3z}\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z 0\,\mathrm{d}\zeta = xy^2 + ye^{3z}.\end{aligned}$$

7.4. Skalármező vonalintegrálja

Legyen $\boldsymbol{\gamma}(t) = x(t)\cdot\hat{\hat{\boldsymbol{i}}} + y(t)\cdot\hat{\hat{\boldsymbol{j}}}$ a $(2;1) \to (6;4)$ egyenes szakasz paraméterezése. Adja meg $x(t)$ és $y(t)$ függvényeket, ha a paramétertartomány $t \in [0;1]$. Számítsa ki a $\varphi(x;y) = 3x - 4y$ skalármező $\boldsymbol{\gamma}$ görbe menti integrálját!

A paraméterezés:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4t \\ 1+3t \end{bmatrix}$$

A sebességvektor, és ennek normája:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

A skalármező átparaméterezve:

$$\varphi(\boldsymbol{\gamma}(t)) = 3(2+4t) - 4(1+3t) = 6 + 12t - 4 - 12t = 2.$$

A vonalintegrál:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \varphi(\boldsymbol{\gamma}(t))\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2\cdot 5\,\mathrm{d}t = 10.$$

7.5. Vektormező vonalintegrálja

Adott az $\boldsymbol{F}(x;y) = x^2 \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{i}}} - xy \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{j}}}$ erőmező. Számítsa ki az erőmező munkáját, az origó középpontú, $r = 1$ sugarú első síknegyedben lévő körív mentén, ha a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú! Mit mondhatunk el, ha a bejárási irányt megfordítjuk?

A kör paraméterezése:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0;\pi/2].$$

A sebességvektor:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezve:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ -\cos t \sin t \end{bmatrix}.$$

A vonalintegrál:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ -\cos t \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos^2 t \sin t - \cos^2 t \sin t\right) \mathrm{d}t = -2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= -2\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = -2\left(0 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ha a bejárási irányt megfordítjuk, akkor az integrál előjele is megfordul, vagyis az eredmény $2/3$ lesz.

7.6. Skalármező felületi integrálja

Számítsa ki a $\varphi(x; y; z) = 2x$ skalármező egységgömbömbön vett felületi integrálját! Segítség: $\boldsymbol{\varrho}(s; t) = (\sin s \cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sin s \sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\cos s)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\mathrm{d}S = \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$.

A felület paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} s \in [0; \pi] \\ t \in [0; 2\pi] \end{array}.$$

A skalármező átparaméterezve:

$$\varphi(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) = 2 \sin s \cos t.$$

A felületi integrál:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin s \cos t \cdot \sin s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t \int_0^{\pi} \sin^2 s\,\mathrm{d}s = 2 \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.\end{aligned}$$

7.7. Vektormező felületi integrálja

Számítsa ki a $\boldsymbol{v}$ vektormező ϱ felületen vett fluxusát, ha

$$\boldsymbol{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} xy \\ 2x+y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} s+2t \\ -t \\ s^2+3t \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} s \in [0;3] \\ t \in [0;1] \end{matrix}.$$

A felület normálvektora:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \varrho}{\partial s} \times \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ 4s-3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezve:

$$\boldsymbol{v}(\varrho(s;t)) = \begin{bmatrix} (s+2t)(-t) \\ 2(s+2t)+(-t) \\ s^2+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -st-2t^2 \\ 2s+3t \\ s^2+3t \end{bmatrix}.$$

A felületi integrál:

$$\iint_S \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_0^1 \int_0^3 \boldsymbol{v}(\varrho(s;t)) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^3 \begin{bmatrix} -st-2t^2 \\ 2s+3t \\ s^2+3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2s \\ 4s-3 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \int_0^3 7s^2 - 6s + 12st - 2s^2t - 4st^2 - 12t \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \cdots = 30.$$

7.8. Gradiens tétel

Számítsa ki a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (2xy + e^{3z})\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (3ye^{3z})\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $(0;1;1) \to (0;-1;1)$ szakaszon vett vonalmenti integrálját!

A potenciálfüggvény:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = xy^2 + ye^{3z}.$$

A vonalintegrál:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(0;-1;1) - \varphi(0;1;1) = \left(0 \cdot (-1)^2 + (-1) \cdot e^3\right) - \left(0 \cdot 1^2 + 1 \cdot e^3\right) = -2e^3.$$

7.9. Stokes-tétel

Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (z-y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x-z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (y-x)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt az alábbi zárt görbén:

1. Az origóból először egy egyenes szakasz mentén eljutunk az $(1;0;0)$ pontba.

2. Ezután egy origó középpontú körív mentén az $(-1; 0; 0)$ pontba jutunk. (A körív síkja legyen az xy sík, és a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú.)
3. Végül egy egyenes szakasz mentén visszatérünk az origóba.

A görbe egy félkört határol, melynek paraméteretetése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s;t) = \begin{bmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} s \in [0;1] \\ t \in [0;\pi] \end{matrix} .$$

A felület normálvektora:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s\sin t \\ s\cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s\cos^2 t + s\sin^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix}.$$

A vektormező rotációja:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_0^\pi \int_0^1 \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \int_0^1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi \int_0^1 2s \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left[s^2\right]_0^1 \mathrm{d}t = \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}t = [t]_0^\pi = \pi.$$

7.10. Gauss-Osztogradszkij-tétel

Határozza meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező azon zárt felületen vett felületi integrálját, melyet az $x = y^2 + z^2$ forgásparaboloid $z > 0$ része, a $z = 0$ és az $x = 4$ síkok határolnak.

A tértartomány paraméterezése:

$$\boldsymbol{\Omega}(r;s;t) = \begin{bmatrix} s^2 \\ r\,s\cos t \\ r\,s\sin t \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} r \in [0;1] \\ s \in [0;2] \\ t \in [0;\pi] \end{matrix} .$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 2s & 0 \\ s\cos t & r\cos t & -rs\sin t \\ s\sin t & r\sin t & rs\cos t \end{bmatrix}$$

Ennek determinánsának abszolút értéke:

$$|\det \mathbf{D\Omega}| = 2rs^3.$$

A vektormező diverzenciája:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned}\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} 3 \,\mathrm{d}V = \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^1 3 \cdot 2rs^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\ &= 6 \int_0^{\pi} \mathrm{d}t \int_0^2 s^3 \,\mathrm{d}s \int_0^1 r \,\mathrm{d}r = 6 \cdot \pi \cdot \left[\frac{s^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 6 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12\pi.\end{aligned}$$