

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q) + (1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Lineáris Algebra BMETE94BG02 2

calc, matrix, patterns, patterns.meta

# Matematika G2

## Mátrixok II

Utoljára frissítve: 2025. február 17.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

**A determináns és a lineáris függetlenség kapcsolata:**

Definíció szerint a determináns értéke pontosan akkor zérus, ha a mátrix soraiból képzett sorvektorok, vagy oszlopaiból képzett oszlopvektorok lineárisan függők.

Ha a determináns értéke nem zérus, akkor a vektorok lineárisan függetlenek.

Egy  $3 \times 3$ -as mátrix esetén például:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & a_{21} & v & a_{22} & w & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ha  $u$ ,  $v$  és  $w$  lineárisan függetlenek, akkor  $\det A \neq 0$ .

Korábban 3 vektor lineáris függetlenségét a vegyesszorzat segítségével vizsgáltuk.  $3 \times 3$ -as mátrixok esetén a vegyesszorzat értéke megegyezik a vektorokból alkotott mátrix determinánsával.

**Sarrus-szabály:**

$3 \times 3$ -as mátrixok determinánsát a Sarrus-szabály segítségével könnyedén meghatározhatjuk. A szabály nevét Pierre Frédéric Sarrus francia matematikusról kapta.

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & \\ & d & e & f & \\ a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & g & h \end{array}$$

;

[red!40!gray, ultra thick, opacity=.5] (sarrus-1-1.center) – (sarrus-3-3.center)  
(sarrus-1-2.center) – (sarrus-3-4.center) (sarrus-1-3.center) – (sarrus-3-5.center) ;

[blue!40!gray, ultra thick, opacity=.5] (sarrus-3-1.center) – (sarrus-1-3.center)  
(sarrus-3-2.center) – (sarrus-1-4.center) (sarrus-3-3.center) – (sarrus-1-5.center) ;

[black, thick] (sarrus-1-1.north west) – (sarrus-3-1.south west) (sarrus-1-3.north east) –  
(sarrus-3-3.south east) ;

in 1,2,3 [above=-2.0mm, red!40!gray] at (sarrus-1-1.north) +; [below=-1.5mm,  
blue!40!gray] at (sarrus-3-1.south) –;

[] at (5,.25)  $\det A = +aei + bfg + cdh$ ; [] at (5,-.25)  $- gec - hfa - idb$ ;

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 1: Mátrix rangja** ] A mátrix rangjának nevezzük az oszlopvektorai közül a lineárisan függetlenek maximális számát.

[ style=theorem, nobreak=true, frametitle= white **Tétel 1: Mátrixok rangszámának tétele** ] Egy mátrix rangja megegyezik maximális el nem tűnő aldeteminánsának rendjével.

[ style=note, nobreak=true, ] A mátrix rangja elemi mátrix átalakítások során nem változik:

- tetszőleges sorát vagy oszlopát egy 0-tól különböző számmal megszorozzuk,
- tetszőleges sorát vagy oszlopát felcseréljük,
- tetszőleges sorához vagy oszlopához egy másik tetszőleges sorát vagy oszlopát adjuk.

[ style=note, nobreak=true, ] Ha egy kvadratikus (négyzetes) mátrix determinánsa nem zérus, akkor rangja maximális.

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n} \wedge \det A \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = n$$

[ style=note, nobreak=true, ] Egy  $m \times n$ -es mátrix rangja nem lehet nagyobb, mint az  $m$  és az  $n$  közül a kisebbik érték. Ha a mátrix rangja maximális, akkor az  $m$  és az  $n$  közül a kisebbik érték a rang.

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n} \Rightarrow \text{rang } A \leq \min\{m; n\}$$

[ style=note, nobreak=true, ] Csak a nullmátrixnak lehet 0 rangja.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

321

213 mátrix rangját a definíció segítségével!

Vizsgáljuk meg, hogy oszlopvektorai lineárisan függetlenek-e, vagyis határozzuk meg a mátrix determinánsát:

$$\det A = 123321213 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -12.$$

Mivel a determináns értéke nem zérus, az  $A$  mátrix rangja maximális, azaz  $A = 3$ .

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az  $A = 123$

321

213 mátrix rangját a tétel segítségével!

$A$  mátrix rangja a legnagyobb el nem tűnő aldetemináns rendje:  $\det A_1 = 1 \rightarrow$

$$\det A_2 = 12$$

$$\det A_2 = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4,$$

$$\det A_3 = 123$$

321

$\det A_3 = \dots = -12$ . Mivel a legnagyobb el nem tűnő aldetemináns rendje 3, ezért az  $A$  mátrix rangja 3.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az  $A = 123$

321

213 mátrix rangját elemi átalakítások segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (-3S_1)$$

$(-2S_1)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \div (-4)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad (-2S_2)$$

$(+3S_2)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\div 3$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (+S_3)$$

$(-2S_3)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 2: Reguláris és szinguláris mátrix** ] Egy kvadratikus mátrixot **regulárisnak** mondunk, ha determinánsa nem zérus.

Ha a kvadratikus mátrix determinánsa 0, **szinguláris** mátrixról beszélünk.

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 3: Mátrix inverze** ] Az  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  mátrix inverzét az  $A^{-1}$  jelöli, és az a mátrix, melyre  $A \cdot A^{-1} =$  teljesül.

[ style=note, nobreak=true, ] Egy szinguláris mátrixnak nem létezik inverze.

[ style=blueBox, nobreak=true, ] Reguláris mátrix inverze egyértelmű. Ha  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , akkor

$$A^{-1} := \frac{A}{\det A}.$$

Egy  $2 \times 2$ -es mátrix adjungáltja:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[ style=example, nobreak=true ] Határozzuk meg az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  mátrix inverzét!

A mátrix determinánsa:

$$\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

A mátrix adjungáltja:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezek alapján az  $A$  mátrix inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] Egy  $3 \times 3$ -as mátrix adjungáltja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

[ style=note, nobreak=true, ]  $3 \times 3$ -as mátrix adjungáltjának felírásához érdemes először a transzponáltját felírni, például:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Az adjungált  $i$ -edik sorában és  $j$ -edik oszlopában elhelyezkező  $\alpha_{ij}$  elemét a letakarás módszer segítségével határozhatjuk meg.

Az adjungált első sorának elemei:

$$\begin{aligned}
& [\text{ampersand replacement}=\&] \\
& [matrixofmathnodes, columnsep = 2mm,](m)^+a_{11}\&^-a_{21}\&^+a_{31} \\
& \quad \quad \quad -a_{12}\&^+a_{22}\&^-a_{32} \\
& \quad \quad \quad +a_{13}\&^-a_{23}\&^+a_{33} \\
& \quad \quad \quad ;
\end{aligned}$$

[primaryColor, line width=5mm, opacity=.5] (m-1-1.west) – (m-1-3.east) ;  
[primaryColor, line width=8mm, opacity=.5] (m-1-1.north) – (m-3-1.south) ;

[black, thick] (m-1-1.north west) – (m-3-1.south west) (m-1-3.north east) –  
(m-3-3.south east) ;

$$\begin{aligned}
& \text{at } (0,-2.25) \alpha_{11} = +a_{22}a_{32} \\
& \quad \quad \quad a_{23}a_{33};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\text{xshift}=5\text{cm}] [matrixofmathnodes, columnsep = 2mm,](m)^+a_{11}\&^-a_{21}\&^+a_{31} \\
& \quad \quad \quad -a_{12}\&^+a_{22}\&^-a_{32} \\
& \quad \quad \quad +a_{13}\&^-a_{23}\&^+a_{33} \\
& \quad \quad \quad ;
\end{aligned}$$

[secondaryColor, line width=5mm, opacity=.5] (m-1-1.west) – (m-1-3.east) ;  
[secondaryColor, line width=8mm, opacity=.5] (m-1-2.north) – (m-3-2.south) ;

[black, thick] (m-1-1.north west) – (m-3-1.south west) (m-1-3.north east) –  
(m-3-3.south east) ;

$$\text{at } (0,-2.25) \alpha_{12} = -a_{12}a_{32}$$

$$a_{13}a_{33};$$

$$[\text{xshift}=10\text{cm}] [matrixofmathnodes, columnsep = 2mm,](m)^+a_{11}\&^-a_{21}\&^+a_{31}-a_{12}\&^+a_{22}\&^-a_{32}+a_{13}\&^-a_{23}\&^+a_{33}$$

[primaryColor, line width=5mm, opacity=.5] (m-1-1.west) – (m-1-3.east) ; [primary-  
Color, line width=8mm, opacity=.5] (m-1-3.north) – (m-3-3.south) ;

[black, thick] (m-1-1.north west) – (m-3-1.south west) (m-1-3.north east) – (m-3-3.south  
east) ;

$$\begin{aligned}
& \text{at } (0,-2.25) \alpha_{13} = +a_{12}a_{22} \\
& \quad \quad \quad a_{13}a_{23};
\end{aligned}$$

A többi elem hasonló módszerrel számolható.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az  $A = 123$

345

568

mátrix inverzét!

A mátrix determinánása:

$$\det A = 1 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 \cdot 5 \cdot 1 - 8 \cdot 2 \cdot 3 = -2.$$

A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 13 & 52 & 46 & 35 & 8 \end{pmatrix}$$

A mátrix adjungáltja:

$$A = +4658 - 2638 + 2435 - 3558 + 1538 - 1335 + 3546 - 1526 + 1324 = 22 - 21 - 74 - 24 - 2.$$

A mátrix inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot 22 - 21 - 74 - 24 - 2 = -1 - 11 - 1/27/2 - 21 - 21.$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Inverz meghatározása Gauss-Jordan eliminációval:**

Egy  $A$  reguláris mátrix inverzés Gauss-Jordan eliminációval is meghatározhatjuk. A módszer során az  $(A|I)$  mátrixot sorműveletek segítségével olyan módon alakítjuk át, hogy ahol eredetileg  $A$  állt, ott az egységmátrix jelenjen meg. Az átalakított mátrix másik felében az  $A^{-1}$  mátrix fog szerepelni.

[style=example, nobreak=true] Határozzuk meg az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverzét!

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (-3S_1)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \div (-2)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (-2S_2)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

## 0.2 Feladatok

1. Egy síkon vannak-e az  $A(2; 3; -4)$ ,  $B(3; -1; -6)$ ,  $C(-1; 5; 2)$  és  $D(2; 1; -4)$  pontok?
2. Számolja ki az alábbi mátrixok determinánsát Sarrus-szabállyal!

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 & -5 & 6 & -2 & 7 & 9 & -8 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

3. Adja meg az alábbi mátrixok rangját!  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Vizsgálja az  $A$  mátrix rangját  $x$  függvényében!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 7 & 1 & 7 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Milyen  $k$  érték esetén lesz invertálható az alábbi mátrix?

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 & 2 & k & -1 \end{pmatrix}$$

7. Határozza meg az ismeretleneket az alábbi mátrixegyenletben!

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 & -3 & z & 7 & y & 0 & 6 \end{pmatrix} = -148w3$$

8. Adottak az  $A$ ,  $B$  és  $C$  mátrixok. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX + C = 2BCX$$

9. Számítsa ki az alábbi, komplex elemű mátrix rangját!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & 1 & + & 2 & i & 3 & i & 3 & - & i & 4 & i & - & 3 & - & 1 & + & 4 & i \end{pmatrix}$$