

6

Integrálátalakító tételek

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 07.

6.1. Elméleti áttekintő

Tétel 6.1 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{C} \subseteq U$, $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ folytonos görbe, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{p}$, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

Körintegrál jelölése:

Ha γ zárt görbe, akkor a $\varphi(\mathbf{r})$ skalármező egy γ görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi(\mathbf{r}) ds.$$

A Gradiens-tételből következik, hogy skalárpotenciális vektormező zárt görbe mentén vett körintegrálja zérus.

Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\hat{\mathbf{i}} + (x+z)\hat{\mathbf{j}} + (x+y)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt a $z = 0$ síkon lévő, origó középpontú, $r = 3$ sugarú kör mentén!

Vizsgáljuk meg, hogy a vektormező skalárpotenciális-e:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x(x+z) - \partial_y(y+z) \\ \partial_y(x+y) - \partial_z(x+z) \\ \partial_z(y+z) - \partial_x(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Mivel a vektormező skalárpotenciális, ezért létezik olyan skalármező, melynek gradiense maga a \mathbf{v} vektormező. Az integrál értéke tehát csak a kezdő- és végpontoktól függ, melyek jelen esetben megegyeznek, vagyis az integrál értéke zérus:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = 0.$$

Tétel 6.2 : Stokes-tétel

Legyen $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ a φ peremét indukált, jobbkézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle.$$

Ha \mathbf{v} skalárpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$.

Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y)\hat{\mathbf{i}} + (x)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt a $P_1(0; 1; 0)$, $P_2(2; 0; 0)$ és $P_3(0; 0; 0)$ által meghatározott háromszög mentén!

Határozzuk meg a \mathbf{v} vektormező rotációját:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{0}; d\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Stokes-tétel Maxwell III. és IV. egyenletében

A Stokes-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. A harmadik és negyedik egyenlet a mágneses tér és az elektromos tér közötti kapcsolatot írja le:

$$\begin{aligned} (III) \quad &\Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} &&\Rightarrow \quad \text{elektromos tér – mágneses tér változása,} \\ (IV) \quad &\Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} &&\Rightarrow \quad \text{mágneses tér – elektromos tér változása,} \end{aligned}$$

ahol \mathbf{E} az elektromos tér, \mathbf{B} a mágneses tér, \mathbf{j} az áram sűrűség, μ_0 a mágneses permeabilitás és ε_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Stokes-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} (III) \quad &\Rightarrow \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{r} \rangle = - \iint_{\mathcal{S}} \langle \dot{\mathbf{B}}; d\mathbf{S} \rangle, \\ (IV) \quad &\Rightarrow \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{B}; d\mathbf{r} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}; d\mathbf{S} \rangle. \end{aligned}$$

A III. egyenlet azt mondja ki, hogy változó mágneses tér maga körül balkézszabály szerint elektromos teret indukál, míg a IV. egyenlet azt jelenti, hogy az elektromos tér változása jobbkézszabály szerint mágneses teret indukál.

Tétel 6.3 : Gauss-Osztogradszkij-tétel

Legyen $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, irányított, parametrizált tértartomány. Legyen továbbá $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ az Ω peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Ha \mathbf{v} vektorpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$.

Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2yz)\hat{\mathbf{i}} + (xy^2z)\hat{\mathbf{j}} + (2xyz^2)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt az első tényolcadban lévő egységkocka felületén kifelé mutató irányítással!

Határozzuk meg a \mathbf{v} vektormező divergenciáját:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial x^2yz}{\partial x} + \frac{\partial xy^2z}{\partial y} + \frac{\partial 2xyz^2}{\partial z} = 8xyz.$$

A Gauss-Osztogradszkij-tétel alapján:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 8xyz \, dz \, dy \, dx = 1.$$

Gauss-Osztogradszkij-tétel Maxwell I. és II. egyenletében

A Gauss-Osztogradszkij-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. Az első két egyenlet az elektromos és mágneses tér forrásosságát írja le:

$$(I) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{elektromos tér forrásos,}$$

$$(II) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \text{mágneses tér forrásmentes,}$$

ahol \mathbf{E} az elektromos tér, \mathbf{B} a mágneses tér, ρ az elektromos töltéssűrűség, ϵ_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Gauss-Osztogradszkij-tétel segítségével:

$$(I) \Rightarrow \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV,$$

$$(II) \Rightarrow \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{B}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0.$$

Az első egyenlet azt mondja ki, hogy zárt felületen áthaladó elektromos tér fluxusa arányos az elektromos töltéssűrűség térfogati integráljával. A második egyenlet pedig azt jelenti, hogy a mágneses tér fluxusa zárt felületen zérus, a mágneses tér forrásmentes.

Tétel 6.4 : Green-tétel asszimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \langle \text{grad } \psi; \text{grad } \varphi \rangle dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle.$$

$\psi = 1$ választásával visszanyerjük a Gauss-Osztogradszkij-tételt:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \underbrace{\text{grad } \varphi}_{\mathbf{v}} dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \left\langle \underbrace{\text{grad } \varphi}_{\mathbf{v}}; d\mathbf{S} \right\rangle.$$

Tekintsünk egy $R = 1$ m sugarú tömör alumínium gömböt, amelynek stacionárius hőmérséklet-eloszlása $\varphi(\mathbf{r}) = T_0(1 - r^2)$ függvény írja le, ahol $T_0 = 10$ K a gömb belső hőmérséklete. Határozza meg a gömb felületén kifelé irányuló összes \dot{Q} hőáramot, ha a hőfluxus sűrűsége $\mathbf{q} = -\lambda \text{ grad } \varphi$, ahol $\lambda = 205$ W/(m K) az alumínium hővezetési tényezője, és

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{q}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Használjuk a Green-tétel asszimmetrikus alakját $\psi = -\lambda$ állandó választással:

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle -\lambda \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle = - \iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \underbrace{\langle \text{grad } \lambda; \text{grad } \varphi \rangle}_{=0} dV = -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV.$$

Számítsuk ki a térfogat belsejében a $\Delta \varphi$ értékét:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -6T_0.$$

A hőáram összesen:

$$\dot{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{-\lambda(-6T_0)}_{=\text{const}} dV = -\lambda(-6T_0) \frac{4\pi R^3}{3} = 8\pi\lambda T_0 R^3 \approx 5,15 \cdot 10^4 \text{ W}.$$

Tétel 6.5 : Green-tétel szimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \text{ grad } \varphi - \varphi \text{ grad } \psi; d\mathbf{S} \rangle$$

6.2. Feladatok

1. Egy automata raktárrendszer ferromágneses manipulátora egy előre számított mágneses potenciálmezőben mozog. A számított Joule-potenciál a munkatérben

$$\varphi(\mathbf{r}) = 2x^2y + 3yz.$$

A csípőkaron lévő, $Q = 1$ C ekvivalens töltéssel modellezett végfogót a vezérlőnek az

$$A(0; 0; 0) \rightarrow B(2; 1; 3)$$

pontok között kell mozgatnia. Mennyi munkát végez a mágneses tér a végfogón, és miért nem kell törődnünk az útvonal pontos alakjával? ($\mathbf{F} = -Q \text{ grad } \varphi$, a munka az erő pálya menti integrálja)

2. Egy mágneses rendszer vezérlője egy

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (y \sin x) \hat{\mathbf{i}} + (z^2 \cos y - \cos x) \hat{\mathbf{j}} + (b_3) \hat{\mathbf{k}}$$

vektormezővel modellezett mágneses teret hoz létre. Határozza meg b_3 értékét, ha

- a) \mathbf{B} bármely zárt görbe menti cirkulációja zérus,
- b) \mathbf{B} bármely zárt felület menti fluxusa zérus.

3. Egy $R = 1$ sugarú, kör keresztmetszetű, z tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy + z) \hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z) \hat{\mathbf{j}} + (y - x) \hat{\mathbf{k}}$$

vektormező írja le. Adja meg a $z = 1$ síkban lévő keresztmetszet menti cirkulációt! (A cirkuláció a vektormező zárt görbe menti integrálja.)

4. Jelölje \mathcal{S} az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ egyenleű forgáshiperboloid $z = -1$ és $z = 1$ síkok közötti részét. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2) \hat{\mathbf{i}} + (y^3) \hat{\mathbf{j}} + (z^4) \hat{\mathbf{k}}$ vektormező \mathcal{S} peremén vett integrálját!
5. Egy fotonikus chipet hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségelosztással ($\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m, az ellipszoid egyenlete pedig:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

6. Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara $R = 0,02$ m, A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmérséklet-mező jó közelítéssel

$$\varphi(\mathbf{r}) = T_c - \alpha r^2, \quad \alpha = 1,3 \cdot 10^5 \text{ K/m}^2.$$

Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha

$$q_{h\phi} = -\lambda \oint_{\partial V} \langle \text{grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle, \quad \lambda = 0,2 \text{ W/(m K)}.$$