

11

Differenciálás I

Matematika G2 – Többszörös analízis

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

11.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 11.1: Iránymenti derivált

Legyen $I \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és legyen adva egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az f függvény \mathbf{a} pontbeli \mathbf{v} irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük.

Definíció 11.2: Gradiens

Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Az f függvény $\mathbf{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ pontbeli gradiense:

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)^\top$$

A gyakorlatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Számítsuk ki az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény $\mathbf{v}(3; 4)$ irányú deriváltját az $(1; 2)$ pontban!

A gradiens az előző példában számolt parciális deriváltak alapján:

$$\text{grad } f(1; 2) = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált számításához még szükségünk van az \mathbf{v} irányú egységvektorra:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(1; 2) = \text{grad } f(1; 2) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 40 \cdot 3/5 - 133 \cdot 4/5 = -82,4.$$

Kétváltozós függvény esetén az gyakran az irányvektort az x -tengellyel bezárt szög (α) segítségével adjuk meg. Ekkor az egységvektor:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Magasabb rendű iránymenti deriváltak:

Az elsőrendű iránymenti derivált:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}} = \text{grad } f \cdot \hat{\mathbf{e}}.$$

A másodrendű iránymenti derivált:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \hat{\mathbf{e}}^2} = \text{grad} \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}} = \text{grad} (\text{grad } f \cdot \hat{\mathbf{e}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}.$$

Adott irányú érintő egyenes kétváltozós függvények esetén:

A $z = f(x; y)$ függvény segítségével a 3D-s térben egy felületet adhatunk meg. Ezen felület egy $P_0(x_0; y_0)$ pontbeli, $\hat{\mathbf{e}}(e_x; e_y)$ irányú érintő egyenese:

$$\frac{x - x_0}{e_x} = \frac{y - y_0}{e_y} = \frac{z - z_0}{\partial_{\hat{\mathbf{e}}} f(x_0; y_0)}, \quad \text{ahol } z_0 = f(x_0; y_0).$$

Amennyiben az irány egybeesik az x -tengellyel, akkor:

$$x - x_0 = \frac{z - z_0}{\partial_x f(x_0; y_0)} \Rightarrow \partial_x f(x_0; y_0)(x - x_0) = z - z_0.$$

Amennyiben az irány egybeesik az y -tengellyel, akkor:

$$y - y_0 = \frac{z - z_0}{\partial_y f(x_0; y_0)} \Rightarrow \partial_y f(x_0; y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

Érintősík megadása kétváltozós függvény esetében:

Az érintősík független az iránytól, azt csak a felületből kimutató normális, vagyis a gradiens adja meg. Az \mathbf{x}_0 pontban felírt normálvektor:

$$\mathbf{n}_{\text{be}} = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ -1 \end{bmatrix}_{|x=x_0} \quad \mathbf{n}_{\text{ki}} = \begin{bmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{bmatrix}_{|x=x_0},$$

ahol \mathbf{n}_{be} a befele, \mathbf{n}_{ki} pedig a kifelé mutató normálvektor. Ezek alapján az érintősík egyenlete:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_0} (y - y_0) = z - z_0.$$

Implicit függvény parciális deriváltjai:

Amennyiben a változók közötti kapcsolat nem írható fel explicit ($z = f(x; y)$) módon, akkor az implicit függvénymegadási módszerhez tudunk fordulni. Ez többváltozós esetben $F(x; y; z) = 0$ alakban tudjuk megtenni.

Ilyen esetben a z -től függő tagokat összetett függvényként kell kezelnünk, a parciális deriváltak pedig a következők:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Teljes differenciál:

Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény teljes differenciálja:

$$Df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Kétváltozós esetben:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Definíció 11.3: Jacobi-mátrix

Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezés. Ekkor $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, ahol $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_{k \times n}$. A \mathbf{J} mátrixot az \mathbf{f} függvény Jacobi-mátrixának nevezzük, melynek elemei:

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \text{grad}^\top f_1(\mathbf{a}) \\ \text{grad}^\top f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad}^\top f_k(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

11.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és irány-szög vagy irányvektor mentén!

a) $f(x; y) = x^3 - 3xy^2 + 4y^4$, $P_a(1; 1)$, $\alpha = 45^\circ$,

b) $g(x; y; z) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P_b(1; 0; 1)$, $\mathbf{v}_b = [3, 2, -5]^\top$.

2. Határozza meg azon pontok halmazát, amin nem létezik az $f(x; y) = \ln(x^2 + xy)$ függvény $\alpha = 150^\circ$ -os irányhoz tartozó iránymenti deriváltja!

3. Határozza meg az alábbi függvények első és második iránymenti deriváltjait az adott pontban és irányrányszög vagy irányvektor mentén!

a) $f(x; y) = 4x^4y + y^3x^2$, $P_a(1; 1)$, $\alpha = 45^\circ$,

b) $g(x; y; z) = \sqrt{14}xyz + \sqrt{14}x^2y^2z^2$, $P_b(1; 1; 1)$, $\mathbf{v}_b = [1; 1; 1]^\top$.

4. Határozza meg az $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2)$ függvény $P(0; 1)$ ponthoz és $\alpha = 60^\circ$ irányhoz tartozó érintőegyenésének egyenletét!

5. Határozza meg a $f(x; y) = \sin xy$ függvény érintősíkjának egyenletét a $P(\pi/3; 2)$ pontban!

6. Határozza meg azon pontok halmazát, ahol a $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$ felület érintősíkja párhuzamos a $2x - y + 5z - 25 = 0$ síkkal!

7. Határozza meg az $f(x; y) = \arctan xy$ függvény teljes differenciálját paraméteresen a $P_7(x_0; y_0)$ és a $Q_7(1; 2)$ pontban!

8. Határozza meg egy henger térfogat mérésének a relatív hibáját, ha ismert, hogy a sugár 1%-os és a magasság 2%-os hibával lett mérve!

9. Határozza meg az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény Jakobi mátrixát!

$$\mathbf{f}(x; y; z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z \sin x \\ z^2 + z \sin y \end{bmatrix}$$