

# 1 Vektoranalízis

---

## A fejezetben érintett témakörök

1.1	Ismétlés . . . . .	2
1.2	Alapfogalmak . . . . .	3
1.3	Lineáris leképezések . . . . .	5
1.4	Differenciáloperátorok . . . . .	7
1.5	Vonalmenti integrál . . . . .	11
1.6	Felületmenti integrál . . . . .	15
1.7	Integrálátalakító tételek . . . . .	17

## 1.1. Ismétlés

### Definíció 1.1.1 : Vektortér

Legyen  $V$  nemüres halmaz, és  $\circ, +$  két művelet,  $\mathbb{T}$  test. A  $(V; +, \circ)$  a  $\mathbb{T}$  test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1.  $(V; +)$  Abel-csoport,
2.  $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda \circ \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ (\mu \circ \mathbf{x})$ ,
3. ha  $\varepsilon$  a  $T$ -beli egységelem, akkor  $\forall \mathbf{x} \in V : \varepsilon \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ,
4. teljesül a disztributivitás:
  - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : \lambda \circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \circ \mathbf{x} + \lambda \circ \mathbf{y}$ ,
  - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda + \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ \mathbf{x} + \mu \circ \mathbf{x}$ .

### Definíció 1.1.2 : Lineáris leképezés

Legyenek  $V_1$  és  $V_2$  ugyanazon  $\mathbb{T}$  test feletti vektorterek. Legyen  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két  $V_1$ -beli vektor ( $\forall \mathbf{a}; \mathbf{b} \in V_1$ ) és  $\mathbb{T}$ -beli skalár ( $\lambda \in \mathbb{T}$ ) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \quad \sim \quad$  additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \varphi(\mathbf{a}) \quad \sim \quad$  homogén (skalár kiemelhető).

### Definíció 1.1.3 : Homomorfizmus és endomorfizmus

$$\text{Hom}(V_1; V_2) := \{ \varphi : V_1 \rightarrow V_2 \mid \varphi \text{ lineáris} \}$$

$$\text{End}(V) := \text{Hom}(V; V)$$

### Lineáris leképezések mátrixreprezentációja

Legyen  $V_1$  és  $V_2$  ugyanazon test feletti vektorterek,  $\dim(V_1) = n$  és  $\dim(V_2) = k$ . Ekkor a  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  leképezést reprezentáló mátrix  $n \times k$  dimenziós.

$(\text{Hom}(V_1; V_2); +; \lambda)$  és  $(\mathcal{M}_{k \times n}; +; \lambda)$  vektorterek izomorfok egymással.

### Definíció 1.1.4 : Skaláris szorzat

Legyen  $V$  egy  $\mathbb{R}$  feletti vektortér, és  $\langle ; \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyet skaláris szorzatnak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak:

1.  $\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}; \mathbf{x} \rangle$  minden  $\mathbf{x}; \mathbf{y} \in V$  esetén, (szimmetrikus)
2.  $\langle \lambda \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle$  minden  $\mathbf{x}; \mathbf{y} \in V$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén, (homogén)
3.  $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1; \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \rangle$  minden  $\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \in V$  esetén, (additív)
4.  $\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , egyenlőség akkor és csak akkor, ha  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . (nemnegatív)

A skaláris szorzás szimm. bilineáris forma, amely az Euklideszi térben értelmezve van.

## 1.2. Alapfogalmak

### Definíció 1.2.1 : Konvektor

Legyen  $V$  egy  $\mathbb{R}$  feletti vektortér.  $V^* := \text{Hom}(V; \mathbb{R})$  elemeit ( $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ ) lineáris funkcionáloknak, lineáris formáknak, vagy 1-formáknak nevezzük. Mivel  $\alpha$  lineáris leképezés, ezért

$$\alpha(av + bw) = a\alpha(v) + b\alpha(w) \text{ teljesül.}$$

### Definíció 1.2.2 : Duális tér

Legyen  $\alpha, \beta \in V^*$ ,  $v \in V$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . A fenti módon teljesülnek az alábbiak:

- $(\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v)$ ,
- $(a\alpha)(v) := a\alpha(v)$ .

Ekkor  $V^*$  vektorterré tehető,  $V$  vektortér duális terének nevezzük.

### Bázis jelölése

- $\{\hat{e}_1; \hat{e}_2; \dots; \hat{e}_n\}$  – ortonormált / standard bázis
- $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$  – tetszőleges bázis

### Einstein-féle konvenció

$\exists (r^1; r^2; \dots; r^n)$ , melyre teljesül, hogy

$$v = r^1 b_1 + r^2 b_2 + \dots + r^n b_n = \sum_{j=1}^n r^j b_j = r^j b_j$$

Vezessük be a következő 1-formát:  $\omega^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall v \in V : \omega^i(v) = r^i$  Ekkor  $v$  felírható az alábbi alakban:

$$v = \underbrace{\omega^1(v)}_{r^1} b_1 + \underbrace{\omega^2(v)}_{r^2} b_2 + \dots + \underbrace{\omega^n(v)}_{r^n} b_n$$

A fent definiált  $\omega^i : V \rightarrow \mathbb{R}$  1-formák ( $i \in 1; 2; \dots; n$ ) bázist alkotnak  $V^*$ -ban.

**Bizonyítás** (Egzsiztencia):

Legyen  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  1-forma:

$$\alpha(\omega^1(v) b_1 + \dots + \omega^n(v) b_n) = \omega^1(v) \alpha(b_1) + \dots + \omega^n(v) \alpha(b_n)$$

$$\alpha(v) = \sum_{j=1}^n \omega^j(v) \alpha(b_j)$$

$$\alpha = \underbrace{\alpha(b_1)}_{r_1} \omega^1 + \dots + \underbrace{\alpha(b_n)}_{r_n} \omega^n = \sum_{j=1}^n r_j \omega^j$$

$r_i$  nem speciális, tetszőleges 1-forma felírható így.

**Bizonyítás (Unicitás):**

Tegyük fel, hogy:

$$\begin{aligned}\alpha &= r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2 + \dots + r_n \omega^n, \\ \alpha &= s_1 \omega^1 + s_2 \omega^2 + \dots + s_n \omega^n.\end{aligned}$$



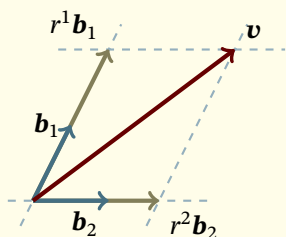
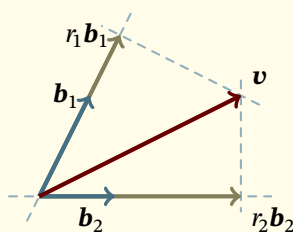
Vonjuk ki egymásból a 2 egyenletet:

$$\mathcal{O} = (r_1 - s_1)\omega^1 + (r_2 - s_2)\omega^2 + \dots + (r_n - s_n)\omega^n$$

Ekkor  $\mathcal{O}$  egy 1-forma, melynek bármely vektort a nullvektorba visz, azaz

$$\mathcal{O} : V \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{O}(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \Leftrightarrow \quad r_i = s_i \quad \forall i\text{-re.}$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát nem igaz a feltevés.

**Kovariáns és kontravariáns koordináták****Kovariáns koordináták****Kontravariáns koordináták**

$\mathbf{v} = r^1 \mathbf{b}_1 + r^2 \mathbf{b}_2$ , ahol  $(r^1; r^2)$  a  $\mathbf{v}$  vektor kontravariáns koordinátái a  $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2\}$  bázisban.  $r_1$  és  $r_2$  pedig  $\mathbf{v}$  kovariáns koordinátái, melyek a következőképpen számíthatók:

$$r_i = \frac{\langle \mathbf{v}; \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|} \cdot \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|} = \frac{\langle \mathbf{v}; \mathbf{b}_i \rangle}{\underbrace{\langle \mathbf{b}_i; \mathbf{b}_i \rangle}_{r_i}} \cdot \mathbf{b}_i$$

Kovariáns és kontravariáns koordináták ortonormált  $\{\hat{\mathbf{e}}_1; \hat{\mathbf{e}}_2; \dots; \hat{\mathbf{e}}_n\}$  bázisban megegyeznek.

**Bizonyítás:**

## 1.3. Lineáris leképezések

### Definíció 1.3.1 : Lineáris leképezés adjungáltja

Legyen  $(V; \langle \cdot; \cdot \rangle)$  Euklideszi tér,  $\varphi : V \rightarrow V$  lineáris leképezés. A  $\varphi^* : V \rightarrow V$  lineáris leképezést a  $\varphi$  leképezés adjungáltjának hívjuk, ha  $\forall \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \in V$ -re:

$$\langle \varphi(\mathbf{v}_1); \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1; \varphi^*(\mathbf{v}_2) \rangle$$

$(\varphi^*)^* = \varphi$  – Idempotencia

**Bizonyítás:**

$$\langle (\varphi^*)^*(\mathbf{v}_1); \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1; \varphi^*(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{v}_1); \mathbf{v}_2 \rangle.$$

### $\varphi^*$ mátrix reprezentációja

Reprezentálja  $\varphi$ -t  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi^*$ -ot pedig  $\mathbf{A}^*$ :

$$\langle \varphi(\mathbf{v}); \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}; \varphi^*(\mathbf{w}) \rangle$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{a_{11}}v_1w_1 + \boxed{a_{12}}v_2w_1 + \boxed{a_{21}}v_1w_2 + \boxed{a_{22}}v_2w_2 = \boxed{a_{11}^*}w_1v_1 + \boxed{a_{12}^*}w_2v_1 + \boxed{a_{21}^*}w_1v_2 + \boxed{a_{22}^*}w_2v_2$$

Megállapíthatjuk, hogy  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\top$ .

**!** Szimmetrikus leképezés adjungáltja önmaga.

### Leképezés felbontása

Legyen  $\varphi \in \text{End}(V)$ , ekkor  $\exists$  olyan  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{S}$  antiszimmetrikus és szimmetrikus leképezés, ahol  $\varphi = \mathcal{A} + \mathcal{S}$ , melyek az endomorfizmusok vektorterét 2 diszjunkt halmazra bontják:

$$\mathcal{A} := \frac{\varphi - \varphi^*}{2} \quad \text{és} \quad \mathcal{S} := \frac{\varphi + \varphi^*}{2}.$$

**!** **Bizonyítás** (Unicitás):

Tegyük fel hogy  $\varphi$  előáll  $\mathcal{A}_1 + \mathcal{S}_1$  és  $\mathcal{A}_2 + \mathcal{S}_2$  összegeként is. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, majd vegyük mindkét oldal adjungáltját!

$$\mathcal{O} = \varphi - \varphi = (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) + (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2) = \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{S}}$$

$$\mathcal{O}^* = \mathcal{O} = \overline{\mathcal{A}}^* + \overline{\mathcal{S}}^* = -\overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{S}}$$

Az előző két egyenletből következik, hogy  $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{S}}$ . Feltevésünk hamisnak bizonyult.

## Reguláris mátrix felbontása

Egy  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n \times n}$  mátrix felbontható szimmetrikus és ferdeszimmetrikus (antiszimmetrikus) részekre:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^T}{2}.$$

Ha mátrixunk  $3 \times 3$ -as:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} + \mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}}_{\text{ferdeszimmetrikus}}.$$

Általános esetben:

$$\dim \mathbf{A} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathbf{S} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Az antiszimmetrikus leképezések és a  $V$ -beli vektorok között tudunk egy-egyértelmű hozzárendelést találni:

$$\mathbf{A} \in \mathcal{A} \leftrightarrow \mathbf{v} \in V$$

Keressünk egy olyan  $\mathbf{v}$  vektort, melyre teljesül az alábbi egyenlet:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +a_{12}w_2 & +a_{13}w_3 \\ -a_{12}w_1 & +a_{23}w_3 \\ -a_{13}w_1 & -a_{23}w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2w_3 & -v_3w_2 \\ v_3w_1 & -v_1w_3 \\ v_1w_2 & -v_2w_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{bmatrix}$$

## Definíció 1.3.2 : Vektorinvariáns

Egy antiszimmetrikus lineáris transzformáció mindig leírható egy rögzített vektorral való keresztszorzással. Ez a vektor a leképezés vektorinvariánsa.

Csak ortonormált, Descartes-féle bázisban számítható az előbbi módszerrel egy leképezés vektorinvariánsa.

## Definíció 1.3.3 : Lineáris transzformáció nyoma

Egy lineáris transzformáció főátlójában lévő elemek összege minden koordinátarendszerben ugyanannyi, tehát a koordináta-transzformáció nem befolyásolja. Ezt nevezzük a lineáris leképezés nyomának. (trace / spur)

## 1.4. Differenciáloperátorok

Legyen  $\mathbf{f} : V \rightarrow V$  függvény ( $\dim V = n$ ), melynek vegyük a deriváltját:

$$\mathbf{f}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Df} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_n f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n & \partial_2 f_n & \dots & \partial_n f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad}^\top f_1 \\ \text{grad}^\top f_2 \\ \vdots \\ \text{grad}^\top f_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

Definiáljuk az alábbi fogalmakat:

- $\text{rot } \mathbf{f} := \mathbf{Df} - \mathbf{Df}^* - \text{rotáció}$ ,
- $\text{div } \mathbf{f} := \text{tr}(\mathbf{Df}) - \text{divergencia}$ .

$V = \mathbb{R}^3$  esetén:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 & \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 & 0 & \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3 \\ \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 & \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrix vektorinvariánsa:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times \mathbf{f}.$$

$\nabla$  - Nabla operátor (formális differenciáloperátor) – nem vektor, de aként viselkedik.

### Gradiens, divergencia és rotáció számítása

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi \\ \text{div } \mathbf{v} &= \langle \nabla; \mathbf{v} \rangle \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

### Differenciáloperátorok kombinálása

Nem értelmezhető:

$$\text{grad grad}, \quad \text{grad rot}, \quad \text{div div}, \quad \text{rot div}.$$

Laplace-operátor:

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

Tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektormező és  $\varphi$  skalármező esetén:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{v} &\equiv 0, \\ \text{rot grad } \varphi &\equiv \mathbf{0}. \end{aligned}$$

**Definíció 1.4.1 : Skalárpotenciálosság**

Egy  $\mathbf{v} : V \rightarrow V$  vektormező skalárpotenciális, ha létezik olyan  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező, hogy  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ .

**Definíció 1.4.2 : Vektorpotenciálosság**

Egy  $\mathbf{v} : V \rightarrow V$  vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan  $\mathbf{u} : V \rightarrow V$  vektormező, hogy  $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$ .

**Tétel 1.4.1**

Legyen  $\mathbf{v} : V \rightarrow V$  mindenhol értelmezett, legalább egyszer differenciálható vektormező. Ekkor:

- $\mathbf{v}$  skalárpotenciális  $\Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , hiszen  $\text{rot grad } \varphi \equiv \mathbf{0}$ ,
- $\mathbf{v}$  vektorpotenciális  $\Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0$ , hiszen  $\text{div rot } \mathbf{u} \equiv 0$ .

**Bizonyítás** ( $\Rightarrow$  könnyű,  $\Leftarrow$  nehéz):

Ha  $\mathbf{v}$  skalárpotenciális  $\Rightarrow \exists \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ , hogy  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , ekkor  $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi \equiv \mathbf{0}$

Ha  $\mathbf{v}$  vektorpotenciális  $\Rightarrow \exists \mathbf{u} : V \rightarrow V$ , hogy  $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$ , ekkor  $\text{div } \mathbf{v} = \text{div rot } \mathbf{u} \equiv 0$

$\Phi, \Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármezők,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormezők,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  pedig skalárok.

- Teljesül a linearitás:

$$\text{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi$$

$$\text{rot}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{div}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}$$

- Zérusság:

$$\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\text{grad}(\Phi \Psi) = \Phi \text{grad } \Psi + \Psi \text{grad } \Phi$$

$$\text{div}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{div } \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad } \Phi \rangle$$

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad } \Phi$$

- Egyéb szabályok:

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u} + (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u}$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}; \text{rot } \mathbf{v} \rangle$$

$$\text{grad}(\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle) = (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}$$



## 3-dimenziós Levi–Civita-szimbólum

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ha } (i; j; k) \text{ az } (1; 2; 3) \text{ páros permutációja} \\ -1 & \text{ha } (i; j; k) \text{ az } (1; 2; 3) \text{ páratlan permutációja} \\ 0 & \text{ha } i = j, \text{ vagy } j = k, \text{ vagy } k = i \end{cases}$$

Vektoriális szorzat esetében

$$(\mathbf{v})_i = (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_j y_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_{123} x_2 y_3 + \varepsilon_{132} x_3 y_2 \\ \varepsilon_{231} x_3 y_1 + \varepsilon_{213} x_1 y_3 \\ \varepsilon_{312} x_1 y_2 + \varepsilon_{321} x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

Minden koordinátában hat tag szerepelne, viszont:

1.  $\varepsilon_{223} = \varepsilon_{232} = \varepsilon_{323} = \varepsilon_{332} = 0$ ,
2.  $\varepsilon_{113} = \varepsilon_{131} = \varepsilon_{311} = \varepsilon_{311} = 0$ ,
3.  $\varepsilon_{112} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{221} = 0$ .

A nemzérus tagok pedig:

1.  $\varepsilon_{123} = +1, \varepsilon_{132} = -1$ ,
2.  $\varepsilon_{231} = +1, \varepsilon_{213} = -1$ ,
3.  $\varepsilon_{312} = +1, \varepsilon_{321} = -1$ .

## Linearitásos azonosságok bizonyítása

$$1. \quad \underline{\text{grad}(\lambda\Phi + \mu\Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi}$$

$$(\text{grad}(\lambda\Phi + \mu\Psi))_i = \partial_i(\lambda\Phi + \mu\Psi) = \lambda \partial_i \Phi + \mu \partial_i \Psi = (\lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi)_i.$$

$$2. \quad \underline{\text{rot}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}}$$

$$(\text{rot}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j(\lambda v_k + \mu w_k) = \lambda \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k + \mu \varepsilon_{ijk} \partial_j w_k = (\lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w})_i.$$

$$3. \quad \underline{\text{div}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}}$$

$$(\text{div}(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}))_i = \partial_i(\lambda v_i + \mu w_i) = \lambda \partial_i v_i + \mu \partial_i w_i = (\lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w})_i.$$

## Zérusságos azonosságok bizonyítása

$$1. \quad \underline{\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}}$$

$$(\text{rot grad } \Phi)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = -\varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_j \Phi = 0,$$

mert  $\partial_j \partial_k$  szimmetrikus,  $\varepsilon_{ijk}$  pedig antiszimmetrikus  $j, k$  indexekre.

$$2. \quad \underline{\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0}$$

$$(\text{div rot } \mathbf{v})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j v_k = -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i v_k = 0,$$

mert  $\partial_i \partial_j$  szimmetrikus,  $\varepsilon_{ijk}$  pedig antiszimmetrikus  $i, j$  indexekre.

**Deriválási szabályokhoz hasonló azonosságok bizonyítása**

1.  $\text{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \text{grad} \Psi + \Psi \text{grad} \Phi$

$$(\text{grad}(\Phi\Psi))_i = \partial_i(\Phi\Psi) = \Phi \partial_i \Psi + \Psi \partial_i \Phi = (\Phi \text{grad} \Psi + \Psi \text{grad} \Phi)_i.$$

2.  $\text{div}(\Phi\mathbf{v}) = \Phi \text{div} \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad} \Phi \rangle$

$$(\text{div}(\Phi\mathbf{v}))_i = \partial_i(\Phi v_i) = \Phi \partial_i v_i + \langle \mathbf{v}; \partial_i \text{grad} \Phi \rangle = (\Phi \text{div} \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad} \Phi \rangle)_i.$$

3.  $\text{rot}(\Phi\mathbf{v}) = \Phi \text{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad} \Phi$

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\Phi\mathbf{v}))_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j(\Phi v_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} (\Phi \partial_j v_k + v_k \partial_j \Phi) \\ &= \Phi \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k + \varepsilon_{ijk} v_k \partial_j \Phi \\ &= \Phi \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k - \varepsilon_{ijk} v_j \partial_k \Phi = (\Phi \text{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad} \Phi)_i. \end{aligned}$$

**Egyéb szabályok bizonyítása**

## 1.5. Vonalmenti integrál

### Definíció 1.5.1 : Reguláris görbe

Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  nem feltétlenül korlátos intervallum. Ekkor az  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$  immerziót reguláris görbének nevezzük.

### Definíció 1.5.2 : Pályasebesség, Ívhossz

A  $v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$  függvényt pályasebességnek hívjuk.

A pályasebesség  $I$  feletti integrálját a görbe ívhosszának nevezzük:

$$L(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_I ds.$$

Számítsuk ki a  $\gamma(t) = (t \cos t) \hat{i} + (t \sin t) \hat{j}, t \in [0; 1]$  görbe ívhosszát!

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \cosh u \sqrt{1 + \sinh^2 u} du = \int_0^1 \cosh^2 u du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \cosh 2u}{2} du \\ &= \left[ \frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4} \right]_{u_1}^{u_2} = \left[ \frac{\operatorname{arsinh} t}{2} + \frac{t\sqrt{t^2 + 1}}{2} \right]_0^1 = \frac{\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,1478 \end{aligned}$$

### Definíció 1.5.3 : Irányított görbe

Egy  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe irányított, ha adott egy rendezés ( $\leq$ ) a paraméterértékeken. Ekkor  $t_1 < t_2$  esetén  $\gamma(t_1)$  a görbe korábbi pontja,  $\gamma(t_2)$ -höz képest. Ha  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , akkor a görbe zárt.

#### Irányítottság szemléltetése

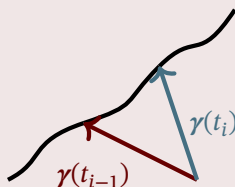


Pozitív irányítottságú görbe

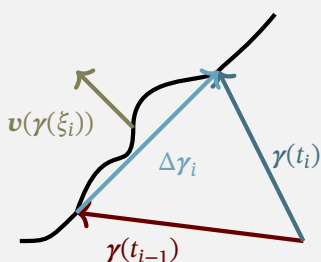


Negatív irányítottságú görbe

Ha létezik a  $\sum_i \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$  összeg supremuma, akkor a görbe rektifikálható.



#### Definíció 1.5.4 : Vonalmenti integrál



Ha a  $\sum_i \langle \mathbf{v}(\gamma(\xi_i)); \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle$

összegnek létezik a határértéke a görbe beosztásának minden határon túli finomítására nézve, akkor azt monjuk, hogy a  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormező integrálható az  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe mentén, és ezt a  $\mathbf{v}$  vektor  $\gamma$  görbe menti vonalintegráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int_c \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle$$

Belátható, hogy a görbe menti integrál létezéséhez elegendő, hogy a vektormező csak a görbe mentén van értelmezve, és ott szakaszonként folytonos.

#### Tétel 1.5.1

Ha  $\gamma$  egy görbe, melynek paraméteres egyenlete:  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \gamma(t)$ , akkor a  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormező  $\gamma$  görbén vett (skalárértékű) integrálja:

$$\int_c \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \int_I \langle \mathbf{v}(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

Legyen  $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t; t^2; t^3)$  görbe,  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y; y + z; z + x)$  vektormező. Számoljuk ki a görbe menti integrált!

$$\begin{aligned} \int_c \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t + t^2 \\ t^2 + t^3 \\ t^3 + t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (t + t^2) + 2(t^2 + t^3) + 3(t^3 + t) dt \\ &= \int_0^1 (6t + 6t^2 + 5t^3) dt = 6 \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{5t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{37}{2} \end{aligned}$$

Ha a görbe irányítását megváltoztatjuk, akkor az integrál értéke  $(-1)$ -szeresére változik.

### Tétel 1.5.2 : Gradiens-tétel

Legyen  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható skalármező,  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{C} \subseteq U$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$  folytonos görbe,  $\gamma(a) = \mathbf{p}$ ,  $\gamma(b) = \mathbf{q}$  pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); \mathbf{dr} \rangle = \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

**Bizonyítás:**

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); \mathbf{dr} \rangle = \int_a^b \langle \text{grad } \varphi(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d\varphi(\gamma(t))}{dt} dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

### Tétel 1.5.3 : Gradiens-tétel megfordítása

Ha  $\mathbf{v}$  egy olyan folytonosvektormező, hogy a vonalmenti integrál csak a kezdő- és végponttól függ, akkor  $\exists \varphi$ , skalármező, hogy  $\text{grad } \varphi = \mathbf{v}$ .

### Körintegrál jelölése

Ha  $\gamma$  zárt görbe, akkor a  $\mathbf{v}$  vektormező egy  $\gamma$  görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr} \rangle.$$

Ha a görbe menti integrál értéke független az úttól, akkor az integrál bármely zárt görbe mentén zérus.

**Bizonyítás:**

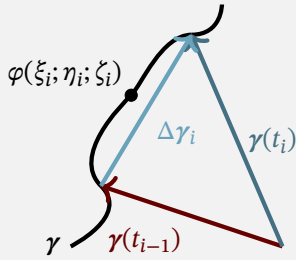
Legyen  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$  két görbe, melyek kezdő- és végpontjaik megegyeznek. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_1 \rangle = \int_{\mathcal{C}_2} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_2 \rangle.$$

Képezzük a  $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$  zárt görbét. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr} \rangle = \int_{\mathcal{C}_1} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_1 \rangle - \int_{\mathcal{C}_2} \langle \mathbf{v}; \mathbf{dr}_2 \rangle = 0.$$



**Definíció 1.5.5 : Skalármező görbe menti, ívhossz szerinti integrálja**

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma : I \rightarrow \mathcal{C}$$

Finomítsuk a végtelenségig a

$$\sum_i \varphi(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \|\Delta \mathbf{r}_i\|$$

összeget. Így a következő integrált kapjuk:

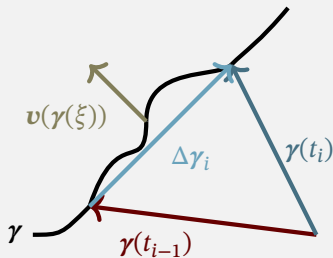
$$\int_{\mathcal{C}} \varphi \, ds.$$

Legyen  $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3, t \mapsto (t; t^2; t^4)$ . Adjuk meg a  $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{1 + 4x^2 + 16yz}$  skalármező  $\gamma$  görbe menti integrálját!

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varphi(\mathbf{r}) \, ds &= \int_0^1 \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6} \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (4t^3)^2} \, dt \\ &= \int_0^1 1 + 4t^2 + 16t^6 \, dt = \left[ t + \frac{4}{3}t^3 + \frac{16}{7}t^7 \right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} = \frac{97}{21} \end{aligned}$$

**Definíció 1.5.6 : Skalármező vektorértékű vonalintegrálja**

$$\int \varphi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \int \varphi(\mathbf{r}) \, dx \\ \int \varphi(\mathbf{r}) \, dy \\ \int \varphi(\mathbf{r}) \, dz \end{bmatrix}$$

**Definíció 1.5.7 : Vektormező vektorértékű vonalintegrálja**

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma : I \rightarrow \mathcal{C} \quad \xi_i \in [t_{i-1}; t_i]$$

Finomítsuk a végtelenségig a

$$\sum_i \mathbf{v}(\gamma(\xi_i)) \times \Delta \gamma_i$$

összeget. Így a következő integrált kapjuk:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t) \, dt$$

## 1.6. Felületmenti integrál

### Definíció 1.6.1 : Reguláris felület

Legyen  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Azt mondjuk, hogy az  $\varphi$  reguláris felület, ha  $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}$  ponthoz megadható olyan  $\mathbf{p}$ -t tartalmazó  $V \subset \mathbb{R}^3$  nyílt halmaz és  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \cap V$  leképezés, melyre teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi$  differenciálható homeomorfizmus,
- $\varphi$  immerzió (derivált leképezése injektív).

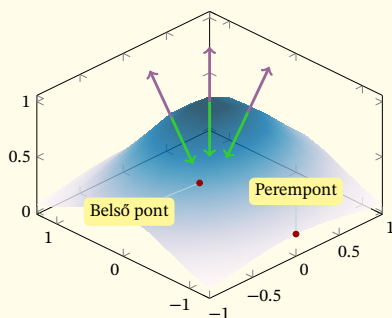
Ha ezek teljesülnek, akkor  $\varphi$ -t parametríciónak,  $V \cap \mathcal{S}$ -t koordinátakörnyezetnek nevezük.

### Definíció 1.6.2 : Elemi felület

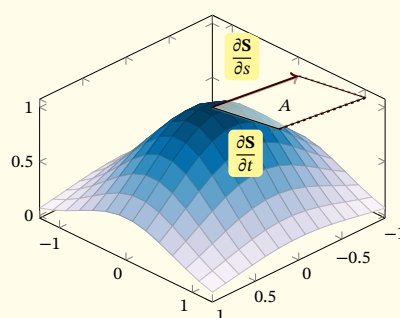
A  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$  elemi felület, ha  $\varphi$  legalább egyszer differenciálható és injektív.

$\partial([a; b] \times [a; b])$  a paramétertartomány pereme.

A felület irányítható, ha megadható rajta egy differenciálható egységvektormező.



Irányítás szemléltetése



Elemi felület

### Definíció 1.6.3 : Skalármező skalárértékű felületmenti integrálja

Legyen  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező,  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Ekkor finomítsuk minden határon túl a

$$\sum_i \varphi(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta S_i$$

összeget:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) dS.$$

Számítása:

$$\iint_U \varphi(\varphi(s; t)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| ds dt \rightarrow \text{ha a felület paraméterezve van,}$$

$$\iint_U \varphi(x; y; \Phi(x; y)) \sqrt{1 + (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2} dx dy \rightarrow \text{ha } z = \Phi(x; y) \text{ alakban van.}$$

Integráljuk a  $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$  skalármezőt az egységgömb  $z > 0$  részén!

Az egységgömb paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \quad s \in [0; \pi/2], \quad t \in [0; 2\pi], \quad \mathbf{n} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| = \sin s.$$

A skalármező átparaméterezése:

$$\varphi(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) = \sin^2 s \cos^2 t + \sin^2 s \sin^2 t = \sin^2 s.$$

Az integrál kiszámítása:

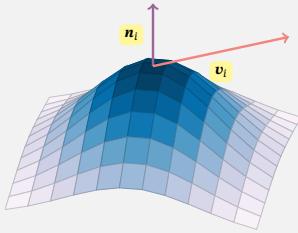
$$\begin{aligned} \int_S \varphi \, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 s \sin s \, dt \, ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 s) \sin s \, ds \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - u^2) \, du = 2\pi \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

#### Definíció 1.6.4 : Skalármező vektorértékű felületmenti integrálja

Felület implicit megadása esetén ( $z = \Phi(x; y)$ ):

$$\int_S \varphi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S} = \iint \varphi(x; y; \Phi(x; y)) \begin{bmatrix} \pm \partial_x \Phi \\ \pm \partial_y \Phi \\ \mp 1 \end{bmatrix} dx \, dy$$

#### Definíció 1.6.5 : Vektormező skalárértékű felületmenti integrálja



$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \boldsymbol{\varrho} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

Finomítsuk minden határon túl a  $\sum_i \langle \mathbf{v}_i; \mathbf{n}_i \rangle$  összeget:

$$\int_S \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle = \iint_U \left\langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)); \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| \right\rangle,$$

ahol  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} \, dS$ .

#### Definíció 1.6.6 : Vektormező vektorértékű felületmenti integrálja

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S} = \iint_U \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) \times \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) ds \, dt$$



## 1.7. Integrálátalakító tételek

### Tétel 1.7.1 : Stokes-tétel

Legyen  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$  a  $\varphi$  peremét indukált, jobbkézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle.$$

Ha  $\mathbf{v}$  skalárpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen  $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = 0$ .

### Definíció 1.7.1 : Elemi tértartomány

$\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  elemi tértartomány, ha legalább egyszer folytonosan differenciálható leképezés. Ekkor

$$\det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) = \left\| \frac{\partial \Omega(r; s; t)}{\partial r \partial s \partial t} \right\| \neq 0.$$

### Definíció 1.7.2 : Térfogat

Készítsünk egy olyan beleírt ( $c_i$ ) és körülírt ( $C_i$ ) kockarendszert, melyekre igaz, hogy  $c_i \cap c_j$  csak lap, él, vagy csúcs lehet. Ekkor fennáll, hogy:

$$\bigcup_i c_i \subset \mathcal{V} \subset \bigcup_j C_j.$$

Finomítsuk minden határon túl ezeket a kockarendszereket. Ha ezek közös határértékhez tartanak, akkor:

$$\text{Vol } \mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} dV = \iiint_{\mathcal{V}} |\det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t))| dr ds dt.$$

Pozitív az irányítás, ha  $\det \mathbf{D}\mathcal{V} > 0$ .

### Definíció 1.7.3 : Skalármező térfogaton vett skalárértékű integrálja

Legyen  $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  irányított, parametrizált, elemi tértartomány. Legyen továbbá  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos skalármező. Ekkor a  $\varphi$  térfogaton vett integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi dV = \iiint_D \varphi(\Omega(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt.$$

**Tétel 1.7.2 : Gauss-Osztogradszkij-tétel**

Legyen  $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ , irányított, parametrizált tértartomány. Legyen továbbá  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  az  $\Omega$  peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Ha  $\mathbf{v}$  vektorpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ .

**Tétel 1.7.3 : Green-tétel asszimmetrikus alakja**

Legyenek  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszeresen folytonos skalármezők,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  parametrizált, irányított tértartomány,  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \langle \operatorname{grad} \psi; \operatorname{grad} \varphi \rangle \, dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi; d\mathbf{S} \rangle.$$

**Tétel 1.7.4 : Green-tétel szimmetrikus alakja**

Legyenek  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszeresen folytonos skalármezők,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  parametrizált, irányított tértartomány,  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi \, dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi; d\mathbf{S} \rangle$$