

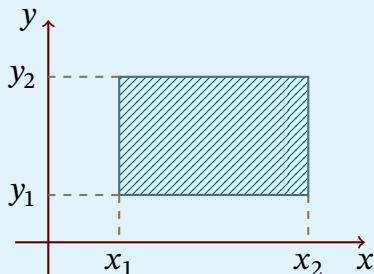
13**Integrálás I**

Matematika G2 – Többváltozós analízis

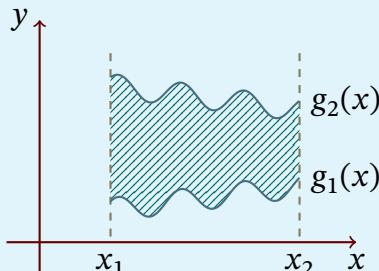
Utoljára frissítve: 2025. április 22.

13.1. Elméleti Áttekintő**Integrálás téglatartományon:**

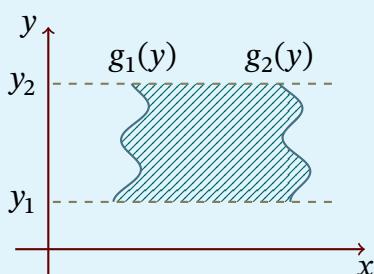
Téglatartomány esetén az integrálás sorrendje tetszőleges.



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x; y) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x; y) dx dy$$

Integrálás normáltartományon:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1^{-1}(y)}^{g_2^{-1}(y)} f(x; y) dx dy$$



$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x; y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1^{-1}(x)}^{g_2^{-1}(x)} f(x; y) dy dx$$

13.2. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvények integrálját a megadott téglalap tartományokon!

a) $f(x; y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 \quad 1 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 3$

b) $g(x; y) = xy \sin(x^2 + y^2) \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \quad 0 \leq y \leq \pi/2$

c) $h(x; y) = y \cos(2xy) \quad 1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq y \leq 3$

2. Határozza meg az alábbi hármasintergrált!

$$\int_1^2 \int_0^3 \int_0^1 z x \sqrt{x^2 + y} \, dx \, dy \, dz$$

3. Határozza meg az alábbi integrálokat, majd írja fel az integrációs határokot, ha először az x , majd a y változó szerint integrálnánk!

a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$

b) $\int_1^3 \int_0^{1/x} (2y + x + 2) \, dy \, dx$

4. Határozza meg az alábbi felületi integrálok értékét!

a) $\iint_T x^2 + y^2 \, dT$

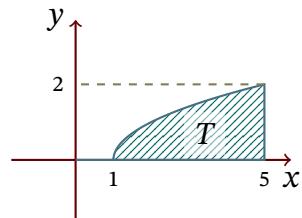
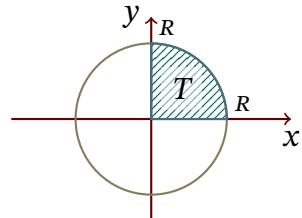
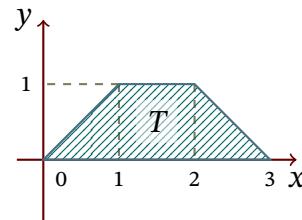
$$T = \{(x; y) \mid 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 3 - y\}$$

b) $\iint_T xy \, dT$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge x; y \geq 0\}$$

c) $\iint_T y e^{(x-1)^2} \, dT$

$$T = \{(x; y) \mid x \leq 1 + y^2 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 5\}$$



5. Adja meg az integrációs intervallumokat, ha az alábbi felületeken kell integrálni:

a) R sugarú körfelület,

b) ha az $x = 0$, $y = x^2$ és $y = 2 - x$ görbék által határolt felület!

6. Adja meg a $f(x; y) = xy$ függvény a $P_1(1; 1)$, $P_2(4; 5)$ és $P_3(4; 2)$ pontok által meghatározott háromszög terület fölötti integrálját!