

## 4

# Numerikus sorozatok I

Matematika G1 – Sorozatok

Utoljára frissítve: 2024. október 01.

## 4.1. Elméleti Áttekintő

### Definíció 4.1: Sorozat

A pozitív egész számok halmazán értelmezett  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt **valós számsorozatnak** hívjuk.

Az  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt **komplex számsorozatnak** nevezzük.

### Definíció 4.2: Konvergencia

Az  $(a_n)$  sorozatot konvergensnek mondjuk, ha  $\exists a \in \mathbb{R}$  valós szám, hogy  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists N(\varepsilon)$  küszöbszám, hogy ha  $n > N(\varepsilon)$ , akkor  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Jelölése:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ ahol } a \text{ a sorozat határértéke.}$$

### Definíció 4.3: Divergencia

Az  $(a_n)$  sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

### Definíció 4.4: Torlódási pont

Az  $(a_n)$  sorozatnak torlódási pontja van az  $a \in \mathbb{R}$  pontban, ha az  $a$  tetszőlegesen kicsiny környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

A sorozat határértéke egyben torlódási pont is, viszont egy torlódási pont nem feltétlenül határérték. Pl.:  $a_n = (-1)^n$  sorozatnak két torlódási pontja is van ( $-1$  és  $1$ ), viszont egyik sem határérték, hiszen a sorozat divergens.

### Definíció 4.5: Sorozat korlátossága

Az  $(a_n)$ -t **alulról korlátosnak** nevezzük, ha  $\forall n$  esetén  $a_n > k$ , vagyis értékkészlete alulról korlátos.

Az  $(a_n)$ -t **felülről korlátosnak** nevezzük, ha  $\forall n$  esetén  $a_n < K$ , vagyis értékkészlete felülről korlátos.

Az  $(a_n)$  sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

**Definíció 4.6: Sorozat monotonitása**

Az  $(a_n)$  sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha  $a_n \geq a_{n-1}$ ,
- monoton csökkenő, ha  $a_n \leq a_{n-1}$ ,
- szigorúan monoton növekvő, ha  $a_n > a_{n-1}$ ,
- szigorúan monoton csökkenő, ha  $a_n < a_{n-1}$ .

Konvergens sorozat mindig korlátos.

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

**Nevezetes határértékek:**

- $a^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens,} & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
- $a^n \cdot n^k \rightarrow 0$ , ha  $|a| < 1$  és  $k \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
- $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$
- $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \rightarrow e^r$

**Dominancia elv:**

$$\log_n a < \sqrt[n]{a} < \log_a n < \sqrt[n]{n} < n < n^a < a^n < n! < n^n$$

A dominancia elvet olyan esetekben érdemes használnunk, amikor egy

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}$$

alakú sorozat határértékét keressük, hiszen segítségével megállapíthatjuk, hogy a nevező vagy a számláló fog gyorsabban nőni.

**Tétel 4.1: Rendőrelv**

Tegyük fel, hogy  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  és  $(x_n)$  sorozatokra teljesül, hogy  $a_n \leq x_n \leq b_n : \forall n$ -re vagy  $n > N_0$ , továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, \text{ ekkor } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

**4.2. Feladatok**

1. A konvergencia definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e.

a)  $a_n = \left| \frac{n+1}{3n-8} \right|$

b)  $b_n = \frac{n \cdot (-1)^n - 1}{2n}$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

a)  $a_n = \frac{n^2 - 6n + 7}{n^2 + 12n + 49}$

b)  $b_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2}$

c)  $c_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

d)  $d_n = \frac{\sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{5n^6 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3}} + \frac{n!}{(n+1)! + 3^{2n}}$

e)  $e_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

f)  $f_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$

3. Igazolja a rendőrelv segítségével, hogy  $\frac{n}{3^n} \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

4. Határozza meg az alábbi határértékeket!

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n^2 - 30n - 21}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos n^3}{2n} - \frac{3n}{6n+1} \right)$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\ln n}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n+5}$

5. Bizonyítsa be, hogy bármely  $k \geq 0$  egész számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k.$$