

4

Lineáris leképezések I

Matematika G2 – Lineáris Algebra

Utoljára frissítve: 2025. május 4.

4.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 4.1: Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1 -beli vektor ($\forall \mathbf{a}; \mathbf{b} \in V_1$) és T -beli skalár ($\lambda \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$ \sim additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \varphi(\mathbf{a})$ \sim homogén (skalár kiemelhető).

Definíció 4.2: Leképezés magtere

Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker \varphi := \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V_1 \wedge \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

Definíció 4.3: Leképezés defektusa

A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $\text{def } \varphi$ -vel jelöljük.

Nem létezik olyan vektortér, melynek magtere az üreshalmaz (a nullvektor mindig benne van, mert a nullvektor képe mindig nullvektor).

Invertálható lineáris leképezés magtere a nullvektor.

Definíció 4.4: Lineáris leképezés rangja

Egy lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját. $\text{rg } \varphi = \dim \varphi(V_1)$.

Tétel 4.1: Rang-nullitás tétele

Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\text{rg } \varphi + \text{def } \varphi = \dim V_1.$$

Lineáris leképezések mátrixrepresentációja:

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = n$, valamint $\dim V_2 = k$. Legyen $\{\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n\}$ bázis V_1 -ben, és $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_k\}$ bázis V_2 -ben. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi(\mathbf{a}_i) = \alpha_{1i}\mathbf{b}_1 + \alpha_{2i}\mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_{ki}\mathbf{b}_k = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji}\mathbf{b}_j \Rightarrow \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}_{k \times n}.$$

Az \mathbf{A} mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $\mathbf{x} \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ az \mathbf{x} koordinátái, ekkor a képét az alábbi módon számíthatjuk:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi(\mathbf{a}_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

Definíció 4.5: Bázistranszformáció

Legyenek $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ és $\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisok V -ben. Ekkor a $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\} \rightarrow \{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázistranszformáció \mathbf{T} mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_1 &= t_{11}\mathbf{b}_1 + t_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{n1}\mathbf{b}_n \\ \hat{\mathbf{b}}_2 &= t_{12}\mathbf{b}_1 + t_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{n2}\mathbf{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_j &= t_{1j}\mathbf{b}_1 + t_{2j}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{nj}\mathbf{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_n &= t_{1n}\mathbf{b}_1 + t_{2n}\mathbf{b}_2 + \dots + t_{nn}\mathbf{b}_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

A \mathbf{T} bázistranszformációs mátrix segítségével a régi és új bázisban felírt vektorok koordinátái közötti kapcsolat mátrixosan:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}' \quad \text{és} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}.$$

Tétel 4.2: Lineáris leképezés mátrixa új bázisban

Legyen $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés, $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ és $\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisok V -ben. A φ $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa \mathbf{A} , a φ $\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\hat{\mathbf{A}}$. Jelölje \mathbf{T} a $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázisról a $\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

A \mathbf{A} és $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix hasonló.

Alap geometriai leképezések:

- **Tükrözés** valamely tengelyre:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

x-tengelyre tükrözés

$$\mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y-tengelyre tükrözés

$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z-tengelyre tükrözés

- **Vetítés** valamely tengelyre:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x-tengelyre vetítés

$$\mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y-tengelyre vetítés

$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z-tengelyre vetítés

- **Tükrözés** valamely síkra:

$$\mathbf{T}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

xy síkra tükrözés

$$\mathbf{T}_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yz síkra tükrözés

$$\mathbf{T}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

xz síkra tükrözés

- **Vetítés** valamely síkra:

$$\mathbf{T}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

xy síkra vetítés

$$\mathbf{T}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yz síkra vetítés

$$\mathbf{T}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

xz síkra vetítés

- λ -szoros **nyújtás** valamely irányban:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x irányba

$$\mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y irányba

$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

z irányba

- **Forgatás** $+\alpha$ szöggel:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \sim \text{x tengely körüli forgatás}$$

$$\mathbf{R}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \sim \text{y tengely körüli forgatás}$$

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \text{z tengely körüli forgatás}$$

Ha egymás után több transzformációt kell végrehajtani **A**, **B**, **C** sorrendben, akkor:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{CBA}\mathbf{x}.$$

Definíció 4.6: Ortogonális transzformáció

Az n dimenziós euklideszi tér $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformációját ortogonálisnak mondjuk, ha $\langle \mathcal{A}\mathbf{x}; \mathcal{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle$, minden $\mathbf{x}; \mathbf{y} \in V$ esetén.

Egy ortogonális transzformáció \mathbf{Q} mátrixának inverze megegyezik a transzponáltjával.

Amennyiben $\det \mathbf{Q} = 1$, akkor a transzformáció orientációtartó.

Amennyiben $\det \mathbf{Q} = -1$, akkor a transzformáció orientációváltó.

A két dimenziós térben való forgatás orientációtartó, hiszen

$$\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

4.2. Feladatok

1. Állapítsa meg, hogy az alábbi leképezések lineárisak-e?

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ 5xy \end{bmatrix} \qquad \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$$

2. Határozza meg a $P(5; -4; -1)$ pont koordinátáit az $\mathbf{a}_1(2; 1; 0)$, $\mathbf{a}_2(0; 2; 1)$ és $\mathbf{a}_3(1; 0; 2)$ vektorok által meghatározott bázisban!
3. Írja fel az $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ és a $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ ortonormált bázisok közti báziscsere mátrixát!
4. A harmadik feladatban meghatározott báziscsere mátrixát felhasználva oldja meg a második feladatot!
5. Írja fel a 2D Descartes koordinátarendszer α fokos elforgatásával nyert új koordinátarendszerbe mutató báziscsere mátrixát!
6. Adjuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az alábbi vektorba viszi át a bázisodat:

$$\mathbf{i} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} \mapsto \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Mi lesz a $P(1; 1; 1)$ pont képe?

7. Adja meg az első feladatban szereplő leképezések mátrixait!
8. Határozza meg az origón áthaladó $\mathbf{u}(a; b; c)$ normálisú ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) síkra vonatkozó tükrözés mátrixát!
9. Adott egy lineáris leképezés a szokásos $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ bázisban. Írja fel a leképezés mátrixát az $\{\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2\}$ bázisban, ha $\mathbf{f}_1(2; 1)$ és $\mathbf{f}_2(1; 1)$.
10. Adott két lineáris leképezés mátrixa \mathbf{A} és \mathbf{B} . Mit ad eredményül...

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{r}$, b) $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{r}$, c) $\mathbf{A}^2\mathbf{r}$, d) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$?

11. Egy φ leképezés mátrixa \mathbf{A} . Döntsük el, hogy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \text{a) } P(2; 0; 1) \in \ker \varphi, & \text{c) } \operatorname{rg} \varphi = ? \\ \text{b) } \text{mi } Q'(1; 4; 0) \text{ ősképe,} & \text{d) } \operatorname{def} \varphi = ? \end{array}$$

12. Mennyi a leképezés defektusa...

a) x tengelyre való vetítés esetén, b) yz síkra való vetítés esetén?

13. Írja fel annak a leképezésnek a mátrixát amely z körül α szöggel forgat, majd tükröz az xy síkra, végül x irányba 2-szeres, z irányba 3-szoros nagyítást végez!
14. Írja fel azt a leképezést, amely az $y = x$ és $z = 0$ egyenletrendszerű egyenesre tükröz!

15. Írja fel az e egyenes körül pozitív y irányból 90° -os forgatás mátrixát a szokásos, illetve a $\mathbf{v}_1(1; 0; 0)$, $\mathbf{v}_2(1; 1; 0)$ és $\mathbf{v}_3 = (1; 1; 1)$ bázisokban, ha az egyenes egyenletrendszere:

$$e : \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \quad \text{és} \quad z = 0.$$

16. Adja meg a α és β paramétereket, hogy a φ leképezés \mathbf{A} mátrixa orientációtartó és skálárisszorzáttartó legyen (ortogonális)!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$