

14

Integrálás II

Matematika G2 – Többváltozós analízis

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

14.1. Elméleti Áttekintő

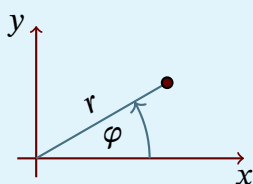
Integráltranszformációk:

Előfordulhat olyan eset, amikor egy adott A tartományon nehéz elvégezni az integrálást, de létezik egy olyan koordináta-transzformáció, amely által az integrálás egyszerűbbé válik. Ha létezik egy egyértelmű φ leképezés az A tartományról az A' tartományra, akkor az integrálás a következő módon történik:

$$\iint_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{A} = \iint_{A'} f(\mathbf{x}') |\mathbf{J}_\varphi| d\mathbf{A}',$$

ahol \mathbf{J}_φ a leképezés Jacobi-mátrixa.

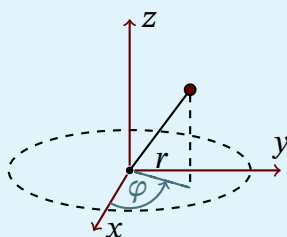
2D polárkoordináták:



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$|\mathbf{J}_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

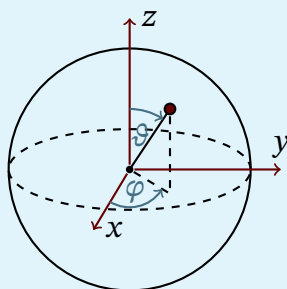
3D hengerkoordináták:



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$|\mathbf{J}_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

3D gömbkoordináták:



$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$|\mathbf{J}_\varphi| = \begin{vmatrix} s_\vartheta c_\varphi & -r s_\vartheta s_\varphi & c_\vartheta c_\varphi \\ s_\vartheta s_\varphi & r s_\vartheta c_\varphi & c_\vartheta s_\varphi \\ c_\vartheta & 0 & r \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta$$

Fontos, hogy a Jacobi-mátrix determinánsával való szorzást ne felejtsük el!

Görbék megadása:

Görbék esetén egy futó változót használunk.

Egyenes:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

ahol \mathbf{r}_0 az egyenes egy pontja, \mathbf{v} az egyenes irányvektora, $t \in \mathbb{R}$ pedig a futó paraméter.

Kör:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos \varphi \\ R \cdot \sin \varphi \end{bmatrix},$$

ahol r a kör sugara, $\varphi \in [0; 2\pi]$ pedig a futó paraméter.

Felületek megadása:

Felületek esetén két futó paraméterre van szükségünk.

Körlap:

$$\boldsymbol{\rho}(r; \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix},$$

ahol $r \in [0; R]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Hengerfelület:

$$\boldsymbol{\rho}(t; s) = \mathbf{r}_0(r) + s\mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{r}_0(t)$ az alapgörbe, \mathbf{v} pedig az irányvektor, $t, s \in \mathbb{R}$ pedig a futó paraméterek.

Forgásfelület:

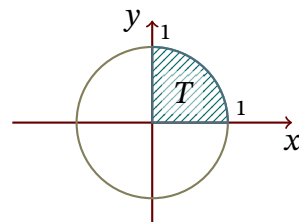
$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ z(t) = g(t) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\rho}(t; s) = \begin{bmatrix} f(t) \cos s \\ f(t) \sin s \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

14.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi felületi integrálokat!

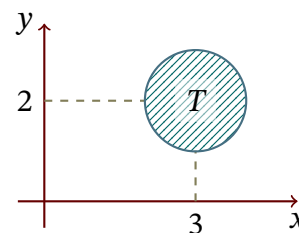
a) $\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dT$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x; y \geq 0\}$$



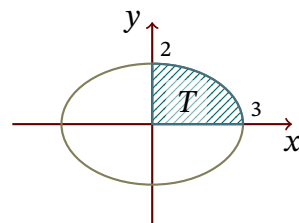
b) $\iint_T x^2 + y^2 dT$

$$T = \{(x; y) \mid (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$$



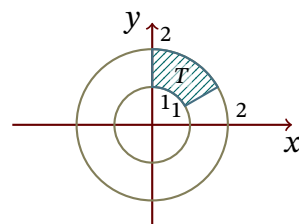
c) $\iint_T |2xy| dT$

$$T = \left\{ (x; y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \wedge x; y \geq 0 \right\}$$



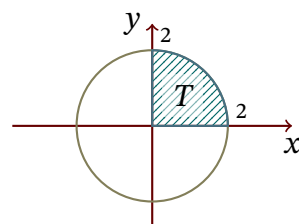
d) $\iint_T 4xy^3 dT$

$$T = \left\{ (x; y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}$$



e) $\iint_T \sin(x^2 + y^2) dT$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 2^2 \wedge x; y \geq 0\}$$



2. Határozza meg az alábbi improprius integrálok értékét!

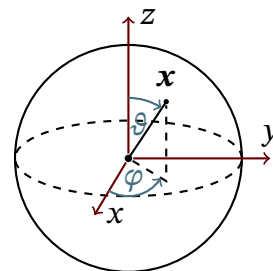
a) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x^2-y^2} dx dy$

b) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

3. Határozza meg a gömb térfogatát egy hármas-integrál segítségével:

$$V = \iiint_V dV$$

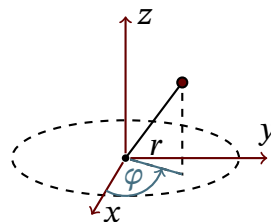
$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$



4. Adja meg az alábbi integrál értékét, ha V az $r = 1$ sugarú, $z = 0$ és $z = 2$ síkok által határolt z -tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú henger a tér első térfelületében elhelyezkedő része!

$$\iiint_V z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$$

$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 \wedge x, y \geq 0\}$$



5. Határozza meg az $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ függvény egységgömbön vett integrálját!
6. Határozza meg az $\mathbf{r}(t)$ vezérgörbájű \mathbf{v} irányvektorú hengerefelületet!

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ 5t \\ 3t - 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7. Adja meg a 2 sugarú, z tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú, origó központú körhenger felületének egyenletét!
8. Adja meg azon tórusz felületének egyenletét, amelyet az xz síkban elhelyezkedő, $(x; z) = (5; 0)$ középpontú, $r = 3$ sugarú kör z tengely körül való forgatásával kapunk!