

## 7

## Differenciálás I

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 19.

## 7.1. Elméleti Áttekintő

## Definíció 7.1: Differenciálhányados

Ha létezik és véges a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték, akkor azt az  $f$  függvény  $a$  pontbeli differenciálhányadosának, vagy az  $a$  pontbeli deriváltjának mondjuk.

Jelölése:

$$f'(a) \quad \text{vagy} \quad \frac{df(a)}{dx}.$$

A differenciálhányados létezésének **szükséges feltétele**, hogy az  $f$  függvény **folytonos** legyen az  $a$  pontban.

## Fontosabb függvények és deriváltjaik:

$f(x)$	$f'(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{x^{1/n-1}}{n}$

A konstans függvény deriváltja zérus.

## Trigonometrikus függvények és deriváltjaik:



$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

**Hiperbolikus függvények és deriváltjaik:**

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ( $x > 1$ )
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$ ( $ x  < 1$ )
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$ ( $ x  > 1$ )

**Hiperbolikus azonosságok:**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = -i \sin(ix)$$

$$\cosh x = \cos(ix)$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

**Műveleti szabályok:**

- **Konstans kiemelhető:**

$$(cf)' = cf'$$

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx}$$

- **Összeg- és különbségfüggvény:**

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

- **Szorzatfüggvény:**

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

- **Hányadosfüggvény:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

**Láncszabály:**

A láncszabály segítségével összetett függvényeket tudunk differenciálni. Az összefüggést három különböző jelölésmóddal is felírhatjuk:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{vagy} \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad \text{vagy} \quad \frac{df(g)}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

**Elemi átalakításos módszer:**

Előfordulhat olyan eset, hogy  $(f(x))^{g(x)}$  alakú függvényeket kell differenciálni. Ebben az esetben az alábbi átalakítást alkalmazzuk:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Az  $e^{g(x) \ln f(x)}$  függvény deriváltja a láncszabály segítségével:

$$\begin{aligned} ((f(x))^{g(x)})' &= (e^{g(x) \ln f(x)})' \\ &= e^{g(x) \ln f(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \\ &= (f(x))^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az  $\ln^x x$  függvény deriváltját!

Az  $\ln^x x$  függvényt  $e^{x \ln \ln x}$  alakra hozva, a láncszabály segítségével differenciálható:

$$\begin{aligned} (\ln^x x)' &= (e^{x \ln \ln x})' \\ &= e^{x \ln \ln x} \left( \ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \ln^x x \left( \ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right). \end{aligned}$$

**Geometriai alkalmazás:**

Az  $f$  függvény  $a$  pontbeli **érintőjének egyenlete** onnan következik, hogy  $f' = m$ , ahol  $m$  a meredekséget jelöli, az  $y = m \cdot x + b$  egyenes egyenletéből levezetve:

$$f(a) = f'(a) \cdot a + b \quad \rightarrow \quad b = f(a) - f'(a) \cdot a,$$

és mivel

$$\begin{aligned} (a; f(a)) &\in y = m \cdot x + b \\ &\downarrow \\ y &= f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a \end{aligned}$$

Ebből átalakítva:

$$\boxed{y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).}$$

Az  $(a; f(a))$  pontbeli **normális egyenlete**:

$$M = \frac{-1}{f'(a)}, \quad \text{és} \quad (a; f(a)) \in y = M \cdot x + B,$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a).}$$

## 7.2. Feladatok

1. A differenciálhányados definíciója segítségével határozza meg az  $f(x) = x^n$  függvény deriváltját az  $x = x_0$  pontban!
2. Differenciálhatóak-e az alábbi függvények az  $x_0 = 0$  pontban?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^3 + x + 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

3. Adjon példát olyan függvényekre, melyek  $\forall x \in \mathbb{R}$  valós számra értelmezve vannak és teljesül, hogy ...
  - a)  $f$  mindenhol folytonos, de az  $x_0 = 1$  pontban nem differenciálható,
  - b)  $f$  mindenhol differenciálható, de az  $x_0 = 1$  pontban nem folytonos,
  - c)  $f$  mindenhol differenciálható és  $f'$  is folytonos,
  - d)  $f$  mindenhol differenciálható, de  $f'$  az  $x_0 = 0$  pontban nem az.
4. Mutassa meg, hogy az alábbi függvényre igaz, hogy bár differenciálható az  $x_0 = 0$  pontban, viszont létezik az  $x_0$  tetszőlegesen kis környezetében olyan pont, ahol nem differenciálható.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin 1/x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

5. Differenciálja az alábbi függvényeket!

$$\text{a) } f(x) = (6x^7 + 7x^4 + 2x^2)^5 + \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\text{b) } g(x) = \ln x \cdot e^x + x^2 \cot x + x^{-1/3}$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{(3x + x^2) \cdot \sinh x \cdot \arctan x}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{artanh} \pi}$$

$$\text{d) } i(x) = \sqrt[3]{\ln \cos^2 x^4}$$

$$\text{e) } j(x) = \ln \arcsin \sqrt{\frac{x^2 + 3}{e^{2x}}}$$

$$\text{f) } k(x) = x^x$$

$$\text{g) } l(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$$

6. Határozza meg az alábbi függvények  $n$ -edik deriváltját!

$$\text{a) } f(x) = x^m$$

$$\text{b) } g(x) = \sin x$$

7. Írja fel az  $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{x} - 3/2x^2$  függvény  $x_0 = 1$  pontban lévő érintő egyenesének egyenletét! Adja meg az érintőre merőleges egyenes egyenletét is!
8. Határozza meg azon pontok halmazát, melyekben az  $x^2 + y^2 = 25$  kör érintője párhuzamos a  $3x - 4y + 7 = 0$  egyenessel.