

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kiteintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q) + (1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Valós analízis BMETE94BG02 8

# Matematika G2

## Taylor-sorok

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 1: Taylor-polinom** ] Legyen  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, mely az  $x_0$  pontban legalább  $p$ -szer differenciálható. Ekkor az  $f$  függvény  $x_0$  körüli  $p$ -edik Taylor-polinomja:

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

[ style=theorem, nobreak=true, frametitle= white **Tétel 1: Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal** ] Ha az  $f$  függvény legalább  $(r+1)$ -szer differenciálható az  $(x; x_0)$  intervallumon és  $f^{(k)} \forall k \in \{1; 2; \dots; r\}$  esetén folytonos az  $x$  és  $x_0$  pontokban, akkor  $\exists \xi \in (x; x_0)$ , hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - x_0)^{r+1}}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}$$

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 2: Taylor-sor** ] Legyen az  $f$  függvény az  $x_0$  pontban akárhányszor differenciálható. Ekkor a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

hatványsort az  $f$  függvény  $x_0$  körüli Taylor-sorának nevezzük.

[ style=note, nobreak=true, ] Ha  $x_0 = 0$ , akkor a Taylor-sort Maclaurin-sornak nevezzük.

[style=example, nobreak=true] Írjuk fel a  $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$  függvény  $x_0 = 1$  körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

$p^{(n)}(x)$	$p^{(n)}(1)$
$p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$	6
$p'(x) = 3x^2 + 6x$	9
$p''(x) = 6x + 6$	12
$p'''(x) = 6$	6

$$T_3(x) = \frac{6}{0!} + \frac{9}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$

$$= 6 + 9(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3$$

[style=example, nobreak=true] Írjuk fel az  $f(x) = e^x$  függvény Maclaurin-sorát!

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$f(x) = e^x$	1
$f'(x) = e^x$	1
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(k)}(x) = e^x$	1

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

[style=example, nobreak=true] Írjuk fel az  $f(x) = \sin x$  függvény Maclaurin-sorát!

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$f(x) = \sin x$	0
$f'(x) = \cos x$	1
$f''(x) = -\sin x$	0
$f'''(x) = -\cos x$	-1
$\vdots$	$\vdots$

$$T(x) = x^1 \frac{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Fontosabb függvények Maclaurin-sorai:**

5pt

Függvény	Taylor-sor	Konvergencia intervallum
$e^x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1; 1]$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	
$x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$(-1; 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-1; 1]$
$(1+k)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha k x^k$	$(-1; 1)$

## 0.2 Feladatok

1. Írja fel a  $p(x) = (1+x)^3$  függvény Maclauren-sorát!
2. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli Taylor-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$\begin{array}{ll} f & (1-x)^3 \quad 1 = \\ g & e^x \quad 1 = \\ h & \ln x \quad 1 = \end{array}$$

3. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$\begin{array}{ll} f & \cos 5x \\ g & \sin \sqrt{x} \\ h & \sin^2 x \\ i & \sqrt[3]{\exp(-x^2)} \end{array}$$

4. Adja meg az alábbi törtfüggvények Taylor-sorát!

$$\begin{array}{ll} f & x+1 \quad x+3 \quad -2 = \\ g & x+1 \quad x+3 \quad -1 = \end{array}$$

5. Írja fel az alábbi függvény  $x_0 = 2$  pontra illeszkedő Taylor sorát! Mi lesz a konvergenciasugár?

$$f(x) = 1x^2 - 3x + 2$$

6. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$\begin{array}{ll} f & x1+x^2 \\ g & \arctan x \\ h & 1\sqrt{2+x^2} \end{array}$$

7. Melyik függvény Taylor-sora az alábbi?

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n+1n!x^{2n}$$

8. Hanyadfokú Taylor polinom közelíti a  $\sin(\pi/60)$  értékét 4 tizedesjegy pontossággal?
9. Számítsa ki 3 tizedesjegy pontossággal az alábbi integrált!

$$\int_0^{0,2} e^{2x} x$$