

Numerikus sorozatok II

Matematika G1 - Sorozatok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

5.1. Feladatok

1. A konvergencia definíciója alapján bizonyítsa be, hogy az alábbi számsorozatok konvergensek, úgy hogy minden ε esetén adjon meg egy N köszöbszámort, amelytől kezdve minden n > N esetén $|a_n - a| < \varepsilon$, ahol a az adott sorozat határértéke!

a)
$$a_n = \frac{2n+5}{n-1}$$
, $\varepsilon = 10^{-6}$

b)
$$b_n = \frac{2n + 3\sqrt{n}}{3n + 1}$$
, $\varepsilon = 10^{-3}$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát!

a)
$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

b)
$$b_n = \frac{(-1)^n \cdot n + 2n}{3n} \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

3. Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat!

a)
$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 - n + 1}$$

b)
$$b_n = \frac{n^5}{n!}$$

- 4. Adja meg azon sorozat határértékét, melynek első eleme $a_1=1$, n-edik eleme pedig $a_n=a_{n-1}+{}^{1/2^{n-1}}$.
- 5. Vizsgálja meg azt a sorozatot konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából, amelynek első eleme $a_1=1$, n-edik eleme pedig $a_n=\sqrt{1+a_{n-1}}$.
- 6. Határozza meg az alábbi komplex elemű sorozatok határértékeit!

a)
$$a_n = \frac{n^2 - i(n^2 - 1)}{n^2 - i}$$

$$b) b_n = \frac{i^n}{3^n + i^n}$$

c)
$$c_n = (1 - i)^n$$

- 7. Bizonyítsa be, hogy ha $n \ge 3$, akkor $n^{n+1} \ge (n+1)^n!$
- 8. Vizsgálja az $a_n = \binom{n}{2} / \binom{n}{3}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!