definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Sorozatok BMETE94BG01 4

Matematika G1

Numerikus sorozatok I

Utoljára frissítve: 2024. október 01.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Sorozat**] A pozitív egész számok halmazán értelmezett $a_n : N \to$ függvényt **valós számsorozat**nak hívjuk.

Az $a_n : N \to C$ függvényt **komplex számsorozat**nak nevezzük.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Konvergencia**] Az (a_n) sorozatot konvergensnek mondjuk, ha $\exists a \in$ valós szám, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, ahol$$

a$asorozathatrrtke.$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Divergencia**] Az (a_n) sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 4: Torlódási pont**] Az (a_n) sorozatnak torlódási pontja van az $a \in$ pontban, ha az a tetszőlegesen kicsiny környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

[style=note, nobreak=true,] A sorozat határértéke egyben torlódási pont is, viszont egy torlódási pont nem feltétlenül határérték. Pl.: $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja is van (-1 és 1), viszont egyik sem határérték, hiszen a sorozat divergens.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 5: Sorozat korlátossága**] Az (a_n)-t **alulról korlátos**nak nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n > k$, vagyis értékkészlete alulról korlátos.

Az (a_n)-t **felülről korlátos**nak nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n < K$, vagyis értékkészlete felülről korlátos.

Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 6: Sorozat monotonitása**] Az (a_n) sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha $a_n \geq a_{n-1}$,
- monoton csökkenő, ha $a_n \leq a_{n-1}$,
- szigorúan monoton növekvő, ha $a_n > a_{n-1}$,
- szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n < a_{n-1}$.

[style=note, nobreak=true,] Konvergens sorozat mindig korlátos.

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Nevezetes határértékek**:

- $a^n \to \{ \quad 0, ha|a| < 1,$
  $1, haa = 1,$
  $\infty, haa > 1,$
  $divergens, haa \leq -1.$
- $\sqrt[n]{a} \to 1$
- $a^n \cdot n^k \to 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in N$
- $\sqrt[n]{n} \to 1$
- $a^n n! \to 0$
- $(1 + 1n)^n \to e$
- $(1 + rn)^n \to e^r$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Dominancia elv**:

$$\log_n a < \sqrt[n]{a} < \log_a n < \sqrt[a]{n} < n < n^a < a^n < n! < n^n$$

[style=note, nobreak=true,] A dominancia elvet olyan esetekben érdemes használnunk, amikor egy

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}$$

alakú sorozat határértékét keressük, hiszen segítségével megállapíthatjuk, hogy a nevező vagy a számláló fog gyorsabban nőni.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: Rendőrelv**] Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n) és (x_n) sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq x_n \leq b_n$: $\forall n$-re vagy $n > N_0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a, ekkor \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

0.2 Feladatok

1. A konvergencia definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e.

   a) $a_n = |n + 13n - 8|$

   b) $b_n = n \cdot (-1)^n - 12n$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

   a) $a_n = n^2 - 6n + 7n^2 + 12n + 49$

   b) $b_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + nn + 2 - n2$

   c) $c_n = (-2)^n + 3^n(-2)^{n+1} + 3^{n+1}$

   d) $d_n = \sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}\sqrt[4]{5n^6 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3} + n!(n+1)! + 3^{2n}$

   e) $e_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

   f) $f_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$

3. Igazolja a rendőrelv segítségével, hogy $n3^n \to 0, han \to \infty$.

4. Határozza meg az alábbi határértékeket! 2

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^2 - 30n - 21}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cos n^3}{2n} - \frac{3n}{6n+1}\right)$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}\right)^{2n+5}$

5. Bizonyítsa be, hogy bármely $k \geq 0$ egész számra

   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$