## 4.1. Felszín

a)  $z = x^2 + y^2$  forgásparaboloid z = 1 és z = 4 síkok közé eső része

A megadott forásparaboloid az  $z = f(x) = x^2$  függvény z tengely körüli forgatásával kapott felület, paraméterezése tehát:

$$g(s;t) = \begin{bmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ s^2 \end{bmatrix}, \quad s \in [1;2], \quad t \in [0;2\pi].$$

A parciális deriváltak, és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2s \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t \\ s \end{bmatrix}.$$

A keresett felszín:

$$A = \int_{\mathcal{S}} dS = \int_{1}^{2} \int_{0}^{2\pi} \|\mathbf{n}\| dt ds = \int_{1}^{2} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4s^{4} + s^{2}} dt ds$$

$$= 2\pi \int_{1}^{2} \sqrt{4s^{4} + s^{2}} ds = 2\pi \int_{1}^{2} s \sqrt{4s^{2} + 1} ds = 2\pi \int_{u_{1}}^{u_{2}} \frac{1}{8} \sqrt{u} du$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{u_{1}}^{u_{2}} = \left[ \frac{\pi (4s^{2} + 1)^{3/2}}{6} \right]_{1}^{2} = \frac{\pi}{6} \cdot (17^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 4,9094$$

b)  $\varphi(s;t) = (e^s \cos t) \hat{i} + (e^s \sin t) \hat{j} + (s) \hat{k}, s \in (-\infty; 0], t \in [0; 2\pi]$ 

A parcális deriváltak, és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} e^s \cos t \\ e^s \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -e^s \sin t \\ e^s \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -e^s \cos t \\ -e^s \sin t \\ e^{2s} \end{bmatrix}$$

A keresett felszín:

$$A = \int_{\mathcal{S}} dS = \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{e^{2s} + e^{4s}} \, dt \, ds = 2\pi \int_{-\infty}^{0} e^{s} \sqrt{1 + e^{2s}} \, ds$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} \sqrt{1 + u^{2}} \, du = 2\pi \int_{0}^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^{2} v \, dv = 2\pi \int_{0}^{\operatorname{arsinh} 1} \frac{1 + \cosh 2v}{2} \, dv$$

$$= 2\pi \left[ \frac{v}{2} + \frac{\sinh 2v}{4} \right]_{0}^{\operatorname{arsinh} 1} = \pi (\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}) \approx 7{,}2118$$

## 4.2. Skalármező felületi integrálja

a)  $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ , az egységgömb z > 0 részén

Az egységgömb paraméterezése:

$$\varrho(s;t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \quad s \in [0;\pi/2], \quad t \in [0;2\pi], \quad \boldsymbol{n} = \left\| \frac{\partial \varrho}{\partial s} \times \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right\| = \sin s.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\varphi(s;t) = (\sin s \cos t)^2 + (\sin s \sin t)^2 = \sin^2 s (\cos^2 t + \sin^2 t) = \sin^2 s$$

Az integrál:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) \, dS = \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{2\pi} \sin^{2} s \sin s \, dt \, ds = 2\pi \int_{0}^{\pi/2} (1 - \cos^{2} s) \sin s \, ds$$
$$= 2\pi \int_{0}^{1} (1 - u^{2}) \, du = 2\pi \left[ u - \frac{u^{3}}{3} \right]_{0}^{1} = \frac{4\pi}{3}$$

b)  $\psi(r)=x+y+z$ , az 2x+2y+z=4 sík első térnyolcadba tartozó részén Rendezzük a sík egyenletét z=4-2x-2y alakra.

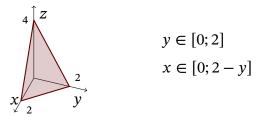
A felületi normális nagysága:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

A függvény átparaméterezése:

$$f(x; y; z(x; y)) = x + y + 4 - 2x - 2y = 4 - x - y$$

A tartomány paraméterezése:



Az integrál:

$$\int_{S} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, dS = \int_{0}^{2} \int_{0}^{2-y} 3(4-x-y) \, dx \, dy = \int_{0}^{2} \left[ (12-3y)x - \frac{3x^{2}}{2} \right]_{0}^{2-y} \, dy$$

$$= \int_{0}^{2} (12-3y)(2-y) - \frac{3(2-y)^{2}}{2} \, dy$$

$$= \int_{0}^{2} 24 - 18y + 3y^{2} - 6 + 6y - \frac{3y^{2}}{2} \, dy$$

$$= \int_{0}^{2} 18 - 12y + \frac{3y^{2}}{2} \, dy = \left[ 18y - 6y^{2} + \frac{y^{3}}{2} \right]_{0}^{2} = 36 - 24 + 4 = 16.$$

## 4.3. Vektormező skalárértékű felületi integrálja

a)  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x+y)\,\hat{\mathbf{i}} + (x-y)\,\hat{\mathbf{j}} + (z^2)\,\hat{\mathbf{k}}, \, \mathbf{g}(s;t) = (s+t)\,\hat{\mathbf{i}} + (s-t)\,\hat{\mathbf{j}} + (s^2-t^2)\,\hat{\mathbf{k}}, \, (s;t) \in [0;1]^2$ A parciális deriváltak és a felületi normális:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} = \begin{bmatrix} 1\\1\\2s \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1\\-1\\-2t \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 2(s-t)\\2(s+t)\\-2 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\mathbf{u}(\mathbf{g}(s;t)) = \begin{bmatrix} 2s \\ 2t \\ (s^2 - t^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ 2t \\ s^4 - 2s^2t^2 + t^4 \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}); d\mathbf{S} \rangle = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \begin{bmatrix} 2s \\ 2t \\ s^{4} - 2s^{2}t^{2} + t^{4} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 2(s-t) \\ 2(s+t) \\ -2 \end{bmatrix} ds dt$$
$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} 4s^{2} + 4t^{2} - 2s^{4} + 4s^{2}t^{2} - 2t^{4} ds dt$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{9} - \frac{2}{5} = \frac{104}{45} \approx 2,3111$$

b)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 + z^2)\,\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z^2)\,\hat{\mathbf{j}} + (x^2 + y^2)\,\hat{\mathbf{k}}, r = 2$  sugarú, x = 2 síkon lévő körön A felület paraméterezése és a felületi normális:

$$\varphi(s;t) = \begin{bmatrix} 2 \\ s\cos t \\ s\sin t \end{bmatrix}, \quad s \in [0;2], \\ t \in [0;2\pi], \quad n = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -s\sin t \\ s\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\mathbf{v}(\mathbf{g}(s;t)) = \begin{bmatrix} s^2 \cos^2 t + s^2 \sin^2 t \\ 4 + s^2 \cos^2 t \\ 4 + s^2 \sin^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 \\ 4 + s^2 \cos^2 t \\ 4 + s^2 \sin^2 t \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); d\mathbf{S} \rangle = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \begin{bmatrix} s^{2} \\ 4 + s^{2} \cos^{2} t \\ 4 + s^{2} \sin^{2} t \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds dt$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} s^{3} ds dt = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 2^{4} dt$$
$$= 8\pi \approx 25{,}1327$$

## 4.4. Vektormező vektorértékű felületi integrálja

Adja meg a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x)\hat{\mathbf{i}} + (-y)\hat{\mathbf{j}} + (z)\hat{\mathbf{k}}$  vektormező  $\mathbf{g}(s;t) = (s+2t)\hat{\mathbf{i}} + (t)\hat{\mathbf{j}} + (s-t)\hat{\mathbf{k}}$ ,  $s \in [0;3], t \in [0;1]$  felületen vett vektorértékű integrálját! A normális irányítottsága legyen kifelé mutató!

A parciális deriváltak és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\mathbf{v}(\mathbf{g}(s;t)) = \begin{bmatrix} s+2t\\-t\\s-t \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times d\mathbf{S} = \int_{0}^{1} \int_{0}^{3} \begin{bmatrix} s+2t \\ -t \\ s-t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ds dt = \int_{0}^{1} \int_{0}^{3} \begin{bmatrix} 2t-3s \\ -t-2s \\ 5t+3s \end{bmatrix} ds dt$$
$$= \begin{bmatrix} 2(1/2)3 - 3(9/2) \\ -(1/2)3 - 2(9/2) \\ 5(1/2)3 + 3(9/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21/2 \\ -21/2 \\ 21 \end{bmatrix}.$$