TODO: ADD TITLE PAGE

Jelölések

Ez egy egyszerű szövegdoboz.

Ez egy megjegyzés.

! Ez egy állítás.

Ez egy példa.

Kitekintő

Ez egy kitekintés.

Definíció 0.1

Ez egy definíció.

Tétel 0.1

Ez egy tétel.

Felkészülést segítő kérdések

Ezek segítenek a tanulásban.

Logikai szimbólumok

Jel	Megnevezés	Példa
$\wedge$	és	$p \wedge q$
$\vee$	vagy	$p \vee q$
$\forall$	minden / bármely	$\forall x \in X$
$\exists$	létezik	$\exists x \in X$
$\exists!$	biztosan létezik	$\exists! x \in X$
$\nexists$	nem létezik	$\nexists x \in X$
!	legyen	$!x \in X$

Egyenlőség, relációk

Jel	Megnevezés	Példa
$=$	egyenlő	$2+2=4$
$\neq$	nem egyenlő	$2 \neq 3$
$\equiv$	ekvivalens	$2 \equiv 2$
$<$	kisebb	$2 < 3$
$\leq$	kisebb vagy egyenlő	$2 \leq 3$
$>$	nagyobb	$3 > 2$
$\geq$	nagyobb vagy egyenlő	$3 \geq 2$

Műveletek

Jel	Megnevezés	Példa
$a+b$	összeg	$2+3=5$
$a-b$	különbség	$5-3=2$
$a \cdot b$	szorzat	$2 \cdot 3 = 6$
a/b	hányados	$6/3 = 2$
a^b	hatvány	$2^3 = 8$
$\sqrt{a}$	négyzetgyök	$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt[n]{a}$	n-edik gyök	$\sqrt[3]{8} = 2$
$a!$	faktoriális	$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Halmazok és halmazműveletek

Jel	Megnevezés	Példa
$\emptyset, \{\}$	üreshalmaz	$\lvert\emptyset\rvert = 0$
$\mathbb{N}$	természetes számok halmaza	$1 \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza	$-1 \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	racionális számok halmaza	$\pi \notin \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}^*$	irracionális számok halmaza	$\pi \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	valós számok halmaza	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	komplex számok halmaza	$i \in \mathbb{C}$
A, B, C	halmazok	$A = \{1; 2; 3\}$
a, b, c	halmazok elemei	$x \in A$
$x \in A$	eleme	$i \in \mathbb{C}$
$x \notin A$	nem eleme	$\pi \notin \mathbb{Q}$
$A = B$	ekvivalencia	$\{\} = \emptyset$
$A \subseteq B$	részhalmaza	$\{1\} \subseteq \{1; 2\}$
$A \subset B$	valódi részhalmaza	$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$
$\overline{A}$	komplementer halmaz	$\{x \in X \mid x \notin A\}$
$A \cup B$	unió	$\{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B$	metszet	$\{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$
$A \setminus B$	kivonás	$\{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Intervallumok

Jel	Megnevezés	Példa
$[a; b]$	zárt intervallum	$[0; 1]$
$(a; b)$	nyílt intervallum	$(0; 1)$
$[a; b)$	balról zárt, jobbról nyitott intervallum	$[0; 1)$
$(a; b]$	balról nyitott, jobbról zárt intervallum	$(0; 1]$

Konstansok

Jel	Megnevezés	Példa
π	pi	$\pi \approx 3.14159$
e	Euler-féle szám	$e \approx 2.71828$
i	imaginárius egység	$i^2 = -1$

Komplex számok

Jel	Megnevezés	Példa
$\mathbb{C}$	komplex számok halmaza	$z \in \mathbb{C}$
i	imaginárius egység	$i^2 = -1$
z	komplex szám	$z = 3 + 4i$
$\mathrm{Re}\{x\}$	valós rész	$\mathrm{Re}\{z\} = 3$
$\mathrm{Im}\{x\}$	képzetes rész	$\mathrm{Im}\{z\} = 4$
$z = a + bi$	algebrai alak	$\mathrm{Re}\{z\} = a, \mathrm{Im}\{z\} = b$
$\overline{z} = a - bi$	konjugált	$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$
$\|z\|$	abszolút érték / hossz	$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\arg\{z\}$	argumentum	$\arg\{z\} = \arctan(b/a)$
$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$	trigonometrikus alak	$\|z\| = r, \arg\{z\} = \varphi$
$z = re^{i\varphi}$	exponenciális alak	$z = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi)$

Sorozatok, sorok

Jel	Megnevezés	Példa
(a_n)	numerikus sorozat	$a_n = \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	sorozat határértéke	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\sum a_n$	numerikus sor	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$
$L = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$	sor összege	$L = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$	geometriai sor ($r < 1$ esetén)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = 2$

Függvények

Jel	Megnevezés	Példa
$f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}, x \mapsto y$	f függvény	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
$\mathcal{D}_f$	értelmezési tartomány	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}_f$	értékkészlet	$\mathcal{R}_f = [0; +\infty)$
$\mathcal{D} \to \mathcal{R}$	értékkészlet hozzárendelése az értelmezési tartományhoz	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y$	függvényértékek hozzárendelése az őselképekhez	$f : x \mapsto x^2$
f^{-1}	inverz függvény	ha $f(3) = 5$, akkor $f^{-1}(5) = 3$
$f \circ g$	összetett függvény	$f(x) = e^x, g(x) = x^2$: $(f \circ g)(x) = e^{x^2}$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$	függvény határértéke	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$	jobboldali	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$	baloldali	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Nevezetes függvények

Jel	Megnevezés	Példa
$e^x, \exp x$	exponenciális függvény	$e^0 = 1$
$\ln x$	természetes alapú logaritmus	$\ln 1 = 0$
a^x	hatványfüggvény	$2^3 = 8$
$\log_a x$	a alapú logaritmus	$\log_2 8 = 3$
$\sin, \cos,$ $\tan, \cot$	szögfüggvények	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$
$\arcsin, \arccos,$ $\arctan, \mathrm{arccot}$	inverz szögfüggvények	$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$
$\sinh, \cosh,$ $\tanh, \coth$	hiperbolikus függvények	$\sinh 0 = 0$
$\mathrm{arcsinh}, \mathrm{arccosh},$ $\mathrm{arctanh}, \mathrm{arccoth}$	inverz hiperbolikus függvények	$\mathrm{arcsinh}\, 0 = 0$

Kalkulus

Jel	Megnevezés	Példa
$f'(x), f''(x), f^{(n)}(x)$	első, második és n-edik derivált (Lagrange jelölés)	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$	első, második és n-edik derivált (Leibniz jelölés)	$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
$\dot{f}, \ddot{f}, \overset{n}{\dot{f}}$	első, második és n-edik derivált (Newton jelölés)	$\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Riemann-integrál	$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	határozatlan integrál	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$
$F(x)$	$f(x)$ primitív függvénye	$F'(x) = f(x)$
$f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$	f Riemann-integrálható az $[a;b]$ intervallumon	$x^2 \in \mathcal{R}(-\infty;+\infty)$

1 Halmazelmélet

Ebben a fejezetben a halmazelmélet alapfogalmaival ismerkedünk meg, áttekintjük, rendszerezzük és néhol kibővítjük mindazt, amit eddig a számokról középiskolában tanultunk.

A halmazok olyan objektumok gyűjteményei, amelyek egy közös tulajdonság vagy szabály alapján definiálhatók. A halmazelmélet lényegében a köztük lévő kapcsolatokkal foglalkozik és a matematikai érvelés sarokköveként szolgál, keretet adva a matematikai objektumok rendszerezéséhez és elemzéséhez.

Tanulmányozni fogjuk a számok különböző típusait: a természetes számokat, az egész számokat és a valós számokat, valamint azt, hogy ezek hogyan viszonyulnak egymáshoz.

A fejezetben olyan definíciók, tételek kerülnek ismertetésre, amelyek elengedhetetlenek a további matematikai tanulmányokhoz.

A fejezetben érintett témakörök

1.1. Alapfogalmak, alapműveletek

Alapfogalmak:
- axióma / posztulátum,
- definíció,
- nem definiált alapfogalom,
- állítás / tétel / lemma / segédtétel.

A **halmaz** egy nem definiált alapfogalom:
- A halmazokat nagybetűvel jelöljük: A, B, ...
- Az elemeket kisbetűvel: a, b, ...
- Halmaz **eleme** jelölés: $\in$, pl.: $x \in Y$, x eleme az Y halmaznak.
- Halmaznak **nem eleme**: $\notin$, pl.: $x \notin Y$, x nem eleme az Y halmaznak.

Egy halmaz akkor **jól megadott**, ha bármely elemről eldönthető, hogy hozzá tartozik-e a halmazhoz, vagy nem.

Definíció 1.1: Üreshalmaz

Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, **üreshalmaz**nak nevezzük, jele: $\emptyset$.

A **Nemüres halmaz**: olyan halmaz, melynek legalább egy eleme van.

A halmazok megadási módjai:
- **utasítással**: $A := \{\text{A 180 cm-nél magasabb emberek}\}$,
- **felsorolással**: $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nevezetes halmazok:
- $\mathbb{N}$ – természetes számok halmaza,
- $\mathbb{Z}$ – egész számok halmaza,
- $\mathbb{Q}$ – racionális számok halmaza,
- $\mathbb{Q}^*$ – irracionális számok halmaza,
- $\mathbb{R}$ – valós számok halmaza,
- $\mathbb{C}$ – komplex számok halmaza.

Definíció 1.2: Részhalmaz

Legyenek A és B halmazok. Ha A minden eleme eleme B-nek is, akkor azt mondjuk, hogy az A a B részhalmaza, jele: $\subseteq$, vagy $\subset$ (valódi részhalmaza).

$A = B$, ha $A \subset B$ és $B \subset A$ is teljesül (kölcsönös tartalmazás).

!

Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok, ekkor teljesülnek az alábbiak:

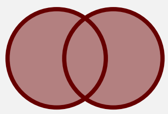
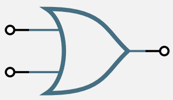
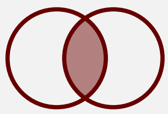
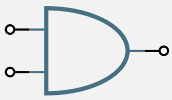
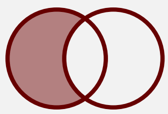
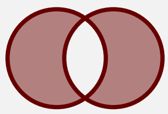
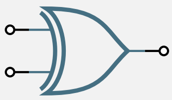
1. $A \subset A$, azaz minden halmaz része önmagának (**reflexív**),
2. $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$ (**antiszimmetrikus**),
3. $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$ (**tranzitív**).

Definíció 1.3: Unió, metszet, különbség

Legyenek A és B az X alaphalmaz részhalmazai, ekkor:

$$A \cup B := \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A \vee x \in B \right\} \quad – \quad \textbf{unió}\text{, egyesítés,}$$
$$A \cap B := \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A \wedge x \in B \right\} \quad – \quad \textbf{metszet}\text{,}$$
$$A \setminus B := \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A \wedge x \notin B \right\} \quad – \quad \textbf{különbség}\text{,}$$

Halmazműveletek és logikai műveletek közötti kapcsolat

Unió	–	A  B	$\sim$	A, B  $A + B$	–	VAGY
Metszet	–	A  B	$\sim$	A, B  $A \cdot B$	–	ÉS
Különbség	–	A  B				
Szimmetrikus differencia	–	A  B	$\sim$	A, B  $A \oplus B$	–	XOR

Definíció 1.4: Diszjunkt halmaz

Két halmaz diszjunkt, ha metszetük az üreshalmaz.

Definíció 1.5: Komplementer halmaz

Ha $A \subset B$, akkor az A halmaznak a B-re vonatkozó komplementere: $B \setminus A$, jele: $\overline{A}$.

Halmaz komplenterének komplementere önmaga, vagyis

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Tétel 1.1: Halmazműveletek tulajdonságai

Legyenek $A, B, C \in X$

$A \cup B = B \cup A$	kommunutatív	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	asszociatív	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup A = A$	idempotens	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	disztributív	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$A \cup \varnothing = A$		$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \overline{A} = X$		$A \cap \overline{A} = \varnothing$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Bizonyítás (De Morgan azonosságok):

$$\begin{array}{c} x \in \overline{A \cup B} \\ \downarrow \\ x \notin A \cup B \\ x \notin A \land x \notin B \\ x \in \overline{A} \land x \in \overline{B} \\ x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in \overline{A \cap B} \\ \downarrow \\ x \notin A \cap B \\ x \notin A \lor x \notin B \\ x \in \overline{A} \lor x \in \overline{B} \\ x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}$$

Definíció 1.6: Hatványhalmaz

Egy A halmaz összes részhalmazainak halmazát az A halmaz hatványhalmazának nevezzük.

Egy A véges halmaz összes részhalmazainak száma: $2^{|A|}$.

Bizonyítás:

A binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Vegyük észre, hogy a binomiális tételben $a = b = 1$, és $n = |A|$ esetén:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}}_{\text{az összes részhalmaz száma}}.$$

1.2. Relációk, leképezések, függvények

Definíció 1.7: Descartes-szorzat

Az A és B halmazok Descartes-szorzatán az A és B halmaz elemeiből álló **összes rendezett elempár**ok halmazát értjük:

$$A \times B := \left\{ (a;b) \,\middle|\, (a \in A) \wedge (b \in B) \right\}.$$

Legyen $A = \{1;2\}$ és $B = \{a;b\}$, ekkor az $A \times B$ Descartes-szorzat:

$$A \times B = \left\{ (1;a);(1;b);(2;a);(2;b) \right\}.$$

Definíció 1.8: Binér reláció

Az $A \times B$ szorzathalmaz $T \subset A \times B$ részhalmazát az A és B közötti binér (kételemű) relációnak hívjuk. Ha $(a;b) \in T$, akkor azt mondjuk, hogy a és b relációban vannak, és ezt aTb-vel jelöljük.

Definíció 1.9: Reláció értelmezési tartománya, értékkészlete és inverze

Legyen $T \subset A \times B$ egy reláció, ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T &:= \left\{ a \in A \,\middle|\, \exists b \in B : (a;b) \in T \right\} && \text{– a reláció értelmességi tartománya,}\\
\mathcal{R}_T &:= \left\{ b \in B \,\middle|\, \exists a \in A : (a;b) \in T \right\} && \text{– a reláció értékkészlete,}\\
T^{-1} &:= \left\{ (b;a) \,\middle|\, (a;b) \in T \right\} && \text{– a reláció inverze.}
\end{aligned}$$

Definíció 1.10: Ekvivalenciareláció

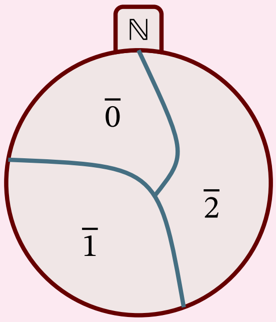
Legyen $A \neq \emptyset$, a $T \subset A \times A$ relációt ekvivalenciarelációnak mondjuk, ha teljesülnek az alábbiak:

- **reflexivitás** – $\forall A \in A$ esetén $(a;a) \in T$,
- **szimmetria** – ha $(a;b) \in T$, akkor $(b;a) \in T$,
- **tranzitivitás** – ha $(a;b) \in T$ és $(b;c) \in T$, akkor $(a;c) \in T$.

Tétel 1.2: Ekvivalencia osztályok

Minden $A \times A$ halmazon adott ekvivalenciareláció diszjunkt halmazokra bontja fel az A halmazt, ezeket a diszjunkt halmazokat ekvivalenciaosztályoknak nevezzük.

Két természetes szám relációban van egymással, ha hárommal osztva azonos maradékot adnak.



Definíció 1.11: Függvény

A $T \subset A \times B$ binér relációt leképezésnek/függvénynek mondjuk, ha

$$(a; b) \in T \wedge (a; c) \in T \Rightarrow b = c.$$

Jelölés: $f : A \to B$, ahol A az értelmezési tartomány ($\mathcal{D}_f$) és B az értékkészlet ($\mathcal{R}_f$).

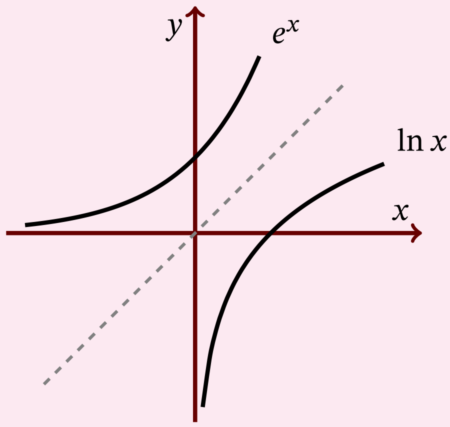
Definíció 1.12: Bijekció

Az $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű (egy-egyértelmű, bijektív), ha

- **injektív**, vagyis $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, valamint
- **szürjektív**, vagyis $\forall b \in B$ esetén $\exists a \in A : f(a) = b$.

Ha az $f : A \to B$ bijektív, akkor az $f^{-1} : B \to A$ leképezést f **inverz leképezés**ének hívjuk.

Az $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty), x \mapsto e^x$ függvény bijektív, inverze a természetes alapú logaritmus: $f^{-1} : (0; +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$.



1.3. A számfogalom kiépítése

Peano-axiómák:

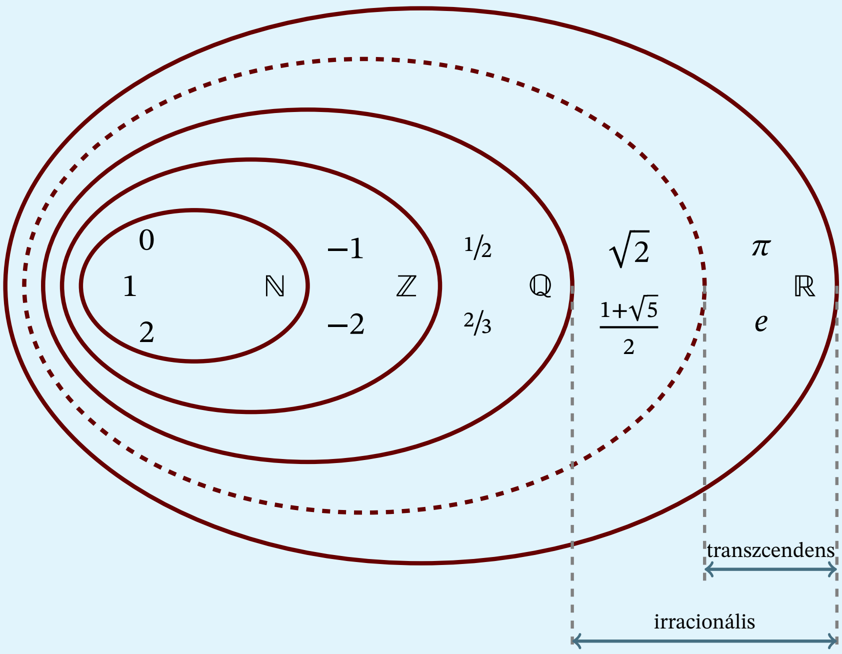
Legyen $\mathbb{N} \neq \emptyset$, $\mathbb{N}$-t a természetes számok halmazának, elemeit természetes számoknak mondjuk, ha teljesülnek az alábbiak:

1. legyen adva egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ leképezés,
2. φ injektív : $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$,
3. $\exists$ $\mathbb{N}$-nek egy kitüntetett eleme, ez a 0,
4. a 0-nak nincs őse képe, azaz $\nexists n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = 0$,
5. a teljes indukció elve teljesül, azaz ha $H \subseteq \mathbb{N}$ és
   a) $0 \in H$,
   b) $n \in H \Rightarrow \varphi(n) \in H$,

   akkor $H = \mathbb{N}$.

A természetes számok halmazát ekvivalenciarelációkkal ellátva megkapjuk a középiskolában megismert számhalmazokat:

- $\mathbb{Z}$: az egész számok halmaza ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$),
- $\mathbb{Q}$: a racionális számok halmaza ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$),
- $\mathbb{Q}^*$: az irracionális számok halmaza,
- $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza ($\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$).



A **transzcendens** számok olyan irracionális valós számok, amelyek nem algebraiak, azaz nem valamilyen algebrai egyenlet gyökei. Ilyen szám például a π vagy az e.

A valós számok axiómarendszere:

Értelmezzük két bináris műveletet, az összeadást ($+$) és a szorzást ($\cdot$), valamint egy relációt ($>$).

1. $a + b = b + a$ $\sim$ $+$ kommutatív,
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\sim$ $+$ asszociatív,
3. $\exists! 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ $\sim$ $+$ egységelem,
4. $\forall a \in \mathbb{R} : \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ $\sim$ $+$ inverz elem,
5. $a \cdot b = b \cdot a$ $\sim$ $\cdot$ kommutatív,
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\sim$ $\cdot$ asszociatív,
7. $\exists! 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ $\sim$ $\cdot$ egységelem,
8. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ $\sim$ $\cdot$ inverz elem,
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\sim$ disztributivitás,
10. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \vee a = b \vee b < a$ $\sim$ trichotómia,
11. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ $\sim$ $<$ tranzitivitás,
12. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow a + c < b + c$ $\sim$ $+$ monotonitás???,
13. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ $\sim$ $\cdot$ monotonitás???,
14. $\forall a \in \mathbb{R} : \exists b \in \mathbb{N} : a < b$ $\sim$ Arkhimédész-féle rendezés,
15. $a_n \leq a_{n+1} \wedge b_n \geq b_{n+1} : \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$ $\sim$ Cantor-axióma,

- $2 - 4$: csoport,
- $1 - 4$: Abel-csoport,
- $1 - 9$: test,
- $1 - 13$: rendezett test,
- $1 - 14$: arkhimédészien rendezett test,
- $1 - 15$: teljes rendezett test.

! A $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}^*$ sűrű.

1.4. Halmazok számossága

Definíció 1.13: Azonos számosságú halmazok

Ha két halmaz, A és B között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz számossága azonos. Jelölése: $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

A számosság ekvivalenciareláció.

Definíció 1.14: Véges halmaz

Az A halmaz véges, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $\operatorname{card} A = \operatorname{card}\,\{1; 2; \dots; n\}$, vagy ha $A = \varnothing$.

Ha nincs olyan n természetes szám, amelyre az $A \neq \varnothing$ halmaz ekvivalens volna az $\{1; 2; \dots; n\}$ halmazzal, akkor az A halmazt végtelen számosságúnak mondjuk. Létezik megszámlálhatóan és megszámlálhatatlanul végtelen halmaz.

$\operatorname{card} A$

véges | végtelen

végtelen:

megszámlálhatóan végtelen, pl. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ | megszámlálhatatlanul végtelen, pl. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}^*$

Tétel 1.3: Racionális számok halmazának számossága

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás (Cantor átlós módszere):

Minden pozitív racionális szám felírható tört alakban, ahol a nevező és a számláló is egész szám, ráadásul ezek egymás relatív prímjei.

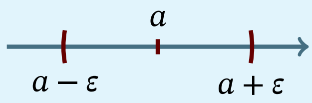
Ezeket a törteket rendezzük egy olyan táblázatba, ahol az n sorban az m oszlopban az $^m/_n$ tört áll. Ezeket a törteket az ábrán jelöl módszerrel sorba állítjuk, sorrendjük szerint pedig egyértelműen megfeleltethetők a természetes számoknak.

Könnyen belátható, hogy ez a módszer az összes racionális számra is kiterjeszthető, tehát a racionális számok halmaza valóban megszámlálhatóan végtelen.

$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$	$5/1$	$\cdots$
$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$	$\cdots$
$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$	$\cdots$
$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$	$5/4$	$\cdots$
$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$5/5$	$\cdots$
$1/6$	$2/6$	$3/6$	$4/6$	$5/6$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fontosabb jelölések:

- Nyílt halmaz jelölése: $(x; y) =]x; y[= \langle x; y \rangle$.
- Zárt halmaz jelölése: $[x; y]$.
- Az a pont ε sugarú környezete: $K(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (ezzel ekvivalens: $|x - a| < \varepsilon$).



Definíció 1.15: Alsó és felső korlát

A felülről korlátos H halmaz legkisebb felső korlátja: supremum, jele: $\sup H$.
Az alulról korlátos H halmaz legnagyobb alsó korlátja: infimum, jele: $\inf H$.

Tétel 1.4: Korlátos halmaz szuprémuma

Felülről korlátos nemüres halmaznak mindig van szuprémuma.

Tétel 1.5: Korlátos halmaz infimuma

Alulról korlátos nemüres halmaznak mindig van infimuma.

1.5. Felkészülést segítő kérdések

1. Mikor mondjuk, hogy egy halmaz jól definiált?
2. Válassza ki az alábbi halmazok közül azokat, amelyek jól definiáltak!
   a) A magas férfihallgatók,
   b) azon valós számok, amelyek négyzet nem kisebb háromnál,
   c) a viharos erejű szelek,
   d) a poliéderek.
3. Definiálja a következő fogalmakat: üreshalmaz, halmaz komplementere, részhalmaz, halmazok metszete, uniója
4. Definiálja két halmaz Descartes-szorzatát!
5. Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
6. Zárt-e az irracionális számok halmaza az összeadásra nézve?
7. Alulról korlátos-e a természetes számok halmaza? És felülről?
8. Adjon példát véges halmazokra!
9. Adjon példát megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazokra!