

## 2

## Operátorok, potenciálosság

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 06.

## 2.1. Elméleti Áttekintő

## Definíció 2.1 : Nabla-operátor

Az  $\mathbb{R}^n$ -beli Descartes-koordinátarendszerben, ahol  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  egy tetszőleges pont koordinátái, a standard bázis pedig  $\{\hat{\mathbf{e}}_1; \hat{\mathbf{e}}_2; \dots; \hat{\mathbf{e}}_n\}$  a Nabla egy olyan formális differenciáloperátor, melynek koordinátái a parciális derivált operátorok, vagyis:

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T,$$

## Differenciáloperátorok:

Legyen  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormező,  $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező, ahol  $\mathbf{r}$  az  $\mathbb{R}^3$ -beli Descartes koordináta-rendszerben  $\mathbf{r} = (x; y; z)$ .

| Rotáció   | Divergencia  | Gradiens   |
|---|--|--|
| $\text{rot } \mathbf{v}$  | $\text{div } \mathbf{v}$   | $\text{grad } \varphi$   |
| $\nabla \times \mathbf{v}$  | $\langle \nabla; \mathbf{v} \rangle$   | $\nabla \cdot \varphi$   |
| $\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ | $\left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\rangle$ | $\begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix}$ |
| $\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$   | $\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$  | $\mathcal{D}_{\varphi} = \mathbb{R}^3$   |
| $\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$   | $\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$  | $\mathcal{R}_{\varphi} = \mathbb{R}$   |
| $\mathcal{R}_{\text{rot } \mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$   | $\mathcal{R}_{\text{div } \mathbf{v}} = \mathbb{R}$  | $\mathcal{R}_{\text{grad } \varphi} = \mathbb{R}^3$  |

Speciális esetek:

- ha  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , akkor a vektormező forrásmentes,
- ha  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , akkor a vektormező örvénymentes.

## Definíció 2.2 : Laplace-operátor

A Laplace-operátor egy másodrendű differenciáloperátor az  $n$  dimenziós térben. Megadja egy skalármező gradiensének divergenciáját, azaz:

$$\Delta \varphi = \langle \nabla; \nabla \rangle \varphi = \text{div grad } \varphi.$$

$\Phi, \Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármezők,  $\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormezők,  $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$  pedig skalárok.

- Teljesül a linearitás:

$$\text{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi$$

$$\text{rot}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{div}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}$$

- Zérusság:

$$\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\text{grad}(\Phi \Psi) = \Phi \text{grad } \Psi + \Psi \text{grad } \Phi$$

$$\text{div}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{div } \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad } \Phi \rangle$$

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad } \Phi$$

- Egyéb szabályok:

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u} + (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u}$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}; \text{rot } \mathbf{v} \rangle$$

$$\text{grad}(\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle) = (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

### Definíció 2.3 : Skalárpotenciálosság

Egy  $\mathbf{v} : V \rightarrow V$  vektormező skalárpotenciális, ha létezik olyan  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező, hogy  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ .

### Definíció 2.4 : Vektorpotenciálosság

Egy  $\mathbf{v} : V \rightarrow V$  vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan  $\mathbf{u} : V \rightarrow V$  vektormező, hogy  $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$ .

### Tétel 2.1 : Örvény- és forrásmentesség

Legyen  $\mathbf{v} : V \rightarrow V$  mindenhol értelmezett, legalább egyszer differenciálható vektormező. Ekkor:

$$\mathbf{v} \text{ skalárpotenciális} \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ hiszen } \text{rot grad } \varphi \equiv \mathbf{0}, \quad (\text{örvénymentes})$$

$$\mathbf{v} \text{ vektorpotenciális} \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0, \text{ hiszen } \text{div rot } \mathbf{u} \equiv 0. \quad (\text{forrásmentes})$$

**Potenciálfüggvények számítása:**

Legyen  $\varphi$  skalármező  $\mathbf{v}$  vektormező skalárpotenciálja. Ebben az esetben tudjuk, hogy  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , vagyis

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^T.$$

Ilyen esetben a potenciálfüggvény az alábbi módon számítható:

$$V(\mathbf{r}) = \int_0^{x_1} \mathbf{v}(\xi; x_2; \dots; x_n) d\xi + \int_0^{x_2} \mathbf{v}(0; \xi; \dots; x_n) d\xi + \dots + \int_0^{x_n} \mathbf{v}(0; 0; \dots; \xi) d\xi.$$

Legyen  $\mathbf{u}$  vektormező  $\mathbf{v}$  vektormező vektorpotenciálja. A potenciál számtalan alakban előállhat, ezért keressük ezt az alábbi alakban:

$$\mathbf{u} = (u_x; u_y; 0)^T$$

A potenciál komponensei az alábbi módon számíthatóak:

$$u_x = \int_0^z v_y(x; y; \xi) d\xi, \quad u_y = \int_0^x v_z(\xi; y; 0) d\xi - \int_0^z v_x(x; y; \xi) d\xi.$$

Határozzuk meg a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz)\hat{\mathbf{i}} + (zx)\hat{\mathbf{j}} + (xy)\hat{\mathbf{k}}$  vektormező skalár- és vektorpotenciálját!

A vektormező rotáciája  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , vagyis  $\exists V(\mathbf{r}) : \mathbf{v} = \text{grad } V$ , ahol  $V$  a vektormező skalárpotenciálja.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \int_0^x v_x(\xi; y; z) d\xi + \int_0^y v_y(0; \xi; z) d\xi + \int_0^z v_z(0; 0; \xi) d\xi \\ &= \int_0^x yz d\xi + \int_0^y 0 \cdot z d\xi + \int_0^z 0 \cdot 0 d\xi = xyz. \end{aligned}$$

A vektormező divergenciája  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , vagyis  $\exists \mathbf{u}(\mathbf{r}) : \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$ , ahol  $\mathbf{u}$  a vektormező vektorpotenciálja.

Keressük a potenciált  $\mathbf{u} = (u_x)\hat{\mathbf{i}} + (u_y)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$  alakban! Ekkor:

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^z v_y(x; y; \xi) d\xi = \int_0^z x\xi d\xi = \frac{1}{2}xz^2, \\ u_y &= \int_0^x v_z(\xi; y; 0) d\xi - \int_0^z v_x(x; y; \xi) d\xi = \int_0^x \xi y d\xi - \int_0^z y\xi d\xi = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}yz^2. \end{aligned}$$

A potenciálok tehát:

$$V(\mathbf{r}) = xyz, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} xz^2 \\ x^2y - yz^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 2.2. Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi skalármezők gradiensét! Hattassa a függvényekre a Laplace-operátort is!

a)  $\varphi(\mathbf{r}) = 6x^y + \sin e^z$

b)  $\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2/2$

c)  $\chi(\mathbf{r}) = xy + xz + yz$

d)  $\omega(\mathbf{r}) = 2x^2y + xz^2 + 6y$

2. Számítsa ki az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját! Hol lesznek forrásmentesek, illetve örvénymentesek?

a)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$

b)  $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (3xy + z^2)\hat{\mathbf{i}} + (6e^z)\hat{\mathbf{j}} + (-5x^y)\hat{\mathbf{k}}$

c)  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\ln(xy/z))\hat{\mathbf{i}} + (\ln(yz/x))\hat{\mathbf{j}} + (\ln(zx/y))\hat{\mathbf{k}}$

d)  $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{a}\|\mathbf{r} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3)$

3. Bizonyítsa be a következő azonosságokat, amennyiben  $\varphi, \psi$  skalármezők,  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  pedig vektormezők!

a)  $\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$

b)  $\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$

c)  $\text{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \text{ grad } \Psi + \Psi \text{ grad } \Phi$

d)  $\Delta(\Phi\Psi) = (\Delta\Phi)\Psi + 2\langle \text{grad } \Phi; \text{grad } \Psi \rangle + \Psi(\Delta\Phi)$

e)  $\text{div}(\Phi\mathbf{v}) = \langle \text{grad } \Phi; \mathbf{v} \rangle + \Phi \text{ div } \mathbf{v}$

f)  $\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \text{rot } \mathbf{v}; \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{w} \rangle$

4. Vizsgálja meg, hogy az alábbi vektormezők skalár- illetve vektorpotenciálisak-e! Ha igen, adja meg a potenciálfüggvényeket! A valós konstansokat legyenek zérusak, valamint a vektorpotenciált – amennyiben létezik – olyan módon adja meg, hogy a harmadik komponense zérus legyen.

a)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y + z)\hat{\mathbf{i}} + (x + z)\hat{\mathbf{j}} + (x + y)\hat{\mathbf{k}}$

b)  $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (e^{x+\sin y})\hat{\mathbf{i}} + (e^{x+\sin y} \cos y)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$

c)  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (2zx^3)\hat{\mathbf{i}} + (3z)\hat{\mathbf{j}} + (-3x^2z^2)\hat{\mathbf{k}}$