

11

TODO

Matematika G3 – Differenciálegyenletek

Utoljára frissítve: 2025. november 16.

11.1. Elméleti áttekintő

Definíció 11.1 : Egzakt differenciálegyenlet

A $P(x; y) dx + Q(x; y) dy = 0$ differenciálegyenlet – ahol $P; Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények – egzaktnak nevezzük, ha teljesül az alábbi feltétel:

$$\frac{\partial P(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x}.$$

Ekkor $\exists F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, melyre igaz, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x; y)}{\partial x} &= P(x; y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F(x; y)}{\partial y} = Q(x; y) \\ \frac{\partial F(x; y)}{\partial x} dy + \frac{\partial F(x; y)}{\partial y} dx &= 0 \\ F(x; y) &= C \end{aligned}$$

Oldjuk meg az alábbi egzakt differenciálegyenletet!

$$\underbrace{(2xy + y)}_{P(x; y)} dx + \underbrace{(x^2 + x)}_{Q(x; y)} dy = 0$$

Ellenőrizzük, hogy valóban egzakt-e a differenciálegyenlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

tehát egzakt. Integráljuk P -t x szerint, Q -t pedig y szerint:

$$\begin{aligned} F(x; y) &= \int P dx = \int (2xy + y) dx = x^2 y + xy + C_y(y), \\ F(x; y) &= \int Q dy = \int (x^2 + x) dy = x^2 y + xy + C_x(x), \end{aligned}$$

ahol $C_y(y)$ és $C_x(x)$ rendre y -től és x -től függő függvények, jelen esetben nullának választhatóak. A megoldás tehát:

$$x^2 y + xy = C.$$

Az előző példát más módszerekkel is megoldhattuk volna, például szeparábilis differenciálegyenletként:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x} \Rightarrow \ln y = -\ln(x^2+x) + K \Rightarrow y = \frac{C}{x^2+x}.$$

Differenciálegyenlet egzaktté tétele

Előfordulhat, hogy a $P(x; y) dx + Q(x; y) dy = 0$ differenciálegyenlet nem egzakt, de integráló tényező segítségével egzaktté tehető.

Tegyük fel, hogy $\exists M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $M(x; y)P(x; y) dx + M(x; y)Q(x; y) dy = 0$ differenciálegyenlet már egzakt, azaz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial MP}{\partial y} &= \frac{\partial MQ}{\partial x} \\ \frac{\partial M}{\partial y}P + M\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial M}{\partial x}Q + M\frac{\partial Q}{\partial x} \\ Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy M egyváltozós:

$M(x)$, ekkor a differenciálegyenlet az alábbi alakra redukálódik:

$$Q\frac{\partial M}{\partial x} + M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Ez már $M(x)$ -re szeparábilis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} dM &= \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \\ \ln M &= \int \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q} dx \Rightarrow M(x) = C e^{\int \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q} dx}. \end{aligned}$$

Itt C tetszőlegesen megválasztható, ezért célszerű 1-nek választani.

$M(y)$, ebben az esetben pedig a differenciálegyenlet az alábbi alakot ölti:

$$P\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Ez már $M(y)$ -re szeparábilis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} dM &= \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \\ \ln M &= \int \frac{\partial_y Q - \partial_x P}{P} dy \Rightarrow M(y) = C e^{\int \frac{\partial_y Q - \partial_x P}{P} dy}. \end{aligned}$$

C ebben az esetben is tetszőlegesen megválasztható.

Előfordulhat, hogy a differenciálegyenlet nem egzakt, és egyváltozós multiplikátorral sem tehető azzá. Ilyen például:

$$(x^2 + xy) dx + (y^2 + xy) dy = 0.$$

Tegyük egzakttá az alábbi differenciálegyenlet!

$$(y^3 + y)x^2 dx + \frac{2y^3 + 3y^2 + 2y + 1}{3} x^3 dy = 0$$

A parciális deriváltak:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = x^2(3y^2 + 1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = x^2(2y^3 + 3y^2 + 2y + 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

A differenciálegyenlet valóban nem egzakt. Viszont megfigyelhetjük, hogy mind a parciális deriváltakban, mind $P(x; y)$ -ben szerepel egy x^2 -es szorzó. Ezek az y -től függő multiplikátoros képletben kiejtik egymást:

$$\ln M(y) = \int \frac{\partial_y Q - \partial_x P}{P} dy = \int \frac{2y^3 + 2y}{y^3 + y} dy = \int 2 dy = 2y(+C) \Rightarrow M(y) = e^{2y}.$$

Ezek után a differenciálegyenlet már egzakt:

$$\underbrace{e^{2y}(y^3 + y)x^2 dx}_{P'} + \underbrace{e^{2y}\frac{2y^3 + 3y^2 + 2y + 1}{3}x^3 dy}_{Q'} = 0.$$

Ellenőrizzük a parciális deriváltakat:

$$\begin{cases} \frac{\partial P'}{\partial y} = x^2 e^{2y} [2(y^3 + y) + 3y^2 + 1] \\ \frac{\partial Q'}{\partial x} = x^2 e^{2y} (2y^3 + 3y^2 + 2y + 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{\partial Q'}{\partial x}.$$

Most már integrálhatjuk P' -t x szerint, Q' -t pedig y szerint:

$$F(x; y) = \int P' dx = \int e^{2y}(y^3 + y)x^2 dx = \frac{e^{2y} x^3}{3} (y^3 + y) + C_y(y),$$

$$F(x; y) = \int Q' dy = \frac{x^3}{3} \int e^{2y}(2y^3 + 3y^2 + 2y + 1) dy = \frac{e^{2y} x^3}{3} (y^3 + y) + C_x(x).$$

Ahol $C_y(y)$ és $C_x(x)$ rendre y -től és x -től függő függvények, jelen esetben nullának választhatóak. A megoldás tehát:

$$\frac{e^{2y} x^3}{3} (y^3 + y) = C.$$

Definíció 11.2 : Bernoulli-féle differenciálegyenlet

Az olyan egyenleteket, melyek

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^n(x)$$

alakban írhatóak fel, és $p, q : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint $n \notin \{0; 1\}$, Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük.

Bernoulli-féle differenciálegyenlet megoldása

Az ilyen típusú differenciálegyenletek nem lineárisak, de az alábbi helyettesítéssel lineárisra tehetőek:

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y' y^{-n} = \frac{z'}{1-n}.$$

A helyettesítés után az egyenlet:

$$y' y^{-n} + p(x)y^{1-n} = \frac{q(x)}{1-n} \frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x),$$

amely már lineáris, megoldható a korábban tanult módszerekkel.

Oldjuk meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenletet:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2y^3, \quad x > 0$$

Jelen esetben $n = 3$, éljünk a $z = y^{1-3} = y^{-2}$ helyettesítéssel, ekkor

$$z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y'y^3 = -\frac{z'}{2}$$

Helyettesítsük be az egyenletbe:

$$y'y^{-3} + \frac{2}{x}y^{-2} = x^2 \Rightarrow -\frac{z'}{2} + \frac{2}{x}z = x^2 \Rightarrow z' - \frac{4}{x}z = -2x^2$$

Homogén megoldás z-re:

$$z_h = Ce^{\int \frac{4}{x} dx} = Cx^4.$$

Partikuláris megoldás z-re:

$$z_p = x^4 \int \frac{-2x^2}{x^4} dx = x^4 \int -2x^{-2} dx = x^4 \left(2x^{-1} + \underline{\underline{K}} \right) = 2x^3.$$

Általános megoldás:

$$z = z_h + z_p = Cx^4 + 2x^3 \Rightarrow y = z^{-1/2} = (Cx^4 + 2x^3)^{-1/2}.$$

Definíció 11.3 : Ricatti-féle differenciálegyenletek

A Ricatti-típusú differenciálegyenletek elsőrendű, másodfokú, nemlineáris egyenletek, amelyek az alábbi alakban írhatóak fel:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^2(x) + h(x).$$

Ha $q(x) = 0$, akkor a Ricatti-egyenlet lineáris.

Ha $h(x) = 0$, akkor Bernoulli-típusú egyenletet kapunk.

Ricatti-féle differenciálegyenlet megoldása

Egy Ricatti-egyenlet általában nem oldható meg integrálással. A standard módszer akkor működik közvetlenül, ha ismerjük az egyenlet y_p partikuláris megoldását.

Bernoulli-típusra redukálás, majd linearizálás

Alkalmazzuk az alábbi eltolást:

$$y = y_p + z.$$

Ekkor, felhasználva hogy

$$y_p' + p y_p = q y_p^2 + h,$$

az egyenlet z -re:

$$z' + p z = 2q y_p z + q z^2 \Leftrightarrow z' = (2q y_p - p)z + q z^2.$$

Az egyenlet már Bernoulli-típusú, használhatjuk a korábban tanult helyettesítést:

$$z = \frac{1}{u} \Rightarrow z' = -\frac{u'}{u^2}$$

Behelyettesítve:

$$-\frac{u'}{u^2} = (2q y_p - p)\frac{1}{u} + q\frac{1}{u^2} \Rightarrow -u' = (2q y_p - p)u + q.$$

Az egyenlet már lineáris, megoldható a korábban tanult módszerekkel:

$$u' + \alpha u = \beta, \quad \text{ahol} \begin{cases} \alpha := 2q y_p - p, \\ \beta := -q \end{cases}$$

Egylépéses linearizálás

Alkalmazzuk az alábbi helyettesítést:

$$y = \frac{1}{u} + y_p \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2} + y_p'.$$

Ezt visszahelyettesítve ugyanarra az alakra jutnánk, mint az előző módszer során.

Oldjuk meg az alábbi Ricatti-féle differenciálegyenletet:

$$y' + e^x y = e^{2x} y^2 - e^{-x}, \quad y_p = e^{-x}$$

Bernoulli-típusra redukálás, majd linearizálás

Eltolás a partikuláris megoldással:

$$y = y_p + z = e^{-x} + z, \quad y' = -e^{-x} + z'.$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$-e^{-x} + z' + e^x(e^{-x} + z) = e^{2x}(e^{-x} + z)^2 - e^{-x}.$$

Az egyszerűsítés után:

$$z' = e^x z + e^{2x} z^2.$$

Most linearizáljuk az egyenletet $u = 1/z$ helyettesítéssel:

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = \frac{e^x}{u} + \frac{e^{2x}}{u^2} \Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{e^x}{u} + \frac{e^{2x}}{u^2} \Rightarrow u' + e^x u = -e^{2x}.$$

A linearizált egyenlet homogén megoldása:

$$u_p(x) = C e^{-\int e^x dx} = C \underbrace{e^{-e^x}}_{U(x)}.$$

Az általános megoldás az eddigiekhez képest egy más módszerrel is megkapható. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $U(x)$ -szel:

$$e^{e^x} u' + e^x e^{e^x} u = -e^{2x} e^{e^x}.$$

Az egyenlet bal oldalán $U(x) \cdot u'(x)$ szorzatfüggvény deriváltja található, vagyis:

$$(e^{e^x} u)' = -e^{2x} e^{e^x} \Rightarrow e^{e^x} u = -\int e^{2x} e^{e^x} dx = -\int e^{e^x+2x} dx$$

Éljünk a $t = e^{e^x}$ helyettesítéssel, ekkor $x = \ln \ln t$, $e^x = \ln t$, $dt = e^{e^x} \cdot e^x dx = e^{e^x+1}$.

$$e^{e^x} u = -\int e^{2x} e^{e^x} \frac{dt}{e^{e^x+1}} = -\int e^x dt = -\int \ln t dt = -t \ln t + t = -e^{e^x} e^x + e^{e^x} + C$$

Az általános megoldás u -ra:

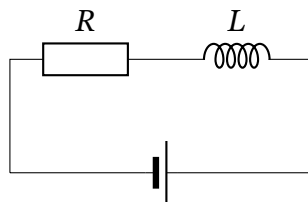
$$u = e^{-e^x} \cdot [e^{e^x}(1 - e^x) + C] = 1 - e^x + C e^{-e^x}.$$

Visszahelyettesítve z -re, majd y -ra:

$$z = \frac{1}{u} = \frac{1}{1 - e^x + C e^{-e^x}} \Rightarrow y = e^{-x} + z = e^{-x} + \frac{1}{1 - e^x + C e^{-e^x}}.$$

11.2. Feladatok

1. Egy soros RL-körre konstans u_0 feszültséget kapcsolunk. Adja meg az áram időfüggvényét!



$$u_R = R \cdot i$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

2. Oldja meg az alábbi egzakt, illetve egyakttá tehető differenciálegyenleteket!

a) $(2x + 2 \sin y) dx + (2x \cos y - \sin y) dy = 0,$

b) $(1 - xy) dx + (xy - x^2) dy = 0,$

c) $(\ln(y^2 + 1)) dx + \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1} dy = 0,$

d) $(e^{-y}) dx + (x e^{-y} - 2y e^{-2y}) dy = 0.$

3. Oldja meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3y}{x} = x^4 y^{1/3}$$

4. Oldja meg az alábbi Ricatti féle differenciálegyenletet!

$$y' = xy^2 - (4 - 2x^2)y + x^3 + 4x + 1$$