1 Vektoranalízis

A fejezetben érintett témakörök

1.1. Ismétlés

Definíció 1.1.1 : Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet, $\mathbb{T}$ test. A $(V; +, \circ)$ a $\mathbb{T}$ test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V; +)$ Abel-csoport,
2. $\forall \lambda; \mu \in T \ \wedge \ \forall \boldsymbol{x} \in V \ : \ (\lambda \circ \mu) \circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ (\mu \circ \boldsymbol{x})$,
3. ha ε a T-beli egységelem, akkor $\forall \boldsymbol{x} \in V \ : \ \varepsilon \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
4. teljesül a disztributivitás:
   - $\forall \lambda; \mu \in T \ \wedge \ \forall \boldsymbol{x} \in V \ : \ \lambda \circ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \lambda \circ \boldsymbol{y}$,
   - $\forall \lambda; \mu \in T \ \wedge \ \forall \boldsymbol{x} \in V \ : \ (\lambda + \mu) \circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \mu \circ \boldsymbol{x}$.

Definíció 1.1.2 : Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon $\mathbb{T}$ test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1-beli vektor ($\forall \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in V_1$) és $\mathbb{T}$-beli skalár ($\lambda \in \mathbb{T}$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b})$ $\sim$ additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{a})$ $\sim$ homogén (skalár kiemelhető).

Definíció 1.1.3 : Homomorfizmus és endomorfizmus

$$\mathrm{Hom}(V_1; V_2) := \{ \varphi : V_1 \to V_2 \mid \varphi \text{ lineáris} \} \qquad \mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V; V)$$

Lineáris leképezések mátrixreprezentációja

Legyen V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, $\dim(V_1) = n$ és $\dim(V_2) = k$. Ekkor a $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezést reprezentáló mátrix $n \times k$ dimenziós.

$(\mathrm{Hom}(V_1; V_2); +; \lambda)$ és $(\mathcal{M}_{k \times n}; +; \lambda)$ vektorterek izomorfok egymással.

Definíció 1.1.4 : Skaláris szorzat

Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér, és $\langle \ ; \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvény, melyet skaláris szorzatnak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x} \rangle$ minden $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \in V$ esetén, (**szimmetrikus**)
2. $\langle \lambda \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \rangle$ minden $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, (**homogén**)
3. $\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y} \rangle$ minden $\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y} \in V$ esetén, (**additív**)
4. $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. (**nemnegatív**)

A skaláris szorzás szimm. billineáris forma, amely az Euklideszi térben értelmezve van.

1.2. Alapfogalmak

Definíció 1.2.1 : Konvektor

Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér. $V^* := \mathrm{Hom}(V;\mathbb{R})$ elemeit ($\alpha : V \to \mathbb{R}$) lineáris funkcionáloknak, lineáris formáknak, vagy 1-formáknak nevezzük. Mivel α lineáris leképezés, ezért

$$\alpha(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a\,\alpha(\boldsymbol{v}) + b\,\alpha(\boldsymbol{w}) \text{ teljesül.}$$

Definíció 1.2.2 : Duális tér

Legyen $\alpha;\beta \in V^*$, $\boldsymbol{v} \in V$, $a \in \mathbb{R}$. A fenti módon teljesülnek az alábbiak:

- $(\alpha + \beta)(\boldsymbol{v}) := \alpha(\boldsymbol{v}) + \beta(\boldsymbol{v})$,
- $(a\,\alpha)(\boldsymbol{v}) := a\,\alpha(\boldsymbol{v})$.

Ekkor V^* vektortérré tehető, V vektortér duális terének nevezzük.

Bázis jelölése

- $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1;\hat{\boldsymbol{e}}_2;\dots;\hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ – ortonormált / standard bázis
- $\{\boldsymbol{b}_1;\boldsymbol{b}_2;\dots\boldsymbol{b}_n\}$ – tetszőleges bázis

Einstein-féle konvenció

$!\exists\,(r^1;r^2;\dots;r^n)$, melyre teljesül, hogy

$$\boldsymbol{v} = r^1\boldsymbol{b}_1 + r^2\boldsymbol{b}_2 + \dots + r^n\boldsymbol{b}_n = \sum_{j=1}^{n} r^j\boldsymbol{b}_j = r^j\boldsymbol{b}_j$$

Vezessük be a következő 1-formát: $\omega^i : V \to \mathbb{R},\ \forall\,\boldsymbol{v} \in V : \omega^i(\boldsymbol{v}) = r^i$ Ekkor $\boldsymbol{v}$ felírható az alábbi alakban:

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\omega^1(\boldsymbol{v})}_{r^1}\boldsymbol{b}_1 + \underbrace{\omega^2(\boldsymbol{v})}_{r^2}\boldsymbol{b}_2 + \dots + \underbrace{\omega^n(\boldsymbol{v})}_{r^n}\boldsymbol{b}_2$$

!

A fent definiált $\omega^i : V \to \mathbb{R}$ 1-formák ($i \in 1;\ 2;\ \dots;\ n$) bázist alkotnak V^*-ban.

Bizonyítás (Egzisztencia):
Legyen $\alpha : V \to \mathbb{R}$ 1-forma:

$$\alpha\left(\omega^1(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{b}_1 + \dots + \omega^n(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{b}_n\right) = \omega^1(\boldsymbol{v})\,\alpha(\boldsymbol{b}_1) + \dots + \omega^n(\boldsymbol{v})\,\alpha(\boldsymbol{b}_n)$$

$$\alpha(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \omega^j(\boldsymbol{v})\,\alpha(\boldsymbol{b}_j)$$

$$\alpha = \underbrace{\alpha(\boldsymbol{b}_1)}_{r_1}\,\omega^1 + \dots + \underbrace{\alpha(\boldsymbol{b}_n)}_{r_n}\,\omega^n = \sum_{j=1}^{n} r_j\,\omega^j$$

r_i nem speciális, tetszőleges 1-forma felírható így.

Bizonyítás (Unicitás):

Tegyük fel, hogy:

$$\alpha = r_1\,\omega^1 + r_2\,\omega^2 + \ \dots\ + r_n\,\omega^n,$$
$$\alpha = s_1\,\omega^1 + s_2\,\omega^2 + \ \dots\ + s_n\,\omega^n.$$

Vonjuk ki egymásból a 2 egyenletet:

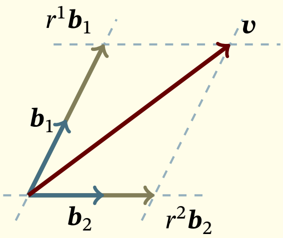
$$\mathcal{O} = (r_1 - s_1)\omega^1 + (r_2 - s_2)\omega^2 + \dots + (r_n - s_n)\omega^n$$

Ekkor $\mathcal{O}$ egy 1-forma, melynek bármely vektort a nullvektorba visz, azaz

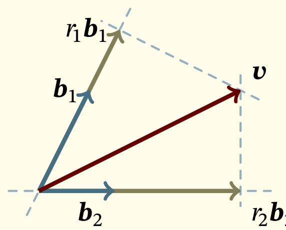
$$\mathcal{O} : V \to \mathbb{R} \quad \mathcal{O}(\boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \qquad \Leftrightarrow \qquad r_i = s_i \qquad \forall\ i\text{-re.}$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát nem igaz a feltevés.

Kovariáns és kontravariáns koordináták



Kovariáns koordináták



Kontravariáns koordináták

$\boldsymbol{v} = r^1\boldsymbol{b}_1 + r^2\boldsymbol{b}_2$, ahol $(r^1;\ r^2)$ a $\boldsymbol{v}$ vektor kontravariáns koordinátái a $\{\boldsymbol{b}_1;\ \boldsymbol{b}_2\}$ bázisban. r_1 és r_2 pedig $\boldsymbol{v}$ kovariáns koordinátái, melyek a következőképpen számíthatóak:

$$r_i = \frac{\langle \boldsymbol{v}; \boldsymbol{b}_i\rangle}{\|\boldsymbol{b}_i\|} \cdot \frac{\boldsymbol{b}_i}{\|\boldsymbol{b}_i\|} = \frac{\langle \boldsymbol{v}; \boldsymbol{b}_i\rangle}{\underbrace{\langle \boldsymbol{b}_i; \boldsymbol{b}_i\rangle}_{r_i}} \cdot \boldsymbol{b}_i$$

Kovariáns és kontravariáns koordináták ortonormált $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1; \hat{\boldsymbol{e}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ bázisban megegyeznek.

Bizonyítás:

1.3. Lineáris leképezések

Definíció 1.3.1 : Lineáris leképezés adjungáltja

Legyen $(V; \langle\ ;\ \rangle)$ Euklideszi tér, $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. A $\varphi^* : V \to V$ lineáris leképezést a φ leképezés adjungáltjának hívjuk, ha $\forall \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{v}_2 \in V$-re:

$$\langle \varphi(\boldsymbol{v}_1); \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1; \varphi^*(\boldsymbol{v}_2) \rangle$$

$(\varphi^*)^* = \varphi$ – Idempotencia

Bizonyítás:

$$\left\langle (\varphi^*)^* (\boldsymbol{v}_1); \boldsymbol{v}_2 \right\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1; \varphi^*(\boldsymbol{v}_2) \rangle = \langle \varphi(\boldsymbol{v}_1); \boldsymbol{v}_2 \rangle .$$

φ^* mátrix reprezentációja

Reprezentálja φ-t $\mathbf{A}$, φ^*-ot pedig $\mathbf{A}^*$:

$$\langle \varphi(\boldsymbol{v}); \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}; \varphi^*(\boldsymbol{w}) \rangle$$
$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{A}^*\boldsymbol{w}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} \\ a^*_{21} & a^*_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$
$$\boxed{a_{11}} v_1 w_1 + \boxed{a_{12}} v_2 w_1 + \boxed{a_{21}} v_1 w_2 + \boxed{a_{22}} v_2 w_2 = \boxed{a^*_{11}} w_1 v_1 + \boxed{a^*_{12}} w_2 v_2 + \boxed{a^*_{21}} w_1 v_2 + \boxed{a^*_{22}} w_2 v_2$$

Megállapthatjuk, hogy $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\top$.

Szimmetrikus leképezés adjungáltja önmaga.

Leképezés felbontása

Legyen $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, ekkor $!\exists$ olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{S}$ antiszimmetrikus és szimmetrikus leképezés, ahol $\varphi = \mathcal{A} + \mathcal{S}$, melyek az endomorfizmusok vektorterét 2 diszjunkt halmazra bontják:

$$\mathcal{A} := \frac{\varphi - \varphi^*}{2} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{S} := \frac{\varphi + \varphi^*}{2}.$$

Bizonyítás (Unicitás):

Tegyük fel hogy φ előáll $\mathcal{A}_1 + \mathcal{S}_1$ és $\mathcal{A}_2 + \mathcal{S}_2$ összegeként is. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, majd vegyük mindkét oldal adjungáltját!

$$\mathcal{O} = \varphi - \varphi = (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) + (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2) = \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{S}}$$
$$\mathcal{O}^* = \mathcal{O} = \overline{\mathcal{A}}^* + \overline{\mathcal{S}}^* = -\overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{S}}$$

Az előző két egyenletből következik, hogy $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{S}}$. Feltevésünk hamisnak bizonyult.

Reguláris mátrix felbontása

Egy $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix felbontható szimmetrikus és ferdeszimmetrikus (antiszimmetrikus) részekre:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^\top}{2} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^\top}{2}.$$

Ha mátrixunk 3×3-as:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} + \mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}}_{\text{ferdeszimmetrikus}}.$$

Általános esetben:

$$\dim \mathbf{A} = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim \mathbf{S} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Az antiszimmetrikus leképezések és a V-beli vektorok között tudunk egy-egyértelmű hozzárendelést találni:

$$\mathbf{A} \in \mathcal{A} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} \in V$$

Keressünk egy olyan $\boldsymbol{v}$ vektort, melyre teljesül az alábbi egyenlet:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{+a_{12}}w_2 \boxed{+a_{13}}w_3 \\ \boxed{-a_{12}}w_1 \boxed{+a_{23}}w_3 \\ \boxed{-a_{13}}w_1 \boxed{-a_{23}}w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{v_2}w_3 \boxed{-v_3}w_2 \\ \boxed{v_3}w_1 \boxed{-v_1}w_3 \\ \boxed{v_1}w_2 \boxed{-v_2}w_1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{bmatrix}$$

Definíció 1.3.2 : Vektorinvariáns

Egy antiszimmetrikus lineáris transzformáció mindig leírható egy rögzített vektorral való keresztszorzással. Ez a vektor a leképezés vektorinvariánsa.

Csak ortonormált, Descartes-féle bázisban számítható az előbbi módszerrel egy leképezés vektorinvariánsa.

Definíció 1.3.3 : Lineáris transzformáció nyoma

Egy lineáris transzformáció főátlójában lévő elemek összege minden koordinátarendszerben ugyanannyi, tehát a koordináta-transzformáció nem befolyásolja. Ezt nevezzük a lineáris leképezés nyomának. (trace / spur)

1.4. Differenciáloperátorok

Legyen $\boldsymbol{f} : V \to V$ függvény ($\dim V = n$), melynek vegyük a deriváltját:

$$\boldsymbol{f}(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1; x_2; \ldots; x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \ldots & \partial_n f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n & \partial_2 f_n & \ldots & \partial_n f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{grad}^\top f_1 \\ \operatorname{grad}^\top f_2 \\ \vdots \\ \operatorname{grad}^\top f_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

Definiáljuk az alábbi fogalmakat:

- $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} := \mathbf{D}f - \mathbf{D}f^*$ – rotáció,
- $\operatorname{div} \boldsymbol{f} := \operatorname{tr}(\mathbf{D}f)$ – divergencia.

$V = \mathbb{R}^3$ esetén:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 & \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 & 0 & \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3 \\ \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 & \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrix vektorinvariánsa:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times f.$$

∇ - Nabla operátor (formális differenciáloperátor) – nem vektor, de aként viselkedik.

Gradiens, divergencia és rotáció számítása

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \langle \nabla; \boldsymbol{v} \rangle$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}$$

Differenciáloperátorok kompbinálása

Nem értelmezhető:

$$\operatorname{grad}\operatorname{grad}, \quad \operatorname{grad}\operatorname{rot}, \quad \operatorname{div}\operatorname{div}, \quad \operatorname{rot}\operatorname{div}.$$

Laplace-operátor:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

Tetszőleges $\boldsymbol{v}$ vektormező és φ skalármező esetén:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \equiv 0,$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} \varphi \equiv \boldsymbol{0}.$$

Definíció 1.4.1 : Skalárpotenciálosság

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező skalárpotenciálos, ha létezik olyan $\varphi : V \to \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$.

Definíció 1.4.2 : Vektorpotenciálosság

Egy $\boldsymbol{v} : V \to V$ vektormező vektorpotenciálos, ha létezik olyan $\boldsymbol{u} : V \to V$ vektormező, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$.

Tétel 1.4.1

Legyen $\boldsymbol{v} : V \to V$ mindenhol értelmezett, legalább egyszer differenciálható vektormező. Ekkor:

- $\boldsymbol{v}$ skalárpotenciálos $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, hiszen $\operatorname{rot}\operatorname{grad} \varphi \equiv \boldsymbol{0}$,
- $\boldsymbol{v}$ vektorpotenciálos $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, hiszen $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \equiv 0$.

Bizonyítás ($\Rightarrow$ könnyű, $\Leftarrow$ nehéz):

Ha $\boldsymbol{v}$ skalárpotenciálos $\Rightarrow$ $\exists \varphi : V \to \mathbb{R}$, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, ekkor $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} \varphi \equiv \boldsymbol{0}$

Ha $\boldsymbol{v}$ vektorpotenciálos $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{u} : V \to V$, hogy $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, ekkor $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \equiv 0$

!$\Phi; \Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármezők, $\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}; \boldsymbol{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezők, $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ pedig skalárok.

- Teljesül a linearitás:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) &= \lambda \operatorname{grad} \Phi + \mu \operatorname{grad} \Psi \\ \operatorname{rot}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \quad + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{w} \\ \operatorname{div}(\lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}) &= \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad + \mu \operatorname{div} \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

- Zérusság:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{grad} \Phi &\equiv \boldsymbol{0} \\ \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{v} &\equiv 0 \end{aligned}$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\Phi \Psi) &= \Phi \operatorname{grad} \Psi + \Psi \operatorname{grad} \Phi \\ \operatorname{div}(\Phi \boldsymbol{v}) &= \Phi \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{grad} \Phi \rangle \\ \operatorname{rot}(\Phi \boldsymbol{v}) &= \Phi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} \Phi \end{aligned}$$

- Egyéb szabályok:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{v} - \Delta \boldsymbol{v} \\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\mathbf{D}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - (\mathbf{D}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u}; \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \rangle \\ \operatorname{grad}(\langle \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v} \rangle) &= (\mathbf{D}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} + (\mathbf{D}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

3-dimenziós Levi–Civita-szimbólum

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ha } (i;j;k) \text{ az } (1;2;3) \text{ páros permutációja} \\ -1 & \text{ha } (i;j;k) \text{ az } (1;2;3) \text{ páratlan permutációja} \\ 0 & \text{ha } i=j, \text{ vagy } j=k, \text{ vagy } k=i \end{cases}.$$

Vektoriális szorzat esetében

$$(\boldsymbol{v})_i = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}x_jy_k = \begin{bmatrix}\varepsilon_{123}x_2y_3+\varepsilon_{132}x_3y_2\\ \varepsilon_{231}x_3y_1+\varepsilon_{213}x_1y_3\\ \varepsilon_{312}x_1y_2+\varepsilon_{321}x_2y_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\ x_3y_1-x_1y_3\\ x_1y_2-x_2y_1\end{bmatrix}.$$

Minden koordinátában hat tag szerepelne, viszont:

1. $\varepsilon_{223}=\varepsilon_{232}=\varepsilon_{323}=\varepsilon_{332}=0$,
2. $\varepsilon_{113}=\varepsilon_{131}=\varepsilon_{311}=\varepsilon_{311}=0$,
3. $\varepsilon_{112}=\varepsilon_{121}=\varepsilon_{211}=\varepsilon_{221}=0$.

A nemzérus tagok pedig:

1. $\varepsilon_{123}=+1$, $\varepsilon_{132}=-1$,
2. $\varepsilon_{231}=+1$, $\varepsilon_{213}=-1$,
3. $\varepsilon_{312}=+1$, $\varepsilon_{321}=-1$.

Linearitásos azonosságok bizonyítása

1. $\underline{\operatorname{grad}(\lambda\Phi+\mu\Psi)=\lambda\operatorname{grad}\Phi+\mu\operatorname{grad}\Psi}$

$$\left(\operatorname{grad}(\lambda\Phi+\mu\Psi)\right)_i = \partial_i(\lambda\Phi+\mu\Psi) = \lambda\,\partial_i\Phi+\mu\,\partial_i\Psi = \left(\lambda\operatorname{grad}\Phi+\mu\operatorname{grad}\Psi\right)_i.$$

2. $\underline{\operatorname{rot}(\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w})=\lambda\operatorname{rot}\boldsymbol{v}+\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{w}}$

$$\left(\operatorname{rot}(\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w})\right)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\lambda v_k+\mu w_k) = \lambda\,\varepsilon_{ijk}\partial_jv_k+\mu\,\varepsilon_{ijk}\partial_jw_k = \left(\lambda\operatorname{rot}\boldsymbol{v}+\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{w}\right)_i.$$

3. $\underline{\operatorname{div}(\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w})=\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\mu\operatorname{div}\boldsymbol{w}}$

$$\left(\operatorname{div}(\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{w})\right)_i = \partial_i(\lambda v_i+\mu w_i) = \lambda\,\partial_iv_i+\mu\,\partial_iw_i = \left(\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\mu\operatorname{div}\boldsymbol{w}\right)_i.$$

Zérusságos azonosságok bizonyítása

1. $\underline{\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi\equiv\boldsymbol{0}}$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi\right)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\Phi = -\varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_j\Phi = 0,$$

mert $\partial_j\partial_k$ szimmetrikus, ε_{ijk} pedig antiszimmetrikus j,k indexekre.

2. $\underline{\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\equiv 0}$

$$\left(\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\right)_i = \partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_jv_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jv_k = -\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_iv_k = 0,$$

mert $\partial_i\partial_j$ szimmetrikus, ε_{ijk} pedig antiszimmetrikus i,j indexekre.

Deriválási szabályokhoz hasonló azonosságok bizonyítása

1. $\underline{\operatorname{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \operatorname{grad}\Psi + \Psi \operatorname{grad}\Phi}$

$$\big(\operatorname{grad}(\Phi\Psi)\big)_i = \partial_i(\Phi\Psi) = \Phi\,\partial_i\Psi + \Psi\,\partial_i\Phi = \big(\Phi \operatorname{grad}\Psi + \Psi \operatorname{grad}\Phi\big)_i.$$

2. $\underline{\operatorname{div}(\Phi\boldsymbol{v}) = \Phi \operatorname{div}\boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{grad}\Phi\rangle}$

$$\big(\operatorname{div}(\Phi\boldsymbol{v})\big)_i = \partial_i(\Phi v_i) = \Phi\,\partial_i v_i + \langle \boldsymbol{v}; \partial_i \operatorname{grad}\Phi\rangle = \big(\Phi \operatorname{div}\boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{v}; \operatorname{grad}\Phi\rangle\big)_i.$$

3. $\underline{\operatorname{rot}(\Phi\boldsymbol{v}) = \Phi \operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad}\Phi}$

$$\begin{aligned}
\big(\operatorname{rot}(\Phi\boldsymbol{v})\big)_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\Phi v_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}(\Phi\,\partial_j v_k + v_k\,\partial_j\Phi) \\
&= \Phi\,\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k + \varepsilon_{ijk} v_k\,\partial_j\Phi \\
&= \Phi\,\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k - \varepsilon_{ijk} v_j\,\partial_k\Phi = \big(\Phi \operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad}\Phi\big)_i.
\end{aligned}$$

Egyéb szabályok bizonyítása

1.5. Vonalmenti integrál

Definíció 1.5.1 : Reguláris görbe

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nem feltétlenül korlátos intervallum. Ekkor az $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ immerziót reguláris görbének nevezzük.

Definíció 1.5.2 : Pályasebesség, Ívhossz

A $v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$ függvényt pályasebességnek hívjuk.
A pályasebesség I feletti integrálját a görbe ívhosszának nevezzük:

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_I \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_I \mathrm{d}s.$$

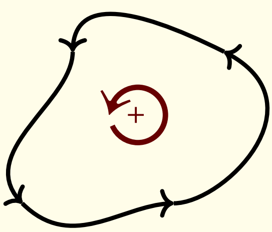
Számítsuk ki a $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $t \in [0;1]$ görbe ívhosszát!

$$L = \int_0^1 \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \cosh u \sqrt{1+\sinh^2 u} \, \mathrm{d}u = \int_0^1 \cosh^2 u \, \mathrm{d}u = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1+\cosh 2u}{2} \, \mathrm{d}u$$
$$= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{\operatorname{arsinh} t}{2} + \frac{t\sqrt{t^2+1}}{2}\right]_0^1 = \frac{\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1{,}1478$$

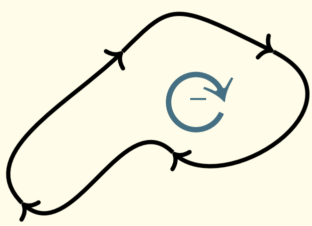
Definíció 1.5.3 : Irányított görbe

Egy $\boldsymbol{\gamma} : [a;b] \to \mathbb{R}^3$ görbe irányított, ha adott egy rendezés $(\leq)$ a paraméterértékeken. Ekkor $t_1 < t_2$ esetén $\boldsymbol{\gamma}(t_1)$ a görbe korábbi pontja, $\boldsymbol{\gamma}(t_2)$-höz képest. Ha $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$, akkor a görbe zárt.

Irányítottság szemléltetése

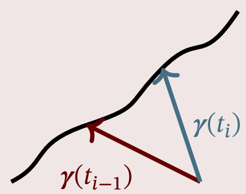


Pozitív irányítottságú görbe

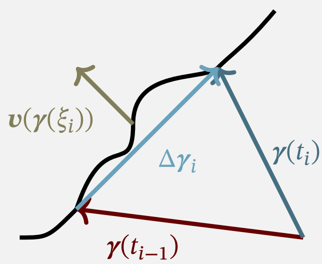


Negatív irányítottságú görbe

Ha létezik a $\sum_i \|\boldsymbol{\gamma}(t_i) - \boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})\|$ összeg supremuma, akkor a görbe rektifikálható.



Definíció 1.5.4 : Vonalmenti integrál



Ha a $\sum_i \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(\xi_i)); \boldsymbol{\gamma}(t_i) - \boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})\rangle$

összegnek létezika a határértéke a görbe beosztásának minden határon túli finomítására nézve, akkor azt monjuk, hogy a $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező integrálható az $\boldsymbol{\gamma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbe mentén, és ezt a $\boldsymbol{v}$ vektor $\boldsymbol{\gamma}$ görbe menti vonalintegráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle$$

Belátható, hogy a görbe menti integrál létezéséhez elegendő, hogy a vektormező csak a görbe mentén van értelmezve, és ott szakaszonként folytonos.

Tétel 1.5.1

Ha $\boldsymbol{\gamma}$ egy görbe, melynek paraméteres egyenlete: $\boldsymbol{\gamma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t)$, akkor a $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező $\boldsymbol{\gamma}$ görbén vett (skalárértékű) integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \int_I \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle \,\mathrm{d}t$$

Legyen $\boldsymbol{\gamma} : [0;1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t;t^2;t^3)$ görbe, $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+y; y+z; z+x)$ vektormező. Számoljuk ki a görbe menti integrált!

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t+t^2 \\ t^2+t^3 \\ t^3+t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (t+t^2) + 2(t^2+t^3) + 3(t^3+t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (6t + 6t^2 + 5t^3)\,\mathrm{d}t = 6\left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{5t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{37}{2}$$

Ha a görbe irányítását megváltoztatjuk, akkor az integrál értéke (-1)-szeresére változik.

Tétel 1.5.2 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\boldsymbol{\gamma} : [a;b] \to \mathcal{C} \subseteq U$, $t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t)$ folytonos görbe, $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(\boldsymbol{q}) - \varphi(\boldsymbol{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

Bizonyítás:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_a^b \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \rangle \, \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{\gamma}(t))}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = \varphi(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \varphi(\boldsymbol{\gamma}(a))$$

Tétel 1.5.3 : Gradiens-tétel megfordítása

Ha $\boldsymbol{v}$ egy olyan folytonosvektormező, hogy a vonalmenti integrál csak a kezdő- és végponttól függ, akkor $\exists \varphi$, skalármező, hogy $\operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{v}$.

Körintegrál jelölése

Ha $\boldsymbol{\gamma}$ zárt görbe, akkor a $\boldsymbol{v}$ vektormező egy $\boldsymbol{\gamma}$ görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle .$$

!

Ha a görbe menti integrál értéke független az úttól, akkor az integrál bármely zárt görbe mentén zérus.

Bizonyítás:

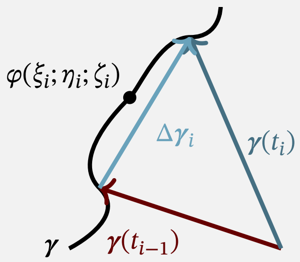
Legyen $\boldsymbol{\gamma}_1$ és $\boldsymbol{\gamma}_2$ két görbe, melyek kezdő- és végpontjaik megegyeznek. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \rangle = \int_{\mathcal{C}_2} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \rangle .$$

Képezzük a $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \cup (-\boldsymbol{\gamma}_2)$ zárt görbét. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_{\mathcal{C}_1} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \rangle - \int_{\mathcal{C}_2} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \rangle = 0.$$

Definíció 1.5.5 : Skalármező görbe menti, ívhossz szerinti integrálja



$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \gamma : I \to \mathcal{C}$$

Finomítsuk a végtelenségig a

$$\sum_i \varphi(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)\, \|\Delta \boldsymbol{r}_i\|$$

összeget. Így a következő integrált kapjuk:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi \,\mathrm{d}s.$$

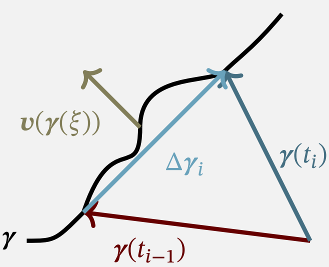
Legyen $\gamma : [0;1] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t;t^2;t^4)$. Adjuk meg a $\varphi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{1+4x^2+16yz}$ skalármező γ görbe menti integrálját!

$$\int_\gamma \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\,\|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2+16t^6}\sqrt{1^2+(2t)^2+(4t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 1+4t^2+16t^6\,\mathrm{d}t = \left[t+\frac{4}{3}t^3+\frac{16}{7}t^7\right]_0^1 = 1+\frac{4}{3}+\frac{16}{7} = \frac{97}{21}$$

Definíció 1.5.6 : Skalármező vektorértékű vonalintegrálja

$$\int \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \int \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}x \\ \int \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}y \\ \int \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}z \end{bmatrix}$$

Definíció 1.5.7 : Vektormező vektorértékű vonalintegrálja



$$\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \gamma : I \to \mathcal{C} \quad \xi_i \in [t_{i-1};t_i]$$

Finomítsuk a végtelenségig a

$$\sum_i \boldsymbol{v}(\gamma(\xi_i)) \times \Delta\gamma_i$$

összeget. Így a következő integrált kapjuk:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t$$

1.6. Felületmenti integrál

Definíció 1.6.1 : Reguláris felület

Legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$. Azt mondjuk, hogy az ϱ reguláris felület, ha $\forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ ponthoz megadható olyan $\boldsymbol{p}$-t tartalmazó $V \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz és $\varrho : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \cap V$ leképezés, melyre teljesülnek az alábbiak:

- ϱ differenciálható homeomorfizmus,
- ϱ immerzió (derivált leképezése injektív).

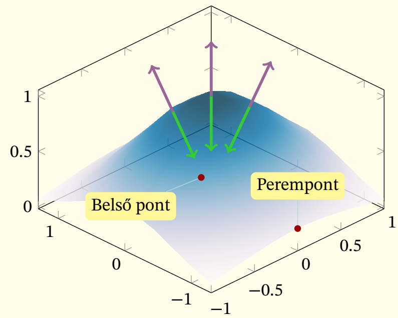
Ha ezek teljesülnek, akkor ϱ-t parametrációnak, $V \cap \mathcal{S}$-t koordinátakörnyezetnek nevezzük.

Definíció 1.6.2 : Elemi felület

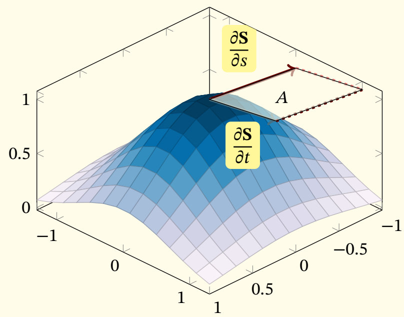
A $\varrho : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ elemi felület, ha ϱ legalább egyszer differenciálható és injektív.

$\partial(\ [a;b] \times [a;b]\ )$ a paramétertartomány pereme.

A felület irányítható, ha megadható rajta egy differenciálható egységvektormező.



Irányítás szemléltetése



Elemi felület

Definíció 1.6.3 : Skalármező skalárértékű felületmenti integrálja

Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\varrho : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$. Ekkor finomítsuk minden határon túl a

$$\sum_i \varphi\left(\xi_i; \eta_i; \zeta_i\right) \Delta S_i$$

összeget:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}S.$$

Számítása:

$$\iint_U \varphi(\varrho(s;t)) \left\| \frac{\partial \varrho}{\partial s} \times \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \quad \to \quad \text{ha a felület paraméterezve van,}$$

$$\iint_U \varphi(x;y;\Phi(x;y)) \sqrt{1 + (\partial_x \Phi)^2 + \left(\partial_y \Phi\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad \to \quad \text{ha } z = \Phi(x;y) \text{ alakban van.}$$

Integráljuk a $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$ skalármezőt az egységgömb $z > 0$ részén!

Az egységgömb paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s;t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \qquad s \in [0;\pi/2], \qquad t \in [0;2\pi], \qquad \boldsymbol{n} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| = \sin s.$$

A skalármező átparaméterezése:

$$\varphi(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) = \sin^2 s \cos^2 t + \sin^2 s \sin^2 t = \sin^2 s.$$

Az integrál kiszámítása:

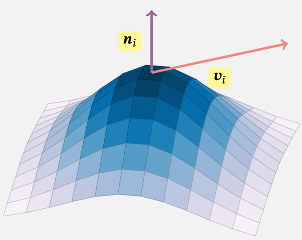
$$\begin{aligned} \int_S \varphi \,\mathrm{d}S &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 s \sin s \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 s) \sin s \,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - u^2)\,\mathrm{d}u = 2\pi \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Definíció 1.6.4 : Skalármező vektorértékű felületmenti integrálja

Felület implicit megadása esetén ($z = \Phi(x;y)$):

$$\int_S \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint \varphi(x;y;\Phi(x;y)) \begin{bmatrix} \pm\partial_x \Phi \\ \pm\partial_y \Phi \\ \mp 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Definíció 1.6.5 : Vektormező skalárértékű felületmenti integrálja



$$\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \boldsymbol{\varrho} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$$

Finomítsuk minden határon túl a $\sum_i \langle \boldsymbol{v}_i; \boldsymbol{n}_i \rangle$ összeget:

$$\int_S \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iint_U \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)); \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| \right\rangle,$$

ahol $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$.

Definíció 1.6.6 : Vektormező vektorértékű felületmenti integrálja

$$\int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_U \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

1.7. Integrálátalakító tételek

Tétel 1.7.1 : Stokes-tétel

Legyen $\boldsymbol{\varrho} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az $\boldsymbol{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ a $\boldsymbol{\varrho}$ peremét indukált, jobbézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle .$$

Ha $\boldsymbol{v}$ skalárpotenciálos, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Definíció 1.7.1 : Elemi tértartomány

$\mathbf{\Omega} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ elemi tértartomány, ha legalább egyszer folytonosan differenciálható leképezés. Ekkor

$$\det\left(\mathbf{D\Omega}(r;s;t)\right) = \left\| \frac{\partial \mathbf{\Omega}(r;s;t)}{\partial r\, \partial s\, \partial t} \right\| \neq 0.$$

Definíció 1.7.2 : Térfogat

Készítsünk egy olyan beleírt (c_i) és körülírt (C_i) kockarendszert, melyekre igaz, hogy $c_i \cap c_j$ csak lap, él, vagy csúcs lehet. Ekkor fennáll, hogy:

$$\bigcup_i c_i \subset \mathcal{V} \subset \bigcup_j C_j.$$

Finomítsuk minden határon túl ezeket a kockarendszereket. Ha ezek közös határértékhez tartanak, akkor:

$$\operatorname{Vol} \mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \left|\det\left(\mathbf{D\Omega}(r;s;t)\right)\right| \mathrm{d}r\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t.$$

Pozitív az irányítás, ha $\det \mathbf{D}\mathcal{V} > 0$.

Definíció 1.7.3 : Skalármező térfogaton vett skalárértékű integrálja

Legyen $\mathbf{\Omega} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi tértartomány. Legyen továbbá $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonos skalármező. Ekkor a φ térfogaton vett integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi \,\mathrm{d}V = \iiint_{D} \varphi\left(\mathbf{\Omega}(r;s;t)\right) \det\left(\mathbf{D\Omega}(r;s;t)\right) \mathrm{d}r\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t.$$

Tétel 1.7.2 : Gauss-Osztogradszkij-tétel

Legyen $\boldsymbol{\Omega} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, irányított,parametrizált tértartomány. Legyen továbbá $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ az $\boldsymbol{\Omega}$ peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle \, .$$

Ha $\boldsymbol{v}$ vektorpotenciálos, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$.

Tétel 1.7.3 : Green-tétel asszimetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \, \Delta\varphi + \langle \operatorname{grad} \psi; \operatorname{grad} \varphi \rangle \, \mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle \, .$$

Tétel 1.7.4 : Green-tétel szimmetrikus alakja

Legyenek $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszeresen folytonos skalármezők, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizált, irányított tértartomány, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$ perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \, \Delta\varphi + \varphi \, \Delta\psi \;\; \mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle$$