

10

Többszörös függvények

Matematika G2 – Többszörös analízis

Utoljára frissítve: 2025. április 14.

10.1. Elméleti Áttekintő

Többszörös függvények jelölése:Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény. Ekkor a függvény az alábbi formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto f(x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{bmatrix},$$

ahol az $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1; 2; \dots; k\}$ függvényeket komponensfüggvényeknek nevezzük.**Speciális elnevezések:**

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ vektor-vektor függvény,
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vektor-skalár függvény,
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ skalár-vektor függvény.

Definíció 10.1: GömbkörnyezetLegyen $p \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a p pont ε sugarú nyílt környezetén (gömbkörnyezetén) a

$$B_\varepsilon(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| < \varepsilon\} \text{ halmazt értjük.}$$

Definíció 10.2: Többszörös függvény határértékeTekintsük az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezést. Azt mondjuk, hogy az f határértéke $a \in \mathbb{R}^n$ pontban $A \in \mathbb{R}^k$, ha az A tetszőleg $\varepsilon > 0$ sugarú gömbkörnyezetéhez létezik az a -nak olyan $\delta(\varepsilon)$ sugarú gömbkörnyezete, hogy

$$x \in B_{\delta(\varepsilon)}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(A).$$

Tétel 10.1: Az átviteli elv általánosításaAz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény határértéke az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban akkor és csak akkor $A \in \mathbb{R}^k$, ha $\forall x_n \rightarrow a$ sorozat esetén $f(x_n) \rightarrow A$.

Definíció 10.3: Iránymenti derivált

Legyen $I \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és legyen adva egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az f függvény \mathbf{a} pontbeli \mathbf{v} irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük. Jele:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

Amennyiben \mathbf{v} az n -dimenziós téren az i -edik irányba mutat, akkor azt parciális deriválnak nevezzük, jelölései:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \partial_i f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = f'_{x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

Adjuk meg az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény parciális deriváltjait az $P(1; 2)$ pontban!

Először határozzuk meg a parciális deriváltakat parametrikusan, majd számoljuk ki a $P(1; 2)$ pontbeli értékeket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} &= 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 5 \Rightarrow \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \right|_P = 3 + 20 + 12 + 5 = 40, \\ \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} &= 5x^2 + 6xy - 36y^2 - 6 \Rightarrow \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right|_P = 5 + 12 - 144 - 6 = -133. \end{aligned}$$

Definíció 10.4: Gradiens

Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Az f függvény $\mathbf{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ pontbeli gradiensén az alábbi oszlopvektort értjük:

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\mathbf{a}) \\ \partial_2 f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)^T$$

A gyakorlatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v},$$

ahol \mathbf{v} egységvektor!

10.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények határértékét az origóban!

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad g(x; y) = \frac{x-y}{x+y}$$

2. Határozza meg az alábbi határértéket!

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow \infty}} \frac{xy-1}{y+1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+y+2z}{x-z+xy}$$

3. Határozza meg az alábbi függvények origóban lévő határértékeit

$$\text{a) } f(x; y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{ha egy } x = r_n \cos \varphi_n, y = r_n \sin \varphi_n, r_n \rightarrow \infty,$$

$$\text{b) } g(x; y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, \quad \text{ha egy } y = mx^k \text{ görbe mentén közelítjük az origót.}$$

4. Határozza meg az alábbi határértékeket!

$$\text{a) } \lim_{(x;y) \rightarrow (\infty; \infty)} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$$

$$\text{c) } \lim_{(x;y) \rightarrow (0; \infty)} x \cos^2 y$$

$$\text{b) } \lim_{(x;y) \rightarrow (\infty; \infty)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$$

$$\text{d) } \lim_{(x;y) \rightarrow (\infty; 0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$$

5. Definíció alapján határozza meg az $f(x; y) = x^2 - 2xy - 4y^2$ függvény deriváltját a $P(1; -1)$ pontban a $\mathbf{v}(1; -1)$ irány mentén!

6. Határozza meg az alábbi függvények parciális deriváltjait!

$$\text{a) } f(x; y) = x^3 - 5x^2 y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$$

$$\text{b) } g(x; y) = x^y$$

$$\text{c) } h(x; y) = e^{x^2 y} - 2x^2 y^3 \sin(\ln x + y)$$

7. Határozza meg az alábbi függvények gradiensét a megadott pontokban!

$$\text{a) } f(x; y) = \ln(x + y)$$

$$P_a(-2; 3)$$

$$\text{b) } g(x; y; z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$P_b(3; -4; 7)$$

8. Határozza meg azon pontoknak a halmazát amelyen az f függvény gradiense nullvektor!

$$f(x; y) = 3x^2 - 4xy + 2x + y^2 + 1$$