definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0){+}0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Többváltozós analízis BMETE94BG02 11

Matematika G2

Differenciálás I

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Iránymenti derivált**] Legyen $I \in^n$ nyílt halmaz, $f : I \to$ függvény és legyen adva egy $v \in^n$ egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x - \lambda v) - f(x)}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az f függvény a pontbeli v irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Gradiens**] Legyen $f :^n \to$. Az f függvény $a(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ pontbeli gradiense:

$$f(a) = \nabla f(a) = \partial_1 f(a) \vdots \partial_n f(a) = (\ ) \, f(x_0) x_1 \cdots f(x_0) x_n$$

[style=note, nobreak=true,] A gyakrolatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_v f(a) = f(a) \cdot v.$$

[style=example, nobreak=true] Számítsuk ki az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény $v(3; 4)$ irányú deriváltját az $(1; 2)$ pontban!

A gradiens az előző példában számolt parciális deriváltak alapján:

$$f(1; 2) = 40 - 133.$$

Az iránymenti derivált számításához még szükségünk van az v irányú egységvektorra:

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad e_v = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{5} 34 = 3/54/5.$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_v f(1;2) = f(1;2) \cdot e_v = 40 - 133 \cdot 3/54/5 = 40 \cdot 3/5 - 133 \cdot 4/5 = -82,4.$$

[style=note, nobreak=true,] Kétváltozós függvény esetén az gyakran az irányvektort az x-tengellyel bezárt szög (α) segítségével adjuk meg. Ekkor az egységvektor:

$$e = \cos\alpha \sin\alpha.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Magasabb rendű iránymenti deriváltak:**

Az elsőrendű iránymenti derivált:

$$fe = f \cdot e.$$

A másodrendű iránymenti derivált:

$$[order = 2]fe = (fe) \cdot e = (f \cdot e) \cdot e.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Adott irányú érintő egyenes kétváltozós függvények esetén:**

A $z = f(x;y)$ függvény segítségével a 3D-s térben egy felületet adhatunk meg. Ezen felület egy $P_0(x_0;y_0)$ pontbeli, $e(e_x;e_y)$ irányú érintő egyenese:

$$\frac{x - x_0}{e_x} = \frac{y - y_0}{e_y} = \frac{z - z_0}{\partial_e f(x_0;y_0)}, \quad ahol$$

z$_0 = f(x_0;y_0)$.

$$Amennyibenazirnyegybeesikaz$$

x$-tengellyel, akkor : x - x_0 = \frac{z-z_0}{\partial_x f(x_0;y_0)} \quad \Rightarrow \quad \partial_x f(x_0;y_0)(x - x_0) = z - z_0. Amennyibenazirnyegybeesik$
$y_0 = \frac{z-z_0}{\partial_y f(x_0,y_0)} \quad \Rightarrow \quad \partial_y f(x_0;y_0)(y - y_0) = z - z_0.$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Érintősík megadása kétváltozós függvény esetében:**

Az érintősík független az iránytól, azt csak a felületből kimutató normális, vagyis a gradiens adja meg. Az x_0 pontban felírt normálvektor:

$$n_{be} = \partial_x f \partial_y f - 1_{|x=x_0} \qquad n_{ki} = -\partial_x f - \partial_y f 1_{|x=x_0},$$

ahol n_{be} a befele, n_{ki} pedig a kifele mutató normálvektor. Ezek alapján az érintősík egyenlete:

$$n(x - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad fx|_{x=x_0}(x - x_0) + fy|_{x=x_0}(y - y_0) = z - z_0.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Implicit függvény parciális deriváltjai:**

Amennyiben a változók közötti kapcsolat nem írható fel explicit ($z = f(x;y)$) módon, akkor az implicit függvénymegadási módszerhez tudunk fordulni. Ez többváltozós esetben $F(x;y;z) = 0$ alakban tudjuk megtenni.

Ilyen esetben a z-től függő tagokat összetett függvényként kell kezelnünk, a parciális deriváltak pedig a következőek:

$$fx = zx \qquad s \qquad fy = zy.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Teljes differenciál:**

Egy $f :^n \to$ függvény teljes differenciálja:

$$Df = \sum_{i=1}^{n} f x_i x_i.$$

Kétváltozós esetben:

$$Df = fxx + fyy.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Jacobi-mátrix**] Legyen $f :^n \to^k$ leképezés. Ekkor $f'(a) = Jf(a)$, ahol $J \in M_{k\times n}$. A J mátrixot az f függvény Jacobi-mátrixának nevezzük, melynek elemei:

$$J(a) = f_1(x)x_1 f_1(x)x_2 \cdots f_1(x)x_n f_2(x)x_1 f_2(x)x_2 \cdots f_2(x)x_n \vdots \vdots \ddots \vdots f_k(x)x_1 f_k(x)x_2 \cdots f_k(x)x_{n|x=a} =^f_1 (a)^f_2$$

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és irányszög vagy irányvektor mentén!

   a) $f(x;y) = x^3 - 3xy^2 + 4y^4$, 7cm $P_a(1,1)$, 10cm $\alpha = 45°$,

   b) $g(x;y;z) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, 7cm $P_b(1;0;1)$, 10cm $v_b = [3,2,-5]$.

2. Határozza meg azon pontok halmazát, amin nem létezik az $f(x;y) = \ln\left(x^2 + xy\right)$ függvény $\alpha = 150°$-os irányhoz tartozó iránymenti deriváltja!

3. Határozza meg az alábbi függvények első és második iránymenti deriváltjait az adott pontban és irányrányszög vagy irányvektor mentén!

   a) $f(x;y) = 4x^4y + y^3x^2$, 7cm $P_a(1;1)$, 10cm $\alpha = 45°$,

   b) $g(x;y;z) = \sqrt{14}\,xyz + \sqrt{14}\,x^2y^2z^2$, 7cm $P_b(1;1;1)$, 10cm $v_b = [1;1;1]$.

4. Határozza meg az $f(x;y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ függvény $P(0;1)$ ponthoz és $\alpha = 60°$ irányhoz tartozó érintőegyenesének egyenletét!

5. Határozza meg a $f(x;y) = \sin xy$ függvény érintősíkjának egyenletét a $P(\pi 3;2)$ pontban!

6. Határozza meg azon pontok halmazát, ahol a $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$ felület érintősíkja párhuzamos a $2x - y + 5z - 25 = 0$ síkkal!

7. Határozza meg az $f(x;y) = \arctan xy$ függvény teljes differenciálját paraméteresen a $P_7(x_0;y_0)$ és a $Q_7(1;2)$ pontban!

8. Határozza meg egy henger térfogat mérésének a relatív hibáját, ha ismert, hogy a sugár 1%-os és a magasság 2%-os hibával lett mérve!

9. Határozza meg az f $:^3\rightarrow^2$ függvény Jakobi mátrixát! f(x;y;z)= x$^2 + y^2 + z\sin x$
   $z^2 + z\sin y$