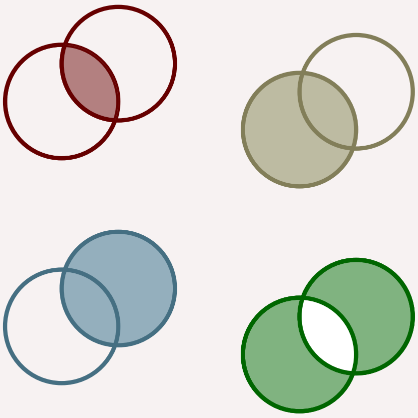
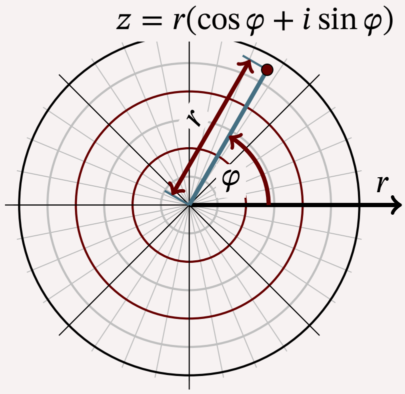
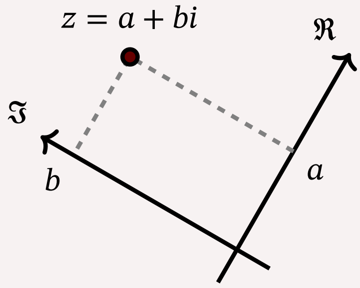
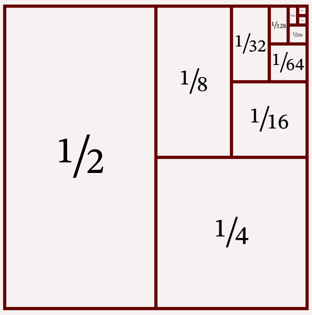




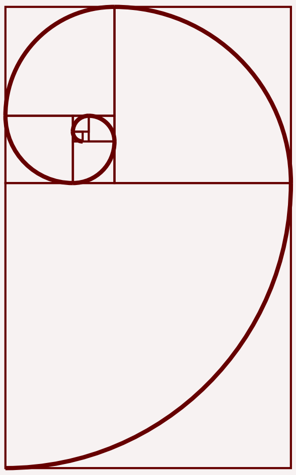


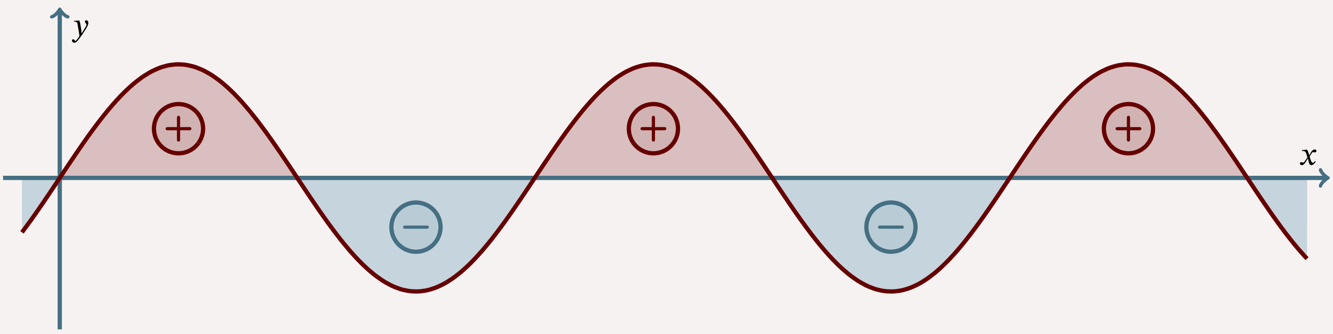


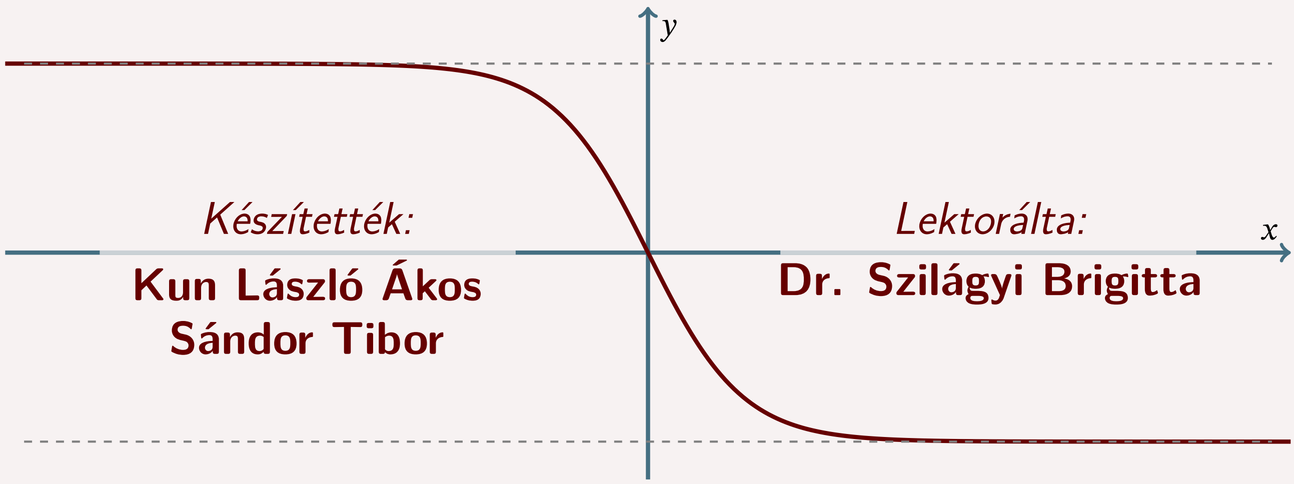
Matematika G1

(BMETE94BG01)

Előadásjegyzet







Készítették:

Kun László Ákos
Sándor Tibor

Lektorálta:

Dr. Szilágyi Brigitta

(1) A jegyzet forráskódja
(`https://github.com/szilagyi-math/notes`)

(2) Tantárgy honlapja
(`https://szilagyi-math.hu/subjects/G1`)

MŰEGYETEM 1782

Tartalomjegyzék

Jelölések **ix**

1 Halmazelmélet **1**
1.1 Alapfogalmak, alapműveletek . . . 2
1.2 Relációk, leképezések, függvények . . . 5
1.3 A számfogalom kiépítése . . . 7
1.4 Halmazok számossága . . . 9
1.5 Felkészülést segítő kérdések . . . 10

2 Komplex számok **11**
2.1 Fogalmak, definíciók . . . 12
2.2 Felkészülést segítő kérdések . . . 15

3 Sorozatok **17**
3.1 Fogalmak, definíciók . . . 18
3.2 Nevezetes sorozatok . . . 21
3.3 Felkészülést segítő kérdések . . . 24

4 Sorok **25**
4.1 Fogalmak, definíciók . . . 26
4.2 Felkészülést segítő kérdések . . . 29

5 Függvények **31**
5.1 Alapfogalmak . . . 32
5.2 Függvények határértéke . . . 32
5.3 Folytonosság . . . 33
5.4 Felkészülést segítő kérdések . . . 35

6 Differenciálszámítás **37**
6.1 Bevezetés . . . 38
6.2 Nevezetes függvények deriváltjai . . . 42
6.3 Középértéktételek . . . 43
6.4 Differenciálható függvények vizsgálata . . . 46
6.5 Felkészülést segítő kérdések . . . 49

7 Integrálszámítás **51**
7.1 Határozatlan integrál . . . 52
7.2 Integrálási segédlet . . . 53
7.3 Integrálási módszerek, speciális esetek . . . 54
7.3.1 Helyettesítéses integrálás . . . 54
7.3.2 Parciális integrálás . . . 56

7.3.3 Racionális törtfüggvények integrálása 59
7.3.4 Trigonometrikus függvények integrálása 64
7.4 Határozott integrál 65
7.4.1 A Riemann-integrál 65
7.4.2 A Newton-Leibniz-formula 69
7.4.3 Improprius integrál 70
7.5 Felkészülést segítő kérdések 71

Definíciók jegyzéke

1 Halmazelmélet **1**
1.1 Üreshalmaz 2
1.2 Részhalmaz 2
1.3 Unió, metszet, különbség 3
1.4 Diszjunkt halmaz 3
1.5 Komplementer halmaz 3
1.6 Hatványhalmaz 4
1.7 Descartes-szorzat 5
1.8 Binér reláció 5
1.9 Reláció értelmezési tartománya, értékkészlete és inverze 5
1.10 Ekvivalenciareláció 5
1.11 Függvény 6
1.12 Bijekció 6
1.13 Azonos számosságú halmazok 9
1.14 Véges halmaz 9
1.15 Alsó és felső korlát 10

2 Komplex számok **11**
2.1 Két komplex szám egyenlősége 12
2.2 Komplex számok összege 12
2.3 Konjugált 12
2.4 Két komplex szám szorzata 13

3 Sorozatok **17**
3.1 Sorozat 18
3.2 Konvergencia 18
3.3 Divergencia 18
3.4 Sorozat korlátossága 18
3.5 Műveletek sorozatokkal 18
3.6 Kibővített valós számok halmaza 19
3.7 Sorozat határértéke $\pm\infty$ 19
3.8 Sorozat monotonitása 19
3.9 Részsorozat 20
3.10 Limesz szuperior és inferior 20
3.11 Cauchy-sorozat 20

4 Sorok **25**
4.1 Numerikus sor 26
4.2 Sor abszolút konvergencia 27
4.3 Alternáló sor 28
4.4 TODO 28

5 Függvények **31**
5.1 Függvénygörbe húrja 32
5.2 Függvény határértéke 32
5.3 Baloldali határérték 32
5.4 Jobboldali határérték 33

5.6 Folytonosság 33
5.7 Baloldali folytonosság 34
5.8 Jobboldali folytonosság 34
5.9 Függvény folytonossága nyílt intervallumon 34
5.10 Függvény folytonossága zárt intervallumon 34
5.12 Egyenletes folytonosság 35

6 Differenciálszámítás **37**
6.1 Differenciahányados 38
6.2 Differenciálhányados 38
6.3 Derivált 38
6.4 Jobboldali derivált 39
6.5 Baloldali derivált 39
6.6 Függvény differenciálhatósága nyílt intervallumon 39
6.7 Függvény differenciálhatósága zárt intervallumon 39
6.8 Differenciálhányados függvény 40
6.9 Másodrendű derivált 40
6.10 Inverz függvény 41
6.11 Szélsőérték számítás 46

7 Integrálszámítás **51**
7.1 Primitív függvény 52
7.2 Határozatlan integrál 52
7.3 Intervallum beosztása 65
7.4 Alsó és felső integrálközelítő összeg 65
7.5 Közbeeső érték vektorhoz tartozó integrálközelítő összeg 65
7.6 Darboux-féle alsó és felső integrál 66
7.7 Riemann-integrálhatóság 66
7.8 Nullmértékű halmaz 68
7.10 Területmérő függvény 69
7.11 Impropius Riemann-integrál 70

Tételek jegyzéke

1 Halmazelmélet **1**
1.1 Halmazműveletek tulajdonságai 4
1.2 Ekvivalencia osztályok 5
1.3 Racionális számok halmazának számossága 9
1.4 Korlátos halmaz szuprémuma 10
1.5 Korlátos halmaz infimuma 10

2 Komplex számok **11**
2.1 Az algebra alaptétele 15

3 Sorozatok **17**
3.1 Rendőr tétel 19
3.2 Sorozat határértékének létezése 20
3.3 Monoton részsorozat létezése 20
3.4 Bolzano–Weierstrass-tétel 20
3.5 Cauchy-féle konvergencia kritérium 21
3.6 Bernoulli-egyenlőtlenség 21

4 Sorok **25**
4.1 A numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele 26
4.2 A numerikus sor konvergenciájának elégséges feltétele 26
4.3 Csoportosított sor konvergenciája 27
4.4 Feltételes konvergencia 27
4.5 Riemann-tétel 27
4.6 Abszolút konvergens sor átrendezése 27
4.7 Majoráns (felülről becsül) és minoráns (alulról becsül) kritérium 27
4.8 A hányados vagy D'Alambert-teszt 28
4.9 Gyök/Cauchy-teszt 28
4.10 Integrál kritérium 28
4.11 Leibniz sor 28
4.12 Cauchy-féle szorzatsorok konvergenciája I 28
4.13 Cauchy-féle szorzatsorok konvergenciája II 29
4.14 TODO 29

5 Függvények **31**
5.1 Átviteli elv 32
5.4 Bolzano-tétel 34
5.6 Weierstrass-tétel 35

6 Differenciálszámítás **37**
6.3 Rolle-tétel 43
6.4 Lagrange-féle középértéktétel 43
6.7 Cauchy-féle középértéktétel 44
6.14 Taylor-formula 46
6.15 Szélsőérték létezésének szükséges feltétele 47
6.16 Szélsőérték létezésének elégséges feltétele 47
6.20 L'Hôpital-szabály 49

7 Integrálszámítás **51**
7.2 Első kritérium (oszcillációs összeggel) 67
7.3 Második kritérium (integrálközelítő összeggel) 67
7.4 Harmadik kritérium (normális beosztás sorozattal) 67
7.5 Monoton függvény integrálhatósága 67
7.6 Korlátos függvény integrálhatósága 68
7.7 Lebesgue tétele 68
7.8 A Riemann-integrál tulajdonságai 68
7.9 Integrálszámítás alaptétele 68
7.10 Középértéktétel folytonos függvényekre 69
7.12 Newton-Leibniz-formula 69
7.13 Helyettesítéses integrálás 70

Jelölések

Ez egy egyszerű szövegdoboz.

Ez egy megjegyzés.

! Ez egy állítás.

Ez egy példa.

Kitekintő

Ez egy kitekintés.

Definíció 0.1

Ez egy definíció.

Tétel 0.1

Ez egy tétel.

Felkészülést segítő kérdések

Ezek segítenek a tanulásban.

Logikai szimbólumok

Jel	Megnevezés	Példa
$\wedge$	és	$p \wedge q$
$\vee$	vagy	$p \vee q$
$\forall$	minden / bármely	$\forall x \in X$
$\exists$	létezik	$\exists x \in X$
$\nexists$	nem létezik	$\nexists x \in X$

Egyenlőség, relációk

Jel	Megnevezés	Példa
$=$	egyenlő	$2+2=4$
$\neq$	nem egyenlő	$2 \neq 3$
$\equiv$	ekvivalens	$2 \equiv 2$
$<$	kisebb	$2 < 3$
$\leq$	kisebb vagy egyenlő	$2 \leq 3$
$>$	nagyobb	$3 > 2$
$\geq$	nagyobb vagy egyenlő	$3 \geq 2$

Műveletek

Jel	Megnevezés	Példa
$a+b$	összeg	$2+3=5$
$a-b$	különbség	$5-3=2$
$a \cdot b$	szorzat	$2 \cdot 3 = 6$
a/b	hányados	$6/3=2$
a^b	hatvány	$2^3=8$
$\sqrt{a}$	négyzetgyök	$\sqrt{4}=2$
$\sqrt[n]{a}$	n-edik gyök	$\sqrt[3]{8}=2$
$a!$	faktoriális	$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Halmazok és halmazműveletek

Jel	Megnevezés	Példa
$\varnothing, \{\}$	üreshalmaz	$A := \{k \mid k \in \mathbb{N} \land k < 0\}$
$\mathbb{N}$	természetes számok halmaza	$1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza	$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Q}$	racionális számok halmaza	$2/3 \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}^*$	irracionális számok halmaza	$\pi \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	valós számok halmaza	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	komplex számok halmaza	$i \in \mathbb{C}$
A, B, C	halmazok	$A = \{1; 2; 3\}$
a, b, c	halmazok elemei	$x \in A$
$\in$	eleme	$i \in \mathbb{C}$
$\notin$	nem eleme	$\pi \notin \mathbb{Q}$
$\sim$	ekvivalencia	$A \sim B$
$\subseteq$	részhalmaza	$\{1\} \subseteq \{1; 2\}$
$\subset$	valódi részhalmaza	$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$
$\overline{A}$	komplementer halmaz	$\{x \in X \mid x \notin A\}$
$\cup$	unió	$\{x \in X \mid x \in A \lor x \in B\}$
$\cap$	metszet	$\{x \in X \mid x \in A \land x \in B\}$
$\setminus$	kivonás	$\{x \in X \mid x \in A \land x \notin B\}$

Intervallumok

Jel	Megnevezés	Példa
$[a; b]$	zárt intervallum	$[0; 1]$
$(a; b)$	nyílt intervallum	$(0; 1)$
$[a; b)$	balról zárt, jobbról nyitott intervallum	$[0; 1)$
$(a; b]$	balról nyitott, jobbról zárt intervallum	$(0; 1]$

Komplex számok

Jel	Megnevezés	Példa
$\mathbb{C}$	komplex számok halmaza	$z \in \mathbb{C}$
i	imaginárius egység	$i^2 = -1$
z	komplex szám	$z = 3 + 4i$
$z = a + bi$	algebrai alak	$\mathrm{Re}\{z\} = a, \mathrm{Im}\{z\} = b$
$\overline{z} = a - bi$	konjugált	$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$
$\mathrm{Re}\{z\}$	valós rész	$z = 3 + 2i \;\rightarrow\; \mathrm{Re}\{z\} = 3$
$\mathrm{Im}\{z\}$	képzetes rész	$z = 1 + 4i \;\rightarrow\; \mathrm{Im}\{z\} = 4$
$\|z\|$	abszolút érték / hossz	$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\arg\{z\}$	argumentum	$\arg\{z\} = \arctan(b/a)$
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	trigonometrikus alak	$\|z\| = r, \arg\{z\} = \varphi$
$z = re^{i\varphi}$	exponenciális alak	$z = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi)$

Sorozatok, sorok

Jel	Megnevezés	Példa
(a_n)	numerikus sorozat	$a_n = \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	sorozat határértéke	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$a_n = a_{n-1} + d$	számtani sorozat	$a_n = a_{n-1} + 2$
$a_n = a_{n-1} \cdot q$	mértani sorozat	$a_n = a_{n-1} \cdot 2$
$\sum a_n$	numerikus sor	$\sum \frac{1}{n}$
$L = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$	sor összege	$L = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
$\sum a \cdot r^n$	geometriai sor ($\|r\| < 1$ esetén)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = 2$

Függvények

Jel	Megnevezés	Példa
$f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}, x \mapsto y$	f függvény	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
$\mathcal{D}_f$	értelmezési tartomány	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}_f$	értékkészlet	$\mathcal{R}_f = [0; +\infty)$
$\mathcal{D} \to \mathcal{R}$	értékkészlet hozzárendelése az értelmezési tartományhoz	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y$	függvényértékek hozzárendelése az ősképekhez	$f : x \mapsto x^2$
f^{-1}	inverz függvény	ha $f(3) = 5$, akkor $f^{-1}(5) = 3$
$f \circ g$	összetett függvény	$f(x) = e^x, g(x) = x^2 :$ $(f \circ g)(x) = e^{x^2}$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$	függvény határértéke	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$	jobboldali	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$	baloldali	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Nevezetes függvények

Jel	Megnevezés	Példa
$e^x, \exp x$	exponenciális függvény	$x \mapsto e^x$
$\ln x$	természetes alapú logaritmus	$x \mapsto \ln x$
a^x	hatványfüggvény	$x \mapsto 2^x$
$\log_a x$	a alapú logaritmus	$x \mapsto \log_2 x$
sin, cos, tan, cot	szögfüggvények	$x \mapsto \sin x$
arcsin, arccos, arctan, arccot	inverz szögfüggvények	$x \mapsto \arcsin x$
sinh, cosh, tanh, coth	hiperbolikus függvények	$x \mapsto \sinh x$
arsinh, arcosh, artanh, arcoth	inverz hiperbolikus függvények	$x \mapsto \operatorname{arsinh} x$

Kalkulus

Jel	Megnevezés	Példa
$f'(x), f''(x), f^{(n)}(x)$	első, második és n-edik derivált (Lagrange-féle jelölés)	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$	első, második és n-edik derivált (Leibniz-féle jelölés)	$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
$\dot{f}, \ddot{f}, \overset{n}{\dot{f}}$	első, második és n-edik derivált (Newton-féle jelölés)	$\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Riemann-integrál	$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	határozatlan integrál	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$
F	f primitív függvénye	$F'(x) = f(x)$
$f \in \mathcal{R}[a;b]$	f Riemann-integrálható az $[a;b]$ intervallumon	$x^2 \in \mathcal{R}(-\infty;+\infty)$

1 Halmazelmélet

Ebben a fejezetben a halmazelmélet alapfogalmaival ismerkedünk meg, áttekintjük, rendszerezzük és néhol kibővítjük mindazt, amit eddig a számokról középiskolában tanultunk.

A halmazok olyan objektumok gyűjteményei, amelyek egy közös tulajdonság vagy szabály alapján határozhatóak meg. A halmazelmélet lényegében a köztük lévő kapcsolatokkal foglalkozik és a matematikai érvelés sarokköveként szolgál, keretet adva a matematikai objektumok rendszerezéséhez és elemzéséhez.

Tanulmányozni fogjuk a számok különböző típusait: a természetes számokat, az egész számokat és a valós számokat, valamint azt, hogy ezek hogyan viszonyulnak egymáshoz.

A fejezetben olyan definíciók, tételek kerülnek ismertetésre, amelyek elengedhetetlenek a további matematikai tanulmányokhoz.

A fejezetben érintett témakörök

1.1 Alapfogalmak, alapműveletek 2
1.2 Relációk, leképezések, függvények 5
1.3 A számfogalom kiépítése 7
1.4 Halmazok számossága 9
1.5 Felkészülést segítő kérdések 10

1.1. Alapfogalmak, alapműveletek

Alapfogalmak:
- axióma / posztulátum,
- definíció,
- nem definiált alapfogalom,
- állítás / tétel / lemma / segédtétel.

A **halmaz** egy nem definiált alapfogalom:
- A halmazokat nagybetűvel jelöljük: A, B, ...
- Az elemeket kisbetűvel: a, b, ...
- Halmaz **eleme** jelölés: $\in$, pl.: $x \in Y$, x eleme az Y halmaznak.
- Halmaznak **nem eleme**: $\notin$, pl.: $x \notin Y$, x nem eleme az Y halmaznak.

Egy halmaz akkor **jól megadott**, ha bármely elemről eldönthető, hogy hozzá tartozik-e a halmazhoz, vagy nem.

Definíció 1.1: Üreshalmaz

Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, **üreshalmaz**nak nevezzük, jele: $\emptyset$.

A **nemüres halmaz**: olyan halmaz, melynek legalább egy eleme van.

A halmazok megadási módjai:
- **utasítással**: $A := \{\text{A 180 cm-nél magasabb emberek}\}$,
- **felsorolással**: $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nevezetes halmazok:
- $\mathbb{N}$ – természetes számok halmaza,
- $\mathbb{Z}$ – egész számok halmaza,
- $\mathbb{Q}$ – racionális számok halmaza,
- $\mathbb{Q}^*$ – irracionális számok halmaza,
- $\mathbb{R}$ – valós számok halmaza,
- $\mathbb{C}$ – komplex számok halmaza.

Definíció 1.2: Részhalmaz

Legyenek A és B halmazok. Ha A minden eleme eleme B-nek is, akkor azt mondjuk, hogy az A a B részhalmaza, jele: $\subseteq$ vagy $\subset$ (valódi részhalmaza).

$A = B$, ha $A \subset B$ és $B \subset A$ is teljesül (kölcsönös tartalmazás).

!

Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok, ekkor teljesülnek az alábbiak:

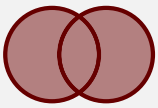
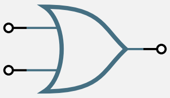
1. $A \subset A$, azaz minden halmaz része önmagának (**reflexív**),
2. $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$ (**antiszimmetrikus**),
3. $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$ (**tranzitív**).

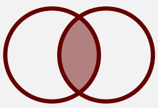
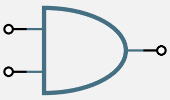
Definíció 1.3: Unió, metszet, különbség

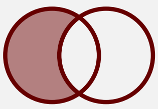
Legyenek A és B az X alaphalmaz részhalmazai, ekkor:

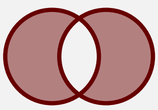
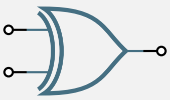
$$\begin{aligned} A \cup B &:= \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A \vee x \in B \right\} &&- \textbf{unió}\text{, egyesítés,} \\ A \cap B &:= \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A \wedge x \in B \right\} &&- \textbf{metszet}\text{,} \\ A \setminus B &:= \left\{ x \in X \,\middle|\, x \in A \wedge x \notin B \right\} &&- \textbf{különbség}\text{,} \end{aligned}$$

Halmazműveletek és logikai műveletek közötti kapcsolat

Unió – A  B ~ A, B  $A + B$ – VAGY

Metszet – A  B ~ A, B  $A \cdot B$ – ÉS

Különbség – A  B

Szimmetrikus differencia – A  B ~ A, B  $A \oplus B$ – XOR

Definíció 1.4: Diszjunkt halmaz

Két halmaz diszjunkt, ha metszetük az üreshalmaz.

Definíció 1.5: Komplementer halmaz

Ha $A \subset B$, akkor az A halmaznak a B-re vonatkozó komplementere: $B \setminus A$, jele: $\overline{A}$.

Halmaz komplenterének komplementere önmaga, vagyis

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Tétel 1.1: Halmazműveletek tulajdonságai

Legyenek $A, B, C \in X$

$A \cup B = B \cup A$	kommunutatív	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	asszociatív	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup A = A$	idempotens	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	disztributív	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$A \cup \varnothing = A$		$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \overline{A} = X$		$A \cap \overline{A} = \varnothing$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Bizonyítás (De Morgan-azonosságok):

$$\begin{gathered} x \in \overline{A \cup B} \\ \downarrow \\ x \notin A \cup B \\ x \notin A \wedge x \notin B \\ x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\ x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{gathered} \qquad \begin{gathered} x \in \overline{A \cap B} \\ \downarrow \\ x \notin A \cap B \\ x \notin A \vee x \notin B \\ x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \\ x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{gathered}$$

Definíció 1.6: Hatványhalmaz

Egy A halmaz összes részhalmazainak halmazát az A halmaz hatványhalmazának nevezzük.

Egy A véges halmaz összes részhalmazainak száma: $2^{|A|}$.

Bizonyítás:

A binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Vegyük észre, hogy a binomiális tételben $a = b = 1$, és $n = |A|$ esetén:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}}_{\text{az összes részhalmaz száma}}.$$

1.2. Relációk, leképezések, függvények

Definíció 1.7: Descartes-szorzat

Az A és B halmazok Descartes-szorzatán az A és B halmaz elemeiből álló **összes rendezett elempár**ok halmazát értjük:

$$A \times B := \left\{ (a;b) \,\middle|\, (a \in A) \wedge (b \in B) \right\}.$$

Legyen $A = \{1;2\}$ és $B = \{a;b\}$, ekkor az $A \times B$ Descartes-szorzat:

$$A \times B = \left\{ (1;a);(1;b);(2;a);(2;b) \right\}.$$

Definíció 1.8: Binér reláció

Az $A \times B$ szorzathalmaz $T \subset A \times B$ részhalmazát az A és B közötti binér (kételemű) relációnak hívjuk. Ha $(a;b) \in T$, akkor azt mondjuk, hogy a és b relációban vannak, és ezt aTb-vel jelöljük.

Definíció 1.9: Reláció értelmezési tartománya, értékkészlete és inverze

Legyen $T \subset A \times B$ egy reláció, ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T &:= \left\{ a \in A \,\middle|\, \exists b \in B : (a;b) \in T \right\} && \text{– a reláció értelmességi tartománya,}\\
\mathcal{R}_T &:= \left\{ b \in B \,\middle|\, \exists a \in A : (a;b) \in T \right\} && \text{– a reláció értékkészlete,}\\
T^{-1} &:= \left\{ (b;a) \,\middle|\, (a;b) \in T \right\} && \text{– a reláció inverze.}
\end{aligned}$$

Definíció 1.10: Ekvivalenciareláció

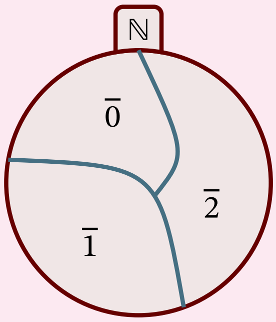
Legyen $A \neq \emptyset$, a $T \subset A \times A$ relációt ekvivalenciarelációnak mondjuk, ha teljesülnek az alábbiak:

- **reflexivitás** – $\forall A \in A$ esetén $(a;a) \in T$,
- **szimmetria** – ha $(a;b) \in T$, akkor $(b;a) \in T$,
- **tranzitivitás** – ha $(a;b) \in T$ és $(b;c) \in T$, akkor $(a;c) \in T$.

Tétel 1.2: Ekvivalencia osztályok

Minden $A \times A$ halmazon adott ekvivalenciareláció diszjunkt halmazokra bontja fel az A halmazt, ezeket a diszjunkt halmazokat ekvivalenciaosztályoknak nevezzük.

Két természetes szám relációban van egymással, ha hárommal osztva azonos maradékot adnak.



Definíció 1.11: Függvény

A $T \subset A \times B$ binér relációt leképezésnek/függvénynek mondjuk, ha

$$(a; b) \in T \wedge (a; c) \in T \Rightarrow b = c.$$

Jelölés: $f : A \to B$, ahol A az értelmezési tartomány ($\mathcal{D}_f$) és B az értékkészlet ($\mathcal{R}_f$).

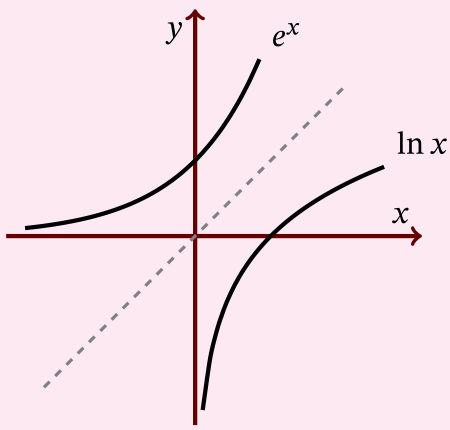
Definíció 1.12: Bijekció

Az $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű (egy-egyértelmű, bijektív), ha

- **injektív**, vagyis $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, valamint
- **szürjektív**, vagyis $\forall b \in B$ esetén $\exists a \in A : f(a) = b$.

Ha az $f : A \to B$ bijektív, akkor az $f^{-1} : B \to A$ leképezést f **inverz leképezés**ének hívjuk.

Az $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$, $x \mapsto e^x$ függvény bijektív, inverze a természetes alapú logaritmus: $f^{-1} : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.



1.3. A számfogalom kiépítése

Peano-axiómák:

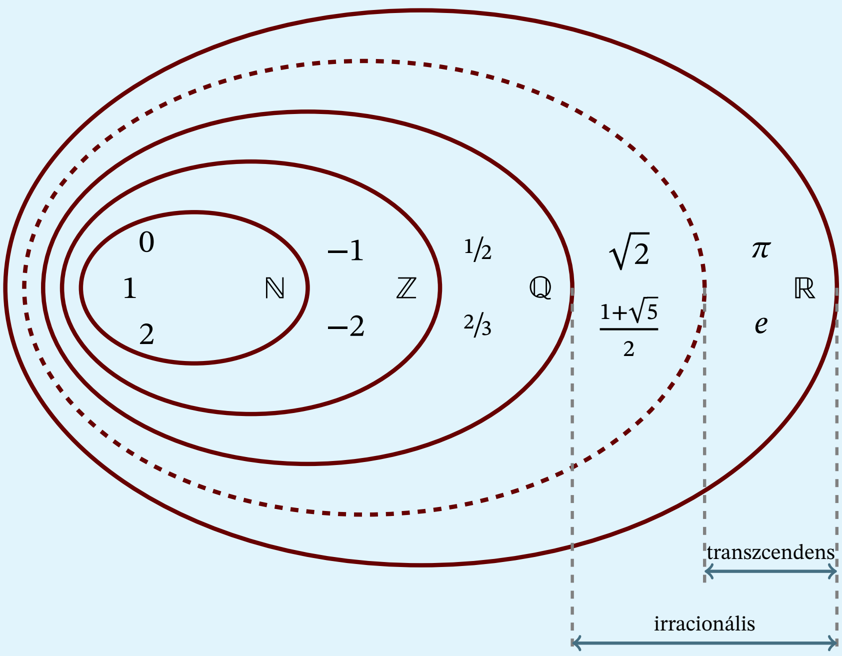
Legyen $\mathbb{N} \neq \emptyset$, $\mathbb{N}$-t a természetes számok halmazának, elemeit természetes számoknak mondjuk, ha teljesülnek az alábbiak:

1. legyen adva egy $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ leképezés,
2. φ injektív : $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$,
3. $\exists$ $\mathbb{N}$-nek egy kitüntetett eleme, ez a 0,
4. a 0-nak nincs ősképe, azaz $\nexists n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = 0$,
5. a teljes indukció elve teljesül, azaz ha $H \subseteq \mathbb{N}$ és
   a) $0 \in H$,
   b) $n \in H \Rightarrow \varphi(n) \in H$,

   akkor $H = \mathbb{N}$.

A természetes számok halmazát ekvivalenciarelációkkal ellátva megkapjuk a középiskolában megismert számhalmazokat:

- $\mathbb{Z}$: az egész számok halmaza ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$),
- $\mathbb{Q}$: a racionális számok halmaza ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$),
- $\mathbb{Q}^*$: az irracionális számok halmaza,
- $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza ($\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$).



A **transzcendens** számok olyan irracionális, valós számok, amelyek nem algebraiak, azaz nem valamely racionális együtthatós polinom gyökei. Ilyen szám például a π.

A valós számok axiómarendszere:

Értelmezzük két bináris műveletet, az összeadást (+) és a szorzást (·), valamint egy relációt (>).

1. $a + b = b + a$ ~ + kommutatív,
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ ~ + asszociatív,
3. $\exists! 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ ~ + egységelem,
4. $\forall a \in \mathbb{R} : \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ ~ + inverz elem,
5. $a \cdot b = b \cdot a$ ~ · kommutatív,
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ~ · asszociatív,
7. $\exists! 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ ~ · egységelem,
8. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ ~ · inverz elem,
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ~ disztributivitás,
10. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \vee a = b \vee b < a$ ~ trichotómia,
11. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ ~ < tranzitivitás,
12. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow a + c < b + c$ ~ + monotonitás,
13. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ ~ · monotonitás,
14. $\forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < n$ ~ Arkhimédész-féle rendezés,
15. $a_n \leq a_{n+1} \wedge b_n \geq b_{n+1} : \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$ ~ Cantor-axióma,

- $2 - 4$: csoport,
- $1 - 4$: Abel-csoport,
- $1 - 9$: test,
- $1 - 13$: rendezett test,
- $1 - 14$: arkhimédészien rendezett test,
- $1 - 15$: teljes rendezett test.

! A $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}^*$ sűrű.

1.4. Halmazok számossága

Definíció 1.13: Azonos számosságú halmazok

Ha két halmaz, A és B között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz számossága azonos. Jelölése: $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

A számosság ekvivalenciareláció.

Definíció 1.14: Véges halmaz

Az A halmaz véges, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $\operatorname{card} A = \operatorname{card} \{1; 2; \ldots; n\}$, vagy ha $A = \varnothing$.

Ha nincs olyan n természetes szám, amelyre az $A \neq \varnothing$ halmaz ekvivalens volna az $\{1; 2; \ldots; n\}$ halmazzal, akkor az A halmazt végtelen számosságúnak mondjuk. Létezik megszámlálhatóan és megszámlálhatatlanul végtelen halmaz.

- $\operatorname{card} A$
  - véges
  - végtelen
    - megszámlálhatóan végtelen, pl. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$
    - megszámlálhatatlanul végtelen, pl. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}^*$

Tétel 1.3: Racionális számok halmazának számossága

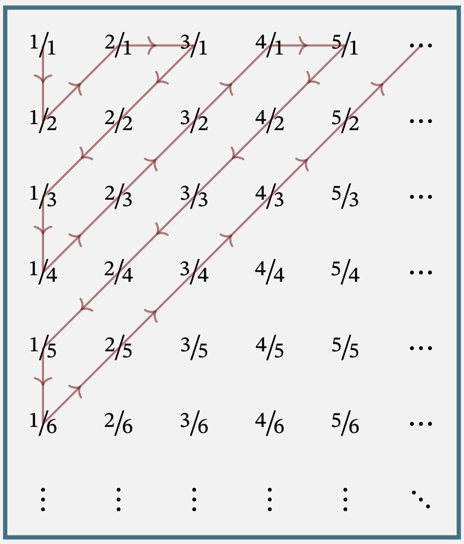
A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás (Cantor átlós módszere):

Minden pozitív racionális szám felírható tört alakban, ahol a nevező és a számláló is egész szám, ráadásul ezek relatív prímek.

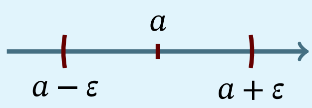
Ezeket a törteket rendezzük egy olyan táblázatba, ahol az n sorban az m oszlopban az m/n tört áll. Ezeket a törteket az ábrán jelölt módszerrel sorba állítjuk, sorrendjük szerint pedig egyértelműen megfeleltethetők a természetes számoknak.

Könnyen belátható, hogy ez a módszer az összes racionális számra is kiterjeszthető, tehát a racionális számok halmaza valóban megszámlálhatóan végtelen.



Fontosabb jelölések:

- Nyílt halmaz jelölése: $(x; y) =]x; y[$.
- Zárt halmaz jelölése: $[x; y]$.
- Az a pont ε sugarú környezete: $K(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (ezzel ekvivalens: $|x - a| < \varepsilon$).



Definíció 1.15: Alsó és felső korlát

A felülről korlátos H halmaz legkisebb felső korlátja: supremum, jele: $\sup H$.
Az alulról korlátos H halmaz legnagyobb alsó korlátja: infimum, jele: $\inf H$.

Tétel 1.4: Korlátos halmaz szuprémuma

Felülről korlátos nemüres halmaznak mindig van szuprémuma.

Tétel 1.5: Korlátos halmaz infimuma

Alulról korlátos nemüres halmaznak mindig van infimuma.

1.5. Felkészülést segítő kérdések

1. Mikor mondjuk, hogy egy halmaz jól definiált?
2. Válassza ki az alábbi halmazok közül azokat, amelyek jól definiáltak!
   a) A magas férfihallgatók,
   b) azon valós számok, amelyek négyzete nem kisebb háromnál,
   c) a viharos erejű szelek,
   d) a poliéderek.
3. Definiálja a következő fogalmakat: üreshalmaz, halmaz komplementere, részhalmaz, halmazok metszete, uniója
4. Definiálja két halmaz Descartes-szorzatát!
5. Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
6. Zárt-e az irracionális számok halmaza az összeadásra nézve?
7. Alulról korlátos-e a természetes számok halmaza? És felülről?
8. Adjon példát véges halmazokra!
9. Adjon példát megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazokra!

2 Komplex számok

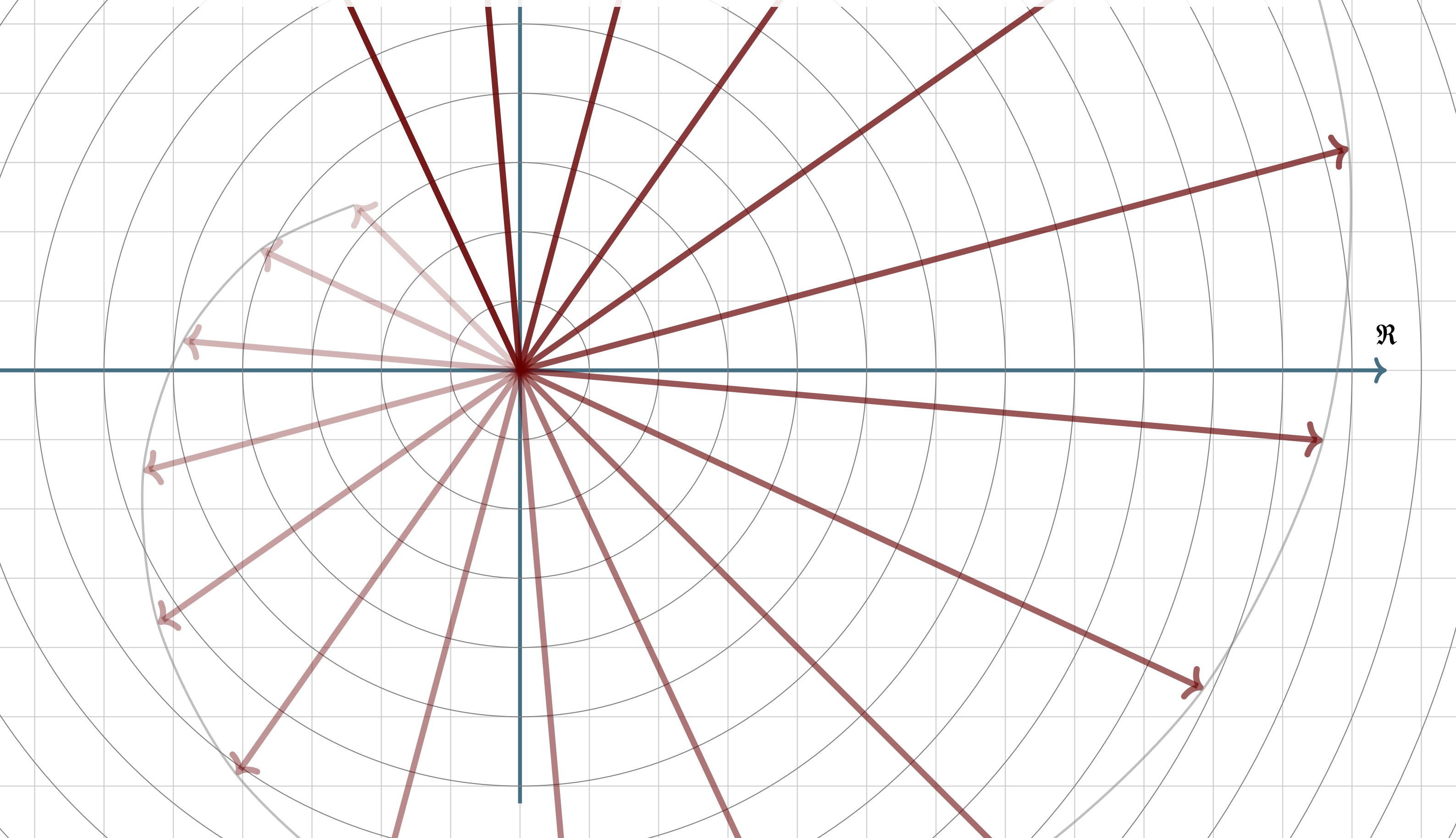
Amikor a matematikusok évszázadokkal ezelőtt csak a valós számokkal dolgoztak, találkoztak olyan problémákkal, amelyeket nehezen vagy egyáltalán nem tudtak megoldani. A sikert az hozta el, mikor bővítették a valós számok halmazát.

A komplex számok bevezetése tehát egyfajta természetes kiterjesztése volt a valós számoknak A komplex számok segítségével megoldhatunk olyan egyenleteket, amelyeknek nincsenek valós megoldásai, például az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet ilyen és minden további, aminek negatív a diszkriminánsa.

Ebben a fejezetben megismerkedünk a komplex számok fogalmával, ábrázolásával, műveleteivel és alkalmazásaival a matematika és a természettudományok különböző területein. A komplex számok tanulmányozása gazdagítja a matematikai ismereteinket, mélyíti a matematikai gondolkodásunkat és új lehetőségeket nyit számunkra a problémamegoldásban.

A fejezetben érintett témakörök

2.1 Fogalmak, definíciók 12
2.2 Felkészülést segítő kérdések 15



2.1. Fogalmak, definíciók

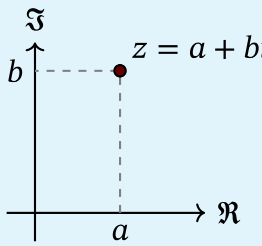
Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y = -10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

Az egyenletrendszert megoldva az alábbi megoldásokat kapjuk:

$$\begin{cases} x = -5 + \sqrt{-15} \\ y = -5 - \sqrt{-15} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5 - \sqrt{-15} \\ y = -5 + \sqrt{-15} \end{cases}$$

Mit jelent, ha a négyzetgyökjel alatt negatív számot kapunk?
Bővítsük a valós számok halmazát! Legyen $i^2 = -1$.
A komplex számokat az úgynevezett Gauss-számsíkon ábrázoljuk.



A komplex számok halmazának jele: $\mathbb{C}$.
Algebrai alak: $z = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.
A komplex szám **valós része**: $\operatorname{Re} z = \{a\}$.
A komplex szám **képzetes része** pedig $\operatorname{Im}\{z\} = b$.

A komplex számok halmaza és a valós számok halmazának önmagával vett Descartes-szorzata között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van, vagyis: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definíció 2.1: Két komplex szám egyenlősége

Legyenek $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ komplex számok. Ekkor:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \text{és} \quad b_1 = b_2.$$

Definíció 2.2: Komplex számok összege

Legyenek $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ komplex számok. Ekkor:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Definíció 2.3: Konjugált

Legyen $z = a + bi$ egy komplex szám. Ekkor z konjugáltja:

$$\overline{z} = a - bi.$$

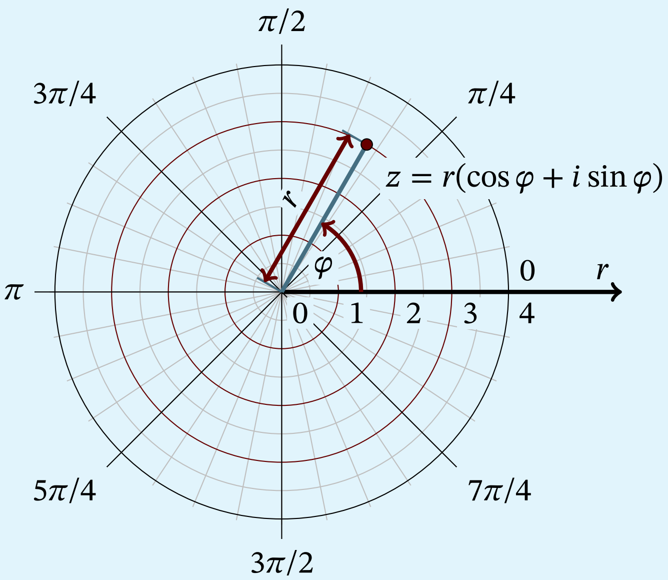
Komplex szám és konjugáltjának összege valós szám: $z + \overline{z} = 2a \in \mathbb{R}$.
Komplex szám és konjugáltjának szorzata valós szám: $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Definíció 2.4: Két komplex szám szorzata

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Áttérés a polárkoordináta-rendszerre:

Általában a Descartes-féle koordinátarendszerben dolgozunk, ahol a sík pontjai és a számpárok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Időnként azonban célravezető más koordinátarendszerek alkalmazása is.



Ebben az esetben a komplex szám szögfüggvények segítségével fejezhető ki:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Az algebrai és trigonometrikus alak közötti kapcsolat:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arctan(b/a) \end{cases}$$

Ezek alapján $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ komplex számok szorzata trigonometrikus azonosságok segítségével:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + r_1r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)i \\ &= r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right). \end{aligned}$$

A felhasznált azonosságok:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta, \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Komplex számok hatványozása:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Bizonyítás (Teljes indukció módszerével):

Vizsgáljuk meg az első pár esetet:

$$\begin{aligned} z^1 &= r^1(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ z^2 &= r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 \\ &= r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi) \\ &= r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)), \\ z^3 &= z^2 \cdot z \\ &= r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r^3(\cos(2\varphi)\cos\varphi - \sin(2\varphi)\sin\varphi + i(\cos(2\varphi)\sin\varphi + \sin(2\varphi)\cos\varphi) \\ &= r^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$, majd vizsgáljuk meg az $(n+1)$-edik esetet:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r^{k+1}(\cos(k\varphi)\cos\varphi - \sin(k\varphi)\sin\varphi + i\cos(k\varphi)\sin\varphi + \sin(k\varphi)\cos\varphi) \\ &= r^{k+1}(\cos((k+1)\varphi) + i\sin((k+1)\varphi)). \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

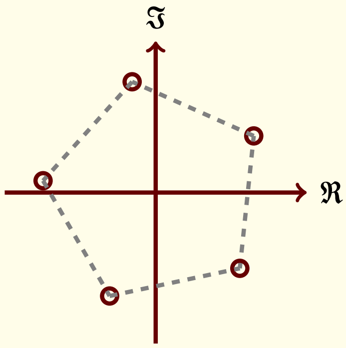
Komplex számok osztása:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Komplex számok gyökvonása:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$$

Tetszőleges komplex szám n-edik gyökei egy olyan szabályos n-szög csúcsai, amelynek középpontja az origó.



A komplex számokat nem tudjuk rendezni, azonban $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ test.

Tétel 2.1: Az algebra alaptétele

Egy n-ed fokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitással számolva pontosan n darab gyöke van.

Minden valós együtthatós polinom felírható első és másodfokú tényezők szorzataként.

2.2. Felkészülést segítő kérdések

1. Mit értünk egy komplex szám algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakján?
2. Adja meg a komplex számok különböző alakjai közötti áttéréseket!
3. Definiálja a komplex számok halmazán az összeadás és a szorzás műveletét! Milyen struktúrát alkotnak a komplex számok az összeadásra és a szorzásra nézve?
4. Adja meg a test definícióját, említsen példákat!
5. Ismertesse a komplex számok hatványozására vonatkozó képletet!
6. Ismertesse a komplex számok gyökvonására vonatkozó formulát!
7. Hogyan helyezkednek egy komplex szám n. Gyökei a komplex számsíkon?
8. Mit jelent az n-edik egységgyök?

3 Sorozatok

A számsorozatok olyan matematikai objektumok, amelyek a pozitív egész számokhoz rendelnek valós vagy komplex számokat. Gondolhatunk rájuk függvényként is, ahol az értelmezési tartomány a pozitív egész számok halmaza, az értékkészlet pedig a valós vagy a komplex számok egy részhalmaza.

Ebben a fejezetben a számsorozatok definícióját, különböző megadási módjainak ismertetését követően áttekintjük a sorozatok - már középiskolában megtanult - tulajdonságait, típusait, majd definiáljuk a határérték, a konvergens és a divergens sorozat fogalmát.

Részletesen foglalkozunk a sorozatokkal kapcsolatos fontos tételekkel, fogalmakkal. Az itt megszerzett ismeretek kulcsfontosságúak lesznek a későbbi tanulmányok során és segítenek abban, hogy mélyebb megértést szerezzünk a matematika alapvető elveiről és alkalmazásairól.

A fejezetben érintett témakörök

3.1 Fogalmak, definíciók 18
3.2 Nevezetes sorozatok 21
3.3 Felkészülést segítő kérdések 24

3.1. Fogalmak, definíciók

Definíció 3.1: Sorozat

A pozitív egész számok halmazán értelmezett $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt **valós sorozat**nak hívjuk, az $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényt **komplex sorozat**nak nevezzük.

Definíció 3.2: Konvergencia

Az (a_n) sorozatot konvergensnek mondjuk, ha $\exists a \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $|a_n - a| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$. Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ ahol } a \text{ a sorozat határértéke.}$$

Definíció 3.3: Divergencia

Az (a_n) sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

Egy konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van.

Szükséges és elégséges feltételek egy sorozat konvergenciájára.

Következmény: ha egy sorozatban véges sok elemet megváltoztatunk, vagy egy sorozathoz véges sok elemet hozzáveszünk, vagy belőle véges sok elemet elveszünk, akkor az sem a sorozat határértékét, sem a konvergenciáját nem változtatja meg.

Definíció 3.4: Sorozat korlátossága

- Az (a_n)-t **alulról korlátos**nak nevezzük, ha értékkészlete alulról korlátos.
- Az (a_n)-t **felülről korlátos**nak nevezzük, ha értékkészlete felülről korlátos.
- Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Konvergens sorozat korlátos. (Az állítás megfordítása nem igaz.)

Definíció 3.5: Műveletek sorozatokkal

Legyenek (a_n) és (b_n) sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor:

- $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$,
- $\lambda \cdot (a_n) := (\lambda \cdot a_n)$,
- $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n)$,
- $(a_n)/(b_n) = (a_n/b_n)$, ha $b_n \neq 0$.

Legyenek (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok $a_n \to a$, $b_n \to b$, ha $n \to \infty$ és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor ezen sorozatok összege, számszorosa, szorzata és hányadosa is konvergens, és:

- $a_n + b_n \to a + b$,
- $\lambda \cdot a_n \to \lambda \cdot a$,
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$,
- $(a_n/b_n) \to (a/b)$, ha $b \neq 0$

Konvergens sorozat jeltartó, ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0,$$

akkor $\exists N_0$ index, hogy $\operatorname{sgn} a_n = \operatorname{sgn} a$, ha $n > N_0$.
Következmény:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ és } \lim_{n\to\infty} b_n = b \text{ és } a_n \geq b_n \quad \Rightarrow \quad a \geq b,$$

azaz a határátmenet rendezéstartó.

Tétel 3.1: Rendőr tétel

Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n) és (x_n) sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq x_n \leq b_n$: $\forall n$-re vagy $n > N_0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a, \text{ ekkor: } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Ha (a_n) és (b_n) sorozatok nullsorozatok, akkor a rendőr tételből következik, hogy szorzatuk is nullsorozat.

Ha (a_n) sorozat konvergens és határértéke a, akkor

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

Visszafelé ez nem igaz (csak nullsorozatokra).

Definíció 3.6: Kibővített valós számok halmaza

Az $\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$ halmazt kibővített valós számok halmazának nevezzük.

Definíció 3.7: Sorozat határértéke $\pm\infty$

Azt mondjuk, hogy az (a_n) határértéke ∞, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists N_K : a_n > K$, ha $n > N_K$.
Azt mondjuk, hogy az (a_n) határértéke $-\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists N_K : a_n < K$, ha $n > N_K$.

Definíció 3.8: Sorozat monotonitása

Az (a_n) sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha $a_n \geq a_{n-1}$,
- monoton csökkenő, ha $a_n \leq a_{n-1}$,
- szigorúan monoton növekvő, ha $a_n > a_{n-1}$,
- szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n < a_{n-1}$.

Ha az (a_n) monoton növekvő, akkor alulról korlátos, illetve ha monoton csökkenő, akkor felülről korlátos.

!

1. Monoton, korlátos sorozat konvergens.
2. Monoton, nem korlátos sorozatnak van határértéke.
3. Ha egy sorozat divergens, akkor vagy nem létezik a határértéke, vagy a határértéke ∞ vagy $-\infty$.

Definíció 3.9: Részsorozat

!(k_n) a természetes számok egy szigorúan növekvő sorozata és (a_n) egy valós számsorozat, ekkor a $b_n = a_{k_n}$ sorozatot az a_n sorozat k_n indexsorozathoz tartozó részsorozatának nevezzük.

Tétel 3.2: Sorozat határértékének létezése

Ha az a_n sorozatnak van határértéke, akkor bármely részsorozatának is van határértéke, és ez a két határérték megegyezik.

Tétel 3.3: Monoton részsorozat létezése

Bármely sorozatnak van monoton részsorozata.

Tétel 3.4: Bolzano–Weierstrass-tétel

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Definíció 3.10: Limesz szuperior és inferior

Az (a_n) sorozat limesz szuperiorjának nevezzük az alábbi mennyiséget:

$$\limsup a_n = \overline{\lim}\ a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{\, a_{n+1}; a_{n+2}; \ldots \}.$$

Az (a_n) sorozat limesz inferiorjának nevezzük az alábbi mennyiséget:

$$\liminf a_n = \underline{\lim}\ a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{\, a_{n+1}; a_{n+2}; \ldots \}.$$

Definíció 3.11: Cauchy-sorozat

Az (a_n) sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n, m > N(\varepsilon)$.

Tétel 3.5: Cauchy-féle konvergencia kritérium

Az (a_n) konvergens $\Leftrightarrow$ ha Cauchy-sorozat.

3.2. Nevezetes sorozatok

Tétel 3.6: Bernoulli-egyenlőtlenség

Ha $x \geq -1$, akkor: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, az egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $n = 0$, $n = 1$, vagy $x = 0$.

$$a^n \to \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$$

$\sqrt[n]{a} \to 1$

$a^n \cdot n^k \to 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{N}$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

$\dfrac{a^n}{n!} \to 0$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

3.3. Felkészülést segítő kérdések

1. Definiálja a torlódási pont fogalmát!
2. Definiálja a konvergens sorozat fogalmát! Mikor mondunk egy sorozatot divergensnek?
3. Ismertesse a nevezetes sorozatok határértékeit!
4. Mikor mondunk egy sorozatot monoton növekvőnek, - csökkenőnek?
5. Mikor nevezünk egy sorozatot korlátosnak?
6. Mit mondhatunk a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatáról?
7. Adja meg a részsorozat fogalmát!
8. Ismertesse a monoton korlátos sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételt!
9. Igaz-e, hogy bármely konvergens sorozat korlátos? Ha igen, miért? Mit mondhatunk a megfordításról?
10. Ismertesse a rendőrtételt!

4 Sorok

A numerikus sorok olyan matematikai objektumok, amelyek végtelen sok valós számot adnak össze. Egy adott számsorozat tagjainak részletösszegeit sorba rendezve kaphatjuk meg őket. Vizsgálatuk célja, hogy megállapítsuk, hogy a sorok összegezhetők-e, azaz hogy a részletösszegek sorozata konvergens-e.

Ebben a fejezetben a numerikus sorok definiálását követően megismerjük alapvető tulajdonságaikat szükséges, szükséges és elégséges feltételeket fogalmazunk meg a konvergenciára, amely a sorok viselkedésének alapvető jellemzője. Foglalkozni fogunk olyan nevezetes numerikus sorokkal, melyek különleges tulajdonságaik vagy gyakori előfordulásuk miatt kiemelt figyelmet érdemelnek.

A fejezetben érintett témakörök

4.1 Fogalmak, definíciók 26
4.2 Felkészülést segítő kérdések 29

4.1. Fogalmak, definíciók

Definíció 4.1: Numerikus sor

$!(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ numerikus sorozat, amelyből képezzük az alábbi sorozatot:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

Az így képzett (s_n)-t az (a_n) sorozatból képzett numerikus sornak mondjuk. Jele:

$$s_n = \sum a_n,$$

ahol a_n a sor n-edik/általános tagja, s_n pedig a sor n-edik részletösszege.
Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens, ha az s_n sorozat konvergens, továbbá $\sum a_n$ sor divergens, ha s_n sorozat divergens.
Az s_n sorozat határértékét a $\sum a_n$ sor összegének hívjuk:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Tétel 4.1: A numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele

Ha a $\sum a_n$ numerikus sor konvergens, akkor az (a_n) nullsorozat, azaz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, sőt $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \to 0$, ha $n \to \infty$ (ekkor $p \in \mathbb{N}$ rögzített).

A $\sum_0 aq^n$ végtelen geometriai sor konvergens $\Leftrightarrow$ ha $|q| < 1$, ekkor a sorösszeg $a \cdot \frac{1}{1-q}$.

Tétel 4.2: A numerikus sor konvergenciájának elégséges feltétele

$\sum a_n$ numerikus sor akkor és csak akkor konvergens ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\exists N(\varepsilon) : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon,$$

ha $n, m > N(\varepsilon)$ és $m > n$.

Véges sok tag elhagyása/megváltoztatása a sorozatban a konvergenciát nem változtatja meg, de a sorösszeget igen.

Legyen $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens numerikus sor, ekkor $\sum(a_n + b_n)$ is konvergens és

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Legyen $\sum a_n$ konvergens numerikus sor és λ valós szám, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Tétel 4.3: Csoportosított sor konvergenciája

Ha $\sum a_n$ konvergens, úgy bármely csoportosított sora is konvergens és a két sor összege megegyezik.

A tétel visszafelé is igaz.

Definíció 4.2: Sor abszolút konvergencia

A $\sum a_n$-t abszolút konvergensnek hívjuk, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

Ha egy nemnegatív tagú sor konvergens, akkor abszolút konvergens. Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor feltételes konvergenciáról beszélünk.

Tétel 4.4: Feltételes konvergencia

Abszolút konvergens sor feltételesen is konvergens.

Az állítás visszafelé nem igaz.

Tétel 4.5: Riemann-tétel

Legyen $\sum a_n$ feltételesen konvergens, de nem abszolút konvergens numerikus sor és legyen α egy tetszőleges bővített valós szám, ekkor $\sum a_n$-nek van olyan átrendezése, hogy az átrendezett sor összege éppen α.

Tétel 4.6: Abszolút konvergens sor átrendezése

Abszolút konvergens sor bármely átrendezett sora is abszolút konvergens és a sorösszeg azonos.

Tétel 4.7: Majoráns (felülről becsül) és minoráns (alulról becsül) kritérium

Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok, melyekre az $a_n < b_n : \forall n \in \mathbb{N}$-re vagy $n_0 < n$ esetén:

1. ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az (minoráns kritérium),
2. ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az (majoráns kritérium).

Tétel 4.8: A hányados vagy D'Alambert-teszt

$\sum a_n$ egy pozitív tagú numerikus sor, ha $\exists 0 \leq q < 1$ valós szám, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, ha $n > n_0$ vagy $\forall n$ esetén, akkor a $\sum a_n$ konvergens.

Tétel 4.9: Gyök/Cauchy-teszt

Legyen $\sum a_n$ egy nemnegatív tagú sor, ha $\exists 0 \leq q < 1$, hogy $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, ha $n > n_0$ vagy $\forall n$-re, akkor $\sum a_n$ konvergens.

Vegyük észre, hogy a majoráns illetve minoráns kritérium és az előző két teszt az abszolút konvergencia eldöntésére szolgál, a feltételes konvergenciáról nem ad információt.

Tétel 4.10: Integrál kritérium

Ha $x \geq 1$ esetén az f függvény folytonos, nemnegatív és csökkenő, akkor a $\sum |f_n|$ numerikus sor konvergens vagy divergens aszerint, hogy

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergens vagy divergens.}$$

Definíció 4.3: Alternáló sor

A $\sum(-1)^{n+1} \cdot b_n$, $b_n > 0$ numerikus sort alternáló sornak nevezzük.

Tétel 4.11: Leibniz sor

A $\sum(-1)^{n+1} \cdot b_n$ alternáló numerikus sor konvergens akkor és csakis akkor, ha (b_n) monoton csökkenő nullsorozat, ekkor az $|s - s_n| \leq b_{n+1}$.

Definíció 4.4: TODO

Legyenek (a_n) és (b_n) a nemnegatív egészek halmazán értelmezett numerikus sorozatok és

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

ekkor a $\sum c_n$-t a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ numerikus sorok Cauchy-féle szorzatsorának hívjuk.

Tétel 4.12: Cauchy-féle szorzatsorok konvergenciája I

Abszolút konvergens sorok Cauchy-féle szorzatsora is abszolút konvergens és a szorzatsor összege a tényezősorok összegének szorzata.

Tétel 4.13: Cauchy-féle szorzatsorok konvergenciája II

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ abszolút konvergens és sorösszege A és a $\sum b_n$ feltételesen konvergens és a sorösszege B, ekkor a Cauchy-féle szorzatsorok sorösszege $A \cdot B$.

Tétel 4.14: TODO

Legyen (a_n) monoton csökkenő nemnegatív tagú sorozat, a belőle képzett numerikus sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\sum_{k=0} 2^k a_{2k} = a_1 + 2 \cdot a_2 + 2^2 \cdot a_4 + \ldots$$

is konvergens.

! $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \leq 1$.

! $\sum \frac{1}{n \cdot (\ln n)^P}$ konvergens, ha $P > 1$ és divergens, ha $P \leq 1$.

4.2. Felkészülést segítő kérdések

1. Definiálja a numerikus sor fogalmát!
2. Mit jelent az, hogy egy numerikus sor konvergens, illetve, hogy abszolút konvergens?
3. Mi a numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele?
4. Mondja ki a hányadostesztet!
5. Mondja ki a gyöktesztet!
6. Ismertesse a majoráns és a minoráns kritériumot!
7. Mit nevezünk alternáló sornak?
8. Ismertesse az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz-tételt!
9. Mi a végtelen geometriai sor? Mikor konvergens? Mennyi a sorösszeg?
10. Mondja ki a feltételesen konvergens numerikus sorokra vonatkozó Riemann-tételt!

5 Függvények

A matematikában a függvények alapvető fogalmak, amelyek a változók közötti kapcsolatokat írják le. Egy függvény egy szabály, amely egy adott halmaz egy eleméhez pontosan egy elemet rendel egy másik halmazból. Az előbbi halmazt értelmezési tartománynak, az utóbbit értékkészletnek hívjuk. A függvényeket gyakran ábrázoljuk grafikusan, az x-tengelyen a független változó, az y-tengelyen pedig a függő változó értékei feltüntetve. A függvényekkel kapcsolatos alapvető fogalmak megértése elengedhetetlen a matematika további területeinek tanulmányozásához.

Középiskolai tanulmányaink során megismertük a legfontosabb függvényosztályokat: a lineáris, a kvadratikus és egyéb hatványfüggvényeket, a trigonometrikus, az exponenciális és a logaritmikus függvényeket, foglalkoztunk függvénytranszformációkkal. Ebben a fejezetben áttekintjük a függvények legfontosabb jellemzőit, amelyek a matematikai analízis alapkövei, tanulmányozásuk nemcsak a matematikai elméletben, hanem a gyakorlati alkalmazásokban is kulcsfontosságú, hiszen a függvények segítségével modellezhetjük a világ különböző jelenségeit.

A fejezetben érintett témakörök

5.1 Alapfogalmak 32
5.2 Függvények határértéke 32
5.3 Folytonosság 33
5.4 Felkészülést segítő kérdések 35

5.1. Alapfogalmak

Középiskolában megismert fogalmak: paritás, korlátosság, monotonitás, periodikusság, konvexitás, invertálhatóság, függvénytranszformációk.

Definíció 5.1: Függvénygörbe húrja

Az f függvény görbéjének $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$ pontjait összekötő szakaszt a függvénygörbe húrjának nevezzük, melynek egyenlete:

$$h(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1), \text{ ahol } x_1 \leq x \leq x_2.$$

Függvénykompozíciók monotonitása:

- f és g azonos monotonitású: $f \circ g$ monoton növő,
- f és g ellentétes monotonitású: $f \circ g$ monoton csökkenő.

5.2. Függvények határértéke

Definíció 5.2: Függvény határértéke

Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban A, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$. Jele:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Tétel 5.1: Átviteli elv

Az f függvény határértéke az a pontban akkor és csak akkor A, ha $\forall x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.

Tétel 5.2

Legyen az f függvény határértéke az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban A, a g függvény a pontbeli határértéke pedig B. Ekkor:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = A + B$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, ha $B \neq 0$.

Definíció 5.3: Baloldali határérték

Azt mondjuk, hogy az f függvény baloldali határértéke az a pontban A, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < a - x < \delta(\varepsilon)$. Jele:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A.$$

Definíció 5.4: Jobboldali határérték

Azt mondjuk, hogy az f függvény jobboldali határértéke az a pontban A, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$. Jele:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

Tétel 5.3

Az f függvény határértéke az a pontban, akkor és csak akkor A, ha

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \quad \text{és} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

Definíció 5.5

- Az f függvény határértéke a $+\infty$-ben A, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x > \delta(\varepsilon)$.
- Az f függvény határértéke a $-\infty$-ben A, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x < \delta(\varepsilon)$.
- Az f függvény határértéke a a-ban $+\infty$, ha $\forall N$ esetén $\exists\delta(N) > 0$, hogy $f(x) > N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.
- Az f függvény határértéke a a-ban $-\infty$, ha $\forall N$ esetén $\exists\delta(N) > 0$, hogy $f(x) < N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.

!

Legyen az f függvény határértéke az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban A, a g függvény $a \in \mathcal{D}_g$ pontbeli határértéke pedig B. Az a pont egy $x \neq a$ környezetében pedig $g(x) \neq A$. Ekkor:

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = B.$$

5.3. Folytonosság

Definíció 5.6: Folytonosság

Egy $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta(\varepsilon)$.

! A folytonosság definíciója ekvivalens a következővel: f függvény folytonos egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ha f és g folytonosak az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, akkor $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ és $g \neq 0$ esetén f/g is folytonosak az a pontban.

Ha f folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és g folytonos az $f(a) \in \mathcal{D}_g$ pontban, akkor $g \circ f$ is folytonos az a pontban.

Definíció 5.7: Baloldali folytonosság

Az f függvény balról folytonos az értelmezési tartományának egy a pontjában, ha a bal oldali határértéke megegyezik az adott pontbeli függvényértékkel, vagyis:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Definíció 5.8: Jobboldali folytonosság

Az f függvény jobbról folytonos az értelmezési tartományának egy a pontjában, ha a jobb oldali határértéke megegyezik az adott pontbeli függvényértékkel, vagyis:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Az f függvény folytonos az értelmezési tartományának egy pontjában, ha ott jobbról és balról is folytonos.

Definíció 5.9: Függvény folytonossága nyílt intervallumon

Az f függvény folytonos az $(a;b)$ intervallumon, ha ennek az intervallumnak minden pontjában folytonos.

Definíció 5.10: Függvény folytonossága zárt intervallumon

Az f függvény folytonos az $[a;b]$ intervallumon, ha folytonos az $(a;b)$ intervallumon, valamint jobbról folytonos az a-ban, illetve balról folytonos a b-ben.

Tétel 5.4: Bolzano-tétel

Ha az f folytonos az $[a;b]$ intervallumon, akkor itt felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket.

A Bolzano-tétel megfordítása nem igaz.

A Bolzano-tételből következik, hogy ha valamely $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény esetén $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists \xi \in (a; b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

Tétel 5.5

Ha az f függvény folytonos az $[a; b]$ intervallumon, akkor ott korlátos. (Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.)

Definíció 5.11

Legyen $T \subset \mathcal{D}_f$ és $H := f(T) \subset \mathcal{R}_f$

- Ha H-nak van legnagyobb értéke, akkor ezt az f függvény T-n felvett maximumának mondjuk.
- Ha H-nak van legkisebb értéke, akkor ezt az f függvény T-n felvett minimumának mondjuk.

Tétel 5.6: Weierstrass-tétel

Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit függvényértékként.

Definíció 5.12: Egyenletes folytonosság

Az f függvény egyenletesen folytonos a H halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon)$, hogy $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, $\forall x_1, x_2 \in H$ esetén.

Tétel 5.7

Zárt intervallumon folytonos függvény ott egyenletesen folytonos.

Tétel 5.8

Zárt intervallumon folytonos szigorúan monoton függvény inverze ugyancsak folytonos és az eredeti függvénnyel megegyező monotonitású.

Tétel 5.9

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5.4. Felkészülést segítő kérdések

1. Definiálja a függvény fogalmát! Mi az értelmezési tartomány? Mi az értékkészlet?
2. Mit jelent az, hogy egy függvény
   - Monoton,
   - Szigorúan monoton,
   - Korlátos,
   - Páros, páratlan,
   - Periodikus?
3. Adjon példát a fentebb említett tulajdonsággel rendelkező, nem rendelkező függvényekre!
4. Hogyan kapható meg az $f(x)$ függvényből
   - $f(x+b)$, ha $b>0$,
   - $f(x)+b$, ha $b>0$,
   - $a \cdot f(x)$,
   - $f(a \cdot x)$,
   - $f(|x|)$,
   - $|f(x)|$.
5. Mit jelent a függvény zérushelye?
6. Vázolja fel a középiskolában megtanult függvényeket!
7. Mikor nevezünk egy függvényt összetettnek? Adjon példát! Mutassa be a külső-, belső függvény fogalmát!
8. Mikor mondjuk, hogy egy függvény invertálható?
9. Hogyan kapjuk meg az eredeti függvény képéből annak inverzét, ha létezik?
10. Hogyan viszonyul az inverz függvény monotonitása az eredeti függvény monotonitásához?
11. Mutassa be a trigonometrikus függvények inverzeit!
12. Mutassa be az hiperbolikus függvényeket és azok inverzeit!
13. Definiálja a függvény határértékét az $x=a$ pontban és plusz-, illetve mínusz végtelenben!
14. Definiálja a folytonosságot!

6 Differenciálszámítás

A differenciálszámítás a matematika azon területe, amely a változások vizsgálatával foglalkozik. A természet, a mérnöki, a gazdasági tudományok számos jelenségének megértéséhez elengedhetetlen eszköz, hiszen lehetővé teszi számunkra, hogy leírjuk az ott zajló folyamatokat. Alapjait Isaac Newton és Gottfried Wilhelm Leibniz fektették le a 17. században.

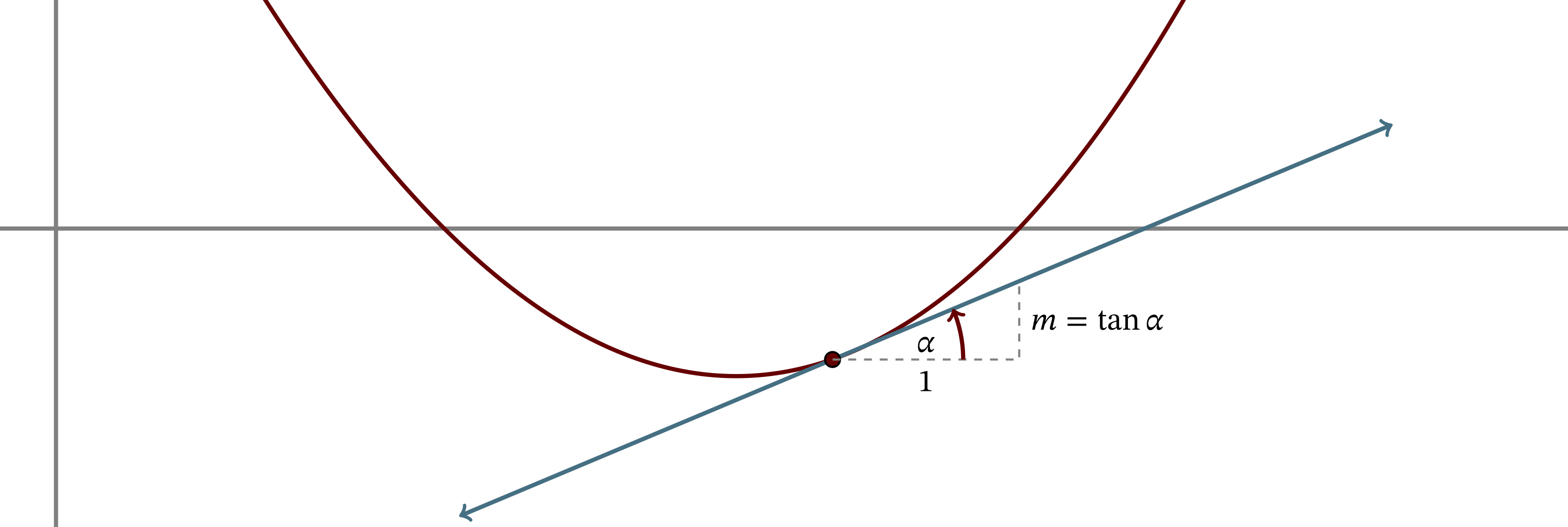
Ebben a fejezetben a differenciálszámítás alapfogalmaival, mint a derivált és a differenciál fogunk megismerkedni. Vizsgáljuk a differenciálhatóság feltételeit, bebizonyítjuk a differenciálszámítás alapvető tételeit, mint a Rolle-, a Lagrange- és a Cauchy-féle középértéktétel, a deriválási szabályok, beleértve a láncszabályt és az összetett függvények, az inverz függvény deriválását is. Elemezzük a függvények deriváltjainak geometriai és fizikai jelentését és megtanuljuk, hogyan alkalmazhatjuk ezeket a fogalmakat a gyakorlatban.

A differenciálszámítás lehetőséget teremt a függvények jellemzésére, segítségével a korábbi fejezetekben már tárgyalt jellemzők (például monotonitás, konvexitás) könnyen vizsgálhatók.

A derivált segítségével megérthetjük a sebesség, a gyorsulás, a növekedési ráta és más változási sebességek matematikai modelljét. A differenciálszámítás a modern tudomány és mérnöki munka alapvető eszköze, a gazdaságtól kezdve a fizikán át az informatikáig számos területen alkalmazzák. Megértése nemcsak a matematikai elmélet megértéséhez vezet el, hanem a valós világ problémáinak megoldásához is hozzájárul.

A fejezetben érintett témakörök

6.1 Bevezetés 38
6.2 Nevezetes függvények deriváltjai 42
6.3 Középértéktételek 43
6.4 Differenciálható függvények vizsgálata 46
6.5 Differenciálható függvények vizsgálata 49



6.1. Bevezetés

Definíció 6.1: Differenciahányados

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értelmezve az $x \in I$ pontban és annak környezetében. Ha $x \neq a$, akkor az
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
hányadost különbséghányadosnak vagy differenciahányadosnak nevezzük. Jelölése:
$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} \quad \text{vagy} \quad \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Definíció 6.2: Differenciálhányados

Ha létezik és véges a
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
határérték, akkor azt az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának, vagy az a pontbeli deriváltjának mondjuk. Jelölése:
$$f'(a) \quad \text{vagy} \quad \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}.$$

Az f függvény a pontbeli **érintő**jének **egyenlete** onnan következik, hogy $f' = m$, ahol m a meredekséget jelöli, az $y = m \cdot x + b$ egyenes egyenletéből levezetve:
$$f(a) = f'(a) \cdot a + b \quad \to \quad b = f(a) - f'(a) \cdot a,$$
és mivel
$$(a; f(a)) \in y = m \cdot x + b$$
$$\downarrow$$
$$y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$$
Ebből átalakítva:
$$\boxed{y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).}$$
Az $(a; f(a))$ pontbeli **normális egyenlete**:
$$M = \frac{-1}{f'(a)}, \quad \text{és} \quad (a; f(a)) \in Y = M \cdot X + B,$$
$$\boxed{y = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a).}$$

Definíció 6.3: Derivált

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értelmezve a pontban és annak egy környezetében. Ekkor f-t differenciálhatónak mondjuk a pontban, ha $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0, \text{ hogy } f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x) \cdot (x-a).$$

Definíció 6.4: Jobboldali derivált

Legyen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, ekkor a

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértékét, ha létezik és véges, az f függvény a pontbeli jobboldali deriváltjának mondjuk.

Definíció 6.5: Baloldali derivált

Legyen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, ekkor a

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértékét, ha létezik és véges, az f függvény a pontbeli baloldali deriváltjának mondjuk.

Az $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in I$ pontban differenciálható $\Leftrightarrow$, ha ott balról és jobbról is differenciálható és a bal és jobb oldali deriváltak egyenlőek.

$f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ pontban:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{x-0}{x-0} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-x-0}{x-0} = -1.$$

A két derivált nem egyezik meg, tehát az $x = 0$ pontban a függvény nem deriválható. A folytonosság szükséges, de nem elégséges feltétele a differenciálhatóságnak.

Tétel 6.1

Ha az f függvény differenciálható egy adott pontban, akkor ott folytonos is.

Definíció 6.6: Függvény differenciálhatósága nyílt intervallumon

Az f függvény differenciálható az $(a; b)$ intervallumon, ha annak minden pontjában differenciálható.

Definíció 6.7: Függvény differenciálhatósága zárt intervallumon

Az f függvény differenciálható az $[a;b]$ intervallumon, ha differenciálható az $(a;b)$ intervallumon, továbbá jobbról differenciálható a-ban és balról differenciálható b-ben.

Definíció 6.8: Differenciálhányados függvény

Az f függvény differenciahányados függvényének nevezzük és f'-vel jelöljük azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya azon pontok halmaza, ahol f differenciálható és $\forall x \in \mathcal{D}_{f'}$ esetén a függvényérték $f'(x)$.

Definíció 6.9: Másodrendű derivált

Ha az f' függvény differenciálható az x_0 helyen, akkor a derivált az f függvény x_0 pontbeli másodrendű deriváltjának nevezzük, jele:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{\mathrm{d}x^2} \quad \text{vagy} \quad f''(x_0).$$

Ha $f''(x_0)$ létezik, akkor azt is mondjuk, hogy f kétszer differenciálható x_0-ban.

Hasonlóan értelmezhetőek a többedrendű deriváltakat is. Harmadik derivált utána jelölés $f^{(k)}$.

Példák függvények deriváltjára:

1. $f(x) = x \quad \to \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1,$
2. $f(x) = x^n \quad \to \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0} =$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1})}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}}_{n \text{ darab}} = n\cdot x_0^{n-1}.$$

Függvény konstansszorosának deriváltja

! Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható az x_0 pontban, ekkor $c\cdot f$ is differenciálható x_0-ban és

$$(c\cdot f(x_0))' = c\cdot f'(x_0), \text{ ahol } c \in \mathbb{R}.$$

Összegfüggvény deriváltja

! Legyenek f és g differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, ekkor $f+g$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Szorzatfüggvény deriváltja

Legyenek f és g differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, ekkor $f \cdot g$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Hányadosfüggvény deriváltja

Legyenek f és g differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, ekkor f/g is differenciálható x_0-ban és:

$$\frac{f'}{g'}(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

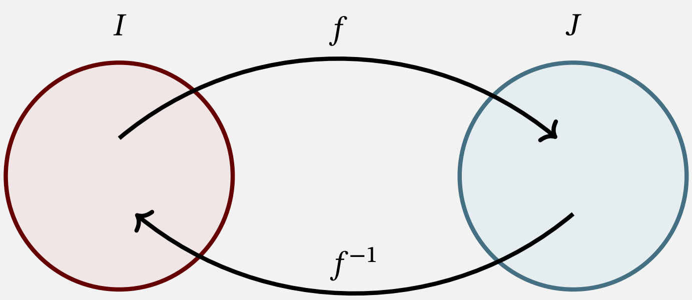
Láncszabály

Legyen f differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pontban és g differenciálható az $f(x_0) \in \mathcal{D}_g$ pontban, ekkor $f \circ g$ is differenciálható x_0-ban és:

$$(g \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Definíció 6.10: Inverz függvény

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ és $J := f(I)$, kölcsönösen egyértelmű leképezése I-nek f-re, ekkore az $f^{-1} : J \to I$ függvényt f inverzének hívjuk, ha $\forall y \in J$ esetén $\exists x \in I$, hogy $y = f(x)$.



Tétel 6.2

Legyen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos függvény $[a; b]$ intervallumon, ekkor teljesülnek az alábbiak:

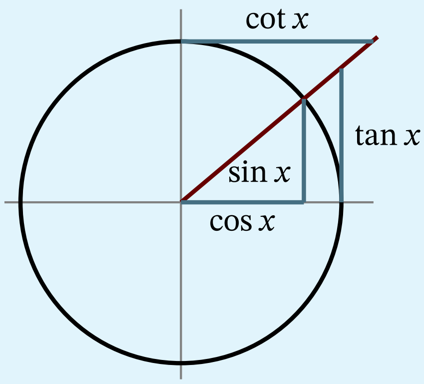
- f értékkészlete:
  - $[f(a), f(b)]$, ha szigorúan monoton növekvő,
  - $[f(a), f(b)]$, ha szigorúan monoton csökkenő.
- f invertálható.
- f inverze is szogorúan monoton, éppen olyan értelemben, ahogyan f.
- az f^{-1} folytonos $[f(a), f(b)]$-n vagy $[f(b), f(a)]$-n.

! Inverz függvény deriválási szabály: Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos az x_0 pont egy környezetében, továbbá $f'(x_0) \neq 0$, ekkor f inverze is differenciálható a $b = f(x_0)$ pontban és:

$$(f^{-1}(b))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

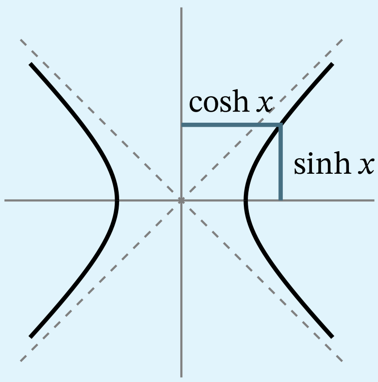
6.2. Nevezetes függvények deriváltjai

Trigonometrikus függvények



$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Hiperbolikus függvények



$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(x > 1)$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert < 1)$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert > 1)$

Hiperbolikus azonosságok

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = -i\sin(ix) \qquad \cosh x = \cos(ix)$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Osborne-szabály

Minden trigonometrikus azonosság egy hiperbolikus azonossággá alakítható, és fordítva, ha végrehajtjuk a következő cseréket:

- $\cos x \quad \to \quad \cosh x,$
- $\sin x \quad \to \quad \sinh x,$
- $\sin^2 x \quad \to \quad -\sinh^2 x.$

Például:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \to \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

További függvények

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{x^{1/n-1}}{n}$

6.3. Középértéktételek

Tétel 6.3: Rolle-tétel

Legyen f folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $(a; b)$ intervallumon, továbbá $f(a) = f(b) = 0$, ekkor létezik $\xi \in (a; b)$, melyre teljesül, hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás:

Tétel 6.4: Lagrange-féle középértéktétel

Legyen $f : I \subset R \to R$ folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $(a;b)$ intervallumon, ekkor létezik olyan $\delta \in (a;b)$ hogy

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás:

Tétel 6.5

Ha f folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $(a;b)$ intervallumon, továbbá $\forall x \in (a;b)$ esetén $f'(x) = 0$, akkor $f(x) = c$ (a függvény konstans).

Tétel 6.6

Ha f és g folytonos az $[a;b]$ intervallumon és differenciálható a $(a;b)$ intervallumon, továbbá $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a;b)$-re, akkor

$$g(x) = f(x) + c.$$

Tétel 6.7: Cauchy-féle középértéktétel

Legyen f és g függvények folytonosak $[a; b]$ intervallumon és differenciálhatóak $(a; b)$ intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in (a; b)$ esetén. Ekkor létezik olyan $\eta \in (a; b)$ hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

Bizonyítás:

$g(x) = x$ választással speciális esetként visszakapjuk a Lagrange-féle középértéktételt.

A Cauchy-féle középértéktétel nem ekvivalens azzal, hogy külön-külön az f és g függvényekre alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt, majd vesszük ezek hányadosát.

6.4. Differenciálható függvények vizsgálata

Tétel 6.8

Ha $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható a $J \subset I$ intervallumon, akkor ahhoz, hogy f a J-n monoton növekvő legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy $\forall x \in J$ esetén $f'(x) \geq 0$ fennálljon.

Tétel 6.9

Ha $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható a $J \subset I$ intervallumon, akkor ahhoz, hogy f a J-n monoton csökkenő legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy $\forall x \in J$ esetén $f'(x) \leq 0$ fennálljon.

Ha $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in J$ esetén és véges sok pont kivételével $f'(x) \geq 0$, akkor f a J intervallumon szigorúan monoton növekvő.

Tétel 6.10

Ha f a J intervallumon differenciálható, akkor ahhoz, hogy a J-n konvex legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy $f'(x)$ a J-n monoton növekvő legyen.

Tétel 6.11

Ha f a J intervallumon differenciálható, akkor ahhoz, hogy a J-n konkáv legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy $f'(x)$ a J-n monoton csökkenő legyen.

Tétel 6.12

Ha f a J-n kétszer differenciálható, akkor ahhoz, hogy itt konvex legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in J$.

Tétel 6.13

Ha f a J-n kétszer differenciálható, akkor ahhoz, hogy itt konkáv legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in J$.

Tétel 6.14: Taylor-formula

Legyen f $[a;b] \to \mathbb{R}$ és n természetes szám, tegyük fel, hogy $f^{(n)}$ folytonos az $[a;b]$ intervallumon és differenciálható az $(a;b)$ intervallumon, ekkor $\forall x$ és $\alpha \in [a;b]$ mellett $\exists \xi$ x és α között úgy, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \cdot (x-\alpha)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-\alpha)^{n+1}.$$

Definíció 6.11: Szélsőérték számítás

Legyen $f\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in I$, azt mondjuk, hogy:

- f-nek a pontban lokális
  - maximuma van, ha $\exists\delta > 0$, hogy $f(x) \leq f(a)$, ha $x \in K(a, \delta)$,
  - minimuma van, ha $\exists\delta > 0$, hogy $f(x) \geq f(a)$, ha $x \in K(a, \delta)$.
- f-nek a pontban
  - szigorú lokális maximuma van, ha $f(x) < f(a)$,
  - szigorú lokális minimuma van, $f(x) > f(a)$.
- f-nek a pontban
  - abszolút maximuma van, ha $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in I$,
  - abszolút minimuma van, ha $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in I$.
- f-nek a pontban
  - szigorú abszolút maximuma van, ha $f(x) < f(a)$, $\forall x \in I \setminus \{a\}$,
  - szigorú abszolút minimuma van, ha $f(x) > f(a)$, $\forall x \in I \setminus \{a\}$.

Zárt intervallumon valós értékű folytonos függvény felveszi a szuprémumát, illetve infimumát függvényértékként.

Tétel 6.15: Szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha $f\colon I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható I-n és f-nek az $\alpha \in \operatorname{int} I$ pontban szélsőértéke van, akkor $f'(\alpha) = 0$.

Tétel 6.16: Szélsőérték létezésének elégséges feltétele

Ha $f\ :\ I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható I-n és f-nek az $\alpha \in \operatorname{int} I$, akkor ha $\exists r > 0$, hogy:

- $f'(x) \geq 0$, ha $x \in (\alpha - r; \alpha)$ és $f'(x) \leq 0$, ha $x \in (\alpha; \alpha + r)$,
  akkor f-nek lokális maximuma van α-ban,
- $f'(x) \leq 0$, ha $x \in (\alpha; \alpha + r)$ és $f'(x) \geq 0$, ha $x \in (\alpha - r; \alpha)$,
  akkor f-nek lokális minimuma van α-ban.

Tétel 6.17

Legyen $f\ [a; b] \to \mathbb{R}$ a-ban jobbról, b-ben balról differenciálható függvény.

- Ha $f'(b) > 0$, akkor f-nek b-ben szigorú helyi maximuma van.
- Ha $f'(b) < 0$, akkor f-nek b-ben szigorú helyi minimuma van.
- Ha $f'(a) > 0$, akkor f-nek a-ban szigorú helyi minimuma van.
- Ha $f'(a) < 0$, akkor f-nek a-ban szigorú helyi maximuma van.

Tétel 6.18

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n > 1$-szer differenciálható I-n, $\alpha \in \operatorname{int} I$, ha

$$f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{és} \quad f^{(n)}(\alpha) \neq 0,$$

akkor, ha

- n páratlan, akkor nincs szélsőérték α-ban,
- n páros, akkor van szélsőérték α-ban, és
  - $f^{(n)}(b) > 0$ esetén lokális minimuma van,
  - $f^{(n)}(b) < 0$ esetén lokális maximuma van.

Tétel 6.19

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n > 1$-szer differenciálható az I-n, $\alpha \in \operatorname{int} I$, valamint

$$f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{és} \quad f^{(n)}(\alpha) \neq 0,$$

akkor, ha

- $f^{(n)}(b) > 0$ és n páratlan, akkor szigorú helyi maximuma van b-ben,
- $f^{(n)}(b) > 0$ és n páros, akkor szigorú helyi minimuma van b-ben.

Definíció 6.12

Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ és $\alpha \in \operatorname{int} I$, α-t f inflexiós pontjának mondjuk, ha $\exists \delta > 0$, hogy f függvény $(\alpha, \alpha + \delta)$ intervallumon konvex és az $(\alpha - \delta, \alpha)$ intervallumon konkáv, vagy ha $(\alpha, \alpha + \delta)$ intervallumon konkáv és az $(\alpha - \delta, \alpha)$ intervallumon konvex.

Ha f kétszer differenciálható és α inflexiós pont, akkor $f''(\alpha) = 0$.

Definíció 6.13

Ha van olyan $y = A \cdot x + B$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (A \cdot x + B) = 0, \text{ vagy } \lim_{x \to -\infty} f(x) - (A \cdot x + B) = 0,$$

akkor az $y = A \cdot x + B$ egyenest az f függvény aszimptotájának nevezzük.

Aszimptota létezésének szükséges feltétele:

Ha f-nek létezik a fenti definícióban szereplő aszimptotája, akkor

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = A, \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = A. \quad (A \in \mathbb{R})$$

Aszimptota létezésének elégséges feltétele:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - A\cdot x) \text{ vagy } \lim_{x\to\infty}(f(x) - A\cdot x)$$

határérték végessége, ami a B értékét adja.

Tétel 6.20: L'Hôpital-szabály

Legyenek f és g differenciálhatóak az $\alpha \in \mathbb{R}_b$ pont egy környezetében (α-ban nem szükségképpen), továbbá $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0, \text{ vagy } \lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty,$$

$$\text{ekkor, ha } \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B, \text{ akkor } \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = B.$$

6.5. Felkészülést segítő kérdések

1. Definiálja a differenciahányados fogalmát!
2. Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós függvény differenciálható?
3. Szükséges feltétele-e a differenciálhatóságnak a folytonosság? Ez a feltétel elégséges-e?
4. Ismertesse a deriválási szabályokat!
5. Hogyan számíthatjuk ki az összetett függvények deriváltját?
6. Ismertesse az inverz függvény deriválására vonatkozó összefüggést!
7. Mondja ki a Rolle-féle középértéktételt!
8. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!
9. Mondja ki a Cauchy-féle középértéktételt!
10. Mit nevezünk egy függvény aszimptotájának?
11. Írja fel egy adott pontban egy differenciálható függvény érintőjének egyenletét!
12. Írja fel egy adott pontban egy differenciálható függvény normálisának
13. Ismertesse egy differenciálható függvény vizsgálatának lépéseit!

7 Integrálszámítás

Az integrálszámítás ugyancsak a matematikai analízis alapvető eszköze, amelynek segítségével a változások összegzését és különböző görbék által közbezárt területek kiszámítását végezhetjük el. Ezáltal lehetővé válik számunkra, hogy megértsük és leírjuk a természetben és a társadalomban zajló folyamatokat. Alapjait – a differenciálszámításhoz hasonlóan – Isaac Newton és Gottfried Wilhelm Leibniz fektették le a 17. században.

A differenciálszámítás során megismert deriváltak a változás sebességét fejezik ki, míg az integrálszámítás a kumulált változásokat számszerűsíti. A határozatlan integrál segítségével egy adott függvényhez hozzárendeljük azokat a függvényeket, amelyek deriváltja az adott függvény. Ilyenkor azt mondjuk, hogy megkeressük az adott függvény primitív függvényét. A határozott integrál használatával pedig konkrét értékeket rendelhetünk a függvények alatti területekhez, kiszámíthatunk olyan fizikai mennyiségeket, mint például a megtett út vagy a munka. Az improprius integrál a Riemann-féle integrál kiterjesztése olyan esetekre, amikor az integrálandó függvény vagy az integrálási tartomány nem korlátos.

Az integrálszámítás nem csupán elméleti jelentőséggel bír, hanem számos gyakorlati alkalmazása is van. Ez a fejezet a fenti fogalmakat és az integrálszámítás alapjait mutatja be, megvilágítva annak széleskörű alkalmazhatóságát és jelentőségét a tudományos és mérnöki problémák megoldásában. Az Olvasó megismerkedhet az integrálszámítás alapvető tétele ivel, módszereivel és azok alkalmazásával, amelyek elengedhetetlenek a matematikai gondolkodás és a problémamegoldó képességek fejlesztéséhez.

A fejezetben érintett témakörök

7.1 Határozatlan integrál 52
7.2 Integrálási segédlet 53
7.3 Integrálási módszerek, speciális esetek 54
7.4 Határozott integrál 65
7.5 Improprius integrál 71

7.1. Határozatlan integrál

Definíció 7.1: Primitív függvény

Legyen $f : I \to \mathbb{R}$, ekkor az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény primitív függvényének nevezzük I-n, ha F differenciálható I-n és $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Ha az F függvény primitív függvénye az f-nek, akkor $G(x) = F(x) + C$ ugyancsak primitív függvénye az f-nek, ahol $C \in \mathbb{R}$.

Ha F és G is f primitív függvényei, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$, hogy $F(x) = G(x) + C$.

Definíció 7.2: Határozatlan integrál

Az f primitív függvényeinek összességét f határozatlan integráljának nevezzük az I-n. Jelölése:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Az 1, x, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\arcsin x$ függvényekből a négy alapművelet, az összetett függvényképzés és a nyílt halmazra való leszűkítés véges sokszori alkalmasával keletkező függvényeket **elemi függvényeknek** nevezzük.

A $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$, $\operatorname{arcoth} x$, x^α, polinom, racionális függvények elemi függvények.

A négy alapművelet, az összetett függvényképzés, a nyílt halmazra való leszűkítés megőrzi a differenciálhatóságot, tehát az elemi függvények az értelmezési tartományuk belső pontjában differenciálhatóak. A primitív függvények megkeresése azonban kivezet az elemi függvények köréből, ez indokolja az **elemien integrálható függvények** elnevezés bevezetését.

Elemien integrálható függvény olyan elemi függvény, amelynek primitív függvénye ugyancsak elemi függvény.

Elemien integrálható függvények például:

$$x^2, \quad \frac{1}{x+2}, \quad \frac{1}{x^2+1}.$$

Nem elemien integrálható függvény például:

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}.$$

7.2. Integrálási segédlet

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$f(x)$	$F(x)$
k	kx
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

$f(x)$	$F(x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$

$f(x)$	$F(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$

Linearitás

$$\int \lambda f = \lambda \int f \qquad \int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f \pm g = \int f \pm \int g \qquad \int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Parciális integrálás

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \qquad \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Helyettesítéses integrálás

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f^\alpha(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq 1)$$

$$\int (f \circ g)\cdot g' = \left(\int f\right)\circ g \qquad \int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

7.3. Integrálási módszerek, speciális esetek

7.3.1. Helyettesítéses integrálás

A **helyettesítéses integrálás** módszerének bevezetéséhez tekintsük az alábbi példát:

$$\int 2x \cdot (x^2+1)^3 \, \mathrm{d}x.$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben szereplő kifejezés deriváltja megjelenik a szorzatban. Vezessük be a $t = x^2 + 1$ helyettesítést, majd számoljuk ki a kifejezés deriváltját:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t.$$

Helyettesítsük be a kifejezést:

$$\int 2x \cdot (x^2+1)^3 \, \mathrm{d}x = \int 2x \cdot t^3 \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C.$$

A helyettesítéses integrálás speciális esetei:

- $\displaystyle\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, ahol $\alpha \neq -1$,
- $\displaystyle\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$,
- $\displaystyle\int e^f \cdot f' = e^f + C$,
- $\displaystyle\int (f \circ g) \cdot g' \, \mathrm{d}x = \left(\int f\right) \circ g$.

Integráljuk az alábbi kifejezést:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

A nevezőben szereplő kifejezés deriváltja megegyezik a számlálóval, ezért az integrálás eredménye a következő:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+1| + C.$$

Ellenőrizzük az eredményt! Vezessük be a $t = x^2 + 1$ helyettesítést, majd számoljuk ki a kifejezés deriváltját:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t.$$

Helyettesítsük be a kifejezést:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|x^2+1| + C.$$

A két eredmény megegyezik, tehát az integrálás helyes.

Integráljuk az alábbi kifejezést:

$$\int 6x^2 \cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Az exponenciális függvény kitevőjének a deriváltja megjelenik a szorzatban, ezért az integrálás eredménye a következő:

$$\int 6x^2 \cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x = 2\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x = 2e^{x^3} + C.$$

Ellenőrizzük az eredményt! Vezessük be a $t = x^3$ helyettesítést, majd számoljuk ki a kifejezés deriváltját:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}t.$$

Helyettesítsük be a kifejezést:

$$\int 6x^2 \cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x = 2\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x = 2\int 3x^2 \cdot e^{t} \cdot \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}t = 2e^t + C = 2e^{x^3} + C.$$

A két eredmény megegyezik, tehát az integrálás helyes.

Integráljuk az alábbi kifejezést:

$$\int x \cdot \cos(x^2+3)\,\mathrm{d}x.$$

A koszinusz argumentumának deriváltja megjelenik a szorzatban, ezért az integrálás eredménye a következő:

$$\int x \cdot \cos(x^2+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos(x^2+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + C.$$

Ellenőrizzük az eredményt! Vezessük be a $t = x^2 + 3$ helyettesítést, majd számoljuk ki a kifejezés deriváltját:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t.$$

Helyettesítsük be a kifejezést:

$$\int x\cdot\cos(x^2+3)\,\mathrm{d}x = \int x\cdot\cos t\cdot\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + C.$$

A két eredmény megegyezik, tehát az integrálás helyes.

7.3.2. Parciális integrálás

A **parciális integrálás** módszerének bevezetéséhez írjuk fel két függvény szorzatának deriváltját:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integráljuk x szerint az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' \, dx = \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx.$$

Az integrálás és a deriválás műveletei egymás inverzei, így az egyenlet bal oldala az alábbi alakot ölti:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Integráljuk az $f(x) = e^{2x} \cdot 3x^2$ függvényt.

A függvény egy **polinom** és egy **trigonometrikus függvény** szorzataként áll elő, ezért célszerű a parciális integrálás módszerét alkalmazni.

Válasszuk meg az f és g függvényeket! Mivel a parciális integrálás során f függvényt deriválni fogjuk, ezért legyen $f = 3x^2$, hiszen ez kétszeri differenciálása után konstans függvénnyé szelídül:

$$f(x) = 3x^2, \quad g(x) = e^{2x}/2,$$
$$f'(x) = 6x, \quad g'(x) = e^{2x}.$$

Használjuk tehát a parciális integrálás képletét:

$$\int e^{2x} \cdot 3x^2 \, dx = 3x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 6x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \, dx = \frac{3x^2 e^{2x}}{2} - \int 3x \, e^{2x} \, dx.$$

Az utolsó integrálásnál ismételjük meg a parciális integrálás módszerét:

$$f(x) = 3x, \quad g(x) = e^{2x}/2,$$
$$f'(x) = 3, \quad g'(x) = e^{2x}.$$

Használjuk ismét a tanult képletet:

$$\int 3x \, e^{2x} \, dx = 3x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 3 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \, dx = \frac{3xe^{2x}}{2} - \int \frac{3e^{2x}}{2} \, dx = \frac{3xe^{2x}}{2} - \frac{3e^{2x}}{4} + C.$$

A végeredmény tehát:

$$\int e^{2x} \cdot 3x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{3x^2 e^{2x}}{2} - \frac{3xe^{2x}}{2} + \frac{3e^{2x}}{4} + C.$$

Táblázatos módszer

Exponenciális függvény és polinom szorzatának integrálását **táblázatos módszerrel** is elvégezhetjük. Integráljuk az $f(x) = e^{2x} \cdot 3x^2$ most ezzel a módszerrel!

A táblázat első oszlopába írjuk be a polinom függvényt, majd ezt annyiszor deriváljuk, ameddig az el nem tűnik. Az exponenciális függvényt pedig pontosan ugyanennyiszer integráljuk.

D		I
$3x^2$	$+$	e^{2x}
$6x$	$-$	$e^{2x}/2$
6	$+$	$e^{2x}/4$
0		$e^{2x}/8$

Az első oszlop első elemét szorozzuk össze a második oszlop második elemével, majd rendeljünk hozzá pozitív előjelet. Ezután az első oszlop második elemét szorozzuk össze a második oszlop harmadik elemével, majd rendeljünk hozzá negatív előjelet. Az első oszlop harmadik elemét pedig a második oszlop negyedik elemével szorozzuk össze, a szorzathoz most újra pozitív előjelet rendelünk. Az eredményeket összegezzük és hozzáadjuk a konstans tagot:

$$\int e^{2x} \cdot 3x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{3x^2 e^{2x}}{2} - \frac{3xe^{2x}}{2} + \frac{3e^{2x}}{4} + C.$$

Integráljuk az $f(x) = \ln x$ függvényt! A természetes alapú logaritmus primitív függvénye nem található meg az integrálási segédletben, ezért egy trükkhöz kell folyamodnunk:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Válasszuk meg f és g' függvényeket az alábbi módon:

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = x,$$
$$f'(x) = 1/x, \qquad g'(x) = 1.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + C = x \cdot (\ln x - 1) + C.$$

Most integráljuk az $f(x) = e^{2x} \cdot \sin 3x$ függvényt a parciális integrálás módszerével. Mivel sem a trigonometrikus tag, sem pedig az exponenciális tag nem tűnik el differenciálás során, ezért tetszőlegesen megválaszthatjuk, hogy melyik lesz f és melyik lesz g' függvény:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}, & g(x) &= -\cos(3x)/3, \\ f'(x) &= 2e^{2x}, & g'(x) &= \sin 3x. \end{aligned}$$

Helyettesítsük be a képletekbe:

$$\begin{aligned} I = \int e^{2x} \cdot \sin 3x \,\mathrm{d}x &= \frac{-e^{2x} \cdot \cos 3x}{3} - \int -\frac{2e^{2x} \cdot \cos 3x}{3} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-e^{2x} \cdot \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \underbrace{\int e^{2x} \cdot \cos 3x \,\mathrm{d}x}_{=:J} \\ &= \frac{-e^{2x} \cdot \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \cdot J. \end{aligned}$$

Az utolsó integrálásnál ismételjük meg a parciális integrálás módszerét:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}, & g(x) &= \sin(3x)/3, \\ f'(x) &= 2e^{2x}, & g'(x) &= \cos 3x. \end{aligned}$$

Helyettesítsünk be ismét a parciális integrálás képletébe:

$$\begin{aligned} J = \int e^{2x} \cdot \cos 3x \,\mathrm{d}x &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{3} - \int \frac{2e^{2x} \cdot \sin 3x}{3} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\int e^{2x} \cdot \sin 3x \,\mathrm{d}x}_{I} \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \cdot I. \end{aligned}$$

Az integrálok alapján egy két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer írható fel:

$$I = \frac{-e^{2x} \cdot \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \cdot J \qquad J = \frac{+e^{2x} \cdot \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \cdot I,$$

ebből pedig

$$I = \frac{-e^{2x} \cdot \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \cdot I \right).$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és rendezzük az egyenletet:

$$I + \frac{4}{9} \cdot I = \frac{13}{9} \cdot I = \frac{-e^{2x} \cdot \cos 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \cdot \sin 3x}{9}.$$

Ekkor

$$I = \int e^{2x} \sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x} \cdot (2 \sin 3x - 3 \cos 3x)}{13} + C.$$

7.3.3. Racionális törtfüggvények integrálása

Egy **racionális törtfüggvény** polinomok hányadosaként áll elő. Általános alakja:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Amennyiben a nevező fokszáma kisebb, mint a számlálóé, vagyis $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, akkor a **polinomosztás** módszeréhez kell folyamodnunk, mely elvégzése után a törtfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$R(x) = T(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

hol $T(x)$ egy újabb polinom, $S(x)$ fokszáma pedig már kisebb, mint $Q(x)$ fokszáma.

Ezután **parciális törtekké** bontjuk a $S(x)/Q(x)$ hányadost, majd ezeket, illetve a $T(x)$ polinomot integráljuk.

Amennyiben a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma, vagyis $\deg P(x) < \deg Q(x)$, akkor polinomosztás nélkül tudjuk parciális törtekké bontani a függvényt.

A parciális törtekre való bontáshoz az **algebra alaptételét** használjuk fel, miszerint bármely valós együtthatós polinom felbontható első és másodrendű kifejezések szorzatára, vagyis

$$p(x) = A \cdot \underbrace{\prod (x - a_i)}_{\text{valós gyökök}} \cdot \underbrace{\prod (x^2 + p_i x + q_i)}_{\text{komplex gyökök}}.$$

Hozzuk $R(x) = T(x) + S(x)/Q(x)$ alakra ($\deg S < \deg Q$) azt $R(x) = P(x)/Q(x)$ függvényt, ahol $P(x) = x^3 - 12x^2 - 42$ és $Q(x) = x - 3$.

Végezzük el az alábbi polinomosztást:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & (x^3 & -12x^2 & +0x & -42) & \div & (x-3) = x^2 - 9x - 27.\\
x^2 \cdot (x-3) \to & -\ (x^3 & -3x^2 & +0x & +0x) & & \\
\hline
 & & -9x^2 & +0x & -42 & & \\
-9x \cdot (x-3) \to & & -\ (-9x^2 & +27x & +0\ ) & & \\
\hline
 & & & -27x & -42 & & \\
-27 \cdot (x-3) \to & & & -\ (-27x & +81) & & \\
\hline
 & & & & -123 & &
\end{array}$$

Az eredmény tehát:

$$R(x) = x^2 - 9x - 27 - \frac{123}{x-3}.$$

Integráljuk az előző feladatban szereplő $R(x)$ polinomot!

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 9x - 27 - \frac{123}{x-3} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} - 27x - 123 \ln|x-3| + C.$$

Parciális törtekre bontás a letakarós módszerrel

Amennyiben a nevező gyökei tisztán valósak, és nincsen többszörös gyök, akkor a parciális törtekre bontást a **letakarós módszerrel** is elvégezhetjük.
A racionális törtfüggvény eredeti alakja:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ ahol } Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i).$$

Az egyes gyökökhöz tartozó együtthatókat a következő módon határozhatjuk meg:

$$A_i = \lim_{x \to a_i} (x - a_i)\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Az együtthatók meghatározása után a racionális törtfüggvény az alábbi alakban írható fel:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(x - a_i)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x - a_n)}.$$

Vegyük például az alábbi racionális törtfüggvényt:

$$R(x) = \frac{6x^2 - 10x + 2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}.$$

A parciális törteket az alábbi alakban keressük:

$$R(x) = \frac{A}{\underbrace{x}_{a_0=0}} + \frac{B}{\underbrace{x-1}_{a_1=1}} + \frac{C}{\underbrace{x-2}_{a_2=2}}.$$

Az együtthatók a képlet alapján:

$$A_1 = \lim_{x \to 0}(x - 0)\frac{6x^2 - 10x + 2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{6x^2 - 10x + 2}{(x-1) \cdot (x-2)} = 1,$$

$$A_2 = \lim_{x \to 1}(x - 1)\frac{6x^2 - 10x + 2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 10x + 2}{x \cdot (x-2)} = 2,$$

$$A_3 = \lim_{x \to 2}(x - 2)\frac{6x^2 - 10x + 2}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{6x^2 - 10x + 2}{x \cdot (x-1)} = 3.$$

A kapott együtthatók alapján a racionális törtfüggvény parciális törtekké bontva:

$$R(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}.$$

Ennek az integrálja:

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C.$$

Integráljuk az alábbi törtfüggvényt:

$$R(x) = \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}.$$

A nevező fokszáma nagyobb, mint a számlálóé, ezért rögtön parciális törtekre bonthatjuk a függvényt. Mivel a nevezőben lévő $(2x-1)$ faktor fokszáma 2, ezért ezt a parciális törtekké bontásnál is figyelembe kell vennünk:

$$R(x) = \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

A bal és jobb oldal egyenlőségéből következik, hogy:

$$\begin{aligned} x-2 &= A(x-1)(2x-1) + B(x-1) + C(2x-1)^2 \\ &= A(2x^2-3x+1) + B(x-1) + C(4x^2-4x+1) \\ &= (2A+4C)x^2 + (-3A+B-4C)x + (A-B+C). \end{aligned}$$

Ezek alapján egy három ismeretlenes egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} 0 = 2A + 4C, \\ 1 = -3A + B - 4C, \\ -2 = A - B + C. \end{cases}$$

Ebből $C = -1$, $A = 2$ és $B = 3$ következik, tehát az eredeti törtfüggvényt a következő alakban írhatjuk fel:

$$R(x) = \frac{2}{2x-1} + \frac{3}{(2x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

A határozatlan integrálás megoldása tehát:

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \ln|2x-1| - \frac{3}{2(2x-1)} - \ln|x-1| + C.$$

Integráljuk az alábbi törtfüggvényt:

$$R(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}.$$

A nevező fokszáma megegyezik a számláló fokszámával, ezért a parciális törtekké való bontás előtt át kell alakítanunk a törtet:

$$R(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-4} = \frac{x^2-4+3x+5}{x^2-4} = 1 + \frac{3x+5}{x^2-4} = 1 + \frac{3x+5}{(x-2)(x+2)}.$$

Határozzuk meg a parciális törteket:

$$\frac{3x+5}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}.$$

A bal és jobb oldal egyenlőségéből következik, hogy:

$$3x + 5 = A(x + 2) + B(x - 2).$$

Ezek alapján egy két ismeretlenes egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} 3 = A + B, \\ 5 = 2A - 2B. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásából $A = 11/4$ és $B = 1/4$ következik, tehát az eredeti törtfüggvényt a következő alakban írhatjuk fel:

$$R(x) = 1 + \frac{11/4}{x - 2} + \frac{1/4}{x + 2}.$$

A határozatlan integrálás megoldása tehát:

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{11}{4}\ln|x - 2| + \frac{1}{4}\ln|x + 2| + C.$$

Bontsuk fel a következő racionális törtfüggvényt parciális törtekké, majd integráljuk az egyes tagokat:

$$R(x) = \frac{-20 + 77x - 57x^2 + 21x^3 - 3x^4}{x^5 - 13x^4 + 73x^3 - 193x^2 + 232x - 100}.$$

A nevezőben szereplő kifejezést már korábban felbontottuk:

$$R(x) = \frac{-20 + 77x - 57x^2 + 21x^3 - 3x^4}{(x - 1)\cdot(x - 2)^2\cdot(x^2 - 6x + 25)}.$$

Írjuk fel paraméteresen a parciális törteket:

$$R(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Cx + D}{(x - 2)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 - 6x + 25}.$$

Ezek alapján:

$$\begin{aligned}
-20 + 77x - 57x^2 + 21x^3 - 3x^4 &= A\cdot(x - 2)^3\cdot(x^2 - 6x + 25) + \\
&\quad + B\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)^2\cdot(x^2 - 6x + 25) + \\
&\quad + (Cx + D)\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)\cdot(x^2 - 6x + 25) + \\
&\quad + (Ex + F)\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)^3 \\
&= A(x^5 - 12x^4 + 73x^3 - 230x^2 + 348x - 200) \\
&\quad + B(x^5 - 11x^4 + 63x^3 - 177x^2 + 224x - 100) \\
&\quad + C(x^5 - 9x^4 + 45x^3 - 87x^2 + 50x) \\
&\quad + D(x^4 - 9x^3 + 45x^2 - 87x + 50) \\
&\quad + E(x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 20x^2 + 8x) \\
&\quad + F(x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8)
\end{aligned}$$

Az együtthatók összevetésével az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} 0 &= A+B+C+E & (x^5) \\ -3 &= -12A-11B-9C+D-7E+F & (x^4) \\ 21 &= 73A+63B+45C-9D+18E-7F & (x^3) \\ -57 &= -230A-177B-87C+45D-20E+18F & (x^2) \\ 77 &= 348A+224B+50C-87D+8E-20F & (x^1) \\ -20 &= -200A-100B+50D+8F & (x^0) \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásával az együtthatók értékei:

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=1, \quad D=0, \quad E=-3, \quad F=5.$$

Az eredmény tehát:

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{x}{(x-2)^2} + \frac{-3x+5}{x^2-6x+25}.$$

Az egyes tagok integrálása:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \ln|x-1| + C_1 \\ \int \frac{-2}{x-2}\,\mathrm{d}x &= -2\ln|x-2| + C_2 \\ \int \frac{x}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t+2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln|t| - \frac{2}{t} + C_3 = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C_3 \\ \int \frac{-3x+5}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2}\ln|x^2-6x+25| - 4\int \frac{1}{(x-3)^2+4^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2}\ln|x^2-6x+25| - \arctan\left(\frac{x-3}{4}\right) + C_4. \end{aligned}$$

7.3.4. Trigonometrikus függvények integrálása

Trigonometrikus függvények integrálásakor a tanult trigonometrikus azonosságokat kell alkalmaznunk. Ezek közül a legfontosabbak:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sin^2 x + \cos^2 x, \\
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}, \\
\cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}, \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x, \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.
\end{aligned}
$$

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páros, akkor a függvényt a fenti trigonometrikus azonosságok segítségével át tudjuk alakítani.

Amennyiben a szögfüggvény fokszáma páratlan $(2k+1)$, akkor azt felbontjuk egy $2k$-s és egy 1-es szögfüggvény szorzataként, majd a már páros fokszámú tagot az előbbi módszerrel tudjuk integrálni.

Integráljuk a $\sin^2 x$ függvényt!

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Integráljuk a $\cos^4 x$ függvényt!

$$
\begin{aligned}
\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.
\end{aligned}
$$

Integráljuk az $\sin^7 x$ függvényt!

$$
\begin{aligned}
\int \sin^7 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^6 x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \int (\sin^2 x)^3 \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)^3 \cdot \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= \int (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x) \cdot \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos x - \cos^3 x - \frac{3\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.
\end{aligned}
$$

7.4. Határozott integrál

7.4.1. A Riemann-integrál

Definíció 7.3: Intervallum beosztása

Legyen $a < b \in \mathbb{R}$, ekkor az $[a; b]$ egy beosztásán egy

$$d := \left\{ x_i \in \mathbb{R} \mid i = 0; 1; \dots; n, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}$$

ponthalmazt értjük. Az x_i a beosztás egy osztópontja, az $[x_{i-1}; x_i]$ a beosztás egy rész-intervalluma, $||d|| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots x_n - x_{n-1}\}$ a beosztás finomsága.

A d_2 a d_1 beosztás **továbbosztása**, ha $d_1 \subset d_2$. A $d_1 \cup d_2$ a két beosztás **egyesítése**. Azt mondjuk, hogy a d_2 beosztása **finomabb**, mint a d_1, ha $||d_2|| < ||d_1||$.

Legyen (d_k), ahol $k \in \mathbb{N}$, az $[a; b]$ intervallum beosztásának egy sorozata. A (d_k)-t egy normális beosztás sorozatnak hívjuk, ha $||d_k|| \to 0$, ha $k \to \infty$. A (d_k) normális beosztás sorozatot minden határon túl finomodó beosztás sorozatnak is nevezzük.

Definíció 7.4: Alsó és felső integrálközelítő összeg

Legyen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, valamint d a függvény értelmezési tartományának egy beosztása,

$$m_i := \inf \left\{ f(x) \mid x \in [x_i; x_{i+1}] \right\},$$
$$M_i := \sup \left\{ f(x) \mid x \in [x_i; x_{i+1}] \right\}.$$

Az f függvény d beosztásához tartozó alsó és felső integrálközelítő összege

$$s(f, d) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i),$$
$$S(f, d) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Definíció 7.5: Közbeeső érték vektorhoz tartozó integrálközelítő összeg

Legyen $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Ekkor a $t(t_1, t_2, \dots, t_n)$ neve közbeeső érték vektor, a hozzá tartozó integrálközelítő összeg

$$\sigma(f, d, t) := \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Az oszcillációs összeg

$$o(f, d) := S(f, d) - s(f, d).$$

Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény:

1. Ha d az $[a;b]$ intervallum egy beosztása, valamint t tetszőleges közbeeső érték vektor, akkor
$$s(f,d) \leq \sigma(f,d,t) \leq S(f,d).$$
2. Ha $d_2 \subset d_1$, azaz d_2 a d_1 továbbosztása, akkor
$$s(f,d_1) \leq s(f,d_2) \leq S(f,d_2) \leq S(f,d_1).$$
3. Ha d_1 és d_2 tetszőleges beosztása az $[a;b]$ intervallumnak, akkor
$$s(f,d_1) \leq S(f,d_2).$$

Ha az $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, azaz $\exists K$, hogy $|f(x)| \leq K$, ekkor

$$s(f,d) \leq \sum_{i=0}^{n-1} |m_i| \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} K \cdot (x_{i+1} - x_i) = K \cdot (b-a).$$

Definíció 7.6: Darboux-féle alsó és felső integrál

Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Az $\underline{I} := \sup\{s(f,d)\}$ valós számot az f függvény Darboux-féle alsó integráljának mondjuk. Jele:

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f.$$

Az $\overline{I} := \inf\{S(f,d)\}$ valós számot az f függvény Darboux-féle felső integráljának mondjuk. Jele:

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f.$$

Definíció 7.7: Riemann-integrálhatóság

Az f függvényt Riemann-integrálhatónak nevezzük $[a;b]$-n, ha a Darboux-féle alsó és felső integrálja az $[a;b]$ intervallumon egyenlő. Ezt a közös értéket az f függvény Riemann-integráljának mondjuk. Jele:

$$I = \underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f$$

ahol $\underline{I}$ és $\overline{I}$ a függvény alsó és felső Darboux integrálja.

Tétel 7.1

Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, ekkor $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon)$, hogy ha az $[a;b]$ intervallum egy beosztására teljesül, hogy $||d|| < \delta(\varepsilon)$, akkor:

1. $0 < \underline{I} = |s(f,d) - I| < \varepsilon$,
2. $0 < \overline{I} = |S(f,d) - I| < \varepsilon$,

ahol $\underline{I}$ és $\overline{I}$ a függvény alsó és felső Darboux integrálja.

Ha az $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, (d_k) pedig az $[a;b]$ intervallum normál beosztása, akkor

1. $\lim\limits_{k\to\infty} s(f,d_k) = \underline{I}$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} S(f,d_k) = \overline{I}$

Ha az $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a;b]$ intervallumon, (d_k) normális beosztássorozat, (t_k) pedig tetszőleges körbeeső érték vektor, akkor

$$\sigma(f,d_k,t_k) \to \underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f, \text{ ha } k \to \infty.$$

Riemann-integrálhatóság jelölése:

$$\mathcal{R}[a;b] = \Big\{ f : [a;b] \to \mathbb{R}, f \text{ Riemann-integrálható az } [a;b]\text{-n} \Big\}.$$

Tétel 7.2: Első kritérium (oszcillációs összeggel)

Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $f \in \mathcal{R}[a;b]$ akkor és csak akkor, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan d beosztása az $[a;b]$ intervallumnak, hogy $o(f,d) < \varepsilon$.

Tétel 7.3: Második kritérium (integrálközelítő összeggel)

Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $f \in \mathcal{R}[a;b]$ akkor és csak akkor, ha $\exists I \subset \mathbb{R}$, hogy $\forall\varepsilon$ esetén $\exists\delta(\varepsilon)$, hogy ha $||d_k|| < \delta(\varepsilon)$, $t(t_1,t_2,\dots,t_n)$ tetszőleges közbeeső érték vektor, akkor $|\sigma(f,d_k,t_k) - I| < \varepsilon$.

Tétel 7.4: Harmadik kritérium (normális beosztás sorozattal)

Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $f \in \mathcal{R}[a;b]$ akkor és csak akkor, ha $\forall(d_k)$ és $\forall(t_k)$ esetén:

$$(d_k) \text{ konvergens, valamint } \lim_{k\to\infty} \sigma(f,d_k,t_k) = \int_a^b f.$$

Tétel 7.5: Monoton függvény integrálhatósága

Korlátos, zárt intervallumon monoton függvény ott Riemann-integrálható.

Tétel 7.6: Korlátos függvény integrálhatósága

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény ott Riemann-integrálható.

Definíció 7.8: Nullmértékű halmaz

Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt Lebesgue szerint nullmértékűnek nevezünk, ha lefedhető megszámlálhatóan sok tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumrendszer uniójával, azaz $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists I_k$, ahol $k \in A$ (megszámlálható halmaz), hogy

$$H \subset \bigcup_{k \in A} I_k \text{ és } \sum_{k \in A} |I_k| < \varepsilon.$$

Nullmértékű halmazok tulajdonságai:

1. véges halmaz Lebesgue szerint nullmértékű,
2. megszámlálhatóan végtelen halmaz Lebesgue szerint nullmértékű,
3. létezik kontinuum számosságú Lebesgue szerint nullmértékű halmaz, (pl. Cantor-féle halmaz,)
4. Lebesgue szerint nullmértékű halmaz minden részhalmaza is nullmértékű,
5. megszámlálhatóan sok Lebesgue szerint nullmértékű halmaz uniója ugyancsak Lebesgue szerint nullmértékű.

Tétel 7.7: Lebesgue tétele

Egy zárt intervallumon korlátos függvény ott Riemann-integrálható akkor és csak akkor, ha a függvény egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaz pontjaitól eltekintve folytonos, ilyenkor azt is mondjuk, hogy a függvény majdnem folytonos.

Tétel 7.8: A Riemann-integrál tulajdonságai

Ha $f, g \in \mathcal{R}[a;b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in (a;b)$, akkor

additív: $$\int_a^b f + g \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x + \int_a^b g \,\mathrm{d}x,$$

homogén: $$\int_a^b \lambda \cdot f \,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f \,\mathrm{d}x,$$

additív az integrációs intervallumra: $$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x.$$

Tétel 7.9: Integrálszámítás alaptétele

Ha $f \in \mathcal{R}[a;b]$, valamint f korlátos ($\forall x \in [a;b]$ esetén $m \leq f(x) \leq M$), akkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

1. Ha $f > 0$, $f \in \mathcal{R}[a;b]$, akkor $\displaystyle\int_a^b f > 0$.
2. Ha $f \geq g$, $f, g \in \mathcal{R}[a;b]$, akkor $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^b g$.
3. Ha $f \in \mathcal{R}[a;b]$, akkor $|f| \in \mathcal{R}[a;b]$ és $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Tétel 7.10: Középértéktétel folytonos függvényekre

Ha $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos az [a; b] intervallumon, akkor $\exists c \in [a;b]$ hogy:

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a).$$

7.4.2. A Newton-Leibniz-formula

Definíció 7.9

Ha $f \in \mathcal{R}[a;b]$, akkor

$$\int_a^a f := 0 \quad \text{és} \quad \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Definíció 7.10: Területmérő függvény

Az f függvény területmérő függvénye:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tétel 7.11

Legyen $f \in \mathcal{R}[a;b]$ és F az f függvény területmérő függvénye, akkor F egyenletesen folytonos az $[a;b]$ intervallumon és ha f folytonos az x pontban és F differenciálható az x pontban, akkor $F'(x) = f(x)$.

Tétel 7.12: Newton-Leibniz-formula

Legyen $f \in \mathcal{R}[a;b]$ $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos az $[a;b]$-n és differenciálható az $(a;b)$-n, valamint $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a;b]$, ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Ha az G függvény az f függvény primitív függvénye, akkor az alábbi egyenlőség is igaz:

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tétel 7.13: Helyettesítéses integrálás

Tegyük fel, hogy $g : [a;b] \to [c;d]$ és $f : [c;d] \to \mathbb{R}$, továbbá $g'(x)$ folytonos az $[a;b]$-n f pedig folytonos a $[c;d]$-n. Ekkor:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

7.4.3. Improprius integrál

Definíció 7.11: Impropius Riemann-integrál

Legyen $a, b \in \mathbb{R}_b$, $a < b$, és tegyük fel, hogy $\forall [x;y] \subset (a;b)$ esetén $f \in \mathcal{R}[x;y]$ $(x, y \in \mathbb{R})$, és $\exists c \in (a;b)$, hogy

$$\lim_{x \to a} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{és} \quad \lim_{y \to b} \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

határértékek végesek, ekkor az

$$I = \lim_{x \to a} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x \to b} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

összeget az f függvény improprius integráljának nevezzük az $[a;b]$-n.

Azt is mondjuk, hogy az f függvény improprius Riemann-integrálja konvergens az $(a;b)$-n.

Ha az első feltétel teljesül, viszont a határértékek divergensek, akkor az f függvény improprius Riemann-integrálja divergens.

Az integrál értéke nem függ c megválasztásától.

Ha az f nem korlátos a $\gamma \in (a;b)$ pont környezetében, akkor az $[a;b]$-t két részre bontjuk úgy, hogy γ osztópont legyen:

$$\int_a^b f = \int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f.$$

Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Az első integrál értéke:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^a = \lim_{a\to\infty} -e^{-a} + e^0 = 0+1 = 1.$$

A második integrál értéke:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a} + 1 = 0+1 = 1.$$

7.5. Felkészülést segítő kérdések

1. Definiálja a primitív függvény fogalmát!
2. Definiálja egy f függvény Darboux-féle alsó és felső integrálját!
3. Mondja ki a Riemenn-integrálhatóság kritériumait!
4. Mikor nevezünk egy halmazt Lebesgue szerint nullmértékűnek?
5. Mit nevezünk egy f függvény területmérő függvényének?
6. Írja fel a Newton-Leibniz-formulát!
7. Definiálja az improprius integrál fogalmát!