8 Differenciálás II

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 19.

8.1. Elméleti Áttekintő

Implicit függvények differenciálása:

A korábbiakban $y = f(x)$ alakú függvényeket vizsgáltunk. Az ilyen függvények az $x \mapsto f(x)$ hozzárendelés alapján egyértelműen megadják, hogy az egyes ősképekhez $(x \in \mathcal{D}_f)$ milyen értékek tartoznak $(y \in \mathcal{R}_f)$.

Előfordulhat azonban olyan eset, amikor nehéz, vagy éppen lehetetlen **explicit alakban** megadni egy görbét. Ennek a problémának a feloldására vezessük be az **implicit függvények** fogalmát. Az ilyen függvények esetén az ősképek és képek közötti kapcsolatot az $F(x; y) = 0$ egyenlettel adhatjuk meg.

Ilyen függvények differenciálásakor mindig az összetett függvények deriválási szabályait kell alkalmazni:

$$[g(y)]' = g'(y) \cdot y'$$

Implicit függvény deriváltjai a parciális deriváltak segítségével is meghatározhatóak. Parciális deriválás során a függvényt úgy tekintjük, mintha az x és y változók függetlenek lennének egymástól. Az x szerinti parciális derivált esetén y-t, az y szerinti parciális derivált esetén pedig x-et konstansként kezeljük.

Az x szertini derivált:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Az y szerinti derivált pedig:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad x' = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x} = -\frac{F'_y}{F'_x}$$

Az $(f(x))^{g(x)}$ típusú függvényekeket az implicit függvény deriválási szabályai szerint is differenciálhatjuk.

$$y = f(x)^{g(x)} \quad \rightarrow \quad \ln y = g(x) \ln f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right)$$

Határozzuk meg az $\ln^x x$ függvény deriváltját!

$$y = \ln^x x \quad \to \quad \ln y = x \ln\ln x \quad \to \quad \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln\ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$
$$\Downarrow$$
$$y' = \ln^x x \left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$$

A feladat az előző gyakorlaton tanult módszerrel is megoldható:

$$y = e^{x \ln\ln x} \quad \to \quad y' = e^{x \ln\ln x} \left(1 \cdot \ln\ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln^x x \left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x} \right).$$

Inverz függvény differenciálása:

Függvény invertálása során a függvény görbéjét tükrözzük az $y = x$ egyenesre. Jele: $f^{-1}(x)$. Amennyiben az eredeti függvény differenciálható az x_0 pontban, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az inverz függvény deriváltja az $y_0 = f(x_0)$ pontban:

$$\left. \frac{\mathrm{d} f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Az inverz függvény létezésének szükséges feltétele, hogy az eredeti függvény bijektív legyen.

Paraméteresen megadott függvények differenciálása:

Paraméteresen megadott függvények esetén egy paraméterünk (t), viszont kettő egyenletünk ($x(t)$ és $y(t)$) van. Az x szerinti derivált:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Az y szerinti derivált pedig ennek a reciproka:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

A második deriváltak:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dot{x}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\dot{(x')}}{\dot{y}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\dot{y}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)}{\dot{y}} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}$$

Tétel 8.1: L'Hôpital-szabály

Legyenek f és g differenciálhatóak az $\alpha \in \mathbb{R}_b$ pont egy környezetében (α-ban nem szükségképpen), továbbá $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0, \text{ vagy } \lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty,$$

$$\text{ekkor, ha } \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B, \text{ akkor } \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = B.$$

Tétel 8.2: Rolle-tétel

Legyen f folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $(a;b)$ intervallumon, továbbá $f(a) = f(b) = 0$, ekkor létezik $\xi \in (a;b)$, melyre teljesül, hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

Tétel 8.3: Lagrange-féle középértéktétel

Legyen $f : I \subset R \to R$ folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $(a;b)$ intervallumon, ekkor létezik olyan $\delta \in (a;b)$ hogy

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tétel 8.4: Cauchy-féle középértéktétel

Legyen f és g függvények folytonosak $[a;b]$ intervallumon és differenciálhatóak $(a;b)$ intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in (a;b)$ esetén. Ekkor létezik olyan $\eta \in (a;b)$ hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

8.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvény deriváltjait! ($y' = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ és $x' = \mathrm{d}x/\,\mathrm{d}y$)

$$F(x;y) = x^4y + 5y^2x - 4 = 0$$

2. Határozza meg az alábbi függvény első és második deriváltjait, valamint az érintőjének egyenletét a $P(1;1)$ pontban!

$$\ln y + xy = 1$$

3. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 25$ kör azon pontjait, amelyekben a kör érintőjének meredeksége $3/4$!

4. Írja fel az $f(x) = 5x^3 + x - 7$ függvény inverzét, és annak deriváltját! Adja meg ennek értékét az $f(x_0)$ pontban, ha $x_0 = 1$!

5. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott függvény x szerinti első és második deriváltját. Mekkora lesz az érintő meredeksége a $t = \pi/6$-hoz tartozó pontban?

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

6. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott kör azon pontjait, ahol az érintő meredeksége $3/4$!

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos t \\ y(t) = 5\sin t \end{cases}$$

7. Határozza meg az alábbi határértékeket a L'Hôpital szabály segítségével!

a) $\lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{3^x - x^3}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

8. Vizsgálja meg, hogy alkalmazható-e a L'Hôpital szabály az alábbi határértékek kiszámítására! Ha igen, alkalmazza, ha nem, indokolja meg!

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$$

9. A Rolle-féle középértéktétel segítségével bizonyítsa be, hogy az $f(x) = 3x^5 + 15x - 2$ függvénynek egy valós gyöke van!

10. Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$