4 Numerikus sorozatok I

Matematika G1 – Sorozatok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 12.

4.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 4.1: Sorozat

A pozitív egész számok halmazán értelmezett $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt **valós számsorozat**nak hívjuk.

Az $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényt **komplex számsorozat**nak nevezzük.

Definíció 4.2: Konvergencia

Az (a_n) sorozatot konvergensnek mondjuk, ha $\exists a \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ ahol } a \text{ a sorozat határértéke.}$$

Definíció 4.3: Divergencia

Az (a_n) sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

Definíció 4.4: Torlódási pont

Az (a_n) sorozatnak torlódási pontja van az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha az a tetszőlegesen kicsiny környezete a sorozat véges sok elemét tartalmazza.

A sorozat határértéke egyben torlódási pont is, viszont egy torlódási pont nem feltétlenül határérték. Pl.: $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja is van (-1 és 1), viszont egyik sem határérték, hiszen a sorozat divergens.

Definíció 4.5: Sorozat korlátossága

Az (a_n)-t **alulról korlátos**nak nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n > k$, vagyis értékkészlete alulról korlátos.

Az (a_n)-t **felülről korlátos**nak nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n < K$, vagyis értékkészlete felülről korlátos.

Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Definíció 4.6: Sorozat monotonitása

Az (a_n) sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha $a_n \geq a_{n-1}$,
- monoton csökkenő, ha $a_n \leq a_{n-1}$,
- szigorúan monoton növekvő, ha $a_n > a_{n-1}$,
- szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n < a_{n-1}$.

Konvergens sorozat mindig korlátos.

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

Nevezetes határértékek:

- $a^n \to \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a} \to 1$
- $a^n \cdot n^k \to 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{n} \to 1$
- $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$
- $\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n \to e^r$

Dominancia elv:

$$\log_n a < \sqrt[n]{a} < \log_a n < \sqrt[a]{n} < n < n^a < a^n < n! < n^n$$

A dominancia elvet olyan esetekben érdemes használnunk, amikor egy

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}$$

alakú sorozat határértékét keressük, hiszen segítségével megállapíthatjuk, hogy a nevező vagy a számláló fog gyorsabban nőni.

Tétel 4.1: Rendőrelv

Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n) és (x_n) sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq x_n \leq b_n\ :\ \forall n$-re vagy $n > N_0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a, \text{ ekkor } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

4.2. Feladatok

1. A konvergencia definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e.

   a) $a_n = \left|\dfrac{n+1}{3n-8}\right|$

   b) $b_n = \dfrac{n\cdot(-1)^n - 1}{2n}$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

   a) $a_n = \dfrac{n^2-6n+7}{n^2+12n+49}$

   b) $b_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$

   c) $c_n = \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

   d) $d_n = \dfrac{\sqrt{n^3+3n^2}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{5n^6+2}+\sqrt[5]{n^7+3n^3}} + \dfrac{n!}{(n+1)!+3^{2n}}$

   e) $e_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

   f) $f_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n$

3. Igazolja a rendőrelv segítségével, hogy $\dfrac{n}{3^n} \to 0$, ha $n \to \infty$.

4. Határozza meg az alábbi határértékeket!

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^2-30n-21}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\cos n^3}{2n} - \dfrac{3n}{6n+1}\right)$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\ln n}$

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{2n+5}$

5. Bizonyítsa be, hogy bármely $k \geq 0$ egész számra

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$