

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5*(0,1)) node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekindő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex, ,**

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Analitikus geometria BMETE94BG01 2

Matematika G1

Térgeometriai alakzatok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Egyenes 2D-ben:** $n = (A; B)$ – egyenes normálvektora
 $r = (x; y)$ – tetszőleges pont helyvektora
 $r_0(x_0; y_0)$ – P_0 fixpont helyvektora

[style=blueBox, nobreak=true,] **Az egyenes egyenlete:** $(r_0 - r) \cdot n = 0$

$$r \cdot n = r_0 \cdot n$$

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{=:-C} \rightarrow Ax + By + C = 0$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hesse-féle normálalak:**

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A Hesse-féle normálalakot úgy kapjuk, hogy az egyenes normálvektorát egység hosszúságúra normáljuk.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két egyenes viszonya:**

Két egyenes által **közbezárt szög** a két egyenes normálvektorai által bezárt szög.

Ebből következik, hogy ha a normálvektorok által bezárt szög 90° , akkor a két egyenes merőleges egymásra. Ha a normálvektorok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Pont és egyenes távolsága:**

Adott egy e egyenes Hesse-féle normálalakja és egy $P_0(x_0; y_0)$ pont. Ekkor a pont és az egyenes távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

```
[ultra thick] (O) at (0, 0);
[draw=ternaryColor, ->, thick]
(O) -- (4, 0) node[above left] x;
[draw=ternaryColor, ->, thick]
(O) -- (0, 2) node[below left] y;
[draw=secondaryColor, thick]
(-.5,0.25) -- ++(4,1) node[right]
e coordinate[pos=.5] (P)
coordinate (E) ;
[draw=primaryColor] (P) --
++(-.375,1.5) coordinate (P0)
node[right=2mm] P0
node[midway, left] d ;
[fill=primaryColor] (P0) circle
(0.1);
pic["."], draw, angle
eccentricity=.5, angle
radius=4mm, thick]
angle=E-P-P0 ;
```

A formula csak azon pontokra ad zérus értéket, amelyek rajta vannak az egyenesen.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Egyenes 3D-ben:** $\mathbf{v}(a; b; c)$ – egyenes irányvektora
 $\mathbf{r}(x; y; z)$ – tetszőleges pont helyvektora
 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - \mathbf{P}_0$ fixpont helyvektora

[style=blueBox, nobreak=true,] **3D egyenes paraméteres alakja:**

$\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - \mathbf{P}_0$ fixpont helyvektora

$\mathbf{v}(a; b; c)$ – egyenes irányvektora $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$
 $t \in \mathbb{R}$ – paraméter

A paraméteres egyenletekből t -t kifejezve is megadhatjuk az egyenest:

$$(t =) \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két egyenes viszonya:**

Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes irányvektorai által bezárt szög.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Pont és egyenes távolsága:**

Egy r_1 irányvektorú P_1 pont, és egy $r(t) = r_0 + tv$ egyenletű egyenes távolsága

$$d = \left| \frac{v \times (r_0 - r_1)}{|v|} \right|$$

```
[scale=.4, ultra thick] (O) at (0,0,0);
[draw=ternaryColor, ->, thick] (O) --
    (8,0,0) node[above left] x;
[draw=ternaryColor, ->, thick] (O) --
    (0,5,0) node[below left] y;
[draw=ternaryColor, ->, thick] (O) --
    (0,0,4) node[below left] z;
[draw=secondaryColor, thick] (-2.5,
2.5, 1) coordinate (E) -- (8, 2.5, 8)
    node[pos=.05, below] e
    coordinate[pos=1] (V)
    coordinate[pos=.55] (P) ;
[draw=primaryColor, ->] (V) --
    ++(0.3 * (V) - 0.3 * (E))
    node[midway, below] v ;
(Q) at (2,2.5,-2); [right] at (Q) P1;
[draw=primaryColor] (Q) -- (P)
    node[midway, above left] d ;
[fill=primaryColor] (Q) circle (0.1);
pic["."], draw, angle eccentricity=.55,
    angle radius=4mm, thick]
    angle=V-P-Q ;
```

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két egyenes távolsága:**

Az $e_1 : p_1(t_1) = r_1 + t_1 v_1$ és $e_2 : p_2(t_2) = r_2 + t_2 v_2$ egyenesek távolsága

$$d = \left| (r_2 - r_1) \cdot \underbrace{\frac{(v_1 \times v_2)}{|v_1 \times v_2|}}_{n_T} \right| = |(r_2 - r_1) \cdot n_T|,$$

ahol n_T egy olyan egységvektor, amely merőleges mindkét egyenesre. (normál transzverzális)

Amennyiben e_1 és e_2 párhuzamosak, akkor a távolságukat a pont és egyenes távolságának képletével számolhatjuk.

```
[ultra thick] (O) at (0,0,0);
[draw=ternaryColor, ->, thick]
(O) -- (4,0,0) node[above left] x;
[draw=ternaryColor, ->, thick]
(O) -- (0,3,0) node[below left] y;
[draw=ternaryColor, ->, thick]
(O) -- (0,0,2) node[below left] z;
[draw=secondaryColor, thick] (-1,
2) -- (4, 3) coordinate (V1)
node[pos=.05, below] e1
coordinate[pos=.5] (P1) ;
[draw=secondaryColor, thick]
(-1.5, 1) -- (3.75, -.5)
coordinate[pos=0] (V2)
node[pos=.05, below] e2
coordinate[pos=.5] (P2) ;
[draw=primaryColor] (P1) -- (P2)
node[midway, left] d ;
pic["."], draw, angle
eccentricity=.5, angle
radius=4mm, thick]
angle=P2-P1-V1 pic["."], draw,
angle eccentricity=.5, angle
radius=4mm, thick]
angle=P1-P2-V2 ;
```

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík 3D-ben:** $\vec{n} = (A; B; C)$ – sík normálvektor
 $\vec{r} = (x; y; z)$ – tetszőleges pont helyvektora
 $\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$ – P_0 fixpont helyvektora

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík egyenlete:**

A sík tetszőleges r pontjára igaz, hogy $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$,
 $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n} =: -D$,
 $Ax + By + Cz + D = 0$.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hesse-féle normálegyenlet:**

$$\left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = 0$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két sík viszonya:**

Két sík által bezárt szög a síkok normálvektorai által bezárt szög.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík és egyenes dőléspontja:**

Egy $s : Ax + By + Cz + D = 0$ sík és egy $e : \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ egyenes dőléspontjait meghatározhatjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

A megoldások száma alapján:

```
[thick] [primaryColor, ultra thick, xshift=-5.25cm] (-.75, 1.35, 0) - ++(4.5, 0, 0);
[primaryColor, ultra thick] (2.25, 0, 0.75) - ++(-1, 2, 0) coordinate[pos=.5] (Q) ;
[fill=primaryColor] (Q) circle (0.075);

[primaryColor, ultra thick, xshift=5.25cm] (-.75, 1, 0.75) - ++(4.5, 0, 0);
/in -5.25/0,0/1,5.25/∞ [xshift=cm] (O) at (0,0,0); [draw=ternaryColor, ->, thick] (O)
- (3,0,0) node[below left]  $x$ ; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) - (0,2,0) node[below
left]  $y$ ; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) - (0,0,1.5) node[right=2mm]  $z$ ;
[draw=secondaryColor, fill=secondaryColor, fill opacity=.35] (0, 1, -.5) - (3, 1, -.5) -
(3, 1, 2) - (0, 1, 2) - cycle ;
at (1.5,-1) megoldás;
```

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík és egyenes által bezárt szög:**

Egy sík és egy egyenes által bezárt szög a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő.

[ultra thick]
[draw=ternary
(O) - (3,0,0) n
[draw=ternary
(O) - (0,2.5,0)
[draw=ternary
(O) - (0,0,1.5)

A metszészvonal irányvektora mindkét sík normálvektorára merőleges:

$$v = n_1 \times n_2.$$

Ezen kívül szükségünk van még egy tetszőleges pontra, amely rajta van mindkét síkon. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy az egyik koordinátát fixáljuk, és a másik kettőt kiszámítjuk a 2 sík egyenletéből. (Pl. $z = 0$)

```
[ultra thick] (O) at (0,0,0);
[draw=ternaryColor, ->,
thick] (O) -- (3,0,0)
node[below left] x;
[draw=ternaryColor, ->,
thick] (O) -- (0,2.5,0)
node[below left] y;
[draw=ternaryColor, ->,
thick] (O) -- (0,0,1.5)
node[right=2mm] z;
[transparency group, fill
opacity=.35]
[fill=secondaryColor] (0, 1.25,
-.5) -- (3, 1.25, -.5) -- (3, 1.25,
2) -- (0, 1.25, 2) -- cycle ;
[fill=secondaryColor] (1.5, 0,
-.5) -- (1.5, 2.5, -.5) -- (1.5, 2.5,
2) -- (1.5, 0, 2) -- cycle ;
[draw=secondaryColor, thick]
(0, 1.25, -.5) -- (3, 1.25, -.5) --
(3, 1.25, 2) -- (0, 1.25, 2) --
cycle ;
[draw=secondaryColor, thick]
(1.5, 0, -.5) -- (1.5, 2.5, -.5) --
(1.5, 2.5, 2) -- (1.5, 0, 2) --
cycle ;
[draw=primaryColor] (0,-0.25)
-- ++(45:3.5);
```

0.2 Feladatok

1. Számítsa ki az $e_1 : 3x - 4y - 10 = 0$ és az $e_2 : 6x - 8y + 5 = 0$ egyenes távolságát!
2. Írja fel azon egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2; 5; 6)$ és a $Q(7; -1; 3)$ pontokon!
3. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az alábbi egyenesek metszik egymást!

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \qquad \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

4. Határozza meg az alábbi egyenesek távolságát!

$$\{ \begin{array}{l} x_1(t) = 2+3t_1 \\ y_1(t) = -1+4t_1 \\ z_1(t) = 2t_1 \end{array} \qquad \{ \begin{array}{l} x_2(t) = 7+6t_2 \\ y_2(t) = 1+8t_2 \\ z_2(t) = 3-2t_2 \end{array}$$

5. Adott két egyenes. Határozza meg a távolságukat és normáltraszverzáisuk egyenletrendszerét!

$$\{ \begin{array}{l} x_1(t) = -7+3t \\ y_1(t) = 4-2t \\ z_1(t) = 4+3t \end{array} \qquad \{ \begin{array}{l} x_2(t) = 1+t \\ y_2(t) = -8+2t \\ z_2(t) = -1-3t \end{array}$$

6. Vizsgálja meg, hogy a $P(0; -1; 2)$, a $Q(2; -1; 1)$ és az $R(4; 3; -2)$ pontok egy egyenesbe esnek-e! Ha nem, akkor írja fel az általuk kifeszített sík egyenletét!
7. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az e egyenes és az s sík párhuzamos egymással!

$$e : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha} \qquad s : x + 3y - 2\alpha z = 0$$

8. Számítsa ki az e egyenes és az s sík metszéspontját!

$$e : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \qquad s : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

9. Adja meg az s_1 és s_2 síkok metszévonalának egyenletrendszerét!

$$s_1 : x - 2y + 3z - 4 = 0 \qquad s_2 : 3x + 2y - 5z - 4 = 0$$

10. Igazolja, hogy az alábbi három síknak egy közös pontja van. Írja fel ezen a ponton átmenő síkot, amely párhuzamos az $x + y + 2z = 0$ síkkal!

$$\{ \begin{array}{l} s_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \\ s_2 : x - 3y + z + 1 = 0 \\ s_3 : x + y + z - 3 = 0 \end{array}$$