5 Integrálátalakító tételek, mérnöki példák

Matematika G3 – Vektoranalízis
Utoljára frissítve: 2025. október 06.

5.1. Erőtér vizsgálata

Adott egy $\boldsymbol{F}(x;y) = (2xy)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2+2y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ erőtér. Vizsgálja meg, hogy az $\boldsymbol{F}$ erőtér konzervatív-e! Amennyiben igen, adja meg egy olyan potenciálfüggvényt, melyre $\varphi(0;0) = 0$. Számítsa ki a $P_1(0;0)$ és $P_2(1;1)$ pontok közötti egyenes szakaszon végzett munkát!

Az $\boldsymbol{F}$ erőtér konzervatív, hiszen $\partial_y F_x = \partial_x F_y$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+2y).$$

A potenciálfüggvény:

$$\varphi(x;y) = \int_0^{\xi} F_x(\xi;y)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\eta} F_y(0;\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_0^{x} 2\xi y\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{y} (0^2+2\eta)\,\mathrm{d}\eta = x^2y + y^2.$$

A végzett munka:

$$\int_{(0;0)\to(1;1)} \langle \boldsymbol{F}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \varphi(1;1) - \varphi(0;0) = 1^2\cdot 1 + 1^2 - 0 = 2.$$

Ha az erőtér nem lenne konzervatív, akkor először a két pontot összekötő szakasz paraméterezését kellene megadni:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t\in[0;1], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A végzett munka:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{F}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^2+2t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (3t^2+2t)\,\mathrm{d}t = 2.$$

5.2. Elektrosztatikus tér vizsgálata

Egy $Q = 8{,}85\pi$ mC nagyságú ponttöltés közelében az elektrosztatikus tér:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \qquad \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}.$$

A vektormező konzervatív, hiszen az értelmezési tartományán ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$) örvénymentes:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}(2yz - 2zy) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}(2zx - 2xz) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-3}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}(2xy - 2yx) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

A gömbszimmetria miatt:

$$E(r) = |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Ennek r szerinti primitív függvénye:

$$\Phi(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

A potenciálfüggvény tehát:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \Phi(|\boldsymbol{r}|) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}|}.$$

A mező által végzett munka a $P_1(1;0;0)$ és $P_2(2;0;0)$ pontok között:

$$W_{\text{mező}} = q \int_{(1;0;0)\to(2;0;0)} \langle \boldsymbol{E}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = q(\varphi(2;0;0) - \varphi(1;0;0)) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0}.$$

A töltés által végzett munka ennek ellentettje:

$$W_{\text{töltés}} = -W_{\text{mező}} = -\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0} = -125\,\mathrm{J}.$$

5.3. Áramjárta vezető

Egy nagyon hosszú, áramjárta vezető belsejében a mágneses indukció jó közelítéssel lineárisan változik a keresztmetszetben:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (ky)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-kx)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

A vektormezőnek létezik vektorpotenciálja, hiszen $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(ky) + \frac{\partial}{\partial y}(-kx) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Keressük a $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ alakú vektorpotenciált, ahol $A_z = 0$. Ekkor:

$$A_x = \int_0^z B_y(x;y;\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^z -kx\,\mathrm{d}\zeta = -kxz,$$

$$A_y = -\int_0^z B_x(x;y;\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_0^x B_z(\xi;y;0)\,\mathrm{d}\xi = -\int_0^z ky\,\mathrm{d}\zeta + 0 = -kyz.$$

Mivel $\boldsymbol{B}$ mértékegysége a T, így k mértékegysége $\mathrm{T\,m^{-1}}$.

5.4. Vektormező ismeretlen komponense

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y\sin x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2\cos y - \cos x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (v_3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Határozza meg v_3-at, ha tudjuk, hogy $\boldsymbol{v}$ tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrálja zérus!

Tetszőleges zárt görbén vett vonalintegrál zérus, ha a vektormező örvénymentes, vagyis:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y\sin x\\ z^2\cos y - \cos x\\ v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial_y v_3 - 2z\cos y\\ 0 - \partial_x v_3\\ \sin x - \sin x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

A második koordináta alapján v_3 nem függ x-től, így $v_3 = v_3(y;z)$. Az első koordináta alapján:

$$v_3 = \int 2z\cos y\,\mathrm{d}y = 2z\sin y + f(z),$$

ahol $f(z)$ tetszőleges z-függvény, nem befolyásolja a rotációt.

5.5. Áramló folyadék keresztmetszet menti cirkulációja

Egy $R = 1$ sugarú, kör keresztmetszetű, z tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (2xy + z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2 + z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (y - x)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

vektormező írja le. A $z = 1$ síkban lévő keresztmetszet menti cirkuláció kiszámításához alkalmazzuk a Stokes-tételt:

$$\oint_{\partial S} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot}\boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle\,.$$

A sebességmező rotációja:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2xy + z\\ x^2 + z\\ y - x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 - 1\\ 1 + 1\\ 2x - 2x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}.$$

A kör keresztmetszet normálvektora a z tengely irányába mutat, így a cirkuláció zérus.

Ha ezt nem vettük volna észre, akkor a felület paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s;t) = \begin{bmatrix}s\cos t\\ s\sin t\\ 1\end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} s \in [0;1]\\ t \in [0;2\pi]\end{matrix}\,, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-s\sin t\\ s\cos t\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\s\end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}\boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\0\\s\end{bmatrix}\right\rangle \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_0^1 0\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ha a Stokes-tételt sem ismerjük, akkor a kör kerületének paraméterezése:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezése:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \begin{bmatrix} 2\cos t \sin t + 1 \\ \cos^2 t + 1 \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos t \sin t + 1)(-\sin t) + (\cos^2 t + 1)\cos t + (\sin t - \cos t) \cdot 0 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -2\cos t \sin^2 t - \sin t + \cos^3 t + \cos t \,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

5.6. Forgásparaboloid peremén vett integrál

Jelölje $\mathcal{S}$ az $x^2+y^2-z^2 = 1$ egyenletű forgáshiperboloid $z = -1$ és $z = 1$ síkok közötti részét. Határozza meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y^3)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\mathcal{S}$ peremén vett integrálját!

Használjuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{0}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Amennyiben a Stokes-tételt nem ismerjük, akkor a peremkörök paraméterezése:

$$\gamma_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \dot{\gamma}_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A vektormező átparaméterezése:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(t)) = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ \sin^3 t \\ (\pm 1)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ \sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $z = 1$ síkon lévő kör menti integrál:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_1} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}_1(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}_1(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ \sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \sin t + \sin^3 t \cos t + 0 \,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

A $z = -1$ síkon lévő kör menti integrál:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_2} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}_2(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}_2(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ \sin^3 t \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \sin t + \sin^3 t \cos t + 0 \,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

A két integrál összege 0, ami megegyezik a Stokes-tétel segítségével kapott eredménnyel.

5.7. Háromszögvonal menti integrál

Integrálja a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormezőt az $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ és $C(0;0;1)$ csúcsokkal meghatározott háromszögvonal mentén!

Alkalmazzuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ -2x \\ -2y \end{bmatrix}.$$

A háromszög által meghatározott tértartomány paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s;t) = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0;1] \\ t \in [0;1-s] \end{matrix}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle &= \int_0^1 \int_0^{1-s} \left\langle \begin{bmatrix} -2(1-s-t) \\ -2s \\ -2t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-s} -2 + 2s + 2t - 2s - 2t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-s} -2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^1 -2(1-s)\,\mathrm{d}s = -2+1 = -1.$$

Ha a Stokes-tételt nem ismerjük, akkor a háromszög éleinek paraméterezése:

$$\gamma_{AB}(t) = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\gamma}_{AB}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(\gamma_{AB}(t)) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{BC}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\gamma}_{BC}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(\gamma_{BC}(t)) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\gamma_{CA}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\gamma}_{CA}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(\gamma_{CA}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

Az egyes élek menti integrálok:

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma_{AB}(t)); \dot{\gamma}_{AB}(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3},$$
$$\int_{\mathcal{C}_{BC}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma_{BC}(t)); \dot{\gamma}_{BC}(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3},$$
$$\int_{\mathcal{C}_{CA}} \langle \boldsymbol{v}; \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma_{CA}(t)); \dot{\gamma}_{CA}(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ t^2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}.$$