

## 4

## Felületek, felületi integrál

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 08.

## 4.1. Elméleti áttekintő

## Definíció 4.1 : Reguláris felület

Legyen  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{S}$  reguláris felület, ha  $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}$  ponthoz megadható olyan  $\mathbf{p}$ -t tartalmazó  $V \subset \mathbb{R}^3$  nyílt halmaz és  $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \cap V$  leképezés, melyre teljesülnek az alábbiak:

- $\mathbf{g}$  differenciálható homeomorfizmus,
- $\mathbf{g}$  immerzió (derivált leképezése injektív).

Ha ezek teljesülnek, akkor  $\mathbf{g}$ -t parametrációnak,  $V \cap \mathcal{S}$ -t koordinátakörnyezetnek nevezzük.

## Definíció 4.2 : Elemi felület

A  $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$  elemi felület, ha  $\mathbf{g}$  legalább egyszer differenciálható és injektív.

## Definíció 4.3 : Felszín

Legyen  $\mathbf{g} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$  elemi felület. Ekkor a  $\mathcal{S}$  felület felszíne:

$$A = \iint_U \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

## Definíció 4.4 : Skalármező skalárértékű felületmenti integrálja

Legyen  $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező,  $\mathbf{g} : U \rightarrow \mathcal{S}$  paraméterezett felület, ahol  $s; t \in U$  a felület paraméterezése,  $\mathbf{g}(U) = \mathcal{S}$  a felület képe,  $dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\| ds dt$ , Ekkor a  $\varphi$  skalármező  $\mathcal{S}$  felület menti integrálja:

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) dS = \iint_U \varphi(\mathbf{g}(s; t)) \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

Amennyiben a felület  $z = \Phi(x; y)$  alakban van megadva, akkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) dS = \iint_U \varphi(x; y; \Phi(x; y)) \sqrt{1 + (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2} dx dy.$$

**Definíció 4.5 : Vektormező skalár- és vektorértékű felületmenti integrálja**

Legyen  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormező,  $\boldsymbol{\varrho} : U \rightarrow \mathcal{S}$  paraméterezett felület, ahol  $s, t \in U$  a felület paraméterezése,  $\boldsymbol{\varrho}(U) = \mathcal{S}$  a felület képe,  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS = \partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho} ds dt$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = (\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}) / \|\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}\|$ . Ekkor a  $\mathbf{v}$  vektormező  $\mathcal{S}$  felület menti...

- skalárértékű integrálja:  $\iint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle = \iint_U \left\langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s, t)); \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\rangle ds dt$ ,
- vektorértékű integrálja:  $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S} = \iint_U \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s, t)) \times \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) ds dt$ .

Vektormező felületmenti integrálját fluxusnak is nevezzük. Például a mágneses fluxus a mágneses indukció vektormezőjének felületmenti integrálja:

$$\Phi_B = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle.$$

**A felületi normális irányítottsága**

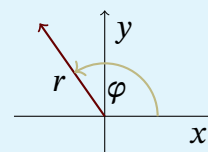
Egy  $\boldsymbol{\varrho} : (s, t) \in U \rightarrow \mathcal{S}$  paraméterezett felület...

- kifelé mutató normálisa:  $\mathbf{n}_{ki} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t}$ ,
- befelé mutató normálisa:  $\mathbf{n}_{be} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s}$ .

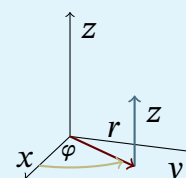
Felület befelé és kifelé mutató normálisa **azonos nagyságú**, de **ellentétes irányú**.

**Koordináta-transzformációk**

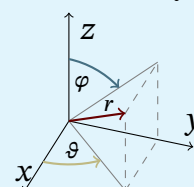
- **Polár:**  $x = r \cos \varphi$   $r \in [0; R]$   $|\mathbf{J}| = r$   
 $y = r \sin \varphi$   $\varphi \in [0; 2\pi)$



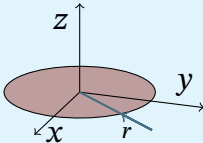
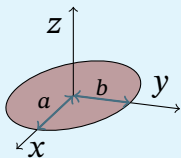
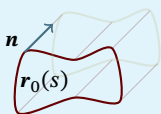
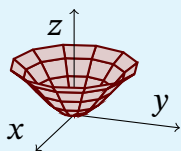
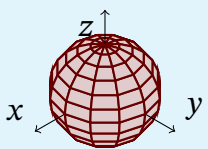
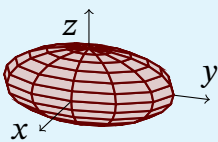
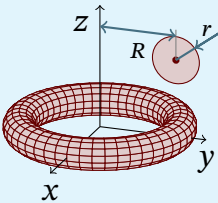
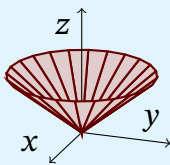
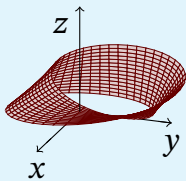
- **Henger:**  $x = r \cos \varphi$   $r \in [0; R]$   $|\mathbf{J}| = r$   
 $y = r \sin \varphi$   $\varphi \in [0; 2\pi]$   
 $z = z$   $z \in \mathbb{R}$



- **Gömb:**  $x = r \sin \varphi \cos \vartheta$   $r \in [0; R]$   $|\mathbf{J}| = r^2 \sin \varphi$   
 $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$   $\varphi \in [0; \pi]$   
 $z = r \cos \varphi$   $\vartheta \in [0; 2\pi]$



Felületek paraméterezése

• <b>Körlap:</b> ( $xy$ sík)	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$	$s \in [0; r]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• <b>Ellipszislap:</b> ( $xy$ sík)	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} a s \cos t \\ b s \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$	$s \in [0; 1]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• <b>Hengerfelület:</b>	$\varrho(s; t) = \mathbf{r}_0(s) + t\mathbf{n}$	$s \in \mathcal{D}_{\mathbf{r}_0}$ $t \in [0, T]$	
• <b>Forgásfelület:</b> ( $z$ tengely körül) ( $z = f(x)$ )	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ f(s) \end{bmatrix}$	$s \in [0; 2\pi]$ $t \in \mathcal{D}_f$	
• <b>Gömbfelület:</b>	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} R \sin s \cos t \\ R \sin s \sin t \\ R \cos s \end{bmatrix}$	$s \in [0; \pi]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• <b>Ellipszoid:</b>	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} a \sin s \cos t \\ b \sin s \sin t \\ c \cos s \end{bmatrix}$	$s \in [0; \pi]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• <b>Tórusz:</b>	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} (R + r \cos s) \cos t \\ (R + r \cos s) \sin t \\ r \sin s \end{bmatrix}$	$s \in [0; 2\pi]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• <b>Kúp:</b>	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ s \end{bmatrix}$	$s \in [0; U]$ $t \in [0, 2\pi]$	
• <b>Möbius-szalag:</b>	$\varrho(s; t) = \begin{bmatrix} (R + s \cos t/2) \cos t \\ (R + s \cos t/2) \sin t \\ s \sin t/2 \end{bmatrix}$	$s \in [-S; S]$ $t \in [0, 2\pi]$	

## 4.2. Feladatok

1. Számítsuk ki a megadott felületek felszínét!

a)  $z = x^2 + y^2$  forgáspároloid  $z = 1$  és  $z = 4$  síkok közé eső része,

b)  $\mathbf{g}(s; t) = (e^s \cos t) \hat{\mathbf{i}} + (e^s \sin t) \hat{\mathbf{j}} + (s) \hat{\mathbf{k}}, s \in (-\infty; 0], t \in [0; 2\pi]$ .

2. Integrálja a skalármezőket a megadott felületeken!

a)  $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ , az egységgömb  $z > 0$  részén,

b)  $\psi(\mathbf{r}) = x + y + z$ , az  $x + 2y + 4z = 4$  sík első ténnyolcadba tartozó részén.

3. Integrálja a vektormezőket a megadott felületeken! A normális kifelé mutató legyen!

- $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x + y) \hat{\mathbf{i}} + (x - y) \hat{\mathbf{j}} + (z^2) \hat{\mathbf{k}},$   
 $\mathbf{g}(s; t) = (s + t) \hat{\mathbf{i}} + (s - t) \hat{\mathbf{j}} + (s^2 - t^2) \hat{\mathbf{k}}, (s; t) \in [0; 1]^2,$

- $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 + z^2) \hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z^2) \hat{\mathbf{j}} + (x^2 + y^2) \hat{\mathbf{k}},$   
 $r = 2$  sugarú,  $x = 2$  síkon lévő körön.

4. Adja meg a  $\mathbf{r}(\mathbf{r}) = (x) \hat{\mathbf{i}} + (-y) \hat{\mathbf{j}} + (z) \hat{\mathbf{k}}$  vektormező  $\mathbf{g}(s; t) = (s + 2t) \hat{\mathbf{i}} + (t) \hat{\mathbf{j}} + (s - t) \hat{\mathbf{k}},$   
 $s \in [0; 3], t \in [0; 1]$  felületen vett vektorértékű integrálját! A normális irányítotttsága legyen kifelé mutató!