5 Numerikus sorozatok II

Matematika G1 – Sorozatok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

5.1. Feladatok

1. A konvergencia definíciója alapján bizonyítsa be, hogy az alábbi számsorozatok konvergensek, úgy hogy minden ε esetén adjon meg egy N küszöbszámort, amelytől kezdve minden $n > N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$, ahol a az adott sorozat határértéke!

   a) $a_n = \dfrac{2n+5}{n-1}, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

   b) $b_n = \dfrac{2n+3\sqrt{n}}{3n+1}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát!

   a) $a_n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}} \cdot \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$

   b) $b_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n + 2n}{3n} \cdot \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$

3. Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat!

   a) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2-n+1}$

   b) $b_n = \dfrac{n^5}{n!}$

4. Adja meg azon sorozat határértékét, melynek első eleme $a_1 = 1$, n-edik eleme pedig $a_n = a_{n-1} + 1/2^{n-1}$.

5. Vizsgálja meg azt a sorozatot konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából, amelynek első eleme $a_1 = 1$, n-edik eleme pedig $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$.

6. Határozza meg az alábbi komplex elemű sorozatok határértékeit!

   a) $a_n = \dfrac{n^2 - i(n^2-1)}{n^2 - i}$

   b) $b_n = \dfrac{i^n}{3^n + i^n}$

   c) $c_n = (1-i)^n$

7. Bizonyítsa be, hogy ha $n \geq 3$, akkor $n^{n+1} \geq (n+1)^n$!

8. Vizsgálja az $a_n = \binom{n}{2} \Big/ \binom{n}{3}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!