

10

Integrálszámítás I

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 28.

10.1. Elméleti Áttekintő

Alapintegrálok:

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---------------|---------------------------------|
| k | kx |
| x^α | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x $ |
| e^x | e^x |
| a^x | $\frac{a^x}{\ln a}$ |

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---------------------------|-------------|
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\cot x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ |

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|--------------------------|---------------------------|
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\tanh x$ |
| $\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $-\coth x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{artanh} x$ |

Integrálás tulajdonságai:

Linearitás:

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$$

Lineáris az integrációs intervallumra:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Speciális helyettesítéssel való integrálás módszerei:

- $\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \text{ ahol } \alpha \neq -1,$
- $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C,$
- $\int e^f \cdot f' = e^f + C,$
- $\int (f \circ g) \cdot g' \, dx = \left(\int f\right) \circ g.$

10.2. Feladatok

1. Végezze el az $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$ függvény vizsgálatát!
2. Végezze el a $g(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$ függvény vizsgálatát!
3. Végezze el az alábbi határozatlan integrálok számítását!

a) $\int x^2(x^2 - 1) + 2\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$

b) $\int \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 2} dx$

c) $\int \tan^2 x dx$

d) $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2 + 2x^2}} + \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$

4. Határozza meg az alábbi integrálok értékét a helyettesítéssel módszer segítségével!

a) $\int (x^3 + 2x) \cdot \cos(x^4 + 4x^2) dx$

b) $\int \frac{\sqrt[3]{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

c) $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$

d) $\int \sin^3(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1) dx$

e) $\int \frac{x}{4 + x^2} dx$

f) $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx$

g) $\int \frac{1}{\tan x} dx$

h) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

i) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2} dx$