

7

Összefoglalás

Matematika G3 – Többszámú változós analízis

Utoljára frissítve: 2025. október 18.

7.1. Elméleti áttekintő

Differenciáloperátorok

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, ahol \mathbf{r} az \mathbb{R}^3 -beli Descartes koordináta-rendszerben $\mathbf{r} = (x; y; z)$.

Rotáció	Divergencia	Gradiens
$\text{rot } \mathbf{v}$	$\text{div } \mathbf{v}$	$\text{grad } \varphi$
$\nabla \times \mathbf{v}$	$\langle \nabla; \mathbf{v} \rangle$	$\nabla \varphi$
$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$	$\left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\rangle$	$\begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix}$
$\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{D}_{\varphi} = \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\varphi} = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}_{\text{rot } \mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$	$\mathcal{R}_{\text{div } \mathbf{v}} = \mathbb{R}$	$\mathcal{R}_{\text{grad } \varphi} = \mathbb{R}^3$

Azonosságok

- Teljesül a linearitás:

$$\text{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi$$

$$\text{rot}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{div}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}$$

- Zérusság:

$$\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$$

Potenciálosság

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező skalárpotenciális, ha létezik olyan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Ekkor $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$.

- \mathbf{v} skalárpotenciális $\Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, hiszen $\text{rot grad } \varphi \equiv \mathbf{0}$ (örvénymentes)

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan $\mathbf{u} : V \rightarrow V$ vektormező, hogy $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$. Ekkor $\text{div } \mathbf{v} = \text{div rot } \mathbf{u} = 0$.

- \mathbf{v} vektorpotenciális $\Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0$, hiszen $\text{div rot } \mathbf{u} \equiv 0$ (forrásmentes)

Skalárpotenciál

Legyen φ skalármező \mathbf{v} vektormező skalárpotenciálja. Ebben az esetben tudjuk, hogy $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Ekkor \mathbf{v} vektormező skalárpotenciálja:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_0^{x_1} v_1(\xi; x_2; \dots; x_n) d\xi + \int_0^{x_2} v_2(0; \xi; \dots; x_n) d\xi + \dots + \int_0^{x_n} v_n(0; 0; \dots; \xi) d\xi.$$

Vektorpotenciál

Legyen $\mathbf{u}(u_x; u_y; 0)$ vektormező \mathbf{v} vektormező vektorpotenciálja. Ebben az esetben tudjuk, hogy $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$. Ekkor \mathbf{u} komponensei az alábbi módon számíthatóak:

$$u_x = \int_0^z v_y(x; y; \zeta) d\zeta, \quad u_y = \int_0^x v_z(\xi; y; 0) d\xi - \int_0^z v_x(x; y; \zeta) d\zeta.$$

Vonalmenti integrálok

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\gamma(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$, $d\mathbf{r} = \dot{\gamma}(t) dt$. Ekkor:

- skalármező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\mathbf{r}) ds = \int_I \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

- vektormező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \int_I \langle \mathbf{v}(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle dt,$$

Felületi integrálok

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\varrho : U \rightarrow \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s; t \in U$ a felület paraméterezése, $\varrho(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $d\mathbf{S} = \|\partial_s \varrho \times \partial_t \varrho\| ds dt$, $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS = \partial_s \varrho \times \partial_t \varrho ds dt$, $\hat{\mathbf{n}} = (\partial_s \varrho \times \partial_t \varrho) / \|\partial_s \varrho \times \partial_t \varrho\|$. Ekkor:

- skalármező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) dS = \int_U \varphi(\varrho(s; t)) \left\| \frac{\partial \varrho}{\partial s} \times \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right\| ds dt,$$

- vektormező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle = \int_U \left\langle \mathbf{v}(\varrho(s; t)); \left(\frac{\partial \varrho}{\partial s} \times \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right) \right\rangle ds dt,$$

Térfogati integrál

Legyen $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\Omega : D \rightarrow \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\Omega(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $dV = \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt$. Ekkor:

- skalármező térfogati integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{r}) dV = \iiint_D \varphi(\Omega(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt.$$

Integrálási tételek

- **Gradiens-tétel:**

$$\int_c \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Vagyis ha egy vektormező előáll egy skalármező gradienseként, akkor annak bármely zárt görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

- **Stokes-tétel:**

$$\iint_S \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle.$$

A tételből következik, hogy skalárpotenciális vektormező bármely zárt görbén vett integrálja zérus.

- **Gauss-Osztogradskij-tétel:**

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{v} dV = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

A tételből következik, hogy vektorpotenciális vektormező bármely zárt felületen vett integrálja zérus.

Integrálások összefüggései

- **Belső függvény megjelenik szorzótényezőként:**

$$\int (f \circ g)(x) g'(x) dx = (F \circ g)(x) + C, \text{ ahol } F(x) \text{ az } f(x) \text{ primitív függvénye.}$$

- **Hatványfüggvény integrálása:**

$$\int f^\alpha(x) f'(x) dx = \begin{cases} \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln |f(x)| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$$

7.2. Feladatok

- Adja meg a $\varphi(\mathbf{r}) = 2x^2y + xy^2z + 3xz^2$ skalármező gradiensét a $P(-3; -2; 1)$ pontban!
- Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (xy^2 - z)\hat{\mathbf{i}} + (yz)\hat{\mathbf{j}} + (xy + 2z)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a $P(-1; 2; -1)$ pontban!
- Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2)\hat{\mathbf{i}} + (2xy + 3e^{3z})\hat{\mathbf{j}} + (3ye^{3z})\hat{\mathbf{k}}$ egy olyan φ skalárpotenciálját, melyre $\varphi(\mathbf{0}) = 0$.
- Legyen $\gamma(t) = x(t) \cdot \hat{\mathbf{i}} + y(t) \cdot \hat{\mathbf{j}}$ a $(2; 1) \rightarrow (6; 4)$ egyenes szakasz paraméterezése. Adja meg $x(t)$ és $y(t)$ függvényeket, ha a paramétertartomány $t \in [0; 1]$. Számítsa ki a $\varphi(x; y) = 3x - 4y$ skalármező γ görbe menti integrálját!
- Adott az $\mathbf{F}(x; y) = x^2 \cdot \hat{\mathbf{i}} - xy \cdot \hat{\mathbf{j}}$ erőmező. Számítsa ki az erőmező munkáját, az origó középpontú, $r = 1$ sugarú első síknegyedben lévő körív mentén, ha a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú! Mit mondhatunk el, ha a bejárási irányt megfordítjuk?
- Számítsa ki a $\varphi(x; y; z) = 2x$ skalármező egységgömbön vett felületi integrálját! Segítség: $\varphi(s; t) = (\sin s \cos t)\hat{\mathbf{i}} + (\sin s \sin t)\hat{\mathbf{j}} + (\cos s)\hat{\mathbf{k}}$, $dS = \sin s \, ds \, dt$.
- Számítsa ki a \mathbf{v} vektormező φ felületen vett fluxusát, ha

$$\mathbf{v}(x; y; z) = \begin{bmatrix} xy \\ 2x + y \\ z \end{bmatrix}, \quad \varphi(s; t) = \begin{bmatrix} s + 2t \\ -t \\ s^2 + 3t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0; 3] \\ t \in [0; 1] \end{matrix}.$$

- Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2)\hat{\mathbf{i}} + (2xy + 3e^{3z})\hat{\mathbf{j}} + (3ye^{3z})\hat{\mathbf{k}}$ vektormező $(0; 1; 1) \rightarrow (0; -1; 1)$ szakaszon vett vonalmenti integrálját!
- Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (z - y)\hat{\mathbf{i}} + (x - z)\hat{\mathbf{j}} + (y - x)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt az alábbi zárt görbén:
 - Az origóból először egy egyenes szakasz mentén eljutunk az $(1; 0; 0)$ pontba.
 - Ezután egy origó középpontú körív mentén az $(-1; 0; 0)$ pontba jutunk. (A körív síkja legyen az xy sík, és a bejárás az óramutató járásával ellentétes irányú.)
 - Végül egy egyenes szakasz mentén visszatérünk az origóba.
- Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x)\hat{\mathbf{i}} + (y)\hat{\mathbf{j}} + (z)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező azon zárt felületen vett felületi integrálját, melyet az $x = y^2 + z^2$ forgáspároloid $z > 0$ része, a $z = 0$ és az $x = 4$ síkok határolnak.