13

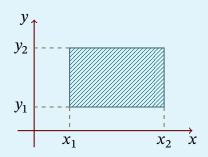
# Integrálás I

Matematika G2 – Többváltozós analízis Utoljára frissítve: 2025. április 22.

## 13.1. Elméleti Áttekintő

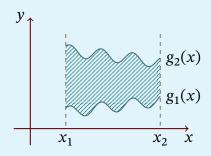
### Integrálás téglatartományon:

Téglatartomány esetén az integrálás sorrendje tetszőleges.

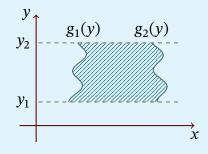


$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x; y) \, dy \, dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x; y) \, dx \, dy$$

#### Integrálás normáltartományon:



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) \, dy \, dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1^{-1}(y)}^{g_2^{-1}(y)} f(x; y) \, dx \, dy$$



$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x; y) \, dx \, dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1^{-1}(x)}^{g_2^{-1}(x)} f(x; y) \, dy \, dx$$

#### 13.2. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvények integrálját a megadott tégla tartományokon!

a) 
$$f(x; y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$$

$$1 \le x \le 2 \qquad 0 \le y \le 3$$

$$0 \le y \le 3$$

b) 
$$g(x; y) = xy \sin(x^2 + y^2)$$
  $0 \le x \le \pi/2$   $0 \le y \le \pi/2$ 

$$0 < x < \pi/2$$

$$0 \le y \le \pi/2$$

c) 
$$h(x; y) = y \cos(2xy)$$

$$1 \le x \le 2 \qquad 1 \le y \le 3$$

2. Határozza meg az alábbi hármasintergrált!

$$\int_{1}^{2} \int_{0}^{3} \int_{0}^{1} z \, x \, \sqrt{x^{2} + y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

3. Határozza meg az alábbi integrálokat, majd írja fel az integrációs határokat, ha először az x, majd a y változó szerint integrálnánk!

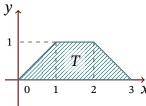
a) 
$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$$

b) 
$$\int_{1}^{3} \int_{0}^{1/x} (2y + x + 2) \, dy \, dx$$

4. Határozza meg az alábbi felületi integrálok értékét!

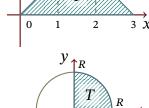
a) 
$$\iint_T x^2 + y^2 \, \mathrm{d}T$$

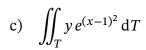
$$T = \{(x; y) \mid 0 \le y \le 1 \land y \le x \le 3 - y\}$$



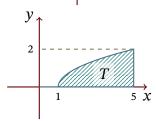
b) 
$$\iint_T xy \, dT$$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \le R^2 \land x; y \ge 0\}$$





$$T = \{(x; y) \mid x \le 1 + y^2 \land y \ge 0 \land x \le 5\}$$



- 5. Adja meg az integrációs intervallumokat, ha az alábbi felületeken kell integrálni:
  - a) R sugarú körfelület,
  - b) ha az x = 0,  $y = x^2$  és y = 2 x görbék által határolt felület!
- 6. Adja meg a f(x;y)=xy függvény a  $P_1(1;1),P_2(4;5)$  és  $P_3(4;2)$  pontok által meghatározott háromszög terület fölötti integrálját!