

## 8

## Differenciálás II

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 27.

## 8.1. Elméleti Áttekintő

## Implicit függvények differenciálása:

A korábbiakban  $y = f(x)$  alakú függvényeket vizsgáltunk. Az ilyen függvények az  $x \mapsto f(x)$  hozzárendelés alapján egyértelműen megadják, hogy az egyes őskepekhez ( $x \in \mathcal{D}_f$ ) milyen értékek tartoznak ( $y \in \mathcal{R}_f$ ).

Előfordulhat azonban olyan eset, amikor nehéz, vagy éppen lehetetlen **explicit alakban** megadni egy görbét. Ennek a problémának a feloldására vezessük be az **implicit függvények** fogalmát. Az ilyen függvények esetén az őskepek és képek közötti kapcsolatot az  $F(x; y) = 0$  egyenlettel adhatjuk meg.

Ilyen függvények differenciálásakor mindig az összetett függvények deriválási szabályait kell alkalmazni:

$$[g(y)]' = g'(y) \cdot y'$$

Implicit függvény deriváltjai a parciális deriváltak segítségével is meghatározhatóak. Parciális deriválás során az  $F(x; y)$  függvényre úgy tekintük, mintha az  $x$  és  $y$  változói függetlenek lennének egymástól. Az  $x$  szerinti parciális derivált esetén  $y$ -t, az  $y$  szerinti parciális derivált esetén pedig  $x$ -et konstansként kezeljük.

Az  $x$  szerinti derivált:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Az  $y$  szerinti derivált pedig:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial x} = -\frac{F'_y}{F'_x}$$

Az  $(f(x))^{g(x)}$  típusú függvényeket az implicit függvény deriválási szabályai szerint is differenciálhatjuk.

$$\begin{aligned} y = f(x)^{g(x)} &\rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x) \rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \\ &\downarrow \\ y' &= f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

Határozzuk meg az  $\ln^x x$  függvény deriváltját!

$$y = \ln^x x \rightarrow \ln y = x \ln \ln x \rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \ln^x x \left( \ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$$

A feladat az előző gyakorlaton tanult módszerrel is megoldható:

$$y = e^{x \ln \ln x} \rightarrow y' = e^{x \ln \ln x} \left( 1 \cdot \ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln^x x \left( \ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right).$$

### Inverz függvény differenciálása:

Függvény invertálása során a függvény görbét tükrözzük az  $y = x$  egyenesre. Jele:  $f^{-1}(x)$ . Amennyiben az eredeti függvény differenciálható az  $x_0$  pontban, és  $f'(x_0) \neq 0$ , akkor az inverz függvény deriváltja az  $y_0 = f(x_0)$  pontban:

$$\left. \frac{df^{-1}(x)}{dx} \right|_{f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Az inverz függvény létezésének szükséges feltétele, hogy az eredeti függvény bijektív legyen.

### Paraméteresen megadott függvények differenciálása:

Paraméteresen megadott függvények esetén egy paraméterünk ( $t$ ), viszont kettő egyenletünk ( $x(t)$  és  $y(t)$ ) van. Az  $x$  szerinti derivált:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Az  $y$  szerinti derivált pedig ennek a reciproka:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

A második deriváltak:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{(\dot{y}')}{\dot{x}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\dot{x}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{dx'}{dy} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{(\dot{x}')}{\dot{y}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dy} \right)}{\dot{y}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \right)}{\dot{y}} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}$$

**Tétel 8.1: L'Hôpital-szabály**

Legyenek  $f$  és  $g$  differenciálhatóak az  $\alpha \in \mathbb{R}_b$  pont egy környezetében ( $\alpha$ -ban nem szükségképpen), továbbá  $g(x) \neq 0$  és  $g'(x) \neq 0$  és

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0, \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow \alpha} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \alpha} |g(x)| = \infty,$$

$$\text{akkor, ha } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B, \text{ akkor } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = B.$$

**Tétel 8.2: Rolle-tétel**

Legyen  $f$  folytonos  $[a; b]$  intervallumon és differenciálható  $(a; b)$  intervallumon, továbbá  $f(a) = f(b) = 0$ , ekkor létezik  $\xi \in (a; b)$ , melyre teljesül, hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

**Tétel 8.3: Lagrange-féle középértéktétel**

Legyen  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos  $[a; b]$  intervallumon és differenciálható  $(a; b)$  intervallumon, ekkor létezik olyan  $\delta \in (a; b)$  hogy

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Tétel 8.4: Cauchy-féle középértéktétel**

Legyen  $f$  és  $g$  függvények folytonosak  $[a; b]$  intervallumon és differenciálhatóak  $(a; b)$  intervallumon, valamint tegyük fel, hogy  $g'(x) \neq 0$  bármely  $x \in (a; b)$  esetén. Ekkor létezik olyan  $\eta \in (a; b)$  hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

## 8.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvény deriváltjait! ( $y' = dy/dx$  és  $x' = dx/dy$ )

$$F(x; y) = x^4y + 5y^2x - 4 = 0$$

2. Határozza meg az alábbi függvény első és második deriváltjait, valamint az érintőjének egyenletét a  $P(1; 1)$  pontban!

$$\ln y + xy = 1$$

3. Határozza meg az  $x^2 + y^2 = 25$  kör azon pontjait, amelyekben a kör érintőjének meredeksége  $3/4$ !
4. Írja fel az  $f(x) = 5x^3 + x - 7$  függvény inverzét, és annak deriváltját! Adja meg ennek értékét az  $f(x_0)$  pontban, ha  $x_0 = 1$ !
5. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott függvény  $x$  szerinti első és második deriváltját. Mekkora lesz az érintő meredeksége a  $t = \pi/6$ -hoz tartozó pontban?

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

6. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott kör azon pontjait, ahol az érintő meredeksége  $3/4$ !

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}$$

7. Határozza meg az alábbi határértékeket a L'Hôpital szabály segítségével!

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(x - 3)}{\ln(e^x - e^3)}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

8. Vizsgálja meg, hogy alkalmazható-e a L'Hôpital szabály az alábbi határértékek kiszámítására! Ha igen, alkalmazza, ha nem, indokolja meg!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$$

9. A Rolle-féle középértéktétel segítségével bizonyítsa be, hogy az  $f(x) = 3x^5 + 15x - 2$  függvénynek egy valós gyöke van!
10. Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$