8 Taylor-sorok

Matematika G2 – Valós analízis

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

8.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 8.1: Taylor-polinom

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely az x_0 pontban legalább p-szer differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli p-edik Taylor-polinomja:

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Tétel 8.1: Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal

Ha az f függvény legalább $(r+1)$-szer differenciálható az $(x; x_0)$ intervallumon és $f^{(k)}$ $\forall k \in \{1; 2; \ldots; r\}$ esetén folytonos ay x és x_0 pontokban, akkor $\exists \xi \in (x; x_0)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1}}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}$$

Definíció 8.2: Taylor-sor

Legyen az f függvény az x_0 pontban akárhányszor differenciálható. Ekkot a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 körüli Taylor-sorának nevezzük.

Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sorot Maclaurin-sornak nevezzük.

Írjuk fel a $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ függvény $x_0 = 1$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

$p^{(n)}(x)$	$p^{(n)}(1)$
$p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$	6
$p'(x) = 3x^2 + 6x$	9
$p''(x) = 6x + 6$	12
$p'''(x) = 6$	6

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{6}{0!} + \frac{9}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \\ &= 6 + 9(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát!

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$f(x) = e^x$	1
$f'(x) = e^x$	1
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(k)}(x) = e^x$	1

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclaurin-sorát!

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$f(x) = \sin x$	0
$f'(x) = \cos x$	1
$f''(x) = -\sin x$	0
$f'''(x) = -\cos x$	-1
$\vdots$	$\vdots$

$$T(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Fontosabb függvények Maclaurin-sorai:

Függvény	Taylor-sor	Konvergencia intervallum
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1; 1]$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{artanh} x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$(-1; 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-1; 1]$
$(1+k)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$(-1; 1)$

8.2. Feladatok

1. Írja fel a $p(x) = (1 + x)^3$ függvény Maclauren-sorát!

2. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli Taylor-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^3, & x_0 &= 1 \\ g(x) &= e^x, & x_0 &= 1 \\ h(x) &= \ln x, & x_0 &= 1 \end{aligned}$$

3. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 5x \\ g(x) &= \sin \sqrt{x} \\ h(x) &= \sin^2 x \\ i(x) &= \sqrt[3]{\exp(-x^2)} \end{aligned}$$

4. Adja meg az alábbi törtfüggvények Taylor-sorát!

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad x_0 = -2$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad x_0 = -1$$

5. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 2$ pontra illeszkedő Taylor sorát! Mi lesz a konvergenciasugár?

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

6. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x^2} \\ g(x) &= \arctan x \\ h(x) &= \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \end{aligned}$$

7. Melyik függvény Taylor-sora az alábbi?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$$

8. Hanyadfokú taylor polinom közelíti a $\sin(\pi/60)$ értékét 4 tizedesjegy pontossággal?

9. Számítsa ki 3 tizedesjegy pontossággal az alábbi integrált!

$$\int_0^{0,2} e^{2x} \, \mathrm{d}x$$