

10

Integrálszámítás I

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 28.

10.1. Elméleti Áttekintő

Alapintegrálok:

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

| $f(x)$        | $F(x)$                          |
|---------------|---------------------------------|
| $k$           | $kx$                            |
| $x^\alpha$    | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x $                        |
| $e^x$         | $e^x$                           |
| $a^x$         | $\frac{a^x}{\ln a}$             |

| $f(x)$                    | $F(x)$      |
|---------------------------|-------------|
| $\sin x$                  | $-\cos x$   |
| $\cos x$                  | $\sin x$    |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$      | $\tan x$    |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$      | $-\cot x$   |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $\arcsin x$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $\arctan x$ |

| $f(x)$                   | $F(x)$                    |
|--------------------------|---------------------------|
| $\sinh x$                | $\cosh x$                 |
| $\cosh x$                | $\sinh x$                 |
| $\frac{1}{\cosh^2 x}$    | $\tanh x$                 |
| $\frac{1}{\sinh^2 x}$    | $-\coth x$                |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$        | $\operatorname{artanh} x$ |

Integrálás tulajdonságai:

Linearitás:

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$$

Lineáris az integrációs intervallumra:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Speciális helyettesítéssel módszerek:

- $\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \text{ ahol } \alpha \neq -1,$
- $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C,$
- $\int e^f \cdot f' = e^f + C,$
- $\int (f \circ g) \cdot g' \, dx = \left(\int f\right) \circ g.$

## 10.2. Feladatok

1. Végezze el az  $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$  függvény vizsgálatát!
2. Végezze el a  $g(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$  függvény vizsgálatát!
3. Végezze el az alábbi határozatlan integrálok számítását!

a)  $\int x^2(x^2 - 1) + 2\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$

b)  $\int \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 2} dx$

c)  $\int \tan^2 x dx$

d)  $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2 + 2x^2}} + \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$

4. Határozza meg az alábbi integrálok értékét a helyettesítéssel módszer segítségével!

a)  $\int (x^3 + 2x) \cdot \cos(x^4 + 4x^2) dx$

b)  $\int \frac{\sqrt[3]{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

c)  $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$

d)  $\int \sin^3(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1) dx$

e)  $\int \frac{x}{4 + x^2} dx$

f)  $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx$

g)  $\int \frac{1}{\tan x} dx$

h)  $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

i)  $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2} dx$