definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Analitikus geometria BMETE94BG01 2

Matematika G1

Térgeometriai alakzatok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Egyenes 2D-ben**: 9 n (A; B) – egyenes normálvektora
r (x; y) – tetszőleges pont helyvektora
$\mathrm{r}_0(x_0; y_0)$−−P_0 fixpont helyvektora

[ultra thick]
[draw=ternaryCo
– (4, 0) node
[draw=ternaryCo
– (0, 2) node
[draw=secondary
.5) – (3.5, 1.25
coordinate[
coordinate[
coordinate[p
[above] at (P0) r_0
n
[draw=primaryCo
[draw=primaryCo
[draw=primary
++(-0.1875,1)
node[midwa
pic[”·”, draw, ang
angle radius=
angle=(

[style=blueBox, nobreak=true,] **Az egyenes egyenlete**: $(\mathrm{r}_0 - r) \cdot n = 0$

$r \cdot n = r_0 \cdot n$

$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{=:-C} \quad \rightarrow \quad Ax + By + C = 0$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hesse-féle normálalak**:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A Hesse-féle normálalakot úgy kapjuk, hogy az egyenes normálvektorát egységhosszúságúra normáljuk.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két egyenes viszonya**:

Két egyenes által **közbezárt szög** a két egyenes normálvektorai által bezárt szög.

Ebből következik, hogy ha a normálvektorok által bezárt szög 90°, akkor a két egyenes merőleges egymásra. Ha a normálvektorok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Pont és egyenes távolsága**:

Adott egy e egyenes Hesse-féle normálalakja és egy $P_0(x_0; y_0)$ pont. Ekkor a pont és az egyenes távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

[ultra thick] (O) at (0, 0); [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (4, 0) node[above left] x; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0, 2) node[below left] y; [draw=secondaryColor, thick] (-.5,0.25) – ++(4,1) node[right] e coordinate[pos=.5] (P) coordinate (E) ; [draw=primaryColor] (P) – ++(-.375,1.5) coordinate (P0) node[right=2mm] P_0 node[midway, left] d ; [fill=primaryColor] (P0) circle (0.1); pic["·", draw, angle eccentricity=.5, angle radius=4mm, thick] angle=E–P–P0 ;

A formula csak azon pontokra ad zérus értéket, amelyek rajta vannak az egyenesen.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Egyenes 3D-ben**: 9 v (a; b; c) – egyenes irányvektora
r (x; y; z) – tetszőleges pont helyvektora
$r_0(x_0; y_0; z_0)$−−P_0 fixpont helyvektora

[scale=.4, ult
(0,0,0); [draw=
thick] (O) – (8
left] x; [draw=
thick] (O) – ((
left] y; [draw=
thick] (O) – ((
le
[draw=second
(-2.5, 1, 0) coo
3.25, 0.75) node
coordinate
coordinate
coordinate
[draw=primary
(P0) nod
[draw=primary
(P) node
[draw=primary
++(0.3 ∗ (V
node[midw

[style=blueBox, nobreak=true,] **3D egyenes paraméteres alakja**:

9 $r_0(x_0; y_0; z_0)$−−P_0 fixpont helyvektora
v (a; b; c) – egyenes irányvektora
t ∈ – paraméter

$r(t) = r_0+tv \quad \to \quad \{ \quad x(t) = x_0+at \; y(t) = y_0+bt \; z(t) = z_0+ct$

A paraméteres egyenletekből t-t kifejezve is megadhatjuk az egyenest:

$$(t =) \; \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két egyenes viszonya**:

Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes irányvektorai által bezárt szög.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Pont és egyenes távolsága**:

Egy r_1 irányvektorú P_1 pont, és egy $r(t) = r_0 + tv$ egyenletű egyenes távolsága

$$d = \left| \frac{v \times (r_0 - r_1)}{|v|} \right|$$

[scale=.4, ultra thick] (O) at (0,0,0); [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (8,0,0) node[above left] x; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,5,0) node[below left] y; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,0,4) node[below left] z; [draw=secondaryColor, thick] (-2.5, 2.5, 1) coordinate (E) – (8, 2.5, 8) node[pos=.05, below] e coordinate[pos=1] (V) coordinate[pos=.55] (P) ; [draw=primaryColor, ->] (V) – $++(0.3*(V) - 0.3*(E))$ node[midway, below] v ; (Q) at (2,2.5,-2); [right] at (Q) P_1; [draw=primaryColor] (Q) – (P) node[midway, above left] d ; [fill=primaryColor] (Q) circle (0.1); pic["·", draw, angle eccentricity=.55, angle radius=4mm, thick] angle=V–P–Q ;

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két egyenes távolsága**:

Az $e_1 : p_1(t_1) = r_1 + t_1 v_1$ és $e_2 : p_2(t_2) = r_2 + t_2 v_2$ egyenesek távolsága

$$d = \left| (r_2 - r_1) \cdot \underbrace{\frac{(v_1 \times v_2)}{|v_1 \times v_2|}}_{n_T} \right| = |(r_2 - r_1) \cdot n_T| \,,$$

ahol n_T egy olyan egységvektor, amely merőleges mindkét egyenesre. (normál transzverzális)

[ultra thick] (O) at (0,0,0); [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (4,0,0) node[above left] x; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,3,0) node[below left] y; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,0,2) node[below left] z; [draw=secondaryColor, thick] (-1, 2) – (4, 3) coordinate (V1) node[pos=.05, below] e_1 coordinate[pos=.5] (P1) ; [draw=secondaryColor, thick] (-1.5, 1) – (3.75, -.5) coordinate[pos=0] (V2) node[pos=.05, below] e_2 coordinate[pos=.5] (P2) ; [draw=primaryColor] (P1) – (P2) node[midway, left] d ; pic["·", draw, angle eccentricity=.5, angle radius=4mm, thick] angle=P2–P1–V1 pic["·", draw, angle eccentricity=.5, angle radius=4mm, thick] angle=P1–P2–V2 ;

Amennyiben e_1 és e_2 párhuzamosak, akkor a távolságukat a pont és egyenes távolságának képletével számolhatjuk.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík 3D-ben**: 9 n (A; B; C) – sík normálvektor
r (x; y; z) – tetszőleges pont helyvektora
$r_0(x_0; y_0; z_0)$−−P_0 fixpont helyvektora

[ultra thick] (
[draw=ternaryCo
– (4,0,0) node
[draw=ternaryCo
– (0,2.25,0) no
[draw=ternaryCo
– (0,0,1.5) node
[draw=seco
fill=secondaryCol
thick] (-1, 1.25, -.
(4, 1.25, 2) – (-1.
[draw=primaryCo
(O) – (-.5, 1.25,
below left] r_0 ; [dr
->, ultra thick]
node[midway,
[draw=primary
thick] (3, 1.25, .5
++(0, 1, 0) c
node[pos=
(S) at (2, 1.25, .5)
– (
pic["·", draw, ang
angle radius=
angle=

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík egyenlete**:

A sík tetszőleges r pontjára igaz, hogy (r - r_0) $\cdot n = 0$,
$r \cdot n = r_0 \cdot n =: -D$,
$Ax + By + Cz + D = 0$.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hesse-féle normálegyenlet**:

$$\left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = 0$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két sík viszonya**:

Két sík által bezárt szög a síkok normálvektorai által bezárt szög.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík és egyenes döféspontja**:

Egy $s : Ax + By + Cz + D = 0$ sík és egy $e : r(t) = r_0 + tv$ egyenes döféspontjait meghatározhatjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\{ \quad x = x_0 + at \; y = y_0 + bt \; z = z_0 + ct \; s \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

A megoldások száma alapján:

[thick] [primaryColor, ultra thick, xshift=-5.25cm] (-.75, 1.35, 0) – ++(4.5, 0, 0);

[primaryColor, ultra thick] (2.25, 0, 0.75) – ++(-1, 2, 0) coordinate[pos=.5] (Q) ; [fill=primaryColor] (Q) circle (0.075);

[primaryColor, ultra thick, xshift=5.25cm] (-.75, 1, 0.75) – ++(4.5, 0, 0);

/in -5.25/0,0/1,5.25/∞ [xshift=cm] (O) at (0,0,0); [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (3,0,0) node[below left] x; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,2,0) node[below left] y; [draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,0,1.5) node[right=2mm] z;

[draw=secondaryColor, fill=secondaryColor, fill opacity=.35] (0, 1, -.5) – (3, 1, -.5) – (3, 1, 2) – (0, 1, 2) – cycle ;

at (1.5,-1) megoldás;

[style=blueBox, nobreak=true,] **Sík és egyenes által bezárt szög**:

Egy sík és egy egyenes által bezárt szög a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő.

[style=blueBox, nobreak=true,]

Sík és pont távolsága:

Egy $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pont és egy $s : Az+By+Cz+D = 0$ sík távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

[ultra thick]
[draw=ternary
(O) – (3,0,0) n
[draw=ternary
(O) – (0,2.5,0)
[draw=ternary
(O) – (0,0,1.5)

[draw=sec
fill=second
opacity=.35, thi
1, -.5) – (3, 1, 2

(P) at (1.
[fill=primary
(0
[draw=prim
node[above righ
0) node[mi
coordin
[dashed, gray]
coordinate (F
angle eccent
radius=4
angle=

[style=blueBox, nobreak=true,] **Két sík metszésvonala**:

A metszésvonal irányvektora mindkét sík normálvektorára merőleges:

$$v = n_1 \times n_2.$$

Ezen kívül szükségünk van még egy tetszőleges pontra, amely rajta van mindkét síkon. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy az egyik koordinátát fixáljuk, és a másik kettőt kiszámítjuk a 2 sík egyenletéből. (Pl. $z = 0$)

[ultra thick] (O) at (0,0,0);
[draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (3,0,0) node[below left] x;
[draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,2.5,0) node[below left] y;
[draw=ternaryColor, ->, thick] (O) – (0,0,1.5) node[right=2mm] z;
[transparency group, fill opacity=.35]
[fill=secondaryColor] (0, 1.25, -.5) – (3, 1.25, -.5) – (3, 1.25, 2) – (0, 1.25, 2) – cycle ;
[fill=secondaryColor] (1.5, 0, -.5) – (1.5, 2.5, -.5) – (1.5, 2.5, 2) – (1.5, 0, 2) – cycle ;
[draw=secondaryColor, thick] (0, 1.25, -.5) – (3, 1.25, -.5) – (3, 1.25, 2) – (0, 1.25, 2) – cycle ;
[draw=secondaryColor, thick] (1.5, 0, -.5) – (1.5, 2.5, -.5) – (1.5, 2.5, 2) – (1.5, 0, 2) – cycle ;
[draw=primaryColor] (0,-0.25) – ++(45:3.5);

0.2 Feladatok

1. Számítsa ki az $e_1 : 3x - 4y - 10 = 0$ és az $e_2 : 6x - 8y + 5 = 0$ egyenes távolságát!
2. Írja fel azon egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2; 5; 6)$ és a $Q(7; -1; 3)$ pontokon!
3. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az alábbi egyenesek metszik egymást!

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \qquad\qquad \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

4. Határozza meg az alábbi egyenesek távolságát!

$$\{ \ x_1(t) = 2{+}3t_1 \ y_1(t) = -1{+}4t_1 \ z_1(t) = 2t_1 \qquad\qquad \{ \ x_2(t) = 7{+}6t_2 \ y_2(t) = 1{+}8t_2 \ z_2(t) = 3\text{-}$$

5. Adott két egyenes. Határozza meg a távolságukat és normáltraszverzálisuk egyenletrendszerét!

$$\{ \ x_1(t) = -7{+}3t \ y_1(t) = 4{-}2t \ z_1(t) = 4{+}3t \qquad\qquad \{ \ x_2(t) = 1{+}t \ y_2(t) = -8{+}2t \ z_2(t) = -1$$

6. Vizsgálja meg, hogy a $P(0; -1; 2)$, a $Q(2; -1; 1)$ és az $R(4; 3; -2)$ pontok egy egyenesbe esnek-e! Ha nem, akkor írja fel az általuk kifeszített sík egyenletét!
7. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az e egyenes és az s sík párhuzamos egymással!

$$e : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha} \qquad\qquad s : x + 3y - 2\alpha z = 0$$

8. Számítsa ki az e egyenes és az s sík metszéspontját!

$$e : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \qquad\qquad s : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

9. Adja meg az s_1 és s_2 síkok metszésvonalának egyenletrendszerét!

$$s_1 : x - 2y + 3z - 4 = 0 \qquad\qquad s_2 : 3x + 2y - 5z - 4 = 0$$

10. Igazolja, hogy az alábbi három síknak egy közös pontja van. Írja fel ezen a ponton átmenő síkot, amely párhuzamos az $x + y + 2z = 0$ síkkal!

$$\{ \ s_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \ s_2 : x - 3y + z + 1 = 0 \ s_3 : x + y + z - 3 = 0$$