definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Integrálszámítás BMETE94BG01 13

Matematika G1

Integrálszámítás III

Utoljára frissítve: 2024. november 11.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Improprius integrál**:

A Riemann-integrál definíció szerint akkor használható, hogyha az integrációs intervallum véges, valamint ezen intervallumon az integrálandó függvény is korlátos. Előfordulhat azonban olyan eset, hogy

- végtelen tartományon szeretnénk integrálni,
- az integrálandó függvény nem korlátos az integrálási tartományban.

[ultra thick] [-to] (-1,0) – (5,0) node[below left] x; [-to] (-.5,-.5) – (-.5,3) node[below left] y;
[opacity=0, name path=x] (-.5,0) – (5,0);
[domain=1:6.5, samples=100, primaryColor, name path=p, -to,] plot (-1.5, 2/);
[of=p and x, on layer=bg,]primaryColor!10
at (3.5,1.5) $\lim\limits_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)x$;
Végtelen tartomány

[ultra thick] [-to] (-1,0) – (5,0) node[below left] x; [-to] (-.5,-.5) – (-.5,3) node[below left] y;
[opacity=0, name path=x] (0.25,0) – (3,0);
[draw=gray, dashed] (0.25,0) node[below] a – ++(0,3); [draw=gray, dashed] (3,0) – ++(0,.25);
[domain=.25:3, samples=100, primaryColor, name path=p, to-] plot (, .75/);
[of=p and x, on layer=bg,]primaryColor!10
at (3.5,1.5) $\lim\limits_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)x$;
Nem korlátos függvény

Ezekben az esetekben az improprius integrált hívhatjuk segítségül.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Ívhossz számítása integrálással**:

Egy görbét háromféleképpen is definiálhatunk:

- explicit alakban: $y = f(x)$,
- paraméteres alapban: $x = x(t)$, $y = y(t)$,
- polárkoordináta-rendszerben: $r = r(\varphi)$.

Az ívhossz számítására az alábbi képletet használhatjuk:

- explicit: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} x$
- paraméteres: $L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} t$
- polár: $L = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)} \varphi$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Forgástestek térfogata és felszíne**:

Egy görbe x tengely körüli megforgatásával egy forgástestet kapunk.

$$
\begin{aligned}
&explicit: && V = \pi \int_a^b f^2(x) x && A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} x \\
&paramteres: && V = \pi \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) t && A = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} t
\end{aligned}
$$

[style=note, nobreak=true,] Fontos figyelembe venni, hogy a fenti képletek csak a forgástestek palástjának felszínét adják eredményül.

Abban az esetben, hogyha például egy csonkakúpnak a felszínét szeretnénk meghatározni, akkor az alsó és felső alapok felületét hozzá kell adni az előbbi képletekkel kapott eredményhez.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Görbeív súlypontja**:

Egy konstans sűrűségű görbe súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

$$
\begin{aligned}
&explicit: && S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} x && S_y = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} x \\
&paramteres: && S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} t && S_y = \frac{1}{L} \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} t
\end{aligned}
$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Görbe által meghatározott síktartomány súlypontja**:

Egy görbe és az x tengely által meghatározott síktartomány súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

$$explicit: \qquad S_x = \int_a^b xf(x)x \int_a^b f(x)x \qquad S_y = 12 \int_a^b f^2(x)x \int_a^b f(x)x$$

$$paramteres: \qquad S_x = \int_a^b x(t)\, y(t)\, \dot{x}(t) t \int_a^b y(t)\, \dot{x}(t) t \qquad S_y = 12 \int_a^b y^2(t)\, \dot{x}(t) t \int_a^b y(t)\, \dot{x}(t) t$$

0.2 Feladatok

1. Milyen a és b paraméterek választása esetén lesz az adott integrál értéke minimális?

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)x$$

2. Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékeit! 3

   a) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}x$

   b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}x$

   c) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x+2}x$

   d) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}x$

   e) $\int_0^\infty e^{-x} \cos xx$

   f) $\int_0^1 \ln xx$

3. Adja meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjének ívhosszát az $x \in [0, 2]$ intervallumon!

4. Számítsa ki a ciklois egy ívének hosszát! ($x(t) = a \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$)

5. Számítsa ki annak a csonkakúpnak a térfogatát, melynek alapja egy $R = 5$ sugarú kör, teteje egy $r = 2$ sugarú kör, magassága pedig $h = 6$!

6. Vezesse le a gömb térfogatának képletét!

7. Adja meg az $f(x) = x^3$ görbe, valamint az $y = 0$ és $x = 1$ egyenesek által határolt rész súlypontjának koordinátáit!