definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Többváltozós analízis BMETE94BG02 14

Matematika G2

Integrálás II

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Integráltranszformációk:**

Előfordulhat olyan eset, amikor egy adott A tartományon nehéz elvégezni az integrálást, de létezik egy olyan koordináta-transzformáció, amely által az integrálás egyszerűbbé válik. Ha lézezik egy egyértelmű φ leképezés az A tartományról az A' tartományra, akkor az integrálás a következő módon történik:

$$_A f(x) A =_{A'} f(x') \, |J_\varphi| \, A',$$

ahol J_φ a leképezés Jacobi-mátrixa.

2D polárkoordináták:

[thick] [draw = primaryColor, -to] (-0.25,0) – (2.75,0) node[below] x;
[draw = primaryColor, -to] (0,-0.25) – (0,1.75) node[left] y;
(O) at (0,0); (X) at (1,0);
[draw=secondaryColor] (30:2) coordinate(P) – (0,0) node[above, midway, rotate=30] r ;
[fill=primaryColor] (P) circle(2pt);
pic["φ", draw = secondaryColor, ->, angle radius=1.5cm, angle eccentricity=.7,] angle = X–O–P;

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$|J_\varphi| = \cos\varphi - r\sin\varphi$$
$$\sin\varphi r\cos\varphi = r$$

3D hengerkoordináták:

[scale=.8, thick]
(0, 0) node[circle, fill, inner sep=1] (orig) – (2/2, 2*2/3) coordinate (a) ;
[dashed] (orig) – (2/2, -2/7) coordinate (phi) – (a);
[fill=primaryColor] (a) circle(2.5pt);
[dashed] (orig) ellipse (2 and 2/3);
[-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(-1.5*2/5, -1.5*2/3) coordinate (x) node[right] x ; [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(1.25*2, 0) coordinate (y) node[above] y ; [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(0, 1.25*2) coordinate (z) node[right] z ;
[draw=secondaryColor, text=secondaryColor, -to, "φ"] angle = x–orig–phi;
[draw=secondaryColor] (orig) – (phi) node[above, midway] r;

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

$|J_\varphi| = \cos\varphi - r\sin\varphi 0$
$\sin\varphi r\cos\varphi 0$
$001 = r$

3D gömbkoordináták:

[scale=.8, thick] (0, 0) node[circle, fill, inner sep=1] (orig) – (2/3, 2/2) coordinate (a); [dashed] (orig) – (2/3, -2/5) node (phi) – (a); (orig) circle (2); [dashed] (orig) ellipse (2 and 2/3); [fill=primaryColor] (a) circle(2.5pt); [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(-1.5*2/5, -1.5*2/3) coordinate (x) node[right] x ; [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(1.25*2, 0) coordinate (y) node[above] y ; [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(0, 1.25*2) coordinate (z) node[right] z ; [draw=secondaryColor, text=secondaryColor, -to, "φ"] angle = x–orig–phi; [draw=secondaryColor, text=secondaryColor, to-, "ϑ", angle radius=8mm] angle = a–orig–z;

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$
$-z = r\cos\vartheta$

$|J_\varphi| = s_\vartheta c_\varphi - r s_\vartheta s_\varphi c_\vartheta c_\varphi$
$s_\vartheta s_\varphi r s_\vartheta c_\varphi c_\vartheta s_\varphi$
$c_\vartheta 0 r = r^2\sin\vartheta$

[style=note, nobreak=true,] Fontos, hogy a Jacobi-mátrix determinánsával való szorzást ne felejtsük el!

[style=blueBox, nobreak=true,] **Görbék megadása:**

Görbék esetén egy futó változót használunk.

Egyenes:

$$r(t) = r_0 + tv,$$

ahol r_0 az egyenes egy pontja, v az egyenes irányvektora, $t \in$ pedig a futó paraméter.

Kör:

$$r(t) = R \cdot \cos\varphi R \cdot \sin\varphi,$$

ahol r a kör sugara, $\varphi \in [0; 2\pi]$ pedig a futó paraméter.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Felületek megadása:**

Felületek esetén két futó paraméterre van szükségünk.

Körlap:

$$\rho(r;\varphi) = r\cos\varphi r\sin\varphi,$$

ahol $r \in [0;R]$, $\varphi \in [0;2\pi]$.

Hengerfelület:

$$\rho(t;s) = r_0(r) + sv,$$

ahol $r_0(t)$ az alapgörbe, v pedig az irányvektor, t, $s \in$ pedig a futó paraméterek.

Forgásfelület:

$$\{ \quad x(t) = f(t)\ z(t) = g(t) \quad \Rightarrow \quad \rho(t;s) = f(t)\cos s f(t)\sin s g(t).$$

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi felületi integrálokat!

a) ${}_{T}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}T$

$T = \{(x;y) \mid x^2+y^2 \leq 1 \ \wedge \ x;y \geq 0\}$

[thick] [draw = primaryColor, -to] (-1.85,0) – (1.85,0) node[below] x; [draw = primaryColor, -to] (0,-1.35) – (0,1.35) node[left] y; [ternaryColor] (0,0) circle (1); [draw = secondaryColor, pattern = north east lines, pattern color = secondaryColor,] (0,0) – (1,0) arc (0:90:1) – cycle; [fill = white, fill opacity=.5, text opacity=1] at (0.4,0.4) T; [above right=-.5mm] at (1,0) 1; [above right=-.5mm] at (0,1) 1;

b) ${}_{T}x^2+y^2T$

$T = \{(x;y) \mid (x-3)^2+(y-2)^2 \leq 1\}$

[thick] [draw = primaryColor, -to] (-0.35,0) – (3.35,0) node[below] x; [draw = primaryColor, -to] (0,-0.35) – (0,2.35) node[left] y; [dashed, draw=ternaryColor] (0, 1.33) node[left] 2 – (1.33, 1.33) (2, 0) node[below] 3 – (2, 0.67) ; [secondaryColor, pattern = north east lines, pattern color = secondaryColor,] (2, 1.33) circle (.67); [fill = white, fill opacity=.5, text opacity=1] at (2, 1.33) T;

c) $_T|2xy|T$

$$T = \left\{(x;y) \;\middle|\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \;\wedge\; x;y \geq 0\right\}$$

[thick] [draw = primaryColor, -to] (-1.85,0) – (1.85,0) node[below] x; [draw = primaryColor, -to] (0,-1.35) – (0,1.35) node[left] y;
[ternaryColor,] (0,0) ellipse (1.2 and 0.8);
[draw = secondaryColor, pattern = north east lines, pattern color = secondaryColor,] (0,0) – (1.2,0) arc (0:90:1.2 and 0.8) – cycle;
[fill = white, fill opacity=.5, text opacity=1] at (0.45, 0.3) T;
[above right=-.5mm] at (1.2,0) 3; [above right=-.5mm] at (0,0.8) 2;

d) $_T 4xy^3 T$

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq \tfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$$

[thick] [draw = primaryColor, -to] (-1.85,0) – (1.85,0) node[below] x; [draw = primaryColor, -to] (0,-1.35) – (0,1.35) node[left] y; [ternaryColor] (0,0) circle (1) circle (.5); [draw = secondaryColor, pattern = north east lines, pattern color = secondaryColor,] (30:.5) – (30:1) arc (30:90:1) – (90:.5) arc (90:30:.5) – cycle; [fill = white, fill opacity=.5, text opacity=1, inner sep=.5mm,] at (60:.75) T; [above left=-.5mm] at (.5,0) 1; [below right=-.5mm] at (0,.5) 1; [above right=-.5mm] at (1,0) 2; [above right=-.5mm] at (0,1) 2;

e) $\,_T \sin(x^2 + y^2) T$

$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 2^2 \ \wedge \ x; y \geq 0\}$

[thick] [draw = primaryColor, -to] (-1.85,0) – (1.85,0) node[below] x; [draw = primaryColor, -to] (0,-1.35) – (0,1.35) node[left] y; [ternaryColor] (0,0) circle (1);
[draw = secondaryColor, pattern = north east lines, pattern color = secondaryColor,] (0,0) – (1,0) arc (0:90:1) – cycle;
[fill = white, fill opacity=.5, text opacity=1] at (0.4,0.4) T;
[above right=-.5mm] at (1,0) 2; [above right=-.5mm] at (0,1) 2;

2. Határozza meg az alábbi improprius integrálok értékét! 2

   a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{-x^2-y^2} xy$

   b) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} x$

3. Határozza meg a gömb térfogatát egy hármas-integrál segítségével:

$\mathrm{V} = {}_V V$

$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

[scale=.75, thick]
(0, 0) node[circle, fill,
inner sep=1] (orig) –
(2/3, 2/2) node[circle, fill,
inner sep=0.7,
label=above:x] (a) ;
[dashed] (orig) – (2/3,
-2/5) node (phi) – (a);
(orig) circle (2); [dashed]
(orig) ellipse (2 and 2/3);
[-to, draw =
primaryColor] (orig) –
++(-1.5*2/5, -1.5*2/3)
coordinate (x) node[right]
x ; [-to, draw =
primaryColor] (orig) –
++(1.25*2, 0) coordinate
(y) node[above] y ; [-to,
draw = primaryColor]
(orig) – ++(0, 1.25*2)
coordinate (z) node[right]
z ;
[draw=secondaryColor,
text=secondaryColor, -to,
"φ"] angle = x–orig–phi;
[draw=secondaryColor,
text=secondaryColor, to-,
"ϑ", angle radius=8mm]
angle = a–orig–z;

4. Adja meg az alábbi integrál értékét, ha V az $r = 1$ sugarú, $z = 0$ és $z = 2$ síkok által határolt z-tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú henger a tér első térnyolcadában elhelyezkedő része!

$$_V z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} V$$

$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ \land \ 0 \leq z \leq 2 \ \land \ x; y \geq 0\}$$

[scale=.75, thick] (0, 0) node[circle, fill, inner sep=1] (orig) – (2/2, 2*2/3) coordinate (a) ; [dashed] (orig) – (2/2, -2/7) coordinate (phi) – (a); [fill=primaryColor] (a) circle(2.5pt); [dashed] (orig) ellipse (2 and 2/3); [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(-1.5*2/5, -1.5*2/3) coordinate (x) node[right] x ; [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(1.25*2, 0) coordinate (y) node[above] y ; [-to, draw = primaryColor] (orig) – ++(0, 1.25*2) coordinate (z) node[right] z ; [draw=secondaryColor, text=secondaryColor, -to, "φ"] angle = x–orig–phi; [draw=secondaryColor] (orig) – (phi) node[above, midway] r;

5. Határozza meg az $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ függvény egységgömbön vett integrálját!

6. Határozza meg az $r(t)$ vezérgörbéjű v irányvektorú hengerefelületet!

$$v(t) = t^2 + 15t3t - 2 \qquad v = 123$$

7. Adja meg a 2 sugarú, z tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú, origó központú körhenger felületének egyenletét!

8. Adja meg azon tórusz felületének egyenletét, amelyet az xz síkban elhelyezkedő, $(x; z) = (5; 0)$ középpontú, $r = 3$ sugarú kör z tengely körül való forgatásával kapunk!