

3

Komplex számok

Matematika G1 – Komplex számok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

3.1. Elméleti Áttekintő

3.1.1. A komplex számok megadási módjai

Algebrai alak:

A komplex számok (\mathbb{C}) algebrai alakja:

$$z = a + bi,$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és $i = \sqrt{-1}$ az **imaginárius egység**. A komplex szám **valós része** $\text{Re}\{z\} = a$, **képzetes része** pedig $\text{Im}\{z\} = b$.



Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részük is meg egyezik. ($z_1 = z_2 \Leftrightarrow \text{Re}\{z_1\} = \text{Re}\{z_2\} \wedge \text{Im}\{z_1\} = \text{Im}\{z_2\}$)

Trigonometrikus alak:

Térjünk át az eddigi Descartes-féle koordinátarendszerről a **polárkoordináta-rendszerre**, amelyben

- a komplex szám hossza: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- valós tengellyel bezárt szöge: $\varphi = \arg z$.

Ebből az alábbi alakot kapjuk:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



Exponenciális alak:

Induljunk ki a trigonometrikus alakból, és használjuk fel az alábbi azonosságokat:

$$\cos \varphi = \cosh i\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \text{ és } i \sin \varphi = \sinh i\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}.$$

A trigonometrikus alakba helyettesítve megkapjuk az exponenciális alakot:

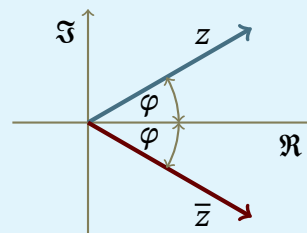
$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} i \right) = re^{i\varphi}.$$

3.2. Műveletek komplex számokkal

Konjugált:

Egy $z = a + bi$ komplex szám konjugáltját úgy kapjuk meg, hogy tükrözzük a valós tengelyre, vagyis

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

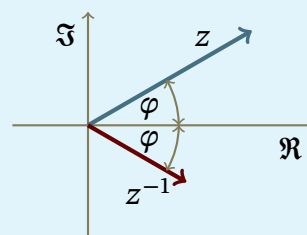


Inverz:

Egy $z = a + bi$ komplex szám inverze:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

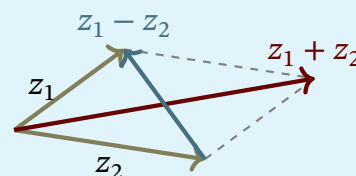
Komplex szám inverzének hossza az eredeti szám hosszának a reciproka.



Összeadás és kivonás:

Algebrai alakban, a vektorműveletekhez hasonlóan:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$



Szorzás:

Algebrai alakban:

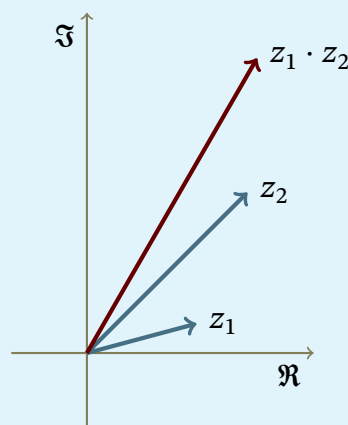
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Trigonometrikus alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



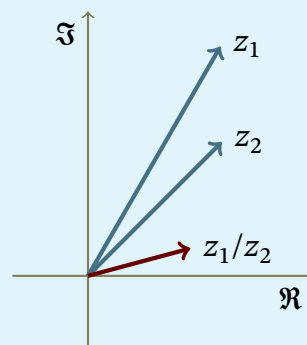
Osztás:

Trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



Hatványozás:

Trigonometrikus alakban:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Exponenciális alakban:

$$z^n = r^n e^{i \cdot n\varphi}$$

Ha egy komplex számot az n -edik hatványra emelünk, akkor

- hossza az n -szeresére nő,
- argumentuma is az n -szeresére nő.

Gyökvonás:

Trigonometrikus alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), \text{ ahol } k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Exponenciális alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \text{ ahol } k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Tetszőleges komplex szám n -edik gyökei egy olyan szabályos n -szög csúcsai, amelynek középpontja az origó.

3.3. Feladatok

1. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a) $\overline{\left(\frac{2-i}{e^{i\pi/3}}\right)}$

b) $\frac{5+i}{3-2i} \cdot \overline{3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \cdot 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) \cdot e^{i5\pi/12}}$

c) $\frac{5e^{i7\pi/13}}{4(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)} \cdot \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)} \cdot (2\sqrt{3} + 2i)$

2. Végezze el az alábbi hatványozásokat!

a) $(i-1)^{16}$

b) $(3+5i)^4 \cdot (21-35i)^5 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$

3. Végezze el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[3]{-8}$

b) $\sqrt[4]{1}$

c) $\sqrt{3+4i}$

4. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $z^4 - 81i = 0$

b) $z^2 - 6z + 13 = 0$

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

6. Adja meg a geometriai helyét azoknak a komplex számoknak, amelyekre ...

a) $\text{Im}\{z\} > 0$,

b) $|z-a| = |z-b|$, ahol $a, b \in \mathbb{C}$,

c) $|z| < 1 - \text{Re}\{z\}$.

7. Egy négyzet két szomszédos csúcsát jelölje a $z_1 = 3 + 2i$ és a $z_2 = 5 + 4i$ komplex szám. Hol található a többi csúcs?

8. Írja fel a $(-2; 1)$ középpontú, 4 sugarú kör egyenletét a komplex számsíkon!