

# 13 Integrálás I

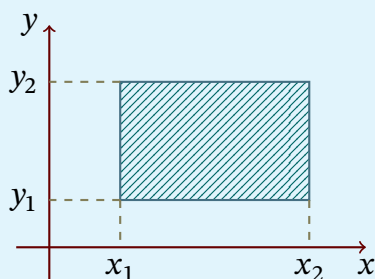
Matematika G2 – Többszörös integrálás

Utoljára frissítve: 2025. május 4.

## 13.1. Elméleti Áttekintő

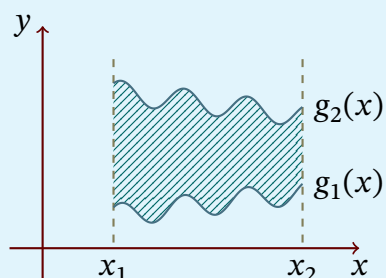
**Integrálás téglaltartományon:**

Téglaltartomány esetén az integrálás sorrendje tetszőleges.

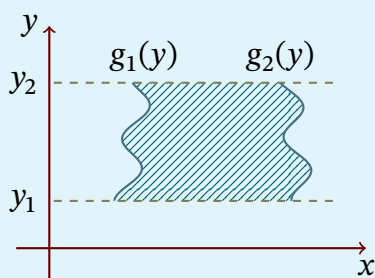


$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x; y) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x; y) dx dy$$

**Integrálás normáltartományon:**



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1^{-1}(y)}^{g_2^{-1}(y)} f(x; y) dx dy$$



$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x; y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1^{-1}(x)}^{g_2^{-1}(x)} f(x; y) dy dx$$

## 13.2. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvények integrálját a megadott tégl tartományokon!

a)  $f(x; y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$   $1 \leq x \leq 2$   $0 \leq y \leq 3$

b)  $g(x; y) = xy \sin(x^2 + y^2)$   $0 \leq x \leq \pi/2$   $0 \leq y \leq \pi/2$

c)  $h(x; y) = y \cos(2xy)$   $1 \leq x \leq 2$   $1 \leq y \leq 3$

2. Határozza meg az alábbi hármasintegrált!

$$\int_1^2 \int_0^3 \int_0^1 z x \sqrt{x^2 + y} dx dy dz$$

3. Határozza meg az alábbi integrálokat, majd írja fel az integrációs határokat, ha először az  $x$ , majd a  $y$  változó szerint integrálnánk!

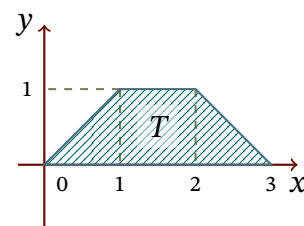
a)  $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy dx$

b)  $\int_1^3 \int_0^{1/x} (2y + x + 2) dy dx$

4. Határozza meg az alábbi felületi integrálok értékét!

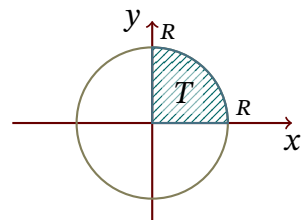
a)  $\iint_T x^2 + y^2 dT$

$$T = \{(x; y) \mid 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 3 - y\}$$



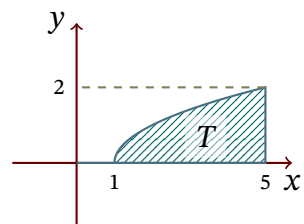
b)  $\iint_T xy dT$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge x, y \geq 0\}$$



c)  $\iint_T y e^{(x-1)^2} dT$

$$T = \{(x; y) \mid x \leq 1 + y^2 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 5\}$$



5. Adja meg az integrációs intervallumokat, ha az alábbi felületeken kell integrálni:

a)  $R$  sugarú körfelület,

b) ha az  $x = 0$ ,  $y = x^2$  és  $y = 2 - x$  görbék által határolt felület!

6. Adja meg a  $f(x; y) = xy$  függvény a  $P_1(1; 1)$ ,  $P_2(4; 5)$  és  $P_3(4; 2)$  pontok által meghatározott háromszög terület fölötti integrálját!