10 Integrálszámítás I

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 28.

10.1. Elméleti Áttekintő

Alapintegrálok:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$f(x)$	$F(x)$
k	kx
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

$f(x)$	$F(x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

$f(x)$	$F(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x$

Integrálás tulajdonságai:

Linearitás: $$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$$

Lineáris az integrációs intervallumra: $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Speciális helyettesítéses módszerek:

- $\displaystyle\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, ahol $\alpha \neq -1$,
- $\displaystyle\int \frac{f'}{f} = \ln\lvert f\rvert + C$,
- $\displaystyle\int e^f \cdot f' = e^f + C$,
- $\displaystyle\int (f\circ g)\cdot g'\,\mathrm{d}x = \left(\int f\right)\circ g$.

10.2. Feladatok

1. Végezze el az $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$ függvény vizsgálatát!
2. Végezze el a $g(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ függvény vizsgálatát!
3. Végezze el az alábbi határozatlan integrálok számítását!

   a) $\displaystyle\int x^2(x^2-1) + 2\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}} + \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

4. Határozza meg az alábbi integrálok értékét a helyettesítéses módszer segítségével!

   a) $\displaystyle\int (x^3+2x)\cdot\cos\left(x^4+4x^2\right)\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int \sin^3(2x+1)\cdot\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x$

   e) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

   f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\,\mathrm{d}x$

   g) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x$

   h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,\mathrm{d}x$

   i) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$