definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0){+}0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q){+}(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Analitikus geometria BMETE94BG01 1

Matematika G1

Vektorok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Vektor**] Egy (v_1, v_2, v_3) valós számokból álló rendezett számhármast a térben $(^3)$ vektornak nevezünk. Jelölése: v (nyomtatott szöveg), $\underline{v}$ / $\vec{v}$ (kézzel írott szöveg).

[style=note, nobreak=true,] A vektorok geometriai értelemben olyan irányított szakaszok, melyeknek hossza és iránya van.

[style=blueBox, nobreak=true,]

Vektorok megadása:

Egy tetszőleges v $(v_1; v_2; v_3)$ vektor a standard normális bázisban

$$v = v_1 + v_2 + v_3.$$

[z=(210:1),x=(-30:1), scale=0.4] [->, draw=ternaryColor, thick] (0,0,0) – (4,0,0) node[anchor=south west]x; [->, draw=ternaryColor, thick] (0,0,0) – (0,4,0) node[right=2mm] y; [->, draw=ternaryColor, thick] (0,0,0) – (0,0,4) node[anchor=south east]z; [->, draw=primaryColor, ultra thick] (0,0,0) – (2,0,0) node[anchor=south west]; [->, draw=primaryColor, ultra thick] (0,0,0) – (0,2,0) node[right=2mm] ; [->, draw=primaryColor, ultra thick] (0,0,0) – (0,0,2) node[anchor=south east];

= (1; 0
= (0; 1
= (0; 0

[style=blueBox, nobreak=true,] **Vektorok típusai**:

- **kötött vektor**: fix kezdőponttal rendelkezik,
- **szabad vektor**: nincs fix kezdőpontja,
- **helyvektor**: olyan kötött vektor, amelynek kezdőpontja az origó.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Vektor hossza**:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

- Ha $|v| = 0$, akkor v **nullvektor**. (Jele:)
- Ha $|v| = 1$, akkor v **egységvektor**.

[style=note, nobreak=true,] A nullvektor iránya nem definiált.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Egy adott v vektorhoz tartozó egységvektor**:

$$e_v = \frac{v}{|v|} = (\ )\, v_1|v|v_2|v|v_3|v|$$

[ultra thick]
[draw=ternary
(O) – (3,0,0) n
[draw=ternary
(O) – (0,1.5,0)
[draw=ternary
(O) – (0,0,1.5)

Háromszög-egyenlőtlenség:

[style=blueBox, nobreak=true,] Minden u, v vektorpárra igaz, hogy

$$|u + v| \leq |u| + |v|.$$

[-to, draw=seco
(2,0,1) co
node[midway
draw=secondar
(1.25,1.5,0)
node[midwa
draw=primary
node[mid
rotate=

[ultra thick]
[draw=ternary
(O) – (3,0,0) n
[draw=ternary
(O) – (0,1.5,0)
[draw=ternary
(O) – (0,0,1.5)

Paralelogramma-szabály:

[style=blueBox, nobreak=true,] Ha az u és v vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az u és v vektorokkal, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának azon átlója, amely a közös pontból indul.

[-to, draw=seco
(2,0,1) co
node[midway
draw=second
(1.25,1.5,0)
node[mid
(X) at $((U) + ($
thick] (U)
[-to, draw=pri
(X) node[p
rotate=

[style=blueBox, nobreak=true,] **Vektor koordinátatengelyekkel bezárt szöge**: $\cos\varphi_x = \frac{v_1}{|v|} \quad \cos\varphi_y = \frac{v_2}{|v|} \quad \cos\varphi_z = \frac{v_3}{|v|}$

[scale=
draw=ter
(0,0.
node[anch
[->, draw
thick] (
node[righ
draw=ter
(0,0.
node[anch
[->, draw
ultra thick
coor
[rot
x=33.6900
pla
draw=seco
arc (0:4
node[mid
[rot
y=63.4349
pla
draw=seco
arc (0:5
node[midwa
[rot
z=-53.1301
pla
draw=seco
arc (0:6
node[midwa

[style=blueBox, nobreak=true,] **Kollinearitás**:

Az u és v kollineárisak, ha v előáll u és egy $\lambda \in$ szorzataként. Amennyiben $\lambda > 0$, akkor a két vektor azonos irányú.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Komplanaritás**:

Tetszőleges számú vektor komplanáris, ha azok egy síkban helyezkednek el.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Lineáris függetlenség**] Egy $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ vektorrendszer lineárisan független, ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n =$ egyenletnek csak a triviális megoldása létezik. (Azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.)

[style=note, nobreak=true,]

- A nullvektor minden vektorral lineárisan függő.
- Két vektor akkor lineárisan független, ha nem kollineáris.
- Ha két vektor nem kollineáris, akkor egyértelműen meghatároznak egy síkot, azaz bármely velük koplanáris vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként.
- 3D koordinátarendszerben 3-nál több vektor biztos, hogy lineárisan összefüggő. (Feltéve, hogy nincs köztük nullvektor.)
- 3 vektor lineárisan független ha nem koplanáris. (3D-ben)

[style=blueBox, nobreak=true,]

Vektorok összege és különbsége: u + v = (u$_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3$)
$u - v = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$

- **Kommutatív**: $u + v = v + u$
- **Asszociatív**: $(u+v)+w = u+(v+w)$

[scale=2/3, ult
[draw=ternaryColor,
node[midway,anc
[draw=ternaryColor,
node[midway,anch
[dashed, draw=gray, th
(5,1) – (7
[primaryColor, ->]
node[anchor=so
[secondaryColor, ->
node[anchor=so

[style=blueBox, nobreak=true,] **Skalárral való szorzás**:

Skalárral való szorzás esetén a vektor (v) minden koordinátáját megszorozzuk a $\lambda \in$ skalárral, vagyis:

$$u = \lambda v = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3).$$

A skalárral való szorzás eredménye egy vektor, melynek hossza az eredeti vektor hosszának skalárszorosa.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Vektorok skaláris szorzata**: (Scalar / Dot product)

Az u és v vektorok skaláris szorzata:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Két vektor skaláris szorzatának eredménye egy skalár.

[style=note, nobreak=true,] **A skaláris szorzat tulajdonságai**:

- $u \cdot v = v \cdot u$ (kommutatív)
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ (disztributív)
- $u \cdot u = |u|^2$
- $u \cdot = 0$

- $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$

[scale=1/2, ul
[draw=primaryCol
(2,3) node[midway,
coordinate
[draw=primaryCol
(5,1) node[midway,a
coordinate
(0) at (0
pic["φ", draw=terna
eccentricity=0
radius=1.1cm] an

[style=note, nobreak=true,] **A skaláris szorzat geometriai jelentése**:

A skaláris szorzás segítségével kiszámítható az u és v vektorok közötti szög.

$$u \cdot v = |u||v| \cos \varphi$$

[style=blueBox, nobreak=true,]

Az u vektor v vektorra vett párhuzamos és merőleges komponense:

$$u_{||} = (u \cdot e_v)\, e_v \quad s \quad u_\perp = u - u_{||},$$

ahol e_v a v irányába mutató egységvektor.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Vektoriális szorzat / keresztszorzat** (Cross product):

Az u és v vektorok keresztszorzata:

$$u \times v = u_1 u_2 u_3 \times v_1 v_2 v_3 = \left| u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 \right| = u_2 v_3 - u_3 v_2 u_3 v_1 - u_1 v_3 u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Két vektor keresztszorzatának eredménye egy vektor, amely merőleges mindkét vektorra, iránya pedig a jobbkéz szabály szerinti.

[style=note, nobreak=true,] **A keresztszorzat tulajdonságai**:

- $v \times v =$
- $u \times v = -v \times u$ (antikommutatív)
- $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ (disztributív)
- $u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$
- $u \times v =$ akkor és csak akkor, ha u és v kollineárisak, vagy ha valamelyikük nullvektor.

[style=note, nobreak=true,] **A keresztszorzat geometriai jelentése**:

Az $u \times v$ vektor hossza megegyezik az u és v vektorok által kifeszített paralelogramma területével.

$$|u \times v| = |u||v| \sin \varphi$$

[scale=1/2, ul
[draw=primaryCol
(2,3) node[midway,a
[draw=primaryCol
(5,1)
node[midway,ancl
[dashed, draw=gray
(7,4) (5,1) –
bg [primaryColor!2
– (7,4) – (5,1)

[style=blueBox, nobreak=true,] **Vegyesszorzat**:

Az u, v és w vektorok vegyes szorzata:

$$uvw = u \cdot (v \times w)$$

A vegyesszorzat eredménye egy skalár.

[style=note, nobreak=true,] **A vegyesszorzat tulajdonságai**:

- $uvw = wuv = vwu = -vuw = -wvu = -uwv$ (ciklikus csere)
- lineáris mindhárom változójában: $(\lambda u + \mu v)wz = \lambda uwz + \mu vwz$
- Ha u, v és w vektorok egy síkban helyezkednek el, akkor vegyesszorzatuk nulla.

[style=note, nobreak=true,] **A vegyesszorzat geometriai jelentése**:

3 vektor vegyesszorzata megadja az általuk kifeszített paralelepipedon térfogatát, illetve az általuk kifeszített tetraéder térfogatának hatszorosát.

0.2 Feladatok

1. Legyen u és v két tetszőleges vektor. Milyen α és β paraméterek esetén lesznek kollineárisak, ha az $\{a; b; c\}$ vektorrendszer lineárisan független? 2

   a) $\{ \; u = 2a + 3b$
   $v = 4a + \alpha b$

   b) $\{ \; u = 3a - 3\alpha b + \beta c$
   $v = a - \alpha b - c$

2. Legyen az $\{a; b; c\}$ vektorrendszer lineárisan független. Lineárisan független lesz-e az $\{r; s; t\}$ vektorrendszer? 2

   a) $\{ \; r = 3a + 2b + c$
   $s = 5a - 3b - 2c$
   $t =$

   b) $\{ \; r = a + b + c$
   $s = b + c$
   $t = a + c$

3. Legyen a, b és c közös középpontú komplanáris vektorok. (a és b nem kollineáris) Bizonyítsa be, hogy az a, b, c vektorok végpontja akkor és csakis akkor esik egy egyenesre, ha $c = \alpha a + \beta b$ előállításban $\alpha + \beta = 1$.

4. Számítsa ki az $a(7; -1; 6)$ és $b(2; 20; 2)$ vektorok által bezárt szöget!

5. Milyen z esetén lesz a $b(6; -2; z)$ vektor merőleges az $a(2; -3; 1)$ vektorra?

6. Ha az $a + 3b$ vektor merőleges a $7a - 5b$ vektorra, az $a - 4b$ vektor pedig merőleges a $7a - 2b$ vektorra, mekkora a és b bezárt szögének koszinusza?

7. Az $ABCD$ téglalap ismert csúcsainak koordinátái: $A(2; 6; 0)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-2; 8; z)$. Mennyi z értéke? Hol van D pont?

8. Számítsa ki az $a \times b$ keresztszorzatot, amennyiben $a(-4; 2; 1)$ és $b(-2; 7; 8)$.

9. Hozza egyszerűb alakra a $(3a - b) \times (b + 3a)$ kifejezést!

10. Kollineárisak-e az $a(-3; 4; 7)$ és $b(2; 5; 1)$ vektorok?

11. Mekkora az ABC háromszög területe, ha csúcsai: $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 4; 7)$ és $C(5; -2; 1)$?

12. Igaz-e, hogy ha $a \times c = b \times c$, akkor $a = b$?

13. Lehet-e az $a(6; 2; -3)$ és $b(-3; 6; -2)$ vektor egy kocka egy csúcsából induló élvektorok? Ha igen, határozzuk meg a harmadik élt!

14. Lineárisan független-e az $a(2; 3; -1)$, $b(1; -1; 3)$ és $c(1; 9; -11)$ vektor?

15. Az a, b és c vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata V. Mekkora az

$r = 2a + 3b + 4c$, $s = a - b + c$ és $t = 2a + 4b - c$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?

16. Milyen α paraméter esetén lesz az $\{a, b, c\}$ vektorrendszer lineárisan függő, illetve lineárisan független, ha $a(3; \alpha; 0)$, $b(0; 3; \alpha)$ és $c(1; 0; -1)$?

17. Határozza meg $a(-1; 2; 1)$ vektor $b(1; 2; 2)$ vektorra vett vetületét!