

# Integrálás II

Matematika G2 - Többváltozós analízis Utoljára frissítve: 2025. április 22.

# 14.1. Elméleti Áttekintő

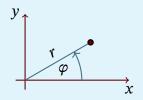
## Integráltranszformációk:

Előfordulhat olyan eset, amikor egy adott A tartományon nehéz elvégezni az integrálást, de létezik egy olyan koordináta-transzformáció, amely által az integrálás egyszerűbbé válik. Ha lézezik egy egyértelmű  $\varphi$  leképezés az A tartományról az A' tartományra, akkor az integrálás a következő módon történik:

$$\iint_{A} f(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{A} = \iint_{A'} f(\boldsymbol{x}') \, \big| \boldsymbol{J}_{\varphi} \big| \, d\boldsymbol{A}',$$

ahol  $\mathbf{J}_{\varphi}$  a leképezés Jacobi-mátrixa.

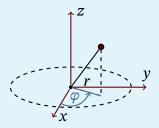
#### 2D polárkoordináták:



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$|\mathbf{J}_{\varphi}| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

# 3D hengerkoordináták:



$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$
$$z = z$$

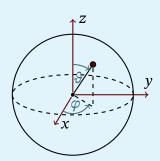
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$y = z$$

$$|\mathbf{J}_{\varphi}| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

# 3D gömbkoordináták:



$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$
$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$
$$z = r \cos \theta$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$|\mathbf{J}_{\varphi}| = \begin{vmatrix} s_{\theta} c_{\varphi} & -r s_{\theta} s_{\varphi} & c_{\theta} c_{\varphi} \\ s_{\theta} s_{\varphi} & r s_{\theta} c_{\varphi} & c_{\theta} s_{\varphi} \\ c_{\theta} & 0 & r \end{vmatrix} = r^{2} \sin \theta$$

Fontos, hogy a Jacobi-mátrix determinánsával való szorzást ne felejtsük el!

## Görbék megadása:

Görbék esetén egy futó változót használunk.

#### **Egyenes:**

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},$$

ahol  $r_0$  az egyenes egy pontja, v az egyenes irányvektora,  $t \in \mathbb{R}$  pedig a futó paraméter.

#### Kör:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos \varphi \\ R \cdot \sin \varphi \end{bmatrix},$$

aholra kör sugara,  $\varphi \in [0;2\pi]$  pedig a futó paraméter.

## Felületek megadása:

Felületek esetén két futó paraméterre van szükségünk.

### Körlap:

$$\rho(r;\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi \end{bmatrix},$$

ahol *r* ∈ [0; *R*],  $\varphi$  ∈ [0; 2 $\pi$ ].

## Hengerfelület:

$$\rho(t;s) = r_0(r) + sv,$$

ahol  $r_0(t)$  az alapgörbe, v pedig az irányvektor,  $t, s \in \mathbb{R}$  pedig a futó paraméterek.

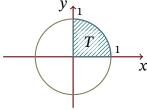
#### Forgásfelület:

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ z(t) = g(t) \end{cases} \Rightarrow \rho(t; s) = \begin{bmatrix} f(t) \cos s \\ f(t) \sin s \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

# 14.2. Feladatok

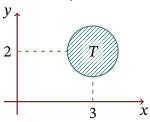
1. Határozza meg az alábbi felületi integrálokat!

a) 
$$\iint_{T} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dT$$
 
$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \le 1 \ \land \ x; y \ge 0\}$$



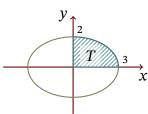
b) 
$$\iint_{T} x^{2} + y^{2} dT$$

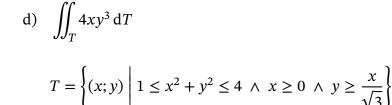
$$T = \{(x; y) \mid (x - 3)^{2} + (y - 2)^{2} \le 1\}$$

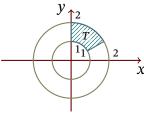


c) 
$$\iint_{T} |2xy| dT$$

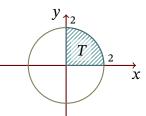
$$T = \left\{ (x; y) \left| \frac{x^{2}}{9} + \frac{y^{2}}{4} \le 1 \land x; y \ge 0 \right\} \right\}$$







e) 
$$\iint_{T} \sin(x^{2} + y^{2}) dT$$
$$T = \{(x; y) \mid x^{2} + y^{2} \le 2^{2} \land x; y \ge 0\}$$



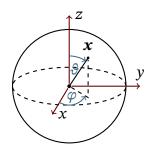
2. Határozza meg az alábbi improprius integrálok értékét!

a) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

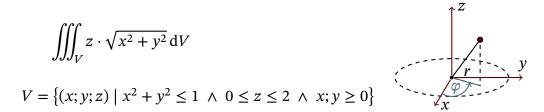
b) 
$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

3. Határozza meg a gömb térfogatát egy hármas-integrál segítségével:

$$V = \iiint_V dV$$
 
$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$



4. Adja meg az alábbi integrál értékét, ha V az r=1 sugarú, z=0 és z=2 síkok által határolt z-tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú henger a tér első térnyolcadában elhelyezkedő része!



- 5. Határozza meg az  $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  függvény egységgömbön vett integrálját!
- 6. Határozza meg az r(t) vezérgörbéjű v irányvektorú hengerefelületet!

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ 5t \\ 3t - 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- 7. Adja meg a 2 sugarú, z tengellyel párhuzamos szimmetriavonalú, origó központú körhenger felületének egyenletét!
- 8. Adja meg azon tórusz felületének egyenletét, amelyet az xz síkban elhelyezkedő, (x; z) = (5; 0) középpontú, r = 3 sugarú kör z tengely körül való forgatásával kapunk!