definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em,0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt,0))$ |- $((Q) + (2em,0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em,0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em,0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Kalkulus BMETE94BG01 9

Matematika G1

Differenciálás III

Utoljára frissítve: 2024. október 27.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Teljes függvényvizsgálat lépései**:

1. Értelmezési tartomány ($_f$)
   Zérushelyek (x tengelymetszet)
   Paritás ($f(x) = f(-x)$ – páros, $f(x) = -f(-x)$ – páratlan)
   Periodicitás ($f(x) = f(x + kp)$, ahol $k \in Z$)
   Határérték ($\pm\infty$-ben, szakadási pontokban, határpontokban)
2. $f'(x)$ vizsgálata: monotonitás, lokális szélsőértékek
   - $f'(x) > 0$ – monoton nő
   - $f'(x) < 0$ – monoton csökken
3. $f''(x)$ vizsgálata: konvexitás, konkávitás, inflexiós pontok
   - $f''(x) > 0$ – konvex
   - $f''(x) < 0$ – konkáv
4. Lineáris aszimptoták keresése:
   - Az $x = a$ egyenes függőleges aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to a^+} = \pm\infty$, vagy $\lim\limits_{x\to a^-} = \pm\infty$.
   - Az $y = b$ egyenes vízszintes aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = b$.
   - Ferde aszimptotákat $y = mx + b$ alakban keressük, ahol

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad s \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx.$$

5. Táblázat készítése, ábrázolás és értékkészlet leolvasása az ábráról

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: Lokális szélsőérték**] Ha az f függvény deriválható az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában, akkor az x_0-beli lokális szélsőérték létezésének

- szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$,
- elégséges feltétele:
  1. $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált az x_0-ban
  2. ha f második deriváltja is létezik az x_0-ban, akkor $f''(x_0) \neq 0$.
     - Ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van az x_0-ban.
     - Ha $f''(x_0) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van az x_0-ban.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 2: Inflexiós pont**] Ha az f függvény kétszer deriválható az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában, akkor az x_0-beli inflexiós pont létezésének

- szükséges feltétele: $f''(x_0) = 0$,
- elégséges feltétele: $f''(x)$ előjelet vált az x_0-ban, vagy $f'''(x_0) \neq 0$.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Szöveges feladatok**

Ezen a gyakorlaton olyan szöveges feladatokkal fogunk foglalkozni, amelyekben valamilyen szélsőértéket kell meghatároznunk.

Tudjuk, hogy egy f függvénynek az értelmezési tartományának egy x_0 pontjában akkor van szélsőértéke, ha $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ előjelet vált az x_0 pontban, vagy $f''(x_0) \neq 0$.

Ezen feladatok esetén fontos, hogy a feladat elolvasása után a szöveg alapján felírjuk az alapösszefüggéseket. Ezután meg kell határoznunk azt a függvényt, amelynek a szélsőértékét keressük. Miután meghatároztuk a függvény szélsőértékeit, ellenőriznünk kell, hogy valóban szélsőértéke-e.

0.2 Feladatok

1. Végezze el az $f(x) = 2x^2x^2 - 9$ függvény teljes vizsgálatát!

2. Határozza meg az 1 literes felül nyitott legkisebb felszínű hengert!

3. Határozza meg a legnagyobb térfogatú h alkotójú kúpot!

4. Határozza meg az r sugarú körbe írt legnagyobb területű derékszögű négyszöget!

5. Egy a szélességű csatornából derékszögben kinyúlik egy b szélességű csatorna. Határozza meg mekkora azon gerenda hossza, amely befordítható egyik csatornából a másikba!

6. A gazda épp a kocsmában mulat, mikor neje felhívja, hogy hol van. (Természetesen titokban ment meccset nézni). A gazda, nehogy lebukjon, azt hazudja, hogy a szomszédnál van és sietve indul haza. Azonban, hogy a kocsmaszagot lemossa magáról, elhatározza, hogy megfürdik a patakban. Milyen úton halad, ha a lehető leggyorsabban akar hazaérni?

[ultra thick] [secondaryColor] (-4,0) – ++(8,0); [secondaryColor] (-4,-0.5) – ++(8,0);

[draw=secondaryColor, minimum height=6mm, minimum width=6mm] (H) at (-3,1.25) H; [primaryColor] (H.45) – ++(-0.3,0.25) – (H.135) – cycle;

[dashed, draw=ternaryColor] (H) – (-3,0) node[midway, left] $0,25\,\mathrm{km}$;

[draw=secondaryColor, minimum height=6mm, minimum width=6mm] (K) at (3,3) K; [primaryColor] (K.45) – ++(-0.3,0.25) – (K.135) – cycle;

[dashed, draw=ternaryColor] (K) – (3,0) node[midway, right] $0,75\,\mathrm{km}$;

[dashed, draw=ternaryColor] (-3,.25) – (3,.25) node[midway, above] $1\,\mathrm{km}$;