

## 11

# Integrálszámítás II

Matematika G1 – Integrálszámítás

Utoljára frissítve: 2024. november 04.

## 11.1. Elméleti Áttekintő

A **parciális integrálás** módszerének bevezetéséhez írjuk fel két függvény szorzatának deriváltját:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integráljuk  $x$  szerint az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Az integrálás és a deriválás műveletei egymás inverzei, így az egyenlet bal oldala az alábbi alakot ölti:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Amennyiben bevezetjük az  $f(x) = u$ ,  $g(x) = v$ ,  $du = u' dx$ ,  $dv = v' dx$  jelöléseket, akkor megkapjuk a parciális integrálás egy másik gyakran használt alakját:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

A parciális integrálás módszerét az alábbi esetekben érdemes alkalmazni:

- polinom és trigonometrikus/exponenciális függvény szorzatának integrálása:

$$\int x \sin x dx, \quad \int x \cos x dx, \quad \int x e^x dx,$$

- exponenciális és trigonometrikus függvények szorzatának integrálása:

$$\int e^x \sin x dx, \quad \int e^x \cos x dx,$$

- logaritmus függvények integrálása,
- egyéb esetek, ahol egy szorzatfüggvényt kell integrálni.

Egy **racionális törtfüggvény** polinomok hányadosaként áll elő. Általános alakja:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Amennyiben a nevező fokszáma kisebb, mint a számlálóé, vagyis  $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ , akkor a **polinomosztás** módszeréhez kell folyamodnunk, mely elvégzése után a törtfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$R(x) = T(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

hol  $T(x)$  egy újabb polinom,  $S(x)$  fokszáma pedig már kisebb, mint  $Q(x)$  fokszáma.

Ezután **parciális törtekké** bontjuk a  $S(x)/Q(x)$  hányadost, majd ezeket, illetve a  $T(x)$  polinomot integráljuk.

Amennyiben a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma, vagyis  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ , akkor polinomosztás nélkül tudjuk parciális törtekké bontani a függvényt.

A parciális törtekre való bontáshoz az **algebra alaptételét** használjuk fel, miszerint bármely valós együtthatós polinom felbontható első és másodrendű kifejezések szorzatára, vagyis

$$p(x) = A \cdot \underbrace{\prod (x - a_i)}_{\text{valós gyökök}} \cdot \underbrace{\prod (x^2 + p_i x + q_i)}_{\text{komplex gyökök}}.$$

Valós gyökök esetén  $a_i$  maga a polinom gyöke, míg komplex gyökök esetén

$$x^2 + p_i x + q_i = (x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 - 2 \operatorname{Re}(z_i)x + |z_i|^2.$$

Vegyük például a  $p(x) = x^5 - 13x^4 + 73x^3 - 193x^2 + 232x - 100$  polinomot, melynek gyökei:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 4 + 3i$ ,  $x_5 = 4 - 3i$ . Ekkor a polinom felbontható:

$$p(x) = \underbrace{(x - 1)}_{x_1} \cdot \underbrace{(x - 2)^2}_{x_2, x_3} \cdot \underbrace{(x^2 - 6x + 25)}_{x_4, x_5}.$$

Hozzuk  $R(x) = T(x) + S(x)/Q(x)$  alakra ( $\deg S < \deg Q$ ) az  $R(x) = P(x)/Q(x)$  függvényt, ahol  $P(x) = x^3 - 12x^2 - 42$  és  $Q(x) = x - 3$ . Végezzük el a polinomosztást:

$$\begin{array}{rcl} & (x^3 - 12x^2 + 0x - 42) \div (x - 3) = & x^2 - 9x - 27. \\ x^2 \cdot (x - 3) \rightarrow & - (x^3 - 3x^2 + 0x + 0x) & \\ & \hline & -9x^2 + 0x - 42 & \\ -9x \cdot (x - 3) \rightarrow & - (-9x^2 + 27x + 0) & \\ & \hline & -27x - 42 & \\ -27 \cdot (x - 3) \rightarrow & - (-27x + 81) & \\ & \hline & -123 & \end{array}$$

Az eredmény tehát:

$$R(x) = x^2 - 9x - 27 - \frac{123}{x - 3}.$$

**Félszöges tangens helyettesítés:**

Amennyiben trigonometrikus ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ) függvényekből álló racionális törtfüggvényeket szeretnénk integrálni, akkor az alábbi helyettesítés alkalmazásával közönséges,  $t$ -től függő racionális törtfüggvényeket kapunk:

$$t = \tan \frac{x}{2} \rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Ilyen esetben a  $\sin x$  és  $\cos x$  trigonometrikus függvényeket a következő módon helyettesítjük:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{és} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Egy ilyen integrál általános alakja:

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}; \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

**Félszöges tangens helyettesítés levezetése:**

Használjuk az alábbi trigonometrikus azonosságokat:

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2),$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2),$$

$$1 = \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2).$$

Ezek alapján a  $\sin x$  és  $\cos x$  trigonometrikus függvényeket a következő módon helyettesíthetjük:

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} \stackrel{*}{=} \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \left( * : \cdot \frac{1/\cos^2(1/x)}{1/\cos^2(1/x)} \right)$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} \stackrel{*}{=} \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \left( * : \cdot \frac{1/\cos^2(1/x)}{1/\cos^2(1/x)} \right)$$

Végül pedig  $t = \tan(x/2)$  alapján:

$$x = 2 \arctan t \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1 + t^2} \rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

**A koszekáns integrálása:**

$$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1 + t^2}{2t} \frac{2 dt}{1 + t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

## Félszöges tangens helyettesítés geometriai levezetése



A  $k$  egységkör egyenlete a  $\xi\eta$  koordináta-rendszerben:

$$k : \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Az  $e$  egyenes átmegy a  $(-1; 0)$  ponton, meredeksége pedig  $t$ . Egyenlete:

$$e : \eta = t(\xi + 1).$$

Helyettesítsük be az egyenes egyenletét a kör egyenletébe:

$$\xi^2 + (t(\xi + 1))^2 = 1$$

Fejezzük ki a  $\xi$ , majd  $\eta$  koordinátákat a  $t$  függvényében!

$$0 = \xi^2 + t^2(\xi + 1)^2 - 1 = \xi^2 + t^2\xi^2 + 2t^2\xi + t^2 - 1 = (1 + t^2)\xi^2 + 2t^2\xi + t^2 - 1$$

Használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét!

$$\xi_{12} = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4(1 + t^2)(t^2 - 1)}}{2(1 + t^2)} = \frac{-t^2 \pm \sqrt{(t^4 - (t^4 - 1))}}{1 + t^2} = \frac{\pm 1 - t^2}{1 + t^2}$$

Az egyenlet egyik megoldásából visszakaphatjuk a  $(-1; 0)$  pontot:

$$\xi_1 = \frac{-1 - t^2}{1 + t^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \eta_1 = t(\xi_1 + 1) = t(-1 + 1) = 0.$$

A másik megoldásból pedig a  $(\xi_2; \eta_2)$  pontot:

$$\xi_2 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \rightarrow \quad \eta_2 = t(\xi_2 + 1) = t\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1\right) = t\left(\frac{1 - t^2 + 1 + t^2}{1 + t^2}\right) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

A kék háromszög alapján:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{t}{1} \quad \rightarrow \quad t = \tan \frac{x}{2}.$$

A piros háromszög alapján:

$$\sin x = \eta_2 = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \xi_2 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

A két háromszög bejelölt szögeinek aránya kerületi és középponti szögek tételéből következik, amely kimondja, hogy adott körben adott ívhez tartozó kerületi szög mindig fele az ívhez tartozó középponti szögnek.

**Félszöges tangens hiperbolikus helyettesítés:**

A trigonometrikus függvényekhez nagyon hasonló ez az eset is, viszont itt hiperbolikus ( $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ) függvényekből álló racionális törtfüggvényeket szeretnénk integrálni. A helyettesítés:

$$u = \tanh \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2 du}{1 - u^2}$$

Ilyen esetben a  $\sinh x$  és  $\cosh x$  hiperbolikus függvényeket a következő módon helyettesítjük:

$$\sinh x = \frac{2u}{1 - u^2} \quad \text{és} \quad \cosh x = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}.$$

Egy ilyen integrál általános alakja:

$$\int R(\sinh x; \cosh x) dx = \int R\left(\frac{2u}{1 - u^2}; \frac{1 + u^2}{1 - u^2}\right) \frac{2 du}{1 - u^2}.$$

**Félszöges tangens hiperbolikus helyettesítés levezetése:**

Használjuk az alábbi hiperbolikus azonosságokat:

$$\sinh x = 2 \sinh(x/2) \cosh(x/2),$$

$$\cosh x = \cosh^2(x/2) + \sinh^2(x/2),$$

$$1 = \cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2).$$

Ezek alapján a  $\sinh x$  és  $\cosh x$  hiperbolikus függvényeket a következő módon helyettesíthetjük:

$$\sinh x = \frac{\sinh x}{1} = \frac{2 \sinh(x/2) \cosh(x/2)}{\cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2)} = \frac{2 \tanh(x/2)}{1 - \tanh^2(x/2)} = \frac{2u}{1 - u^2},$$

$$\cosh x = \frac{\cosh x}{1} = \frac{\cosh^2(x/2) + \sinh^2(x/2)}{\cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2)} = \frac{1 + \tanh^2(x/2)}{1 - \tanh^2(x/2)} = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}.$$

Végül pedig  $u = \tanh(x/2)$  alapján:

$$x = 2 \operatorname{artanh} u \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{du} = \frac{2}{1 - u^2} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2 du}{1 - u^2}$$

**A koszekáns hiperbolikus integrálása:**

$$\int \operatorname{csch} x dx = \int \frac{1}{\sinh x} dx = \int \frac{1 - u^2}{2u} \frac{2 du}{1 - u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

## Félszöges tangens hiperbolikus helyettesítés geometriai levezetése



Az egységhiperbola egyenlete a  $\xi\eta$  koordináta-rendszerben:

$$h : \xi^2 - \eta^2 = 1.$$

Az  $e$  egyenes átmegy a  $(-1; 0)$  ponton, meredeksége pedig  $u$ . Egyenlete:

$$e : \eta = u(\xi + 1).$$

Helyettesítsük be az egyenes egyenletét a hiperbola egyenletébe:

$$\xi^2 - (u(\xi + 1))^2 = 1.$$

Fejezzük ki a  $\xi$ , majd  $\eta$  koordinátákat a  $u$  függvényében!

$$0 = \xi^2 - u^2(\xi + 1)^2 - 1 = \xi^2 - u^2\xi^2 - 2u^2\xi - u^2 - 1 = (1 - u^2)\xi^2 - 2u^2\xi - u^2 - 1$$

Használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét!

$$\xi_{12} = \frac{2u^2 \pm \sqrt{4u^4 + 4(1 - u^2)(u^2 + 1)}}{2(1 - u^2)} = \frac{u^2 \pm \sqrt{(u^4 + (1 - u^4))}}{1 - u^2} = \frac{\pm 1 + u^2}{1 - u^2}$$

Az egyenlet egyik megoldásából visszakaphatjuk a  $(-1; 0)$  pontot:

$$\xi_1 = \frac{-1 + u^2}{1 - u^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \eta_1 = u(\xi_1 + 1) = u(-1 + 1) = 0.$$

A másik megoldásból pedig a  $(\xi_2; \eta_2)$  pontot:

$$\xi_2 = \frac{1 + u^2}{1 - u^2} \quad \rightarrow \quad \eta_2 = u(\xi_2 + 1) = u\left(\frac{1 + u^2}{1 - u^2} + 1\right) = u\left(\frac{1 + u^2 + 1 - u^2}{1 - u^2}\right) = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

Hasonló háromszögek alapján:

$$u = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} = \tanh \frac{x}{2}.$$

Az egységhiperbola parametrikus egyenlete alapján:

$$\cosh x = \xi_2 = \frac{1 + u^2}{1 - u^2} \quad \text{és} \quad \sinh x = \eta_2 = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

$$\tanh \frac{x}{2} = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} \cdot \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{1 + (e^x + e^{-x})/2} = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x}$$

**Speciális helyettesítések összefoglaló:**

- $R(\sin x; \cos x)$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

- $R(\sinh x; \cosh x)$

$$u = \tanh \frac{x}{2} \quad dx = \frac{2 du}{1 - u^2} \quad \sinh x = \frac{2u}{1 - u^2} \quad \cosh x = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}$$

- $R(e^x; e^{2x}; \dots)$

$$t = e^x \quad dx = \frac{dt}{t}$$

- $R(x; \sqrt{1 - x^2})$

$$x = \sin t \quad t = \arcsin x \quad dx = \sqrt{1 - x^2} \cdot dt$$

$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

- $R(x; \sqrt{x^2 + 1})$

$$x = \sinh t \quad t = \operatorname{arsinh} x \quad dx = \sqrt{x^2 + 1} \cdot dt$$

$$1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

- $R(x^{a/c}; x^{b/c}; \dots)$

$$x = t^c \quad dx = c x^{1-1/c} dt$$

A  $t = \tan(x/2)$  és  $u = \tanh(x/2)$  helyettesítésekhez tartozó levezetéseket nem szükséges fejből tudni, csupán a megértés érdekében szerepelnek az elméleti áttekintőben.

## 11.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálok értékét! (Ajánlott módszer: parciális integrálás.)

a)  $\int x \cos x \, dx$

b)  $\int (x^2 - 1) \sin 3x \, dx$

c)  $\int \ln x \, dx$

d)  $\int x \arctan x \, dx$

e)  $\int e^x \sin x \, dx$

f)  $\int \sin^2 x \, dx$

g)  $\int e^{\arccos x} \, dx$

2. Integrálja az alábbi racionális törtfüggvényeket!

a)  $\int \frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 26}{x^2 - 7x + 12} \, dx$

b)  $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x - 2)^2} \, dx$

c)  $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 8} \, dx$

3. Határozza meg az alábbi integrálok értékét! (Ajánlott módszer: helyettesítéses integrálás.)

a)  $\int \frac{1}{5 + 3 \cos x} \, dx$

b)  $\int \frac{1}{1 + \cosh x + 2 \sinh x} \, dx$

c)  $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} \, dx$

d)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx$

e)  $\int \frac{e^x + 2}{e^x + e^{2x}} \, dx$