

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5*(0,1)) node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kiteintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q) + (1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Sorozatok BMETE94BG01 4

Matematika G1

Numerikus sorozatok I

Utoljára frissítve: 2024. október 01.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Sorozat**] A pozitív egész számok halmazán értelmezett $a_n : N \rightarrow$ függvényt **valós számsorozatnak** hívjuk.

Az $a_n : N \rightarrow C$ függvényt **komplex számsorozatnak** nevezzük.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Konvergencia**] Az (a_n) sorozatot konvergensnek mondjuk, ha $\exists a \in$ valós szám, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölése:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, ahol$$

asorozat határértéke.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Divergencia**] Az (a_n) sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 4: Torlódási pont**] Az (a_n) sorozatnak torlódási pontja van az $a \in$ pontban, ha az a tetszőlegesen kicsiny környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

[style=note, nobreak=true,] A sorozat határértéke egyben torlódási pont is, viszont egy torlódási pont nem feltétlenül határérték. Pl.: $a_n = (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja is van (-1 és 1), viszont egyik sem határérték, hiszen a sorozat divergens.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 5: Sorozat korlátossága**] Az (a_n) -t **alulról korlátosnak** nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n > k$, vagyis értékkészlete alulról korlátos.

Az (a_n) -t **felülről korlátosnak** nevezzük, ha $\forall n$ esetén $a_n < K$, vagyis értékkészlete felülről korlátos.

Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 6: Sorozat monotonitása**] Az (a_n) sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha $a_n \geq a_{n-1}$,
- monoton csökkenő, ha $a_n \leq a_{n-1}$,
- szigorúan monoton növekvő, ha $a_n > a_{n-1}$,
- szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n < a_{n-1}$.

[style=note, nobreak=true,] Konvergens sorozat mindig korlátos.

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Nevezetes határértékek:**

- $a^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
- $a^n \cdot n^k \rightarrow 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
- $a^n n! \rightarrow 0$
- $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$
- $(1 + r/n)^n \rightarrow e^r$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Dominancia elv:**

$$\log_n a < \sqrt[n]{a} < \log_a n < \sqrt[a]{n} < n < n^a < a^n < n! < n^n$$

[style=note, nobreak=true,] A dominancia elvet olyan esetekben érdemes használnunk, amikor egy

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}$$

alakú sorozat határértékét keressük, hiszen segítségével megállapíthatjuk, hogy a nevező vagy a számláló fog gyorsabban nőni.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white **Tétel 1: Rendőrelv**] Tegyük fel, hogy (a_n) , (b_n) és (x_n) sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq x_n \leq b_n : \forall n$ -re vagy $n > N_0$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, \text{ ekkor } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

0.2 Feladatok

1. A konvergencia definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e.

a) $a_n = |n + 13n - 8|$

b) $b_n = n \cdot (-1)^n - 12n$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = n^2 - 6n + 7n^2 + 12n + 49$

b) $b_n = 1 + 2 + 3 + \dots + nn + 2 - n2$

c) $c_n = (-2)^n + 3^n(-2)^{n+1} + 3^{n+1}$

d) $d_n = \sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}\sqrt[4]{5n^6 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3} + n!(n+1)! + 3^{2n}$

e) $e_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

f) $f_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$

3. Igazolja a rendőrelv segítségével, hogy $n3^n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

4. Határozza meg az alábbi határértékeket! 2

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n^2 - 30n - 21}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos n^3}{2n} - \frac{3n}{6n+1} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\ln n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n+5}$

5. Bizonyítsa be, hogy bármely $k \geq 0$ egész számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k.$$