13 Integrálás I

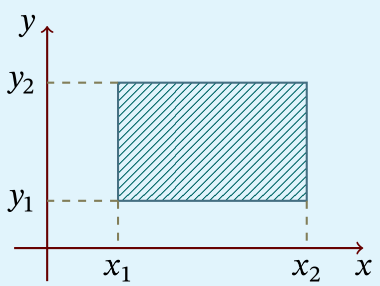
Matematika G2 – Többváltozós analízis

Utoljára frissítve: 2025. május 5.

13.1. Elméleti Áttekintő

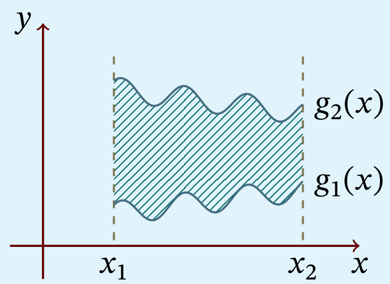
Integrálás téglatartományon:

Téglatartomány esetén az integrálás sorrendje tetszőleges.

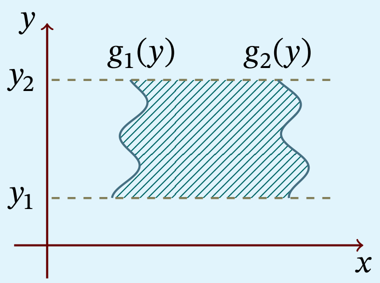


$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Integrálás normáltartományon:



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1^{-1}(y)}^{g_2^{-1}(y)} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1^{-1}(x)}^{g_2^{-1}(x)} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

13.2. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvények integrálját a megadott tégla tartományokon!

   a) $f(x;y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 \qquad 1 \le x \le 2 \qquad 0 \le y \le 3$

   b) $g(x;y) = xy\sin(x^2 + y^2) \qquad 0 \le x \le \pi/2 \qquad 0 \le y \le \pi/2$

   c) $h(x;y) = y\cos(2xy) \qquad 1 \le x \le 2 \qquad 1 \le y \le 3$

2. Határozza meg az alábbi hármasintergrált!

$$\int_1^2 \int_0^3 \int_0^1 z\,x\sqrt{x^2+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

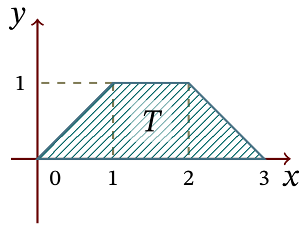
3. Határozza meg az alábbi integrálokat, majd írja fel az integrációs határokat, ha először az x, majd a y változó szerint integrálnánk!

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^{1/x} (2y+x+2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

4. Határozza meg az alábbi felületi integrálok értékét!

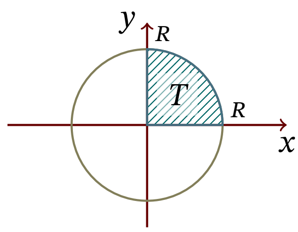
   a) $\displaystyle\iint_T x^2+y^2\,\mathrm{d}T$

   $T = \{(x;y) \mid 0 \le y \le 1 \ \wedge\ y \le x \le 3-y\}$



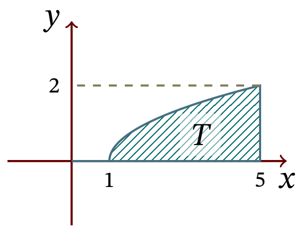
   b) $\displaystyle\iint_T xy\,\mathrm{d}T$

   $T = \left\{(x;y) \mid x^2+y^2 \le R^2 \ \wedge\ x;y \ge 0\right\}$



   c) $\displaystyle\iint_T y\,e^{(x-1)^2}\,\mathrm{d}T$

   $T = \left\{(x;y) \mid x \le 1+y^2 \ \wedge\ y \ge 0 \ \wedge\ x \le 5\right\}$



5. Adja meg az integrációs intervallumokat, ha az alábbi felületeken kell integrálni:

   a) R sugarú körfelület,

   b) ha az $x=0$, $y=x^2$ és $y=2-x$ görbék által határolt felület!

6. Adja meg a $f(x;y)=xy$ függvény a $P_1(1;1)$, $P_2(4;5)$ és $P_3(4;2)$ pontok által meghatározott háromszög terület fölötti integrálját!