2 Mátrixok II

Matematika G2 – Mátrixok

Utoljára frissítve: 2025. február 5.

2.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 2.1: Determináns és lineáris függetlenség

Definíció szerint a determináns értéke pontosan akkor zérus, ha sorvektroai lineárisan függetlenek. Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{array} \end{array}$$

Ha $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{w}$ lineárisan függetlenek, akkor $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Ha $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{w}$ lineárisan függőek, akkor $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Korábban 3 vektor lineáris függetlenségét a vegyesszorzat segítségével vizsgáltuk. 3×3-as mátrixok esetén a vegyesszorzat értéke megegyezik a vektorokból alkotott mátrix determinánsával.

Sarrus-szabály

A lineáris algebrában használt módszer, melynek segítségével könnyedén meghatározható egy 3×3-as négyzetes mátrix determinánsa. A szabály nevét Pierre Frédéric Sarrus francia matematikusról kapta.

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

$$\det \mathbf{M} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Definíció 2.2: Mátrix rangja

A mátrix rangja a mátrixból kiválasztható legnagyobb el nem tűnő (nem zérus) determinánsának rendje. A lineárisan független vektorok száma. Jele:

$$\operatorname{rg} \mathbf{A}$$

A mátrix rangja elemi mátrix átalakítások során nem változik.

Jó tudni!

- Ha $\det \mathbf{A} \neq 0$ négyzetes mátrix esetén, akkor a mátrix rangja maximális, azaz ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, akkor $\operatorname{rg} \mathbf{A} = n$,
- Ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$-es mátrix rangja maximális, akkor az m és az n közül a kisebbik érték a rang.
- Csak a nullmátrixnak lehet 0 rangja.

Mátrix rangjának meghatározása:

1. módszer: A mátrix rangjának meghatározása a mátrix determinánsának segítségével. **Csak négyzetes mátrixok esetén** Lépések:

1. **Négyzetes részmátrixok kiválasztása:**
   - A mátrix rangját a legnagyobb olyan négyzetes részmátrix mérete határozza meg, amelynek a determinánsa nem nulla.
2. **Determináns kiszámítása:**
   - Számítsd ki az összes lehetséges négyzetes részmátrix determinánsát.
   - Keress egy olyan $k \times k$ méretű részmátrixot, amelyre $\det \neq 0$.
3. **Legnagyobb k-érték meghatározása:**
   - A mátrix rangja megegyezik a legnagyobb olyan k-val, amelyre létezik egy $k \times k$ részmátrix, amelynek determinánsa nem nulla.

2. módszer: A mátrix rangjának meghatározása a mátrix sorai és oszlopai alapján

1. **Elemi mátrixműveletek alkalmazása:**
   - A mátrixon végezhető műveletek: Sorok/oszlop összeadása, szorzása egy nem nulla skalárral.
2. **A mátrix átalakítása egyszerűsített alakra:**
   - Az a cél, hogy a mátrixot olyan alakra hozzuk, amelyben, minden sorban és oszlopban legfeljebb egy 1-es szerepel.
3. **A mátrix rangjának meghatározása:**
   - A mátrix rangja megegyezik az egyszerűsített alakban lévő 1-esek számával.

Definíció 2.3: Mátrix inverz

A lineáris algebrában egy $n \times n$-es (négyzetes) $\mathbf{A}$ mátrix **invertálható**, **reguláris**, **nem-elfajuló** vagy **nem szinguláris**, ha létezik egy olyan $n \times n$-es $\mathbf{B}$ mátrix, melyre igaz:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n,$$

ahol $\mathbf{I}_n$ az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli, és a szorzás a szokásos mátrixszorzás. Ebben az esetben a $\mathbf{B}$ mátrixot egyértelműen meghatározza a $\mathbf{A}$ mátrix, és $\mathbf{A}$ mátrix **inverzének** hívják, melyet $\mathbf{A}^{-1}$-gyel jelölünk.

Igazolható, hogy ha a $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ négyzetes mátrixokra $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ is teljesül.

A nem invertálható négyzetes mátrixot **szingulárisnak** vagy **degeneráltnak** nevezzük. Ebben az esetben a determináns értéke nulla:

$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$

A mátrixban lévő elemek többnyire valós vagy komplex számok, de a definíciók gyűrű fölötti mátrixokra is érvényesek.

Mátrix inverz meghatározása:

1. módszer - definíció alapján: Az inverz meghatározása a mátrix determinánsának segítségével.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

2. módszer - Gauss-Jordan módszer: Az inverz meghatározása a mátrix sorai és oszlopai alapján

1. **Mátrix előkészítése:** Írd fel a mátrixot bővített alakban.
2. **Főelemek kiválasztása:**
   - Az aktuális főelemet állítsd 1-re (osztással).
   - Nullázd ki az oszlop többi elemét (fölötte és alatta).
3. **Redukált lépcsős alak (Row echelon form):** Ismételd a fenti lépéseket, amíg minden oszlopban lépcsőzetesen emelkedő 1-eseket kapsz.
4. **Megoldás:** A rangot vagy az egyenletrendszer megoldását a mátrix egyszerűsített alakjából olvasd ki.

2.2. Feladatok

1. Egy síkon vannak-e az $A(2,3,-4)$, $B(3,-1,-6)$, $C(-1,5,2)$ és $D(2,1,-4)$ pontok?

2. Számolja ki azalábbi mátrixok determinánsát Sarrus-szabállyal!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \\ 7 & 9 & -8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Adja meg az azalábbi mátrixok rangját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Vizsgálja az **A** mátrix rangját x függvényében!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ x & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Milyen k érték esetén lesz invertálható az alábbi mátrix?

$$\begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{bmatrix}$$

7. Oldja meg az alábbi mátrix egyenletét!

$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ -3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & y \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 8 \\ w & 3 \end{bmatrix}$$

8. Adottak az **A**, **B** és **C** mátrixok. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{C} = 2\mathbf{B}\mathbf{C}\boldsymbol{x}$$

9. Számítsa ki az alábbi, komplex elemű mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$$