

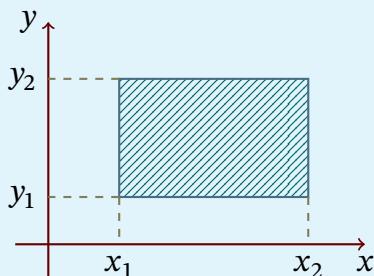
**13****Integrálás I**

Matematika G2 – Többváltozós analízis

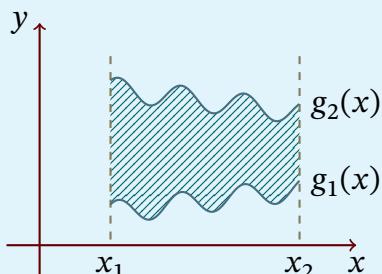
Utoljára frissítve: 2025. április 22.

**13.1. Elméleti Áttekintő****Integrálás téglatartományon:**

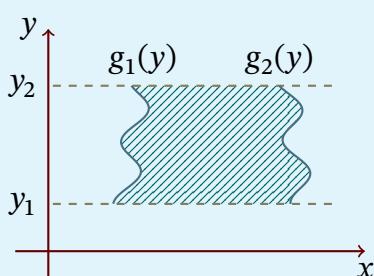
Téglatartomány esetén az integrálás sorrendje tetszőleges.



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x; y) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x; y) dx dy$$

**Integrálás normáltartományon:**

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy dx = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1^{-1}(y)}^{g_2^{-1}(y)} f(x; y) dx dy$$



$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x; y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1^{-1}(x)}^{g_2^{-1}(x)} f(x; y) dy dx$$

## 13.2. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi függvények integrálját a megadott téglalap tartományokon!

a)  $f(x; y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 \quad 1 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 3$

b)  $g(x; y) = xy \sin(x^2 + y^2) \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \quad 0 \leq y \leq \pi/2$

c)  $h(x; y) = y \cos(2xy) \quad 1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq y \leq 3$

2. Határozza meg az alábbi hármasintergrált!

$$\int_1^2 \int_0^3 \int_0^1 z x \sqrt{x^2 + y} \, dx \, dy \, dz$$

3. Határozza meg az alábbi integrálokat, majd írja fel az integrációs határokot, ha először az  $x$ , majd a  $y$  változó szerint integrálnánk!

a)  $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$

b)  $\int_1^3 \int_0^{1/x} (2y + x + 2) \, dy \, dx$

4. Határozza meg az alábbi felületi integrálok értékét!

a)  $\iint_T x^2 + y^2 \, dT$

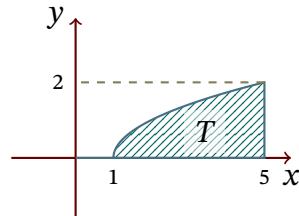
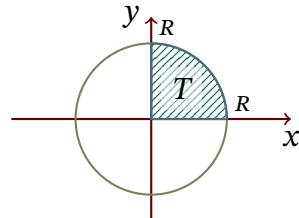
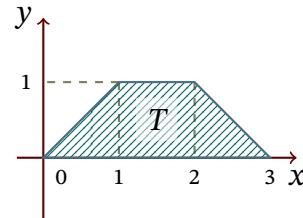
$$T = \{(x; y) \mid 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 3 - y\}$$

b)  $\iint_T xy \, dT$

$$T = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge x; y \geq 0\}$$

c)  $\iint_T y e^{(x-1)^2} \, dT$

$$T = \{(x; y) \mid x \leq 1 + y^2 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 5\}$$



5. Adja meg az integrációs intervallumokat, ha az alábbi felületeken kell integrálni:

a)  $R$  sugarú körfelület,

b) ha az  $x = 0$ ,  $y = x^2$  és  $y = 2 - x$  görbék által határolt felület!

6. Adja meg a  $f(x; y) = xy$  függvény a  $P_1(1; 1)$ ,  $P_2(4; 5)$  és  $P_3(4; 2)$  pontok által meghatározott háromszög terület fölötti integrálját!