

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5*(0,1)) node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekindő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Kalkulus BMETE94BG01 7

Matematika G1

Differenciálás I

Utoljára frissítve: 2024. október 19.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white] **Definíció 1: Differenciálhányados**
[Ha létezik és véges a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték, akkor azt az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának, vagy az a pontbeli deriváltjának mondjuk.

Jelölése:

$$f'(a) \quad \text{vagy} \quad f'(a)x.$$

[style=note, nobreak=true,] A differenciálhányados létezésének **szükséges feltétele**, hogy az f függvény **foltyonos** legyen az a pontban.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Fontosabb függvények és deriváltjaik:**

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$1/x$	$\log_a x$	$1/x \ln a$	$\sqrt[n]{x}$	$x^{1/n-1} \cdot 1/n$

[style=note, nobreak=true,] A konstans függvény deriváltja zérus.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Trigonometrikus függvények és deriváltjaik:**

[ultra thick, scale=.85] [gray, thick]
 (-2.75,0)–(3,0); [gray, thick]
 (0,-2.75)–(0,3);
 (0,0) circle [radius=2.5];
 [primaryColor] (0,0)–(40:4);
 [draw=secondaryColor] (40:2.5) –
 (40:2.5 |- 0,0) coordinate (t) node[left,
 pos=.7] $\sin x$;
 [draw=secondaryColor] (t) – (0,0)
 node[below, midway] $\cos x$;
 [draw=secondaryColor] (0:2.5) –
 ++(0,2.08) coordinate (t) node[right,
 midway] $\tan x$;
 [draw=secondaryColor] (90:2.5) –
 ++(3,0) coordinate (t) node[above,
 midway] $\cot x$;

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$1\sqrt{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-1\sqrt{1-x^2}$
$\tan x$	$1\cos^2 x$	$\arctan x$	$11+x^2$
$\cot x$	$-1\sin^2 x$	x	$-11+x^2$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hiperbolikus függvények és deriváltjaik:**

[ultra thick, scale=.85] [gray,
 thick] (-2.75,0)–(2.75,0); [gray,
 thick] (0,-2.75)–(0,2.75);
 [gray, dashed, thick] (2.5, 2.5)
 – (-2.5, -2.5); [gray, dashed,
 thick] (2.5, -2.5) – (-2.5, 2.5);
 [domain=0:1.5] plot (cosh(),
 sinh()); [domain=0:1.5] plot
 (cosh(), -sinh());
 [domain=0:1.5] plot (-cosh(),
 sinh()); [domain=0:1.5] plot
 (-cosh(), -sinh());
 [draw=secondaryColor] (0,
 1.175) – (1.543, 1.175) node
 [midway, above] $\cosh x$ –
 (1.543, 0) node [midway,
 right] $\sinh x$;

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$	x	$1\sqrt{x^2+1}$
$\cosh x$	$\sinh x$	x	$1\sqrt{x^2-1} \quad (x > 1)$
$\tanh x$	$1\cosh^2 x$	x	$11-x^2 \quad (x < 1)$
$\coth x$	$-1\sinh^2 x$	x	$11-x^2 \quad (x > 1)$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Hiperbolikus azonosságok:** $9 \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x =$

$$\sinh x = -\sin(x)$$

$$\cosh x = \cos(x)$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Műveleti szabályok:**

$$\text{Konstans kiemelhető} \quad (cf)' = c f' \quad \text{lex} \quad x(cf) = c f x$$

$$\text{Összeg- és különbségfüggvény} \quad (f \pm g)' = f' \pm g' \quad x(f \pm g) = f x \pm g x$$

$$\text{Szorzatfüggvény} \quad (fg)' = f'g + fg' \quad x(fg) = f x g + f g x$$

$$\text{Hányadosfüggvény} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad x\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f x g - f g x}{g^2}$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Láncszabály:**

A láncszabály segítségével összetett függvényeket tudunk differenciálni. Az összefüggést három különböző jelölésmóddal is felírhatjuk:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{vagy} \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad \text{vagy} \quad f(g)x = f(g)g \cdot gx$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Elemi átalakításos módszer:**

Előfordulhat olyan eset, hogy $(f(x))^{g(x)}$ alakú függvényeket kell differenciálni. Ebben az esetben az alábbi átalakítást alkalmazzuk:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Az $e^{g(x) \ln f(x)}$ függvény deriváltja a láncszabály segítségével: $((f(x))^{g(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)})'$
 $= e^{g(x) \ln f(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$
 $= (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$

[style=note, nobreak=true,] Határozzuk meg az $\ln^x x$ függvény deriváltját!

Az $\ln^x x$ függvényt $e^{x \ln \ln x}$ alakra hozva, a láncszabály segítségével differenciálható:
 $(\ln^x x)' = (e^{x \ln \ln x})'$
 $= e^{x \ln \ln x} \left(\ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right)$
 $= \ln^x x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right).$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Geometriai alkalmazás:**

Az f függvény a pontbeli **érintőjének egyenlete** onnan következik, hogy $f' = m$, ahol m a meredekséget jelöli, az $y = m \cdot x + b$ egyenes egyenletéből levezetve:

$$f(a) = f'(a) \cdot a + b \quad \rightarrow \quad b = f(a) - f'(a) \cdot a,$$

és mivel $(a; f(a)) \in y = m \cdot x + b$

↓

$y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$ Ebből átalakítva:

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

Az $(a; f(a))$ pontbeli **normális egyenlete**: $M = -1 \frac{1}{f'(a)}, \quad s \quad (a; f(a)) \in y = M \cdot x + B, y = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a).$

0.2 Feladatok

1. A differenciálhányados definíciója segítségével határozza meg az $f(x) = x^n$ függvény deriváltját az $x = x_0$ pontban!
2. Differenciálhatóak-e az alábbi függvények az $x_0 = 0$ pontban? 2
 - a) $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$
 - b) $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^3 + x + 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$
3. Adjon példát olyan függvényekre, melyek $\forall x \in \text{valós számra}$ értelmezve vannak és teljesül, hogy ...
 - a) f mindenhol folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható,
 - b) f mindenhol differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos,
 - c) f mindenhol differenciálható és f' is folytonos,
 - d) f mindenhol differenciálható, de f' az $x_0 = 0$ pontban nem az.
4. Mutassa meg, hogy az alábbi függvényre igaz, hogy bár differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, viszont létezik az x_0 tetszőlegesen kis környezetében olyan pont, ahol nem differenciálható.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin 1/x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

5. Differenciálja az alábbi függvényeket!
 - a) $f(x) = (6x^7 + 7x^4 + 2x^2)^5 + \sin^2 x + \cos^2 x$
 - b) $g(x) = \ln x \cdot e^x + x^2 \cot x + x^{-1/3}$
 - c) $h(x) = \frac{(3x + x^2) \cdot \sinh x \cdot \arctan x}{(1 + \cos x) \cdot \pi}$
 - d) $i(x) = \sqrt[3]{\ln \cos^2 x^4}$
 - e) $j(x) = \ln \arcsin \sqrt{\frac{x^2 + 3}{e^{2x}}}$
 - f) $k(x) = x^x$
 - g) $l(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$
6. Határozza meg az alábbi függvények n -edik deriváltját! 2

a) $f(x) = x^m$

b) $g(x) = \sin x$

7. Írja fel az $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{x} - 32x^2$ függvény $x_0 = 1$ pontban lévő érintő egyenesének egyenletét! Adja meg az érintőre merőleges egyenes egyenletét is!
8. Határozza meg azon pontok halmazát, melyekben az $x^2 + y^2 = 25$ kör érintője párhuzamos a $3x - 4y + 7 = 0$ egyenessel.