

8

Taylor-sorok

Matematika G2 – Valós analízis

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

8.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 8.1: Taylor-polinom

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely az x_0 pontban legalább p -szer differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli p -edik Taylor-polinomja:

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Tétel 8.1: Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal

Ha az f függvény legalább $(r+1)$ -szer differenciálható az $(x; x_0)$ intervallumon és $f^{(k)} \forall k \in \{1; 2; \dots; r\}$ esetén folytonos az x és x_0 pontokban, akkor $\exists \xi \in (x; x_0)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - x_0)^{r+1}}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}$$

Definíció 8.2: Taylor-sor

Legyen az f függvény az x_0 pontban akárhányszor differenciálható. Ekkor a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 körüli Taylor-sorának nevezzük.

Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sort Maclaurin-sornak nevezzük.

Írjuk fel a $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ függvény $x_0 = 1$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

| $p^{(n)}(x)$ | $p^{(n)}(1)$ |
|-------------------------|--------------|
| $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ | 6 |
| $p'(x) = 3x^2 + 6x$ | 9 |
| $p''(x) = 6x + 6$ | 12 |
| $p'''(x) = 6$ | 6 |

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{6}{0!} + \frac{9}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \\ &= 6 + 9(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát!

| $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|--------------------|--------------|
| $f(x) = e^x$ | 1 |
| $f'(x) = e^x$ | 1 |
| \vdots | \vdots |
| $f^{(k)}(x) = e^x$ | 1 |

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclaurin-sorát!

| $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|---------------------|--------------|
| $f(x) = \sin x$ | 0 |
| $f'(x) = \cos x$ | 1 |
| $f''(x) = -\sin x$ | 0 |
| $f'''(x) = -\cos x$ | -1 |
| \vdots | \vdots |

$$T(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Fontosabb függvények Maclaurin-sorai:

| Függvény | Taylor-sor | Konvergencia intervallum |
|---------------------------|---|--------------------------|
| e^x | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ | \mathbb{R} |
| $\sin x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | \mathbb{R} |
| $\cos x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ | \mathbb{R} |
| $\arctan x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ | $[-1; 1]$ |
| $\sinh x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | \mathbb{R} |
| $\cosh x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ | \mathbb{R} |
| $\operatorname{artanh} x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ | $(-1; 1)$ |
| $\ln(1+x)$ | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ | $(-1; 1]$ |
| $(1+x)^\alpha$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ | $(-1; 1)$ |

8.2. Feladatok

1. Írja fel a $p(x) = (1 + x)^3$ függvény Maclauren-sorát!
2. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli Taylor-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$f(x) = (1 - x)^3, \quad x_0 = 1$$

$$g(x) = e^x, \quad x_0 = 1$$

$$h(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$$

3. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$f(x) = \cos 5x$$

$$g(x) = \sin \sqrt{x}$$

$$h(x) = \sin^2 x$$

$$i(x) = \sqrt[3]{\exp(-x^2)}$$

4. Adja meg az alábbi törtfüggvények Taylor-sorát!

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad x_0 = -2$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad x_0 = -1$$

5. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 2$ pontra illeszkedő Taylor sorát! Mi lesz a konvergenciasugar?

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

6. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$g(x) = \arctan x$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$$

7. Melyik függvény Taylor-sora az alábbi?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$$

8. Hányadfokú Taylor polinom közelíti a $\sin(\pi/60)$ értékét 4 tizedesjegy pontossággal?
9. Számítsa ki 3 tizedesjegy pontossággal az alábbi integrált!

$$\int_0^{0,2} e^{2x} dx$$