

5

Integrálátalakító tételek, mérnöki példák

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utóljára frissítve: 2025. október 04.

5.1. Elméleti áttekintő

Tétel 5.1 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{C} \subseteq U$, $t \mapsto \gamma(t)$ folytonos görbe, $\gamma(a) = \mathbf{p}$, $\gamma(b) = \mathbf{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

Körintegrál jelölése:

Ha γ zárt görbe, akkor a $\varphi(\mathbf{r})$ skalármező egy γ görbe mentén vett körintegrálja a következőképpen jelölhető:

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi(\mathbf{r}) ds.$$

A Gradiens-tételből következik, hogy skalárpotenciális vektormező zárt görbe mentén vett körintegrálja zérus.

Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\hat{\mathbf{i}} + (x+z)\hat{\mathbf{j}} + (x+y)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt a $z = 0$ síkon lévő, origó középpontú, $r = 3$ sugarú kör mentén!

Vizsgáljuk meg, hogy a vektormező skalárpotenciális-e:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x(x+z) - \partial_y(y+z) \\ \partial_y(x+y) - \partial_z(x+z) \\ \partial_z(y+z) - \partial_x(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Mivel a vektormező skalárpotenciális, ezért létezik olyan skalármező, melynek gradiense maga a \mathbf{v} vektormező. Az integrál értéke tehát csak a kezdő- és végpontoktól függ, melyek jelen esetben megegyeznek, vagyis az integrál értéke zérus:

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = 0.$$

Tétel 5.2 : Stokes-tétel

Legyen $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ irányított, parametrizált, elemi felület. Legyen továbbá $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje az $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ a φ peremét indukált, jobbkézszabály szerinti irányítással. Ekkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle.$$

Ha \mathbf{v} skalárpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$.

Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y)\hat{\mathbf{i}} + (x)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt a $P_1(0; 1; 0)$, $P_2(2; 0; 0)$ és $P_3(0; 0; 0)$ által meghatározott háromszög mentén!

Határozzuk meg a \mathbf{v} vektormező rotációját:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

A Stokes-tétel alapján:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{0}; d\mathbf{S} \rangle = 0.$$

Stokes-tétel Maxwell III. és IV. egyenletében

A Stokes-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. A harmadik és negyedik egyenlet a mágneses tér és az elektromos tér közötti kapcsolatot írja le:

$$\begin{aligned} (III) \quad &\Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} &&\Rightarrow \quad \text{elektromos tér – mágneses tér változása,} \\ (IV) \quad &\Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} &&\Rightarrow \quad \text{mágneses tér – elektromos tér változása,} \end{aligned}$$

ahol \mathbf{E} az elektromos tér, \mathbf{B} a mágneses tér, \mathbf{j} az áram sűrűség, μ_0 a mágneses permeabilitás és ε_0 az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Stokes-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} (III) \quad &\Rightarrow \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{r} \rangle = - \iint_{\mathcal{S}} \langle \dot{\mathbf{B}}; d\mathbf{S} \rangle, \\ (IV) \quad &\Rightarrow \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} \langle \mathbf{B}; d\mathbf{r} \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \langle \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}; d\mathbf{S} \rangle. \end{aligned}$$

A III. egyenlet azt mondja ki, hogy változó mágneses tér maga körül balkézszabály szerint elektromos teret indukál, míg a IV. egyenlet azt jelenti, hogy az elektromos tér változása jobbkézszabály szerint mágneses teret indukál.

5.2. Feladatok

- Adott egy $\mathbf{F}(x; y) = (2xy)\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + 2y)\hat{\mathbf{j}}$ erőter. Vizsgálja meg, hogy az \mathbf{F} erőter konzervatív-e! Amennyiben igen, adja meg egy olyan potenciálfüggvényt, melyre $\varphi(0; 0) = 0$. Számítsa ki a $P_1(0; 0)$ és $P_2(1; 1)$ pontok közötti egyenes szakaszon végzett munkát!
- Egy $Q = 8,85\pi$ mC nagyságú ponttöltés közelében az elektrosztatikus térerősséget az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

vektormező írja le. Mutassa meg, hogy az \mathbf{E} vektormező konzervatív, és vezesse le a potenciálfüggvényt $\varphi(\infty) = 0$ határfeltétel mellett! Számítsa ki a $q = 1 \mu\text{C}$ próbatöltés által a $P_1(1; 0; 0)$ és $P_2(2; 0; 0)$ pontok között végzett munkát, ha $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$.

- Egy nagyon hosszú, áramjárta vezető belsejében a mágneses indukció jó közelítéssel lineárisan változik a keresztmetszetben:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (ky)\hat{\mathbf{i}} + (-kx)\hat{\mathbf{j}} + (0)\hat{\mathbf{k}}$$

Igazolja, hogy a \mathbf{B} vektormező forrásmentes, majd adja meg a \mathbf{B} vektormező vektorpotenciálját $\mathbf{A} = (A_x; A_y; 0)$ alakban, melyre $\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ teljesül. Mi k mértékegysége?

- Egy $R = 1$ sugarú, kör keresztmetszetű, z tengellyel egybeeső szimmetriavonalú hengerben áramló folyadék sebességét a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy + z)\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z)\hat{\mathbf{j}} + (y - x)\hat{\mathbf{k}}$$

vektormező írja le. Adja meg a $z = 1$ síkban lévő keresztmetszet menti cirkulációt! (A cirkuláció a vektormező zárt görbe menti integrálja.)

- Jelölje \mathcal{S} az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ egyenletű forgáshiperboloid $z = -1$ és $z = 1$ síkok közötti részét. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2)\hat{\mathbf{i}} + (y^3)\hat{\mathbf{j}} + (z^4)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező \mathcal{S} peremén vett integrálját!
- Integrálja a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2)\hat{\mathbf{i}} + (z^2)\hat{\mathbf{j}} + (x^2)\hat{\mathbf{k}}$ vektormezőt az $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ és $C(0; 0; 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög vonal mentén!