

4.1. Felszín

a) $z = x^2 + y^2$ forgáspároloid $z = 1$ és $z = 4$ síkok közé eső része

A megadott forgáspároloid az $z = f(x) = x^2$ függvény z tengely körüli forgatásával kapott felület, paraméterezése tehát:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} s \cos t \\ s \sin t \\ s^2 \end{bmatrix}, \quad s \in [1; 2], \quad t \in [0; 2\pi].$$

A parciális deriváltak, és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2s \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t \\ s \end{bmatrix}.$$

A keresett felszín:

$$\begin{aligned} A &= \int_S dS = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \|\mathbf{n}\| dt ds = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4s^4 + s^2} dt ds \\ &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{4s^4 + s^2} ds = 2\pi \int_1^2 s \sqrt{4s^2 + 1} ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{8} \sqrt{u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{\pi(4s^2 + 1)^{3/2}}{6} \right]_1^2 = \frac{\pi}{6} \cdot (17^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 4,9094 \end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{\varrho}(s; t) = (e^s \cos t) \hat{\mathbf{i}} + (e^s \sin t) \hat{\mathbf{j}} + (s) \hat{\mathbf{k}}, s \in (-\infty; 0], t \in [0; 2\pi]$

A parciális deriváltak, és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} e^s \cos t \\ e^s \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -e^s \sin t \\ e^s \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -e^s \cos t \\ -e^s \sin t \\ e^{2s} \end{bmatrix}$$

A keresett felszín:

$$\begin{aligned} A &= \int_S dS = \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2s} + e^{4s}} dt ds = 2\pi \int_{-\infty}^0 e^s \sqrt{1 + e^{2s}} ds \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du = 2\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 v dv = 2\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \frac{1 + \cosh 2v}{2} dv \\ &= 2\pi \left[\frac{v}{2} + \frac{\sinh 2v}{4} \right]_0^{\operatorname{arsinh} 1} = \pi(\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}) \approx 7,2118 \end{aligned}$$

4.2. Skalármező felületi integrálja

a) $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$, az egységgömb $z > 0$ részén

Az egységgömb paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s; t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \quad s \in [0; \pi/2], \quad t \in [0; 2\pi], \quad \mathbf{n} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| = \sin s.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\varphi(s; t) = (\sin s \cos t)^2 + (\sin s \sin t)^2 = \sin^2 s (\cos^2 t + \sin^2 t) = \sin^2 s$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \varphi(\mathbf{r}) dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 s \sin s dt ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 s) \sin s ds \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - u^2) du = 2\pi \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

b) $\psi(\mathbf{r}) = x + y + z$, az $2x + 2y + z = 4$ sík első tényolcadba tartozó részén

Rendezzük a sík egyenletét $z = 4 - 2x - 2y$ alakra.

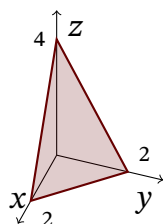
A felületi normális nagysága:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

A függvény átparaméterezése:

$$f(x; y; z(x; y)) = x + y + 4 - 2x - 2y = 4 - x - y$$

A tartomány paraméterezése:



$$y \in [0; 2]$$

$$x \in [0; 2 - y]$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \psi(\mathbf{r}) dS &= \int_0^2 \int_0^{2-y} 3(4 - x - y) dx dy = \int_0^2 \left[(12 - 3y)x - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{2-y} dy \\ &= \int_0^2 (12 - 3y)(2 - y) - \frac{3(2 - y)^2}{2} dy \\ &= \int_0^2 24 - 18y + 3y^2 - 6 + 6y - \frac{3y^2}{2} dy \\ &= \int_0^2 18 - 12y + \frac{3y^2}{2} dy = \left[18y - 6y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_0^2 = 36 - 24 + 4 = 16. \end{aligned}$$

4.3. Vektormező skalárértékű felületi integrálja

a) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x+y)\hat{\mathbf{i}} + (x-y)\hat{\mathbf{j}} + (z^2)\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{g}(s;t) = (s+t)\hat{\mathbf{i}} + (s-t)\hat{\mathbf{j}} + (s^2-t^2)\hat{\mathbf{k}}, (s;t) \in [0;1]^2$

A parciális deriváltak és a felületi normális:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2s \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 2(s-t) \\ 2(s+t) \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\mathbf{u}(\mathbf{g}(s;t)) = \begin{bmatrix} 2s \\ 2t \\ (s^2-t^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ 2t \\ s^4 - 2s^2t^2 + t^4 \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} 2s \\ 2t \\ s^4 - 2s^2t^2 + t^4 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 2(s-t) \\ 2(s+t) \\ -2 \end{bmatrix} ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (4s^2 + 4t^2 - 2s^4 + 4s^2t^2 - 2t^4) ds dt \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{9} - \frac{2}{5} = \frac{104}{45} \approx 2,3111 \end{aligned}$$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 + z^2)\hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z^2)\hat{\mathbf{j}} + (x^2 + y^2)\hat{\mathbf{k}}, r = 2$ sugarú, $x = 2$ síkon lévő körön

A felület paraméterezése és a felületi normális:

$$\mathbf{g}(s;t) = \begin{bmatrix} 2 \\ s \cos t \\ s \sin t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s \in [0;2], \\ t \in [0;2\pi], \end{matrix} \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -s \sin t \\ s \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\mathbf{v}(\mathbf{g}(s;t)) = \begin{bmatrix} s^2 \cos^2 t + s^2 \sin^2 t \\ 4 + s^2 \cos^2 t \\ 4 + s^2 \sin^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 \\ 4 + s^2 \cos^2 t \\ 4 + s^2 \sin^2 t \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \begin{bmatrix} s^2 \\ 4 + s^2 \cos^2 t \\ 4 + s^2 \sin^2 t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 s^3 ds dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 2^4 dt \\ &= 8\pi \approx 25,1327 \end{aligned}$$

4.4. Vektormező vektorértékű felületi integrálja

Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x)\hat{\mathbf{i}} + (-y)\hat{\mathbf{j}} + (z)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező $\boldsymbol{\varrho}(s; t) = (s + 2t)\hat{\mathbf{i}} + (t)\hat{\mathbf{j}} + (s - t)\hat{\mathbf{k}}$, $s \in [0; 3]$, $t \in [0; 1]$ felületen vett vektorértékű integrálját! A normális irányítottsága legyen kifelé mutató!

A parciális deriváltak és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s; t)) = \begin{bmatrix} s + 2t \\ -t \\ s - t \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^3 \begin{bmatrix} s + 2t \\ -t \\ s - t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ds dt = \int_0^1 \int_0^3 \begin{bmatrix} 2t - 3s \\ -t - 2s \\ 5t + 3s \end{bmatrix} ds dt \\ &= \begin{bmatrix} 2(1/2)3 - 3(9/2) \\ -(1/2)3 - 2(9/2) \\ 5(1/2)3 + 3(9/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21/2 \\ -21/2 \\ 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$