13 Differenciálegyenlet-rendszerek I

Matematika G3 – Differenciálegyenletek
Utoljára frissítve: 2025. november 29.

13.1. Elméleti áttekintő

Euler-féle differenciálegyenletek

Áltanos alak:

$$a_n y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_{n-2}}{x^2} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = f(x)$$

A differenciálegyenlet $x = 0$-ban nincs értelmezve, $x > 0$, vagy $x < 0$ intervallumon lehet megoldani.

Megoldási módszer: $x = e^t$ helyettesítés, majd konstans együtthatós differenciálegyenlet megoldása:

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\dot{y}}{e^t}, \quad y'' = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^{2t}}, \quad \ldots.$$

Másodrendű, változó együtthatós, lineáros differenciálegyenletek

Áltanos alak:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Megoldási módszer: Ha ismerjük az egyik megoldást (y_1), akkor a másik (y_2) megolddás konstans variációs módszerrel határozható meg:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

y_1 és y_2 lineárisan függetlenségét a Wronski-determináns segítségével ellenőrizni kell.

Állandó együtthetós, lineáris, homogén, elsőrendű DE-rendszerek

Áltanos alak:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{x},$$

ahol $\mathbf{A}$ egy kvadratikus mátrix, $\boldsymbol{x}$ pedig az ismeretlenek vektora, t pedig a független változó (általában idő).

Megoldási módszer:

1. Határozzuk meg a mátrix sajátértékeit az $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$ karakterisztikus egyenlet segítségével.

2. Határozzuk meg a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat a $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{E})\boldsymbol{v}_i = 0$ egyenlet segítségével.

3. Az alaphalmaz ekkor:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

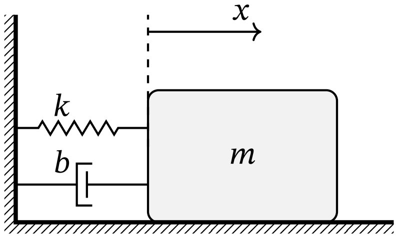
4. Az általános megoldás:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{X}(t)\,\boldsymbol{C} = C_1\,\boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\,\boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n\,\boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

13.2. Feladatok

1. Egy 6 m hosszú lánc súrlódásmentesen csúszik az asztalon. Ha a csúszás akkor következik be, amikor 1 m-nyi lánc lóg lefelé, akkor mennyi idő múlva esik le a lánc?

2. Írja fel az alábbi rezgőrendszer mozgásegyenletét, ha a rugóerő az $F_r = kx$ Hooke-törvény szerint, a csillapító erő pedig $F_c = bv$ alakú, ahol k a rugóállandó, b a csillapítási tényező, x a kitérés, v a sebesség. A test tömege m.



3. Adja meg az alábbi Euler-féle differenciálegyenlet megoldását!

$$y'' - \frac{3}{x}y' + 20\frac{y}{x^2} = 0 \quad y(1) = 2 \quad y'(1) = 0$$

4. Az $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ differenciálegyenleteit $y_1(x) = x$ megoldás ismeri. Adja meg az általános megoldást!

5. Az $xy'' - (1 + x)y' + y = 0$ differenciálegyenleteit $y_1(x) = e^x$ megoldás ismeri. Adja meg az általános megoldást!

6. Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y & \qquad x(0) = 0 \\ \dot{y} = 3x + 4y & \qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

7. Adja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$$

8. Adja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

9. Adja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$