

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=
let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5*(0,1)) node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Integrálszámítás BMETE94BG01 11

Matematika G1

Integrálszámítás II

Utoljára frissítve: 2024. november 04.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] A **parciális integrálás** módszerének bevezetéséhez írjuk fel két függvény szorzatának deriváltját:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integráljuk x szerint az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' x = \int f'(x) \cdot g(x) x + \int f(x) \cdot g'(x) x.$$

Az integrálás és a deriválás műveletei egymás inverzei, így az egyenlet bal oldala az alábbi alakot ölti:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) x + \int f(x) \cdot g'(x) x$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$\int f(x) \cdot g'(x) x = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) x.$$

Amennyiben bevezetjük az $f(x) = u$, $g(x) = v$, $u = ux$, $v = vx$ jelöléseket, akkor megkapjuk a parciális integrálás egy másik gyakran használt alakját:

$$\int uv = uv - \int vu.$$

[style=note, nobreak=true,] A parciális integrálás módszerét az alábbi esetekben érdemes alkalmazni:

- polinom és trigonometrikus/exponenciális függvény szorzatának integrálása:

$$\int x \sin xx, \quad \int x \cos xx, \quad \int x e^x x,$$

- exponenciális és trigonometrikus függvények szorzatának integrálása:

$$\int e^x \sin xx, \quad \int e^x \cos xx,$$

- logaritmus függvények integrálása,
- egyéb esetek, ahol egy szorzatfüggvényt kell integrálni.

[style=blueBox, nobreak=true,] Egy **racióális törtfüggvény** polinomok hányadosaként áll elő. Általános alakja:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Amennyiben a nevező fokszáma kisebb, mint a számlálóé, vagyis $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, akkor a **polinomosztás** módszeréhez kell folyamodnunk, mely elvégzése után a törtfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$R(x) = T(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

hol $T(x)$ egy újabb polinom, $S(x)$ fokszáma pedig már kisebb, mint $Q(x)$ fokszáma.

Ezután **parciális törtekké** bontjuk a $S(x)/Q(x)$ hányadost, majd ezeket, illetve a $T(x)$ polinomot integráljuk.

Amennyiben a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma, vagyis $\deg P(x) < \deg Q(x)$, akkor polinomosztás nélkül tudjuk parciális törtekké bontani a függvényt.

A parciális törtekre való bontáshoz az **algebra alaptételét** használjuk fel, miszerint bármely valós együtthatós polinom felbontható első és másodrendű kifejezések szorzatára, vagyis

$$p(x) = A \cdot \underbrace{\prod (x - a_i)}_{\text{valsgykk}} \cdot \underbrace{\prod (x^2 + p_i x + q_i)}_{\text{komplexgykk}}.$$

Valós gyökök esetén a_i maga a polinom gyöke, míg komplex gyökök esetén

$$x^2 + p_i x + q_i = (x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 - 2(z_i)x + |z_i|^2.$$

Vegyünk például a $p(x) = x^5 - 13x^4 + 73x^3 - 193x^2 + 232x - 100$ polinomot, melynek gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4 + 3i$, $x_5 = 4 - 3i$. Ekkor a polinom felbontható:

$$p(x) = \underbrace{(x - 1)}_{x_1} \cdot \underbrace{(x - 2)^2}_{x_2, x_3} \cdot \underbrace{(x^2 - 6x + 25)}_{x_4, x_5}.$$

[style=example, nobreak=true] Hozzuk $R(x) = T(x) + S(x)/Q(x)$ alakra ($\deg S < \deg Q$) az $R(x) = P(x)/Q(x)$ függvényt, ahol $P(x) = x^3 - 12x^2 - 42$ és $Q(x) = x - 3$. Végezzük el a polinomosztást:

$$\begin{array}{lcl} \text{primaryColor} x^2 \cdot (x - 3) \rightarrow & \frac{\begin{pmatrix} x^3 & -12x^2 & \text{gray} + 0x & -42 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x^3 & -3x^2 & \text{gray} + 0x & \text{gray} + 0x \end{pmatrix}} \div (x - 3) = \text{primaryColor} x^2 - 9x - 27 & \\ \text{secondaryColor} - 9x \cdot (x - 3) \rightarrow & \frac{-9x^2 \quad \text{gray} + 0x \quad -42}{\begin{pmatrix} -9x^2 & +27x & \text{gray} + 0 \end{pmatrix}} & \\ \text{ternaryColor} - 27 \cdot (x - 3) \rightarrow & \frac{-27x \quad -42}{\begin{pmatrix} -27x & +81 \end{pmatrix}} & \\ & -123 & \end{array}$$

Az eredmény tehát:

$$R(x) = x^2 - 9x - 27 - \frac{123}{x - 3}.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Félszöges tangens helyettesítés:**

Amennyiben trigonometrikus ($\sin x, \cos x$) függvényekből álló racionális törtfüggvényeket szeretnénk integrálni, akkor az alábbi helyettesítés alkalmazásával közönséges, t -től függő racionális törtfüggvényeket kapunk:

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Ilyen esetben a $\sin x$ és $\cos x$ trigonometrikus függvényeket a következő módon helyettesítjük:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{és} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Egy ilyen integrál általános alakja:

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}; \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2t}{1 + t^2} dt.$$

[style=note, nobreak=true,] **Félszöges tangens helyettesítés levezetése:**

Használjuk az alábbi trigonometrikus azonosságokat: $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$,

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2),$$

$$1 = \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2).$$

Ezek alapján a $\sin x$ és $\cos x$ trigonometrikus függvényeket a következő módon helyettesíthetjük: $\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} \stackrel{*}{=} \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \left(* : \cdot \frac{1/\cos^2(x/2)}{1/\cos^2(x/2)} \right)$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} \stackrel{*}{=} \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \quad \left(* : \cdot \frac{1/\cos^2(x/2)}{1/\cos^2(x/2)} \right)$$

Végül pedig $t = \tan(x/2)$ alapján:

$$x = 2 \arctan t \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt \quad \rightarrow \quad x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

[style=example, nobreak=true] **A koszekáns integrálása:**

$$\int \csc x x = \int \frac{1}{\sin x} x = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2t}{1+t^2} = \int \frac{t}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

[scale=2.5, thick] [->, shorten >=-5mm, shorten <=-5mm] (-1,0) – (1,0) node[below right] ξ ; [->, shorten >=-5mm, shorten <=-5mm] (0,-1) – (0,1) node[above left] η ;
(0,0) circle (1);
(O) at (0,0); (A) at (50:1); (B) at (-1,0); (C) at (0,0.46630766); (D) at (1,1.19175359);
(E) at (O-|A); A k egységkör egyenlete a $\xi\eta$ k
[ultra thick, draw=primaryColor] (O) – (A)ordinátarendszerben:
node [midway, above, rotate=50] 1 – (E)
node [midway, above, rotate=90] $\sin x$ – cy- $k : \xi^2 + \eta^2 = 1$.
cle node[midway, below] $\cos x$;
[ultra thick, draw=secondaryColor] (B) – Az e egyenes átmegy a $(-1;0)$ ponto
[style=learnMore] (O) node[below, midway] 1 – (C) node[left, meredeksége pedig t . Egyenlete:
midway] t – cycle ; $e : \eta = t(\xi + 1)$.
[dashed, draw=ternaryColor, ultra thick,
shorten >=-20mm, shorten <=-10mm] (B)Helyettesítsük be az egyenes egyenletét
– (A) node [above=8mm, right=10mm] e ; kör egyenletébe:
[fill=primaryColor, thick] (B) node[above
left] $(-1;0)$ circle (0.03) ; $\xi^2 + (t(\xi + 1))^2 = 1$
[fill=primaryColor, thick] (A) node[below=1mm,
right=2mm] $(\xi_2; \eta_2)$ circle (0.03) ;
pic [draw, "x2", angle eccentricity=.75, an-
gle radius=1.5cm,] angle = O–B–C;
pic [draw, "x", angle eccentricity=.65, angle
radius=1cm,] angle = E–O–A;
[below left] at (240:1) k ;

Fejezzük ki a ξ , majd η koordinátákat a t függvényében!

$$0 = \xi^2 + t^2(\xi + 1)^2 - 1 = \xi^2 + t^2\xi^2 + 2t^2\xi + t^2 - 1 = (1 + t^2)\xi^2 + 2t^2\xi + t^2 - 1$$

Használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét!

$$\xi_{12} = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4(1+t^2)(t^2-1)}}{2(1+t^2)} = \frac{-t^2 \pm \sqrt{(t^4 - (t^4-1))}}{1+t^2} = \frac{\pm 1 - t^2}{1+t^2}$$

Az egyenlet egyik megoldásából visszakaphatjuk a $(-1;0)$ pontot:

$$\xi_1 = \frac{-1 - t^2}{1 + t^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \eta_1 = t(\xi_1 + 1) = t(-1 + 1) = 0.$$

A másik megoldásból pedig a $(\xi_2; \eta_2)$ pontot:

$$\xi_2 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \rightarrow \eta_2 = t(\xi_2 + 1) = t \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right) = t \left(\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2} \right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

A kék háromszög alapján:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{t}{1} \rightarrow t = \tan \frac{x}{2}.$$

A piros háromszög alapján:

$$\sin x = \eta_2 = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \xi_2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

[style=note, nobreak=true,] A két háromszög bejelölt szögeinek aránya kerületi és középponti szögek tételéből következik, amely kimondja, hogy adott körben adott ívhez tartozó kerületi szög mindig fele az ívhez tartozó középponti szögnek.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Félszöges tangens hiperbolikus helyettesítés:**

A trigonometrikus függvényekhez nagyon hasonló ez az eset is, viszont itt hiperbolikus $(\sinh x, \cosh x)$ függvényekből álló racionális törtfüggvényeket szeretnénk integrálni. A helyettesítés:

$$u = \tanh \frac{x}{2} \rightarrow x = \frac{2u}{1-u^2}$$

Ilyen esetben a $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvényeket a következő módon helyettesítjük:

$$\sinh x = \frac{2u}{1-u^2} \quad \text{és} \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Egy ilyen integrál általános alakja:

$$\int R(\sinh x; \cosh x) x = \int R\left(\frac{2u}{1-u^2}; \frac{1+u^2}{1-u^2}\right) \frac{2u}{1-u^2}.$$

[style=note, nobreak=true,] **Félszöges tangens hiperbolikus helyettesítés levezetése:**

Használjuk az alábbi hiperbolikus azonosságokat: $\sinh x = 2 \sinh(x/2) \cosh(x/2)$,

$$\cosh x = \cosh^2(x/2) + \sinh^2(x/2),$$

$$1 = \cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2).$$

Ezek alapján a $\sinh x$ és $\cosh x$ hiperbolikus függvényeket a következő módon helyettesíthetjük: $\sinh x = \frac{\sinh x}{1} = \frac{2 \sinh(x/2) \cosh(x/2)}{\cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2)} = \frac{2 \tanh(x/2)}{1 - \tanh^2(x/2)} = \frac{2u}{1-u^2}$,

$$\cosh x = \frac{\cosh x}{1} = \frac{\cosh^2(x/2) + \sinh^2(x/2)}{\cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2)} = \frac{1 + \tanh^2(x/2)}{1 - \tanh^2(x/2)} = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Végül pedig $u = \tanh(x/2)$ alapján:

$$x = 2u \quad \rightarrow \quad xu = \frac{2}{1-u^2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2u}{1-u^2}$$

A koszekáns hiperbolikus integrálása:

$$\int \operatorname{csch} x \, dx = \int \frac{1}{\sinh x} x = \int \frac{1-u^2}{2u} \frac{2u}{1-u^2} = \int \frac{u}{u} = \ln |u| + C = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

[scale=2.25, thick] [->] (-1.35,0) -- (2,0)
node[below left] ξ ; [->] (0,-1.5) -- (0,1.75)
node[below left] η ;
[domain=1:1.75, samples=100,
smooth, -to] plot (, sqrt(2 -
1)); [domain = 1 : 1.75, samples =
100, smooth, -to] plot(, -sqrt(2-1));
(O) at (0,0); (A) at
(1.54308063,1.17520119); (B) at (-1,0); (C)
at (0,0.46211716); (D) at (1,0.76159416);
(E) at (O-A);
[ultra thick, draw=primaryColor] (O) -- (E)
node [pos=.35, below] cosh x -- (A) node
[midway, below, rotate=90] sinh x ;
[ultra thick, draw=secondaryColor] (B) --
(O) node[below, midway] $1 -$ (C) node[left,
midway] $u -$ cycle ;
[dashed, draw=ternaryColor, ultra thick,
shorten >=-10mm, shorten <=-10mm] (B)
-- (A) node [above=6mm, right=6mm] e ;
[fill=primaryColor, thick] (B)
node[above=1mm] $(-1;0)$ circle (0.06)
; [fill=primaryColor, thick] (A) node[above
left] $(\xi_2; \eta_2)$ circle (0.06) ;

Az egységshiperbola egyenlete a $\xi\eta$ koordinátarendszerben:
 $h : \xi^2 - \eta^2 = 1.$
Az e egyenes átmegy a $(-1;0)$ ponton, meredeksége pedig u . Egyenlete:
 $e : \eta = u(\xi + 1).$
Helyettesítsük be az egyenes egyenletét a hiperbola egyenletébe:
 $\xi^2 - (u(\xi + 1))^2 = 1.$

Fejezzük ki a ξ , majd η koordinátákat a u függvényében!

$$0 = \xi^2 - u^2(\xi + 1)^2 - 1 = \xi^2 - u^2\xi^2 - 2u^2\xi - u^2 - 1 = (1 - u^2)\xi^2 - 2u^2\xi - u^2 - 1$$

Használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét!

$$\xi_{1,2} = \frac{2u^2 \pm \sqrt{4u^4 + 4(1-u^2)(u^2+1)}}{2(1-u^2)} = \frac{u^2 \pm \sqrt{(u^4 + (1-u^4))}}{1-u^2} = \frac{\pm 1 + u^2}{1-u^2}$$

Az egyenlet egyik megoldásából visszakaphatjuk a $(-1;0)$ pontot:

$$\xi_1 = \frac{-1 + u^2}{1 - u^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \eta_1 = u(\xi_1 + 1) = u(-1 + 1) = 0.$$

A másik megoldásból pedig a $(\xi_2; \eta_2)$ pontot:

$$\xi_2 = \frac{1+u^2}{1-u^2} \rightarrow \eta_2 = u(\xi_2 + 1) = u \left(\frac{1+u^2}{1-u^2} + 1 \right) = u \left(\frac{1+u^2+1-u^2}{1-u^2} \right) = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Hasonló háromszögek alapján:

$$u = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} = \tanh \frac{x}{2}.$$

Az egységhiperbola parametrikus egyenlete alapján:

$$\cosh x = \xi_2 = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad s \quad \sinh x = \eta_2 = \frac{2u}{1-u^2}.$$

[style=note, nobreak=true,]

$$\tanh \frac{x}{2} = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} \cdot \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{1 + (e^x + e^{-x})/2} = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x}$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Speciális helyettesítések összefoglaló:**

- $R(\sin x; \cos x)$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- $R(\sinh x; \cosh x)$

$$u = \tanh \frac{x}{2} \quad x = \frac{2u}{1-u^2} \quad \sinh x = \frac{2u}{1-u^2} \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

- $R(e^x; e^{2x}; \dots)$

$$t = e^x \quad x = \frac{t}{t}$$

- $R(x; \sqrt{1-x^2})$

$$x = \sin t \quad t = \arcsin x \quad x = \sqrt{1-x^2} \cdot t \\ 1 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

- $R(x; \sqrt{x^2+1})$

$$x = \sinh t \quad t = x \quad x = \sqrt{x^2+1} \cdot t \\ 1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

- $R(x^{ac}; x^{bc}; \dots)$

$$x = t^c \quad x = cx^{1-1c}t$$

[style=note, nobreak=true,] A $t = \tan(x/2)$ és $u = \tanh(x/2)$ helyettesítésekhez tartozó levezetéseket nem szükséges fejből tudni, csupán a megértés érdekében szerepelnek az elméleti áttekintőben.

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálok értékét! (Ajánlott módszer: parciális integrálás.)

a) $\int x \cos xx$

b) $\int (x^2 - 1) \sin 3xx$

c) $\int \ln xx$

d) $\int x \arctan xx$

e) $\int e^x \sin xx$

f) $\int \sin^2 xx$

g) $\int e^{\arccos x} x$

2. Integrálja az alábbi racionális törtfüggvényeket!

a) $\int \frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 26}{x^2 - 7x + 12} x$

b) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x - 2)^2} x$

c) $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 8} x$

3. Határozza meg az alábbi integrálok értékét! (Ajánlott módszer: helyettesítéses integrálás.)

a) $\int \frac{1}{5 + 3 \cos x} x$

b) $\int \frac{1}{1 + \cosh x + 2 \sinh x}$

c) $\int \sqrt{\frac{x}{1 - x}} x$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$

e) $\int \frac{e^x + 2}{e^x + e^{2x}} x$