

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kiteintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Többszörös analízis BMETE94BG02 11

# Matematika G2

## Differenciálás I

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Iránymenti derivált** ]  
Legyen  $I \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és legyen adva egy  $v \in \mathbb{R}^n$  egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x - \lambda v) - f(x)}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az  $f$  függvény  $a$  pontbeli  $v$  irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük.

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Gradiens** ] Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvény  $a(a_1; a_2; \dots; a_n)$  pontbeli gradiense:

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a))$$

[ style=note, nobreak=true, ] A gyakorlatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v.$$

[style=example, nobreak=true] Számítsuk ki az  $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$  függvény  $v(3; 4)$  irányú deriváltját az  $(1; 2)$  pontban!

A gradiens az előző példában számolt parciális deriváltak alapján:

$$\nabla f(1; 2) = (40, -133).$$

Az iránymenti derivált számításához még szükségünk van az  $v$  irányú egységvektorra:

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad e_v = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{5}(3, 4) = (3/5, 4/5).$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_v f(1; 2) = f(1; 2) \cdot e_v = 40 - 133 \cdot 3/54/5 = 40 \cdot 3/5 - 133 \cdot 4/5 = -82, 4.$$

[ style=note, nobreak=true, ] Kétváltozós függvény esetén az gyakran az irányvektort az  $x$ -tengellyel bezárt szög ( $\alpha$ ) segítségével adjuk meg. Ekkor az egységvektor:

$$e = \cos \alpha \sin \alpha.$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Magasabb rendű iránymenti deriváltak:**

Az elsőrendű iránymenti derivált:

$$fe = f \cdot e.$$

A másodrendű iránymenti derivált:

$$[order = 2]fe = (fe) \cdot e = (f \cdot e) \cdot e.$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Adott irányú érintő egyenes kétváltozós függvények esetén:**

A  $z = f(x; y)$  függvény segítségével a 3D-s térben egy felületet adhatunk meg. Ezen felület egy  $P_0(x_0; y_0)$  pontbeli,  $e(e_x; e_y)$  irányú érintő egyenese:

$$\frac{x - x_0}{e_x} = \frac{y - y_0}{e_y} = \frac{z - z_0}{\partial_e f(x_0; y_0)}, \quad ahol$$

$$z_0 = f(x_0; y_0).$$

*Amennyiben az irányegyesik az*

*$x$ -tengellyel, akkor  $x - x_0 = \frac{z - z_0}{\partial_x f(x_0; y_0)} \Rightarrow \partial_x f(x_0; y_0)(x - x_0) = z - z_0$ . Amennyiben az irányegyesik az  $y$ -tengellyel, akkor  $y - y_0 = \frac{z - z_0}{\partial_y f(x_0; y_0)} \Rightarrow \partial_y f(x_0; y_0)(y - y_0) = z - z_0$ .*

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Érintősík megadása kétváltozós függvény esetében:**

Az érintősík független az iránytól, azt csak a felületből kimutató normális, vagyis a gradiens adja meg. Az  $x_0$  pontban felírt normálvektor:

$$n_{be} = \partial_x f \partial_y f - 1|_{x=x_0} \quad n_{ki} = -\partial_x f - \partial_y f 1|_{x=x_0},$$

ahol  $n_{be}$  a befele,  $n_{ki}$  pedig a kifelé mutató normálvektor. Ezek alapján az érintősík egyenlete:

$$n(x - x_0) = 0 \Rightarrow f_x|_{x=x_0}(x - x_0) + f_y|_{x=x_0}(y - y_0) = z - z_0.$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Implicit függvény parciális deriváltjai:**

Amennyiben a változók közötti kapcsolat nem írható fel explicit ( $z = f(x; y)$ ) módon, akkor az implicit függvényt megadási módszerhez tudunk fordulni. Ez többváltozós esetben  $F(x; y; z) = 0$  alakban tudjuk megadni.

Ilyen esetben a  $z$ -től függő tagokat összetett függvényként kell kezelnünk, a parciális deriváltak pedig a következők:

$$f_x = z_x \quad \text{és} \quad f_y = z_y.$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Teljes differenciál:**

Egy  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény teljes differenciálja:

$$Df = \sum_{i=1}^n f_{x_i} x_i.$$

Kétváltozós esetben:

$$Df = f_x x + f_y y.$$

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 3: Jacobi-mátrix** ] Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  leképezés. Ekkor  $f'(a) = Jf(a)$ , ahol  $J \in M_{k \times n}$ . A  $J$  mátrixot az  $f$  függvény Jacobi-mátrixának nevezzük, melynek elemei:

$$J(a) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) f_1(x_2) \cdots f_1(x_n) \\ f_2(x_1) f_2(x_2) \cdots f_2(x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1) f_k(x_2) \cdots f_k(x_n) \end{pmatrix}_{x=a} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}'(a)$$

## 0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és irányszög vagy irányvektor mentén!
  - a)  $f(x; y) = x^3 - 3xy^2 + 4y^4$ , 7cm  $P_a(1, 1)$ , 10cm  $\alpha = 45^\circ$ ,
  - b)  $g(x; y; z) = e^{-(x^2+y^2)}$ , 7cm  $P_b(1; 0; 1)$ , 10cm  $v_b = [3, 2, -5]$ .
2. Határozza meg azon pontok halmazát, amin nem létezik az  $f(x; y) = \ln(x^2 + xy)$  függvény  $\alpha = 150^\circ$ -os irányhoz tartozó iránymenti deriváltja!
3. Határozza meg az alábbi függvények első és második iránymenti deriváltjait az adott pontban és irányirányszög vagy irányvektor mentén!
  - a)  $f(x; y) = 4x^4y + y^3x^2$ , 7cm  $P_a(1; 1)$ , 10cm  $\alpha = 45^\circ$ ,
  - b)  $g(x; y; z) = \sqrt{14}xyz + \sqrt{14}x^2y^2z^2$ , 7cm  $P_b(1; 1; 1)$ , 10cm  $v_b = [1; 1; 1]$ .
4. Határozza meg az  $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2)$  függvény  $P(0; 1)$  ponthoz és  $\alpha = 60^\circ$  irányhoz tartozó érintőegyenésének egyenletét!
5. Határozza meg a  $f(x; y) = \sin xy$  függvény érintősíkjának egyenletét a  $P(\pi/3; 2)$  pontban!
6. Határozza meg azon pontok halmazát, ahol a  $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$  felület érintősíkja párhuzamos a  $2x - y + 5z - 25 = 0$  síkkal!
7. Határozza meg az  $f(x; y) = \arctan xy$  függvény teljes differenciálját paraméteresen a  $P_7(x_0; y_0)$  és a  $Q_7(1; 2)$  pontban!
8. Határozza meg egy henger térfogat mérésének a relatív hibáját, ha ismert, hogy a sugár 1%-os és a magasság 2%-os hibával lett mérve!
9. Határozza meg az  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvény Jakobi mátrixát!  $f(x; y; z) = (x^2 + y^2 + z \sin x, z^2 + z \sin y)$