definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0){+}0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Valós analízis BMETE94BG02 7

Matematika G2

Függvény- és hatványsorok

Utoljára frissítve: 2025. március 22.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Függvénysor**] Legyen $f_n : I \subset\to$ függvénysorozat. Képezzük az alábbi függvénysorozatot: $\mathrm{s}_1(x) := f_1(x)$,
$s_2(x) := f_1(x) + f_2(x)$,
$\vdots$
$s_j(x) := \sum_{i=1}^{j} f_i(x)$
$\vdots$

Az így előálló (s_n) függvénysorozatot az (f_n) függvénysorozatból képzett függvénysornak hívjuk és $\sum f_n$-nel jelöljük.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Függvénysor pontbeli konvergenciája**] A $\sum f_n$ függvénysor konvergens az $x_0 \in I$ pontban, ha az (s_n) függvénysorozat konvergens az x_0 pontban.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Függvénysor konvergenciahalmaza**] A $\sum f_n$ függvénysor konvergens a $H \subset I$ halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat konvergens a H-n.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 4: Függvénysor egyenletes konvergenciája**] A $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens az E-n.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 5: Függvénysor összegfüggvénye**] A $\sum f_n$ függvénysorozat összegfüggvénye az $s(x) := \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ függvény, ahol $x \in H$.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 6: Abszolút konvergencia**] A $\sum f_n$ függvénysor abszolút konvergens, ha a $\sum |f_n|$ függvénysor konvergens.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: Cauchy-féle konvergencia kritérium egyenletes konvergenciára**] A $\sum f_n$ akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n; m > N(\varepsilon)$, akkor $\forall x \in E$ esetén $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 2: Weierstrass-tétel függvénysorok egyenletes konvergenciájára**] Legyen $f_n : I \subset\rightarrow$ függvénysorozat és $\sum f_n$ a belőle képzett függvénysor, továbbá $\sum a_n$ olyan konvergens numerikus sor, melyre $\forall x \in I$ esetén $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall n \in N$-re $n > n_0 \in N$ esetén.

Ekkor a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 7: Hatványsor**] Legyen $f_n(x) := a_n\,(x - x_0)^n$. A belőle képzett

$$\sum f_n(x) = \sum a_n\,(x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük, ahol a_n a hatványsor n-edik együtthatója, x_0 pedig a sorfejtés centruma.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 8: Hatványsor konvergenciasugara**] A $\sum a_n\,(x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in_b .$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 3: Cauchy-Hadamard-tétel**] Legyen r a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara. Ha ...

1. $r = 0$, akkor a hatványsor csak az $x_0 = 0$ pontban konvergens,
2. $r = \infty$, akkor a hatványsor $\forall x \in$ esetén konvergens,
3. $0 < r < \infty$, akkor a hatványsor konvergens, ha $|x| < r$ és divergens, ha $|x| > r$.

[thick] [very thick, -to, draw=secondaryColor] (0,0) – (6,0) node[below left] x;

/łin 1/-r,3/0,5/+r [draw=primaryColor] (, 3pt) – (, -3pt) node[below]; [draw=primaryColor, decorate, decoration=brace,amplitude=5pt,mirror,raise=4ex] (1,0) – (5,0) node[midway,yshift=-3em] abszolút konvergencia;

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 4: Tagonkénti integrálhatóság**] Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai integrálhatóak az $[a;b]$ zárt intervallumon. Tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens az $[a;b]$-n és összegfüggvénye folytonos. Ekkor

$$\int_a^b f(x)x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)x.$$

[style=note, nobreak=true,] Nem korlátos intervallum esetén nem igaz az állítás.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 5: Tagonkénti differenciálhatóság**] Legyenek az f_n függvénysorozat tagjai differenciálhatóak a J intervallumon, f_n' függvények folytonosak a J-n, valamint a $\sum f_n'$ és a $\sum f_n$ függvénysorok egyenletesen konvergensek a J-n. Ekkor

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

0.2 Feladatok

1. Vizsgálja meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát, értelmezési tartományát és adja meg az összegfüggvényüket! 3

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x}$

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x - 1x + 1)^n$

   c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x$

2. Határozza meg az alábbi függvénysorok értelmezési tartományát, konvergenciatartományát és hogy a konvergenciatartományon belül abszolút konvergensek-e! 2

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 11 + x^{2n}$

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left|\frac{z - i - 1}{3}\right|\right)^n z$

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$

   d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(3x^3 + (\pi/3)nx^2)3^n + x^4 n^4$

3. El lehet-e végezni a következő függvénysor tagonkénti integrálását?

$$\int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{nx}\, dx ?= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^2 x^n e^{nx}\, dx$$

4. El lehet-e végezni a következő függvénysor tagonkénti deriválását?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(x/n) n^2$$

5. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát! 2

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x - 2)^n$

   b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} x^n 2^n (n - 1)$

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x - 2)^n 3$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (4 - 1n)^n \, x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (4n(-1)^n + n + 22n)^n \, x^n$

6. Határozza meg az alábbi komplex hatványsorok konvergenciatartományát! 3

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^2 (2!) z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} 2n - 1$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) x^n$