

2

Térgeometriai alakzatok

Matematika G1 – Analitikus geometria

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

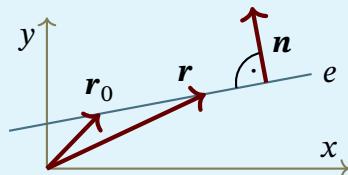
2.1. Elméleti Áttekintő

Egyenes 2D-ben:

$\mathbf{n}(A; B)$ – egyenes normálvektora

$\mathbf{r}(x; y)$ – tetszőleges pont helyvektora

$\mathbf{r}_0(x_0; y_0)$ – P_0 fixpont helyvektora



Az egyenes egyenlete:

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}$$

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{=: -C} \rightarrow Ax + By + C = 0$$

Hesse-féle normálalak:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A Hesse-féle normálalakot úgy kapjuk, hogy az egyenes normálvektorát egységhosszúságúra normáljuk.

Két egyenes viszonya:

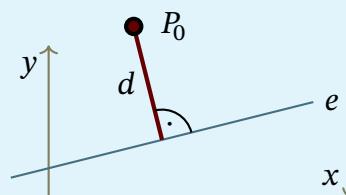
Két egyenes által **közbezárt szög** a két egyenes normálvektorai által bezárt szög.

Ebből következik, hogy ha a normálvektorok által bezárt szög 90° , akkor a két egyenes merőleges egymásra. Ha a normálvektorok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos.

Pont és egyenes távolsága:

Adott egy e egyenes Hesse-féle normálalakja és egy $P_0(x_0; y_0)$ pont. Ekkor a pont és az egyenes távolsága:

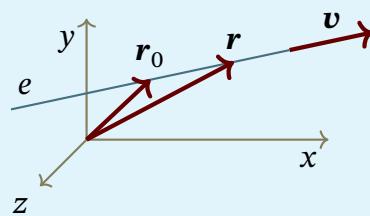
$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$



A formula csak azon pontokra ad zérus értéket, amelyek rajta vannak az egyenesen.

Egyenes 3D-ben:

- $\mathbf{v}(a; b; c)$ – egyenes irányvektora
 $\mathbf{r}(x; y; z)$ – tetszőleges pont helyvektora
 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0)$ – P_0 fixpont helyvektora

**3D egyenes paraméteres alakja:**

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) &- P_0 \text{ fixpont helyvektora} \\ \mathbf{v}(a; b; c) &- \text{egyenes irányvektora} \\ t \in \mathbb{R} &- \text{paraméter} \end{aligned} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

A paraméteres egyenletekből t -t kifejezve is megadhatjuk az egyenest:

$$(t =) \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

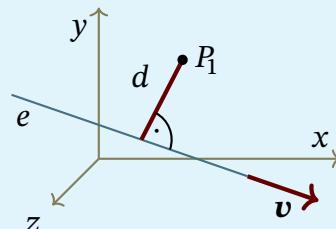
Két egyenes viszonya:

Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes irányvektorai által bezárt szög.

Pont és egyenes távolsága:

Egy \mathbf{r}_1 irányvektorú P_1 pont, és egy $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletű egyenes távolsága

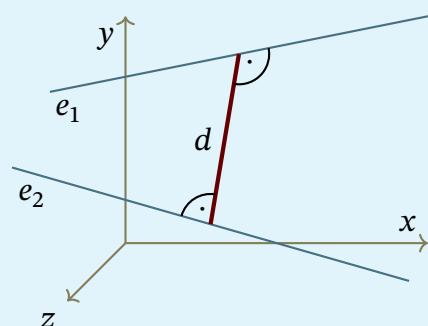
$$d = \left| \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{v}|} \right|$$

**Két egyenes távolsága:**

Az $e_1 : \mathbf{p}_1(t_1) = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{v}_1$ és $e_2 : \mathbf{p}_2(t_2) = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{v}_2$ egyenesek távolsága

$$d = \left| (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \underbrace{\frac{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}}_{\hat{n}_T} \right| = |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \hat{n}_T|,$$

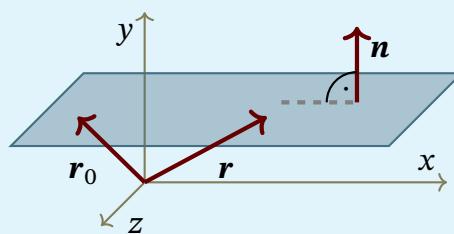
ahol \hat{n}_T egy olyan egységvektor, amely merőleges mindkét egyenesre. (normál transzverzális)



Amennyiben e_1 és e_2 párhuzamosak, akkor a távolságukat a pont és egyenes távolságának képletével számolhatjuk.

Sík 3D-ben:

- $\mathbf{n}(A; B; C)$ – sík normálvektor
 $\mathbf{r}(x; y; z)$ – tetszőleges pont helyvektora
 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$ fixpont helyvektora

**Sík egyenlete:**

A sík tetszőleges \mathbf{r} pontjára igaz, hogy

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = : -D, \\ Ax + By + Cz + D &= 0.\end{aligned}$$

Hesse-féle normálegyenlet:

$$\left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = 0$$

Két sík viszonya:

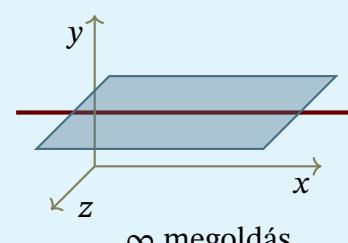
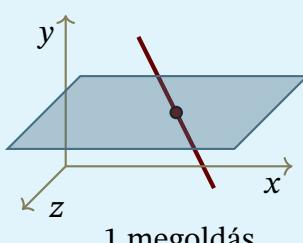
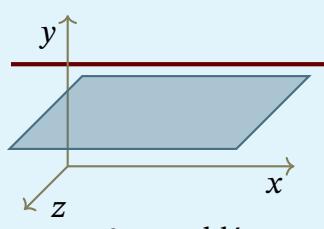
Két sík által bezárt szög a síkok normálvektorai által bezárt szög.

Sík és egyenes döfésponja:

Egy $s : Ax + By + Cz + D = 0$ sík és egy $e : \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenes döfésponjait meghatározhatjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszeret:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{és} \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

A megoldások száma alapján:



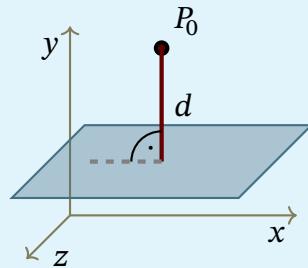
Sík és egyenes által bezárt szög:

Egy sík és egy egyenes által bezárt szög a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő.

Sík és pont távolsága:

Egy $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pont és egy $s : Ax+By+Cz+D = 0$ sík távolsága:

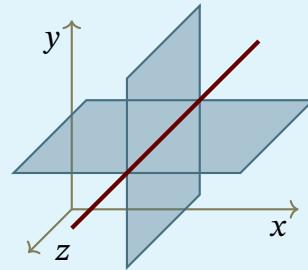
$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

**Két sík metszésvonala:**

A metszésvonal irányvektora minden két sík normálvektorára merőleges:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

Ezen kívül szükségünk van még egy tetszőleges pontra, amely rajta van minden két síkon. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy az egyik koordinátát fixáljuk, és a másik kettőt kiszámítjuk a 2 sík egyenletéből. (Pl. $z = 0$)



2.2. Feladatok

- Számítsa ki az $e_1 : 3x - 4y - 10 = 0$ és az $e_2 : 6x - 8y + 5 = 0$ egyenes távolságát!
- Írja fel azon egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2; 5; 6)$ és a $Q(7; -1; 3)$ pontokon!
- Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az alábbi egyenesek metszik egymást!

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

- Határozza meg az alábbi egyenesek távolságát!

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 + 3t_1 \\ y_1(t) = -1 + 4t_1 \\ z_1(t) = 2t_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(t) = 7 + 6t_2 \\ y_2(t) = 1 + 8t_2 \\ z_2(t) = 3 + 4t_2 \end{cases}$$

- Adott két egyenes. Határozza meg a távolságukat és normáltraszverzálisuk egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x_1(t) = -7 + 3t \\ y_1(t) = 4 - 2t \\ z_1(t) = 4 + 3t \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(t) = 1 + t \\ y_2(t) = -8 + 2t \\ z_2(t) = -12 - t \end{cases}$$

- Vizsgálja meg, hogy a $P(0; -1; 2)$, a $Q(2; -1; 1)$ és az $R(4; 3; -2)$ pontok egy egyenesbe esnek-e! Ha nem, akkor írja fel az általuk kifeszített sík egyenletét!
- Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az e egyenes és az s sík párhuzamos egymással!

$$e : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha} \quad s : x + 3y - 2\alpha z = 0$$

- Számítsa ki az e egyenes és az s sík metszéspontját!

$$e : x - 1 = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6} \quad s : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

- Adja meg az s_1 és s_2 síkok metszés vonalának egyenletrendszerét!

$$s_1 : x - 2y + 3z - 4 = 0 \quad s_2 : 3x + 2y - 5z - 4 = 0$$

- Igazolja, hogy az alábbi három síknak egy közös pontja van. Írja fel ezen a ponton átmenő síkot, amely párhuzamos az $x + y + 2z = 0$ síkkal!

$$\begin{cases} s_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \\ s_2 : x - 3y + z + 1 = 0 \\ s_3 : x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$