6 Folytonosság

Matematika G1 – Függvények

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

6.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 6.1: Cauchy-féle határérték definíció

Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban A, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$. Jele:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Definíció 6.2: Heine-féle határérték definíció

Az f függvény határértéke az a pontban akkor és csak akkor A, ha $\forall x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.

A két definíció teljesen ekvivalens egymással.

Tétel 6.1: Nevezetes határérték a nullában

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definíció 6.3: Folytonosság

Egy $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ha $|x - a| < \delta(\varepsilon)$.

! A folytonosság definíciója ekvivalens a következővel: f függvény folytonos egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ha ez nem teljesül, akkor a függvénynek az adott pontban szakadása van. Ez lehet

- **megszüntethető**, tehát a függvény az adott pontban nincsen értelmezve, viszont a pontbeli határértéke létezik,
- **nem megszüntethető**, vagyis nem létezik az adott pontbeli határértéke.

6.2. Feladatok

1. A függvényhatárérték két definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}.$$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} + \frac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2} \right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{2^{\sqrt{2}/x}+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

f) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{\tan 5x}$

j) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\pi/2 - x)\tan x$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos\sin x}{\sin^2 x}$

3. Vizsgálja meg az alábbi függvényt folytonosság szempontjából!

$$f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2}$$

4. Vizsgálja meg az alábbi függvényt folytonossát a nullában!

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$$

5. Határozza meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy f függvény folytonos legyen!

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| < 1 \\ x^2 + ax + b, & \text{ha } |x| \geq 1 \end{cases}$$

6. Határozza meg az alábbi komplexebb határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \tan^{\tan 2x} x$