

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Sorozatok BMETE94BG01 4

# Matematika G1

## Numerikus sorozatok I

Utoljára frissítve: 2024. október 01.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Sorozat** ] A pozitív egész számok halmazán értelmezett  $a_n : N \rightarrow$  függvényt **valós számsorozatnak** hívjuk.

Az  $a_n : N \rightarrow C$  függvényt **komplex számsorozatnak** nevezzük.

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Konvergencia** ] Az  $(a_n)$  sorozatot konvergensnek mondjuk, ha  $\exists a \in$  valós szám, hogy  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists N(\varepsilon)$  küszöbszám, hogy ha  $n > N(\varepsilon)$ , akkor  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Jelölése:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, ahol$$

*asorozat határértéke.*

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Divergencia** ] Az  $(a_n)$  sorozatot divergensnek mondjuk, ha nem konvergens.

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 4: Torlódási pont** ] Az  $(a_n)$  sorozatnak torlódási pontja van az  $a \in$  pontban, ha az  $a$  tetszőlegesen kicsiny környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

[ style=note, nobreak=true, ] A sorozat határértéke egyben torlódási pont is, viszont egy torlódási pont nem feltétlenül határérték. Pl.:  $a_n = (-1)^n$  sorozatnak két torlódási pontja is van ( $-1$  és  $1$ ), viszont egyik sem határérték, hiszen a sorozat divergens.

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 5: Sorozat korlátossága** ] Az  $(a_n)$ -t **alulról korlátosnak** nevezzük, ha  $\forall n$  esetén  $a_n > k$ , vagyis értékkészlete alulról korlátos.

Az  $(a_n)$ -t **felülről korlátosnak** nevezzük, ha  $\forall n$  esetén  $a_n < K$ , vagyis értékkészlete felülről korlátos.

Az  $(a_n)$  sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

[ style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 6: Sorozat monotonitása** ] Az  $(a_n)$  sorozat monotonitása:

- monoton növekvő, ha  $a_n \geq a_{n-1}$ ,
- monoton csökkenő, ha  $a_n \leq a_{n-1}$ ,
- szigorúan monoton növekvő, ha  $a_n > a_{n-1}$ ,
- szigorúan monoton csökkenő, ha  $a_n < a_{n-1}$ .

[ style=note, nobreak=true, ] Konvergens sorozat mindig korlátos.

Monoton korlátos sorozat mindig konvergens.

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Nevezetes határértékek:**

- $a^n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
- $a^n \cdot n^k \rightarrow 0$ , ha  $|a| < 1$  és  $k \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
- $a^n n! \rightarrow 0$
- $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$
- $(1 + r/n)^n \rightarrow e^r$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Dominancia elv:**

$$\log_n a < \sqrt[n]{a} < \log_a n < \sqrt[a]{n} < n < n^a < a^n < n! < n^n$$

[ style=note, nobreak=true, ] A dominancia elvet olyan esetekben érdemes használnunk, amikor egy

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}$$

alakú sorozat határértékét keressük, hiszen segítségével megállapíthatjuk, hogy a nevező vagy a számláló fog gyorsabban nőni.

[ style=theorem, nobreak=true, frametitle= white **Tétel 1: Rendőrelv** ] Tegyük fel, hogy  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  és  $(x_n)$  sorozatokra teljesül, hogy  $a_n \leq x_n \leq b_n : \forall n$ -re vagy  $n > N_0$ , továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, \text{ ekkor } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

## 0.2 Feladatok

1. A konvergencia definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e.

a)  $a_n = |n + 13n - 8|$

b)  $b_n = n \cdot (-1)^n - 12n$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

a)  $a_n = n^2 - 6n + 7n^2 + 12n + 49$

b)  $b_n = 1 + 2 + 3 + \dots + nn + 2 - n2$

c)  $c_n = (-2)^n + 3^n(-2)^{n+1} + 3^{n+1}$

d)  $d_n = \sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 1}\sqrt[4]{5n^6 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3} + n!(n+1)! + 3^{2n}$

e)  $e_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

f)  $f_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$

3. Igazolja a rendőrelv segítségével, hogy  $n3^n \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

4. Határozza meg az alábbi határértékeket! 2

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n^2 - 30n - 21}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos n^3}{2n} - \frac{3n}{6n+1} \right)$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\ln n}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n+5}$

5. Bizonyítsa be, hogy bármely  $k \geq 0$  egész számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k.$$