

## 6

## Integrálatalakító tételek II

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. október 06.

## 6.1. Elméleti áttekintő

## Definíció 6.1 : Térfogat

Legyen  $\Omega : D \rightarrow \mathcal{V}$  paraméterezett tértartomány, ahol  $r; s; t \in D$  a tértartomány paraméterezése,  $\Omega(D) = \mathcal{V}$  a tértartomány képe,  $dV = \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt$ . Ekkor a térfogat:

$$\text{Vol } \mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} dV = \iiint_D |\det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t))| dr ds dt.$$

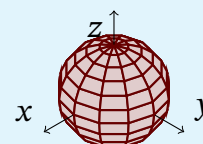
## Definíció 6.2 : Térfogati integrál

Legyen  $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező,  $\Omega : D \rightarrow \mathcal{V}$  paraméterezett tértartomány, ahol  $r; s; t \in D$  a tértartomány paraméterezése,  $\Omega(D) = \mathcal{V}$  a tértartomány képe,  $dV = \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt$ . Ekkor a  $\varphi$  skalármező térfogaton vett integrálja:

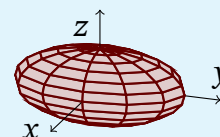
$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{r}) dV = \iiint_D \varphi(\Omega(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\Omega(r; s; t)) dr ds dt.$$

## Tértartományok paraméterezése

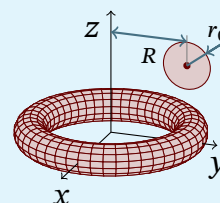
• **Gömb:**  $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \sin s \cos t \\ r \sin s \sin t \\ r \cos s \end{bmatrix}$   $r \in [0; R]$   
 $s \in [0; \pi]$   
 $t \in [0, 2\pi]$



• **Ellipszoid:**  $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} a r \sin s \cos t \\ b r \sin s \sin t \\ c r \cos s \end{bmatrix}$   $r \in [0; 1]$   
 $s \in [0; \pi]$   
 $t \in [0, 2\pi]$



• **Tórusz:**  $\Omega(r; s; t) = \begin{bmatrix} (R + r \cos s) \cos t \\ (R + r \cos s) \sin t \\ r \sin s \end{bmatrix}$   $r \in [0; r_0]$   
 $s \in [0; 2\pi]$   
 $t \in [0, 2\pi]$



**Tétel 6.1 : Gauss-Osztogradszkij-tétel**

Legyen  $\Omega : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ , irányított, parametrizált tértartomány. Legyen továbbá  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező. Jelölje a  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  az  $\Omega$  peremét indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Ha  $\mathbf{v}$  vektorpotenciális, akkor az integrál értéke zérus, hiszen  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ .

Integrálja a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2yz)\hat{\mathbf{i}} + (xy^2z)\hat{\mathbf{j}} + (2xyz^2)\hat{\mathbf{k}}$  vektormezőt az első tényolcadban lévő egységkocka felületén kifelé mutató irányítással!

Határozzuk meg a  $\mathbf{v}$  vektormező divergenciáját:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial x^2yz}{\partial x} + \frac{\partial xy^2z}{\partial y} + \frac{\partial 2xyz^2}{\partial z} = 8xyz.$$

A Gauss-Osztogradszkij-tétel alapján:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 8xyz \, dz \, dy \, dx = 1.$$

**Gauss-Osztogradszkij-tétel Maxwell I. és II. egyenletében**

A Gauss-Osztogradszkij-tétel a Maxwell-egyenletekben is fontos szerepet játszik. Az első két egyenlet az elektromos és mágneses tér forrásosságát írja le:

$$(I) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{elektromos tér forrásos,}$$

$$(II) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \text{mágneses tér forrásmentes,}$$

ahol  $\mathbf{E}$  az elektromos tér,  $\mathbf{B}$  a mágneses tér,  $\rho$  az elektromos töltéssűrűség,  $\epsilon_0$  az elektromos permittivitás.

Az egyenletek közötti kapcsolatot a Gauss-Osztogradszkij-tétel segítségével:

$$(I) \Rightarrow \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{E}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV,$$

$$(II) \Rightarrow \oiint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{B}; d\mathbf{S} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0.$$

Az első egyenlet azt mondja ki, hogy zárt felületen áthaladó elektromos tér fluxusa arányos az elektromos töltéssűrűség térfogati integráljával. A második egyenlet pedig azt jelenti, hogy a mágneses tér fluxusa zárt felületen zérus, a mágneses tér forrásmentes.

**Tétel 6.2 : Green-tétel asszimmetrikus alakja**

Legyenek  $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszeresen folytonos skalármezők,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  parametrizált, irányított tértartomány,  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \langle \text{grad } \psi; \text{grad } \varphi \rangle dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle.$$

$\psi = 1$  választásával visszanyerjük a Gauss-Osztogradszkij-tételt:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \underbrace{\text{grad } \varphi}_{\mathbf{v}} dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \left\langle \underbrace{\text{grad } \varphi}_{\mathbf{v}}; d\mathbf{S} \right\rangle.$$

Tekintsünk egy  $R = 1$  m sugarú tömör alumínium gömböt, amelynek stacionárius hőmérséklet-eloszlása  $\varphi(\mathbf{r}) = T_0(1 - r^2)$  függvény írja le, ahol  $T_0 = 10$  K a gömb belső hőmérséklete. Határozza meg a gömb felületén kifelé irányuló összes  $\dot{Q}$  hőáramot, ha a hőfluxus sűrűsége  $\mathbf{q} = -\lambda \text{ grad } \varphi$ , ahol  $\lambda = 205$  W/(m K) az alumínium hővezetési tényezője, és

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{q}; d\mathbf{S} \rangle.$$

Használjuk a Green-tétel asszimmetrikus alakját  $\psi = -\lambda$  állandó választással:

$$\dot{Q} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle -\lambda \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle = - \iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \underbrace{\langle \text{grad } \lambda; \text{grad } \varphi \rangle}_{=0} dV = -\lambda \iiint_{\mathcal{V}} \Delta \varphi dV.$$

Számítsuk ki a térfogat belsejében a  $\Delta \varphi$  értékét:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -6T_0.$$

A hőáram összesen:

$$\dot{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{-\lambda(-6T_0)}_{=\text{const}} dV = -\lambda(-6T_0) \frac{4\pi R^3}{3} = 8\pi\lambda T_0 R^3 \approx 5,15 \cdot 10^4 \text{ W}.$$

**Tétel 6.3 : Green-tétel szimmetrikus alakja**

Legyenek  $\varphi; \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszeresen folytonos skalármezők,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  parametrizált, irányított tértartomány,  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}$  perem indukált irányítással. Ekkor:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \psi \text{ grad } \varphi - \varphi \text{ grad } \psi; d\mathbf{S} \rangle$$

## 6.2. Feladatok

1. Vezesse le az  $R$  sugarú gömb térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a  $\varphi(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$  skalármező térfogati integrálját a gömbön! A tértartomány ajánlott paraméterezése:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \sin s \cos t \\ r \sin s \sin t \\ r \cos s \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r \in [0; R] \\ s \in [0; \pi] \\ t \in [0; 2\pi] \end{matrix}$$

2. Vezesse le az  $R$  sugarú,  $h$  magasságú henger térfogatát térfogati integrál segítségével, majd számítsa ki a  $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$  skalármező térfogati integrálját a hengerben! A tértartomány ajánlott paraméterezése:

$$\mathbf{\Omega}(r; s; t) = \begin{bmatrix} r \cos s \\ r \sin s \\ t \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r \in [0; R] \\ s \in [0; 2\pi] \\ t \in [0; h] \end{matrix}$$

3. Legyen  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y \sin x) \hat{\mathbf{i}} + (z^2 \cos y - \cos x) \hat{\mathbf{j}} + (v_3) \hat{\mathbf{k}}$ . Határozza meg  $v_3$ -at, ha tudjuk, hogy  $\mathbf{v}$  tetszőleges zárt felületen vett felületi integrálja zérus!

4. Legyen  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ . Adja meg a vektormező alábbi zárt felületeken vett felületi integráljait:

- az  $R = 2$  sugarú gömb felületén befelé mutató irányítással,
- az  $x^2 + y^2 = 4$  hengerfelületen, amelyet a  $z = -1$  és  $z = 1$  síkok zárnak le, kifelé mutató irányítással,
- a  $z = x^2 + y^2$  forgásparaboloid és a  $z = 4$  sík által határolt test felületén kifelé mutató irányítással.

5. Egy fotonikus chipeket hordozó wafer-darabot egy ellipszoid alakú Faraday-kalitkába rögzítenek. A kalitka belsejében lineáris feszültségelosztással ( $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ ) térerőt állítanak elő. Számolja ki a Faraday-kalitka belsejében lévő nettó töltést, ha  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m, az ellipszoid egyenlete pedig:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{19} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

6. Egy drón IMU-modulját teljes egészében kitöltő, hővezető műgyanta gömb alakú, sugara  $R = 0,02$  m. A vezérlő egység folyamatosan hőt disszipál, az állandósult hőmérséklet-mező jó közelítéssel

$$\varphi(\mathbf{r}) = T_c - \alpha r^2, \quad \alpha = 1,3 \cdot 10^5 \text{ K/m}^2.$$

Becsülje meg, mekkora teljes hőáram távozik a burkolaton át, ha

$$q_{\text{hő}} = - \oint_{\partial V} \langle \lambda \text{ grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle, \quad \lambda = 0,2 \text{ W/(m K)}.$$