9 Differenciálás III

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 27.

9.1. Elméleti Áttekintő

Teljes függvényvizsgálat lépései:

1. Értelmezési tartomány ($\mathcal{D}_f$)
   Zérushelyek (x tengelymetszet)
   Paritás ($f(x) = f(-x)$ – páros, $f(x) = -f(-x)$ – páratlan)
   Periodicitás ($f(x) = f(x + kp)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$)
   Határérték ($\pm\infty$-ben, szakadási pontokban, határpontokban)
2. $f'(x)$ vizsgálata: monotonitás, lokális szélsőértékek
   - $f'(x) > 0$ – monoton nő
   - $f'(x) < 0$ – monoton csökken
3. $f''(x)$ vizsgálata: konvexitás, konkávitás, inflexiós pontok
   - $f''(x) > 0$ – konvex
   - $f''(x) < 0$ – konkáv
4. Lineáris aszimptoták keresése:
   - Az $x = a$ egyenes függőleges aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to a^+} = \pm\infty$, vagy $\lim\limits_{x\to a^-} = \pm\infty$.
   - Az $y = b$ egyenes vízszintes aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = b$.
   - Ferde aszimptotákat $y = mx + b$ alakban keressük, ahol

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx.$$

5. Táblázat készítése, ábrázolás és értékkészlet leolvasása az ábráról

Tétel 9.1: Lokális szélsőérték

Ha az f függvény deriválható az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában, akkor az x_0-beli lokális szélsőérték létezésének

- szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$,
- elégséges feltétele:
  1. $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált az x_0-ban
  2. ha f második deriváltja is létezik az x_0-ban, akkor $f''(x_0) \neq 0$.
     - Ha $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van az x_0-ban.
     - Ha $f''(x_0) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van az x_0-ban.

Tétel 9.2: Inflexiós pont

Ha az f függvény kétszer deriválható az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában, akkor az x_0-beli inflexiós pont létezésének

- szükséges feltétele: $f''(x_0) = 0$,
- elégséges feltétele: $f''(x)$ előjelet vált az x_0-ban, vagy $f'''(x_0) \neq 0$.

Szöveges feladatok

Ezen a gyakorlaton olyan szöveges feladatokkal fogunk foglalkozni, amelyekben valamilyen szélsőértéket kell meghatároznunk.

Tudjuk, hogy egy f függvénynek az értelmezési tartományának egy x_0 pontjában akkor van szélsőértéke, ha $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ előjelet vált az x_0 pontban, vagy $f''(x_0) \neq 0$.

Ezen feladatok esetén fontos, hogy a feladat elolvasása után a szöveg alapján felírjuk az alapösszefüggéseket. Ezután meg kell határoznunk azt a függvényt, amelynek a szélsőértékét keressük. Miután meghatároztuk a függvény szélsőértékeit, ellenőriznünk kell, hogy valóban szélsőértéke-e.

9.2. Feladatok

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$ függvény teljes vizsgálatát!
2. Határozza meg az 1 literes felül nyitott legkisebb felszínű hengert!
3. Határozza meg a legnagyobb térfogatú h alkotójú kúpot!
4. Határozza meg az r sugarú körbe írt legnagyobb területű derékszögű négyszöget!
5. Egy a szélességű csatornából derékszögben kinyúlik egy b szélességű csatorna. Határozza meg mekkora azon gerenda hossza, amely befordítható egyik csatornából a másikba!
6. A gazda épp a kocsmában mulat, mikor neje felhívja, hogy hol van. (Természetesen titokban ment meccset nézni). A gazda, nehogy lebukjon, azt hazudja, hogy a szomszédnál van és sietve indul haza. Azonban, hogy a kocsmaszagot lemossa magáról, elhatározza, hogy megfürdik a patakban. Milyen úton halad, ha a lehető leggyorsabban akar hazaérni?