definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt,
nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Valós analízis BMETE94BG02 8

Matematika G2

Taylor-sorok

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Taylor-polinom**] Legyen $f : I \subset\to$ függvény, mely az x_0 pontban legalább p-szer differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli p-edik Taylor-polinomja:

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal**] Ha az f függvény legalább $(r+1)$-szer differenciálható az $(x; x_0)$ intervallumon és $f^{(k)}$ $\forall k \in \{1; 2; \ldots; r\}$ esetén folytonos ay x és x_0 pontokban, akkor $\exists \xi \in (x; x_0)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1}}_{Lagrange-flemaradktag}$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Taylor-sor**] Legyen az f függvény az x_0 pontban akárhányszor differenciálható. Ekkot a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 körüli Taylor-sorának nevezzük.

[style=note, nobreak=true,] Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sorot Maclaurin-sornak nevezzük.

[style=example, nobreak=true] Írjuk fel a $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ függvény $x_0 = 1$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

$\mathrm{p}^{(n)}(x)$	$\mathrm{p}^{(n)}(1)$
$\mathrm{p(x)} = \mathrm{x}^3 + 3x^2 + 2$	6
$\mathrm{p'(x)} = 3\mathrm{x}^2 + 6x$	9
$\mathrm{p''(x)} = 6\mathrm{x} + 6$	12
$\mathrm{p'''(x)} = 6$	6

$\mathrm{T}_3(x) = \frac{6}{0!} + \frac{9}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$
$= 6 + 9(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3$

[style=example, nobreak=true] Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát!

$\mathrm{f}^{(n)}(x)$	$\mathrm{f}^{(n)}(0)$
$\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^x$	1
$\mathrm{f'(x)} = \mathrm{e}^x$	1
$\vdots$	$\vdots$
$\mathrm{f}^{(k)}(x) = e^x$	1

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

[style=example, nobreak=true] Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclaurin-sorát!

$\mathrm{f}^{(n)}(x)$	$\mathrm{f}^{(n)}(0)$
$\mathrm{f(x)} = \sin x$	0
$\mathrm{f'(x)} = \cos x$	1
$\mathrm{f''(x)} = \text{-}\sin x$	0
$\mathrm{f'''(x)} = \text{-}\cos x$	-1
$\vdots$	$\vdots$

$$\mathrm{T(x)} \quad = \mathrm{x}^1 \frac{}{1! - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Fontosabb függvények Maclaurin-sorai:**

5pt

Függvény	Taylor-sor	Konvergencia intervallum
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1; 1]$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	
x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$(-1; 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-1; 1]$
$(1+k)^{\alpha}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha k x^k$	$(-1; 1)$

0.2 Feladatok

1. Írja fel a $p(x) = (1+x)^3$ függvény Maclauren-sorát!
2. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli Taylor-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!
$$\begin{array}{lll} f & (1-x)^3 & 1 = \\ g & e^x & 1 = \\ h & \ln x & 1 = \end{array}$$
3. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!
$$\begin{array}{ll} f & \cos 5x \\ g & \sin\sqrt{x} \\ h & \sin^2 x \\ i & \sqrt[3]{\exp(-x^2)} \end{array}$$
4. Adja meg az alábbi törtfüggvények Taylor-sorát!
$$\begin{array}{lll} f & x + 1x + 3 & -2 = \\ & & \\ g & x + 1x + 3 & -1 = \end{array}$$
5. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 2$ pontra illeszkedő Taylor sorát! Mi lesz a konvergenciasugár?
$$f(x) = 1x^2 - 3x + 2$$
6. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!
$$\begin{array}{ll} f & x1 + x^2 \\ & \\ g & \arctan x \\ h & 1\sqrt{2 + x^2} \end{array}$$
7. Melyik függvény Taylor-sora az alábbi?
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n + 1n!x^{2n}$$
8. Hanyadfokú taylor polinom közelíti a $\sin(\pi/60)$ értékét 4 tizedesjegy pontossággal?
9. Számítsa ki 3 tizedesjegy pontossággal az alábbi integrált!
$$\int_0^{0{,}2} e^{2x} x$$