

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Komplex számok BMETE94BG01 3

# Matematika G1

## Komplex számok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

#### 0.1.1 A komplex számok megadási módjai

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Algebrai alak:**

A komplex számok ( $C$ ) algebrai alakja:

$$z = a + b,$$

ahol  $a, b \in$  valós számok, és  $\sqrt{-1}$  az **imaginárius egység**. A komplex szám **valós része**  $\{z\} = a$ , **képzetes része** pedig  $\{z\} = b$ .

[thick, scale=0.75] [->] (-.5, 0) –  
(5, 0) node[right]  $\Re$ ; [->] (0, -.5) –  
(0, 3) node[above]  $\Im$ ;  
[draw=gray, dashed] (1.5,0)  
node[below]  $a - (1.5, 2.5) - (0,$   
2.5) node[left]  $b$ ;  
[fill=primaryColor] (1.5, 2.5) circle  
(0.1) node[above right]  $z = a + b$ ;

[ style=note, nobreak=true, ] Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részük is megegyezik. ( $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{z_1\} = \{z_2\} \wedge \{z_1\} = \{z_2\}$ )

[scale=2/3] in  
(0,0)  
in 0, 1, 2 [lig  
(+ 0.5); [primar  
  
//in  
2/\pi/2/above,  
4/\pi/left,  
7/7\pi/4/below r  
(0,0  
[fill=cyan!10] at

### Trigonometrikus alak:

Térjünk át az eddigi Descartes-féle koordinátarendszerről a **polárkoordináta-rendszerre**, amelyben

[-to, ultra th  
node [above rig

- a komplex szám hossza:  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,
- valós tengellyel bezárt szöge:  $\varphi = \arg z$ .

[secondaryColo  
- (60:2.5); [sec

Ebből az alábbi alakot kapjuk:

[secondaryColo

$$z = r e^{i\varphi}.$$

[draw=primary  
to-to] (150  
node[midway, a  
rotate=60, in

[ultra thick,  
(1.4,0) arc  
angle=  
[fill=cyan!10, in  
sep=  
[fill=primaryC

### Exponenciális alak:

Induljunk ki a trigonometrikus alakból, és használjuk fel az alábbi azonosságokat:

$$\cos \varphi = \cosh \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \sinh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}.$$

A trigonometrikus alakba helyettesítve megkapjuk az exponenciális alakot:

$$z = r e^{i\varphi} = r \left( \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} + i \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \right) = r e^{i\varphi}.$$

## 0.2 Műveletek komplex számokkal

### Konjugált:

[ style=blueBox, nobreak=true, ] Egy  $z = a + b$  komplex szám konjugáltját úgy kapjuk meg, hogy tükrözzük a valós tengelyre, vagyis

$$\bar{z} = \overline{a + b} = a - b.$$

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Inverz:**

Egy  $z = a + b$  komplex szám inverze:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - b}{a^2 + b^2}.$$

Komplex szám inverzének hossza az eredeti szám hosszának a reciproka.

[ultra thick] [-to,  
draw=ternaryColor, thick] (-1, 0)  
- (3, 0) node [below left]  $\Re$ ; [-to,  
draw=ternaryColor, thick] (0,  
-1.5) - (0, 1.5) node [below left]  $\Im$ ;  
[-to, draw=secondaryColor] (0,0) -  
(+30:2.5) coordinate (A)  
node[above, pos=.7]  $z$ ; [-to,  
draw=primaryColor] (0,0) -  
(-30:1.5) coordinate (B)  
node[below, pos=.7]  $z^{-1}$  ;  
(O) at (0,0); (X) at (1,0);  
pic[to-to, " $\varphi$ ", draw=ternaryColor,  
angle eccentricity=0.7, angle  
radius=1.2cm, thick]  
angle=X-O-A; pic[to-to, " $\varphi$ ",  
draw=ternaryColor, angle  
eccentricity=0.7, angle  
radius=1.2cm, thick]  
angle=B-O-X;

### Összeadás és kivonás:

Algebrai alakban, a vektorműveletekhez hasonlóan:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2).$$

### Szorzás:

Algebrai alakban:  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Trigonometrikus alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

### Osztás:

Trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

## Hatványozás:

Trigonometrikus alakban:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Exponenciális alakban:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Ha egy komplex számot az  $n$ -edik hatványra emelünk, akkor

- hossza az  $n$ -szerezére nő,
- argumentuma is az  $n$ -szerezére nő.

## Gyökvonás:

Trigonometrikus alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \text{ ahol } k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Exponenciális alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \text{ ahol } k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Tetszőleges komplex szám  $n$ -edik gyökei egy olyan szabályos  $n$ -szög csúcsai, amelynek középpontja az origó.

[ultra thick, scale=.9] [-to, draw=primaryColor] (-2, 0) -- (2, 0) node [right]  $\Re$ ; [-to, draw=primaryColor] (0, -2) -- (0, 2) node [above]  $\Im$ ;

(P) at (318:1.5);

deg in 30, 102, 174, 246, 318 [draw = primaryColor] (deg : 1.5) coordinate(C) circle(0.1); [dashed, gray](P) --

[xshift=-6cm] [-to, draw=primaryColor] (-2, 0) -- (2, 0) node [right]  $\Re$ ; [-to, draw=primaryColor] (0, -2) -- (0, 2) node [above]  $\Im$ ;

(P) at (300:1.5);

deg in 30, 120, 210, 300 [draw = primaryColor] (deg : 1.5) coordinate(C) circle(0.1); [dashed, gray](P) --

[dashed, gray] (0,0) circle (1.5); [below] at (0,-2)  $\sqrt[4]{z}$ ;  
[xshift=-12cm] [-to, draw=primaryColor] (-2, 0) -- (2, 0) node [right]  $\Re$ ; [-to,  
draw=primaryColor] (0, -2) -- (0, 2) node [above]  $\Im$ ;  
(P) at (315:1.5);  
deg in 75, 195, 315 [draw = primaryColor] (deg : 1.5) coordinate(C) circle(0.1); [dashed, gray] (P) -- (C)  
[dashed, gray] (0,0) circle (1.5); [below] at (0,-2)  $\sqrt[3]{z}$ ;

### 0.3 Feladatok

1. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a)  $\overline{(2 - e^{\pi^3})}$

b)  $5 + 3 - 2i \cdot \overline{*345 \cdot *2270 \cdot e^{5\pi^{12}}}$

c)  $5e^{7\pi^{13}} * 4135 \cdot \overline{(12)} \cdot (2\sqrt{3} + 2)$

2. Végezze el az alábbi hatványozásokat!

a)  $(-1)^{16}$

b)  $(3 + 5)^4 \cdot (21 - 35)^5 \cdot (1 + 1 -)^4$

3. Végezze el az alábbi gyökvonásokat!

a)  $\sqrt[3]{-8}$

b)  $\sqrt[4]{1}$

c)  $\sqrt{3 + 4}$

4. Oldja meg a következő egyenleteket!

a)  $z^4 - 81 = 0$

b)  $z^2 - 6z + 13 = 0$

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + \\ 3z_1 + z_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

6. Adja meg a geometriai helyét azoknak a komplex számoknak, amelyekre ...

a)  $\{z\} > 0$ ,

b)  $|z - a| = |z - b|$ , ahol  $a, b \in C$ ,

c)  $|z| < 1 - \{z\}$ .

7. Egy négyzet két szomszédos csúcsát jelölje a  $z_1 = 3 + 2$  és a  $z_2 = 5 + 4$  komplex szám. Hol található a többi csúcs?

8. Írja fel a  $(-2; 1)$  középpontú, 4 sugarú kör egyenletét a komplex számsíkon!