

Matematika G2

(BMETE94BG02)

Előadásjegyzet

Készítették:

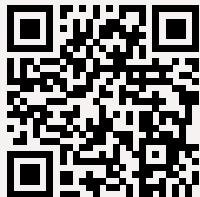
**Kun László Ákos
Sándor Tibor**

Lektorálta:

Dr. Szilágyi Brigitta



(1)



(2)

(1) A jegyzet forráskódja

(<https://github.com/szilagyi-math/notes>)

(2) Tantárgy honlapja

(<https://szilagyi-math.hu/subjects/G2>)

Tartalomjegyzék

1	Lineáris algebra	1
1.1	Alapfogalmak	2
1.2	Mátrixalgebra	6
1.3	Lineáris egyenletrendszerek	14
1.4	Lineáris leképezések	17
2	FüggvénySORozatok, függvénySorok	25
2.1	Alapfogalmak	26
2.2	Taylor-sorok	33
2.3	Fourier-sorok	36
3	Többváltozós analízis	39
3.1	Alapfogalmak	40
3.2	Iránymenti és parciális deriváltak	43
3.3	Középértéktételek	45
3.4	Szélsőértékszámítás	47
3.5	IntegrálSZámítás	50

Definíciók jegyzéke

1 Lineáris algebra	1
1.1 Csoport	2
1.2 Gyűrű	2
1.3 Test	2
1.4 Vektortér	2
1.5 Vektor	3
1.6 Lineáris függetlenség	4
1.7 Altér	4
1.8 Generátorrendszer	4
1.9 Bázis	4
1.10 Vektortér dimenziója	5
1.11 Mátrix	6
1.12 Mátrix transzponáltja	6
1.13 Szimmetrikus mátrix	7
1.14 Antiszimmetrikus mátrix	7
1.15 Mátrixok egyenlősége	7
1.16 Mátrixok összege	7
1.17 Mátrix és skalár szorzata	7
1.18 Mátrixok szorzata	8
1.19 Determináns	9
1.20 Mátrix rangja	11
1.21 Mátrix elemi átalakításai	11
1.22 Reguláris és szinguláris mátrix	12
1.23 Mátrix inverze	12
1.24 Lineáris egyenletrendszer	14
1.25 Ekvivalens lineáris egyenletrendszer	14
1.26 Homogén lineáris egyenletrendszer	15
1.27 Lineáris leképezés	17
1.28 Homomorfizmus	17
1.29 Endomorfizmus	17
1.30 Izomorfizmus	17
1.31 Leképezés magtere	19
1.32 Leképezés defektusa	19
1.33 Lineáris leképezés rangja	19
1.34 Sajátértékek és sajátvektorok	21
1.35 Skaláris szorozat	22
1.36 Euklideszi tér	23
1.37 Ortonormált bázis	23
1.38 Ortogonális transzformáció	23
1.39 Bázistranszformáció	24
2 FüggvénySORATOK, függvénySOROK	25
2.1 FüggvénySORAT	26
2.2 FüggvénySORAT pontbeli konvergenciája	26
2.3 FüggvénySORAT határfüggvénye	26
2.4 FüggvénySORAT egyenletes konvergenciája	26
2.5 FüggvénySOR	27

2.6	Függvény sor pontbeli konvergenciája	27
2.7	Függvény sor konvergencia halmaza	28
2.8	Függvény sor egyenletes konvergenciája	28
2.9	Függvény sor összegfüggvénye	28
2.10	Függvény sor abszolút konvergenciája	28
2.11	Hatványsor	29
2.12	Hatványsor konvergenciasugara	29
2.13	Taylor-polinom	33
2.14	Taylor-sor	34
2.15	Trigonometrikus polinom	36
2.16	Trigonometrikus sor	36
2.17	Fourier-sor	36
3	Többváltozós analízis	39
3.1	Gömbkörnyezet	40
3.2	Pontsorozat konvergenciája	40
3.3	Többváltozós függvény határértéke	40
3.4	Többváltozós függvény folytonossága	41
3.5	Többváltozós függvény differenciálhatósága	41
3.6	Többváltozós függvény differenciálhatósága	42
3.7	Iránymenti derivált	43
3.8	Gradiens	43
3.9	Jacobi-mátrix	44
3.12	Többváltozós függvény maximuma	47
3.13	Többváltozós függvény minimuma	47
3.14	Stacionárius pont	47
3.15	Lineáris forma	47
3.16	Billineáris forma	47
3.17	Kvadratikus forma	48
3.19	Lagrange féle multiplikátor	49
3.20	Primitív függvény	50
3.29	Diffeomorfizmus	57

Tételek jegyzéke

1 Lineáris algebra	1
1.1 Kifejtési tétel	9
1.2 Lineárisan független vektorok	10
1.3 Mátrixok rangszámának tétele	11
1.4 A determinánsok szorzástétele	12
1.5 Ferde kifejtési tétel	12
1.6 LER megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele	15
1.7 Lineáris leképezések alaptétele	17
1.8 Rang-nullitás tétele	20
1.9 Másik bázisra való áttérés mátrixa	20
1.10 Sajátértékek számítása	21
2 FüggvénySORozatok, függvénySorok	25
2.1 Cauchy-kritérium függvénySorozatok konvergenciájára	27
2.2 Cauchy-féle konvergencia kritérium egyenletes konvergenciára	28
2.3 Weierstrass-tétel függvénySorok egyenletes konvergenciájára	28
2.4 FüggvénySor konvergenciája	29
2.5 Tagonkénti integrálhatóság	30
2.6 Tagonkénti differenciálhatóság	30
2.7 Hatványsor konvergenciája	30
2.8 Cauchy-Hadamard-tétel	31
2.9 Abel második tétele	32
2.10 Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal	33
3 Többváltozós analízis	39
3.1 Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel	40
3.2 Átviteli elv egyváltozós függvényekre	41
3.3 Az átviteli elv általánosítása	41
3.4 Young-tétel	44
3.5 Lagrange-tétel	45
3.11 Primitív függvény létezésének szükséges feltétele	50
3.12 Primitív függvény létezésének elégséges feltétele	50
3.13 Darboux-tétel	53
3.15 Lebesgue-tétel	55
3.16 Középértéktétel	56

1 Lineáris algebra

A Matematika G2 kurzus első felében lineáris algebrával fogunk foglalkozni. Ez a matematika azon területe, amely számos tudományágban és gyakorlati alkalmazásban meghatározó szerepet játszik. Célunk a vektorterekkel, mátrixokkal és lineáris leképezésekkel kapcsolatos alapvető ismeretek átadása, valamint a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának és megoldásának vizsgálata. A vektorterek és a mátrixok a matematika és a mérnöki tudományok számos területén alapvető szerepet töltnek be, segítenek leírni, megérteni bonyolultabb rendszereket és struktúrákat. A lineáris egyenletrendszerek megoldása szoros kapcsolatban áll a vektorterek és a mátrixok tulajdonságaival. A mátrixok lehetővé teszik a lineáris transzformációk hatékony leírását.

A jegyzet ezen része a lineáris algebra alapjait igyekszik bemutatni: néhány korábban tanult definíció felelevenítését követően, a vektorterek definíciója és azok tulajdonságai, a mátrixműveletek elmélete, majd a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszerei következnek, végül a lineáris leképezések áttekintésével zárul. A célunk, hogy a témák megértéséhez szükséges elméleti ismeretek mellett gyakorlati példákon keresztül is bemutassuk a lineáris algebra széleskörű alkalmazási lehetőségeit.

Ez a jegyzet segít abban, hogy az Olvasó képet kapjon a lineáris algebra fontosságáról és alkalmazásairól.

A fejezetben érintett téma-körök

1.1	Alapfogalmak	2
1.2	Mátrixalgebra	6
1.3	Lineáris egyenletrendszerek	14
1.4	Lineáris leképezések	17

1.1. Alapfogalmak

Definíció 1.1: Csoport

Legyen G nemüres halmaz, és \circ egy művelet. Ekkor a $(G; \circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\forall a; b; c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (asszociativitás)
2. $\exists e \in G : \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$, (egységelem)
3. $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. (inverzelem)

Ha a \circ művelet kommutatív, azaz $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$, akkor a csoportot **Abel-csoportnak** nevezzük.

A $(\mathbb{R}; \cdot)$, $(\mathbb{Q}; +)$, $(\mathbb{C}; +)$ mindegyike Abel-csoport.

Nem csoport $(\mathbb{N}; +)$, hiszen nincs inverz elem.

$(\mathbb{Q}^*; +)$ sem csoport, mert nem létezik egységelem.

Definíció 1.2: Gyűrű

Legyen R nemüres halmaz, és \circ , $+$ két művelet. Ekkor a $(R; +, \circ)$ gyűrű, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(R; +)$ **Abel-csoport**,
2. $\forall a; b; c \in R : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (asszociativitás)
3. teljesül a disztributivitás:
 - $\forall a; b; c \in R : a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$, (+ disztributív \circ -ra)
 - $\forall a; b; c \in R : (a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$. (\circ disztributív $+$ -ra)

Definíció 1.3: Test

Legyen T nemüres halmaz, és \circ , $+$ két művelet. Ekkor a $(T; +, \circ)$ test, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(T; +)$ **Abel-csoport**,
2. $\forall a; b; c \in T : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (asszociativitás)
3. $\exists e \in T : \forall a \in F : e \circ a = a \circ e = a$, (egységelem)
4. $\forall a \in T \exists a^{-1} \in T : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$, (inverzelem)
5. teljesül a **disztributivitás**.

A $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$, $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ mindegyike test.

Definíció 1.4: Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és \circ , $+$ két művelet, T test. A $(V; +, \circ)$ a T test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V; +)$ Abel-csoport,
2. $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda \circ \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ (\mu \circ \mathbf{x})$,
3. ha ε a T -beli egységelem, akkor $\forall \mathbf{x} \in V : \varepsilon \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
4. teljesül a disztributivitás:
 - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : \lambda \circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \circ \mathbf{x} + \lambda \circ \mathbf{y}$,
 - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \mathbf{x} \in V : (\lambda + \mu) \circ \mathbf{x} = \lambda \circ \mathbf{x} + \mu \circ \mathbf{x}$.

A legfeljebb n -edfokú polinomok a skalárral való szorzásra és az összeadásra vektorteret alkotnak.

A függvények az összeadásra és a skalárral való szorzásra vektorteret alkotnak.

Definíció 1.5: Vektor

A vektortér elemeit vektoroknak nevezzük. Jelölés: \mathbf{x} , vagy \underline{x} .

A zéruselem létezése egyértelmű.

Bizonyítás:

! Tegyük fel, hogy $\mathbf{0}$ és $\hat{\mathbf{0}}$ különböző zéruselemek, vagyis $\mathbf{0} \neq \hat{\mathbf{0}}$. Ebben az esetben

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \hat{\mathbf{0}} = \hat{\mathbf{0}}.$$

Ez ellentmondás, tehát a zéruselem egyértelmű.

Az ellenáll elem létezése egyértelmű.

Bizonyítás:

! Tegyük fel, hogy $-\mathbf{v}$ és $-\hat{\mathbf{v}}$ egyaránt \mathbf{v} ellenálljei, valamint $-\mathbf{v} \neq -\hat{\mathbf{v}}$. Ebben az esetben

$$-\hat{\mathbf{v}} = (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) + (-\hat{\mathbf{v}}) = (-\mathbf{v}) + (\mathbf{v} + (-\hat{\mathbf{v}})) = -\mathbf{v}.$$

Ez ellentmondás, tehát az ellenáll elem egyértelmű.

0-val való szorzás: $\forall \mathbf{v} \in V : 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás:

Nullvektorral való szorzás: $\forall \lambda \in T : \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás:

$$\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Bizonyítás:

Definíció 1.6: Lineáris függetlenség

A $(V; +; \lambda)$ vektortér $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorait lineárisan függetlennek mondjuk, ha a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

vektoregyenletnek **csak a triviális megoldása** létezik, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ha az egyenletnek nem csak a triviális megoldása létezik, akkor a vektorok lineárisan függők.

Definíció 1.7: Altér

Legyen $(V; +; \lambda) \mathbb{R}$ feletti vektortér, valamint $\emptyset \neq L \subset V$. L -t altérnek nevezzük a V -ben, ha $(L; +; \lambda)$ ugyancsak vektortér.

A polinomok vektorterének altere a legfeljebb n -edfokú polinomok vektortere.

! Alterek metszete ugyancsak altér. Alterek uniója azonban általában nem altér.

Definíció 1.8: Generátorrendszer

Legyen V vektortér, valamint $\emptyset \neq G \subset V$. G által generált altérnek nevezzük azt a legszűkebb alteret, amely tartalmazza G -t. Jele: $\mathcal{L}(G)$.

G generátorrendszer V -nek, ha $\mathcal{L}(G) = V$.

Ha G véges generátorrendszer V -nek, akkor G -t végesen generált vektorrendszernek nevezzük.

Definíció 1.9: Bázis

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V bázisának nevezzük.

! Végesen generált vektortérben bármely két bázis azonos tagszámú.

Definíció 1.10: Vektortér dimenziója

Végesen generált vektortér dimenzióján a bázisainak közös tagszámát értjük.

Legyen $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ a V vektortér egy bázisa. Ekkor tetszőleges V -beli vektor egyértelműen előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

Azaz $\forall \mathbf{v} \in V : \exists!(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$, hogy

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n.$$

A $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ szám n -est az \mathbf{v} vektor $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázisaira vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Bizonyítás (Egzisztencia):

$\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ lineárisan függetlenek, mert bázis. Ezért $\{\mathbf{v}, \mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ már lineárisan függő, így a $\mu \mathbf{v} + \xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \xi_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ vektoregyenletnek létezik triviálisból különböző megoldása, azaz nem lehet $(\mu; \xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ minden eleme egyszerre 0.

Tehát $\mu \neq 0$, mert ellenkező esetben $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ állna fent, így oszthatjuk az egyenletet μ -vel:

$$\mathbf{v} = \underbrace{\left(-\frac{\xi_1}{\mu} \right)}_{:=\lambda_1} \mathbf{b}_1 + \underbrace{\left(-\frac{\xi_2}{\mu} \right)}_{:=\lambda_2} \mathbf{b}_2 + \dots + \underbrace{\left(-\frac{\xi_n}{\mu} \right)}_{:=\lambda_n} \mathbf{b}_n.$$

Bizonyítás (Unicitás):

Tegyük fel, hogy a $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ és a $(\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_n)$ is a \mathbf{v} koordinátái a $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázisban, azaz

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}_i \text{ és } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{b}_i.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$\mathbf{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_0 \mathbf{b}_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \mu_2)}_0 \mathbf{b}_2 + \dots + \underbrace{(\lambda_n - \mu_n)}_0 \mathbf{b}_n.$$

Ezzel ellentmondásra jutunk, mivel $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázis, ezért a nullvektornak csak triviális előállítása létezik, ami az együtthatók 0 voltát vonná maga után, az pedig a megfelelő koordináták egyenlőségével ekvivalens. A feltevés tehát hamis.

1.2. Mátrixalgebra

Definíció 1.11: Mátrix

Egy mátrix vízszintes vonalban elhelyezkedő elemei **sorokat**, míg függőlegesen elhelyezkedő elemei **oszlopokat** alkotnak.

Egy m sorból és n oszlopból álló mátrix jelölése:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mátrixok jelölése nyomtatott szövegben: **A**.

Mátrixok jelölése írásban: A.

Az $m \times n$ -es mátrixok halmazának jelölései: $\mathcal{M}_{m \times n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m \times n}$.

A mátrix i -edik sorában és j -edik oszlopában található elemet a_{ij} -vel jelöljük.

A mátrix dimenzióit mindig először a sorok számával, majd azt követően az oszlopok számával adják meg.

Speciális mátrixstruktúrák:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1} \sim \text{oszlopvektor / oszlopmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times n} \sim \text{sorvektor / sormátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{kvadratikus / négyzetes mátrix}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \sim \text{egységmátrix}$$

$$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n} \sim \text{nullmátrix}$$

Definíció 1.12: Mátrix transzponáltja

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix transzponáltja a főátlójára vett tükröképe. Jele: $\mathbf{A}^\top \in \mathcal{M}_{n \times m}$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$$

Definíció 1.13: Szimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

Definíció 1.14: Antiszimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix antiszimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$.

Antiszimmetrikus mátrixok főátlójában csak nullák szerepelnek.

Definíció 1.15: Mátrixok egyenlősége

Két mátrix akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő helyeken álló elemei egyenlők.

$$\mathbf{!A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m \times n} : \mathbf{A} = \mathbf{B} \iff \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \wedge \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij} = b_{ij}$$

Definíció 1.16: Mátrixok összege

Két mátrix összegén azt a mátrixot értjük, melyet a két mátrix elemenkénti összeadásával kapunk, azaz, ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m \times n}$, akkor $\mathbf{C} := \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m \times n}$, ahol $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok összegét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+5 & 3+4 \\ 4+3 & 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.17: Mátrix és skalár szorzata

Egy mátrix és egy skalár szorzata olyan mátrix, melynek minden eleme skalárszorosa az eredeti mátrix elemeinek, azaz ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbf{C} := \lambda \mathbf{A}$, ahol $c_{ij} := \lambda a_{ij}$.

Határozzuk meg a $\lambda = 2$ skalár és az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix szorzatát!

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.18: Mátrixok szorzata

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times p}$. Ekkor a két mátrix szorzata

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \text{ ahol } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

A mátrixszorzás vizualizálása:

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \sum a_{1i}b_{i1} & \dots & \sum a_{1i}b_{ip} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \dots & \sum a_{2i}b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{ni}b_{i1} & \dots & \sum a_{ni}b_{ip} \end{array} \right]$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixok szorzatát!

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 7 & 8 \\ -5 & -2 \end{array} \right]$$

Ha \mathbf{A} , \mathbf{B} és \mathbf{C} olyan mátrixok, hogy létezik az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ mátrixszorzat, akkor az $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ mátrixszorzat is létezik, és ezek egyenlők.

A mátrixszorzás tehát **asszociatív**.



Bizonyítás:

Ha \mathbf{A} , \mathbf{B} és \mathbf{C} olyan mátrixok, hogy létezik az $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ szorzat, akkor az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ és az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ mátrixszorzatok is léteznek, valamint $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.

Teljesül tehát a **disztributivitás**.

Bizonyítás:

Definíció 1.19: Determináns

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ kvadratikus mátrix, és $\det : \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. A mátrix i -edik oszlopának elemeit tartalmazó oszlopvektorokat \mathbf{a}_i -vel jelöljük. Az \mathbf{A} determinánsának nevezzük $\det \mathbf{A}$ -t, a hozzárendelést pedig az alábbi négy axióma írja le:

1. homogén:

$$\det(\dots \lambda \mathbf{a}_i \dots) = \lambda \det(\dots \mathbf{a}_i \dots),$$

2. additív:

$$\det(\dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}_i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}_i \dots),$$

3. alternáló:

$$\det(\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots),$$

4. \mathbb{E} determinánsa:

$$\det \mathbb{E} = \det(\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \dots \hat{\mathbf{e}}_n) = 1,$$

Ha egy mátrixban van két azonos oszlop, akkor a determinánsa nulla.

Bizonyítás:

Egy mátrix determinánsa nem változik, ha az egyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopának skalárszorosát.

Bizonyítás:

Tétel 1.1: Kifejtési téTEL

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \left(\sum_{j=1}^n a_{j1} \hat{\mathbf{e}}_j; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n \right) \\
 &= a_{11} \det(\hat{\mathbf{e}}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n) + a_{21} \det(\hat{\mathbf{e}}_2; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n) + \dots + a_{n1} \det(\hat{\mathbf{e}}_n; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n) \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{n1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Jelölje a k . sor és j . oszlop kitakarásával kapott aldeterminánst \mathbf{A}_{kj} , ekkor az egyenlőség a következőképpen írható át:

$$a_{11}\mathbf{A}_{11} - a_{21}\mathbf{A}_{21} + \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}\mathbf{A}_{n1}.$$

Vezessük be a következő jelölést: $\bar{\mathbf{A}}_{kj} = (-1)^{k-1} \mathbf{A}_{kj}$. Így:

$$a_{11}\bar{\mathbf{A}}_{11} + a_{21}\bar{\mathbf{A}}_{21} + \dots + a_{n1}\bar{\mathbf{A}}_{n1} = \sum_{j=1}^n a_{j1}\mathbf{A}_{j1} = \dots = \sum_{k=1}^n (-1)^\varepsilon a_{k1}a_{k2} \dots a_{kn} \det \mathbb{E},$$

ahol ε az inverziók száma és \mathbb{E} az egységmátrix.

A kifejtési téTELből következményei:

- Nem lényeges, hogy sorról vagy oszlopról beszélünk a determinánssal kapcsolatban:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top.$$

- A determináns bármely sora vagy oszlopa alapján kifejthető:

$$\det \mathbf{A} = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{kj} \bar{\mathbf{A}}_{kj}}_{j\text{-edik oszlop szerint}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{\mathbf{A}}_{ik}}_{i\text{-edik sor szerint}}$$

Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát!

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 6 = 7 - 12 = -5$$

Tétel 1.2: Lineárisan független vektorok

Az $\{\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n\}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\det(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n) \neq 0$.

Bizonyítás:

Definíció 1.20: Mátrix rangja

A mátrix rangjának nevezük az oszlopvektorai közül a lineárisan függetlenek maximális számát.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix rangját!

Az \mathbf{A} mátrix rangja 2, mivel a harmadik oszlop a második oszlop skalárszorosaként áll elő.

Tétel 1.3: Mátrixok rangszámának tétele

Egy mátrix rangja megegyezik maximális el nem tűnő aldeterminánsának rendjével.

Bizonyítás:

Definíció 1.21: Mátrix elemi átalakításai

Egy mátrix elemi átalakításainak nevezik a következőket:

- A mátrix egy tetszőleges sorát vagy oszlopát egy 0-tól különböző számmal megszorozzuk.
- A mátrix egy tetszőleges sorát vagy oszlopát felcseréljük.
- A mátrix egy tetszőleges sorához vagy oszlopához egy másik tetszőleges sorát vagy oszlopát adjuk.

Egy mátrix rangja elemi átalakítások során nem változik.

**Bizonyítás:**

A determináns axiómáit figyelembe véve látható, hogy az elemi átalakítások nem változtatják meg a determináns 0 voltát.

Definíció 1.22: Reguláris és szinguláris mátrix

Egy kvadratikus (négyzetes) mátrixot **regulárisnak** mondunk, ha determinánsa nem zérus.

Ha a kvadratikus mátrix determinánsa 0, **szinguláris** mátrixról beszélünk.

Tétel 1.4: A determinánsok szorzástétele

Legyen $\mathbf{A}; \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix, ekkor $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

Bizonyítás:

$(\mathcal{M}_{n \times n}; +; \cdot)$ egységelemes gyűrű, mert...

- $(\mathcal{M}_{n \times n}; +)$ Abel-csoport,
- $(\mathcal{M}_{n \times n}; \cdot)$ asszociatív,
- teljesül a disztributivitás,
- létezik a szorzás egységeleme, amely maga az egységmátrix.

Definíció 1.23: Mátrix inverze

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix inverzét az \mathbf{A}^{-1} jelöli, és az a mátrix, melyre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{E}$ teljesül.

Tétel 1.5: Ferde kifejtési téTEL

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$, ekkor

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{A}_{ki} = 0, \text{ ha } j \neq k.$$

Bizonyítás:

Egy szinguláris mátrixnak nem létezik inverze.

Bizonyítás (Indirekt módon):

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ szinguláris mátrix. Tegyük fel, hogy létezik az inverze. Ekkor igaz, hogy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{E}$. Vizsgáljuk meg a következő egyenlőséget:

$$\underbrace{\det \mathbf{A}}_{=0} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = \det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \underbrace{\det \mathbb{E}}_{=1}.$$

Látjuk, hogy ezzel ellentmondásra jutunk.

Reguláris mátrix inverze egyértelmű. Ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$, akkor

$$\mathbf{A}^{-1} := \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}.$$

Bizonyítás:

Egy 3×3 -as mátrix adjungáltja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

1.3. Lineáris egyenletrendszer

Definíció 1.24: Lineáris egyenletrendszer

Véges sok elsőfokú egyenletet és véges sok ismeretlenet tartalmazó egyenletrendszeret lineáris egyenletrendszernek nevezünk.

Az m egyenletből és n ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

ahol a_{ij} együtthatók, b_j konstansok, x_j ismeretlenek.

Lineáris egyenletrendszer csoportosítása:

- A lineáris egyenletrendszeret **megoldhatónak** nevezzük, ha létezik megoldása.
- A lineáris egyenletrendszeret **ellentmondónak** nevezzük, ha nincs megoldása.
- A lineáris egyenletrendszeret **határozottnak** nevezzük, ha csupán egyetlen megoldása van.
- A lineáris egyenletrendszeret **határozatlannak** nevezzük, ha végelyen sok megoldása van.

Definíció 1.25: Ekvivalens lineáris egyenletrendserek

Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha a megoldáshalmazuk megegyezik.

Az ekvivalencia szemponjából az egyenletek és az ismeretlenek sorrendje nem számít.

Az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszer kapunk, ha az egyenletrendszer valamelyik egyenletét egy nem nulla számmal szorozzuk, vagy valamelyik egyenlethez a lineáris egyenletrendszer egy másik egyenletét hozzáadjuk.

Bizonyítás:



Lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

Egy lineáris egyenletrendszer felírható $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ alakban, ahol \mathbf{A} az együttható mátrix, \mathbf{x} az ismeretlenek vektora, \mathbf{b} pedig a konstans vektor.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Tétel 1.6: LER megoldhatóságának szükséges és elégsges feltétele

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, ahol az $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ mátrixot kibővített mátrixnak nevezzük.

A feltétel mátrixosan:

$$\text{rg} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \text{rg} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right].$$

Bizonyítás:

Definíció 1.26: Homogén lineáris egyenletrendszer

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer homogénnek mondjuk, ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor a lineáris egyenletrendszer inhomogén.

A feltételből következik, hogy homogén lineáris egyenletrendszer ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) minden megoldható, hiszen az együttható mátrixból és egy nullvektorból képzett kibővített mátrix rangja minden meg fog egyezni az együttható mátrix rangjával.

Tekintsük az n egyenletből és n ismeretlenből álló homogén lineáris egyenletrendszerét. Ekkor ha az \mathbf{A} mátrix reguláris, akkor az egyenletrendszernek csak a triviális megoldása létezik. Ha az \mathbf{A} szinguláris, akkor létezik nemtriviális megoldás is.

Megoldási módszerek:

1. Ha az \mathbf{A} mátrix reguláris, akkor invertálható és az $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
2. Cramer-szabály: ha az \mathbf{A} mátrix reguláris, akkor az együtthatók az alábbi módon számíthatóak:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}},$$

ahol az \mathbf{A}_i mátrixot úgy képezzük, hogy az i -edik oszlopába \mathbf{b} vektort írjuk be.

3. Gauss-elimináció: sorműveletekkel alakítjuk a kibővített mátrixot:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \square & \square & \cdots & \square & \square \\ 0 & \square & \cdots & \square & \square \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \circ & \circ \end{array} \right]$$

1.4. Lineáris leképezések

Definíció 1.27: Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1 -beli vektor ($\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$) és T -beli skalár ($\lambda \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$ \sim additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\varphi(\mathbf{a})$ \sim homogén (skalár kiemelhető).

$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ minden lineáris leképezés esetén.

A linearitás miatt $\varphi(-\mathbf{a}) = -\varphi(\mathbf{a})$.

Definíció 1.28: Homomorfizmus

$$\text{Hom}(V_1; V_2) := \{ \varphi : V_1 \rightarrow V_2 \mid \varphi \text{ lineáris} \}$$

Definíció 1.29: Endomorfizmus

$$\text{End}(V) := \text{Hom}(V; V)$$



$(\text{Hom}(V_1; V_2), +, \lambda)$ vektortér \mathbb{R} vagy \mathbb{C} felett.

Definíció 1.30: Izomorfizmus

A $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés izomorfizmus, ha lineáris és bijektív.



Véges dimenziójú vektorterek esetén az egymással izomorf vektorterek dimenziója azonos.

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = \dim V_2$. Ekkor $V_1 \simeq V_2$

Bizonyítás:



Tétel 1.7: Lineáris leképezések alaptétele

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és legyen $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázis V_1 -ben, és $\{\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n\}$ tetszőleges vektorrendszer V_2 -ben. Ekkor egyetlen lineáris leképezés létezik, melyre $\varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{a}_i$, ahol $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bizonyítás (Unicitás, indirekt módon):

Legyenek $\varphi \neq \psi$ lineáris leképezések, melyekre $\varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{a}_i$ és $\psi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{a}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Legyen $\mathbf{x} \in V_1$ tetszőleges, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{b}_i$. Hattassuk φ -t \mathbf{x} -re:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi(\mathbf{b}_i) = \xi_1 \varphi(\mathbf{b}_1) + \dots + \xi_n \varphi(\mathbf{b}_n) \\ &= \xi_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \xi_n \mathbf{a}_n = \xi_1 \psi(\mathbf{b}_1) + \dots + \xi_n \psi(\mathbf{b}_n) = \psi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{b}_i\right) = \psi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Ezzel $\varphi = \psi$, ami ellentmond a feltételnek, tehát a feltevés nem igaz.

Bizonyítás (Egzisztencia, konstruktív bizonyítás):

Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés, és $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x})$. Ha $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ az \mathbf{x} koordinátái, akkor $\varphi(\mathbf{x}) = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \xi_n \mathbf{a}_n$. Hasonló módon legyen $(\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$ az \mathbf{y} koordinátái. Ekkor:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (\xi_1 + \eta_1) \mathbf{a}_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n) \mathbf{a}_n \\ &= \xi_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \xi_n \mathbf{a}_n + \eta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \eta_n \mathbf{a}_n = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}), \\ \varphi(\lambda \mathbf{x}) &= \lambda \xi_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda \xi_n \mathbf{a}_n = \lambda(\xi_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \xi_n \mathbf{a}_n) = \lambda \varphi(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Lineáris leképezések mátrixreprezentációja:

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = n$, valamint $\dim V_2 = k$. Legyen $\{\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_n\}$ bázis V_1 -ben, és $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázis V_2 -ben. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi(\mathbf{a}_i) = \alpha_{1i} \mathbf{b}_1 + \alpha_{2i} \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_{ki} \mathbf{b}_k = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} \mathbf{b}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}_{k \times n}.$$

Az \mathbf{A} mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $\mathbf{x} \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ az \mathbf{x} koordinátái, ekkor a képét az alábbi módon számíthatjuk:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi(\mathbf{a}_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

! $\varphi : \text{Hom}(V_1; V_2) \rightarrow \mathcal{M}_{k \times n}$ izomorfizmus, ahol $\dim V_1 = k$ és $\dim V_2 = n$.

Következmény: $\dim(\text{Hom}(V_1; V_2)) = n \cdot k = \dim V_1 \cdot \dim V_2$.

Legyenek V_1, V_2 és V_3 vektorterek, $\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = m$ és $\dim V_3 = n$. Legyenek $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ és $\psi : V_2 \rightarrow V_3$ lineáris leképezések, ekkor a V_1 -ből V_3 -ra való leképezés $(\psi \circ \varphi : V_1 \rightarrow V_3)$ olyan, hogy ha $\varphi \leftrightarrow \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times k}$ és $\psi \leftrightarrow \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times m}$, akkor $\psi \circ \varphi \leftrightarrow \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n \times k}$, ahol $\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Speciálisan, ha $V_1 = V_2 = V_3 = V$, $\dim V = n$, akkor $\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Következmény: Invertálható lineáris leképezés mátrixa invertálható.

Definíció 1.31: Leképezés magtere

Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker \varphi := \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V_1 \wedge \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

$\ker \varphi$ altér V_1 -ben.

Bizonyítás:

Definíció 1.32: Leképezés defektusa

A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $\text{def } \varphi$ -vel jelöljük.

- Nem létezik olyan vektortér, melynek magtere az üreshalmaz (a nullvektor mindenbenne van, mert a nullvektor képe minden nullvektor).
- Invertálható lineáris leképezés magtere a nullvektor.

A φ leképezés injektív, akkor és csak akkor, ha $\ker \varphi = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{def } \varphi = 0$.

Bizonyítás:

Definíció 1.33: Lineáris leképezés rangja

Egy lineáris leképezés rangjának nevezük a képtér dimenzióját. $\text{rg } \varphi = \dim \varphi(V_1)$.

Tétel 1.8: Rang-nullitás tétele

Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\text{rg } \varphi + \text{def } \varphi = \dim V_1.$$

Bizonyítás:

Tetszőleges lineáris leképezés rangja megegyezik bármely bázisra vonatkozó mátrixreprezentációjának rangjával. $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, $\dim V_1 = m$, $\dim V_2 = n \Rightarrow \varphi \leftrightarrow \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $\text{rg } \varphi = \text{rg } \mathbf{A}$.



Bizonyítás:

Tétel 1.9: Másik bázisra való áttérés mátrixa

Legyen $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés, $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ és $\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisok V -ben. A $\varphi\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa \mathbf{A} , a $\varphi\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\hat{\mathbf{A}}$. Jelölje \mathbf{S} a $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ bázisról a $\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}.$$

Bizonyítás:

- A fenti tételeben szereplő \mathbf{A} és $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixok hasonlóak.
- Hasonló mátrixok determinánса megegyezik.
- Hasonló mátrixok rangja egyenlő.

Definíció 1.34: Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen V a T test feletti vektortér, $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. \mathbf{v} -t a $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés sajátvektorának mondjuk, ha önmaga skalárszorosába megy át a leképezés során, azaz $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, $\lambda \in T$. λ -t a \mathbf{v} sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

Ha a \mathbf{v} sajátvektora a φ -nek, akkor annak skalárszorosa is.

Tétel 1.10: Sajátértékek számítása

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix sajátértékeit a

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

Bizonyítás:

Legyen \mathbf{v} az \mathbf{A} sajátvektora. Ekkor teljesül az $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ egyenlet. Ezt átalakítva:

$$\mathbf{Av} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Av} - \lambda\mathbb{E}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Így egy olyan homogén lineáris egyenletrendszer kapunk, amelynek létezik a triviális-tól eltérő ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) megoldása, tehát $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$.

A $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$ egyenletet **karakterisztikus egyenletnek** nevezzük.

A $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E})$ polinomot **karakterisztikus polinomnak** nevezzük.

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:



Szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak.

Bizonyítás:

!

Az n -edrendű szimmetrikus mátrixnak van n darab, páronként egymásra merőleges sajátvektora.

Bizonyítás:

!

Határozzuk meg az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} - \lambda \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet, és ennek alapján a sajátértékek:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{E}) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

A sajátvektorokat az $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{E})\mathbf{v}_i = 0$ egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

1. A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow \mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.35: Skaláris szorzat

Legyen V egy \mathbb{R} feletti vektortér, és $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyet skaláris szorzatnak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}; \mathbf{x} \rangle$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén, **(szimmetrikus)**
2. $\langle \lambda \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, **(homogén)**
3. $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1; \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2; \mathbf{y} \rangle$ minden $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V$ esetén, **(additív)**
4. $\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \geq 0$, egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. **(nemnegatív)**

Definíció 1.36: Euklideszi tér

Legyen $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \dots; \mathbf{e}_n\}$ kanonikus bázis, melyben

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i.$$

Az így előállított $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ valós euklideszi tér.

Jelölése: \mathbb{E}^n : n dimenziós euklideszi tér.

A valós euklideszi térben értelmezhetjük a vektorok hosszát: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle}$.

Valamint értelmezhetjük \mathbf{x} és \mathbf{y} vektorok szögét: $\cos \angle(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \in [-1; 1]$.

Valós euklideszi térekben érvényesek a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz-egyenlőtlenség:

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}; \mathbf{y} \rangle.$$

Ebből következik, hogy a háromszög egyenlőtlenség is teljesül:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Definíció 1.37: Ortonormált bázis

A $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n dimenziós euklideszi tér $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \dots; \mathbf{e}_n\}$ bázisát ortonormáltnak mondjuk, ha $\langle \mathbf{e}_i; \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, ahol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j, \end{cases}$$

az úgynévezett Kronecker-delta.

Definíció 1.38: Ortogonális transzformáció

Az n dimenziós euklideszi tér $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformációját ortogonálisnak mondjuk, ha $\langle \mathcal{A}\mathbf{x}; \mathcal{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle$, minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén.

- Ortogonális transzformáció normatartó.
- Ortogonális transzformáció szögtartó.
- Ortogonális transzformáció ortonormált bázist ortonormált bázisba visz át.

Definíció 1.39: Bázistranszformáció

Legyenek $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$ és $\{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázisok V -ben. Ekkor a $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\} \rightarrow \{\hat{\mathbf{b}}_1; \hat{\mathbf{b}}_2; \dots; \hat{\mathbf{b}}_n\}$ bázistranszformáció \mathbf{S} mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{b}}_1 = s_{11}\mathbf{b}_1 + s_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{n1}\mathbf{b}_n \\ \hat{\mathbf{b}}_2 = s_{12}\mathbf{b}_1 + s_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{n2}\mathbf{b}_n \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_j = s_{1j}\mathbf{b}_1 + s_{2j}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{nj}\mathbf{b}_n \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_n = s_{1n}\mathbf{b}_1 + s_{2n}\mathbf{b}_2 + \dots + s_{nn}\mathbf{b}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$



A bázistranszformáció mátrixa minden invertálható.

2

FüggvénySORozatok, függvénySorok

Ebben a fejezetben a számsorozatokról (numerikus sorozatokról) és a sorokról tanult ismertetéinket bővíjtük, emeljük magasabb szintre: függvényekből alkotott sorozatokkal és sorokkal foglalkozunk. Míg egy számsorozat esetén egyetlen határértékét létezését vizsgáltuk, addig egy függvénySORozat értelmezési tartományának pontjaiban vizsgáljuk a konvergenciát. Azon pontok halmaZát, ahol a függvénySORozat konvergens, konvergenciahalmaZnak hívjuk. Ezekben a pontokban a függvénySORozat a határfüggvényhez tart. Ahogy numerikus sornál is külön nevet adtunk a határértéknak (sorösszeg), úgy függvénySorok esetén összegfüggvényről beszélünk. Megvizsgáljuk, hogy ez a konvergencia hogyan valósulhat meg, és bevezetjük a pontonkénti és az egyenletes konvergencia kulcsfontosságú fogalmait. Látni fogjuk, hogy az utóbbi egy erős tulajdonság, amely lehetővé teszi, hogy a függvények olyan kellemes tulajdonságai, mint a folytonosság vagy az integrálhatóság, "örököljenek" a határfüggvényre, összegfüggvényre. Megismerekedünk a hatványsorokkal, amelyek esetén a konvergencia könnyebben vizsgálható, nem egyszer a numerikus sorok esetén megismert eljárásoknak köszönhetően.

A fejezet második felében fontos és széles körben alkalmazott függvénySorokkal foglalkozunk. A Taylor-sorok speciális hatványsorok, amelyek a korábban megismert Taylor-polinomok általánosításaiként is tekinthetők. Használatukkal bonyolult függvényeket közelíthetünk polinomokkal. Ez a technika a mérnöki számításoktól a fizikai modellezésig számtalan területen elengedhetetlen.

A Fourier-sorok használata a periodikus függvényekkel való számolásokat könnyítheti meg, azok szinuszok és koszinuszok végtelen összegeként való előállításával foglalkoznak. A Fourier-sorok alapvető eszközöt jelentenek a jelenségek frekvenciakomponensekre való bontásához, így kulcsfontosságúak a jelfeldolgozásban, az akusztikában és a képfeldolgozásban.

Ez a fejezet tehát ajtót nyit a függvények egy új, dinamikusabb szemléletére, amely elengedhetetlen a modern matematika és alkalmazásainak megértéséhez.

A fejezetben érintett témaKörök

2.1 Alapfogalmak	26
2.2 Taylor-sorok	33
2.3 Fourier-sorok	36

2.1. Alapfogalmak

Definíció 2.1: FüggvénySorozat

Az $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatot függvénySorozatnak nevezzük.

Példák függvénySorozatokra:

- $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1] \quad f_n(x) = \sin nx$
- $g_n : [0; \infty] \rightarrow \mathbb{R} \quad g_n(x) = x^n$
- $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h_n(x) = e^{nx}$

Definíció 2.2: FüggvénySorozat pontbeli konvergenciája

Ha az $x_0 \in I$ pontban az $(f_n(x_0))$ számsorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénySorozat konvergens az x_0 -ban. A konvergenciaHalmaz:

$$H := \{ x \mid x \in I \wedge (f_n) \text{ konvergens az } x \text{ pontban} \}.$$

Példák konvergenciaHalmazra:

- $f_n(x) = \sin nx \quad H_{f_n} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
- $g_n(x) = x^n \quad H_{g_n} = [0; 1]$
- $h_n(x) = e^{nx} \quad H_{h_n} = \{0\}$

Definíció 2.3: FüggvénySorozat határfüggvénye

Az f függvényt az (f_n) függvénySorozat határfüggvényének nevezzük:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in H.$$

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénySorozat pontonként konvergál az f határfüggvényhez a H -n, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon; x)$, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon; x)$.

Definíció 2.4: FüggvénySorozat egyenletes konvergenciája

Az (f_n) egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $N(\varepsilon)$ úgy, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ minden $x \in E$ esetén.

Az egyenletes konvergenciából következik a pontonkénti konvergencia.

Az állítás azonban megfordítva nem igaz.

Tétel 2.1: Cauchy-kritérium függvény sorozatok konvergenciájára

- Az (f_n) akkor és csak akkor konvergens az $x_0 \in H$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, hogy $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$, ha $n; m > N(\varepsilon)$.
- Az (f_n) akkor és csak akkor konvergens az $H \subset I$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, hogy ha $n; m > N(\varepsilon, x)$, akkor $\forall x \in H$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.
- Az (f_n) akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, hogy ha $n; m > N(\varepsilon)$, akkor $\forall x \in E$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Bizonyítás:

Az első két eset bizonyítása a numerikus sorozatoknál tanultak szerint történik.

A harmadik eset bizonyítása:

(\Rightarrow) Ha (f_n) egyenletesen konvergens E -n, akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \forall x \in E, \\ |f_m(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } m > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \forall x \in E. \end{aligned}$$

Továbbá, ha $n; m > N(\varepsilon/2)$ és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{<\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$, ha $n; m > N(\varepsilon)$ és $x \in E$. Ekkor f_n Cauchy-sorozat, f_m is az, azaz $f_m \rightarrow (x) \rightarrow f(x)$, ha $m \rightarrow \infty$, Ekkor:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in E.$$

Definíció 2.5: Függvény sor

Legyen $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény sorozat. Képezzük az alábbi függvény sorozatot:

$$\begin{aligned} s_1(x) &:= f_1(x), \\ s_2(x) &:= f_1(x) + f_2(x), \\ &\vdots \\ s_j(x) &:= \sum_{i=1}^j f_i(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Az így előálló (s_n) függvény sorozatot az (f_n) függvény sorozatból képzett függvény sornak hívjuk és $\sum f_n$ -nel jelöljük.

Definíció 2.6: FüggvénySor pontbeli konvergenciája

A $\sum f_n$ függvénySor konvergens az $x_0 \in I$ pontban, ha az (s_n) függvénySorozat konvergens az x_0 pontban.

Definíció 2.7: FüggvénySor konvergenciahalmaza

Az $\sum f_n$ függvénySor konvergens a $H \subset I$ halmazon, ha az (s_n) függvénySorozat konvergens a H -n.

Definíció 2.8: FüggvénySor egyenletes konvergenciája

Az $\sum f_n$ függvénySor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha az (s_n) függvénySorozat egyenletesen konvergens az E -n.

Definíció 2.9: FüggvénySor összegfüggvénye

Az $\sum f_n$ függvénySorozat összegfüggvénye az $s(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ függvény, ahol $x \in H$.

Tétel 2.2: Cauchy-féle konvergencia kritérium egyenletes konverenciára

A $\sum f_n$ akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n; m > N(\varepsilon)$, akkor $\forall x \in E$ esetén $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$.

Bizonyítás:

Tétel 2.3: Weierstrass-tétel függvénySorok egyenletes konvergenciájára

Legyen $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénySorozat és $\sum f_n$ a belőle képzett függvénySor, továbbá $\sum a_n$ olyan konvergens numerikus sor, melyre $\forall x \in I$ esetén $|f_n(x)| \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ -re $n > n_0 \in \mathbb{N}$ esetén.

Ekkor a $\sum f_n$ függvénySor egyenletesen konvergens.

Bizonyítás:

Definíció 2.10: FüggvénySOR ABSZOLÚT KONVERGÉNCIÁJA

A $\sum f_n$ függvénysort abszolút konvergensnek mondjuk, ha a $\sum |f_n|$ függvénySOR konvergens.

A Weierstrass-tételbeli konvergencia abszolút konvergencia is.

Definíció 2.11: HATVÁNYSOR

Legyen $f_n(x) := a_n(x - x_0)^n$. A belőle képzett

$$\sum f_n(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük, ahol a_n a hatványsor n -edik együtthatója, x_0 pedig a sorfejtés centruma.

Ha $x_0 = 0$, akkor a hatványsor az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\sum a_n \cdot x^n.$$

Definíció 2.12: HATVÁNYSOR KONVERGÉNCIASUGARA

A $\sum a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}_b.$$

Tétel 2.4: FüggvénySOR KONVERGÉNCIÁJA

Legyen a $\sum f_n$ függvénySOR egyenletesen konvergens az x_0 pontot tartalmazó környezetben, továbbá legyenek a sor tagjai az x_0 -ban folytonosak. Ekkor az összegfüggvény is folytonos az x_0 pontban.

BIZONYÍTÁS:

Tudjuk, hogy a $\sum f_n$ folytonos és egyenletesen konvergens. Azt akarjuk belátni, hogy $|f(x) - f(x_0)|$ tetszőlegesen kicsivé tehető, mert ekkor az összegfüggvény folytonos.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon/3 \text{ (i)}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\varepsilon/3 \text{ (ii)}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\varepsilon/3 \text{ (iii)}} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $n > N(\varepsilon/3) := \max\{N_1(\varepsilon/3); N_2(\varepsilon/3); N_3(\varepsilon/3)\}$.

- (i) egyenletes konvergencia miatt,
- (ii) folytonosság miatt,
- (iii) egyenletes konvergencia miatt.

1. Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye is folytonos.
2. Folytonos függvények egyenletesen konvergens függvénySorának összegfüggvénye is folytonos, ha a függvénySor tagjai folytonosak.



Bizonyítás:

Tétel 2.5: Tagonkénti integrálhatóság

Legyenek a $\sum f_n$ függvénySor tagjai integrálhatóak az $[a; b]$ zárt intervallumon. Tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens az $[a; b]$ -n és összegfüggvénye folytonos. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Bizonyítás:

Nem korlátos intervallum esetén nem igaz az állítás.

Tétel 2.6: Tagonkénti differenciálhatóság

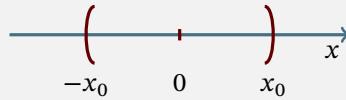
Legyenek az f_n függvénySor tagjai differenciálhatóak a J intervallumon, f'_n függvények folytonosak a J -n, valamint a $\sum f'_n$ és a $\sum f_n$ függvénySorok egyenletesen konvergensek a J -n. Ekkor

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Bizonyítás:

Tétel 2.7: Hatványsor konvergenciája

Ha a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergens az x_0 pontban, akkor az $x < x_0$ helyeken abszolút és egyenletesen konvergens.

**Bizonyítás:**

Ha a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergens az x_0 pontban, akkor $a_n x^n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor tehát korlátos is, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $|a_n x^n| \leq K$.

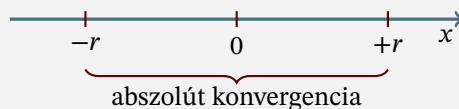
$$|a_n x^n| = \frac{|a_n|}{|x_0|^n} |x_0|^n |x|^n = \underbrace{|a_n x_0^n|}_{\leq K} \underbrace{\left| \frac{x}{x_0} \right|^n}_{<1 \text{ ha } |x| < |x_0|} \rightarrow 0$$

Ekkor $|a_n x^n| \leq K \cdot q^n$, tehát $\sum a_n x^n \leq \sum K \cdot q^n = K \cdot \sum q^n$. Láthatjuk, hogy így konvergens geometriai sorral becsülhetjük a hatványsort. Alkalmazva a Weierstrass-tételt, $\sum a_n x^n$ abszolút és egyenletesen is konvergens, ha $|x| < |x_0|$.

Tétel 2.8: Cauchy-Hadamard-tétel

Legyen r a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara. Ha ...

1. $r = 0$, akkor a hatványsor csak az $x_0 = 0$ pontban konvergens,
2. $r = \infty$, akkor a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens,
3. $0 < r < \infty$, akkor a hatványsor konvergens, ha $|x| < r$ és divergens, ha $|x| > r$.

**Bizonyítás:**

Az első két eset az előző tételek alapján könnyen adódik.

A harmadik esetben a hatványsor konvergens, ha $|x_0| < r$:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x_0^n|} = |x_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x_0|}{r} < 1.$$

Azaz létezik $q < 1$, hogy a $\sum a_n x^n$ hatványsor a gyökökteszt miatt konvergens. Mivel x_0 tetszőleges volt ($|x_0| < r$), így minden $|x| < r$ esetén igaz, hogy a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergens. Ugyancsak a gyökökteszt miatt a hatványsor divergens, ha $|x| > r$.

Ha a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték létezik, akkor ez megegyezik a $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ határértékkkel.
Gyakran így számolunk:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Tétel 2.9: Abel második tétele

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara r és ez a hatványsor az $x = r$ pontban konvergens. Ekkor a hatványsor a $[0; r]$ intervallumon egyenletesen konvergens, így az összegfüggvény is folytonos a $[0; r]$ intervallumon. Ha a hatványsor az $x = -r$ pontban konvergens, akkor a hatványsor a $[-r; 0]$ intervallumon egyenletesen konvergens, így az összegfüggvény is folytonos a $[-r; 0]$ intervallumon.

Bizonyítás:

Abel második tételenek következményei:

1. A hatványsor összegfüggvénye a konvergencia intervallum belséjében folytonos.
2. A hatványsor konvergenciaintervallum tetszőleges részintervallumán tagonként integrálható, azaz ha $[a; b] \subset (-r; r)$ és $s(x) := \sum a_n x^n$ összegfüggvény, akkor

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

3. Ha $s(x)$ a hatványsor összegfüggvénye, akkor

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

2.2. Taylor-sorok

Tegyük fel, hogy az f függvény $\sum a_n x^n$ hatványsor alakban előállítható.

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \\f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} \\f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}\end{aligned}$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $x = 0$.

$$\begin{aligned}f(0) &= a_0 \\f'(0) &= a_1 \\f''(0) &= 2a_2 \\f'''(0) &= 3 \cdot 2a_3 \\&\vdots \\f^{(n)}(0) &= n! a_n\end{aligned}$$

Ebből felírva a függvényt:

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Zárt alakra hozva:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \text{ahol } f^{(0)}(x) = f(x).$$

Definíció 2.13: Taylor-polinom

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely az x_0 pontban legalább p -szer differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli p -edik Taylor-polinomja:

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Írjuk fel a $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ függvény $x_0 = 1$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

$p^{(n)}(x)$	$p^{(n)}(1)$
$p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$	6
$p'(x) = 3x^2 + 6x$	9
$p''(x) = 6x + 6$	12
$p'''(x) = 6$	6

$$\begin{aligned}T_3(x) &= \frac{6}{0!} + \frac{9}{1!}(x - 1) + \frac{12}{2!}(x - 1)^2 + \frac{6}{3!}(x - 1)^3 \\&= 6 + 9(x - 1) + 6(x - 1)^2 + (x - 1)^3\end{aligned}$$

Tétel 2.10: Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal

Ha az f függvény legalább $(r+1)$ -szer differenciálható az $(x; x_0)$ intervallumon és $f^{(k)}$
 $\forall k \in \{1; 2; \dots; r\}$ esetén folytonos az x és x_0 pontokban, akkor $\exists \xi \in (x; x_0)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1}}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}$$

Bizonyítás:

Definiáljuk a következő függvényt:

$$F(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{2!} + \dots + \frac{f^{(r)}(t)}{r!}(x - t)^r + \frac{c_{r+1}}{(r+1)!}(x - t)^{(r+1)}.$$

Válasszuk meg a c_{r+1} együtthatót úgy, hogy $F(x) = f(x)$. Differenciáljuk az $F(t)$ függvényt!

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{1!} \right) + \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{2!}2(x - t) \right) + \\ &\quad + \dots + \left(\frac{f^{(r+1)}(t)}{r!}(x - t)^r - \frac{f^{(r)}(t)}{r!}r(x - t)^{r-1} \right) - \frac{c_{r+1}}{r!}(r+1)(x - t)^r \end{aligned}$$

Ha felbontjuk a zárójeleket, akkor láthatjuk, hogy az egyes tagok páronként kiejtik egymást. Az egyenlőség az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$F'(t) = \frac{(x - t)^r}{r!} (f^{(r+1)} - c_{r+1}).$$

A Rolle-tétel alapján $\exists \xi \in (x; x_0)$, hogy $F'(\xi) = 0$. Ekkor:

$$0 = \underbrace{\frac{(x - \xi)^r}{r!}}_{\neq 0} \underbrace{(f^{(r+1)} - c_{r+1})}_{=0} \Rightarrow f^{(r+1)}(\xi) = c_{r+1}.$$

Definíció 2.14: Taylor-sor

Legyen az f függvény az x_0 pontban akárhányszor differenciálható. Ekkot a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 körüli Taylor-sorának nevezzük.

Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sorot Maclaurin-sornak nevezzük.

Tétel 2.11

Az előbb definiált Taylor-sor akkor és csak akkor állítja elő a függvényt az $x = x_0$ pontban, ha a maradéktag a nullához tart $n \rightarrow \infty$ esetén.

Bizonyítás:

Fontosabb függvények Maclaurin-sorai:

Függvény	Taylor-sor	Konvergencia intervallum
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	\mathbb{R}
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	\mathbb{R}
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1; 1]$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	\mathbb{R}
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	\mathbb{R}
$\operatorname{artanh} x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$(-1; 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-1; 1]$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$(-1; 1)$

2.3. Fourier-sorok

Definíció 2.15: Trigonometrikus polinom

Az alábbi alakú függvényt trigonometrikus polinomnak nevezzük:

$$t_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Definíció 2.16: Trigonometrikus sor

Az alábbi alakó összeget trigonometrikus sornak nevezzük:

$$\begin{aligned} t(x) &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \end{aligned}$$

1. Az összegfüggvény, ha létezik 2π szerint periodikus.
2. Ha folytonos a függvény és egyenletesen konvergens, akkor az összegfüggvény is konvergens.

Definíció 2.17: Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy $2p$ szerint periodikus függvény, amely a $[0; 2p]$ intervallumon Riemann-integrálható. Ekkor a függvény Fourier-során az alábbi trigonometrikus sort értjük:

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right],$$

ahol az együtthatók a következők:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx, \quad b_k = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx \end{aligned}$$

Ha az f függvény előáll a fenti típusú összegként, akkor az együtthatók csak ilyenek lehetnek.

Ha az f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor mindegy, hogy a $[0; 2p]$ intervallumon, vagy egy skalárral eltolva az $[a; a + 2p]$ intervallumon integrálunk, vagyis:

$$\int_0^{2p} f(x) dx = \int_a^{a+2p} f(x) dx$$

Tétel 2.12

Ha a 2π szerint periodikus f függvénynek létezik az x_0 pontban a jobb- és baloldali határértéke, továbbá az f függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens, akkor a Fourier-sor összege ezen pontokban a függvény bal- és jobboldali határértékeinek szám-tani középe.

Bizonyítás:

Ha az f függvény folytonos az x_0 pontban, akkor a Fourier-sor összege ebben a pontban a függvény határértékével egyezik meg.

Tétel 2.13

Ha a 2π szerint periodikus, integrálható f függvény szakaszonként monoton és az x_0 pontban differenciálható, akkor az f függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens.

Bizonyítás:

Ha egy függvény páros, akkor a Fourier-sorában csak a_0 és koszinusz tagok szerepelnek, vagyis $b_k \equiv 0$.

Bizonyítás:

!

Ha egy függvény páratlan, akkor a Fourier-sorában csak szinusz tagok szerepelnek, vagyis $a_0 \equiv 0$ és $a_k \equiv 0$.

Bizonyítás:

!

Állítsuk elő az f függvény Fourier-sorát, $f(x) = x^2$, ha $x \in [-\pi; \pi]$ és $f(x) = f(x+2k\pi)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Mivel a függvény páros, ezért a Fourier-sorában csak a_0 és a_k tagok szerepelnek. Az integrációs intervallumot $[-\pi; \pi]$ -re választjuk.

Az a_0 együttható:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \frac{\pi^3}{3}.$$

Az a_k meghatározása:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{2x \cos kx}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{2 \sin kx}{k^3} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi \cos k\pi}{k^2} + \frac{2\pi \cos(-k\pi)}{k^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi \cos k\pi}{k^2} \right) = \frac{4}{k^2} \cos k\pi = \frac{4}{k^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát:

$$F(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

3 Többváltozós analízis

Eddigi tanulmányaink során olyan függvényekkel foglalkoztunk, amelyek egyetlen változótól függtek. Ebben a fejezetben az eddig vizsgált egyváltozós függvények síkbeli görbéi után a többdimenziós terek világába lépünk. Célunk, hogy a differenciál- és integrálszámítás jól ismert eszközeit átültessük és kibővítsük olyan függvényekre, amelyek kettő vagy több független változótól függenek. Ez a lépés lehetővé teszi számunkra, hogy a valós világ összetett, több tényezős jelenségeit matematikailag is precízebben tudjuk modellezni.

Először az egyváltozós kalkulusból már ismert alapfogalmakat általánosítjuk. A tárgyalást a topológiai alapfogalmak, a határérték és a folytonosság általánosításával kezdjük. Mivel egy pontot már nem csak balról vagy jobbról, hanem végtelen sok irányból megközelíthetünk, ez a konvergencia vizsgálatát lényegesen komplexebbé teszi.

Ezt követően bevezetjük a differenciálhatóság többváltozós koncepcióját. A derivált egyváltozós fogalmát az iránymenti derivált általánosítja, mely a függvény lokális változását írja le tetszőleges irány mentén. Egy speciális iránymenti derivált a parciális derivált, amely esetén a koordináta-tengelyek irányában elemezük a változást. A totális differenciálhatóság precíz definíciója a függvény lineáris approximálhatóságán alapul, amelynek mátrixreprezentációja a Jacobi-mátrix.

A differenciálszámítás elméletét a szélsőérték-feladatok megoldására alkalmazzuk. Kidolgozunk egy szisztematikus eljárást a függvények lokális maximum- és minimumhelyeinek azonosítására. A lokális extrémumok létezésének szükséges feltétele a stacionárius pontok megtalálása, az elégsges feltételét pedig a függvény második parciális deriváltaiból képzett Hessemátrix definitségének vizsgálatával adjuk meg. A gyakorlati problémákban a szélsőértéket egy vagy több feltétel teljesülése mellett keressük. Az ilyen, ún. feltételes szélsőérték problémák megoldására a Lagrange-multiplikátoros módszert ismertetjük.

Végül, az integrálás fogalmát is általánosítjuk. A görbe alatti terület helyett immár felületek alatti térfogatokat és más, magasabb dimenziós tartományokhoz rendelt mennyiségeket számítunk ki a többszörös integrálok segítségével. Ez az eszköz kulcsfontosságú lesz sík- és térbeli alakzatok geometriai és fizikai jellemzőinek (pl. terület, térfogat, tömegközéppont, teheteretlenségi nyomaték) meghatározásában.

A fejezetben érintett témakörök

3.1 Alapfogalmak	40
3.2 Iránymenti és parciális deriváltak	43
3.3 Középértéktételek	45
3.4 Szélsőértékszámítás	47
3.5 Integrálszámítás	50

3.1. Alapfogalmak

Definíció 3.1: Gömbkörnyezet

Legyen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a \mathbf{p} pont ε sugarú nyílt környezetén (gömbkörnyezetén) a

$$B_\varepsilon(\mathbf{p}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \varepsilon\} \text{ halmazt értjük.}$$

A tobábbiakban \mathbb{E}^n jelölje az n dimenziós euklideszi teret.

Definíció 3.2: Pontsorozat konvergenciája

A (\mathbf{p}_n) \mathbb{E}^n -beli pontsorozat konvergens, ha $\exists \mathbf{p} \in \mathbb{E}^n$, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöb-index, hogy $n > N(\varepsilon)$ esetén $\mathbf{p}_n \in B_\varepsilon(\mathbf{p})$.

Ekkor a \mathbf{p} pontot a sorozat határértékének, vagy határpontjának nevezzük.

Tétel 3.1: Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási téTEL

Végtelen, korlátos, \mathbb{R}^n -beli ponthalmazból kiválasztható konvergens pontsorozat részsorozata. Ezen sorozat határértéke (határpontja) a ponthalmaz torlódási pontja.

Bizonyítás:

Többváltozós függvények jelölése:

Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény. Ekkor a függvény az alábbi formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{f}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{bmatrix},$$

ahol az $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1; 2; \dots; k\}$ függvényeket komponensfüggvényeknek nevezzük.

Speciális elnevezések:

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ vektor-vektor függvény,
- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vektor-skálár függvény,
- $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ skálár-vektor függvény.

Definíció 3.3: Többváltozós függvény határértéke

Tekintsük az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezést. Azt mondjuk, hogy az f határértéke $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$, ha az A tetszőleg $\varepsilon > 0$ sugarú gömbkörnyezetéhez létezik az a -nak olyan $\delta(\varepsilon)$ sugarú gömbkörnyezete, hogy

$$\mathbf{x} \in B_{\delta(\varepsilon)}(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{A}).$$

Definíció 3.4: Többváltozós függvény folytonossága

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{f} : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezés folytonos az értelmezési tartományának egy belső pontjában ($\mathbf{a} \in \mathcal{D}_f$), ha az adott pontbeli határértéke megegyezik az adott pontbeli függvényértékkel, vagyis

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Tétel 3.2: Átviteli elv egyváltozós függvényekre

Az f függvény határértéke az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban akkor és csak akkor A , ha $\forall x_n \rightarrow a$ sorozat esetén $f(x_n) \rightarrow A$.

Tétel 3.3: Az átviteli elv általánosítása

Az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény határértéke az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban akkor és csak akkor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k$, ha $\forall \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{a}$ sorozat esetén $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{A}$.

Definíció 3.5: Többváltozós függvény differenciálhatósága

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezés. Azt mondjuk, hogy az f differenciálható az $\mathbf{a} \in I$ pontban, ha $\exists A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés és $\mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény, hogy

$$\mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{w}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}, \quad \text{hogy} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Ha az $\mathbf{f} : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény differenciálható az $\mathbf{a} \in I$ pontban, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, ekkor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = A(\mathbf{h}) + \mathbf{w}(\mathbf{h}) = A(\mathbf{h}) + \frac{\mathbf{w}(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}$.

Ha $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{w}(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \rightarrow \mathbf{0}$, azaz $\|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|$ tetszőlegesen kicsivé lehető, hiszen $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ tetszőleges lineáris leképezésre igaz. Az állítás így igaz.

Ha létezik az $\mathbf{f} : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvénynek az $\mathbf{a} \in I$ pontbeli deriváltja, akkor az \mathcal{A} lineáris leképezés egyértelmű.

Bizonyítás (Indirekt módon):

Tegyük fel, hogy $A_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $A_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ két különböző lineáris leképezés egyaránt az \mathbf{f} függvénynek az \mathbf{a} pontbeli deriváltja. Ekkor

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A_1(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \quad \text{és} \quad \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A_2(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Vonjuk ki egymásból a két kifejezést:



$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|A_1(\mathbf{h}) - A_2(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Mivel A_1 és A_2 lineáris leképezések, ezért a különbségük is az, ebből

$$A_1(\mathbf{h}) - A_2(\mathbf{h}) = \underbrace{(A_1 - A_2)}_{\mathcal{B}}(\mathbf{h}).$$

Vizsgáljuk a $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{u}$ esetet. Ekkor, ha $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, akkor $\lambda \rightarrow 0$ is igaz. Tehát

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{B}(\lambda \mathbf{u})}{\|\lambda \mathbf{u}\|} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda \mathcal{B}(\mathbf{u})}{|\lambda| \|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0}.$$

Mivel tetszőleges $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\lambda/|\lambda| = \pm 1$, ezért $\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Azaz \mathcal{B} lineáris leképezés, méghozzá a nulla leképezés, ezért $A_1 = A_2$, ami ellentmond a feltételezésnek.

Definíció 3.6: Többváltozós függvény differenciálhatósága

Az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezés differenciálható az értelmezési tartományának egy adott pontjában, ha ebben a pontban a komponensfüggvényei is differenciálhatóak.



Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenciálhatóak az $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban. Ekkor az $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ is differenciálható az \mathbf{a} pontban, és

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) + \mathbf{g}'(\mathbf{a}).$$



Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenciálható az $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_f$ pontban, és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\lambda \mathbf{f}$ is differenciálható az \mathbf{a} pontban, és

$$(\lambda \mathbf{f})'(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{f}'(\mathbf{a}).$$



Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezések, $\forall x \in \mathcal{D}_f$ -re $f(x) \in \mathcal{D}_g$, továbbá \mathbf{f} differenciálható az $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_f$ pontban és \mathbf{g} differenciálható az $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ pontban. Ekkor a $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ is differenciálható az \mathbf{a} pontban, és

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{a}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \circ \mathbf{f}'(\mathbf{a}).$$

3.2. Iránymenti és parciális deriváltak

Definíció 3.7: Iránymenti derivált

Legyen $I \in \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és legyen adva egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Ha létezik a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}$$

határérték és ez egy valós szám, akkor ezt az f függvény \mathbf{a} pontbeli \mathbf{v} irányú, iránymenti deriváltjának nevezzük. Jele:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

Amennyiben \mathbf{v} az n -dimenziós téren az i -edik irányba mutat, akkor azt parciális deriválnak nevezzük, jelölései:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \partial_i f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = f'_{x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \lambda, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

Adjuk meg az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény parciális deriváltjait az $(1; 2)$ pontban!

Először határozzuk meg a parciális deriváltakat parametrikusan, majd számoljuk ki az $(1; 2)$ pontbeli értékeket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} &= 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 5 & \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \right|_{(1; 2)} &= 3 + 20 + 12 + 5 = 40, \\ \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} &= 5x^2 + 6xy - 36y^2 - 6 & \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right|_{(1; 2)} &= 5 + 12 - 144 - 6 = -133. \end{aligned}$$

Definíció 3.8: Gradiens

Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Az f függvény $\mathbf{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ pontbeli gradiensén az alábbi oszlopvektort értjük:

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(\mathbf{a}) \\ \partial_2 f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^\top$$

A gyakrolatban az iránymenti deriváltakat a gradiens segítségével számítjuk:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Számítsuk ki az $f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$ függvény $\mathbf{v}(3; 4)$ irányú deriváltját az $(1; 2)$ pontban!

A gradiens az előző példában számolt parciális deriváltak alapján:

$$\text{grad } f(1; 2) = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált számításához még szükségünk van az \mathbf{v} irányú egységektorra:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(1; 2) = \text{grad } f(1; 2) \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 40 \\ -133 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 40 \cdot 3/5 - 133 \cdot 4/5 = -82,4.$$

Definíció 3.9: Jacobi-mátrix

Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezés. Ekkor $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, ahol $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_{k \times n}$. A \mathbf{J} mátrixot az \mathbf{f} függvény Jacobi-mátrixának nevezzük, melynek elemei:

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{array} \right]_{|\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \text{grad}^T f_1(\mathbf{a}) \\ \text{grad}^T f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad}^T f_k(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Tétel 3.4: Young-tétel

Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{a} \in I$, továbbá \mathbf{a} -nak létezik olyan környezete, amelyben f összes p -edrendű parciális deriváltja létezik és folytonos. Ekkor

$$\partial_i \partial_j f(\mathbf{a}) = \partial_j \partial_i f(\mathbf{a}), \quad i; j \in \{1; 2; \dots; n\},$$

azaz a parciális deriváltak sorrendje p -ed rendig felcserélhető.

Bizonyítás:

3.3. Középértéktételek

Definíció 3.10

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$. Az H halmazt konvexnek mondjuk, ha minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$ és $\lambda \in [0; 1]$ esetén $\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} \in H$ teljesül.

Ami konvex, az összefüggő, de fordítva nem igaz.

Tétel 3.5: Lagrange-tétel

Legyen $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos és (totálisan) differenciálható az $(a; b)$ -n. Ekkor létezik $\xi \in (a; b)$, hogy

$$\|f(b) - f(a)\| = \|f'(\xi)\| \cdot (b - a).$$

Bizonyítás:

Legyen $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ és $\varphi(t) := \langle f(b) - f(a); f(t) \rangle$. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= \langle f(b) - f(a); f(b) \rangle - \langle f(b) - f(a); f(a) \rangle = \\ &= \langle f(b) - f(a); f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2. \end{aligned}$$

A Lagrange-féle középértéktétel felírva φ -re, $\exists \xi \in (a; b)$, hogy

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi) \cdot (b - a) \quad \text{és} \quad \varphi'(t) = \langle f(b) - f(a); f'(t) \rangle.$$

Ekkor

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b) - f(a), f'(\xi) \rangle \cdot (b - a) \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(\xi)\| \cdot (b - a).$$

Tehát

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(\xi)\| \cdot (b - a)$$

Az egyszerűsítés után következik, hogy

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)\| \cdot (b - a).$$

Tétel 3.6

Legyen $H \subset \mathbb{R}^l$, $f : H \rightarrow \mathbb{R}^m$ továbbá H konvex és nyílt, valamint f differenciálható H -n. Ekkor minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$ esetén létezik $\xi \in H$ az \mathbf{a} és \mathbf{b} -t összekötő szakasz, hogy

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq \|f'(\xi)\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

Bizonyítás:

Legyen $\gamma : [0; 1] \rightarrow H$ az \mathbf{a} és \mathbf{b} -t összekötő szakasz. Azaz $\gamma(t) = t\mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b}$. Az $f \circ \gamma$ -ra alkalmazva a Lagrange-tételt adódik a bizonyítás állítása.

Definíció 3.11

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, melyre $\forall \mathbf{x} \in H$ -ra $\|f'(\mathbf{x})\| < M$ teljesül. Ekkor $\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq M\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ a Lagrange-féle középértéktétel miatt adódik. Az ilyen f leképezést Lipschitz-feltételnek eleget tevőnek mondjuk.

Tétel 3.7

Legyen adott $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és annak r sugarú környezete $B_r(\mathbf{a})$, valamint az $f : B_r(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés. Tegyük fel, hogy létezik az összes parciális derivált $B_r(\mathbf{a})$ -n. Ekkor minden $\mathbf{b} \in B_r(\mathbf{a})$ esetén létezik $\xi \in B_r(\mathbf{a})$, melyre

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| > \|\xi - \mathbf{a}\| \quad \text{és} \quad \|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\xi)(b_i - a_i),$$

ahol $\mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ és $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$.

Bizonyítás:

3.4. Szélsőértékszámítás

Definíció 3.12: Többváltozós függvény maximuma

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f -nek az $\mathbf{a} \in \text{int } H$ pontban lokális maximuma van, ha létezik az $\mathbf{a} \in U \subset H$ környezete, hogy $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in U$ -ra.

Definíció 3.13: Többváltozós függvény minimuma

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f -nek az $\mathbf{a} \in \text{int } H$ pontban lokális minimuma van, ha létezik az $\mathbf{a} \in U \subset H$ környezete, hogy $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in U$ -ra.

Definíció 3.14: Stacionárius pont

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \text{int } H$ és léteznek az f parciális deriváltjai az \mathbf{a} pontban. Ha $\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$ -re $\partial_i f(\mathbf{a}) = 0$, akkor az \mathbf{a} a függvény stacionárius pontja.

Tétel 3.8

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ha az f függvény az összes változója szerint parciálisan differenciálható az $\mathbf{a} \in \text{int } H$ pontban, és ott lokális szélsőértéke van, akkor az \mathbf{a} stacionárius pontja az f függvénynek.

Bizonyítás:

Definíció 3.15: Lineáris forma

Legyen a V a T test feletti vektortér. Ha a $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés lineáris, vagyis

$$\varphi(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}) + \mu \varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

akkor a φ -t lineáris formának is hívjuk.

Definíció 3.16: Billineáris forma

Legyen $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ minden két változójában lineáris, azaz

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2; \mathbf{y}) &= \lambda_1 \psi(\mathbf{x}_1; \mathbf{y}) + \lambda_2 \psi(\mathbf{x}_2; \mathbf{y}) & \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \psi(\mathbf{x}; \mu_1 \mathbf{y}_1 + \mu_2 \mathbf{y}_2) &= \mu_1 \psi(\mathbf{x}; \mathbf{y}_1) + \mu_2 \psi(\mathbf{x}; \mathbf{y}_2) & \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ekkor a ψ -t bilineáris formának mondjuk.

A ψ bilineáris forma szimmetrikus, ha $\psi(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ -re.

A ψ bilineáris forma antiszimmetrikus, ha $\psi(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ -re.

Definíció 3.17: Kvadratikus forma

Legyen $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$. Ha létezik olyan $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma, hogy $\eta(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}; \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V$ -re, akkor az η -t kvadratikus formának, vagy kvadratikus alaknak nevezzük.

Az η kvadratikus forma...

- pozitív definit, ha $\eta(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- negatív definit, ha $\eta(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- pozitív szemidefinit, ha $\eta(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- negatív szemidefinit, ha $\eta(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Ha ezek egyike sem teljesül, indefinitekvadratikus formáról beszélünk.

Tétel 3.9

Legyen $f : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az f függvény az összes változója szerint parciálisan differenciálható az $\mathbf{a} \in \text{int } H$ pont valamely környezetében. Legyen továbbá az \mathbf{a} stacionárius pontja az f -nek és $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olyan kvadratikus forma, melynek mátrixa:

$$Q(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_1^2 f(\mathbf{a}) & \partial_1 \partial_2 f(\mathbf{a}) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(\mathbf{a}) \\ \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{a}) & \partial_2^2 f(\mathbf{a}) & \cdots & \partial_2 \partial_n f(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(\mathbf{a}) & \partial_n \partial_2 f(\mathbf{a}) & \cdots & \partial_n^2 f(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}.$$

- Ha Q pozitív definit, akkor az \mathbf{a} pontban az f -nek lokális minimuma van.
- Ha Q negatív definit, akkor az \mathbf{a} pontban az f -nek lokális maximuma van.
- Ha Q indefinite, akkor az \mathbf{a} pontban az f -nek nincs szélsőértéke.

Tétel 3.10

Legyen $n = 2$ és teljesüljenek az előző tétel feltételei. Ekkor

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}) = \det Q(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \partial_1^2 f(\mathbf{a}) & \partial_1 \partial_2 f(\mathbf{a}) \\ \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{a}) & \partial_2^2 f(\mathbf{a}) \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \mathcal{S}(\mathbf{a}) = \text{tr } Q(\mathbf{a}) = \partial_1^2 f(\mathbf{a}) + \partial_2^2 f(\mathbf{a})$$

- Ha $\mathcal{D}(\mathbf{a}) > 0$ és $\mathcal{S}(\mathbf{a}) > 0$, akkor az \mathbf{a} pontban az f -nek lokális minimuma van.
- Ha $\mathcal{D}(\mathbf{a}) > 0$ és $\mathcal{S}(\mathbf{a}) < 0$, akkor az \mathbf{a} pontban az f -nek lokális maximuma van.
- Ha $\mathcal{D}(\mathbf{a}) < 0$, akkor az \mathbf{a} pontban az f -nek nincs szélsőértéke.

Vizsgáljuk az $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$ függvény lokális szélsőértékeit!

1. Stacionárius pontok, ahol a gradiens nullvektor:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1, \\ \partial_y f(x,y) &= 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.\end{aligned}$$

2. Hesse-mátrix:

$$\mathbf{Q}(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_1^2 f & \partial_1 \partial_2 f \\ \partial_2 \partial_1 f & \partial_2^2 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

pont	\mathcal{D}	\mathcal{S}	következtetés
$P_1(1,0)$	$6 \cdot 2 - 0 = 12 > 0$	$6 + 2 = 8 > 0$	lokális minimum
$P_2(-1,0)$	$(-6) \cdot 2 - 0 = -12 < 0$	$-6 + 2 = -4$	nincs szélsőérték

Tehát az f függvénynek a $P_1(1,0)$ pontban lokális minimuma van, míg a $P_2(-1,0)$ pontban nincs szélsőértéke.

Definíció 3.18

Legyen $m; n \in \mathbb{Z}^+$, $m > n$, $H \in \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{g} : H \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezések, továbbá $H_0 := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in H \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$. Ha az f függvény H_0 -ra való leszűkítésének ($f|_{H_0}$) az \mathbf{a} pontban lokális szélsőértéke van, akkor azt mondjuk, hogy az f -nek az \mathbf{a} pontban feltételes szélsőértéke van a $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ feltétellel.

Definíció 3.19: Lagrange féle multiplikátor

Legyen $m; n \in \mathbb{Z}^+$, $m > n$, $H \in \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{g} : H \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezések, továbbá $H_0 := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in H \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$. Tegyük fel, hogy az f és \mathbf{g}_i függvények minden parciális deriváltja folytonos a H halmazon. Ha az f függvény az $\mathbf{a} \in H_0$ pontban feltételes szélsőértéke van a $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ feltétellel és a

$$\text{rg} \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(\mathbf{a}) & \partial_2 g_1(\mathbf{a}) & \cdots & \partial_n g_1(\mathbf{a}) \\ \partial_1 g_2(\mathbf{a}) & \partial_2 g_2(\mathbf{a}) & \cdots & \partial_n g_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n(\mathbf{a}) & \partial_2 g_n(\mathbf{a}) & \cdots & \partial_n g_n(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = n \text{ (maximális)},$$

akkor léteznek olyan $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ skalárok, hogy

$$\partial_i f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \partial_i g_k(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; m\}.$$

A $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ skalárokat Lagrange-féle multiplikátoroknak nevezzük.

3.5. Integrálszámítás

Definíció 3.20: Primitív függvény

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{f} : H \rightarrow \mathbb{R}^n$. Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az \mathbf{f} függvény primitív függvényének nevezzük, ha $\forall \mathbf{x} \in H$ -ra $F'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ teljesül, azaz

$$\left(\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = (f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad f_n(\mathbf{x})).$$

Tétel 3.11: Primitív függvény létezésének szükséges feltétele

Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az \mathbf{f} primitív függvénye, akkor $\partial_i f_j = \partial_j f_i$, ahol $i; j \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Bizonyítás:

Ha f -nek létezik a primiv függvénye, akkor $\partial_i F = f_i$, valamint $\partial_j F = f_j$. Alkalmazzuk a Young-tételt:

$$\partial_j f_i = \partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F = \partial_i f_j.$$

Tétel 3.12: Primitív függvény létezésének elégsges feltétele

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt halmaz. Ha $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és $\forall i; j \in \{1; 2; \dots; n\}$ -re $\partial_i f_j = \partial_j f_i$, akkor \mathbf{f} -nek létezik primitív függvénye.

Bizonyítás:

Definíció 3.21

Ha $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n, a_i; b_i \in \mathbb{R}^n, i; j \in \{1; 2; \dots; n\}$, akkor az

$$[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \cdots \times [a_n; b_n]$$

sorozatot \mathbb{R}^n -beli zárt intervallumnak nevezzük. Az

$$(a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \times \cdots \times (a_n; b_n)$$

sorozatot \mathbb{R}^n -beli nyílt intervallumnak hívjuk.

Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$. Ekkor

$$[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \dots \times [a_n; b_n] = [\mathbf{a}; \mathbf{b}].$$

Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$. Ekkor

$$(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \text{int}[\mathbf{a}; \mathbf{b}].$$

Definíció 3.22

Legyen $I = [\mathbf{a}; \mathbf{b}]$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

- Az intervallum térfogata:

$$\text{vol } I = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

- Az intervallum térfogata:

$$\text{diam } I = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}.$$

- Az intervallum beosztásán egy olyan $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ sorozatot értünk, melyre

$$\bigcup_{i=1}^k I_i = I \text{ és } \text{int } I_i \cap \text{int } I_j = \emptyset, \text{ ha } i \neq j.$$

- Az intervallum egy $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ egy beosztásának σ finomságán a legnagyobb átmérőjű részintervallum átmérőjét értjük:

$$\sigma(d) = \max\{\text{diam } I_i\}.$$

- Az $e : \{J_1; J_2; \dots; J_k\}$ beosztást a d beosztás finomításának nevezzük, ha létezik olyan J_m $m \in \{1; 2; \dots; n\}$, melyre $J_m \subset I_n$ $n \in \{1; 2; \dots; k\}$.

Legyen $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ az I intervallum egy beosztása, ekkor:

$$\text{vol } I = \sum_{i=1}^k \text{vol } I_i.$$



Bizonyítás:

Bármely beosztás normál beosztássá tehető.

Bizonyítás:



Definíció 3.23

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ zárt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ha $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ egy beosztása I -nek, akkor ...

- a d beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg:

$$\underline{S}(f; d) := \sum_{i=1}^k \inf\{f(I_i)\} \text{vol } I_i.$$

- a d beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg:

$$\bar{S}(f; d) := \sum_{i=1}^k \sup\{f(I_i)\} \text{vol } I_i.$$

- a d beosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$\Omega(f; d) = \underline{S}(f; d) - \bar{S}(f; d).$$

- Legyen $\mathbf{x}_i \in I_i$, ekkor a d beosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg:

$$\sum_{i=1}^k f(\mathbf{x}_i) \text{vol } I_i.$$

Legyen $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ és $e := \{J_1; J_2; \dots; J_k\}$ az I intervallum egy beosztása, ekkor ha e finomabb beosztás mint d igazak az alábbiak:

- $\underline{S}(f; d) \leq \underline{S}(f; e)$
- $\bar{S}(f; d) \geq \bar{S}(f; e)$
- $\Omega(f; d) \leq \Omega(f; e)$



Bizonyítás:

Az I tetszőleges d_1 és d_2 beosztása esetén $\underline{S}(f; d_1) \leq \bar{S}(f; d_2)$.

Bizonyítás:



Mivel ezen állítás szerint egy tetszőleges beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg nem nagyobb egy másik tetszőlegesen választott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összegnél, ezért az alsó illetve felső integrálközelítő összegek halmaza felülről illetve alulról korlátos.

Definíció 3.24

Az $\underline{S}(f) := \sup\{\underline{S}(f; d)\}$, ahol d beosztása I -nek. Az $\underline{S}(f)$ -t alsó Darboux-integrálnak nevezzük.

Az $\bar{S}(f) := \inf\{\bar{S}(f; d)\}$, ahol d beosztása I -nek. Az $\bar{S}(f)$ -t felső Darboux-integrálnak nevezzük.

Definíció 3.25

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvényt Riemann-integrálhatónak mondjuk, ha $\underline{S}(f) = \bar{S}(f)$. Ezt a közös értéket

$$\int_I f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}-szel \text{ vagy } \int_I f\text{-fel jelöljük.}$$

Az I intervallumon vett Riemann-integrálható függvények összességét $\mathcal{R}(I)$ -vel jelöljük.

Tétel 3.13: Darboux-tétel

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha a d beosztás finomsága kisebb $\delta(\varepsilon)$ -nál ($\sigma(d) < \delta(\varepsilon)$), akkor $\underline{S}(f) - \underline{S}(f; d) < \varepsilon$ és $\bar{S}(f; d) - \bar{S}(f) < \varepsilon$.

Bizonyítás:

Tétel 3.14

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ zárt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az alábbi állítások igazak:

1. $f \in \mathcal{R}(I)$.
2. Oszcillációs kritérium: $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $\sigma(d) < \delta$, akkor $\Omega(f; d) < \varepsilon$.
3. A Darboux-tételből levezethető, hogy létezik $A \in \mathcal{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $d := \{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ beosztása I -nek, melyre $\sigma(d) < \delta(\varepsilon)$, akkor

$$\left| \sum_{i=1}^k f(t_i) \operatorname{vol} I_i - A \right| < \varepsilon, \text{ ahol } t_i \in I_i.$$

A harmadik pontban szereplő A érték az f függvény I -n vett Riemann-integrálja.

Definíció 3.26

Az $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt Lebesgue szerint nullmérékűnek mondjuk, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ intervallumrendszer, melyre az intervallumok uniója lefedi H -t ($H \subset \bigcup I_i$), és $\operatorname{vol} I_i < \varepsilon$ teljesül.

Legyen $H_1; H_2; \dots; H_n \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue szerint nullmérékű halmazok sorozata. Ekkor

$$\bigcup H_i \text{ ugyancsak nullmérékű.}$$

Bizonyítás:

!

Definíció 3.27

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és $I_r(\mathbf{a})$ jelölje az \mathbf{a} körüli r sugarú nyílt kockát, ahol

$$\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \text{ és } I_r(\mathbf{a}) = \bigcup_i (a_i - r; a_i + r).$$

Ekkor:

$$m_r(\mathbf{a}) := \inf\{f(\mathbf{x}) | I \cap I_r(\mathbf{a})\},$$

$$M_r(\mathbf{a}) := \sup\{f(\mathbf{x}) | I \cap I_r(\mathbf{a})\}.$$

Megállapíthatjuk, hogy ha r csökken, akkor m_r nem csökkenhet és M_r nem nőhet, azaz m_r monoton növekvő és M_r monoton csökkenő ha r csökken. Ez alapján:

$$m(\mathbf{x}) := \lim_{r \rightarrow 0} m_r(\mathbf{x}),$$

$$M(\mathbf{x}) := \lim_{r \rightarrow 0} M_r(\mathbf{x}).$$

Az $m : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt alsó burkológörbének, és az $M : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt felső burkológörbének nevezzük.

Az f függvény folytonos az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, akkor és csak akkor, ha $m(\mathbf{x}_0) = M(\mathbf{x}_0)$.

Bizonyítás:

!

Tétel 3.15: Lebesgue-tétel

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény Riemann-integrálható, akkor és csak akkor, ha f szakadási helyeinek halmaza Lebesgue szerint nullmérékű.

Bizonyítás:

Legyenek $f, g \in \mathcal{R}(I)$, ekkor $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$, ahol $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$ és



$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

Legyen $f \leq g$ és $f, g \in \mathcal{R}(I)$, ekkor



$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Az előző állításból következik, hogy ha $f \in \mathcal{R}(I)$, akkor $|f| \in \mathcal{R}(I)$, valamint

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

A teljes felbontáshoz tartozó integrál a részintervallumokhoz tartozó integrálok összege. Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és $\{I_1; I_2; \dots; I_k\}$ egy beosztása. Ekkor $f \in \mathcal{R}(I)$ akkor és csak akkor, ha

$$f|_{I_i} \in \mathcal{R}(I) \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; k\}-re \text{ és} \quad \int_I f = \sum_{i=1}^k \int_{I_i} f|_{I_i}$$



Bizonyítás:

Tétel 3.16: Középértéktétel

Legyen $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos integrálható függvény, $m = \inf f(I)$ és $M = \sup f(I)$. Ekkor

$$m \operatorname{vol} I \leq \int_I f \leq M \operatorname{vol} I.$$

Bizonyítás:

Definíció 3.28

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, és I_H a H -t tartalmazó legszűkebb téglá. Ekkor értelmezhetjük az f -nek I_H -ra való kiterjesztését: $\hat{f} : I_H \rightarrow \mathbb{R}$, melyre

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény, és legyen $I \supset H$ zárt intervallum. Továbbá legyen $\hat{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$, melyre

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \Rightarrow \int_H f = \int_I \hat{f}.$$

Bizonyítás:

Ha I legszűkebb téglá, akkor a definíció szerint igaz az egyenlőség. Ha I nem a legszűkebb téglá, akkor az intervallum additivitást alkalmazva belátható hogy a hozzávetett részek integrálközelítő értéke 0, azaz igaz az állítás.

Definíció 3.29: Diffeomorfizmus

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ és $G \subset \mathbb{R}^n$ két nemüres tartomány, valamint $\varphi : D \rightarrow G$ leképezést diffeomorfizmusnak nevezzük, ha φ bijekció (kölcsönösen egyértelmű), folytonosan differenciálható és $\forall x \in D$ -re $|\varphi'(x)| \neq 0$.

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Reimann-integrálható függvény, továbbá $\varphi : G \rightarrow D$ diffeomorfizmus. Ekkor

$$\int_D f = \int_G f \circ \varphi \cdot |\varphi'|,$$

ahol $|\varphi'|$ a Jacobi-mátrix determinánsa.