3 Komplex számok

Matematika G1 – Komplex számok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 10.

3.1. Elméleti Áttekintő

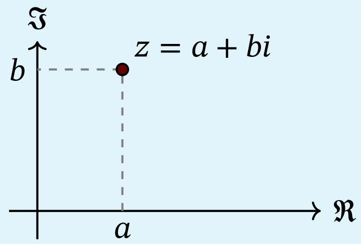
3.1.1. A komplex számok megadási módjai

Algebrai alak:

A komplex számok ($\mathbb{C}$) algebrai alakja:

$$z = a + bi,$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és $i = \sqrt{-1}$ az **imaginárius egység**. A komplex szám **valós része** $\mathrm{Re}\{z\} = a$, **képzetes része** pedig $\mathrm{Im}\{z\} = b$.



Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részük is megegyezik. ($z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\{z_1\} = \mathrm{Re}\{z_2\} \;\wedge\; \mathrm{Im}\{z_1\} = \mathrm{Im}\{z_2\}$)

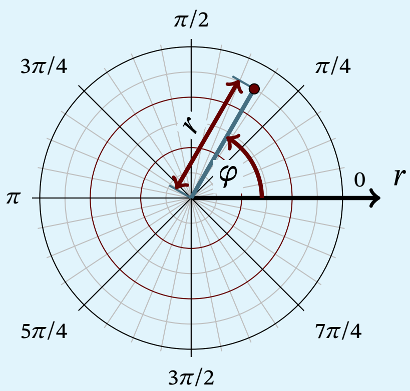
Trigonometrikus alak:

Térjünk át az eddigi Descartes-féle koordinátarendszerről a **polárkoordináta-rendszerre**, amelyben

- a komplex szám hossza: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- valós tengellyel bezárt szöge: $\varphi = \arg z$.

Ebből az alábbi alakot kapjuk:

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$



Exponeciális alak:

Induljunk ki a trigonometrikus alakból, és használjuk fel az alábbi azonosságokat:

$$\cos\varphi = \cosh i\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \text{ és } i\sin\varphi = \sinh i\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}.$$

A trigonometrikus alakba helyettesítve megkapjuk az exponeciális alakot:

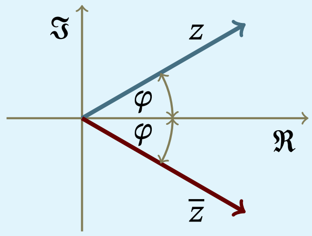
$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}\right) = re^{i\varphi}.$$

3.2. Műveletek komplex számokkal

Konjugált:

Egy $z = a + bi$ komplex szám konjugáltját úgy kapjuk meg, hogy tükrözzük a valós tengelyre, vagyis

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

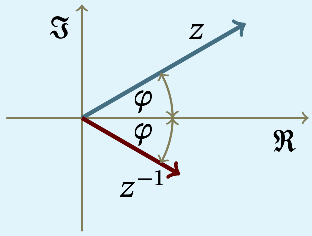


Inverz:

Egy $z = a + bi$ komplex szám inverze:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

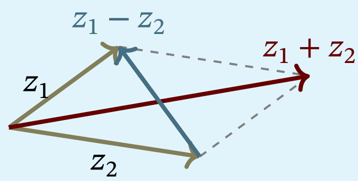
Komplex szám inverzének hossza az eredeti szám hosszának a reciproka.



Összeadás és kivonás:

Algebrai alakban, a vektorműveletekhez hasonlóan:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$



Szorzás:

Algebrai alakban:

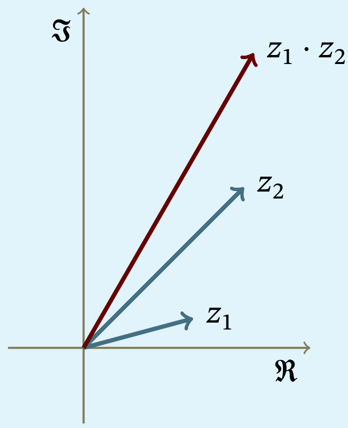
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Trigonometrikus alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Exponenciális alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



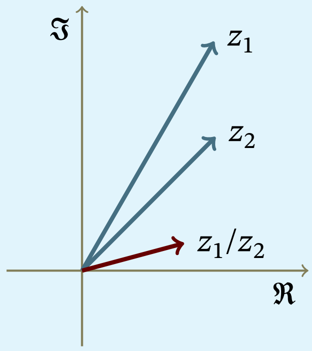
Osztás:

Trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



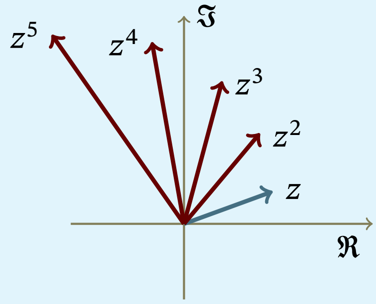
Hatványozás:

Trigonometrikus alakban:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Exponenciális alakban:

$$z^n = r^n e^{i \cdot n\varphi}$$



Ha egy komplex számot az n-edik hatványra emelünk, akkor

- hossza az n-szeresére nő,
- argumentuma is az n-szeresére nő.

Gyökvonás:

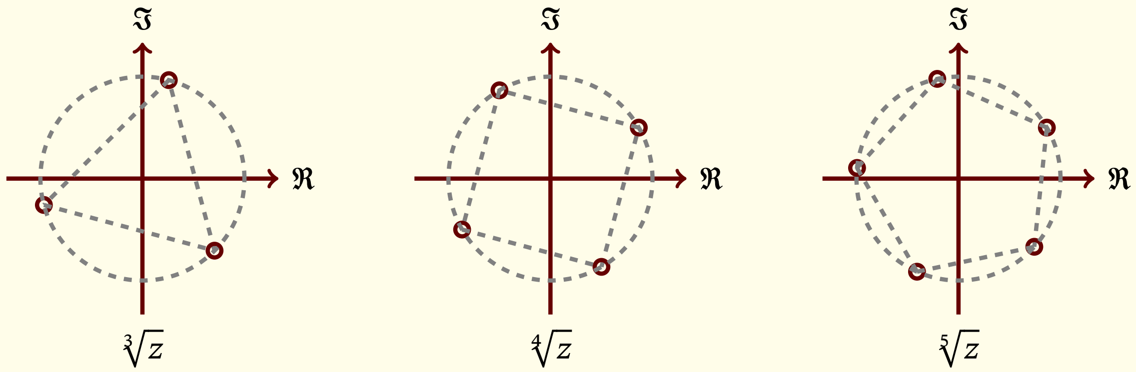
Trigonometrikus alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \text{ ahol } k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$$

Exponenciális alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \text{ ahol } k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$$

Tetszőleges komplex szám n-edik gyökei egy olyan szabályos n-szög csúcsai, amelynek középpontja az origó.



3.3. Feladatok

1. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

   a) $\overline{\left(\dfrac{2-i}{e^{i\pi/3}}\right)}$

   b) $\dfrac{5+i}{3-2i}\cdot\overline{3\left(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ\right)\cdot 2\left(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ\right)\cdot e^{i5\pi/12}}$

   c) $\dfrac{5e^{i7\pi/13}}{4\left(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ\right)}\cdot\overline{\left(\dfrac{1}{2i}\right)}\cdot\left(2\sqrt{3}+2i\right)$

2. Végezze el az alábbi hatványozásokat!

   a) $(i-1)^{16}$

   b) $(3+5i)^4\cdot(21-35i)^5\cdot\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4$

3. Végezze el az alábbi gyökvonásokat!

   a) $\sqrt[3]{-8}$

   b) $\sqrt[4]{1}$

   c) $\sqrt{3+4i}$

4. Oldja meg a következő egyenleteket!

   a) $z^4-81i=0$

   b) $z^2-6z+13=0$

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

   $$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i \\ 3z_1+iz_2=2-3i \end{cases}$$

6. Adja meg a geometriai helyét azoknak a komplex számoknak, amelyekre ...

   a) $\mathrm{Im}\{z\}>0$,

   b) $|z-a|=|z-b|$, ahol $a,b\in\mathbb{C}$,

   c) $|z|<1-\mathrm{Re}\{z\}$.

7. Egy négyzet két szomszédos csúcsát jelölje a $z_1=3+2i$ és a $z_2=5+4i$ komplex szám. Hol található a többi csúcs?

8. Írja fel a $(-2;1)$ középpontú, 4 sugarú kör egyenletét a komplex számsíkon!