12 Lineáris, állandó együtthatós DE

Matematika G3 – Differenciálegyenletek
Utoljára frissítve: 2025. november 22.

12.1. Elméleti áttekintő

Lineáris differenciálegyenletek

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Ha $f(x) = 0$, akkor homogén, egyébként inhomogén.

A homogén általános megoldás alakja:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

Ez az n darab függvény az integrálásra és deriválásra vektorteret alkot. Lineáris függetlenségüket A Wronsky-determimáns segítségével ellenőrizhetjük:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Ha $\det \mathbf{W} \neq 0$, akkor lineárisan függetlenek, $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$ adják a diffegyenlet alaprendszerét. Az alaprendszer valamennyi függvénye, és lineáris kombinációjuk is megoldás lesz.

Állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenletek

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Megoldási módszer: Próbafüggvény-módszer

Legyen $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, …, $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$$

Ez λ-ra nézve n-edfokú polinom, melynek n darab megoldása van, melyek között páros számú komplex gyök is lehet.

- $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, egyszeres

  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s \in \mathbb{R}$, többszörös, akkor belső rezonancia áll fenn

  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, …, $y_s = x^{s-1}e^{\lambda_1 x}$

- $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$, egyszeres komplex gyökpár

  $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

  $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

- $\lambda_{2s} \in \mathbb{C}$, s-szeres multiplicitású

  $$\begin{array}{lllll} y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) & y_3 = xy_1 & y_5 = x^2 y_1 & \dots & y_{2s-1} = x^{s-1}y_1 \\ y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x) & y_4 = xy_2 & y_6 = x^2 y_2 & \dots & y_{2s} = x^{s-1}y_2 \end{array}$$

Állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenletek

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Megoldási módszer: Megoldást a gerjesztésnek megfelelő formában kell keresni.

- $f(x) = e^x$ – $y_{\text{ih}} = Ae^x$
- $f(x) = p(x)$, polinom – $y_{\text{ih}} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$
- $f(x)$ trigonometrikus – $y_{\text{ih}} = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$$y = y_{\text{h}} + y_{\text{ih}}$$

12.2. Feladatok

1. Határozza meg, hogy milyen halmazon lineárisan függetlenek az alábbi függvények!

$$H_1 = \left\{ \ e^x; \ xe^x; \ x^2e^x \ \right\} \qquad\qquad H_2 = \left\{ \ 1; \ \cos x; \ \sin x; \ \right\}$$

2. Hol lesz a $\{ \ e^x; \ -(x+1) \ \}$ függvényrendszer az $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ differenciálegyenlet alaphalmaza?
3. Hol lesz a $\{ \ 1; \ x; \ \ln x \ \}$ függvényrendszer az $xy''' + 2y'' = 0$ differenciálegyenlet alaphalmaza?
4. Adja meg az $y'' - 5y' + 6y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételek melletti megoldását!
5. Adja meg a $8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!
6. Adja meg a $y''' - 2y'' + 2y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!
7. Adja meg a $y^{(\mathbf{V})} - 2y^{(\mathbf{IV})} + 8y''' - 16y'' + 16y' - 32y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!
8. Adja meg azt a legkisebb rendű differenciálegyenletet, amelynek a $\{ \ 6x^2; \ 5e^{2x} \ \}$ függvényrendszer az alaphalmaza!
9. Adja meg azt a legkisebb rendű differenciálegyenletet, amelynek a $\{ \ 7x; \ \sin 5x \ \}$ függvényrendszer az alaphalmaza!
10. Adja meg azt a legkisebb rendű differenciálegyenletet, amelynek a $\{ \ xe^x; \ e^{2x}\cos x \ \}$ függvényrendszer az alaphalmaza!
11. Adja meg az $y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását!
12. Adja meg az $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x + e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!
13. Adja meg az $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását!