

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5\*(0,1)) node[ rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay, ] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kiteintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Többszörös analízis BMETE94BG02 12

# Matematika G2

## Differenciálás II

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

### 0.1 Elméleti Áttekintő

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Többszámú Taylor-formula:**

Az egyváltozós függvényekhez hasonló módon, az  $n$ -edrendű Taylor-polinom:  $T_0 = f(x_0)$

$$T_1 = T_0 + f'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)y(y - y_0)$$

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} [[order = 2]f''(x_0)(x - x_0)^2 + [order = 2]f''(x_0)y(y - y_0)^2 + 2f''(x_0)x, y(x - x_0)(y - y_0)]$$

⋮

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Többszámú függvények szélsőérték-számítása:**

Szélsőérték létezésének **szükséges** feltétele, hogy az adott pontban a parciális deriváltak eltűnjenek, vagyis

$$\forall i : f'(x_0)x_i = 0.$$

Szélsőérték létezésének **elégés** feltétele, hogy az adott pontban felírt Hesse-mátrix pozitív definit legyen. Ezen mátrix az alábbi módon írható fel:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{11}(x_0) & f''_{12}(x_0) & \cdots & f''_{1n}(x_0) \\ f''_{21}(x_0) & f''_{22}(x_0) & \cdots & f''_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(x_0) & f''_{n2}(x_0) & \cdots & f''_{nn}(x_0) \end{pmatrix}$$

A determinánsa alapján:

- ha  $\det H > 0$ , akkor lokális szélsőérték van,
- ha  $\det H < 0$ , akkor nincsen szélsőérték,
- ha  $\det H = 0$ , akkor nem lehet eldönteni.

Amennyiben  $\det H > 0$ , akkor a szélsőérték jellege

- lokális maximum, ha  $H$  főátlóra feszített aldeterminánsai váltakozó előjelűek,
- lokális minimum, ha  $H$  főátlóra feszített aldeterminánsai pozitívak.

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Feltételes szélsőérték egy görbe mentén:**

Amennyiben egy  $f$  függvény egy adott  $g = 0$  görbe menti szélsőértékeit szeretnénk megkeresni, akkor az

$$F = f + \lambda g$$

függvényre kell megoldanunk a szélsőérték-feladatot.

[ style=blueBox, nobreak=true, ] **Feltételes szélsőérték egy görbe által bezárt területen:**

Amennyiben egy  $f$  függvény szélsőértékeit egy adott  $g = 0$  görbe által bezárt tartományán szeretnénk megkeresni, akkor:

- először megkeressük a lokális szélsőértékeket, és ezekből kiválasztjuk azokat, amelyek a tartomány belsejébe esnek.
- utána pedig megkeressük a görbe peremére eső szélsőértékeket az előző módszer alapján.

## 0.2 Feladatok

1. Határozza meg az  $f(x; y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$  függvény első és második Taylor polinomját a  $P(1; -2)$  pontban!
2. Határozza meg az  $f(x; y; z) = \sin x \sin y \sin z$  függvény első és második Taylor polinomjait a  $P_2(\pi/4; \pi/4; \pi/6)$  pontban!
3. Végezzen szélsőérték vizsgálatot az  $f(x; y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$  függvényen!
4. Határozza meg az  $f(x; y) = x^2 + xy + y^2 + 8x + 8y$  függvény egy darab szélsértékét!
5. Ellenőrizze, hogy az  $f(x; y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$  függvénynek a  $P_1(\pi/2; \pi/2)$  és  $P_2(0; 0)$  pontokban szélsőérték helye van!
6. Határozza meg azt a csomagméretet, amely esetén egy  $V = 4,5 \text{ dm}^3$  térfogatú téglatest alakú csomag a legkevesebb zsineg felhasználásával az alábbi ábrán látható módon bekötözhető!  

[thick]  $(0, 1.5) - (4, 1.5) - (5.5, 2.5) - (4, 1.5) - (4, 0) - (0, 0) - (4, 0) - (5.5, 1) -$   
 $(5.5, 2.5) - (1.5, 2.5) - (0, 1.5) - \text{cycle} ;$

[ultra thick, primaryColor]  $(1.333, 0) - ++(0, 1.5) - ++(1.5, 1) - (2.667, 0) -$   
 $++(0, 1.5) - ++(1.5, 1) - (0.75, 2) - ++(4, 0) - ++(0, -1.5) ;$
7. Határozza meg annak a derékszögű hasábnak a minimális térfogatát, amely éleinek összege  $l$  hosszú!
8. Határozza meg a  $f(x; y) = x^2 y^2$  függvény szélsőértékét az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletű görbe mentén!
9. Határozza meg az  $f(x; y) = x^2 + y^2 + xy - x$  függvény globális maximumát és minimumát az  $x^2 + y^2 \leq 1$  tartományon!