2 Térgeometriai alakzatok

Matematika G1 – Analitikus geometria

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

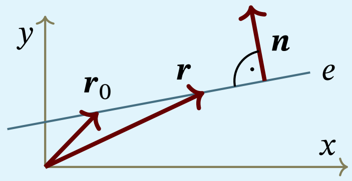
2.1. Elméleti Áttekintő

Egyenes 2D-ben:

$\boldsymbol{n}(A;B)$ – egyenes normálvektora

$\boldsymbol{r}(x;y)$ – tetszőleges pont helyvektora

$\boldsymbol{r}_0(x_0;y_0)$ – P_0 fixpont helyvektora



Az egyenes egyenlete:

$$(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{n}$$

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{=:-C} \quad \to \quad Ax + By + C = 0$$

Hesse-féle normálalak:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A Hesse-féle normálalakot úgy kapjuk, hogy az egyenes normálvektorát egységhosszúságúra normáljuk.

Két egyenes viszonya:

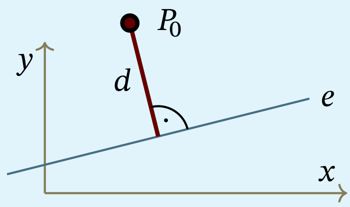
Két egyenes által **közbezárt szög** a két egyenes normálvektorai által bezárt szög.

Ebből következik, hogy ha a normálvektorok által bezárt szög 90°, akkor a két egyenes merőleges egymásra. Ha a normálvektorok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos.

Pont és egyenes távolsága:

Adott egy e egyenes Hesse-féle normálalakja és egy $P_0(x_0;y_0)$ pont. Ekkor a pont és az egyenes távolsága:

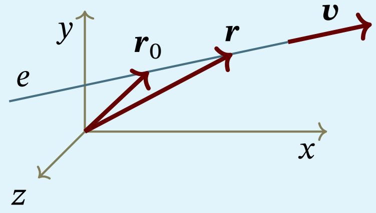
$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$



A formula csak azon pontokra ad zérus értéket, amelyek rajta vannak az egyenesen.

Egyenes 3D-ben:

$\boldsymbol{v}(a;b;c)$ – egyenes irányvektora
$\boldsymbol{r}(x;y;z)$ – tetszőleges pont helyvektora
$\boldsymbol{r}_0(x_0;y_0;z_0)$ – P_0 fixpont helyvektora



3D egyenes paraméteres alakja:

$\boldsymbol{r}_0(x_0;y_0;z_0)$ – P_0 fixpont helyvektora
$\boldsymbol{v}(a;b;c)$ – egyenes irányvektora
$t \in \mathbb{R}$ – paraméter

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

A paraméteres egyenletekből t-t kifejezve is megadhatjuk az egyenest:

$$(t =)\ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

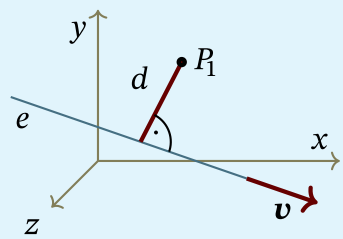
Két egyenes viszonya:

Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes irányvektorai által bezárt szög.

Pont és egyenes távolsága:

Egy $\boldsymbol{r}_1$ irányvektorú P_1 pont, és egy $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$ egyenletű egyenes távolsága

$$d = \left| \frac{\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{v}|} \right|$$

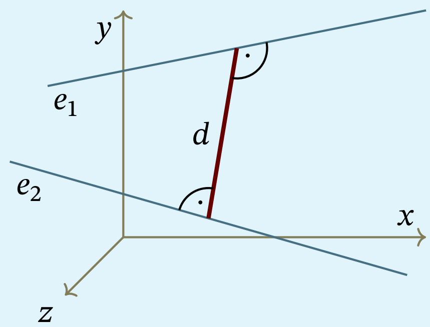


Két egyenes távolsága:

Az $e_1 : \boldsymbol{p}_1(t_1) = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{v}_1$ és $e_2 : \boldsymbol{p}_2(t_2) = \boldsymbol{r}_2 + t_2\boldsymbol{v}_2$ egyenesek távolsága

$$d = \left| (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \cdot \underbrace{\frac{(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}}_{\hat{\boldsymbol{n}}_T} \right| = |(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_T|,$$

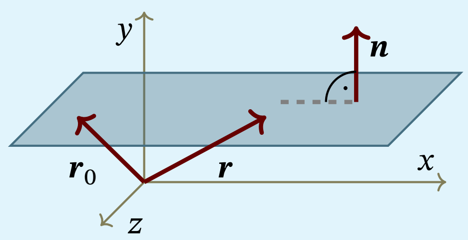
ahol $\hat{\boldsymbol{n}}_T$ egy olyan egységvektor, amely merőleges mindkét egyenesre. (normál transzverzális)



Amennyiben e_1 és e_2 párhuzamosak, akkor a távolságukat a pont és egyenes távolságának képletével számolhatjuk.

Sík 3D-ben:

$\boldsymbol{n}(A;B;C)$ – sík normálvektor
$\boldsymbol{r}(x;y;z)$ – tetszőleges pont helyvektora
$\boldsymbol{r}_0(x_0;y_0;z_0)$ – P_0 fixpont helyvektora



Sík egyenlete:

A sík tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontjára igaz, hogy

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0,$$
$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}=:-D,$$
$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Hesse-féle normálegyenlet:

$$\left|\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=0$$

Két sík viszonya:

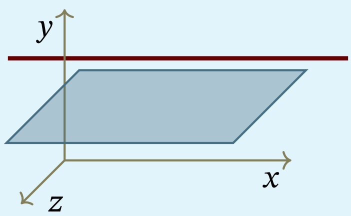
Két sík által bezárt szög a síkok normálvektorai által bezárt szög.

Sík és egyenes döféspontja:

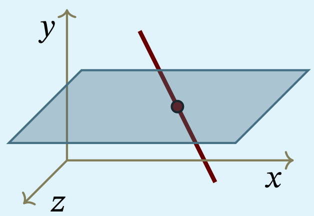
Egy $s\ :\ Ax+By+Cz+D=0$ sík és egy $e\ :\ \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}$ egyenes döféspontjait meghatározhatjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \qquad \text{és} \qquad Ax+By+Cz+D=0.$$

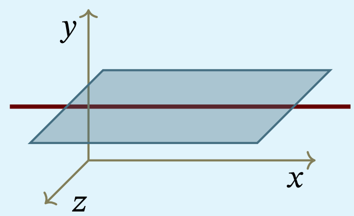
A megoldások száma alapján:



0 megoldás



1 megoldás



∞ megoldás

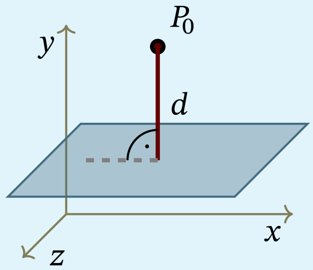
Sík és egyenes által bezárt szög:

Egy sík és egy egyenes által bezárt szög a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő.

Sík és pont távolsága:

Egy $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pont és egy $s : Az+By+Cz+D = 0$ sík távolsága:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

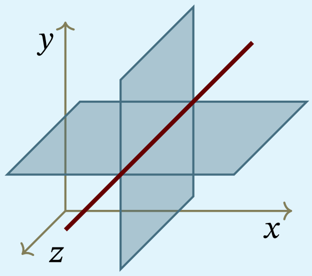


Két sík metszésvonala:

A metszésvonal irányvektora mindkét sík normálvektorára merőleges:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2.$$

Ezen kívül szükségünk van még egy tetszőleges pontra, amely rajta van mindkét síkon. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy az egyik koordinátát fixáljuk, és a másik kettőt kiszámítjuk a 2 sík egyenletéből. (Pl. $z = 0$)



2.2. Feladatok

1. Számítsa ki az $e_1 : 3x - 4y - 10 = 0$ és az $e_2 : 6x - 8y + 5 = 0$ egyenes távolságát!

2. Írja fel azon egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2; 5; 6)$ és a $Q(7; -1; 3)$ pontokon!

3. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az alábbi egyenesek metszik egymást!

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \qquad\qquad \frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

4. Határozza meg az alábbi egyenesek távolságát!

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 + 3t_1 \\ y_1(t) = -1 + 4t_1 \\ z_1(t) = 2t_1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_2(t) = 7 + 6t_2 \\ y_2(t) = 1 + 8t_2 \\ z_2(t) = 3 + 4t_2 \end{cases}$$

5. Adott két egyenes. Határozza meg a távolságukat és normáltraszverzálisuk egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x_1(t) = -7 + 3t \\ y_1(t) = 4 - 2t \\ z_1(t) = 4 + 3t \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_2(t) = 1 + t \\ y_2(t) = -8 + 2t \\ z_2(t) = -12 - t \end{cases}$$

6. Vizsgálja meg, hogy a $P(0; -1; 2)$, a $Q(2; -1; 1)$ és az $R(4; 3; -2)$ pontok egy egyenesbe esnek-e! Ha nem, akkor írja fel az általuk kifeszített sík egyenletét!

7. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az e egyenes és az s sík párhuzamos egymással!

$$e : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha} \qquad\qquad s : x + 3y - 2\alpha z = 0$$

8. Számítsa ki az e egyenes és az s sík metszéspontját!

$$e : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \qquad\qquad s : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

9. Adja meg az s_1 és s_2 síkok metszésvonalának egyenletrendszerét!

$$s_1 : x - 2y + 3z - 4 = 0 \qquad\qquad s_2 : 3x + 2y - 5z - 4 = 0$$

10. Igazolja, hogy az alábbi három síknak egy közös pontja van. Írja fel ezen a ponton átmenő síkot, amely párhuzamos az $x + y + 2z = 0$ síkkal!

$$\begin{cases} s_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \\ s_2 : x - 3y + z + 1 = 0 \\ s_3 : x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$