

7

Összefoglalás

Matematika G3 – Többszámú változós analízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 08.

7.1. Elméleti áttekintő

Differenciáloperátorok

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, ahol \mathbf{r} az \mathbb{R}^3 -beli Descartes koordináta-rendszerben $\mathbf{r} = (x; y; z)$.

| Rotáció | Divergencia | Gradiens |
|---|--|--|
| $\text{rot } \mathbf{v}$ | $\text{div } \mathbf{v}$ | $\text{grad } \varphi$ |
| $\nabla \times \mathbf{v}$ | $\langle \nabla; \mathbf{v} \rangle$ | $\nabla \cdot \varphi$ |
| $\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ | $\left\langle \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\rangle$ | $\begin{bmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{bmatrix}$ |
| $\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$ | $\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$ | $\mathcal{D}_{\varphi} = \mathbb{R}^3$ |
| $\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$ | $\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$ | $\mathcal{R}_{\varphi} = \mathbb{R}$ |
| $\mathcal{R}_{\text{rot } \mathbf{v}} = \mathbb{R}^3$ | $\mathcal{R}_{\text{div } \mathbf{v}} = \mathbb{R}$ | $\mathcal{R}_{\text{grad } \varphi} = \mathbb{R}^3$ |

Azonosságok

- Teljesül a linearitás:

$$\text{grad}(\lambda \Phi + \mu \Psi) = \lambda \text{grad } \Phi + \mu \text{grad } \Psi$$

$$\text{rot}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{rot } \mathbf{v} + \mu \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{div}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{div } \mathbf{w}$$

- Zérusság:

$$\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$$

- Deriválási szabályokhoz hasonló:

$$\text{grad}(\Phi \Psi) = \Phi \text{grad } \Psi + \Psi \text{grad } \Phi$$

$$\text{div}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{div } \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}; \text{grad } \Phi \rangle$$

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{grad } \Phi$$

- Egyéb szabályok:

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u} + (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u}$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}; \text{rot } \mathbf{v} \rangle$$

$$\text{grad}(\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle) = (\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{D}\mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

Potenciálosság

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező skalárpotenciális, ha létezik olyan $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Ekkor $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$.

Egy $\mathbf{v} : V \rightarrow V$ vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan $\mathbf{u} : V \rightarrow V$ vektormező, hogy $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$. Ekkor $\text{div } \mathbf{v} = \text{div rot } \mathbf{u} = 0$.

Vonalmenti integrálok

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\gamma(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$, $d\mathbf{r} = \dot{\gamma}(t) dt$. Ekkor:

- skalármező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\mathbf{r}) ds = \int_I \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

- vektormező görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \int_I \langle \mathbf{v}(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle dt,$$

- vektormező görbe menti vektorértékű integrálja:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \int_I \mathbf{v}(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t) dt.$$

Felületi integrálok

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\varrho} : U \rightarrow \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s, t \in U$ a felület paraméterezése, $\boldsymbol{\varrho}(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $d\mathbf{S} = \|\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}\| ds dt$, $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{S} = \partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho} ds dt$, $\hat{\mathbf{n}} = (\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}) / \|\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}\|$. Ekkor:

- skalármező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \int_U \varphi(\boldsymbol{\varrho}(s, t)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| ds dt,$$

- vektormező skalárértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{S} \rangle = \int_U \left\langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s, t)); \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) \right\rangle ds dt,$$

- vektormező vektorértékű felületi integrálja:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S} = \int_U \mathbf{v}(\boldsymbol{\varrho}(s, t)) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right) ds dt.$$

Térfogati integrál

Legyen $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\mathbf{\Omega} : D \rightarrow \mathcal{V}$ paraméterezett tértartomány, ahol $r; s; t \in D$ a tértartomány paraméterezése, $\mathbf{\Omega}(D) = \mathcal{V}$ a tértartomány képe, $dV = \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) dr ds dt$. Ekkor:

- skalármező térfogati integrálja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{r}) dV = \iiint_D \varphi(\mathbf{\Omega}(r; s; t)) \det(\mathbf{D}\mathbf{\Omega}(r; s; t)) dr ds dt.$$

Integrálási tételek

- **Gradiens-tétel:**

$$\int_c \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Vagyis ha egy vektormező előáll egy skalármező gradienseként, akkor annak bármely zárt görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

- **Stokes-tétel:**

$$\iint_S \langle \text{rot } \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{r} \rangle.$$

A tételből következik, hogy skalárpotenciális vektormező bármely zárt görbén vett integrálja zérus.

- **Gauss-Osztogradszkij-tétel:**

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{v} dV = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \mathbf{v}; d\mathbf{S} \rangle.$$

A tételből következik, hogy vektorpotenciális vektormező bármely zárt felületen vett integrálja zérus.

- **Green-tétel asszimmetrikus alakja:**

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \langle \text{grad } \psi; \text{grad } \varphi \rangle dV = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \psi \text{grad } \varphi; d\mathbf{S} \rangle.$$

- **Green-tétel szimmetrikus alakja:**

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi dV = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \langle \psi \text{grad } \varphi - \varphi \text{grad } \psi; d\mathbf{S} \rangle.$$

7.2. Feladatok

1.