

## 1

# Vektorok

Matematika G1 – Analitikus geometria

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

## 1.1. Elméleti Áttekintő

### Definíció 1.1: Vektor

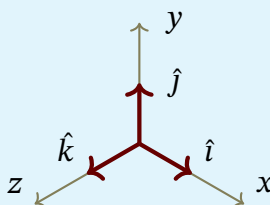
Egy  $(v_1, v_2, v_3)$  valós számokból álló rendezett számhármast a térben  $(\mathbb{R}^3)$  vektornak nevezünk. Jelölése:  $\mathbf{v}$  (nyomtatott szöveg),  $\underline{v}$  /  $\vec{v}$  (kézzel írott szöveg).

A vektorok geometriai értelemben olyan irányított szakaszok, melyeknek hossza és iránya van.

### Vektorok megadása:

Egy tetszőleges  $\mathbf{v}$   $(v_1; v_2; v_3)$  vektor a standard normális bázisban

$$\mathbf{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}.$$



$$\hat{i} = (1; 0; 0)$$

$$\hat{j} = (0; 1; 0)$$

$$\hat{k} = (0; 0; 1)$$

### Vektorok típusai:

- **kötött vektor:** fix kezdőponttal rendelkezik,
- **szabad vektor:** nincs fix kezdőpontja,
- **helyvektor:** olyan kötött vektor, amelynek kezdőpontja az origó.

### Vektor hossza:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

- Ha  $|\mathbf{v}| = 0$ , akkor  $\mathbf{v}$  **nullvektor**. (Jele:  $\mathbf{0}$ )
- Ha  $|\mathbf{v}| = 1$ , akkor  $\mathbf{v}$  **egységvektor**.

A nullvektor iránya nem definiált.

### Egy adott $\mathbf{v}$ vektorhoz tartozó egységvektor:

$$\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left( \frac{v_1}{|\mathbf{v}|} \quad \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} \quad \frac{v_3}{|\mathbf{v}|} \right)$$

**Háromszög-egyenlőtlenség:**

Minden  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  vektorpárra igaz, hogy

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

**Parallelogramma-szabály:**

Ha az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorokkal, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának azon átlója, amely a közös pontból indul.

**Vektor koordinátatengelyekkel bezárt szöge:**

$$\cos \varphi_x = \frac{v_1}{|\mathbf{v}|} \quad \cos \varphi_y = \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} \quad \cos \varphi_z = \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}$$

**Kollinearitás:**

Az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  kollineárisak, ha  $\mathbf{v}$  előáll  $\mathbf{u}$  és egy  $\lambda \in \mathbb{R}$  szorzataként. Amennyiben  $\lambda > 0$ , akkor a két vektor azonos irányú.

**Komplanaritás:**

Tetszőleges számú vektor komplanáris, ha azok egy síkban helyezkednek el.

**Definíció 1.2: Lineáris függetlenség**

Egy  $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$  vektorrendszer lineárisan független, ha a  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$  egyenletnek csak a triviális megoldása létezik. (Azaz  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .)

- A nullvektor minden vektorral lineárisan függő.
- Két vektor akkor lineárisan független, ha nem kollineáris.
- Ha két vektor nem kollineáris, akkor egyértelműen meghatároznak egy síkot, azaz bármely velük koplanáris vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként.
- 3D koordinátarendszerben 3-nál több vektor biztos, hogy lineárisan összefüggő. (Feltéve, hogy nincs köztük nullvektor.)
- 3 vektor lineárisan független ha nem koplanáris. (3D-ben)

**Vektorok összege és különbsége:**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

- **Kommutatív:**  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- **Asszociatív:**  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

**Skalárral való szorzás:**

Skalárral való szorzás esetén a vektor ( $\mathbf{v}$ ) minden koordinátáját megszorozzuk a  $\lambda \in \mathbb{R}$  skalárral, vagyis:

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3).$$

**A skalárral való szorzás eredménye egy vektor**, melynek hossza az eredeti vektor hosszának skalárszorosa.

**Vektorok skaláris szorzata: (Scalar / Dot product)**

Az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

**Két vektor skaláris szorzatának eredménye egy skálár.**

**A skaláris szorzat tulajdonságai:**

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  (kommutatív)
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  (disztributív)
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$
- $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

**A skaláris szorzat geometriai jelentése:**

A skaláris szorzás segítségével kiszámítható az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok közötti szög.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$$



Az  $\mathbf{u}$  vektor  $\mathbf{v}$  vektorra vett párhuzamos és merőleges komponense:

$$\mathbf{u}_{||} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_v) \hat{\mathbf{e}}_v \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{||},$$

ahol  $\hat{\mathbf{e}}_v$  a  $\mathbf{v}$  irányába mutató egységvektor.

**Vektoriális szorzat / keresztszorzat (Cross product):**

Az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok keresztszorzata:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}.$$

**Két vektor keresztszorzatának eredménye egy vektor**, amely merőleges mindkét vektorra, iránya pedig a jobbkezes szabály szerinti.

**A keresztszorzat tulajdonságai:**

- $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  (antikommutatív)
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$  (disztributív)
- $\mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  akkor és csak akkor, ha  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  kollineárisak, vagy ha valamelyikük nullvektor.

**A keresztszorzat geometriai jelentése:**

Az  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  vektor hossza megegyezik az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területével.

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \varphi$$

**Vegyesszorzat:**

Az  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  vektorok vegyes szorzata:

$$uvw = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

**A vegyesszorzat eredménye egy skalár.**

**A vegyesszorzat tulajdonságai:**

- $uvw = wuv = vwu = -vuw = -wvu = -uwx$  (ciklikus csere)
- lineáris mindhárom változójában:  $(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v})\mathbf{wz} = \lambda \mathbf{uwz} + \mu \mathbf{vwz}$
- Ha  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  vektorok egy síkban helyezkednek el, akkor vegyesszorzatuk nulla.

**A vegyesszorzat geometriai jelentése:**

3 vektor vegyesszorzata megadja az általuk kifeszített paralelepipedon térfogatát, illetve az általuk kifeszített tetraéder térfogatának hatszorosát.

## 1.2. Feladatok

1. Legyen  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  két tetszőleges vektor. Milyen  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterek esetén lesznek kollineárisak, ha az  $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}\}$  vektorrendszer lineárisan független?

$$\text{a) } \begin{cases} \mathbf{u} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \\ \mathbf{v} = 4\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \mathbf{u} = 3\mathbf{a} - 3\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c} \\ \mathbf{v} = \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} - \mathbf{c} \end{cases}$$

2. Legyen az  $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}\}$  vektorrendszer lineárisan független. Lineárisan független lesz-e az  $\{\mathbf{r}; \mathbf{s}; \mathbf{t}\}$  vektorrendszer?

$$\text{a) } \begin{cases} \mathbf{r} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \end{cases}$$

3. Legyen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  közös középpontú komplanáris vektorok. ( $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem kollineáris) Bizonyítsa be, hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok végpontja akkor és csak akkor esik egy egyenesre, ha  $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$  előállításban  $\alpha + \beta = 1$ .
4. Számítsa ki az  $\mathbf{a}(7; -1; 6)$  és  $\mathbf{b}(2; 20; 2)$  vektorok által bezárt szöget!
5. Milyen  $z$  esetén lesz a  $\mathbf{b}(6; -2; z)$  vektor merőleges az  $\mathbf{a}(2; -3; 1)$  vektorra?
6. Ha az  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  vektor merőleges a  $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$  vektorra, az  $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$  vektor pedig merőleges a  $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  vektorra, mekkora  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  bezárt szögének koszinusza?
7. Az  $ABCD$  téglalap ismert csúcsainak koordinátái:  $A(2; 6; 0)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(-2; 8; z)$ . Mennyi  $z$  értéke? Hol van  $D$  pont?
8. Számítsa ki az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  keresztszorzatot, amennyiben  $\mathbf{a}(-4; 2; 1)$  és  $\mathbf{b}(-2; 7; 8)$ .
9. Hozza egyszerűb alakra a  $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$  kifejezést!
10. Kollineárisak-e az  $\mathbf{a}(-3; 4; 7)$  és  $\mathbf{b}(2; 5; 1)$  vektorok?
11. Mekkora az  $ABC$  háromszög területe, ha csúcsai:  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(-1; 4; 7)$  és  $C(5; -2; 1)$ ?
12. Igaz-e, hogy ha  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ , akkor  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ?
13. Lehet-e az  $\mathbf{a}(6; 2; -3)$  és  $\mathbf{b}(-3; 6; -2)$  vektor egy kocka egy csúcsából induló élvektorok? Ha igen, határozzuk meg a harmadik élt!
14. Lineárisan független-e az  $\mathbf{a}(2; 3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(1; -1; 3)$  és  $\mathbf{c}(1; 9; -11)$  vektor?
15. Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata  $V$ . Mekkora az  $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$  és  $\mathbf{t} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
16. Milyen  $\alpha$  paraméter esetén lesz az  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  vektorrendszer lineárisan függő, illetve lineárisan független, ha  $\mathbf{a}(3; \alpha; 0)$ ,  $\mathbf{b}(0; 3; \alpha)$  és  $\mathbf{c}(1; 0; -1)$ ?
17. Határozza meg  $\mathbf{a}(-1; 2; 1)$  vektor  $\mathbf{b}(1; 2; 2)$  vektorra vett vetületét!