12. hét - Gyakorlat   Lineáris differenciálegyenletek

- általános alak: $y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$
  - ha $f(x) = 0$, akkor homogén, egyébként inhomogén
  - $a_i(x)$ ~ együttható függvények, ha $\forall a_i$ konstans $\Rightarrow$ konstans együtthatós

- homogén megoldás: n db lineárisan független függvény lineáris kombinációja

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

y_i függvények adják a diffegyenlet alaprendszerét

$\{y_1; y_2; \dots; y_n\} \Rightarrow$ vektorteret alkotnak

- lineáris függetlenség ellenőrzése: Wronsky-determináns

$$\underline{\underline{W}}(y_1; y_2; \dots; y_n) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

lin függő
$\Updownarrow$ (lin DE-k esetén)
$\det \underline{\underline{W}} = 0$

1. feladat   Mely halmazon lin függetlenek?

$H_1 = \{e^x; xe^x; x^2e^x\}$

$$\det \underline{\underline{W}} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (1+x)e^x & (2x+x^2)e^x \\ e^x & (2+x)e^x & (2+4x+x^2)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ 0 & e^x & 2xe^x \\ 0 & 2e^x & (2+4x)e^x \end{vmatrix} = e^x\left(e^{2x}(2+4x) - e^{2x}(4x)\right) = 2e^{3x} > 0$$

$x \in \mathbb{R}$ esetén lin. független

$H_2 = \{2; \cos^2 x; \sin^2 x\}$ $2 = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x \Rightarrow$ mindenhol lin összefüggőek

2. feladat $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ DE-nek hol lesz a $H = \{e^x; -(x+1)\}$ függvényrendszer az alaphalmaza?

Lin. függetlenség ellenőrzése: $\det \underline{\underline{W}} = \begin{vmatrix} e^x & -x-1 \\ e^x & -1 \end{vmatrix} = xe^x \neq 0$, ha $x \neq 0$

Megoldás-e? $\left.\begin{array}{l} y_1 = e^x \\ y_1' = e^x \\ y_1'' = e^x \end{array}\right\}$ $xe^x - (x+1)e^x + e^x = 0$ ✓

$\left.\begin{array}{l} y_2 = -x-1 \\ y_2' = -1 \\ y_2'' = 0 \end{array}\right\}$ $x+1-x-1 = 0$ ✓

H alaphalmaz $\Rightarrow$ $y = C_1 e^x - C_2(x+1)$

3. feladat $xy''' + 2y'' = 0$ $H = \{1; x; \ln x\}$ $x \geq 0$ ($\ln x$ miatt)

Lin függetlenség: $\det \underline{\underline{W}} = \begin{vmatrix} 1 & x & \ln x \\ 0 & 1 & 1/x \\ 0 & 0 & -1/x^2 \end{vmatrix} = -1/x^2$ $\Rightarrow$ $(0;\infty)$

Megoldás-e? $y_1 = 1$ $\Rightarrow$ $x \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ ✓

$y_2 = x$ $\Rightarrow$ $x \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ ✓

$y_3 = \ln x$ $\Rightarrow$ $x \frac{2}{x^3} + 2 \frac{-1}{x^2} = 0$ ✓

H alaphalmaz $\Rightarrow$ $y = C_1 + C_2 x + C_3 \ln x$

Állandó együtthatós, homogén, lineáris diffegyenletek

- általános alak: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$

  $a_0; a_1; \dots; a_{n-1}; a_n$ konstansok (~ állandó együttható)

  y és deriváltjai csak önmagukban szerepelnek (~ lineáris)

  nincs konstans / csak x-től függő tag (~ homogén)

- megoldási módszer: Próbafüggvény-módszer

  keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban, akkor $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$

  visszahelyettesítve (1)-be: $\cancel{e^{\lambda x}} \underbrace{(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)}_{\text{n-edfokú polinom} \Rightarrow \text{n db mo.}} = 0$

- ha $\lambda_i \in \mathbb{R}$ egyszeres gyök

  $y_i = e^{\lambda_i x}$

- ha $\lambda_{i;i+1} = \alpha \pm \beta i$ komplex konjugált gyökpár

$$\boxed{\begin{aligned} y_i &= e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_{i+1} &= e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \cosh ix = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2} = \cos x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \qquad \sinh ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x$$

$$K_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + K_2 e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x}\left[\underbrace{(K_1 + K_2)}_{C_1} \cos \beta x + \underbrace{i(K_1 - K_2)}_{C_2} \sin \beta x\right]$$

- ha $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+s}$ s-szeres multiplicitású, akkor belső rezonancia lép fel $\Rightarrow$ lineárisan függetleníteni kell a megoldásokat

$$y_{i+1} = x \cdot y_i \qquad y_{i+2} = x^2 \cdot y_i \qquad \dots \qquad y_{i+s} = x^s y_i$$

- ha $\lambda_i = -\lambda_{i+1}$, akkor a mo. felírható hiperbolikus függvényekkel

  $y_i = \cosh \lambda x$ és $y_{i+1} = \sinh \lambda x$

$\{\sinh x; \cosh x; e^x\}$ lin független?

$$\det \underline{\underline{W}} = \begin{vmatrix} s & c & e^x \\ c & s & e^x \\ s & c & e^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & c & e^x \\ c & s & e^x \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{nem lin függetlenek}$$

$\{\sin x; \cos x; e^{ix}\}$ lin független?

$$\det \underline{\underline{W}} = \begin{vmatrix} s & c & e^{ix} \\ c & -s & ie^{ix} \\ -s & -c & -e^{ix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & c & e^{ix} \\ c & -s & ie^{ix} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{nem lin függetlenek}$$

4. feladat $\quad y'' - 5y' + 6y = 0 \quad {}^{(I)}\, y(0) = 1 \quad {}^{(II)}\, y'(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{\lambda x} \\ y' = \lambda e^{\lambda x} \\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\{e^{2x}; e^{3x}\}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \qquad (I) \Rightarrow {}^{(a)}\, 1 = C_1 + C_2$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} \qquad (II) \Rightarrow {}^{(b)}\, 1 = 2C_1 + 3C_2$$

$(b) - 2(a) \Rightarrow C_2 = -1$

$(a) \Rightarrow C_1 = 2$

Megoldás tehát: $\underline{\underline{y(x) = 2e^{2x} - e^{3x}}}$

5. feladat $\quad 8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0$

$$8\lambda^3 + 12\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$\lambda_{123} = -1/2 \quad$ 3-szoros gyök

$$\{e^{-x/2}; xe^{-x/2}; x^2 e^{-x/2}\}$$

Megoldás tehát: $\underline{\underline{y(x) = e^{-x/2}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)}}$

6. feladat $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda) = \lambda[(\lambda-1)^2 + 1] = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{23} = 1 \pm i$$

$$\{1;\ e^x \cos x;\ e^x \sin x\}$$

Megoldás tehát: $y(x) = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$

7. feladat $y''''' - 2y'''' + 8y''' - 16y'' + 16y' - 32y = 0$

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 8\lambda^3 - 16\lambda^2 + 16\lambda - 32 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_{2345} = \pm 2i$$

$$\{e^{2x};\ \cos 2x;\ \sin 2x;\ x\cos 2x;\ x\sin 2x)$$

Megoldás tehát: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \cos 2x + C_5 x \sin 2x$

8. feladat Legkisebb rendű DE, melynek alaphalmaza $\{5x^2; 5e^{2x}\}$

$x^2 e^{0x}$

$$\left.\begin{aligned} x^2 &\Rightarrow \lambda_{123} = 0 \\ e^{2x} &\Rightarrow \lambda_4 = 2 \end{aligned}\right\} (\lambda-0)^3(\lambda-2) = \lambda^4 - 2\lambda^3 \Rightarrow y'''' - 2y''' = 0$$

9. feladat $\{7x;\ \sin 5x\}$ $\sim e^{0x} \sin 5x \quad \lambda_{34} = 0 \pm 5i$

$$\left.\begin{aligned} x &\Rightarrow \lambda_{12} = 0 \\ \sin 5x &\Rightarrow \lambda_{34} = \pm 5i \end{aligned}\right\} (\lambda-0)^2(\lambda^2 + 5^2) = \lambda^4 + 25\lambda^2 \Rightarrow y'''' + 25y'' = 0$$

10. feladat $\{xe^x;\ e^{2x} \cos x\}$

$$\left.\begin{aligned} xe^x &\Rightarrow \lambda_{12} = 1 \\ e^{2x}\cos x &\Rightarrow \lambda_{34} = 2 \pm i \end{aligned}\right\} (\lambda-1)^2\left[(\lambda-2)^2 + 1^2\right] = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) =$$

$$= \lambda^4 - 6\lambda^3 + 14\lambda^2 - 14\lambda + 5 \Rightarrow y'''' - 6y''' + 14y'' - 14y' + 5y = 0$$

Állandó együtthatós, inhomogén, lineáris diffegyenletek

- általános alak: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \underbrace{f(x)}_{\text{gerjesztés}}$
- megoldás: $y = y_h + y_i$
  - ↳ homogén megoldásrész az előbb tanultak alapján
  - ↳ inhomogén megoldásrészt a gerjesztésnek megfelelő formában
    - $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \Rightarrow y_{ih} = c_n x^n + \dots + c_0$
    - $f(x) = a e^{bx} \Rightarrow y_{ih} = c e^{bx}$
    - $f(x) = a \cos bx \Rightarrow y_{ih} = \underbrace{c_1 \cos bx + c_2 \sin bx}_{\text{mindig párban vannak}}$
    - ha $f(x)$ ezek összege/szorzata, akkor y_{ih}-t is ennek megfelelően írjuk fel
    - ha a gerjesztés (részben) része a homogén megoldásnak, akkor külső rezonancia lép fel, itt is függetlenítenünk kell.

      Ha $y_h = e^x (C_1 + C_2 x)$, tehát $\lambda_{12} = 1$ 2-szeres multiplicitású, a gerjesztés pedig $f(x) = e^x$, akkor az inhomogén megoldást $cx^2 e^x$ alakban keressük.

    - y_{ih}-ban lévő c-ket úgy határozzuk meg, hogy n-szer deriválunk, majd visszahelyettesítünk.

11. feladat $\quad y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x$

- homogén mo.: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3$$

$$\{e^{2x} \,;\, e^{3x}\}$$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

- inhomogén mo.: $f(x) = 2\sin 2x$

$$\left.\begin{aligned} y_{ih} &= c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x \\ y'_{ih} &= -2c_1 \sin 2x + 2c_2\cos 2x \\ y''_{ih} &= -4c_1\cos 2x - 4c_2 \sin 2x \end{aligned}\right\} \quad y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x$$

$$\sin 2x(-4c_2 + 10c_1 + 6c_2) + \cos 2x(-4c_1 - 10c_2 + 6c_1) = 2\sin 2x$$

$$\sin 2x(10c_1 + 2c_2) + \cos 2x(2c_1 - 10c_2) = \sin 2x(2) + \cos 2x(0)$$

$$\begin{cases} 10c_1 + 2c_2 = 2 & (\mathrm{I}) \\ 2c_1 - 10c_2 = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases} \qquad 5(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \quad 52c_1 = 10$$

$$c_1 = 5/26$$
$$c_2 = 1/26$$

$$y_{ih} = \frac{5}{26}\cos 2x + \frac{1}{26}\sin 2x$$

- összegezve: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{26}\cos 2x + \frac{1}{26}\sin 2x$

12. feladat $\quad y''-5y'+6y=2xe^x+e^{2x}$

- homogén mo.: $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
- inhomogén mo.: $f(x) = 2xe^x + e^{2x}$

$$\left.\begin{aligned} y_{ih} &= (c_1x+c_2)e^x + c_3xe^{2x} \\ y'_{ih} &= (c_1x+c_1+c_2)e^x + (2c_3x+c_3)e^{2x} \\ y''_{ih} &= (c_1x+2c_1+c_2)e^x + (4c_3x+4c_3)e^{2x} \end{aligned}\right\} \; y''+5y'+6y = 2xe^x+e^{2x}$$

$$e^x: \quad 2x = (c_1x+2c_1+c_2) - 5(c_1x+c_1+c_2) + 6(c_1x+c_2)$$

$$x(2)+1(0) = x(c_1-5c_1+6c_1) + 1(2c_1+c_2-5c_1-5c_2+6c_2)$$

$$2 = 2c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$0 = -3c_1+2c_2 \Rightarrow c_2 = 3/2$$

$$e^{2x}: \quad 1 = (4c_3x+4c_3) - 5(2c_3x+c_3) + 6(c_3x)$$

$$x(0)+1(1) = x(4c_3-10c_3+6c_3) + 1(4c_3-5c_3)$$

$$0 = 0c_3$$

$$1 = -1c_3 \Rightarrow c_3 = -1$$

$$y_{ih} = (x+3/2)e^x - xe^{2x}$$

- összegezve: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (x+3/2)e^x - xe^{2x}$

Partikuláris megoldás konstans variálással: $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{x} + e^{2x}$

- a Wronsky-mátrix: $\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{bmatrix}$

- a partikuláris mo.: $y_p = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2 = u_1 e^{2x} + u_2 e^{3x}$

↳ extra feltétel: $u_1' y_1 + u_2' y = 0$, akkor

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \qquad = u_1 2y_1 + u_2 3y_2$$

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' = u_1 4y_1 + u_2 9y_2 + u_1' 2y_1 + u_2' 3y_2$$

- eredeti egyenletbe visszahelyettesítés:

$$u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' - 5(u_1 y_1' + u_2 y_2') + 6(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x)$$

$$\cancel{u_1 4y_1} + \cancel{u_2 9y_2} + u_1' 2y_1 + u_2' 3y_2 - 5(\cancel{u_1 2y_1} + \cancel{u_2 3y_2}) + 6(\cancel{u_1 y_1} + \cancel{u_2 y_2}) = f(x)$$

u_1 és u_2-es tagok kiesnek, ami marad: $u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$

- egyenletrendszeresen: $\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}}_{\text{Wronsky-mx}} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$

Megoldás Cramer-szabállyal: $u_1' = \dfrac{-y_2 f}{W} \qquad u_2' = \dfrac{y_1 f}{W}$

$$u_1' = \frac{-e^{3x}}{e^{5x}} \cdot (2xe^{x} + e^{2x}) = -2xe^{-x} - 1$$

$$u_1 = \int -2xe^{-x} - 1 \, dx = 2xe^{-x} + 2e^{-x} - x \quad (+C \sim \text{ezt } y_h \text{ már tart.})$$

$$\begin{array}{ccc} + & -2x & e^{-x} \\ - & -2 & -e^{-x} \\ & 0 & e^{-x} \end{array}$$

$$y_{p1} = u_1 y_1 = 2xe^{x} + 2e^{x} - xe^{2x}$$

$$u_2' = \frac{e^{2x}}{e^{5x}} \cdot \left(2xe^{x} + e^{2x}\right) = 2xe^{-2x} + e^{-x}$$

$$u_2 = \int 2xe^{-2x} + e^{-x}\, dx = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} \quad (+C)$$

$$\begin{array}{ccc} + & 2x & e^{-2x} \\ - & 2 & -e^{-2x}/2 \\ & 0 & e^{-2x}/4 \end{array}$$

beleolvad C_1e^{2x}-be

$$y_{p2} = u_2 y_2 = -xe^{x} - \frac{1}{2}e^{x} \cancel{- e^{2x}}$$

$$y_p = xe^{x} + \frac{3}{2}e^{x} - xe^{2x}$$

Tehát általánosan a módszer:

$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ diffegyenlet

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ homogén mo.

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ partikuláris mo.

↳ $$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}}_{\text{Wronsky-mx.}} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$ => megkötés => visszahelyettesítés

↳ megoldás Cramer-szabállyal:

- $u_1' = \dfrac{-y_2 f}{W}$ => $u_1 = \displaystyle\int \frac{-y_2 f}{W}\, dx$
- $u_2' = \dfrac{y_1 f}{W}$ => $u_2 = \displaystyle\int \frac{y_1 f}{W}\, dx$

13. feladat $\quad y'' + 4y = x^2 \sin 2x$

- homogén: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{12} = \pm 2i$

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

- inhomogén: $f(x) = x^2 \sin 2x$ + rezonancia

$$y_{ih} = x\left[(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\cos 2x + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)\sin 2x\right]$$

$$\vdots$$

$$y_{ih} = \frac{-1}{12} x^2 \cos 2x + \frac{1}{32} x \cos 2x + \frac{1}{16} x^2 \sin 2x$$

- összegezve:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{-1}{12} x^3 \cos 2x + \frac{1}{32} x \cos 2x + \frac{1}{16} x^2 \sin 2x$$

Partikuláris megoldás konstans variálással:

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad$ és $\; ! \; u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$

$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$

$y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$

eredeti egyenletbe visszahelyettesítve az u_1 és u_2-es tagok kiesnek, hiszen $y_1'' + 4y_1 = 0$ és $y_2'' + 4y_2 = 0$ (homogén mo.)

ami marad: $u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$

meghötés + maradék mátrixosan: $\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}}_{\text{Wronsky-mx}} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$

Cramer-szabály alapján:

- $W = \det \underline{\underline{W}} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2$

- $u_1' = \dfrac{-y_2 f}{W} = \dfrac{-\sin 2x}{2} x^2 \sin 2x = \dfrac{-1}{2} x^2 \sin^2 2x = \dfrac{-x^2}{2} \cdot \dfrac{1-\cos 4x}{2}$

$$u_1 = \int \frac{-x^2}{4} + \frac{x^2}{4} \cos 4x \, dx = \frac{-x^3}{12} + \frac{x^2}{16} \sin 4x + \frac{x}{32} \cos 4x + \frac{-1}{128} \sin 4x$$

$$\begin{array}{cll} + & x^2/4 & \cos 4x \\ - & x/2 & \sin 4x/4 \\ + & 1/2 & -\cos 4x/16 \\ & 0 & -\sin 4x/64 \end{array}$$

- $u_2' = \dfrac{y_1 f}{W} = \dfrac{\cos 2x}{2} x^2 \sin 2x = \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \sin 4x$

$$u_2 = \int \frac{x^2}{4} \sin 4x \, dx = \frac{-x^2}{16} \cos 4x + \frac{x}{32} \sin 4x + \frac{1}{128} \cos 4x$$

$$\begin{array}{cll} + & x^2/4 & \sin 4x \\ - & x/2 & -\cos 4x/4 \\ + & 1/2 & -\sin 4x/16 \\ & 0 & \cos 4x/64 \end{array}$$

- Összegezve: $y_p = \cos 2x \left[\dfrac{-x^3}{12} + \dfrac{x^2}{16} \sin 4x + \dfrac{x}{32} \cos 4x + \dfrac{-1}{128} \sin 4x \right]$

$\qquad + \sin 2x \left[\dfrac{-x^2}{16} \cos 4x + \dfrac{x}{32} \sin 4x + \dfrac{1}{128} \cos 4x \right]$

$\cos 2x \sin 4x = \dfrac{\sin 2x + \sin 6x}{2}$ $\qquad$ $\cos 2x \cos 4x = \dfrac{\cos 2x + \cos 6x}{2}$

$\sin 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 6x - \sin 2x}{2}$ $\qquad$ $\sin 2x \sin 4x = \dfrac{\cos 2x - \cos 6x}{2}$

$$
\begin{aligned}
y_p = \frac{-x^3}{12}\cos 2x &+ \frac{1}{2}\sin 2x\left[\frac{x^2}{16} + \frac{-1}{128} + \frac{x^2}{16} + \frac{-1}{128}\right] \sim \frac{x^2}{16} + \cancel{\frac{-1}{128}} \\
&+ \frac{1}{2}\sin 6x\left[\frac{x^2}{16} + \frac{-1}{128} + \frac{-x^2}{16} + \frac{1}{128}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\cos 2x\left[\frac{x}{32} + \frac{x}{32}\right] \sim \frac{x}{32} \\
&+ \frac{1}{2}\cos 6x\left[\frac{x}{32} - \frac{x}{32}\right] \sim 0
\end{aligned}
$$

beleolvad C_2-be

Tehát összegezve: $y_p = \left[\frac{-x^3}{12} + \frac{x}{32}\right]\cos 2x + \left[\frac{x^2}{16}\right]\sin 2x$