

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5*(0,1)) node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kiteintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q) + (1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Lineáris Algebra BMETE94BG02 4

Matematika G2

Lineáris leképezések I

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 1: Lineáris leképezés**]
Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1 -beli vektor ($\forall a; b \in V_1$) és T -beli skalár ($\lambda \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

c

$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ additív (összegre tagonként hat),

$\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ homogén (skalár kiemelhető).

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 2: Leképezés magtere**]
Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker \varphi := \{ v \mid v \in V_1 \wedge \varphi(v) = 0 \}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 3: Leképezés defektusa**]
A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $\text{def} \varphi$ -vel jelöljük.

[style=note, nobreak=true,] Nem létezik olyan vektortér, melynek magtere az üreshalmaz (a nullvektor mindig benne van, mert a nullvektor képe mindig nullvektor).

[style=note, nobreak=true,] Invertálható lineáris leképezés magtere a nullvektor.

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white**Definíció 4: Lineáris leképezés rangja**] Egy lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját. $\text{rang} \varphi = \dim \varphi(V_1)$.

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white **Tétel 1: Rang-nullitás tétele**] Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi + \text{def} \varphi = \dim V_1.$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Lineáris leképezések mátrixrepresentációja:**

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = n$, valamint $\dim V_2 = k$. Legyen $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ bázis V_1 -ben, és $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ bázis V_2 -ben. Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}b_1 + \alpha_{2i}b_2 + \dots + \alpha_{ki}b_k = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji}b_j \quad \Rightarrow \quad A := \alpha_{11}\alpha_{21} \cdots \alpha_{1n}\alpha_{21}\alpha_{2i} \cdots \alpha_{2n} \ddots \cdots \alpha_{k1}\alpha_{ki} \cdots \alpha_{kn}$$

Az A mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $x \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ az x koordinátái, ekkor a képét az alábbi módon számíthatjuk:

$$\varphi(x) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i a_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi(a_i) = \alpha_{11}\alpha_{21} \cdots \alpha_{1n}\alpha_{21}\alpha_{2i} \cdots \alpha_{2n} \ddots \cdots \alpha_{k1}\alpha_{ki} \cdots \alpha_{kn} \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 5: Bázistranszformáció**] Legyenek $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ és $\{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \dots; \hat{b}_n\}$ bázisok V -ben. Ekkor a $\{b_1; b_2; \dots; b_n\} \rightarrow \{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \dots; \hat{b}_n\}$ bázistranszformáció T mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{b}_1 = t_{11}b_1 + t_{21}b_2 + \dots + t_{n1}b_n \\ \hat{b}_2 = t_{12}b_1 + t_{22}b_2 + \dots + t_{n2}b_n \\ \vdots \\ \hat{b}_j = t_{1j}b_1 + t_{2j}b_2 + \dots + t_{nj}b_n \\ \vdots \\ \hat{b}_n = t_{1n}b_1 + t_{2n}b_2 + \dots + t_{nn}b_n \end{array} \right\} \Rightarrow T = t_{11}t_{12} \cdots t_{1n}t_{21}t_{22} \cdots t_{2n} \ddots \cdots t_{n1}t_{n2} \cdots t_{nn}$$

[style=note, nobreak=true,] A T bázistranszformációs mátrix segítségével a régi és új bázisban felírt vektorok kordinátái közötti kapcsolat mátrixosan:

$$x = Tx' \quad s \quad x' = T^{-1}x.$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white **Tétel 2: Lineáris leképezés mátrixa új bázisban**] Legyen $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés, $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ és $\{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \dots; \hat{b}_n\}$ bázisok V -ben. A $\varphi \{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa A , a $\varphi \{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \dots; \hat{b}_n\}$ bázisra vonatkozó mátrixa \hat{A} . Jelölje T a $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ bázisról a $\{\hat{b}_1; \hat{b}_2; \dots; \hat{b}_n\}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{A} = T^{-1}AT.$$

[style=note, nobreak=true,] A A és \hat{A} mátrix hasonló.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Alap geometriai leképezések:**

- **Tükrözés** $T_x = 100$ valamely tengelyre: 3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x-tengelyre tükrözés

$$T_y = -10001000 - 1$$

y-tengelyre tükrözés

$$T_z = -1000 - 10001$$

z-tengelyre tükrözés

- **Vetítés** $T_x = 100$ valamely tengelyre: 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x-tengelyre vetítés

$$T_y = 000010000$$

y-tengelyre vetítés

$$T_z = 000000001$$

z-tengelyre vetítés

- **Tükrözés** $T_{xy} = 100$ valamely síkra: 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

xy-síkra tükrözés

$$T_{yz} = -100010001$$

yz-síkra tükrözés

$$T_{xz} = 1000 - 10001$$

xz-síkra tükrözés

$$\text{Vetítés } T_{xz} = 100 \text{ valamely síkra: } 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

xyskravetts

$$T_{yz} = 000010001$$

yz síkra vetítés

$$T_{xz} = 100000001$$

xz síkra vetítés

$$\lambda\text{-szoros nyújtás } T_x = \lambda 00 \text{ valamely irányban: } 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

xirnyba

$$T_y = 1000\lambda 0001$$

y irányba

$$T_z = 10001000\lambda$$

z irányba

Forgatás $+\alpha$ szöggel: $R_x(\alpha) = 100$

$$\begin{pmatrix} 0 \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \sin \alpha \cos \alpha & \sim & xtengelykrliforgats \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \cos \alpha \begin{pmatrix} 0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 \cos \alpha & \sim & ytengelykrliforgats \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \cos \alpha \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim ztengelykrliforgats$$

[style=note, nobreak=true,] Ha egymás után több transzformációt kell végrehajtani A, B, C sorrendben, akkor:

$$x' = CBAx.$$

[style=definition, nobreak=true, frametitle= white **Definíció 6: Ortogonális transzformáció**] Az n dimenziós euklideszi tér $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformációját ortogonálisnak mondjuk, ha $\langle \mathcal{A}x; \mathcal{A}y \rangle = \langle x; y \rangle$, minden $x; y \in V$ esetén.

[style=note, nobreak=true,] Egy ortogonális transzformáció Q mátrixának inverze megegyezik a transzponáltjával.

Amennyiben $\det Q = 1$, akkor a transzformáció orientációtartó.

Amennyiben $\det Q = -1$, akkor a transzformáció orientációváltó.

[style=example, nobreak=true] A két dimenziós térben való forgatás orientációtartó, hiszen

$$\det Q = \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

0.2 Feladatok

1. Állapítsa meg, hogy az alábbi leképezések lineárisak-e?

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad xy \mapsto x + y5xy \qquad \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad xy \mapsto xyx + y$$

2. Határozza meg a $P(5; -4; -1)$ pont koordinátáit az $a_1(2; 1; 0)$, $a_2(0; 2; 1)$ és $a_3(1; 0; 2)$ vektorok által meghatározott bázisban!
3. Írja fel az $\{i, j, k\}$ és a $\{z_1, z_2, z_3\}$ ortonormált bázisok közti báziscsere mátrixát!
4. A harmadik feladatban meghatározott báziscsere mátrixát felhasználva oldja meg a második feladatot!
5. Írja fel a 2D Descartes koordináta-rendszer α fokos elforgatásával nyert új koordináta-rendszerbe mutató báziscsere mátrixát!
6. Adjuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az alábbi vektorba viszi át a bázisodot:

$$i \mapsto 213, \quad j \mapsto 555, \quad k \mapsto 00 - 1.$$

Mi lesz a $P(1; 1; 1)$ pont képe?

7. Adja meg az első feladatban szereplő leképezések mátrixait!
8. Határozza meg az origón áthaladó $u(a; b; c)$ normálisú ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) síkra vonatkozó tükrözés mátrixát!
9. Adott egy lineáris leképezés a szokásos $\{i, j\}$ bázisban. Írja fel a leképezés mátrixát az $\{f_1; f_2\}$ bázisban, ha $f_1(2; 1)$ és $f_2(1; 1)$.
10. Adott két lineáris leképezés mátrixa A és B . Mit ad eredményül...4
- $(A + B)r$,
 - ABr ,
 - A^2r ,
 - $A^{-1}r$?
11. Egy φ leképezés mátrixa A . Döntsük el, hogy:
- | | |
|------------------------------------|-----------------------------|
| a) $P(2; 0; 1) \in \ker \varphi$, | c) $\varphi = ?$ |
| $A = 123 - 10 - 23 - 14$ | d) $\text{def} \varphi = ?$ |
| b) mi $Q'(1; 4; 0)$ ősképe, | |
12. Mennyi a leképezés defektusa...2
- x tengelyre való vetítés esetén,
 - yz síkra való vetítés esetén?

13. Írja fel annak a leképezésnek a mátrixát amely z körül α szöggel forgat, majd tükröz az xy síkra, végül x irányba 2-szeres, z irányba 3-szoros nagyítást végez!
14. Írja fel azt a leképezést, amely az $y = x$ és $z = 0$ egyenletrendszerű egyenesre tükröz!
15. Írja fel az e egyenes körül pozitív y irányból 90° -os forgatás mátrixát a szokásos, illetve a $v_1(1; 0; 0)$, $v_2(1; 1; 0)$ és $v_3 = (1; 1; 1)$ bázisokban, ha az egyenes egyenletrendszere:

$$e : \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \quad s \quad z = 0.$$

16. Adja meg a α és β paramétereket, hogy a φ leképezés A mátrixa orientációtartó és skaláriszorzattartó legyen (ortogonális)!

$$A = \alpha\beta 0100001$$