1 Ismétlés, operátorok

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 05.

1.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 1.1 : Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet, T test. A $(V;+,\circ)$ a T test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V;+)$ Abel-csoport,
   - $\forall \boldsymbol{x};\boldsymbol{y};\boldsymbol{z} \in V : (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, (asszociativitás)
   - $\exists \boldsymbol{0} \in V : \forall \boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$, (zéruselem)
   - $\forall \boldsymbol{x} \in V : \exists -\boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, (inverzelem)
   - $\forall \boldsymbol{x};\boldsymbol{y} \in V : \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$. (kommutativitás)
2. $\forall \lambda;\mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : (\lambda \circ \mu)\circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ (\mu \circ \boldsymbol{x})$,
3. ha ε a T-beli egységelem, akkor $\forall \boldsymbol{x} \in V : \varepsilon \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
4. teljesül a disztributivitás:
   - $\forall \lambda \in T \wedge \forall \boldsymbol{x};\boldsymbol{y} \in V : \lambda \circ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \lambda \circ \boldsymbol{y}$,
   - $\forall \lambda;\mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : (\lambda+\mu)\circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \mu \circ \boldsymbol{x}$.

A **legfeljebb másodfokú polinomok** halmaza az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve vektortér.

Definíció 1.2 : Lineáris függetlenség

A $(V;+;\circ)$ vektortér $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ vektorait lineárisan függetlennek mondjuk, ha a

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

vektoregyenletnek **csak a triviális megoldása** létezik, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ha az egyenletnek nem csak a triviális megoldása létezik, akkor a vektorok lineárisan függőek.

A legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében a

$$\left\{ x^2 - x - 2;\ x+1;\ x^2 + x \right\}$$

vektorhármas lineárisan összefüggő, hiszen:

$$(1)\cdot(x^2 - x - 2) + (2)\cdot(x+1) + (-1)\cdot(x^2+x) = 0.$$

Definíció 1.3 : Altér

Legyen $(V;+;\circ)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér, valamint $\emptyset \neq L \subset V$. L-t altérnek nevezzük a V-ben, ha $(L;+;\circ)$ ugyancsak vektortér.

A legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében az olyan polinomok halmaza, melyekben a x-es tag együtthatója nulla, altér, hiszen a szokásos műveletekre zárt.

1. Összeadásra zárt:

$$(a_2x^2 + \underline{0x} + a_0) + (b_2x^2 + \underline{0x} + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + \underline{0x} + (a_0 + b_0).$$

2. Skalárral való szorzásra zárt:

$$\lambda \cdot (a_2x^2 + \underline{0x} + a_0) = (\lambda a_2)x^2 + \underline{0x} + (\lambda a_0).$$

Definíció 1.4 : Generátorrendszer

Legyen V vektortér, valamint $\emptyset \neq G \subset V$. G által generált altérnek nevezzük azt a legszűkebb alteret, amely tartalmazza G-t. Jele: $\mathcal{L}(G)$.

G generátorrendszere V-nek, ha $\mathcal{L}(G) = V$.

A legfeljebb másodfokú polinomok egy lehetséges **generátorrendszere**:

$$\{\, 1;\ 1 + x;\ x + x^2;\ x^2 \,\}.$$

Definíció 1.5 : Bázis

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V bázisának nevezzük.

A legfeljebb másodfokú polinomok egy lehetséges **bázisa**:

$$\{\, 1;\ x;\ x^2 \,\}.$$

Definíció 1.6 : Vektortér dimenziója

Végesen generált vektortér dimenzióján a bázisainak közös tagszámát értjük.

A legfeljebb másodfokú polinomok vektortere **dimenziója 3**, hiszen tetszőleges bázisának három eleme van. Egy másik lehetséges bázis:

$$\{\, 1 + x + x^2;\ x + x^2;\ x^2 \,\}.$$

Definíció 1.7 : Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1-beli vektor ($\forall \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in V_1$) és T-beli skalár ($\lambda \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b})$ $\sim$ additív (összegre tagonként hat),
- $\varphi(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{a})$ $\sim$ homogén (skalár kiemelhető).

Definíció 1.8 : Lineáris leképezés rangja

Egy lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját. $\operatorname{rg} \varphi = \dim \varphi(V_1)$.

Definíció 1.9 : Leképezés magtere

Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor a

$$\ker \varphi := \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V_1 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

halmazt a leképezés magterének nevezzük.

Definíció 1.10 : Leképezés defektusa

A magtér dimenzióját defektusnak nevezzük, és $\operatorname{def} \varphi$-vel jelöljük.

Tétel 1.1 : Rang-nullitás tétele

Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\operatorname{rg} \varphi + \operatorname{def} \varphi = \dim V_1 .$$

Lineáris leképezés mátrixa

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti vektorterek, és $\dim V_1 = n$, valamint $\dim V_2 = k$. Legyen $\{\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; \ldots ; \boldsymbol{a}_n\}$ bázis V_1-ben, és $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \ldots ; \boldsymbol{b}_k\}$ bázis V_2-ben. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor

$$\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} \boldsymbol{b}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}_{k \times n} .$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot φ leképezést reprezentáló mátrixnak hívjuk, segítségével tetszőleges $\boldsymbol{x} \in V_1$ képét meghatározhatjuk. Legyenek $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ az $\boldsymbol{x}$ koordinátái, ekkor a képe:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \varphi(\boldsymbol{a}_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} .$$

! Tetszőleges lineáris leképezés rangja megegyezik bármely bázisra vonatkozó mátrix-reprezentációjának rangjával. $\varphi : V_1 \to V_2$, $\dim V_1 = m$, $\dim V_2 = n \Rightarrow \varphi \leftrightarrow \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\mathbf{A}$.

Tekintsük a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x; y) \mapsto (y + x; 2x)$ leképezést.

A leképezés lineáris, hiszen a **összegre tagonként hat**:

$$\varphi\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1 + y_2) + (x_1 + x_2) \\ 2(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2 + x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \varphi\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \varphi\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

valamint a skalárral való szorzás esetén a **skalár kiemelhető**:

$$\varphi\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha y + \alpha x \\ 2\alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(y + x) \\ \alpha(2x) \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} y + x \\ 2x \end{bmatrix} = \alpha\varphi\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A leképezés mátrixa a standard bázisra vonatkozóan:

$$\varphi\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \varphi\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A **leképezés rangja** a mátrix rangjával egyezik meg:

$$\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\mathbf{A} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

A leképezés **defektusa** a rang-nullitás tétele alapján:

$$\operatorname{def}\varphi = \dim\mathbb{R}^2 - \operatorname{rg}\varphi = 2 - 2 = 0.$$

A leképezés **inverzének** mátrixa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

A $(4; 2)$ vektor ősképe:

$$\varphi^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.11 : Bázistranszformáció

Legyenek $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \ldots; \boldsymbol{b}_n\}$ és $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \ldots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisok V-ben. Ekkor a $\mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}}$ bázistranszformáció $\mathbf{T}$ mátrixa a következőképpen írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{b}}_1 &= t_{11}\boldsymbol{b}_1 + t_{21}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + t_{n1}\boldsymbol{b}_n \\ \hat{\boldsymbol{b}}_2 &= t_{12}\boldsymbol{b}_1 + t_{22}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + t_{n2}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_j &= t_{1j}\boldsymbol{b}_1 + t_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + t_{nj}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_n &= t_{1n}\boldsymbol{b}_1 + t_{2n}\boldsymbol{b}_2 + \ldots + t_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Jelölje egy adott vektor koordinátáit a $\mathcal{B}$ bázisban $\boldsymbol{x}$, a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisban pedig $\boldsymbol{x}'$. Legyen továbbá $\mathbf{T}$ a $\mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}}$ bázistranszformációs mátrixa.

Ekkor a két koordinátarendszer közötti kapcsolatot a következő egyenletek írják le:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{T}\boldsymbol{x}' \quad \text{és} \quad \boldsymbol{x}' = \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

A $\mathbf{T}$ mátrix oszlopai a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisvektorok $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátái.

Egy vektor standard normális bázisban felírt alakja: $\boldsymbol{x}(2;1)$. Adjuk meg a $\hat{\boldsymbol{b}}_1(1;0)$ és $\hat{\boldsymbol{b}}_2(1;1)$ bázisra való áttérés mátrixát, valamint a vektor koordinátáit ebbern a bázisban!

A transzformációs mátrix és ennek inverze:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A vektor koordinátái az új bázisban:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{T}\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tétel 1.2 : Lineáris leképezés mátrixa új bázisban

Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \ldots; \boldsymbol{b}_n\}$ és $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\boldsymbol{b}}_1; \hat{\boldsymbol{b}}_2; \ldots; \hat{\boldsymbol{b}}_n\}$ bázisok V-ben. A φ leképezés $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\mathbf{A}$, $\hat{\mathcal{B}}$ bázisra vonatkozó mátrixa pedig $\hat{\mathbf{A}}$. Jelölje $\mathbf{T}$ a $\mathcal{B}$ bázisról a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisra való áttérés mátrixát, ekkor

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Jelölje egy adott vektor koordinátáit a $\mathcal{B}$ bázisban $\boldsymbol{x}$, a $\hat{\mathcal{B}}$ bázisban pedig $\boldsymbol{x}'$.

Legyen φ leképezés $\mathcal{B}$-re vonatkoztatott mátrixa $\mathbf{A}$, $\hat{\mathcal{B}}$-re vonatkoztatott mátrixa $\hat{\mathbf{A}}$.

A $\mathcal{B} \to \hat{\mathcal{B}}$ áttérés mátrixa $\mathbf{T}$. A vektor képei az adott bázisokban: $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}' = \varphi(\boldsymbol{x}')$.

Ekkor az alábbi gondolatmenet alapján könnyebben megérthetjük, hogy melyik oldalról milyen mátrixszal kell szoroznunk különböző transzformációk során:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \mathbf{T}\boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{T}\boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y} &= \underbrace{\mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' &= \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}' &= \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\hat{\mathbf{A}}}\boldsymbol{x}' \end{aligned}$$

Tekintsük a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x; y) \mapsto (y + x; 2x)$ leképezést. Adjuk meg a leképezés a standard normális, illetve a $\hat{\boldsymbol{b}}_1(1;0)$ és $\hat{\boldsymbol{b}}_2(1;1)$ bázisra vonatkoztatott mátrixát!

Korábban már minden szükséges mátrixot meghatároztunk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A leképezés mátrixa a $\{\hat{\boldsymbol{b}}_1, \hat{\boldsymbol{b}}_2\}$ bázisra vonatkoztatva:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.12 : Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen V a T test feletti vektortér, $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}$-t a $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés sajátvektorának mondjuk, ha önmaga skalárszorosába megy át a leképezés során, azaz $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$, $\lambda \in T$. λ-t a $\boldsymbol{v}$ sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

Ha a $\boldsymbol{v}$ sajátvektora a φ-nek, akkor annak skalárszorosa is az.

Tétel 1.3 : Sajátértékek számítása

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0.$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet, és ennek alapján a sajátértékek:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{E}) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

A sajátvektorokat az $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbb{E})\boldsymbol{v}_i = 0$ egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

1. A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = t_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = t_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

! Ha $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, akkor a sajátértékek a főátlóbeli elemek.

Definíció 1.13 : Diagonalizálhatóság

Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix és egy $\mathbf{T}$ invertálható mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Tétel 1.4 : Diagonizálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha létezik n darab lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, míg a $\mathbf{T}$ transzformációs mátrix $\mathbf{A}$ sajátvektoraiból áll:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}.$$

Invariáns mennyiségek:

Legyen $\mathbf{A}$ egy 3×3-as mátrix, amelynek sajátértékei λ_1, λ_2 és λ_3. Ekkor az alábbi mennyiségek bármely $\mathbf{A}$-hoz hasonló mátrix esetén invariánsak:

- $I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
- $I_2 = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)\right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$,
- $I_3 = \det\mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

A karakterisztikus polinom a skalárinvariánsok segítségével:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3.$$

Diagonizáljuk az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot és adjuk a skalárinvariánsait!

Mivel a mátrix felső háromszögmátrix, sajátértékei a főátló elemei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 3$. A skalárinvariánsok:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 11, \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

Definíció 1.14 : Szimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

Definíció 1.15 : Antiszimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix antiszimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$.

Kvadratikus mátrix felbontása szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)}_{\text{Szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)}_{\text{Antiszimmetrikus}}$$

Függvénytípusok:

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, akkor φ skalármező.

Ha $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, akkor $\boldsymbol{v}$ vektormező.

Koordinátavektor jelölése:

Jelölje a $\boldsymbol{r}$ koordinátavektor az $\mathbb{R}^n$-beli koordináták rendezett n-esét!

Definíció 1.16 : Gradiens

Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármező. Ekkor a φ gradiensének nevezzük a következő vektormezőt:

$$\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi(\boldsymbol{r}) \\ \partial_2\varphi(\boldsymbol{r}) \\ \vdots \\ \partial_n\varphi(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}.$$

A gradiens a legnagyobb növekedés irányát mutatja meg, nagysága pedig a növekedés mértékét. Mindig merőleges a szintfelületekre.

Adjuk meg a $\varphi(\boldsymbol{r}) = xyz$ skalármező gradiensét!

$$\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi(\boldsymbol{r}) \\ \partial_2\varphi(\boldsymbol{r}) \\ \partial_3\varphi(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.17 : Jacobi-mátrix

Legyen $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ vektormező. Ekkor a $\boldsymbol{v}$ Jacobi-mátrixának nevezzük a következő $k \times n$-es mátrixot:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1(\boldsymbol{r})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1(\boldsymbol{r})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1(\boldsymbol{r})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2(\boldsymbol{r})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2(\boldsymbol{r})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2(\boldsymbol{r})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_k(\boldsymbol{r})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_k(\boldsymbol{r})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_k(\boldsymbol{r})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{grad}^\top v_1(\boldsymbol{r}) \\ \operatorname{grad}^\top v_2(\boldsymbol{r}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}^\top v_k(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{k\times n}$$

Definíció 1.18 : Divergencia

Legyen $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektormező, amelynek Jacobi-mátrixa $\mathbf{J} = \mathbf{D}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$. Ekkor a $\boldsymbol{v}$ divergenciájának nevezzük a következő skalármezőt:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{tr} \mathbf{J} = J_{11} + J_{22} + \ldots + J_{nn}$$

A divergencia tehát a vektormező Jacobi-mátrixának nyoma.

Ahol a divergencia zérus, ott a mező forrásmentes.

Ha a divergencia pozitív, akkor a mező forrás jellegű.

Ha a divergencia negatív, akkor a mező nyelő jellegű.

Definíció 1.19 : Vektorinvariáns

Legyen $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ ferdeszimmetrikus mátrix, azaz $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^\top$. Ekkor létezik egy egyértelmű $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ vektor, úgy, hogy

$$\mathbf{S}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}.$$

Ekkor az $\boldsymbol{a}$ vektort a $\mathbf{S}$ mátrix vektorinvariánsának nevezzük. Gyakori jelölés:

$$\mathbf{S} = [\boldsymbol{a}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{axl}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} S_{32} \\ S_{13} \\ S_{21} \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\boldsymbol{a}(1; 2; 3)$ és $\boldsymbol{x}(x; y; z)$ vektorok vektoriális szorzatát mátrixszorzás segítségével!

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}]_\times \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y + 2z \\ 3x - z \\ y - 2x \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.20 : Rotáció

Legyen $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, melynek Jacobi-mátrixa $\mathbf{J} = \mathbf{D}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$. Ekkor a $\boldsymbol{v}$ rotációjának nevezzük a következő vektormezőt:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{axl}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^\top) = \operatorname{axl}\left(\begin{bmatrix} 0 & J_{12} - J_{21} & J_{13} - J_{31} \\ J_{21} - J_{12} & 0 & J_{23} - J_{32} \\ J_{31} - J_{13} & J_{32} - J_{23} & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} J_{32} - J_{23} \\ J_{13} - J_{31} \\ J_{21} - J_{12} \end{bmatrix}.$$

A rotáció tehát a vektormező Jacobi-mátrixának ferdeszimmetrikus részéből származtatható.

Ahol a rotáció zérus, ott a mező örvénymentes.

Adjuk meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (xy)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a Jacobi-mátrix segítségével!

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \partial_x(yz) & \partial_y(yz) & \partial_z(yz) \\ \partial_x(xz) & \partial_y(xz) & \partial_z(xz) \\ \partial_x(xy) & \partial_y(xy) & \partial_z(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

A divergencia:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{tr} \mathbf{J} = J_{11} + J_{22} + J_{33} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

A rotáció:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{axl}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^\top) = \begin{bmatrix} J_{32} - J_{23} \\ J_{13} - J_{31} \\ J_{21} - J_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - z \\ y - y \\ x - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definíció 1.21 : Nabla-operátor

Az $\mathbb{R}^n$-beli Descartes-koordinátarendszerben, ahol $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ egy tetszőleges pont koordinátái, a standard bázis pedig $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1; \hat{\boldsymbol{e}}_2; \dots; \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$ a Nabla egy olyan formális differenciáloperátor, melynek koordinátái a parciális derivált operátorok, vagyis:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\top,$$

A Nabla-operátor segítségével a gradiens, divergencia és rotáció műveletek egyszerűbben felírhatók:

- $\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi$,
- $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \langle \nabla; \boldsymbol{v} \rangle$,
- $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}$.

Adjuk meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (xy)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező divergenciáját és rotációját a Nabla-operátor segítségével!

A divergencia:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \langle\nabla;\boldsymbol{v}\rangle = \left\langle \begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix};\begin{bmatrix}yz\\ xz\\ xy\end{bmatrix}\right\rangle = \frac{\partial yz}{\partial x} + \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial xy}{\partial z} = 0+0+0 = 0.$$

A rotáció:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}yz\\ xz\\ xy\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial_y(xy)-\partial_z(xz)\\ \partial_z(yz)-\partial_x(xy)\\ \partial_x(xz)-\partial_y(yz)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-x\\ y-y\\ z-z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Definíció 1.22 : Laplace-operátor

A Laplace-operátor egy másodrendű differenciáloperátor az n dimenziós térben. Megadja egy skalármező gradiensének divergenciáját, azaz:

$$\Delta\varphi = \langle\nabla;\nabla\rangle\,\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi.$$

Hattassuk a Laplace-operátort a $\varphi(\boldsymbol{r}) = xyz$ skalármezőre!

$$\Delta\varphi = \langle\nabla;\nabla\rangle\,\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}\begin{bmatrix}yz\\ xz\\ xy\end{bmatrix} = \frac{\partial yz}{\partial x} + \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial xy}{\partial z} = 0+0+0 = 0.$$

1.2. További feladatok

1. Adja meg a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés mátrixát a standard normális, illetve az $\boldsymbol{b}_1(1;0;0)$, $\boldsymbol{b}_2(1;1;0)$ és $\boldsymbol{b}_3(1;1;1)$ vektorok alkotta bázisban. Adja meg a leképezés magterének és képterének dimenzióját is!

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x - y \\ y + z \\ y - z \end{bmatrix}$$

2. Bontsa fel az $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikus és antiszimmetrikus komponensekre!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Adja meg a φ és ψ leképezések Jacobi-mátrixát!

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 + z \\ yz^2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sin\ln(xy^2) \\ \sqrt{e^{xy} + \tan y} \end{bmatrix}$$

4. Adja meg az alábbi leképezések gradienseit! ($C \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$)
   a) $f(\boldsymbol{r}) = C \cdot \boldsymbol{r}^2$
   b) $g(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|$
   c) $h(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{r} \rangle$

5. Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektormező divergenciáját és rotációját! Mely halmazokon forrás-, illetve örvénymentes a mező?

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x^2 - y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y^2 - z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z^2 - x^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

6. Adja meg az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját! ($C \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$)
   a) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = C \cdot \boldsymbol{r}$
   b) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} |\boldsymbol{r}|$
   c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \cdot \ln |\boldsymbol{r}|$