definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL) + (1pt, 0))$ |- $((Q) + (2em, 0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em, 0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q) + (2.5em, 0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Kalkulus BMETE94BG01 8

Matematika G1

Differenciálás II

Utoljára frissítve: 2024. október 27.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Implicit függvények differenciálása**:

A korábbiakban $y = f(x)$ alakú függvényeket vizsgáltunk. Az ilyen függvények az $x \mapsto f(x)$ hozzárendelés alapján egyértelműen megadják, hogy az egyes ősképekhez ($x \in_f$) milyen értékek tartoznak ($y \in_f$).

Előfordulhat azonban olyan eset, amikor nehéz, vagy éppen lehetetlen **explicit alakban** megadni egy görbét. Ennek a problémának a feloldására vezessük be az **implicit függvények** fogalmát. Az ilyen függvények esetén az ősképek és képek közötti kapcsolatot az $F(x; y) = 0$ egyenlettel adhatjuk meg.

Ilyen függvények differenciálásakor mindig az összetett függvények deriválási szabályait kell alkalmazni:

$$[g(y)]' = g'(y) \cdot y'$$

[style=note, nobreak=true,] Implicit függvény deriváltjai a parciális deriváltak segítségével is meghatározhatóak. Parciális deriválás során az $F(x; y)$ függvényre úgy tekintük, mintha az x és y változói függetlenek lennének egymástól. Az x szerinti parciális derivált esetén y-t, az y szerinti parciális derivált esetén pedig x-et konstansként kezeljük.

Az x szerinti derivált:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = yx = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Az y szerinti derivált pedig:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad x' = xy = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial x} = -\frac{F'_y}{F'_x}$$

[style=note, nobreak=true,] Az $(f(x))^{g(x)}$ típusú függvényeket az implicit függvény deriválási szabályai szerint is differenciálhatjuk. y = f(x)$^{g(x)}$ $\rightarrow$ $\ln y = g(x)\ln f(x)$ $\rightarrow$ $\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}$
$\Downarrow$
$y' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$

[style=note, nobreak=true,] Határozzuk meg az $\ln^x x$ függvény deriváltját! y = $\ln^x x$ $\rightarrow$ $\ln y = x\ln\ln x$ $\rightarrow$ $\frac{y'}{y} = 1\cdot\ln\ln x + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$
$\Downarrow$
$y' = \ln^x x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)$

A feladat az előző gyakorlaton tanult módszerrel is megoldható:

$$y = e^{x\ln\ln x} \quad\rightarrow\quad y' = e^{x\ln\ln x}\left(1\cdot\ln\ln x + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \ln^x x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right).$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Inverz függvény differenciálása**:

Függvény invertálása során a függvény görbéjét tükrözzük az $y = x$ egyenesre. Jele: $f^{-1}(x)$. Amennyiben az eredeti függvény differenciálható az x_0 pontban, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az inverz függvény deriváltja az $y_0 = f(x_0)$ pontban:

$$f^{-1}(x)x\Big|_{f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

[style=note, nobreak=true,] Az inverz függvény létezésének szükséges feltétele, hogy az eredeti függvény bijektív legyen.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Paraméteresen megadott függvények differenciálása**:

Paraméteresen megadott függvények esetén egy paraméterünk (t), viszont kettő egyenletünk ($x(t)$ és $y(t)$) van. Az x szerinti derivált:

$$yx = yt\cdot tx = \frac{yt}{xt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Az y szerinti derivált pedig ennek a reciproka:

$$xy = xt\cdot ty = \frac{xt}{yt} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

A másosik deriváltak:

$$[2]yx = y'x = y't\cdot tx = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}} = \frac{t\,(yx)}{\dot{x}} = \frac{t\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$[2]xy = x'y = x't\cdot ty = \frac{\dot{(x')}}{\dot{y}} = \frac{t\,(xy)}{\dot{y}} = \frac{t\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)}{\dot{y}} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 1: L'Hôpital-szabály**] Legyenek f és g differenciálhatóak az $\alpha \in_b$ pont egy környezetében (α-ban nem szükségképpen), továbbá $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0, vagy \lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty,$$

$$ekkor, ha \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B, akkor \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = B.$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 2: Rolle-tétel**] Legyen f folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $(a;b)$ intervallumon, továbbá $f(a) = f(b) = 0$, ekkor létezik $\xi \in (a;b)$, melyre teljesül, hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 3: Lagrange-féle középérték-tétel**] Legyen $f : I \subset R \to R$ folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $(a;b)$ intervallumon, ekkor létezik olyan $\delta \in (a;b)$ hogy

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

[style=theorem, nobreak=true, frametitle= white**Tétel 4: Cauchy-féle középérték-tétel**] Legyen f és g függvények folytonosak $[a;b]$ intervallumon és differenciálhatóak $(a;b)$ intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in (a;b)$ esetén. Ekkor létezik olyan $\eta \in (a;b)$ hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvény deriváltjait! ($y' = y/x$ és $x' = x/y$)

$$F(x;y) = x^4y + 5y^2x - 4 = 0$$

2. Határozza meg az alábbi függvény első és második deriváltjait, valamint az érintőjének egyenletét a $P(1;1)$ pontban!

$$\ln y + xy = 1$$

3. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 25$ kör azon pontjait, amelyekben a kör érintőjének meredeksége $3/4$!

4. Írja fel az $f(x) = 5x^3 + x - 7$ függvény inverzét, és annak deriváltját! Adja meg ennek értékét az $f(x_0)$ pontban, ha $x_0 = 1$!

5. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott függvény x szerinti első és második deriváltját. Mekkora lesz az érintő meredeksége a $t = \pi/6$-hoz tartozó pontban?

$$\{ \, x\ (t) = e^t \cos t y(t) = e^t \sin t$$

6. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott kör azon pontjait, ahol az érintő meredeksége $3/4$!

$$\{ \, x\ (t) = 5\cos t y(t) = 5\sin t$$

7. Határozza meg az alábbi határértékeket a L'Hôpital szabály segítségével! 2

   a) $\lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{3^x - x^3}{x-3}$

   b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$

8. Vizsgálja meg, hogy alkalmazható-e a L'Hôpital szabály az alábbi határértékek kiszámítására! Ha igen, alkalmazza, ha nem, indokolja meg!

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1x)}{\sin x}$$

9. A Rolle-féle középértéktétel segítségével bizonyítsa be, hogy az $f(x) = 3x^5 + 15x - 2$ függvénynek egy valós gyöke van!

10. Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$