3 Görbék, görbementi integrál

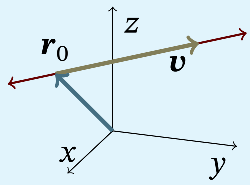
Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 08.

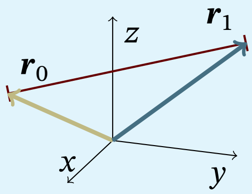
3.1. Elméleti áttekintő

Görbék paraméterezése:

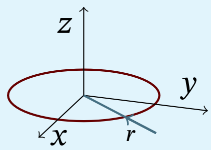
- **Egyenes:** $\gamma(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$



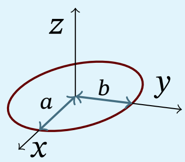
- **Szakasz:** $\gamma(t) = \boldsymbol{r}_0 + t(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)$ $\quad t \in [0; 1]$



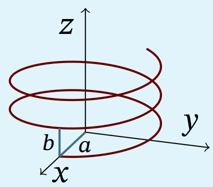
- **Körvonal:** $\gamma(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad t \in [0; 2\pi]$



- **Ellipszis:** $\gamma(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad t \in [0; 2\pi]$



- **Spirál:** $\gamma(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{bmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R}$



Definíció 3.1 : Reguláris görbe

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nem feltétlenül korlátos intervallum. Ekkor az $\gamma : I \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ immerziót reguláris görbének nevezzük.

Definíció 3.2 : Sebesség- és gyorsulásvektor

Legyen $\gamma : I \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ reguláris görbe. Ekkor a $\dot{\gamma}(t)$ és $\ddot{\gamma}(t)$ vektorokat a görbe sebesség- és gyorsulásvektorának nevezzük.

Definíció 3.3 : Pályasebesség, Ívhossz

A $v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$ függvényt pályasebességnek hívjuk.

A pályasebesség I feletti integrálját a görbe ívhosszának nevezzük:

$$L(t) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_I \mathrm{d}s.$$

Görbe ívhossz szerinti paraméteretése

Legyen $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathcal{C}$ reguláris görbe, $L(t)$ pedig a görbe ívhossza. Ekkor a görbe ívhossz szerinti paraméterezése

$$\boldsymbol{\gamma}_L : [0; L(\max(I))] \to \mathcal{C}, \text{ ahol } \boldsymbol{\gamma}_L(s) = \boldsymbol{\gamma}(L^{-1}(s)).$$

Az ívhossz szerinti paraméterezésű görbe sebességvektora egységvektor: $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_L(s)\| = 1$.

Definíció 3.4 : Skalármező görbe menti skalárértékű integrálja

Legyen $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathcal{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\boldsymbol{\gamma}(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \, \mathrm{d}t$. Ekkor a φ skalármező görbe menti skalárértékű integrálja

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}s = \int_I \varphi(\boldsymbol{\gamma}(t)) \, \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Definíció 3.5 : Vektormező görbe menti skalár- és vektorértékű integrálja

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathcal{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\boldsymbol{\gamma}(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $\mathrm{d}\mathbf{r} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \, \mathrm{d}t$. Ekkor a $\boldsymbol{v}$ vektormező görbe menti

- skalárértékű integrálja: $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}s \rangle = \int_I \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)); \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \rangle \, \mathrm{d}t,$
- vektorértékű integrálja: $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}s = \int_I \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \, \mathrm{d}t.$

Tétel 3.1 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\boldsymbol{\gamma} : [a; b] \to \mathcal{C} \subseteq U, t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t)$ folytonos görbe, $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \varphi(\boldsymbol{q}) - \varphi(\boldsymbol{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

3.2. Feladatok

1. Számítsa ki a megadott görbék ívhosszát az adott intervallumon!

   a) $\boldsymbol{\gamma}_1(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sqrt{6}t^2/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0; 2]$

   b) $\boldsymbol{\gamma}_2(t) = (t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0; 1]$

   c) $\boldsymbol{\gamma}_3(t) = (e^t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (e^t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (e^t)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0; 2\pi]$

   d) $\boldsymbol{\gamma}_4(t) = (t - \sin t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (1 - \cos t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0; 2\pi]$

2. Adja meg a $\boldsymbol{\gamma}(t) = (1)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\sqrt{2t})\,\hat{\boldsymbol{k}}$ görbe egységsebességű paraméterezését!

3. Integrálja a saklármezőket a megadott görbék mentén!

   a) $\varphi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{1 + 4x^2 + 16yz}, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0; 1]$

   b) $\psi(\boldsymbol{r}) = 2x$, a $(3; 0)$ és $(0; 4)$ pontokat összekötő szakasz mentén

   c) $\chi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$, első síknegyedbeli egységköríven, pozitív irányítással

   d) $\omega(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$, $r = 2$ sugarú, origó középpontú, pozitív irányítású körön

4. Számítsa ki az alábbi vektormezők skalárértékű integrálját az adott görbék mentén!

   a) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (y + z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x + z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x + y)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0; 1]$

   b) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (-yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2 + y^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (2t)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0; 2]$

   c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = (y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, az $(1; 0)$ pontból a $(0; 2)$ pontba

      - egy egyenes szakasz mentén
      - origó középpontú ellipszis mentén

5. Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2 - x^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (2yz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (-x^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $t \in [0; 1]$ görbe menti vektorértékű integrálját!