4 Felületek, felületi integrál

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 29.

4.1. Elméleti áttekintő

Definíció 4.1 : Reguláris felület

Legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{S}$ reguláris felület, ha $\forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{S}$ ponthoz megadható olyan $\boldsymbol{p}$-t tartalmazó $V \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz és $\boldsymbol{\varrho} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \cap V$ leképezés, melyre teljesülnek az alábbiak:

- $\boldsymbol{\varrho}$ differenciálható homeomorfizmus,
- $\boldsymbol{\varrho}$ immerzió (derivált leképezése injektív).

Ha ezek teljesülnek, akkor $\boldsymbol{\varrho}$-t parametrációnak, $V \cap \mathcal{S}$-t koordinátakörnyezetnek nevezzük.

Definíció 4.2 : Elemi felület

A $\boldsymbol{\varrho} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ elemi felület, ha $\boldsymbol{\varrho}$ legalább egyszer differenciálható és injektív.

Definíció 4.3 : Felszín

Legyen $\boldsymbol{\varrho} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ elemi felület. Ekkor a $\mathcal{S}$ felület felszíne:

$$A = \iint_U \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Definíció 4.4 : Skalármező skalárérékű felületmenti integrálja

Legyen $\varphi(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező, $\boldsymbol{\varrho} : U \to \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s; t \in U$ a felület paraméterezése, $\boldsymbol{\varrho}(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $\mathrm{d}S = \|\partial_s \boldsymbol{\varrho} \times \partial_t \boldsymbol{\varrho}\|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, Ekkor a φ skalármező $\mathcal{S}$ felület menti integrálja:

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = \iint_U \varphi(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Amennyiben a fekület $z = \Phi(x; y)$ alakban van megadva, akkor:

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_U \varphi(x; y; \Phi(x; y))\sqrt{1 + (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Definíció 4.5 : Vektormező skalár- és vektorértékű felületmenti integrálja

Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\boldsymbol{\varrho} : U \to \mathcal{S}$ paraméterezett felület, ahol $s; t \in U$ a felület paraméterezése, $\boldsymbol{\varrho}(U) = \mathcal{S}$ a felület képe, $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, $\hat{\boldsymbol{n}} = (\partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}) / \|\partial_s\boldsymbol{\varrho} \times \partial_t\boldsymbol{\varrho}\|$. Ekkor a $\boldsymbol{v}$ vektormező $\mathcal{S}$ felület menti...

- skalárértékű integrálja: $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle = \iint_U \left\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)); \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$
- vektorértékű integrálja: $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_U \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t}\right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$

Vektormező felületmenti integrálját fluxusnak is nevezzük. Például a mágneses fluxus a mágneses indukció vektormezőjének felületmenti integrálja:

$$\Phi_B = \iint_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{S}\rangle\,.$$

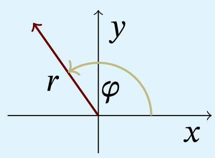
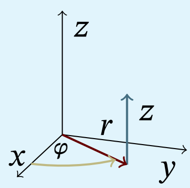
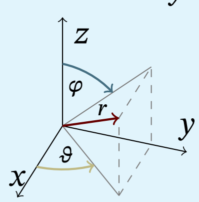
A felületi normális irányítottsága

Egy $\boldsymbol{\varrho} : (s;t) \in U \to \mathcal{S}$ paraméterezett felület...

- kifelé mutató normálisa: $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ki}} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \dfrac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t},$
- befelé mutató normálisa: $\boldsymbol{n}_{\mathrm{be}} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \times \dfrac{\partial\boldsymbol{\varrho}}{\partial s}.$

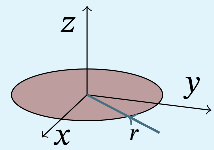
Felület befelé és kifelé mutató normálisa **azonos nagyságú**, de **ellentétes irányú**.

Koordináta-transzformációk

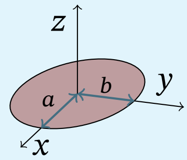
• **Polár:**	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$	$r \in [0; R]$ $\varphi \in [0; 2\pi)$	$\lvert\mathbf{J}\rvert = r$	
• **Henger:**	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = z$	$r \in [0; R]$ $\varphi \in [0; 2\pi]$ $z \in \mathbb{R}$	$\lvert\mathbf{J}\rvert = r$	
• **Gömb:**	$x = r\sin\varphi\cos\vartheta$ $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$ $z = r\cos\varphi$	$r \in [0; R]$ $\varphi \in [0; \pi]$ $\vartheta \in [0; 2\pi]$	$\lvert\mathbf{J}\rvert = r^2\sin\varphi$	

Felületek paraméterezése

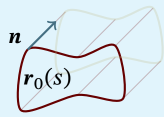
- **Körlap:** (xy sík) $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad s \in [0;r]$, $t \in [0,2\pi]$



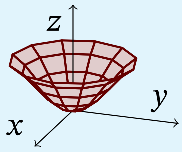
- **Ellipszislap:** (xy sík) $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} a\,s\cos t \\ b\,s\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad s \in [0;1]$, $t \in [0,2\pi]$



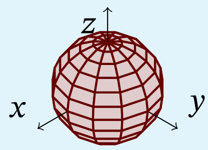
- **Hengerfelület:** $\quad \varrho(s;t) = \boldsymbol{r}_0(s) + t\boldsymbol{n}$ $\quad s \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{r}_0}$, $t \in [0,T]$



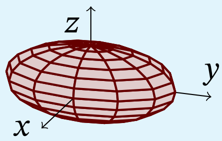
- **Forgásfelület:** (z tengely körül) ($z = f(x)$) $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ f(s) \end{bmatrix}$ $\quad s \in \mathcal{D}_f$, $t \in [0;2\pi]$



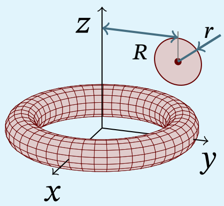
- **Gömbfelület:** $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} R\sin s\cos t \\ R\sin s\sin t \\ R\cos s \end{bmatrix}$ $\quad s \in [0;\pi]$, $t \in [0,2\pi]$



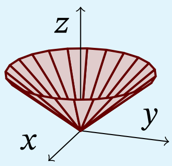
- **Ellipszoid:** $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} a\sin s\cos t \\ b\sin s\sin t \\ c\cos s \end{bmatrix}$ $\quad s \in [0;\pi]$, $t \in [0,2\pi]$



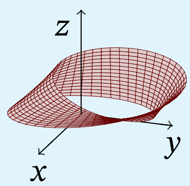
- **Tórusz:** $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} (R + r\cos s)\cos t \\ (R + r\cos s)\sin t \\ r\sin s \end{bmatrix}$ $\quad s \in [0;2\pi]$, $t \in [0,2\pi]$



- **Kúp:** $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ s \end{bmatrix}$ $\quad s \in [0;U]$, $t \in [0,2\pi]$



- **Möbius-szalag:** $\quad \varrho(s;t) = \begin{bmatrix} (R + s\cos {}^{t}\!/\!_{2})\cos t \\ (R + s\cos {}^{t}\!/\!_{2})\sin t \\ s\,\sin {}^{t}\!/\!_{2} \end{bmatrix}$ $\quad s \in [-S;S]$, $t \in [0,2\pi]$



4.2. Feladatok

1. Számítsuk ki a megadott felületek felszínét!

   a) $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid $z = 1$ és $z = 4$ síkok közé eső része,

   b) $\boldsymbol{\varrho}(s;t) = (e^s \cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (e^s \sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (s)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $s \in (-\infty; 0]$, $t \in [0; 2\pi]$.

2. Integrálja a skalármezőket a megadott felületeken!

   a) $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$, az egységgömb $z > 0$ részén,

   b) $\psi(\boldsymbol{r}) = x + y + z$, a $2x + 2y + z = 4$ sík első térnyolcadba tartozó részén.

3. Integrálja a vektormezőket a megadott felületeken! A normális kifelé mutató legyen!

   - $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (x + y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x - y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$,
     $\boldsymbol{\varrho}(s;t) = (s + t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (s - t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (s^2 - t^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $(s;t) \in [0;1]^2$,
   - $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2 + z^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2 + z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2 + y^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$,
     $r = 2$ sugarú, $x = 2$ síkon lévő körön.

4. Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\boldsymbol{\varrho}(s;t) = (s+2t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (s-t)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $s \in [0;3]$, $t \in [0;1]$ felületen vett vektorértékű integrálját! A normális irányítottsága legyen kifelé mutató!