

# Térgeometriai alakzatok

Matematika G1 – Analitikus geometria Utoljára frissítve: 2024. szeptember 10.

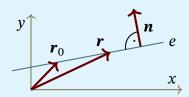
# 2.1. Elméleti Áttekintő

# Egyenes 2D-ben:

n(A; B) – egyenes normálvektora

r(x; y) – tetszőleges pont helyvektora

 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0) - P_0$  fixpont helyvektora



### Az egyenes egyenlete:

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}$$

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{=:-C}$$
  $\rightarrow$   $Ax + By + C = 0$ 

#### Hesse-féle normálalak:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A Hesse-féle normálalakot úgy kapjuk, hogy az egyenes normálvektorát egységhosszúságúra normáljuk.

#### Két egyenes viszonya:

Két egyenes által **közbezárt szög** a két egyenes normálvektorai által bezárt szög.

Ebből következik, hogy ha a normálvektorok által bezárt szög 90°, akkor a két egyenes merőleges egymásra. Ha a normálvektorok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos.

#### Pont és egyenes távolsága:

Adott egy e egyenes Hesse-féle normálalakja és egy  $P_0(x_0; y_0)$  pont. Ekkor a pont és az egyenes távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

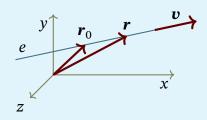
y d e

A formula csak azon pontokra ad zérus értéket, amelyek rajta vannak az egyenesen.

# Egyenes 3D-ben:

 $m{v}(a;b;c)$  – egyenes irányvektora  $m{r}(x;y;z)$  – tetszőleges pont helyvektora

 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$  fixpont helyvektora



## 3D egyenes paraméteres alakja:

$$\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$$
 fixpont helyvektora 
$$\mathbf{v}(a; b; c) - \text{egyenes irányvektora} \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

A paraméteres egyenletekből *t*-t kifejezve is megadhatjuk az egyenest:

$$(t=)\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

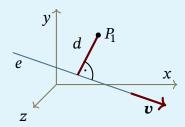
### Két egyenes viszonya:

Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes irányvektorai által bezárt szög.

# Pont és egyenes távolsága:

Egy  $\mathbf{r}_1$  irányvektorú  $P_1$  pont, és egy  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletű egyenes távolsága

$$d = \left| \frac{\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{v}|} \right|$$

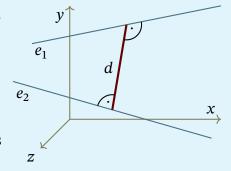


#### Két egyenes távolsága:

Az  $e_1$ :  $p_1(t_1) = r_1 + t_1 v_1$  és  $e_2$ :  $p_2(t_2) = r_2 + t_2 v_2$ egyenesek távolsága

$$d = \left| (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \cdot \underbrace{\frac{(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}}_{\hat{\boldsymbol{n}}_T} \right| = \left| (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_T \right|,$$

ahol  $\hat{\boldsymbol{n}}_T$  egy olyan egységvektor, amely merőleges mindkét egyenesre. (normál transzverzális)



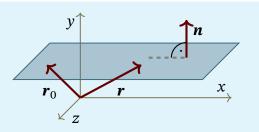
Amennyiben  $e_1$  és  $e_2$  párhuzamosak, akkor a távolságukat a pont és egyenes távolságának képletével számolhatjuk.

#### Sík 3D-ben:

n(A; B; C) – sík normálvektor

r(x; y; z) – tetszőleges pont helyvektora

 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$  fixpont helyvektora



# Sík egyenlete:

A sík tetszőleges **r** pontjára igaz, hogy

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0,$$
  
 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = : -D,$   
 $Ax + By + Cz + D = 0.$ 

#### Hesse-féle normálegyenlet:

$$\left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = 0$$

# Két sík viszonya:

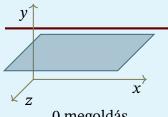
Két sík által bezárt szög a síkok normálvektorai által bezárt szög.

#### Sík és egyenes döféspontja:

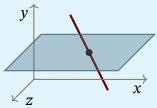
Egy s: Ax + By + Cz + D = 0 sík és egy  $e: \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  egyenes döféspontjait meghatározhatjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 és 
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

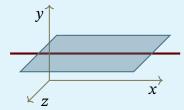
A megoldások száma alapján:



0 megoldás



1 megoldás



∞ megoldás

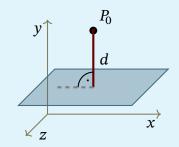
# Sík és egyenes által bezárt szög:

Egy sík és egy egyenes által bezárt szög a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő.

# Sík és pont távolsága:

Egy  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  pont és egy s: Az + By + Cz + D = 0 sík távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

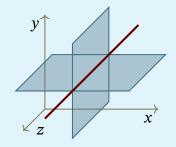


#### Két sík metszésvonala:

A metszésvonal irányvektora mindkét sík normálvektorára merőleges:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2.$$

Ezen kívül szükségünk van még egy tetszőleges pontra, amely rajta van mindkét síkon. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy az egyik koordinátát fixáljuk, és a másik kettőt kiszámítjuk a 2 sík egyenletéből. (Pl. z=0)



# 2.2. Feladatok

- 1. Számítsa ki az  $e_1$ : 3x 4y 10 = 0 és az  $e_2$ : 6x 8y + 5 = 0 egyenes távolságát!
- 2. Írja fel azon egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a P(-2; 5; 6) és a Q(7; -1; 3) pontokon!
- 3. Határozza meg az  $\alpha$  paramétert, ha ismert, hogy az alábbi egyenesek metszik egymást!

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \qquad \qquad \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

4. Határozza meg az alábbi egyenesek távolságát!

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 + 3t_1 \\ y_1(t) = -1 + 4t_1 \\ z_1(t) = 2t_1 \end{cases} \begin{cases} x_2(t) = 7 + 6t_2 \\ y_2(t) = 1 + 8t_2 \\ z_2(t) = 3 + 4t_2 \end{cases}$$

5. Adott két egyenes. Határozza meg a távolságukat és normáltraszverzálisuk egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x_1(t) = -7 + 3t \\ y_1(t) = 4 - 2t \\ z_1(t) = 4 + 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 1 + t \\ y_2(t) = -8 + 2t \\ z_2(t) = -12 - t \end{cases}$$

- 6. Vizsgálja meg, hogy a P(0; -1; 2), a Q(2; -1; 1) és az R(4; 3; -2) pontok egy egyenesbe esnek-e! Ha nem, akkor írja fel az általuk kifeszített sík egyenletét!
- 7. Határozza meg az  $\alpha$  paramétert, ha ismert, hogy az e egyenes és az s sík párhuzamos egymással!

$$e: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha}$$
  $s: x + 3y - 2\alpha z = 0$ 

8. Számítsa ki az e egyenes és az s sík metszéspontját!

$$e: x-1=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$$
  $s: 2x+3y+z-1=0$ 

9. Adja meg az  $s_1$  és  $s_2$  síkok metszésvonalának egyenletrendszerét!

$$s_1: x-2y+3z-4=0$$
  $s_2: 3x+2y-5z-4=0$ 

10. Igazolja, hogy az alábbi három síknak egy közös pontja van. Írja fel ezen a ponton átmenő síkot, amely párhuzamos az x + y + 2z = 0 síkkal!

$$\begin{cases} s_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \\ s_2 : x - 3y + z + 1 = 0 \\ s_3 : x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$