

## 6

# Folytonosság

Matematika G1 – Függvények

Utóljára frissítve: 2024. szeptember 11.

## 6.1. Elméleti Áttekintő

### Definíció 6.1: Cauchy-féle határérték definíció

Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban  $A$ , ha  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ , hogy  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , ha  $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ . Jele:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

### Definíció 6.2: Heine-féle határérték definíció

Az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban akkor és csak akkor  $A$ , ha  $\forall x_n \rightarrow a$  sorozat esetén  $f(x_n) \rightarrow A$ .

A két definíció teljesen ekvivalens egymással.

### Tétel 6.1: Nevezetes határérték a nullában

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

### Definíció 6.3: Folytonosság

Egy  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos egy  $a \in \mathcal{D}_f$  pontban, ha  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ , hogy  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , ha  $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ .

A folytonosság definíciója ekvivalens a következővel:  $f$  függvény folytonos egy  $a \in \mathcal{D}_f$  pontban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ha ez nem teljesül, akkor a függvénynek az adott pontban szakadása van. Ez lehet

- **megszüntethető**, tehát a függvény az adott pontban nincsen értelmezve, viszont a pontbeli határértéke létezik,
- **nem megszüntethető**, vagyis nem létezik az adott pontbeli határértéke.

## 6.2. Feladatok

1. A függvényhatárérték két definíciója segítségével bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{5x + 4} = \frac{1}{2}.$$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{2x + 1} + \frac{x^3 + 4x^2 - 2}{1 - 2x^2} \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2\sqrt{2/x} + 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1 + x}{2 + x} \right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\tan 5x}$

j)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \tan x$

e)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sin x}{\sin^2 x}$

3. Vizsgálja meg az alábbi függvényt folytonosság szempontjából!

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$$

4. Vizsgálja meg az alábbi függvényt folytonosságát a nullában!

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

5. Határozza meg az  $a$  és  $b$  paraméterek értékét úgy, hogy  $f$  függvény folytonos legyen!

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| < 1 \\ x^2 + ax + b, & \text{ha } |x| \geq 1 \end{cases}$$

6. Határozza meg az alábbi komplexebb határértékeket!

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \tan^{\tan 2x} x$