

definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametilerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra=let 1=(P), 2=(O) in ((2,0)+0.5*(0,1)) node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor!;

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=, **anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; [excursus arrow, line width=2pt] ((BL) + (1pt,0)) |- ((Q) + (2em,0)); [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] ((Q)+(1em,0)) -| (A.north west) -| (A.base east) - (TR) ; [excursus head] (A) at ((Q) + (2.5em,0)) ; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Integrálszámítás BMETE94BG01 13

Matematika G1

Integrálszámítás III

Utoljára frissítve: 2024. november 11.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Improprius integrál:**

A Riemann-integrál definíció szerint akkor használható, hogyha az integrációs intervallum véges, valamint ezen intervallumon az integrálandó függvény is korlátos. Előfordulhat azonban olyan eset, hogy

- végtelen tartományon szeretnénk integrálni,
- az integrálandó függvény nem korlátos az integrálási tartományban.

<p>[ultra thick] [-to] (-1,0) – (5,0) node[below left] x; [-to] (-.5,-.5) – (-.5,3) node[below left] y;</p> <p>[opacity=0, name path=x] (-.5,0) – (5,0); [domain=1:6.5, samples=100, primaryColor, name path=p, -to,] plot (-1.5, 2/);</p> <p>[of=p and x, on layer=bg,]primaryColor!10</p> <p>at (3.5,1.5) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x)x$;</p> <p>Végtelen tartomány</p>	<p>[ultra thick] [-to] (-1,0) – (5,0) node[below left] x; [-to] (-.5,-.5) – (-.5,3) node[below left] y;</p> <p>[opacity=0, name path=x] (0.25,0) – (3,0); [draw=gray, dashed] (0.25,0) node[below] a – ++(0,3); [draw=gray, dashed] (3,0) – ++(0,.25);</p> <p>[domain=.25:3, samples=100, primaryColor, name path=p, to-] plot (, .75/);</p> <p>[of=p and x, on layer=bg,]primaryColor!10</p> <p>at (3.5,1.5) $\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x)x$;</p> <p>Nem korlátos függvény</p>
---	---

Ezekben az esetekben az improprius integrált hívhatjuk segítségül.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Ívhossz számítása integrálással:**

Egy görbét háromféleképpen is definiálhatunk:

- explicit alakban: $y = f(x)$,
- paraméteres alakban: $x = x(t)$, $y = y(t)$,
- polárkoordináta-rendszerben: $r = r(\varphi)$.

Az ívhossz számítására az alábbi képletet használhatjuk:

- explicit: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- paraméteres: $L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$
- polár: $L = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Forgástestek térfogata és felszíne:**

Egy görbe x tengely körüli megforgatásával egy forgástestet kapunk.

$$\text{explicit :} \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\text{paramteres :} \quad V = \pi \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) dt \quad A = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

[style=note, nobreak=true,] Fontos figyelembe venni, hogy a fenti képletek csak a forgástestek palástjának felszínét adják eredményül.

Abban az esetben, hogyha például egy csónakakúpnak a felszínét szeretnénk meghatározni, akkor az alsó és felső alapok felületét hozzá kell adni az előbbi képletekkel kapott eredményhez.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Görbeív súlypontja:**

Egy konstans sűrűségű görbe súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

$$\text{explicit :} \quad S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad S_y = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\text{paramteres :} \quad S_x = \frac{1}{L} \int_a^b x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \quad S_y = \frac{1}{L} \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Görbe által meghatározott síktartomány súlypontja:**

Egy görbe és az x tengely által meghatározott síktartomány súlypontjainak koordinátáit

az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

$$\textit{explicit} : \quad S_x = \int_a^b x f(x) x \int_a^b f(x) x \quad S_y = 12 \int_a^b f^2(x) x \int_a^b f(x) x$$

$$\textit{paramteres} : \quad S_x = \int_a^b x(t) y(t) \dot{x}(t) t \int_a^b y(t) \dot{x}(t) t \quad S_y = 12 \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) t \int_a^b y(t) \dot{x}(t) t$$

0.2 Feladatok

1. Milyen a és b paraméterek választása esetén lesz az adott integrál értéke minimális?

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)x$$

2. Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékeit! 3

a) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}x$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}x$

c) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x+2}x$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}x$

e) $\int_0^\infty e^{-x} \cos xx$

f) $\int_0^1 \ln xx$

3. Adja meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjének ívhosszát az $x \in [0, 2]$ intervallumon!
4. Számítsa ki a ciklois egy ívének hosszát! ($x(t) = a \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$)
5. Számítsa ki annak a csonkakúpnak a térfogatát, melynek alapja egy $R = 5$ sugarú kör, teteje egy $r = 2$ sugarú kör, magassága pedig $h = 6$!
6. Vezesse le a gömb térfogatának képletét!
7. Adja meg az $f(x) = x^3$ görbe, valamint az $y = 0$ és $x = 1$ egyenesek által határolt rész súlypontjának koordinátáit!