

## 8

## Taylor-sorok

Matematika G2 – Valós analízis

Utoljára frissítve: 2025. május 04.

## 8.1. Elméleti Áttekintő

## Definíció 8.1: Taylor-polinom

Legyen  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, mely az  $x_0$  pontban legalább  $p$ -szer differenciálható. Ekkor az  $f$  függvény  $x_0$  körüli  $p$ -edik Taylor-polinomja:

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

## Tétel 8.1: Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal

Ha az  $f$  függvény legalább  $(r+1)$ -szer differenciálható az  $(x; x_0)$  intervallumon és  $f^{(k)} \forall k \in \{1; 2; \dots; r\}$  esetén folytonos az  $x$  és  $x_0$  pontokban, akkor  $\exists \xi \in (x; x_0)$ , hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - x_0)^{r+1}}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}$$

## Definíció 8.2: Taylor-sor

Legyen az  $f$  függvény az  $x_0$  pontban akárhányszor differenciálható. Ekkor a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

hatványsort az  $f$  függvény  $x_0$  körüli Taylor-sorának nevezzük.

Ha  $x_0 = 0$ , akkor a Taylor-sort Maclaurin-sornak nevezzük.

Írjuk fel a  $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$  függvény  $x_0 = 1$  körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

| $p^{(n)}(x)$            | $p^{(n)}(1)$ |
|-------------------------|--------------|
| $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ | 6            |
| $p'(x) = 3x^2 + 6x$     | 9            |
| $p''(x) = 6x + 6$       | 12           |
| $p'''(x) = 6$           | 6            |

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{6}{0!} + \frac{9}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \\ &= 6 + 9(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

Írjuk fel az  $f(x) = e^x$  függvény Maclaurin-sorát!

| $f^{(n)}(x)$       | $f^{(n)}(0)$ |
|--------------------|--------------|
| $f(x) = e^x$       | 1            |
| $f'(x) = e^x$      | 1            |
| $\vdots$           | $\vdots$     |
| $f^{(k)}(x) = e^x$ | 1            |

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Írjuk fel az  $f(x) = \sin x$  függvény Maclaurin-sorát!

| $f^{(n)}(x)$        | $f^{(n)}(0)$ |
|---------------------|--------------|
| $f(x) = \sin x$     | 0            |
| $f'(x) = \cos x$    | 1            |
| $f''(x) = -\sin x$  | 0            |
| $f'''(x) = -\cos x$ | -1           |
| $\vdots$            | $\vdots$     |

$$T(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

### Fontosabb függvények Maclaurin-sorai:

| Függvény                  | Taylor-sor  | Konvergencia intervallum |
|---------------------------|---|--------------------------|
| $e^x$                     | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$                  | $\mathbb{R}$             |
| $\sin x$                  | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | $\mathbb{R}$             |
| $\cos x$                  | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$     | $\mathbb{R}$             |
| $\arctan x$               | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$    | $[-1; 1]$                |
| $\sinh x$                 | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$        | $\mathbb{R}$             |
| $\cosh x$                 | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$            | $\mathbb{R}$             |
| $\operatorname{artanh} x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$           | $(-1; 1)$                |
| $\ln(1+x)$                | $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$      | $(-1; 1]$                |
| $(1+x)^\alpha$            | $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$           | $(-1; 1)$                |

## 8.2. Feladatok

1. Írja fel a  $p(x) = (1 + x)^3$  függvény Maclauren-sorát!
2. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli Taylor-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$f(x) = (1 - x)^3, \quad x_0 = 1$$

$$g(x) = e^x, \quad x_0 = 1$$

$$h(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$$

3. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$f(x) = \cos 5x$$

$$g(x) = \sin \sqrt{x}$$

$$h(x) = \sin^2 x$$

$$i(x) = \sqrt[3]{\exp(-x^2)}$$

4. Adja meg az alábbi törtfüggvények Taylor-sorát!

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad x_0 = -2$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad x_0 = -1$$

5. Írja fel az alábbi függvény  $x_0 = 2$  pontra illeszkedő Taylor sorát! Mi lesz a konvergenciasugar?

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

6. Határozza meg az alábbi függvények Maclauren-sorát! Adja meg az összegfüggvények konvergenciasugarát is!

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$g(x) = \arctan x$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$$

7. Melyik függvény Taylor-sora az alábbi?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$$

8. Hányadfokú Taylor polinom közelíti a  $\sin(\pi/60)$  értékét 4 tizedesjegy pontossággal?
9. Számítsa ki 3 tizedesjegy pontossággal az alábbi integrált!

$$\int_0^{0,2} e^{2x} dx$$