

## 7

# Függvény- és hatványsorok

Matematika G2 – Valós analízis

Utoljára frissítve: 2025. március 22.

## 7.1. Elméleti Áttekintő

### Definíció 7.1: Függvénysor

Legyen  $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénysorozat. Képezzük az alábbi függvénysorozatot:

$$\begin{aligned}s_1(x) &:= f_1(x), \\s_2(x) &:= f_1(x) + f_2(x), \\&\vdots \\s_j(x) &:= \sum_{i=1}^j f_i(x) \\&\vdots\end{aligned}$$

Az így előálló  $(s_n)$  függvénysorozatot az  $(f_n)$  függvénysorozatból képzett függvénysornak hívjuk és  $\sum f_n$ -nel jelöljük.

### Definíció 7.2: Függvénysor pontbeli konvergenciája

A  $\sum f_n$  függvénysor konvergens az  $x_0 \in I$  pontban, ha az  $(s_n)$  függvénysorozat konvergens az  $x_0$  pontban.

### Definíció 7.3: Függvénysor konvergenciahalmaza

A  $\sum f_n$  függvénysor konvergens a  $H \subset I$  halmazon, ha az  $(s_n)$  függvénysorozat konvergens a  $H$ -n.

### Definíció 7.4: Függvénysor egyenletes konvergenciája

A  $\sum f_n$  függvénysor egyenletesen konvergens az  $E \subset H$  halmazon, ha az  $(s_n)$  függvénysorozat egyenletesen konvergens az  $E$ -n.

### Definíció 7.5: Függvénysor összegfüggvénye

A  $\sum f_n$  függvénysorozat összegfüggvénye az  $s(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$  függvény, ahol  $x \in H$ .

### Definíció 7.6: Abszolút konvergencia

A  $\sum f_n$  függvénysor abszolút konvergens, ha a  $\sum |f_n|$  függvénysor konvergens.

**Tétel 7.1: Cauchy-féle konvergencia kritérium egyenletes konvergenciára**

A  $\sum f_n$  akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az  $E \subset H$  halmazon, ha  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists N(\varepsilon)$  úgy, hogy ha  $n, m > N(\varepsilon)$ , akkor  $\forall x \in E$  esetén  $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ .

**Tétel 7.2: Weierstrass-tétel függvénysorok egyenletes konvergenciájára**

Legyen  $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénysorozat és  $\sum f_n$  a belőle képzett függvénysor, továbbá  $\sum a_n$  olyan konvergens numerikus sor, melyre  $\forall x \in I$  esetén  $|f_n(x)| \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ -re  $n > n_0 \in \mathbb{N}$  esetén.

Ekkor a  $\sum f_n$  függvénysor egyenletesen konvergens.

**Definíció 7.7: Hatványsor**

Legyen  $f_n(x) := a_n (x - x_0)^n$ . A belőle képzett

$$\sum f_n(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük, ahol  $a_n$  a hatványsor  $n$ -edik együtthatója,  $x_0$  pedig a sorfejtés centruma.

**Definíció 7.8: Hatványsor konvergenciasugara**

A  $\sum a_n (x - x_0)^n$  hatványsor konvergenciasugara:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}_b.$$

**Tétel 7.3: Cauchy-Hadamard-tétel**

Legyen  $r$  a  $\sum a_n x^n$  hatványsor konvergenciasugara. Ha ...

1.  $r = 0$ , akkor a hatványsor csak az  $x_0 = 0$  pontban konvergens,
2.  $r = \infty$ , akkor a hatványsor  $\forall x \in \mathbb{R}$  esetén konvergens,
3.  $0 < r < \infty$ , akkor a hatványsor konvergens, ha  $|x| < r$  és divergens, ha  $|x| > r$ .

**Tétel 7.4: Tagonkénti integrálhatóság**

Legyenek a  $\sum f_n$  függvénysor tagjai integrálhatóak az  $[a; b]$  zárt intervallumon. Tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens az  $[a; b]$ -n és összegfüggvénye folytonos. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Nem korlátos intervallum esetén nem igaz az állítás.

**Tétel 7.5: Tagonkénti differenciálhatóság**

Legyenek az  $f_n$  függvénysorozat tagjai differenciálhatóak a  $J$  intervallumon,  $f'_n$  függvények folytonosak a  $J$ -n, valamint a  $\sum f'_n$  és a  $\sum f_n$  függvénysorok egyenletesen konvergenssek a  $J$ -n. Ekkor

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

## 7.2. Feladatok

1. Vizsgálja meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát, értelmezési tartományát és adja meg az összegfüggvényüket!

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^n$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x$

2. Határozza meg az alábbi függvénysorok értelmezési tartományát, konvergenciatartományát és hogy a konvergenciatartományon belül abszolút konvergensek-e!

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \left| \frac{z-i-1}{3} \right| \right)^n}{z}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3x^3 + (\pi/3)nx^2)}{3^n + x^4 n^4}$

3. El lehet-e végezni a következő függvénysor tagonkénti integrálását?

$$\int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{nx}} dx \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{e^{nx}} dx$$

4. El lehet-e végezni a következő függvénysor tagonkénti deriválását?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x/n)}{n^2}$$

5. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát!

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 4 - \frac{1}{n} \right)^n x^n$

b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n-1)}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n(-1)^n + n + 2}{2n} \right)^n x^n$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3}$

6. Határozza meg az alábbi komplex hatványsorok konvergenciatartományát!

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2!)} z^n$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$