definitionhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=primaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=primaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

definitionsection

theoremhidealllines=true,leftline=true,linewidth=3pt,linecolor=secondaryColor,frametitlerule=true,frametitlebackgroundcolor=secondaryColor,backgroundcolor=gray!10, frametitleaboveskip=2mm, frametitlebelowskip=2mm, innertopmargin=3mm,

theoremsection

blueBoxhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=cyan!10,linecolor=secondaryColor,linewidth= nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

notehidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=yellow!10,linecolor=ternaryColor,linewidth=3pt, nertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,

statementhidealllines=true,leftline=true,backgroundcolor=primaryColor!10,linecolor=primaryColor,linewidth=3pt,innertopmargin=.66em,innerbottommargin=.66em,singleextra= let 1=(P), 2=(O) in $((2,0)+0.5*(0,1))$ node[rectangle, fill=primaryColor!10, draw=primaryColor, line width=2pt, overlay,] primaryColor**!**; ,

learnMoreTitle==Kitekintő calc,arrows,backgrounds excursus arrow/.style=line width=2pt, draw=secondaryColor, rounded corners=1ex, , excursus head/.style= font=**, anchor=base west, text=secondaryColor, inner sep=1.5ex, inner ysep=1ex,** ,

learnMoresingleextra=let 1=(P), 2=(O) in (2,1) coordinate (Q); let 1=(Q), 2=(O) in (1,2) coordinate (BL); let 1=(Q), 2=(P) in (2,1) coordinate (TR); [excursus head] (A) at $((Q)+(2.5em,0))$; [excursus arrow, line width=2pt] $((BL)+(1pt,0))$ |- $((Q)+(2em,0))$; [excursus arrow, line width=2pt, fill=gray!10, -to] $((Q)+(1em,0))$ -| (A.north west) -| (A.base east) – (TR) ; [excursus head] (A) at $((Q)+(2.5em,0))$; , backgroundcolor=gray!10, middlelinewidth=0, hidealllines=true,topline=true, innertopmargin=2.5ex, innerbottommargin=1.5ex, innerrightmargin=2ex, innerleftmargin=2ex, skipabove=0.5nobreak=true,

examplehidealllines=true, leftline=true, backgroundcolor=magenta!10, linecolor=magenta!60!black, linewidth=3pt, innertopmargin=.66em, innerbottommargin=.66em,

Többváltozós analízis BMETE94BG02 12

Matematika G2

Differenciálás II

Utoljára frissítve: 2025. április 22.

0.1 Elméleti Áttekintő

[style=blueBox, nobreak=true,] **Többváltozós Taylor-formula:**

Az egyváltozós függvényekhet hasonló módon, az n-edrendű Taylor-polinom: $\mathrm{T}_0 = f(x_0)$
$T_1 = T_0 + f(x_0)x(x - x_0) + f(x_0)y(y - y_0)$
$T_2 = T_1 + \frac{1}{2}\left[[order = 2]f(x_0)x(x - x_0)^2 + [order = 2]f(x_0)y(y - y_0)^2 + 2f(x_0)x, y(x - x_0)(y - y_0)\right]$
$\vdots$

[style=blueBox, nobreak=true,] **Többváltozós függvények szélsőérték-számítása:**

Szélsőérték létezésének **szükséges** feltétele, hogy az adott pontban a parciális deriváltak eltűnjenek, vagyis

$$\forall i : f(x_0)x_i = 0.$$

Szélsőérték létezésének elégséges feltétele, hogy az adott pontban felírt Hesse-mátrix pozitív definit legyen. Ezen mátrix az alábbi módon írható fel:

$$H = \partial_1^2 f(x_0)\partial_1\partial_2 f(x_0)\cdots\partial_1\partial_n f(x_0)\partial_2\partial_1 f(x_0)\partial_2^2 f(x_0)\cdots\partial_2\partial_n f(x_0)\vdots\vdots\ddots\vdots\partial_n\partial_1 f(x_0)\partial_n\partial_2 f(x_0)\cdots\partial_n^2 f(x_0$$

A determinánsa alapján:

- ha $\det H > 0$, akkor lokális szélsőérték van,
- ha $\det H < 0$, akkor nincsen szélsőérték,
- ha $\det H = 0$, akkor nem lehet eldönteni.

Amennyiben $\det H > 0$, akkor a szélsőérték jellege

- lokális maximum, ha H főátlóra feszített aldeterminánsai váltakozó előjelűek,
- lokális minimun, ha H főátlóra feszített aldeterminánsai pozitívak.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Feltételes szélsőérték egy görbe mentén:**

Amennyiben egy f függvény egy adott $g = 0$ görbe menti szélsőértékeit szeretnénk megkeresni, akkor az

$$F = f + \lambda g$$

függvényre kell megoldanunk a szélsőérték-feladatot.

[style=blueBox, nobreak=true,] **Feltételes szélsőérték egy görbe által bezárt területen:**

Amennyiben egy f függvény szélsőértékeit egy adott $g = 0$ görbe által bezárt tartományán szeretnénk megkeresni, akkor:

- először megkeressük a lokális szélsőértékeket, és ezekből kiválasztjuk azokat, amelyek a tartomyán belsejébe esnek.
- utána pedig megkeressük a görbe peremére eső szélsőértékeket az előző módszer alapján.

0.2 Feladatok

1. Határozza meg az $f(x;y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ függvény első és második Taylor polinomját a $P(1;-2)$ pontban!

2. Határozza meg az $f(x;y;z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény első és második Taylor polinomjait a $P_2(\pi 4; \pi 4; \pi 6)$ pontban!

3. Végezzen szélsőérték vizsgálatot az $f(x;y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ függvényen!

4. Határozza meg az $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 + 8x + 8y$ függvény egy darab szélsértékét!

5. Ellenőrizze, hogy az $f(x;y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ függvénynek a $P_1(\pi 2; \pi 2)$ és $P_2(0;0)$ pontokban szélsőérték helye van!

6. Határozza meg azt a csomagméretet, amely esetén egy $V = 4,5$ dm^3 térfogatú téglatest alakú csomag a legkevesebb zsineg felhasználásával az alábbi ábrán látható módon bekötözhető!

   [thick] (0, 1.5) – (4, 1.5) – (5.5, 2.5) (4, 1.5) – (4, 0) (0, 0) – (4, 0) – (5.5, 1) – (5.5, 2.5) – (1.5,2.5) – (0, 1.5) – cycle ;

   [ultra thick, primaryColor] (1.333, 0) – ++(0, 1.5) – ++(1.5, 1) (2.667, 0) – ++(0, 1.5) – ++(1.5, 1) (0.75,2) – ++(4, 0) – ++(0,-1.5) ;

7. Határozza meg annak a derékszögű hasábnak a minimális térfogatát, amely éleinek összege l hosszú!

8. Határozza meg a $f(x;y) = x^2y^2$ függvény szélőértékét az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe mentén!

9. Határozza meg az $f(x;y) = x^2 + y^2 + xy - x$ függvény globális maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 \leq 1$ tartományon!