

3 MO

Görbék, görbementi integrál

Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 08.

3.1. Görbék ívhossza

a) $\gamma_1(t) = (t)\hat{i} + (\sqrt{6}t^2/2)\hat{j} + (t^3)\hat{k}, \quad t \in [0; 2]$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt = \int_0^2 \sqrt{1^2 + (\sqrt{6}t)^2 + (3t)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} dt \\ &= \int_0^2 1 + 3t^2 dt = [t + t^3]_0^2 = 10 \end{aligned}$$

b) $\gamma_2(t) = (t \cos t)\hat{i} + (t \sin t)\hat{j}, \quad t \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^1 \cosh u \sqrt{1 + \sinh^2 u} du = \int_0^1 \cosh^2 u du \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \cosh 2u}{2} du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4} \right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{\operatorname{arsinh} t}{2} + \frac{t\sqrt{t^2 + 1}}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,1478 \end{aligned}$$

c) $\gamma_3(t) = (e^t \cos t)\hat{i} + (e^t \sin t)\hat{j} + (e^t)\hat{k}, \quad t \in [0; 2\pi]$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}_3(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{4t}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{3}e^t dt = [\sqrt{3}e^t]_0^{2\pi} = \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1) \approx 925,7667 \end{aligned}$$

d) $\gamma_4(t) = (t - \sin t)\hat{i} + (1 - \cos t)\hat{j}, \quad t \in [0; 2\pi]$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}_4(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8 \end{aligned}$$

3.2. Ívhossz szerinti paraméterezés

Adja meg a $\gamma(t) = (t+3)\hat{i} + (t^2/2)\hat{j} + ((2\sqrt{2}/3)t^{3/2})\hat{k}$ görbe egységsebességű paraméterezését!

A görbe sebességvektora, és ennek abszolút értéke:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + 2t + t^2} = |1 + t|.$$

Az ívhossz szerinti integrál:

$$L(t) = \int_0^t |1 + \tau| d\tau = \int_0^t (1 + \tau) d\tau = t + \frac{t^2}{2}.$$

Ennek inverze:

$$t(L) = -1 + \sqrt{1 + 2L}.$$

Az egységsebességű paraméterezés:

$$\gamma_s(L) = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1 + 2L} + 3 \\ (-1 + \sqrt{1 + 2L})^2/2 \\ (2\sqrt{2}/3)(-1 + \sqrt{1 + 2L})^{3/2} \end{bmatrix}$$

3.3. Skalármezők görbe menti skálárértékű integrálja

a) $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{1 + 4x^2 + 16yz}$, $\gamma(t) = (t)\hat{i} + (t^2)\hat{j} + (t^4)\hat{k}$, $t \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varphi(\mathbf{r}) ds &= \int_0^1 \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6} \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (4t^3)^2} dt \\ &= \int_0^1 1 + 4t^2 + 16t^6 dt = \left[t + \frac{4}{3}t^3 + \frac{16}{7}t^7 \right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} = \frac{97}{21} \end{aligned}$$

b) $\psi(\mathbf{r}) = 2x$, a $(3; 0)$ és $(0; 4)$ pontokat összekötő szakasz mentén

A szakasz paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 - 3 \\ 4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3t \\ 4t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1], \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = 5.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_{\gamma} \psi(\mathbf{r}) ds = \int_0^1 \psi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 2(3 - 3t) \cdot 5 dt = 30 \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 15.$$

c) $\chi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$, első síknegyedbeli egységköríven, pozitív irányítással

A görbe paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2], \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = 1.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_{\gamma} \chi(\mathbf{r}) \, ds = \int_0^{\pi/2} \chi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

d) $\omega(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$, $r = 2$ sugarú, origó középpontú, pozitív irányítású körön

A görbe paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = 2.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_{\gamma} \omega(\mathbf{r}) \, ds = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t) \cdot 2 \, dt = \int_0^{2\pi} 8 \, dt = 16\pi.$$

3.4. Vektormezők görbe menti skalárértékű integrálja

a) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (y+z)\hat{\mathbf{i}} + (x+z)\hat{\mathbf{j}} + (x+y)\hat{\mathbf{k}}$, $\gamma(t) = (t)\hat{\mathbf{i}} + (t^2)\hat{\mathbf{j}} + (t^3)\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^1 \langle \mathbf{u}(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^2 + t^3 \\ t + t^3 \\ t + t^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \, dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + t^3 + 2t^2 + 2t^4 + 3t^3 + 3t^4) \, dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 + 4t^3 + 5t^4) \, dt = [t^3 + t^4 + t^5]_0^1 = 3 \end{aligned}$$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (-yz)\hat{\mathbf{i}} + (xz)\hat{\mathbf{j}} + (x^2 + y^2)\hat{\mathbf{k}}$, $\gamma(t) = (\cos t)\hat{\mathbf{i}} + (\sin t)\hat{\mathbf{j}} + (2t)\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0; 2]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle &= \int_0^2 \langle \mathbf{v}(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_0^2 \begin{bmatrix} -2t \sin t \\ 2t \cos t \\ \cos^2 t + \sin^2 t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{bmatrix} \, dt \\ &= \int_0^2 2t(\sin^2 t + \cos^2 t) + 2(\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt \\ &= \int_0^2 2t + 2 \, dt = [t^2 + 2t]_0^2 = 8 \end{aligned}$$

c) $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (y)\hat{\mathbf{i}} + (x)\hat{\mathbf{j}}$, az $(1; 0)$ pontból a $(0; 2)$ pontba

- Az egyenes szakasz mentén:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad t \in [0; 1], \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 2t \\ 1-t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 (-2t + 2 - 2t) dt = \int_0^1 2 - 4t dt = [2t - 2t^2]_0^1 = 0$$

- Az ellipszis mentén:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0; \pi/2], \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{bmatrix} dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt = 2 \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 0$$

- A gradiens-tételt felhasználva: a $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ vektormező potenciálfüggvénye:

$$\varphi(\mathbf{r}) = xy, \quad \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{w}(\mathbf{r}).$$

A gradiens-tétel szerint a görbementi integrál értéke csak a kezdő- és végponttól függ, ezért a két pontot összekötő tetszőleges görbe mentén az integrál értéke:

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{w}(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \varphi(0; 2) - \varphi(1; 0) = 0 - 0 = 0.$$

3.5. Vektormező görbementi vektorértékű integrálja

Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 - x^2)\hat{\mathbf{i}} + (2yz)\hat{\mathbf{j}} + (-x^2)\hat{\mathbf{k}}$ vektormező $\gamma(t) = (t)\hat{\mathbf{i}} + (t^2)\hat{\mathbf{j}} + (t^3)\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0; 1]$ görbe menti vektorértékű integrálját!

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{v}(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^4 - t^2 \\ 2t^5 \\ -t^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} 6t^7 + 2t^3 \\ -t^2 - 3t^6 + 3t^4 \\ 2t^3 \end{bmatrix} dt = \dots = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -17/105 \\ -1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$