

3

Görbék, görbementi integrál

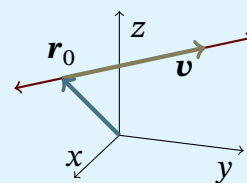
Matematika G3 – Vektoranalízis

Utoljára frissítve: 2025. szeptember 08.

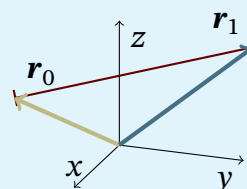
3.1. Elméleti áttekintő

Görbék paraméterezése:

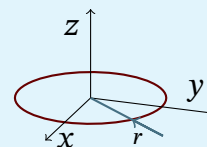
• Egyenes: $\gamma(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ $t \in \mathbb{R}$



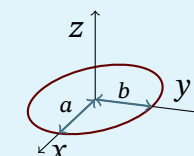
• Szakasz: $\gamma(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ $t \in [0; 1]$



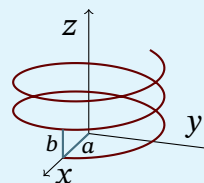
• Körvonal: $\gamma(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $t \in [0; 2\pi]$



• Ellipszis: $\gamma(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $t \in [0; 2\pi]$



• Spirál: $\gamma(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{bmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$



Definíció 3.1 : Reguláris görbe

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nem feltétlenül korlátos intervallum. Ekkor az $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ immerziót reguláris görbének nevezzük.

Definíció 3.2 : Sebesség- és gyorsulásvektor

Legyen $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ reguláris görbe. Ekkor a $\dot{\gamma}(t)$ és $\ddot{\gamma}(t)$ vektorokat a görbe sebesség- és gyorsulásvektorának nevezzük.

Definíció 3.3 : Pályasebesség, Ívhossz

A $v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$ függvényt pályasebességnek hívjuk.

A pályasebesség I feletti integrálját a görbe ívhosszának nevezzük:

$$L(t) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_I ds.$$

Görbe ívhossz szerinti paraméterezése

Legyen $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C}$ reguláris görbe, $L(t)$ pedig a görbe ívhossza. Ekkor a görbe ívhossz szerinti paraméterezése

$$\gamma_L : [0; L(\max(I))] \rightarrow \mathcal{C}, \text{ ahol } \gamma_L(s) = \gamma(L^{-1}(s)).$$

Az ívhossz szerinti paraméterezésű görbe sebességvektora egységvektor: $\|\dot{\gamma}_L(s)\| = 1$.

Definíció 3.4 : Skalármező görbe menti skalárértékű integrálja

Legyen $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\gamma(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. Ekkor a φ skalármező görbe menti skalárértékű integrálja

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\mathbf{r}) ds = \int_I \varphi(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Definíció 3.5 : Vektormező görbe menti skalár- és vektorértékű integrálja

Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C}$ paraméterezett görbe, ahol $t \in I$ a görbe paraméterezése, $\gamma(I) = \mathcal{C}$ a görbe képe, $d\mathbf{r} = \dot{\gamma}(t) dt$. Ekkor a \mathbf{v} vektormező görbe menti

- skalárértékű integrálja: $\int_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}); ds \rangle = \int_I \langle \mathbf{v}(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle dt,$
- vektorértékű integrálja: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times ds = \int_I \mathbf{v}(\gamma(t)) \times \dot{\gamma}(t) dt.$

Tétel 3.1 : Gradiens-tétel

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármező, $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathcal{C} \subseteq U, t \mapsto \gamma(t)$ folytonos görbe, $\gamma(a) = \mathbf{p}, \gamma(b) = \mathbf{q}$ pedig a görbe kezdő és végpontja. Ekkor:

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \text{grad } \varphi(\mathbf{r}); d\mathbf{r} \rangle = \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p}).$$

Vagyis, ha egy vektormező valamely skalármező gradiense, akkor annak bármely folytonos görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végpontoktól függ.

3.2. Feladatok

1. Számítsa ki a megadott görbék ívhosszát az adott intervallumon!

a) $\gamma_1(t) = (t)\hat{i} + (\sqrt{6}t^2/2)\hat{j} + (t^3)\hat{k}, \quad t \in [0; 2]$

b) $\gamma_2(t) = (t \cos t)\hat{i} + (t \sin t)\hat{j}, \quad t \in [0; 1]$

c) $\gamma_3(t) = (e^t \cos t)\hat{i} + (e^t \sin t)\hat{j} + (e^t)\hat{k}, \quad t \in [0; 2\pi]$

d) $\gamma_4(t) = (t - \sin t)\hat{i} + (1 - \cos t)\hat{j}, \quad t \in [0; 2\pi]$

2. Adja meg a $\gamma(t) = (t+3)\hat{i} + (t^2/2)\hat{j} + ((2\sqrt{2}/3)t^{3/2})\hat{k}$ görbe egységsebességű paraméterezését!

3. Integrálja a saklármezőket a megadott görbék mentén!

a) $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{1 + 4x^2 + 16yz}, \quad \gamma(t) = (t)\hat{i} + (t^2)\hat{j} + (t^4)\hat{k}, \quad t \in [0; 1]$

b) $\psi(\mathbf{r}) = 2x$, a $(3; 0)$ és $(0; 4)$ pontokat összekötő szakasz mentén

c) $\chi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$, első síknegyedbeli egységköríven, pozitív irányítással

d) $\omega(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$, $r = 2$ sugarú, origó középpontú, pozitív irányítású körön

4. Számítsa ki az alábbi vektormezők skalárértékű integrálját az adott görbék mentén!

a) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (y+z)\hat{i} + (x+z)\hat{j} + (x+y)\hat{k}, \quad \gamma(t) = (t)\hat{i} + (t^2)\hat{j} + (t^3)\hat{k}, \quad t \in [0; 1]$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (-yz)\hat{i} + (xz)\hat{j} + (x^2+y^2)\hat{k}, \quad \gamma(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + (2t)\hat{k}, \quad t \in [0; 2]$

c) $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (y)\hat{i} + (x)\hat{j}$, az $(1; 0)$ pontból a $(0; 2)$ pontba

- egy egyenes szakasz mentén
- origó középpontú ellipszis mentén

5. Adja meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 - x^2)\hat{i} + (2yz)\hat{j} + (-x^2)\hat{k}$ vektormező $\gamma(t) = (t)\hat{i} + (t^2)\hat{j} + (t^3)\hat{k}$, $t \in [0; 1]$ görbe menti vektorértékű integrálját!