1 Mátrixok I

Matematika G2 – Lineáris Algebra
Utoljára frissítve: 2025. március 22.

1.1. Elméleti Áttekintő

Az előző félévben az $\mathbb{R}^n$-et, az n-dimenziós oszlopvektorok vektorterét vizsgáltuk. Idén egy általánosabb vektor fogalmat vezetünk be.

A félév elején átismételjük azokat a fogalmakat, amelyeket már az előző félévben az $\mathbb{R}^n$ kontextusában megismertünk. Szó lesz például lineáris kombinációkról, lineáris függetlenségről. Ezeket a fogalmakat eredetileg az $\mathbb{R}^n$ vektortér keretein belül vezettük be, most azonban látni fogjuk, hogy valójában tetszőleges vektortérre alkalmazhatóak.

Definíció 1.1: Abel-csoport

Legyen G nemüres halmaz, és $\circ$ egy művelet. Ekkor a $(G; \circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\forall a; b; c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (**asszociativitás**)
2. $\exists e \in G : \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$, (**egységelem**)
3. $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. (**inverzelem**)
4. $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$ (**kommutativitás**)

Definíció 1.2: Vektortér

Legyen V nemüres halmaz, és $\circ, +$ két művelet, T test. A $(V; +, \circ)$ a T test feletti vektortér, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(V; +)$ Abel-csoport,
2. $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : (\lambda \circ \mu) \circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ (\mu \circ \boldsymbol{x})$,
3. ha ε a T-beli egységelem, akkor $\forall \boldsymbol{x} \in V : \varepsilon \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
4. teljesül a disztributivitás:
   - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : \lambda \circ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \lambda \circ \boldsymbol{y}$,
   - $\forall \lambda; \mu \in T \wedge \forall \boldsymbol{x} \in V : (\lambda + \mu) \circ \boldsymbol{x} = \lambda \circ \boldsymbol{x} + \mu \circ \boldsymbol{x}$.

A $(\mathbb{R}^3; +, \lambda)$ vektortér, ahol $+$ az összeadás, λ pedig a skalárral való szorzást jelöli.

A legfeljebb n-edfokú polinomok a skalárral való szorzásra és az összeadásra vektorteret alkotnak.

Definíció 1.3: Lineáris függetlenség

A $(V; +; \lambda)$ vektortér $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vektorait lineárisan függetlennek mondjuk, ha a

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

vektoregyenletnek **csak a triviális megoldása** létezik, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Ha az egyenletnek nem csak a triviális megoldása létezik, akkor a vektorok lineárisan függők.

Definíció 1.4: Altér

Legyen $(V; +; \lambda)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér, valamint $\emptyset \neq L \subset V$. L-t altérnek nevezzük a V-ben, ha $(L; +; \lambda)$ ugyancsak vektortér.

$(\mathbb{R}^3; +; \lambda)$ altere az olyan vektorok halmaza, amelyek első koordinátája 0.

A polinomok vektorterének alterte a legfeljebb n-edfokú polinomok vektortere.

Definíció 1.5: Generátorrendszer

Legyen V vektortér, valamint $\emptyset \neq G \subset V$. G által generált altérnek nevezzük azt a legszűkebb alteret, amely tartalmazza G-t. Jele: $\mathcal{L}(G)$.

G generátorrendszere V-nek, ha $\mathcal{L}(G) = V$.

Az $\mathbb{R}^3$ vektortér generátorrendszere például:

$$\{ (1;0;0); (1;1;0); (0;1;1); (0;0;1) \}.$$

A legfeljebb másodfokú polinomok vektortérének generátorrendszere például:

$$\{ 1; 1+x; x+x^2; x^2 \}.$$

Definíció 1.6: Bázis

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V bázisának nevezzük.

Az $\mathbb{R}^3$ vektortér bázisa például:

$$\{ (1;0;0); (0;1;0); (0;0;1) \}.$$

A legfeljebb másodfokú polinomok vektortérének bázisa például:

$$\{ 1; x; x^2 \}.$$

Definíció 1.7: Vektortér dimenziója

Végesen generált vektortér dimenzióján a bázisainak közös tagszámát értjük.

Definíció 1.8: Mátrix

Egy mátrix vízszintes vonalban elhelyezkedő elemei **sorok**at, míg függőlegesen elhelyezkedő elemei **oszlop**okat alkotnak.

Egy m sorból és n oszlopból álló mátrix jelölése:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mátrixok jelölése nyomtatott szövegben: $\mathbf{A}$.

Mátrixok jelölése írásban: $\underline{\underline{A}}$.

Az $m \times n$-es mátrixok halmazának jelölései: $\mathcal{M}_{m\times n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m\times n}$.

A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában található elemet a_{ij}-vel jelöljük.

A mátrix dimenzióit mindig először a sorok számával, majd azt követően az oszlopok számával adják meg.

Definíció 1.9: Mátrix transzponáltja

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix transzponáltja a főátlójára vett tükörképe. Jele: $\mathbf{A}^\intercal \in \mathcal{M}_{n\times m}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

Két vektor skaláris szorzatának gyakori jelölései:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{b}.$$

Speciális mátrixstruktúrák:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1} \sim \text{oszlopvektor / oszlopmátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times n} \sim \text{sorvektor / sormátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \sim \text{kvadratikus / négyzetes mátrix}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \sim \text{egységmátrix}$$

$$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \sim \text{nullmátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \sim \text{diagonális mátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \sim \text{felső háromszög mátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \sim \text{szimmetrikus mátrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \sim \text{antiszimmetrikus mátrix}$$

Definíció 1.10: Mátrixok összege

Két mátrix összegén azt a mátrixot értjük, melyet a két mátrix elemenkénti összeadásával kapunk, azaz, ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, akkor $\mathbf{C} := \mathbf{A}+\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, ahol $c_{ij} := a_{ij}+b_{ij}$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok összegét!

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+5 & 3+4 \\ 4+3 & 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.11: Mátrix és skalár szorzata

Egy mátrix és egy skalár szorzata olyan mátrix, melynek minden eleme skalárszorosa az eredeti mátrix elemeinek, azaz ha $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbf{C} := \lambda\mathbf{A}$, ahol $c_{ij} := \lambda a_{ij}$.

Határozzuk meg a $\lambda = 2$ skalár és az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix szorzatát!

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.12: Mátrixok szorzata

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Ekkor a két mátrix szorzata

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \text{ ahol } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

A mátrixszorzás vizualizálása:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sum a_{1i}b_{i1} & \ldots & \sum a_{1i}b_{ip} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \ldots & \sum a_{2i}b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mi}b_{i1} & \ldots & \sum a_{mi}b_{ip} \end{bmatrix} \end{array}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixok szorzatát!

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) & 1\cdot 0 + 0\cdot 2 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot(-2) & -1\cdot 0 + 2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Definíció 1.13: Szimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal$.

Definíció 1.14: Antiszimmetrikus mátrix

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix antiszimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\intercal$.

Kvadratikus mátrix felbontása szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathrm{T})}_{\text{Szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathrm{T})}_{\text{Antiszimmetrikus}}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix szimmetrikus és antiszimmetrikus részét!

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\intercal) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{as} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\intercal) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Definíció 1.15: Determináns

Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ kvadratikus mátrix, és $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény. A mátrix i-edik oszlopának elemeit tartalmazó oszlopvektorokat $\boldsymbol{a}_i$-vel jelöljük. Az $\mathbf{A}$ determinánsának nevezzük $\det \mathbf{A}$-t, a hozzárendelést pedig az alábbi négy axióma írja le:

1. homogén:
$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \lambda\boldsymbol{a}_i & \cdots \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots \end{pmatrix},$$
2. additív:
$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i & \cdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{b}_i & \cdots \end{pmatrix},$$
3. alternáló:
$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_j & \cdots \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_i & \cdots \end{pmatrix},$$
4. $\mathbb{E}$ determinánsa:
$$\det \mathbb{E} = \det\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \cdots & \hat{\boldsymbol{e}}_n \end{pmatrix} = 1.$$

Ha egy mátrix determinánsa nem zérus, akkor a az oszlopaiból, vagy soriból képzett vektorok lineárisan függetlenek.

Ellenkező esetben lineárisan összefüggőek.

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát!

A determináns a kifejtési tétel alapján:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

A determináns a definíció alapján:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{3}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{4}{=} -2.$$

1. Az első sor háromszorosát kivonjuk a második sorból.
2. Az első oszlop kétszeresét kivonjuk a második oszlopból.
3. A második oszlopból kiemelünk -2-t.
4. Az egységmátrix determinánsa 1.

3×3-as mátrix bármelyik sora vagy oszlopa szerint kifejthető. Az alábbi előjelszabályt kell alkalmazni:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát!

A determináns a kifejtési tétel alapján, az első sor szerint:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0.$$

A determináns a kifejtési tétel alapján, a második oszlop szerint:

$$\det \mathbf{A} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 5 \cdot (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 0.$$

A determináns a definíció alapján:

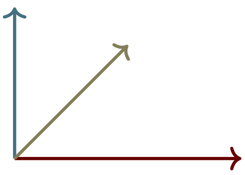
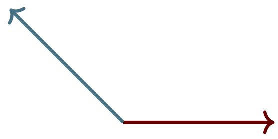
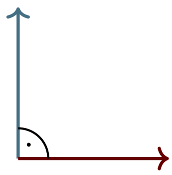
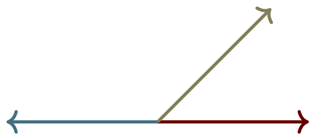
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{2}{=} 0.$$

1. A második és a harmadik oszlopból kivonjuk az első oszlopot.
2. Amennyiben a mátrixban két oszlop vagy sor azonos, akkor a determináns zérus.

1.2. Feladatok

1. Vizsgálja meg, hogy vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekre...
   a) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, amelyek első koordinátája 1,
   b) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, amelyek második koordinátája 0,
   c) a harmadfokú, valós együtthatós polinomok.

2. Döntse el, hogy az alábbi vektorok $\mathbb{R}^2$-ben bázist vagy generátorrendszert alkotnak-e!

   a)
   
   b)
   
   c)
   
   d)
   
   e)
   

3. Vizsgálja meg, hogy az $\boldsymbol{v}_1(1;2;3)$, $\boldsymbol{v}_2(1;3;-1)$ és $\boldsymbol{v}_3(1;0;0)$ vektorok $\mathbb{R}^3$-ban bázist vagy generátorrendszert alkotnak-e!

4. Írja fel az **A** mátrix transzponáltját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Adottak az **A**, **B** és **C** mátrixok. Végezze el az alábbi műveleteket!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
   b) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$
   c) $3\mathbf{A} + \mathbf{C}$
   d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
   e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
   f) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{BC}$

6. Adottak az **A** és **B** mátrixok. Végezze el $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ és $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ műveleteket!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Bontsa fel az **A** mátrixot szimmetrikus és antiszimetrikus összetevőkre!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Számolja ki az **A**, **B**, **C** és **D** mátrixok determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Mutassa meg hogy **A** determinánsa osztható 7-tel!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$