

Differenciálás II

Matematika G1 - Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 27.

8.1. Elméleti Áttekintő

Implicit függvények differenciálása:

A korábbiakban y = f(x) alakú függvényeket vizsgáltunk. Az ilyen függvények az $x \mapsto f(x)$ hozzárendelés alapján egyértelműen megadják, hogy az egyes ősképekhez $(x \in \mathcal{D}_f)$ milyen értékek tartoznak $(y \in \mathcal{R}_f)$.

Előfordulhat azonban olyan eset, amikor nehéz, vagy éppen lehetetlen **explicit alakban** megadni egy görbét. Ennek a problémának a feloldására vezessük be az **implicit függvények** fogalmát. Az ilyen függvények esetén az ősképek és képek közötti kapcsolatot az F(x; y) = 0 egyenlettel adhatjuk meg.

Ilyen függvények differenciálásakor mindig az összetett függvények deriválási szabályait kell alkalmazni:

$$[g(y)]' = g'(y) \cdot y'$$

Implicit függvény deriváltjai a parciális deriváltak segítségével is meghatározhatóak. Parciális deriválás során az F(x;y) függvényre úgy tekintük, mintha az x és y változói függetlenek lennének egymástól. Az x szerinti parciális derivált esetén y-t, az y szerinti parciális derivált esetén pedig x-et konstansként kezeljük.

Az *x* szerinti derivált:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F_x'}{F_y'}$$

Az y szerinti derivált pedig:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x} = -\frac{F_y'}{F_x'}$$

Az $(f(x))^{g(x)}$ típusú függvényeket az implicit függvény deriválási szabályai szerint is differenciálhatjuk.

Határozzuk meg az ln^x x függvény deriváltját!

A feladat az előző gyakorlaton tanult módszerrel is megoldható:

$$y = e^{x \ln \ln x} \quad \to \quad y' = e^{x \ln \ln x} \left(1 \cdot \ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln^x x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right).$$

Inverz függvény differenciálása:

Függvény invertálása során a függvény görbéjét tükrözzük az y=x egyenesre. Jele: $f^{-1}(x)$. Amennyiben az eredeti függvény differenciálható az x_0 pontban, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az inverz függvény deriváltja az $y_0 = f(x_0)$ pontban:

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Az inverz függvény létezésének szükséges feltétele, hogy az eredeti függvény bijektív legyen.

Paraméteresen megadott függvények differenciálása:

Paraméteresen megadott függvények esetén egy paraméterünk (t), viszont kettő egyenletünk (x(t) és y(t)) van. Az x szerinti derivált:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Az y szerinti derivált pedig ennek a reciproka:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

A másosik deriváltak:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{(\dot{y'})}{\dot{x}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dot{x}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{(\dot{x'})}{\dot{y}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\dot{y}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)}{\dot{y}} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}$$

Tétel 8.1: L'Hôpital-szabály

Legyenek f és g differenciálhatóak az $\alpha \in \mathbb{R}_b$ pont egy környezetében (α -ban nem szükségképpen), továbbá $g(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} g(x) = 0, \text{ vagy } \lim_{x \to \alpha} |f(x)| = \lim_{x \to \alpha} |g(x)| = \infty,$$

ekkor, ha
$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B$$
, akkor $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = B$.

Tétel 8.2: Rolle-tétel

Legyen f folytonos [a;b] intervallumon és differenciálható (a;b) intervallumon, továbbá f(a) = f(b) = 0, ekkor létezik $\xi \in (a;b)$, melyre teljesül, hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

Tétel 8.3: Lagrange-féle középértéktétel

Legyen $f:I\subset R\to R$ folytonos [a;b] intervallumon és differenciálható (a;b) intervallumon, ekkor létezik olyan $\delta\in(a;b)$ hogy

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tétel 8.4: Cauchy-féle középértéktétel

Legyen f és g függvények folytonosak [a;b] intervallumon és differenciálhatóak (a;b) intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in (a;b)$ esetén. Ekkor létezik olyan $\eta \in (a;b)$ hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

8.2. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvény deriváltjait! (y' = dy/dx és x' = dx/dy)

$$F(x; y) = x^4y + 5y^2x - 4 = 0$$

2. Határozza meg az alábbi függvény első és második deriváltjait, valamint az érintőjének egyenletét a P(1;1) pontban!

$$ln y + xy = 1$$

- 3. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 25$ kör azon pontjait, amelyekben a kör érintőjének meredeksége 3/4!
- 4. Írja fel az $f(x) = 5x^3 + x 7$ függvény inverzét, és annak deriváltját! Adja meg ennek értékét az $f(x_0)$ pontban, ha $x_0 = 1$!
- 5. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott függvény x szerinti első és második deriváltját. Mekkora lesz az érintő meredeksége a $t=\pi/6$ -hoz tartozó pontban?

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

6. Határozza meg az alábbi paraméteresen megadott kör azon pontjait, ahol az érintő meredeksége 3/4!

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos t \\ y(t) = 5\sin t \end{cases}$$

7. Határozza meg az alábbi határértékeket a L'Hôpital szabály segítségével!

a)
$$\lim_{x \to 3} = \frac{3^x - x^3}{x - 3}$$

c)
$$\lim_{x \to 0} x \ln x$$

b)
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$$

d)
$$\lim_{x \to 0} x^x$$

e) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

8. Vizsgálja meg, hogy alkalmazható-e a L'Hôpital szabály az alábbi határértékek kiszámítására! Ha igen, alkalmazza, ha nem, indokolja meg!

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$$

- 9. A Rolle-féle középértéktétel segítségével bizonyítsa be, hogy az $f(x) = 3x^5 + 15x 2$ függvénynek egy valós gyöke van!
- 10. Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$