

Komplex számok

Matematika G1 – Komplex számok Utoljára frissítve: 2024. szeptember 12.

3.1. Elméleti Áttekintő

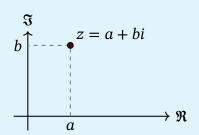
3.1.1. A komplex számok megadási módjai

Algebrai alak:

A komplex számok (\mathbb{C}) algebrai alakja:

$$z = a + bi$$
,

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és $i = \sqrt{-1}$ az **imaginárius egység**. A komplex szám **valós rész**e Re $\{z\} = a$, **képzetes rész**e pedig Im $\{z\} = b$.



Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részük is megegyezik. $(z_1=z_2 \Leftrightarrow \text{Re}\{z_1\}=\text{Re}\{z_2\} \land \text{Im}\{z_1\}=\text{Im}\{z_2\})$

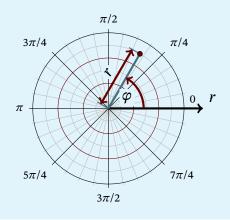
Trigonometrikus alak:

Térjünk át az eddigi Descartes-féle koordinátarendszerről a **polárkoordináta-rendszer**re, amelyben

- a komplex szám hossza: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- valós tengellyel bezárt szöge: $\varphi = \arg z$.

Ebből az alábbi alakot kapjuk:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



Exponeciális alak:

Induljunk ki a trigonometrikus alakból, és használjuk fel az alábbi azonosságokat:

$$\cos \varphi = \cosh i \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$
, és $i \sin \varphi = \sinh i \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$.

A trigonometrikus alakba helyettesítve megkapjuk az exponeciális alakot:

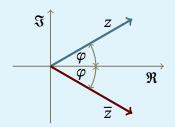
$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}\right) = re^{i\varphi}.$$

3.2. Műveletek komplex számokkal

Konjugált:

Egy z = a + bi komplex szám konjugáltját úgy kapjuk meg, hogy tükrözzük a valós tengelyre, vagyis

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$
.

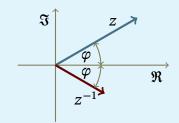


Inverz:

Egy z = a + bi komplex szám inverze:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

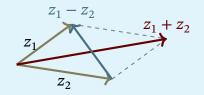
Komplex szám inverzének hossza az eredeti szám hosszának a reciproka.



Összeadás és kivonás:

Algebrai alakban, a vektorműveletekhez hasonlóan:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$



Szorzás:

Algebrai alakban:

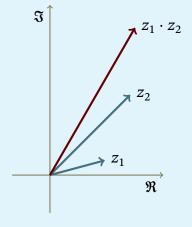
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Trigonometrikus alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



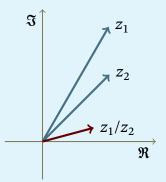
Osztás:

Trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right)$$

Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



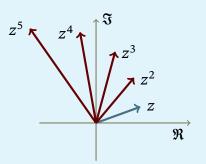
Hatványozás:

Trigonometrikus alakban:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Exponenciális alakban:

$$z^n = r^n e^{i \cdot n\varphi}$$



Ha egy komplex számot az *n*-edik hatványra emelünk, akkor

- hossza az *n*-szeresére nő,
- argumentuma is az *n*-szeresére nő.

Gyökvonás:

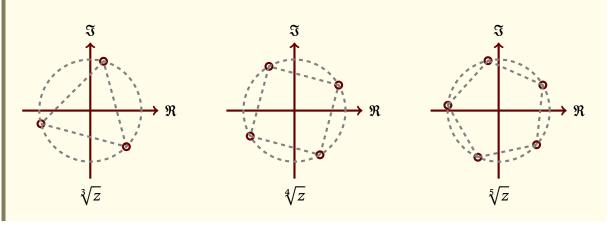
Trigonometrikus alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), \text{ ahol } k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Exponenciális alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\cdot\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$
, ahol $k \in \{0; 1; ...; n-1\}$

Tetszőleges komplex szám n-edik gyökei egy olyan szabályos n-szög csúcsai, amelynek középpontja az origó.



3.3. Feladatok

- 1. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!
 - a) $\overline{\left(\frac{2-i}{e^{i\pi/3}}\right)}$

b)
$$\frac{5+i}{3-2i} \cdot \overline{3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \cdot 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) \cdot e^{i5\pi/12}}$$

c)
$$\frac{5e^{i^{7\pi/13}}}{4(\cos 135^{\circ} + i \sin 135^{\circ})} \cdot \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)} \cdot \left(2\sqrt{3} + 2i\right)$$

- 2. Végezze el az alábbi hatványozásokat!
 - a) $(i-1)^{16}$

b)
$$(3+5i)^4 \cdot (21-35i)^5 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$$

- 3. Végezze el az alábbi gyökvonásokat!
 - a) $\sqrt[3]{-8}$
 - b) ⁴√1
 - c) $\sqrt{3 + 4i}$
- 4. Oldja meg a következő egyenleteket!

a)
$$z^4 - 81i = 0$$

b)
$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

- 6. Adja meg a geometriai helyét azoknak a komplex számoknak, amelyekre ...
 - a) $Im\{z\} > 0$,
 - b) |z-a|=|z-b|, ahol $a,b\in\mathbb{C}$,
 - c) $|z| < 1 \text{Re}\{z\}$.
- 7. Egy négyzet két szomszédos csúcsát jelölje a $z_1=3+2i$ és a $z_2=5+4i$ komplex szám. Hol található a többi csúcs?
- 8. Írja fel a (-2; 1) középpontú, 4 sugarú kör egyenletét a komplex számsíkon!