

## 10

## Elsőrendű lineáris és másodrendű hiányos DE

Matematika G3 – Differenciálegyenletek

Utoljára frissítve: 2025. november 09.

## 10.1. Elméleti áttekintő

Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Ha  $q(x) \equiv 0$ , akkor az egyenlet homogén, egyébként inhomogén.

Az általános megoldás a homogén és inhomogén megoldás összegeként adódik:

- A homogén megoldást meghaphatjuk, ha megoldjuk az  $y' + p(x)y = 0$  egyenletet a tanult módszerek alapján.
- Az inhomogén megoldást konstans variálással kaphatjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a homogén megoldásban lévő konstanst  $x$ -től függőnek vesszük, majd megoldjuk az egyenletet.

Hiányos másodrendű egyenletek

Az  $y'' = f(x; y; y')$  hiányos, ha  $x$ ,  $y$ , vagy  $y'$  hiányzik az egyenletből.

$$1. \quad y'' = f(x) \quad \rightarrow \quad y \text{ és } y' \text{ hiányos, kétszer integrálunk}$$

$$2. \quad y'' = f(x; y') \quad \rightarrow \quad p(x) = y'(x) \text{ helyettesítés,}$$

így  $p$ -re elsőrendű

$$3. \quad y'' = f(y; y') \quad \rightarrow \quad P(y) = y' \text{ helyettesítés,}$$

$$\text{ekkor } y'' = \partial_y P \cdot y' = \partial_y P \cdot P$$

így  $P$ -re elsőrendű, szeparábilis

## 10.2. Feladatok

1. Oldja meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket!

a)  $y' - \frac{y}{x} = x e^x,$

b)  $y' + 2xy + x e^{-x^2} = 0,$

c)  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1,$

d)  $y' + y \cos x = \cos x \sin x,$

e)  $y'(1+x^2) + 2xy = \tan x.$

2. 10 L vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be 2 L/min sebességgel. Az edényben a folyadék azonnal elkeveredik, majd ugyanilyen sebességgel kifolyik. Mennyi só lesz 5 min múlva az edényben?

3. Egy testet függőlegesen hajítunk lefelé  $v_0$  kezdeti sebességgel. Határozza meg a mozgás sebességének változását, amennyiben a testre csak a nehézségi erő hat, valamint a levegő fékezőereje a sebességgel egyenesen arányos!

4. Oldja meg a következő másodrendű, hiányos differenciálegyenleteket!

a)  $y'' = 6x + \sin x,$

b)  $y''x^2 + \ln x = 1,$

c)  $y'' - \frac{x}{x^2-1} y' = 0 \quad (x > 1),$

d)  $y''(1+y^2) = y y'^2,$

e)  $y''^2 - y' = 0,$

e)  $y''y = 1 + y'^2.$