

Térgeometriai alakzatok

Matematika G1 – Analitikus geometria Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

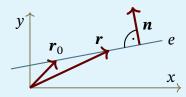
2.1. Elméleti Áttekintő

Egyenes 2D-ben:

n(A; B) – egyenes normálvektora

r(x; y) – tetszőleges pont helyvektora

 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0) - P_0$ fixpont helyvektora



Az egyenes egyenlete:

$$(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}$$

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{=:-C}$$
 \rightarrow $Ax + By + C = 0$

Hesse-féle normálalak:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A Hesse-féle normálalakot úgy kapjuk, hogy az egyenes normálvektorát egységhosszúságúra normáljuk.

Két egyenes viszonya:

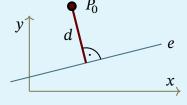
Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes normálvektorai által bezárt szög.

Ebből következik, hogy ha a normálvektorok által bezárt szög 90°, akkor a két egyenes merőleges egymásra. Ha a normálvektorok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos.

Pont és egyenes távolsága:

Adott egy e egyenes Hesse-féle normálalakja és egy $P_0(x_0; y_0)$ pont. Ekkor a pont és az egyenes távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$



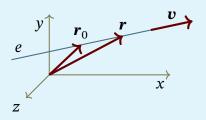
A formula csak azon pontokra ad zérus értéket, amelyek rajta vannak az egyenesen.

Egyenes 3D-ben:

$$\boldsymbol{v}(a;b;c)$$
 – egyenes irányvektora

$$m{v}(a;b;c)$$
 – egyenes irányvektora $m{r}(x;y;z)$ – tetszőleges pont helyvektora

$$r_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$$
 fixpont helyvektora



3D egyenes paraméteres alakja:

$$\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$$
 fixpont helyvektora
$$\mathbf{v}(a; b; c) - \text{egyenes irányvektora} \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

A paraméteres egyenletekből *t*-t kifejezve is megadhatjuk az egyenest:

$$(t=)$$
 $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$

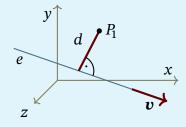
Két egyenes viszonya:

Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes irányvektorai által bezárt szög.

Pont és egyenes távolsága:

Egy \mathbf{r}_1 irányvektorú P_1 pont, és egy $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletű egyenes távolsága

$$d = \left| \frac{\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{v}|} \right|$$

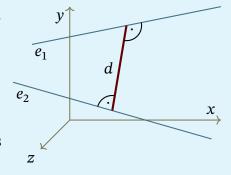


Két egyenes távolsága:

Az e_1 : $p_1(t_1) = r_1 + t_1 v_1$ és e_2 : $p_2(t_2) = r_2 + t_2 v_2$ egyenesek távolsága

$$d = \left| (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \cdot \underbrace{\frac{(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}}_{\hat{\boldsymbol{n}}_T} \right| = \left| (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_T \right|, \qquad e_2$$

ahol $\hat{\boldsymbol{n}}_T$ egy olyan egységvektor, amely merőleges mindkét egyenesre. (normál transzverzális)



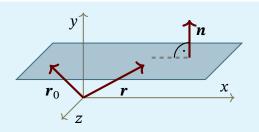
Amennyiben e_1 és e_2 párhuzamosak, akkor a távolságukat a pont és egyenes távolságának képletével számolhatjuk.

Sík 3D-ben:

n(A; B; C) – sík normálvektor

r(x; y; z) – tetszőleges pont helyvektora

 $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$ fixpont helyvektora



Sík egyenlete:

A sík tetszőleges *r* pontjára igaz, hogy

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = : -D,$
 $Ax + By + Cz + D = 0.$

Hesse-féle normálegyenlet:

$$\left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = 0$$

Két sík viszonya:

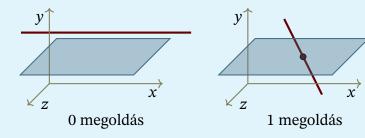
Két sík által bezárt szög a síkok normálvektorai által bezárt szög.

Sík és egyenes döféspontja:

Egy s: Ax + By + Cz + D = 0 sík és egy $e: \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenes döféspontjait meghatározhatjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$
és
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
$$z = z_0 + ct$$

A megoldások száma alapján:



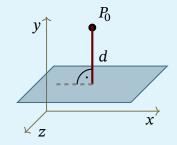
Sík és egyenes által bezárt szög:

Egy sík és egy egyenes által bezárt szög a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő.

Sík és pont távolsága:

Egy $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pont és egy s: Az + By + Cz + D = 0 sík távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

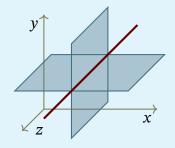


Két sík metszésvonala:

A metszésvonal irányvektora mindkét sík normálvektorára merőleges:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2.$$

Ezen kívül szükségünk van még egy tetszőleges pontra, amely rajta van mindkét síkon. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy az egyik koordinátát fixáljuk, és a másik kettőt kiszámítjuk a 2 sík egyenletéből. (Pl. z=0)



2.2. Feladatok

- 1. Számítsa ki az e_1 : 3x 4y 10 = 0 és az e_2 : 6x 8y + 5 = 0 egyenes távolságát!
- 2. Írja fel azon egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a P(-2; 5; 6) és a Q(7; -1; 3) pontokon!
- 3. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az alábbi egyenesek metszik egymást!

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \qquad \qquad \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

4. Határozza meg az alábbi egyenesek távolságát!

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 + 3t_1 \\ y_1(t) = -1 + 4t_1 \\ z_1(t) = 2t_1 \end{cases} \begin{cases} x_2(t) = 7 + 6t_2 \\ y_2(t) = 1 + 8t_2 \\ z_2(t) = 3 + 4t_2 \end{cases}$$

5. Adott két egyenes. Határozza meg a távolságukat és normáltraszverzálisuk egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x_1(t) = -7 + 3t \\ y_1(t) = 4 - 2t \\ z_1(t) = 4 + 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 1 + t \\ y_2(t) = -8 + 2t \\ z_2(t) = -12 - t \end{cases}$$

- 6. Vizsgálja meg, hogy a P(0; -1; 2), a Q(2; -1; 1) és az R(4; 3; -2) pontok egy egyenesbe esnek-e! Ha nem, akkor írja fel az általuk kifeszített sík egyenletét!
- 7. Határozza meg az α paramétert, ha ismert, hogy az e egyenes és az s sík párhuzamos egymással!

$$e: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha}$$
 $s: x + 3y - 2\alpha z = 0$

8. Számítsa ki az e egyenes és az s sík metszéspontját!

$$e: x-1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$
 $s: 2x+3y+z-1 = 0$

9. Adja meg az s_1 és s_2 síkok metszésvonalának egyenletrendszerét!

$$s_1: x-2y+3z-4=0$$
 $s_2: 3x+2y-5z-4=0$

10. Igazolja, hogy az alábbi három síknak egy közös pontja van. Írja fel ezen a ponton átmenő síkot, amely párhuzamos az x + y + 2z = 0 síkkal!

$$\begin{cases} s_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \\ s_2 : x - 3y + z + 1 = 0 \\ s_3 : x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$