Numerikus módszerek 1.

11. előadás: Nemlineáris egyenletek numerikus megoldása

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Feladat

Keressük meg egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists$?, 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \qquad x^* =?$$

Ekvivalens módon átfogalmazható (általában): keressük meg egy $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény fixpontját.

$$x^* = \varphi(x^*), \qquad x^* =?$$

Lásd Analízis...

Tétel: Bolzano-tétel

Ha $f \in C[a;b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

Megjegyzés:

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a;b]$ zárt intervallum,
- $C[a;b]$: az $[a;b]$ (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$: $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek
- van gyök az $(a;b)$ (nyílt) intervallumban

Biz. (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

1. Legyen $x_0 := a,\ y_0 := b$.
2. Ismételjük:
   - Legyen $s_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$, az intervallum fele.
   - Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) < 0$, akkor $x_{k+1} := x_k,\ y_{k+1} := s_k$.
   - Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) > 0$, akkor $x_{k+1} := s_k,\ y_{k+1} := y_k$.
3. Álljunk meg, ha
   - egyenlőség teljesül, ekkor $x^* = s_k$, vagy
   - elértük a kívánt pontosságot, ekkor $x^* \in (x_k, y_k)$, és

$$y_k - x_k = \frac{y_{k-1} - x_{k-1}}{2}$$

teljesül. $\square$

Megjegyzés:

- Általában nem tapasztalunk egyenlőséget.
- Az (x_k) és (y_k) sorozatok konvergenciájának részletes tárgyalása: Analízis...
- **Hibabecslések:**

$$|x_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k}, \quad |y_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k},$$

$$|s_k - x^*| < \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

Példa

Közelítsük a $P(x) = x^3 + 3x - 2$ polinom egyik gyökét 0.1 pontossággal. Hány lépés szükséges?

Próbálkozhatunk a $[0; 1]$ intervallummal...

A $P(x) = x^3 + 3x - 2$ polinom gyökét keressük intervallumfelezéssel a $[0;1]$ intervallumon:

$$P(0) = -2 < 0, \quad P(1) = 1 + 3 - 2 = 2 > 0$$
$$\Rightarrow \quad \exists\, x^* \in (0;1) : P(x^*) = 0.$$

Hibabecslés:

$$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad k > 4,$$

tehát legalább 4 lépésre van szükségünk. Lassú ... $\square$

Tétel: gyök egyértelmű létezéséről

1. Ha $f \in C[a;b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. valamint $f \in D(a;b)$ és $f' > 0$ (vagy < 0),

akkor $\exists!\ x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

Biz.: A Bolzano-tételből következik, hogy van gyök.
f szigorúan monoton, ezért egyértelmű is. $\square$

Tartalomjegyzék

Emlékeztető: Iterációs módszerek LER-ek esetén.

$$Ax = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = Bx + c$$

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) = B \cdot x^{(k)} + c$$

Ötlet: Most, nemlineáris függvények zérushelyéhez:

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \varphi(x)$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \ldots$$

Emlékeztető: fixpont, kontrakció

Emlékeztető: fixpont

Az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha $x^* = \varphi(x^*)$.

Emlékeztető: kontrakció

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *kontrakció*, ha $\exists\, q \in [0,1)$, hogy

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|\,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Megj.:

- kontrakció $\approx$ összehúzás, q: kontrakciós együttható
- most $n = 1$, $\|.\| = |.|$; $\mathbb{R}$ helyett $[a; b] \subset \mathbb{R}$, így jobban használható

Definíció: kontrakció

A $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ leképezés *kontrakció* $[a;b]$-n, ha $\exists\, q \in [0,1)$, hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q \cdot |x-y|\,, \qquad \forall x,y \in [a;b].$$

Állítás

1. φ: $[a;b] \to \mathbb{R}$ függvény, $\varphi \in C^1[a;b]$ és
2. $|\varphi'(x)| < 1$ $(\forall\, x \in [a;b])$,

$|\varphi'(x)| < 1$ $(\forall\, x \in [a;b])$, akkor φ kontrakció $[a;b]$-n.

Megj.:

- C^1: egyszer folyonosan differenciálható, vagyis a deriváltja folytonos.
- A kontrakciós tulajdonság függ az intervallumtól.

Biz.: A Lagrange-féle középértéktétel segítségével.

$$q := \max_{x \in [a;b]} \left| \varphi'(x) \right| < 1$$

$\forall x, y \in [a;b]\ (x < y) : \quad \exists\, \xi \in (x;y) :$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \varphi'(\xi) \right| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y| \,.$$

$\square$

Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$
2. és $\varphi \in C[a;b]$,

akkor $\exists\, x^* \in [a;b] : \varphi(x^*) = x^*$.

Biz.: Definiáljuk a $g(x) = x - \varphi(x)$ függvényt, majd alkalmazzuk a Bolzano-tételt.

Biz. folyt.:

1. Mivel $\varphi(a), \varphi(b) \in [a; b] \quad \Rightarrow$

$$g(a) = a - \varphi(a) \leq 0, \quad g(b) = b - \varphi(b) \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad g(a) \cdot g(b) \leq 0.$$

2. Ha $g(a) \cdot g(b) = 0$, akkor $g(a) = 0$ vagy $g(b) = 0$.
   Ez azt jelenti, hogy első esetben a, második esetben b fixpont.

3. Ha $g(a) \cdot g(b) < 0$, akkor a Bolzano-tétel miatt van g-nek gyöke $(a; b)$-ben, azaz

$$\exists\, x^* \in (a; b) : g(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x^*) = x^*$$

$\square$

Tétel: Banach-féle fixponttétel $[a;b]$-re

Ha a $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$ függvény kontrakció $[a;b]$-n q kontrakciós együtthatóval, akkor

1. $\exists!\, x^* \in [a;b] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. $\forall\, x_0 \in [a;b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $|x_k - x^*| \le q^k \cdot |x_0 - x^*| \le q^k(b-a)$,
   - $|x_k - x^*| \le \dfrac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$.

Biz.: Már volt, csak most $\mathbb{R}^n$ helyett $\mathbb{R}$ $(n=1)$, sőt $[a;b]$. $\square$

Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$,
2. $\varphi \in C^1[a;b]$ és
3. $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall\, x \in [a;b]$,

akkor az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iteráció konvergens $\forall x_0 \in [a;b]$ esetén.

Megj.: Attól még lehet konvergens a sorozat, ha valahol $|\varphi'| \geq 1$. (Nem szükséges feltétel.)

Tétel Lokális fixponttétel

Legyen $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény.

1. Ha $\varphi \in C^1[a;b]$ és
2. $\exists\, \xi \in [a;b]$ és $\delta > 0$, melyre

$$\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1 \quad \forall\, x \in [\xi-\delta;\xi+\delta] \subset [a;b].$$

3. Ha $\exists\, r:\ 0 < r \le \delta$, melyre

$$|\varphi(\xi) - \xi| \le (1-q)r,$$

(azaz ξ a fixpont egy elég jó közelítése,)

akkor φ kontrakció $[\xi - r; \xi + r]$-n és

$$\forall\, x \in [\xi - r; \xi + r]:\ \ \varphi(x) \in [\xi - r; \xi + r].$$

Biz.: A tétel feltételeiből következik, hogy φ kontrakció $[\xi-\delta;\xi+\delta]$-n.

Gondoljuk meg, hogy a kontrakciós tulajdonság a $[\xi-r;\xi+r]\subset[\xi-\delta;\xi+\delta]$ részintervallumra is teljesül a q kontrakciós együtthatóval.

Tetszőleges $x\in[\xi-r;\xi+r]$ esetén

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\xi| &= |\varphi(x)-\varphi(\xi)+\varphi(\xi)-\xi| \leq \\ &\leq |\varphi(x)-\varphi(\xi)|+|\varphi(\xi)-\xi| \leq \\ &\leq q\cdot\underbrace{|x-\xi|}_{\leq r}+(1-q)\cdot r = r\end{aligned}$$

Tehát φ az $x\in[\xi-r;\xi+r]$ intervallumba beleképez. $\square$

Következmény:

Ha a lokális fixponttétel feltételei teljesülnek, akkor valójában a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek az $[\xi - r; \xi + r]$ intervallumra, így

1. $\exists!\, x^* \in [\xi - r; \xi + r] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. $\forall\, x_0 \in [\xi - r; \xi + r]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$,
3. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $|x_k - x^*| \le q^k \cdot |x_0 - x^*| \le q^k (b - a)$,
   - $|x_k - x^*| \le \dfrac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|$.

1. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg az x^2 billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az $x = x^2$ egyenlet fixpontját keressük az

$$x_{k+1} = x_k^2$$

iterációval. Két fixpontja van 0 és 1, de

- $0 \leq x_0 < 1$ esetén $\lim(x_k) = 0$.
- $x_0 = 1$ esetén $\lim(x_k) = 1$.

2. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a $\sqrt{x}$ billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az $x = \sqrt{x}$ egyenlet fixpontját keressük az

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k}$$

iterációval. Két fixpontja van 0 és 1, de

- $x_0 = 0$ esetén $\lim(x_k) = 0$.
- $0 < x_0 \leq 1$ esetén $\lim(x_k) = 1$.

3. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a $\cos(x)$ billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az $x = \cos(x)$ fixpontegyenlet megoldását keressük a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x_{k+1} := \cos(x_k),\ x_0 \in [0, 1]$$

iterációval. Egyértelmű-e a megoldás? Konvergens ez a sorozat? Adjunk hibabecslést! Hány lépés után kapjuk a megoldást 0.1-es pontossággal?

1. Belátjuk, hogy a $\varphi(x) := \cos(x)$ függvény a $[0;1]$ intervallumot a $[0;1]$-be képezi:
   - Mivel $\varphi'(x) = -\sin(x) < 0$, $\forall\, x \in [0;1]$, ezért φ szigorúan monoton fogyó $[0;1]$-en.
   - $\varphi([0;1]) = [\varphi(1);\varphi(0)] = [\cos(1), 1] \subset [0;1]$, tehát $\varphi :\ [0;1] \to [0;1]$.

2. Belátjuk, hogy a $\varphi(x) = \cos(x)$ függvény kontrakció $[0;1]$-en. Tetszőleges $x, y \in [0;1]$-re a Lagrange-középértéktételt alkalmazva $\exists\, \xi \in (0;1)$, melyre

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|\,,$$

ahol a kontrakciós együttható
$q := \max_{\xi \in [0;1]} |-\sin(\xi)| = \sin(1) \approx 0.8415 < 1.$

3. A Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek, így annak állításai felhasználhatóak, ezzel a fixpont létezését, egyértelműségét és a konvergenciát beláttuk.

4. Hibabecslése:

$$|x_k - x^*| \leq 0.8415^k \cdot \underbrace{|x_0 - x^*|}_{<1} \leq 0.8415^k.$$

5. A megadott pontosság eléréséhez szükséges lépésszám:

$$0.8415^k < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{-1}{\lg(0.8415)} \approx 13.34.$$

Nagyon lassú ...

Definíció: konvergencia rend

Az (x_k) konvergens sorozat – határértékét jelölje x^* – *p-edrendben konvergens*, ha $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

Megjegyzés:

- p egyértelmű, $p \geq 1$,
- p nem feltétlenül egész (A szelőmódszernél $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)
- $p = 1$: elsőrendű vagy lineáris konvergencia (ekkor $c \leq 1$)
  $p = 2$: másodrendű vagy kvadratikus konvergencia
- $p > 1$: szuperlineáris konvergencia

Megjegyzés folyt.:

- Gyakorlatban a legalább p-edrendű konvergencia megfogalmazása:

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^p$$

- A fixponttételek nem mondanak konvergencia rendet. (Csak annyit, hogy legalább elsőrendű.)
- Ha $c = 0$, akkor a keresett konvergencia rend nagyobb a megadottnál.
- Ha $c = \infty$, akkor a keresett konvergencia rend kisebb a megadottnál.

Példa

Mennyi a konvergenciarendje a következő nullsorozatoknak?

$$\left(\frac{1}{n^2}\right); \qquad \left(\frac{1}{2^n}\right); \qquad (q^n) \ \ (|q| < 1); \qquad \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right);$$

Vizsgáljuk az egyik sorozatot, a többit gyakorlaton..

Tekintsük az $(x_k) = \left(\frac{1}{2^k}\right)$, $(k \in \mathbb{N})$ sorozatot.

1. Tippeljük $p = 2$-re a konvergencia rendet:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{k+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^k} - 0\right|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k}}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} 2^{k-1} = \infty.$$

   Látjuk, hogy a határérték ∞, vagyis kisebb p-vel kell próbálkoznunk.

2. Tippeljük $p = 1$-re a konvergencia rendet.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{k+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^k} - 0\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   Látjuk, hogy a határértek rendben van, a konvergencia elsőrendű.

Konvergencia rend

Mit jelent az első- és másodrendű konvergencia számokban? ($\sqrt{2}$)

1. $p = 1$, $|x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^1$

$$\underline{1.414}184570312500$$
$$\underline{1.4142}45605468750$$
$$\underline{1.41421}5087890625$$

   Minden lépésben kb. egy újabb tizedesjegy pontos.

2. $p = 2$, $|x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^2$

$$\underline{1.41}6666666666667$$
$$\underline{1.41421}5686274510$$
$$\underline{1.41421356237}4690$$

   Minden lépésben kb. kétszer annyi tizedesjegy pontos.

Tétel: *p-edrendben konvergens iterációk*

1. Legyen $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^p[a;b]$ és
2. az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozat konvergens, határértéke x^*.
3. Ha $\varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,

akkor a konvergencia p-edrendű és hibabecslése:

$$\left|x_{k+1} - x^*\right| \leq \frac{M_p}{p!} \left|x_k - x^*\right|^p ,$$

ahol $M_p = \max\limits_{\xi \in [a;b]} \left|\varphi^{(p)}(\xi)\right|$.

Biz.: Írjuk fel a φ függvény x^* körüli Taylor-polinomját a maradéktaggal.

$$\exists\, \xi \in (x, x^*) \;\; (\text{vagy} \;\; (x^*, x)) :$$

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x - x^*) + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x - x^*)^{p-1} + \\ + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - x^*)^p$$

Vizsgáljuk ezt az $x = x_k$ helyen, kihasználva a deriváltak zérus voltát is. ($\exists \xi_k$):

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

Biz. folyt.: átrendezve

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p.$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\varphi^{(p)}(\xi_k)\right|}{p!} = \frac{\left|\varphi^{(p)}(x^*)\right|}{p!} \neq 0.$$

Tehát (x_k) egy p-adrendben konvergens sorozat.

Vegyük szemügyre a $k+1$-edik és a k-adik tag hibáját.

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{\left|\varphi^{(p)}(\xi_k)\right|}{p!} \cdot |x_k - x^*|^p \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p ,$$

ahol $M_p = \max\limits_{\xi\in[a,b]} \left|\varphi^{(p)}(\xi)\right|$. $\square$

Következmény

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$ kontrakció,
2. x^* a φ fixpontja és
3. $\varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,

akkor

1. a fixpont egyértelmű,
2. $\forall x_0 \in [a;b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. és a következő hibabecslés teljesül: $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!}\,|x_k - x^*|^p$.

Biz.: Ez a Banach-féle fixponttétel és a p-edrendben konvergens iterációk tételének összeházasításaként adódik. $\square$

Példa

Írjunk fel fixpont-iteráció(ka)t az $x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet megoldására, bizonyítsuk a konvergenciát.

(a) $x = x^3 - 1$,

(b) $x = \sqrt[3]{x+1}$.

Lásd gyakorlat...
A két sorozat közül az egyik konvergens, a másik divergens.
Melyik-melyik? Milyen intervallumon konvergens? Indokoljuk.

Példák Matlab-ban

1. Intervallumfelezés számolása és szemléltetése.
2. Egyszerű iterációk és fixpontok elemzése az $x = \cos(x)$ egyenlet példáján keresztül.
3. Tapasztalati kontrakciós együtthatók szemléltetése.
4. $\sqrt{2}$ közelítése különböző iterációkkal ($p = 1, 2, 3$ rendűek).
5. A logisztikus leképezés viselkedésének bemutatása érdekességképpen.

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

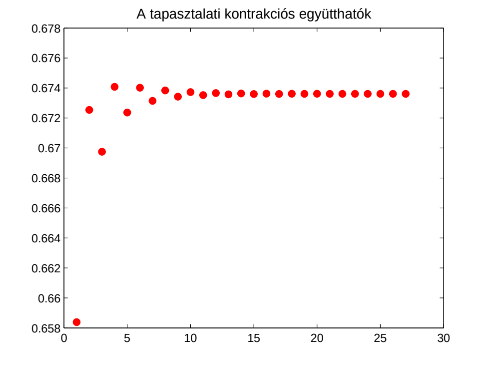
1. Példa:

$$x_{k+1} := \cos(x_k),\ x_0 \in [0,1]$$

$q \approx 0.6736$

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

1. Példa:



Az egymást követő tapasztalati kontrakciós együtthatók mértani közepét rajzoltuk ki. $q \approx 0.6736$

2. Példa:

Matlab segítségével vizsgáljuk a következő sorozatokat:

1. A $\sqrt{2}$ lánctörtkifejtéséből: $(p = 1)$

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_k}.$$

2. Az $f(x) = x^2 - 2$ függvényre alkalmaztuk a Newton-módszert, analízisből ismerős lehet... $(p = 2)$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right).$$

3. Másodfokú Taylor-polinom közelítéssel: $(p = 3)$

$$x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2 + 6}{3x_k^2 + 2}.$$

Logisztikus leképezés

Az ökológusok gyakran vizsgálnak olyan - időszakosan szaporodó - populációkat (pl. gyümölcsöskerti kártevők), amelyekben nincs átfedés az egyes generációk között. A kutatások célja ilyenkor annak megértése, hogy az $n+1$-edik generáció számossága (N_{n+1}) hogyan függ az előző, n-edik generáció számosságától (N_n). Az ismert tendenciát figyelembe véve, nevezetesen, hogy az utódok száma (N_{n+1}) általában nő, ha a populáció számossága kicsi, és csökken, ha N_n értéke nagy, egy egyszerű nemlineáris differenciaegyenletet írhatunk fel:

$$N_{n+1} = kN_n - bN_n^2 = N_n(k - bN_n),$$

amelyet logisztikus differenciaegyenletnek neveznek, és amelyben k és b a populációk növekedésének, illetve csökkenésének mértékét megszabó paraméterek.

Logisztikus leképezés

$$N_{n+1} = kN_n \left(1 - \frac{bN_n}{k}\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{bN_{n+1}}{k} = k\frac{bN_n}{k}\left(1 - \frac{bN_n}{k}\right)$$

Az $x_n = bN_n/k$ jelölést bevezetve az egyenlet a következő egyszerű alakra hozható:

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n),$$

amit logisztikus leképezésnek nevezünk.

A logisztikus leképezés egyik nagy előnye az, hogy $1 < k < 4$ esetén a megoldás mindig a $0 < x < 1$ intervallumban marad. A $k < 1$ esetben az összes megoldás az $x = 0$ ponthoz tart, azaz a populáció kihal.

k értéke és a megfigyelt dinamikai viselkedés:

- 3.0000 : a fixpont instabilissá válik, megjelenik az oszcilláció
- 3.4500 : a perióduskettőződés kezdete
- 3.5700 : a $2n$ periódusú oszcillációk torlódási pontja, a kaotikus tartomány kezdete
- 3.6786 : az első páratlan periódusú oszcilláció megjelenése
- 3.8284 : a háromperiódusú oszcilláció megjelenése
- 4.0000 : a kaotikus tartomány vége.

Irodalom: Gáspár Vilmos: Játsszunk káoszt! (Természet Világa cikk)

Példa

Vizsgáljuk meg az $x_0 \in [0, 1]$, $x_{k+1} = \alpha \cdot x_k(1 - x_k)$ iterációk (logisztikus leképezés) viselkedését különböző $\alpha \in [0, 4]$ paraméterek esetén.

Megj.: Általában nem kontrakció. Könnyen eljuthatunk differenciaegyenletek bifurkációinak és a káoszelmélet alapjainak vizsgálatához. . .