Obliczenia naukowe

Lista 2

Szymon Janiak

November 6, 2023

Zadanie 1

Opis problemu

Obliczenie iloczynu skalarnego róznymi funkcjami dwóch wektorów i porównanie wyników przy lekkiej zmianie danych wejściowych

Rozwiązanie

1. "w przód" t.j. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
2. "w tył" t.j. $\sum_{i=n}^{1} x_i y_i$
3. "liczby dodatnie od najwiekszego do najmniejszego a ujemne na odwrót"
4. "liczby ujemne od najwiekszego do najmniejszego a dodatnie na odwrót"

Wyniki

	Float64 stare dane	Float64 nowe dane	Prawidłowy wynik
"1"	1.0251881368296672e-10	-0.004296342739891585	-1.00657107000000e-11
"2"	-1.5643308870494366e-10	-0.004296342998713953	-1.00657107000000e-11
"3"	0.0	-0.004296342842280865	-0.004296342842280865
"4"	0.0	-0.004296342842280865	-0.004296342842280865

Wnioski

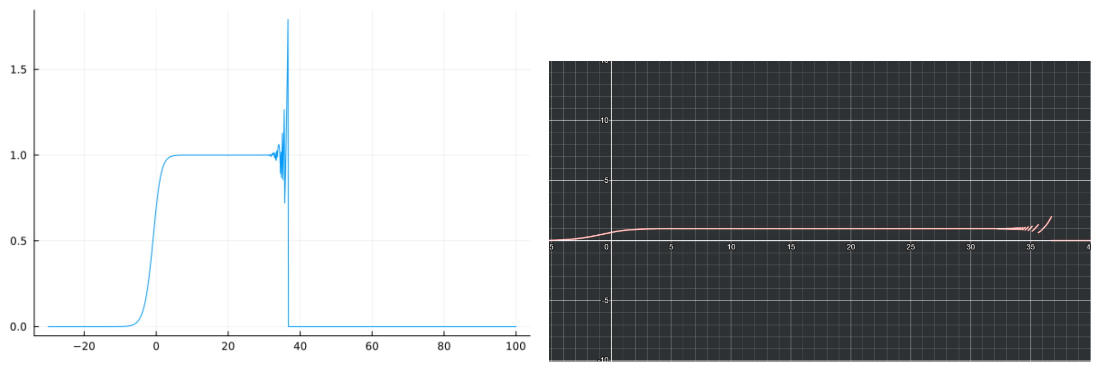
Przy usunięciu ostatniej 9 z x_4 oraz ostatniej 7 z x_5 dostajemy różne wyniki dla podwójnej precyzji. Po tak lekkiej zmianie danych możemy zauważyć, że wyniki dla wszystkich funkcji są znacznie bardziej przybliżone, prawie identyczne. Dla Float32 nie ma żadnej różnicy, gdyż jest to za mała precyzja. Według definicji jest to źle uwarunkowane zadanie.

Zadanie 2

Opis problemu

Narysować wykres funkcji $f(x) = e^x ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch dowolnych programach do wizualizacji.
Porównać wykres funkcji z policzoną granicą dla funkcji $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Wyniki



(a) Biblioteka Plots w języku Julia

(b) Desmos

Poniżej policzona granica:

$$\lim_{x\to\infty} e^x ln(1+e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})*(-e^{-e})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$$

Wnioski

Widzimy na wykresach, że w okolicach $x = 30$ pojawiają się problemy z obliczaniem wartości naszej funkcji.
Mimo, że funkcja dąży do 1 nasze programy mają wyraźny problem z obliczaniem wartości składających się na wynik naszej funkcji. Jest to prawdopodobnie spowodowane brakiem wystarczającej precyzji kiedy wartości e^{-x} robią się coraz mniejsze.

Zadanie 3

Opis problemu

Rozważmy zadanie rozwiązywania układu równań liniowych

$$Ax = b$$

dla danej macierzy współczynników $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i wektora prawych stron $b \in \mathbb{R}^n$

Wyniki

n	rank	cond	odwrotna	gauss
1	1	1.0	0.0	0.0
3	3	524.0567775860627	9.825526038180824e-15	8.351061872731819e-15
5	5	476607.2502419338	8.128168770215688e-12	1.256825919192874e-12
7	7	4.753673568766496e8	4.3299229851434615e-9	6.520804933066021e-9
9	9	4.9315332284138226e11	1.4626798972086921e-5	1.3216991540025553e-5
11	10	5.224780779168285e14	0.010645959401385671	0.01004906783345069
13	11	4.4936679531246986e18	82.66675811171989	70.1556197115221
15	12	3.3660126672602944e17	715.740988667373	692.4295360390742
17	12	6.26204622473199e17	17.157982115668773	18.67581817300634
19	13	3.462302955915255e18	16.84769281513296	15.073941146224387
21	13	1.1932537352623989e19	2333.664337044678	1824.2629581352649
23	13	1.2225550561673262e18	47.65132347528787	48.016565072622186
25	13	3.831285828118405e20	52.47720466798266	24.17187724650818
27	14	8.174081570715539e18	132.55118714543525	55.63396491601018
29	14	3.802856907227447e20	18.082557101050654	25.888760818983354

Wyniki dla macierzy Hilberta

n	rank	cond	odwrotna	gauss
5	5	1.0000000000000007	1.4043333874306804e-16	1.85775845048325e-16
5	5	10.000000000000002	2.0471501066083611e-16	1.719950113979703e-16
5	5	999.9999999999818	3.727189175310957e-14	3.770981636172923e-14
5	5	1.0000000004525637e7	9.850842115240043e-11	1.2882333343613825e-10
5	5	1.0000800330968911e12	1.9973430651815224e-5	1.7562984167111192e-5
5	4	8.826715821066153e15	0.026083060333373865	0.04168369996461502
10	10	1.0000000000000016	2.1355566272775288e-16	2.6506211417561425e-16
10	10	10.0	2.9996574304705467e-16	2.1925147983971603e-16
10	10	999.9999999999974	2.54306514045846e-14	2.3210725195019588e-14
10	10	9.999999993688306e6	2.0614295394758574e-10	2.6921505988726474e-10
10	10	1.0000779893498125e12	2.1604172649799173e-5	2.3309127440445607e-5
10	9	8.26371308188777e15	0.05207598489435024	0.04340810877472368
20	20	1.0000000000000009	4.1836409184574146e-16	5.85372920201624e-16
20	20	10.000000000000009	5.336004900468223e-16	5.153874832879506e-16
20	20	999.9999999999743	5.444577179721357e-14	5.3415984214944754e-14
20	20	1.0000000003501127e7	3.3063603819760504e-11	1.2531568083980406e-11
20	20	9.999177938109891e11	4.710803617564571e-6	3.5356514545986903e-6
20	19	1.0095702285935152e16	0.21424321252672052	0.2140080771811224

Wyniki dla macierzy losowej

Wnioski

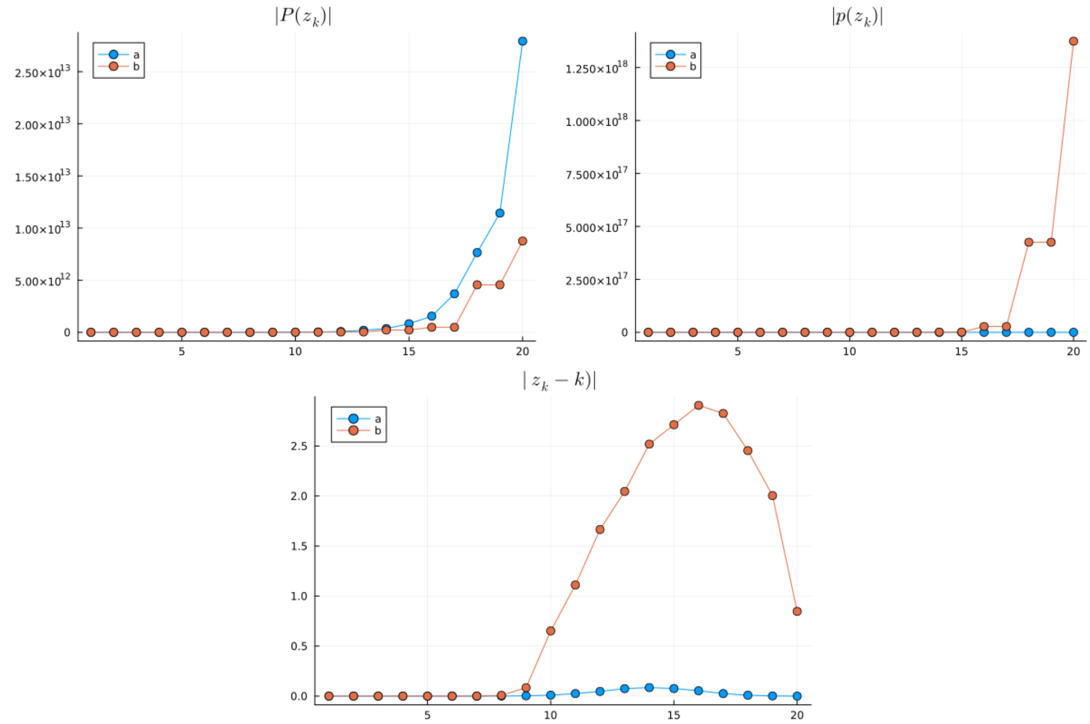
Uwarunkowanie macierzy *cond* ma spory wpływ na skale otrzymywanych pomyłek.

Zadanie 4

Opis problemu

Użyć funkcji *roots* (z pakietu Polynomials) do obliczenia 20 zer wielominau P w postaci naturalnej. P jest postacią naturalną wielomianu Wilkinsona p
$p(x) = (x-20)(x-19)(x-18)(x-17)(x-16)(x-15)$
$(x-14)(x-13)(x-12)(x-11)(x-10)(x-9)$
$(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$

Wyniki



Wnioski

Po wykresach widać, że obliczone przez nas miejsca zerowe nie pokrywają się z rzeczywistością. Wynika to z ograniczeń arytmetyki w Float64, która ma od 15 do 17 cyfr znaczących w systemie dziesiętnym.
Po modyfikacji jednego współczynnika rozbieżności mogą być jeszcze większe.

Zadanie 5

Opis problemu

Rozważmy równanie rekurencyjne

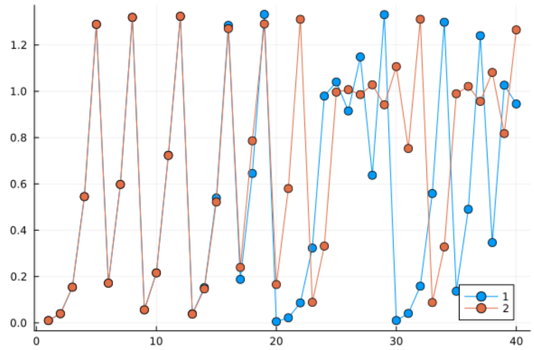
$$p_{n+1} := p_n^2 + rp_n(1-p_n) \text{ dla } n = 0, 1 \ldots,$$

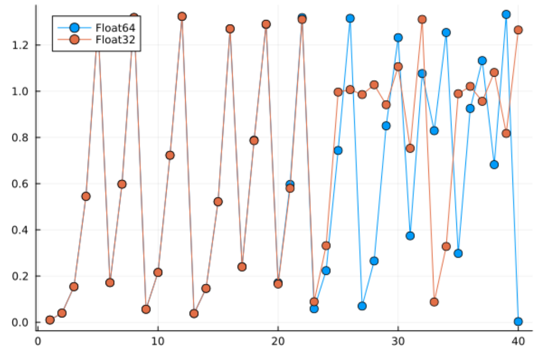
gdzie r jest pewną daną stałą, $r(1-p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a p_0 jest wielkością populacji stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.
Przeprowadzić następujące eksperymenty:

1. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia (1), a następnie wykonać ponownie 40 iteracji wyrażenia (1) z niewielką modyfikacją tj. wykonać 10 iteracji, zatrzymać, zastosować obcięcie wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku (daje to liczbę 0.722) i kontynuować dalej obliczenia (do 40-stej iteracji) tak, jak gdyby był to ostatni wynik na wyjściu. Porównać otrzymane wyniki.

2. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia (1) w arytmetyce Float32 i Float64. Porównać otrzymane wyniki.

Wyniki





Wnioski

W pierwszym eksperymencie możemy zauważyć, że obcięcie wyniku do 3 miejsc po przecinku powoduje po chwili znaczne rozjechanie się wyników.
W drugim eksperymencie zjawisko jest podobne, większa precyzja pozwala na dokładniejsze wyniki, co również powoduje znaczne rozjechanie się wyników.
Pokazuje to jak bardzo wyniki naszych obliczeń mogą się różnić w zależności od odpowiednio dobranej precyzji.

Zadanie 6

Opis problemu

Dla równania rekurencyjnego

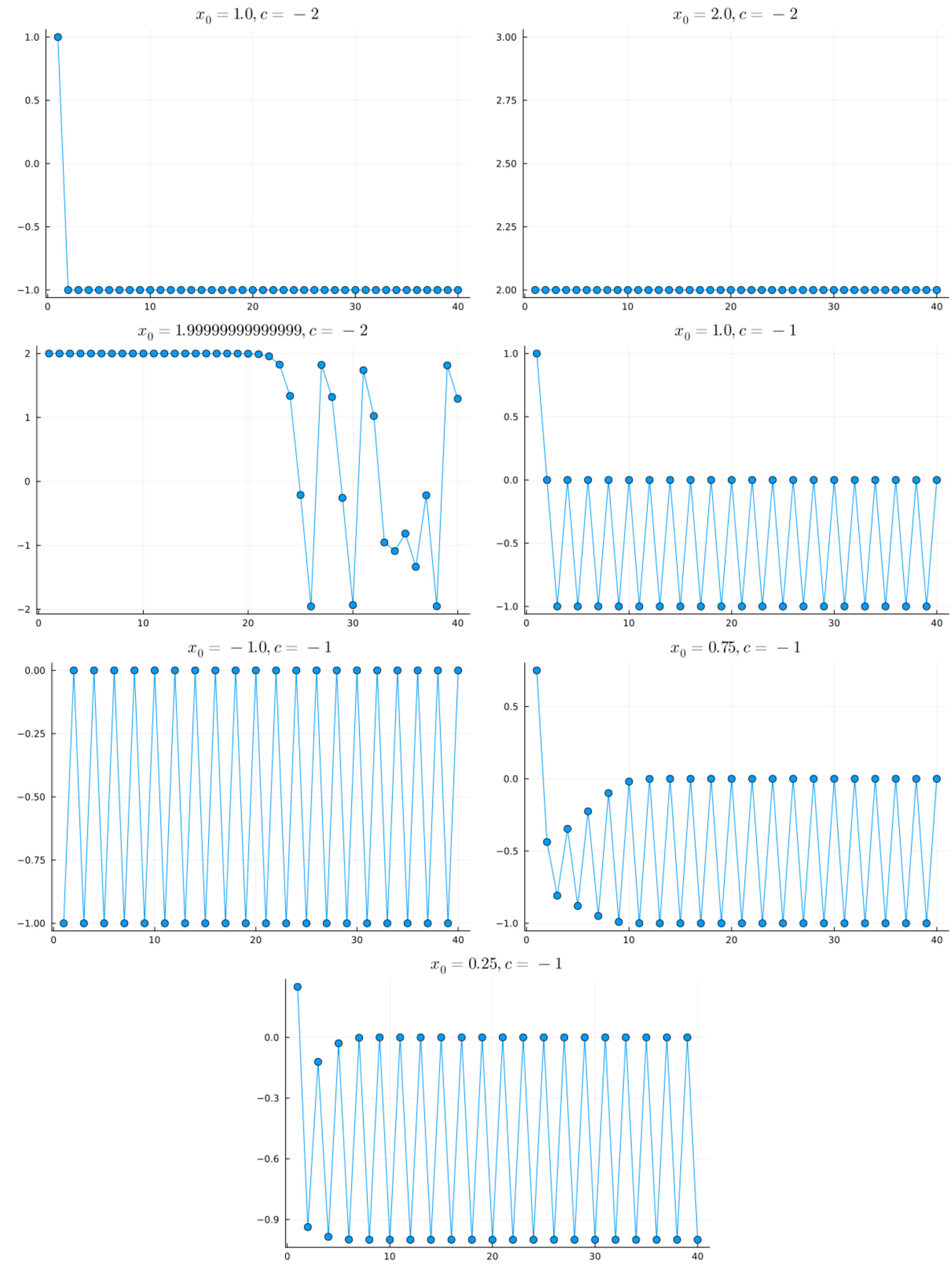
$$x_{n+1} := x_n^2 + c \text{ dla } n = 0, 1...,$$

Przeprowadzić następujące eksperymenty. Dla danych:

1. $c = -2$ i $x_0 = 1$
2. $c = -2$ i $x_0 = 2$
3. $c = -2$ i $x_0 = 1.99999999999999$
4. $c = -1$ i $x_0 = 1$
5. $c = -1$ i $x_0 = -1$
6. $c = -1$ i $x_0 = 0.75$
7. $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

wykonać w arytmetyce Float64, 40 iteracji podanego wyrażenia i przeprowadzić iteracje graficzną.

Wyniki



Wnioski

Możemy zauważyć, że najciekawszym wykresem jest ten dla $x_0 = 1.999...$, wynika to z kumulujących się błędów obliczania precyzji.