第 1 次习题课题目解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. n 维欧氏空间

(1) **基本概念:** δ-邻域, 去心 δ-邻域, 内点, 外点, 边界点, **极限点**, 开集, 闭集, 内部, 外部, 边界, 闭包.

(2) **开集与闭集的性质:**

(a) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ 既为开集, 也为闭集.

(b) 任意开球均为开集, 任意闭球均为闭集.

(c) $\mathbb{R}^n$ 中的集合为开集当且仅当它为开球的并.

(d) 任意多个开集的并是开集, 任意多个闭集的交是闭集.

(e) 有限多个开集的交为开集, 有限多个闭集的并为闭集.

(3) **折线连通:** 连通集, 非连通集, 开区域, 闭区域.

(4) n **维欧氏空间** $\mathbb{R}^n$ **中的点列极限:**

(a) $\mathbb{R}^n$ 中点列收敛当且仅当其坐标分量组成的数列均收敛.

(b) $\mathbb{R}^n$ 中点列为 Cauchy 列当且仅当其坐标分量组成的数列为 Cauchy 列.

(c) $\mathbb{R}^n$ 完备, 也即 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列收敛.

(d) $\mathbb{R}^n$ 中的子集为闭集当且仅当该集中的任意收敛点列的极限属于该集合.

(e) **闭集套定理:** $\mathbb{R}^n$ 中的直径趋于零的递降的闭集列的交集为单点集.

(f) **列紧性定理:** $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子列.

2. 多元函数的极限

(1) **多元向量值函数的定义与性质:**

(a) **多元向量值函数的运算:** 线性组合; 向量值函数与数量值函数之间的乘、除; 向量值函数的复合运算.

(b) **多元向量值函数的表示:** 在 $\mathbb{R}^m$ 中取值的 n 元向量值函数等同于 m 个 n 元数量值函数.

(2) **多元函数的极限及其性质:**

(a) **函数极限的定义:** 称 X 在 Ω 内趋于 X_0 时向量值函数 $\mathbf{f}(X)$ 以 A 为极限, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 当 $0 < \|X - X_0\|_n < \delta$ 时, 我们有

$$\|\mathbf{f}(X) - A\|_m < \varepsilon.$$

(b) 多元向量值函数极限存在当且仅当它的每个坐标分量函数的极限存在.

(c) 多元向量值函数极限若存在, 则唯一.

(d) 多元数量值函数极限满足保序性、保号性、夹逼原理、四则运算.

(e) 多元向量值函数满足复合极限法则、Cauchy 准则.

(f) 点列极限与多元向量值函数极限之间的关系.

(g) **多元函数极限的计算方法:** 通过复合函数极限法则 (变量替换)、四则运算法则、夹逼原理等方法转化为单变量的情形.

(h) **二重极限与累次极限:** 若二重极限与某个累次极限同时收敛, 则二者必相等; 若两个累次极限均收敛但不相等, 则二重极限发散.

3. 多元连续函数的性质

(1) **多元连续函数:**

(a) 多元连续函数的定义, 连续函数空间: $\mathscr{C}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 和 $\mathscr{C}(\Omega)$.

(b) 多元数量值连续函数经过四则运算后仍为连续函数.

(c) 多元向量值连续函数经过加、减、数乘与复合运算后仍连续.

(d) 多变元的初等函数在 **其定义区域内** 连续.

(2) **多元连续函数的整体性质:**

(a) **最值定理:** 定义在有界闭集上的数量值连续函数有最大值和最小值.

(b) **弧连通集:** 任意两点可用连续曲线连接的集合.

(c) **连通性定理:** 定义在弧连通集上的向量值连续函数的像集为弧连通集.

(d) **介值定理:** 定义在弧连通集上的数量值连续函数满足介值性质.

4. 多元数量值函数的微分与偏导数

(1) **多元数量值函数的微分:**

(a) 函数在一点的微分为函数在该点处的最佳线性逼近, 因此是一个线性函数.

(b) 可微蕴含连续, 但反之不对.

(c) 微分若存在, 则唯一.

(d) 线性函数在每点的微分均等于其本身.

(e) 记号 $\mathrm{d}x_j$ 的定义以及线性函数的微分表示.

(f) 多元数量值函数求微分的四则运算法则.

(2) **多元数量值函数的偏导数:**

(a) 偏导数的定义及其几何意义.

(b) 若 f 在点 X_0 处可微, 则它在该点可导且 $\mathrm{d}f(X_0)=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j$.

(c) 计算二元函数的微分的典型方法.

(d) **连续、可导、可微与连续可导的关系:** 连续可导蕴含可微, 可微蕴含可导, 但反过来不对; 连续与可导之间一般没有蕴含关系.

(e) 连续可导函数空间微 $\mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$; 初等函数在 **其定义区域的内部** 连续可导.

5. 多元数量值函数的方向导数与梯度

(1) **多元数量值函数的方向导数:**

(a) **方向导数的定义:** 方向导数为单侧极限, 所取的方向为单位向量. 因此沿着坐标轴的方向导数存在并不意味着偏导数存在.

(b) 若沿某坐标轴的偏导数存在, 则沿该轴正、反两方向的方向导数存在且互负.

(c) 函数在一点处沿任意方向均有方向导数, 并不意味着函数在该点可微.

(d) 若 f 在点 X_0 处可微, 则沿 $\vec{\ell}=(\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n)^T$ 的方向导数存在且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\cos\alpha_j.$$

(2) **多元数量值函数的梯度:**

(a) **梯度的定义:** 称向量 $\vec{e}$ 为多元数量值函数 f 在点 X_0 处的梯度, 如果 f 在点 X_0 处沿 $\vec{e}$ 的方向导数的值最大, 并且该值等于 $\|\vec{e}\|$, 此时将 $\vec{e}$ 记作 $\mathrm{grad} f(X_0)$ 或 $\vec{\nabla} f(X_0)$, 也将之记作 $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(X_0)$.

(b) 若多元数量值函数 f 在点 X_0 处可微, 则 f 在该点的梯度为

$$\mathrm{grad} f(X_0)=\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\Big)^T,$$

沿向量 $\vec{\ell}$ 的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(X_0)=\mathrm{grad} f(X_0)\cdot\vec{\ell}^0$.

(c) 梯度运算满足与单变量函数求导类似的四则运算及复合法则.

(d) **典型问题:** 求函数在一点的梯度与最大方向导数以及沿某向量的方向导数.

第 2 部分 题目解答

1. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 定义 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. 求证:

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=0,$$

而二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

证明: $\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 由题设知 $\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$, 进而可得 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$, 再由对称性可知 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$. 又注意到

$$\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2}=1,\quad \lim_{x\to0}f(x,0)=0,$$

则由复合函数极限法则可知二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

2. 讨论下列函数极限. 若函数存在, 求其值:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$,

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\log(x^2+y^2)$,

(3) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ x^2+y\neq0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$,

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$,

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty,x\neq y}}\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$,

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$,

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}$, 其中 $\alpha,\beta\geqslant0$ 且 $\alpha+\beta>2$,

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x}, & 若\ x\neq0,\\ y, & 若\ x=0.\end{cases}$

解: (1) 由复合极限法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}&\xlongequal{u=x+y-1}\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{u+2}{u}}\\ &= e^{\lim\limits_{u\to0}(1+\frac{2}{u})\log(1+u)}=e^{\lim\limits_{u\to0}(1+\frac{2}{u})\cdot u}=e^2.\end{aligned}$$

(2) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们有

$$\begin{aligned}|(x+y)\log(x^2+y^2)| &\leqslant (|x|+|y|)\cdot|\log(x^2+y^2))|\\ &\leqslant \sqrt{2(x^2+y^2)}\cdot|\log(x^2+y^2))|.\end{aligned}$$

而由复合函数极限法则可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{2(x^2+y^2)}\log(x^2+y^2)\xlongequal{\rho=\sqrt{x^2+y^2}}\lim_{\rho\to0}\sqrt{2}\rho\log\rho^2=0,$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\log(x^2+y^2)=0$.

(3) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+(x^4-x^2)^3}{x^2+(x^4-x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^3(x^2-1)^3}{x}=\infty$, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+(x^2)^3}{x^2+x^2}=0$, 于是由复合函数极限法则可知所求极限不存在.

(4) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们均有 $0<\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{4}(x^2+y^2)$, 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2}=0$, 进而可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{\frac{1}{2}(xy)^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(xy)^2}{x^2+y^2}=0.$$

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-x}{x^2-2x(-x)+(-x)^2}=0$, 而

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{x+(x+\sqrt{|x|})}{x^2-2x(x+\sqrt{|x|})+(-x+\sqrt{|x|})^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{|x|}}{(x-(x+\sqrt{|x|}))^2}\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{|x|}}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2x}{|x|}+\frac{1}{\sqrt{|x|}}\Big)=\infty,\end{aligned}$$

于是由函数极限的唯一性可知所求极限发散.

(6) $\forall n\geqslant 1$, 令 $y_n=-2x_n=-2n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty}e^{x_n^2-y_n^2}\sin(2x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}e^{-3n^2}\sin(8n^2)=0,$$

又 $\forall n\geqslant 1$, 令 $\tilde{y}_n=-\tilde{x}_n=-\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{4}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{y}_n=-\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty}e^{\tilde{x}_n^2-\tilde{y}_n^2}\sin(2\tilde{x}_n\tilde{y}_n)=-\lim_{n\to\infty}\sin\big(2n\pi+\frac{\pi}{2}\big)=-1,$$

于是由复合函数极限法则可知所求函数极限不存在.

(7) 由于 $\alpha,\beta>0$, 则 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们均有

$$|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2},\quad |y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2},$$

于是 $0\leqslant\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}\leqslant(\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha+\beta-2}$. 又 $\alpha+\beta>2$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha+\beta-2}\xlongequal{\rho=\sqrt{x^2+y^2}}\lim_{\rho\to 0^+}\rho^{\alpha+\beta-2}=0,$$

从而由夹逼原理可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}=0$.

(8) $\forall x\in\mathbb{R}$, 令 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 1, & 若\ x=0.\end{cases}$ 则 $\varphi\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 且 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 均有 $f(x,y)=y\varphi(xy)$. 于是由复合函数极限法则可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\varphi(xy)=0.$$

3. 判断下列函数在原点 $(0,0)$ 处的连续性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 若\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & 若\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & 若\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

解: (1) $\forall(x,y)\neq(0,0)$, 由 Cauchy 不等式可知

$$\begin{aligned}|\sin(x^3+y^3)| &\leqslant |x^3+y^3|\leqslant|x|^3+|y|^3\\ &\leqslant (x^2+y^2)(|x|+|y|)\leqslant\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

于是 $0\leqslant\frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}$, 进而由夹闭原理可知 f 在原点处连续.

(2) **方法 1.** 由函数极限的定义可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1\neq0=f(0,0)$, 因此函数 f 在原点间断.

方法 2. 因 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\frac{1}{k},\frac{1}{k})=1\neq0=f(0,0)$, 由复合函数极限法则知 f 在原点间断.

(3) $\forall(x,y)\neq(0,0)$, 由算术-几何平均不等式可知,

$$0<\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

于是由夹闭原理可知 f 在原点处连续.

(4) 因 $\lim\limits_{y\to0}f(y^2,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$, 由复合函数极限法则知 f 在原点间断.

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & 若\ x\neq0,\\ y, & 若\ x=0.\end{cases}$ 讨论 f 在其定义域内的连续性.

解: 令 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: xy>-1\}$, 则 D 为非空开集, 且由 f 的表达式可知 D 为 f 定义域. $\forall x>-1$, 令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}, & 若\ x\neq0,\\ 1, & 若\ x=0.\end{cases}$$

则 $\varphi\in\mathscr{C}(-1,+\infty)$ 且 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $f(x,y)=y\varphi(xy)$. 故 $f\in\mathscr{C}(D)$.

5. 若 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$ 且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$, 求证: f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值点.

证明: 由函数极限的定义知 $\exists R > 0$ 使得 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 当 $\sqrt{x^2+y^2} > R$ 时, 均有 $f(x,y) > f(0,0)$. 定义 $B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$, 则 B 为有界闭集. 又 f 连续, 由最值定理知 f 在 B 上有最小值 m, 相应最小值点记作 (x_0, y_0). $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 若 $(x,y) \in B$, 由 m 的定义可知 $f(x,y) \geqslant m$. 若 $(x,y) \notin B$, 则

$$f(x,y) > f(0,0) \geqslant m.$$

故 m 为 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值. 因此所证结论成立.

6. 假设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为连续函数且满足下列性质:

(1) $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 均有 $f(X) > 0$,

(2) $\exists k > 0$ 使得 $\forall c > 0$ 以及 $\forall X \in \mathbb{R}^n$, 均有 $f(cX) = c^k f(X)$,

求证: 存在 $a, b > 0$ 使得 $\forall X \in \mathbb{R}^n$, 均有 $a\|X\|^k \leqslant f(X) \leqslant b\|X\|^k$.

证明: 令 $S = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| = 1\}$, 则 S 为有界闭集. 又函数 f 连续, 因此在 S 上有最小值和最大值, 记作 a, b. 由题设 (1) 可知 $b \geqslant a > 0$.

$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 由题设 (2) 可得

$$\begin{aligned} f(X) &= \|X\|^k f\Big(\frac{X}{\|X\|}\Big) \geqslant a\|X\|^k, \\ f(X) &= \|X\|^k f\Big(\frac{X}{\|X\|}\Big) \leqslant b\|X\|^k, \end{aligned}$$

即 $a\|X\|^k \leqslant f(X) \leqslant b\|X\|^k$. 由连续性知该不等式在 $X = \mathbf{0}$ 也成立. 得证.

7. 设 $q \in (0,1)$ 而向量值函数 $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得 $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$\|\vec{f}(X) - \vec{f}(Y)\| \leqslant q\|X - Y\|.$$

求证: $\exists! A \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\vec{f}(A) = A$.

证明: **唯一性.** 设 $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}^n$ 使 $\vec{f}(A_1) = A_1$, $\vec{f}(A_2) = A_2$, 则我们有

$$\|A_1 - A_2\| = \|\vec{f}(A_1) - \vec{f}(A_2)\| \leqslant q\|A_1 - A_2\|.$$

但 $0 < q < 1$, 由此立刻可得 $A_1 = A_2$.

存在性. 任取 $X_1 \in \mathbb{R}^n$. $\forall k \geqslant 1$, 递归定义 $X_{k+1} = \vec{f}(X_k)$. 则 $\forall k \geqslant 2$,

$$\|X_{k+1} - X_k\| = \|\vec{f}(X_k) - \vec{f}(X_{k-1})\| \leqslant q\|X_k - X_{k-1}\|,$$

于是 $\forall k \geqslant 1$, 均有 $\|X_{k+1} - X_k\| \leqslant q^{k-1}\|X_2 - X_1\|$, 进而知 $\{X_k\}$ 为 Cauchy 序列, 从而收敛. 设其极限记 A. 则 $\forall k \geqslant 1$, 我们有

$$\|X_{k+1} - \vec{f}(A)\| = \|\vec{f}(X_k) - \vec{f}(A)\| \leqslant q\|X_k - A\|.$$

由夹逼原理知 $\vec{f}(A)$ 为 $\{X_{k+1}\}$ 的极限, 从而也为 $\{X_k\}$ 的极限, 故 $\vec{f}(A) = A$.

8. 选择题:

(1) 能推出函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微且全微分 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0$ 的条件是 (　):

A. $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$;

B. 函数 f 在 点(x_0,y_0) 处的增量 $\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$;

C. 函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的增量 $\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\sin((\Delta x)^2+\Delta y^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$;

D. 函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的增量 $\Delta f(x_0,y_0)=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

(2) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 令 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 则函数 f 在点 $(0,0)$ 处 (　):

A. 连续但偏导数不存在;

B. 偏导数存在, 但函数 f 不可微;

C. 可微;

D. 连续可导.

(3) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微, 则下列命题中一定不成立的是 (　):

A. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续;

B. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任何方向 $\vec{v}$ 的方向导数不存在;

C. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在且连续;

D. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在且至少有一个不连续.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续可导且在点 $(1,-2)$ 处的两个偏导数分别为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=-1,$$

则函数 f 在点 $(1,-2)$ 处增加最快的方向是 (　):

A. $\vec{i}$;　B. $\vec{j}$;　C. $\vec{i}+\vec{j}$;　D. $\vec{i}-\vec{j}$.

(5) 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可导, 则 (　):

A. 函数 f 在点 P_0 处连续;

B. 一元函数 $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在点 x_0 和 y_0 处连续;

C. 函数 f 在点 P_0 处的微分为 $\mathrm{d}f(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\mathrm{d}y$;

D. 函数 f 在点 P_0 处的梯度为 $\mathrm{grad}f(P_0)=(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0),\frac{\partial f}{\partial y}(P_0))^T$.

解: (1) 可导并不蕴含着可微. 故不能选 A. 又 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0$ 当且仅当

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta f(x_0,y_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

故只能选 D.

(2) 由偏导数的定义得 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. 若 f 在点 $(0,0)$ 处可微, 由微分的定义可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 于是由复合函数的极限法则可得

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x\cdot x|}}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故 f 在点 $(0,0)$ 可导但不可微. 因此仅 B 成立.

(3) 由于连续可导蕴含着可微, 故选 C.

(4) 函数 f 在点 $(1,-2)$ 处增加最快的方向就是梯度方向, 而由题设可知

$$\mathrm{grad}f(1,-2)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\vec{i}-\vec{j}.$$

因此只能选 D.

(5) 由可导性与连续性, 可微性以及梯度的关系知, A, C, D 不一定成立, 而由偏导数的定义以及单变量函数的可导性蕴含连续性可知 B 成立.

9. 设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$, 其中 φ 在点 $(0,0)$ 处连续, 则

$$\mathrm{d}f(x,y)=\big(\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x'(x,y)\big)\,\mathrm{d}x+\big(\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y'(x,y)\big)\,\mathrm{d}y.$$

令 $x=0$, $y=0$, 那么 $\mathrm{d}f(0,0)=\varphi(0,0)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$.

(1) 指出上述推理当中的错误, (2) 写出正确的解法.

解: (1) 题目当中并没有假设函数 φ 可微.

(2) 由题设可知, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\varphi(x,y)=\varphi(0,0)+o(1)$, 于是

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&=(x+y)\varphi(x,y)\\&=\varphi(0,0)x+\varphi(0,0)y+(x+y)o(1)\\&=\varphi(0,0)x+\varphi(0,0)y+\sqrt{x^2+y^2}o(1).\end{aligned}$$

由此可知 f 在点 $(0,0)$ 处可微且 $\mathrm{d}f(0,0)=\varphi(0,0)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$.

10. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 而 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$. 如果

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(x_0,y_0)=-2,\ \frac{\partial f}{\partial\vec{u}}(x_0,y_0)=1,$$

求函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的微分, 其中 $\vec{i},\vec{j}$ 分别表示沿 x,y 轴的单位向量.

解: 由题设, 我们立刻可知

$$
\begin{aligned}
-2 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &= \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \\
1 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) &= \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),
\end{aligned}
$$

由此可得 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \sqrt{5} - 2\sqrt{2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \sqrt{5} - 4\sqrt{2}$. 于是

$$
\mathrm{d} f(x_0, y_0) = (\sqrt{5} - 4\sqrt{2})\, \mathrm{d}x + (\sqrt{5} - 2\sqrt{2})\, \mathrm{d}y.
$$

11. 设 $z = \arcsin \frac{x}{y}$, 求 $\mathrm{d}z$.

解: 由题设知 z 为初等函数, 故在定义区域的内部可微. 又

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{y})^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{y})^2}} \cdot \Big(-\frac{x}{y^2} \Big) = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.
\end{aligned}
$$

故 $\mathrm{d}z = \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{y^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x - \frac{x \operatorname{sgn} y}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\, \mathrm{d}y$.

12. 设 $z = (x + 2y)^{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 由题设可知

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy \log(x+2y)}) = (x + 2y)^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\big(xy \log(x + 2y)\big) \\
&= (x + 2y)^{xy} \Big(y \log(x + 2y) + \frac{xy}{x + 2y} \Big), \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{xy \log(x+2y)} = (x + 2y)^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\big(xy \log(x + 2y)\big) \\
&= (x + 2y)^{xy} \Big(x \log(x + 2y) + \frac{2xy}{x + 2y} \Big).
\end{aligned}
$$