第 9 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 不定积分的概念

(1) **定义:** 将定义在区间上的函数 f 的原函数的一般表达式称为 f 的不定积分, 记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. 这是一个以 x 为自变量的函数.

(2) **不定积分与定积分的关系:** 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C$, 这里 $C \in \mathbb{R}$ 为任意的常数.

(3) **不定积分与导数、微分的关系:** 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, 则

$$F'(x) = f(x), \quad \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x) = f(x), \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为任意的常数.

2. 不定积分的计算

(1) **基本的不定积分公式:** 这里 $C \in \mathbb{R}$ 为任意的常数,

(a) $\int \mathrm{d}x = x + C$;

(b) $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + C$;

(c) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1)$, $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$;

(d) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$, $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$;

(e) $\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$;

(f) $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$;

(g) $\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

(h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

(i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$;

(j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$;

(k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$;

(l) $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \log|\sec x + \tan x| + C$;

(m) $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \log|\csc x - \cot x| + C$.

(n) $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\Big) + C$.

(0) $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\Big) + C$.

(2) **计算不定积分的基本方法:**

(a) **线性性:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) 分段计算.

(c) 降低三角函数的幂次.

(d) **变量替换:**

1) **第一换元积分法 (凑微分):** 若 $F'(y)=f(y)$, 则

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=\int f(u(x))\mathrm{d}u(x)=F(u(x))+C.$$

2) **第二换元积分法:** 若 $f(x(t))x'(t)=F'(t)$, 则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=x(t)} \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t=F(t)+C \xlongequal{t=t(x)} F(t(x))+C.$$

3) **三角变换:** 下面假设 $a>0$.

(α) 若不定积分中出现 $\sqrt{a^2-x^2}$, 作变换 $x=a\sin t$ ($|t|\leqslant \frac{\pi}{2}$).

(β) 若不定积分中出现 $\sqrt{x^2+a^2}$, 作变换 $x=a\tan t$ ($|t|<\frac{\pi}{2}$).

(γ) 若不定积分中出现 $\sqrt{x^2-a^2}$, 分情况讨论:

当 $x>a$ 时, 作变换 $x=a\sec t$ ($0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$);

当 $x<-a$ 时, 作变换 $x=-a\sec t$ ($0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$).

(e) **分部积分及其应用:** $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$.

1) $\int P(x)(\ln x)^m\,\mathrm{d}x$, 2) $\int P(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$,

3) $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$,

其中 $P(x)$ 为多项式, $m\geqslant 1$ 为整数, 而 $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(f) **有理函数的不定积分:**

1) **多项式的因式分解:** 设 $Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 为实系数 n 次多项式, 其中 $a_n\neq 0$. 由代数基本定理可得如下素因子分解:

$$Q(x)=a_n\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_j)^{l_j}\cdot\prod_{k=1}^{t}(x^2+p_kx+q_k)^{m_k},$$

这里 $\alpha_j\in\mathbb{R}$ 互异, (p_k,q_k) 互异, $p_k^2-4q_k<0$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{s}l_j+2\sum\limits_{k=1}^{t}m_k=n$.

2) **有理分式的标准分解:** 有理分式 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 总可以表示成:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\sum_{j=1}^{s}\sum_{u=1}^{l_j}\frac{a_{j,u}}{(x-\alpha_j)^u}+\sum_{k=1}^{t}\sum_{v=1}^{m_k}\frac{b_{k,v}x+c_{k,v}}{(x^2+p_kx+q_k)^v},$$

其中 $T(x)$ 为多项式, $a_{j,u},b_{k,v},c_{k,v}\in\mathbb{R}$ 为常数.

3) **求标准分解的方法:** 待定系数, 带入特殊值.

4) **有理分式的不定积分的分类:** 这里 $a>0$, 而 $m\geqslant 2$ 为整数,

(α) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha}=\log|x-\alpha|+C$,

(β) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m}=-\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}}+C$,

(γ) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\log(x^2+a^2)+C$,

(δ) $I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$,

$I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+C$,

$I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}=\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C$,

(ϵ) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} + C$,

(ε) $I_{m+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}I_m$.

(g) **三角有理函数的不定积分:**

设 $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, 其中 P, Q 是以 u, v 为变量的多项式.

1) **一般方法:** 利用万能公式可得

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2) **被积函数为 $\sin x$ 的奇函数 (将 $\sin x$ 变换成 $-\sin x$ 后会出现一个负号):**

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\cos x} -\int R(1-t^2, t)\,\mathrm{d}t.$$

3) **被积函数为关于 $\cos x$ 的奇函数:**

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sin x} \int R(t, 1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

4) **将 $\sin x, \cos x$ 变换成 $-\sin x, -\cos x$ 后不变:**

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\tan x} \int R(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2})\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(h) **两类无理函数的不定积分:** 考虑不定积分 $\int R(x, y(x))\,\mathrm{d}x$, 其中 $R(x,y)$ 是关于变量 x, y 的有理函数, 而 $y = y(x)$ 为下述无理函数.

1) 若 $y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 且 $n \geqslant 1$ 为整数, $ad - bc \neq 0$, 则

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2) 若 $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, 且 $a \neq 0$: 将 ax^2+bx+c 配方, 再作三角变换.

3. 定积分的计算

(1) **利用计算不定积分的方法:** 分段, 线性性, 降低三角函数的幂, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分 (有理函数标准分解), 三角有理函数 (转化为有理函数) 的定积分, 两特殊无理函数的定积分.

(2) **定积分的换元公式:** 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 连续可导, 则

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

注: 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 而 $\varphi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 连续可导且严格单调, 上述公式依然成立.

(3) **分部积分公式:** 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 则 $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$.

(4) **对称性:** 设 $a > 0$, 而 $f \in \mathscr{R}[-a,a]$.

(a) 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) **周期性:** 若 $f \in (\mathbb{R})$ 以 $T > 0$ 为周期, 则 $\forall a \in \mathbb{R}$, 均有 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

(6) **定积分与数列极限:** 设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, 而 $\{P_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一列分割使 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(P_n)=0$. 记 $P_n=(x_i^{(n)})_{0\leqslant i\leqslant k_n}$. 则对任意的点 $\xi_i^{(n)}\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$ $(1\leqslant i\leqslant k_n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i^{(n)})=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\xi_i^{(n)}\in[a+\frac{b-a}{n}(i-1),a+\frac{b-a}{n}i]$.

(7) **Jensen 不等式:** 设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, $m,M\in\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in[a,b]$, 均有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 若 $\varphi\in\mathscr{C}[m,M]$ 为凸函数, 则

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

注: 若 φ 为凹函数, 上述不等式依然成立, 只是此时应该将“$\leqslant$”改为“$\geqslant$”.

(8) **带积分余项的 Taylor 公式:** 设 $n\geqslant 1$ 为整数. 若 $f\in\mathscr{C}^{(n+1)}[a,b]$, 而 $x_0\in[a,b]$, 则 $\forall x\in[a,b]$, 我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

通常称 $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$ 为积分余项. 令 $u=x_0+t(x-x_0)$, 则

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+t(x-x_0))\,\mathrm{d}t.$$

(a) **Cauchy 余项:** $\exists\theta\in(0,1)$ 使 $R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$.
(b) **Lagrange 余项:** $\exists\theta\in[0,1]$ 使得 $R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$.