微积分 A (1)

姚家燕

第 26 讲

第 6 章 广义 Riemann 积分

§1. 广义 Riemann 积分的概念

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, +\infty]$, $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall A \in (a, \omega)$, 函数 f 在 $[a, A]$ 上均为可积. 定义 f 在 $[a, \omega)$ 上的广义积分为

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若上述极限收敛, 称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 否则称之发散. 广义积分也称为反常积分.

评注

- 通常 $\omega = +\infty$, 或者 $\omega \in \mathbb{R}$ 但函数 f 在 ω 的邻域内无界, 此时称 ω 为 f 的奇点, 相应的广义积分被称为无穷限积分或瑕积分.
- $\forall c \in [a, \omega)$, 我们有

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性仅与函数 f 在 ω 的邻域内的性质有关.

- 如果 $\omega \in \mathbb{R}$ 且 $f \in \mathscr{R}[a, \omega]$, 则 f 在 $[a, \omega]$ 的任意闭子区间上均可积, 并且

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时正常的定积分与广义积分一致.

- 如果 $b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 使得 $\omega < b$, 而且 $f : (\omega, b] \to \mathbb{R}$ 在 $(\omega, b]$ 的任意的闭子区间上可积, 则我们可以类似地定义广义积分

$$\int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B \to \omega^+} \int_B^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 假设 ω_1, ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ 为 f 的奇点, 而函数 f 在 (ω_1, ω_2) 的任意的闭子区间上可积. 固定 $a \in (\omega_1, \omega_2)$, 并定义

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega_1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  可证明该定义不依赖点 a 的选择.

- 如果 $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, 而 $\omega \in (a, b)$ 使得 f 在 $[a, b] \setminus \{\omega\}$ 的任意闭子区间上可积, 定义:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\omega}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 更一般地, 如果 f 有多个奇点, 此时可将整个区间分割成若干个小区间使得 f 在每一个小区间上只有一个奇点且该点为小区间的端点, 随后在每个小区间上定义广义积分, 随后再将如此定义的广义积分之和定义为 f 在原来那个区间上的广义积分. 有鉴于此, 再通过坐标变换, 我们总可以将问题归结为研究形如 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 这样的广义积分.

广义积分的性质

由广义积分的定义可知, 广义积分自然继承了正常的定积分的性质, 比如说线性性, 保序性, Newton-Leibniz 公式, 分部积分, 换元法等等.

- Newton-Leibniz 公式:

  若 $f \in \mathscr{C}[a,\omega)$ 在 $[a,\omega)$ 上有原函数 F, 则

  $$\int_a^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x = F\Big|_a^{\omega} = F(\omega - 0) - F(a).$$

- 分部积分公式: 若假设下述极限均存在, 则

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\omega} u(x)\,\mathrm{d}v(x) &= \lim_{A\to\omega^-}\int_a^{A} u(x)\,\mathrm{d}v(x) \\
&= \lim_{A\to\omega^-}\left(uv\Big|_a^A - \int_a^A v(x)\,\mathrm{d}u(x)\right) \\
&= uv\Big|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} v(x)\,\mathrm{d}u(x).
\end{aligned}
$$

例 1. 设 $p \in \mathbb{R}$. 若 $p \neq 1$, 则我们有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{若 } p > 1, \\ +\infty, & \text{若 } p < 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\Big|_0^{1} = \begin{cases} +\infty, & \text{若 } p > 1, \\ \frac{1}{1-p}, & \text{若 } p < 1. \end{cases}$$

若 $p = 1$, 则我们有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\Big|_0^{1} = +\infty.$$

例 2. 计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{1-x}}{=\!=} \int_1^0 \frac{1}{(3-t^2)t}\,\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$= \int_0^1 \frac{2t}{(3-t^2)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{3}-t}+\frac{1}{\sqrt{3}+t}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{|\sqrt{3}+t|}{|\sqrt{3}-t|}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

例 3. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解:
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} \log x\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\\ &= -\frac{\log x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty} \mathrm{d}\Big(-\frac{1}{x}\Big) = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

作业题: 第 6.1 节第 193 页第 2 题第 (2), (4), (5) 小题, 第 3 题第 (2), (3), (5) 小题.

§2. 广义积分收敛性的判定

定理 1. (Cauchy 准则) 假设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, +\infty]$, $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall A \in (a, \omega)$, f 在 $[a, A]$ 上可积. 那么 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 为收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c \in (a, \omega)$ 使得 $\forall A_1, A_2 \in (c, \omega)$, 均有

$$\Big|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| < \varepsilon.$$

证明: $\forall A \in [a, \omega)$, 定义 $F(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 则 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{A \to \omega^-} F(A)$ 存在并且有限, 再由函数极限Cauchy准则可得所要结论.

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 使得 $\omega > a$, 而 $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 为函数. 若存在 $C > 0$ 以及 $c \in [a, \omega)$ 使得 $\forall x \in [c, \omega)$, 我们均有

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|,$$

则我们将之记作

$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to \omega^-).$$

定理 2. (比较法则)

设 $f, g : [a, \omega) \to [0, +\infty)$ 在 $[a, \omega)$ 的任意闭子区间上可积且 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to \omega^-)$.

(1) 如果广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 如果广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

证明: (1) 由题设知, 存在 $C > 0$ 以及 $c \in [a, \omega)$ 使得 $\forall x \in [c, \omega)$, 我们均有 $0 \leqslant f(x) \leqslant Cg(x)$. $\forall A \in [c, \omega)$, 我们定义

$$F(A) = \int_c^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则 F 单调递增且 $\forall A \in [c, \omega)$, 我们有

$$F(A) \leqslant C \int_c^A g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C \int_c^{\omega} g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

由单调有界定理知极限 $\lim_{A\to\omega^-} F(A)$ 存在, 于是 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{A\to\omega^-} F(A)$ 收敛.

(2) 用反证法, 假设广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 矛盾! 由此得证.

推论 1. 若函数 $f : [a,\omega) \to [0,+\infty)$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上可积, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散当且仅当 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$.

推论 2. 假设 $f, g : [a, \omega) \to [0, +\infty)$ 在 $[a, \omega)$ 的任意闭子区间上可积且 $\lim\limits_{x \to \omega^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in [0, +\infty]$.

(1) 如果 $\alpha \in (0, +\infty)$, 则广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 和广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

(2) 如果 $\alpha = 0$ 并且广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 如果 $\alpha = +\infty$ 且广义积分 $\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论 3. 设 $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ 在 $[1,+\infty)$ 的任意闭子区间上可积并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=\alpha\in[0,+\infty].$$

(1) 如果 $p>1$ 并且 $0\leqslant\alpha<+\infty$, 则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 如果 $p\leqslant 1$ 并且 $0<\alpha\leqslant+\infty$, 则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明: (1) 由题设可知 $f(x) = O(\frac{1}{x^p})\ (x \to +\infty)$, 而当 $p > 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由题设可知 $\frac{1}{x^p} = O(f(x))\ (x \to +\infty)$, 并且当 $p \leqslant 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 为发散, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论 4. 设 $f:(0,b]\to[0,+\infty)$ 在 $(0,b]$ 的任意闭子区间上可积并且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to 0^+}x^p f(x)=\alpha.$$

(1) 如果 $p<1$ 并且 $0\leqslant\alpha<+\infty$, 则广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 如果 $p\geqslant 1$ 并且 $0<\alpha\leqslant+\infty$, 则广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明: (1) 由题设可知 $f(x)=O\left(\frac{1}{x^p}\right)\ (x\to 0^+)$, 而当 $p<1$ 时, 广义积分 $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 为收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由题设可导出 $\frac{1}{x^p}=O(f(x))\ (x\to 0^+)$, 并且当 $p\geqslant 1$ 时, 广义积分 $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散, 从而由比较法则可知广义积分 $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例 1. 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x+1}} \arctan \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$\frac{4x}{\sqrt{x+1}} \arctan \frac{1}{x} \sim \frac{4x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} \sim \frac{4}{\sqrt{x}},$$

又广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 发散, 因此广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x+1}} \arctan \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

也为发散.

例 2. 判断 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x$ 的敛散性. 如果收敛, 则计算其值.

解: 当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \log\sin x &= \log x + \log\frac{\sin x}{x} \\ &= \left(1 + \frac{\log\frac{\sin x}{x}}{\log x}\right)\log x \\ &= \big(1 + o(1)\big)\log x, \end{aligned}$$

由此立刻可得 $-\log\sin x \sim -\log x \ (x \to 0^+)$.

大家可注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\log x \right) \mathrm{d}x &= x(1-\log x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1-\log\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

故广义积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\log\sin x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而广义积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x$ 也收敛. 下面来计算其值.

利用变量替换, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x \overset{x=2t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2t)\,\mathrm{d}(2t)\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\log 2 + \log\sin t + \log\cos t\big)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\,\mathrm{d}t,\\
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\,\mathrm{d}t \overset{t=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\Big(\frac{\pi}{2}-u\Big)\,\mathrm{d}\Big(\frac{\pi}{2}-u\Big)\\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin u\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

于是我们就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,\mathrm{d}t,$$

由此可得 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\log 2.$

例 3. 判断 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{x} &= \left(1 + \frac{\log \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\log \frac{1}{x}}\right) \log \frac{1}{x} \\ &= \big(1 + o(1)\big) \log \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

于是我们有 $-\log \sin \frac{1}{x} \sim \log x \ (x \to +\infty)$.

当 $x > e$ 时, 我们有 $\log x > 1$, 从而广义积分

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log x \,\mathrm{d}x$$

发散, 进而可知广义积分

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \Big(-\log \sin \frac{1}{x}\Big) \,\mathrm{d}x$$

发散, 故广义积分 $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log \sin \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ 也发散.

例 4. 判断 $\int_1^{+\infty} \log(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 由变量替换可得

$$\int_1^{+\infty} \log(\sin\tfrac{1}{x} + \cos\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_0^1 \tfrac{1}{y^2}\log(\sin y + \cos y)\,\mathrm{d}y,$$

另外, 由 L'Hospital 法则可知, 我们也有

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{y^2}\log(\sin y + \cos y)}{\frac{1}{y}} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y}\log(\sin y + \cos y) \\ &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - \sin y}{\sin y + \cos y} = 1, \end{aligned}$$

而 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}$ 发散, 故 $\int_1^{+\infty} \log(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 3. 设函数 $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上均为可积. 如果 $\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

证明: $\forall A\in[a,\omega)$, 我们定义

$$F(A)=\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x,\ \ G(A)=\int_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

由题设可知 $\lim\limits_{A\to\omega^-} G(A)$ 收敛, 则由 Cauchy 判断准则知, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists c \in [a,\omega)$ 使 $\forall A_1, A_2 \in [c,\omega)$, 均有 $|G(A_1) - G(A_2)| < \varepsilon$. 由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
|F(A_1) - F(A_2)| &= \left|\int_{A_2}^{A_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_{A_2}^{A_1} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| = |G(A_1) - G(A_2)| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是由 Cauchy 判断准则可知 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定义 2. 设函数 $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,\omega)$ 的任意闭子区间上均可积.

(1) 如果广义积分 $\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(2) 如果广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛但不为绝对收敛, 则称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

注: 如果广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 为绝对收敛, 则由定理 3 可知 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但反过来不对.

定理 4. **(积分第二中值定理)** 如果 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 g 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 我们只考虑 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $g \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 这一特殊情形. $\forall t \in [a,b]$, 定义

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 且 $F' = f$.

于是由分部积分公式可得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

又 g 单调, 故 g' 不变号, 从而由积分第一中值定理可知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= F(b)g(b) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)),\end{aligned}$$

因此所证结论成立.

定理 5. 设 $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 在 $[a, \omega)$ 的任意的闭子区间上均可积.

(1) (Abel 判别准则) 如果 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并且函数 g 单调有界, 则 $\int_a^\omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) (Dirichlet 判别准则) $\forall A \in [a, \omega)$, 定义

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 F 有界, 而函数 g 单调并且 $\lim\limits_{x\to\omega^-} g(x) = 0$, 则广义积分 $\int_a^\omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明: (1) 由于函数 g 有界, 因此 $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in[a,\omega)$, 均有 $|g(x)|<M$. 又 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由 Cauchy 判别准则知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists c\in[a,\omega)$ 使得 $\forall A_1,A_2\in[c,\omega)$, 均有 $|\int_{A_1}^{A_2}f(x)\,\mathrm{d}x|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 又由积分第二中值定理可知存在 ξ 介于 A_1,A_2 使得

$$\int_{A_1}^{A_2}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(A_1)\int_{A_1}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+g(A_2)\int_{\xi}^{A_2}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

由此我们立刻可得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant |g(A_1)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |g(A_2)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

(2) 由题设可知, $\exists K > 0$ 使得 $\forall x \in [a, \omega)$, 均有 $|F(x)| < K$. 又 $\lim_{x \to \omega^-} g(x) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c \in [a, \omega)$ 使得 $\forall x \in [c, \omega)$, $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}$. $\forall A_1, A_2 \in [c, \omega)$, 由积分第二中值定理可知, 存在 ξ 介于 A_1, A_2 之间使得我们有

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) \, \mathrm{d}x + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

由此立刻可得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant |g(A_1)|\cdot|F(\xi)-F(A_1)| + |g(A_2)|\cdot|F(A_1)-F(\xi)|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K) + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K) = \varepsilon.$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

例 5. 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性与绝对收敛性.

解: $\forall x \geqslant 1$, 令 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. $\forall A \geqslant 1$,

$$\left| \int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x \right| = |\cos 1 - \cos A| \leqslant 2,$$

而 g 单调下降且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 则由 Dirichlet 判断准则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 下面我们将证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

事实上, $\forall x \geqslant 1$, 我们有

$$\frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

借助 Dirichlet 判别准则同样可以证明广义积分

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但是 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而

由比较法则可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 也发散.

因此广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 为条件收敛.

作业题: 第 6.2 节第 205 页第 4 题第 (1), (4), (5), (11) 小题, 第 5 题第 (2), (4), (9) ($p > \frac{1}{2}$), (11) 小题, 第 206 页第 9 题第 (1), (3), (4) 小题.

补充题: 设 $p > 0$. 问广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \, \mathrm{d}x$$

何时绝对收敛? 何时条件收敛?

注: 当 $p \leqslant 0$ 时, 可证明上述广义积分发散.

Euler 积分 (Γ 函数)

考虑广义积分 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $s\in\mathbb{R}$, 我们称 $\Gamma(s)$ 为 Euler Gamma 函数.

定理 6. Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 收敛当且仅当 $s>0$.

证明: 由广义积分的定义可知

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

而 $\lim_{x\to+\infty} x^{2+s-1}e^{-x}=0$, 并且广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛, 因此广义积分 $\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 于是只需要研究广义积分 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

当 $x\to 0^+$ 时, 我们有 $x^{s-1}e^{-x}\sim x^{s-1}$, 而广义积分 $\int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $1-s<1$, 也即 $s>0$. 于是 $\Gamma(s)$ 收敛当且仅当 $s>0$.

命题 1. $\forall s > 1$, 均有 $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$.

证明: 利用分部积分, 我们有

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{d}(-e^{-x}) \\
&= -x^{s-1}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + (s-1)\int_0^{+\infty} x^{s-2}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= (s-1)\Gamma(s-1).
\end{aligned}$$

推论. 对任意整数 $n \geqslant 0$, 均有 $\Gamma(n+1) = n!$.

命题 2. **(余元公式)** $\forall s \in (0,1)$, 均有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}.$$

特别地, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^x} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

例 6. 考虑广义积分

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$ (黎曼 zeta 函数).

注意到

$$\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\sim x^{s-1}e^{-x}\ (x\to+\infty),$$
$$\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\sim x^{s-2}\ (x\to 0^+)$$

于是广义积分 $\zeta(s)$ 收敛当且仅当 $s>1$.

可以证明, 当 $s>1$ 时, 我们有

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}.$$

不严格的证明: $\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-x})^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{n}\right)^{s-1}e^{-y}\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Euler 积分 (B 函数)

$\forall p, q \in \mathbb{R}$, 考虑广义积分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1} \ (x \to 0^+),$$
$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1} \ (x \to 1^-),$$

于是广义积分 $B(p,q)$ 收敛当且仅当 $p, q > 0$.

命题 3. $\forall p, q > 0$, 我们有

(1) $B(p,q) = B(q,p)$,

(2) $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,

(3) $B(p+1,q) = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}B(p,q)$.

作业题: 利用 Euler 积分计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-4x}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{3}}}}$,

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, 其中 $n > 1$ 为整数.

第 6 章总复习

- 各种形式的广义积分的定义, 奇点.
- 广义积分的性质: 与定积分的完全类似.
- 敛散性: Cauchy 准则, 比较法则 (绝对收敛), Abel-Dirichlet 准则 (变号积分, 条件收敛).
- 重要的比较函数: $\frac{1}{x^p}$, $\log x$.
- 绝对收敛与条件收敛: 二者关系.
- Γ 函数与 Beta 函数: 递推, 余元, 二者关系.

综合练习

例 1. 设 $n \geqslant 0$ 为整数. $\forall t > 0$, 计算

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n} \,\mathrm{d}x.$$

解: 由变量替换可得

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n} \,\mathrm{d}x \overset{u=tx^2}{=\!=} \int_0^{+\infty} e^{-u} \Big(\frac{u}{t}\Big)^n \mathrm{d}\Big(\sqrt{\frac{u}{t}}\Big)$$

$$= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}-n} \int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}-n} \Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big)$$

$$= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}-n} \cdot \Big(n - 1 + \frac{1}{2}\Big) \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} t^{\frac{1}{2}+n}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

例 2. 判断广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\log \sin x = \left(1 + \frac{\log \frac{\sin x}{x}}{\log x}\right) \log x \sim \log x,$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}{x^{-\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{6}} \log x = 0$, 于是 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\left|\frac{\log \sin x}{\sqrt{x}}\right|}{x^{-\frac{2}{3}}} = 0$,

而广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则由比较法则可知广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 定义 $F(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

(1) 求证: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 广义积分 $F(x)$ 收敛.

(2) 求证: $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 0$.

(3) 若令 $F(0) = 0$, 求 $F'(0)$.

解: 方法 1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 我们有

$$F(x) = -\int_0^x t^2 \cos \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{t}\Big) = -\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\Big(\sin \frac{1}{t}\Big)$$

$$= -t^2 \sin \frac{1}{t}\Big|_0^x + \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -x^2 \sin \frac{1}{x} + \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

由此立刻可知广义积分 $F(x)$ 收敛且

$$\begin{aligned}|F(x)| &\leqslant x^2+\left|\int_0^x 2t\left|\sin\frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x^2+\left|\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t\right| = 2x^2.\end{aligned}$$

由夹逼原理立刻可得 $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=0$, 以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=0.$$

若令 $F(0)=0$, 则 $F'(0)=0$.

方法 2. (1) 被积函数为偶函数, 则 $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, 均有 $F(-x) = -F(x)$, 故我们只需考虑 $x > 0$ 的情形. 此时我们有

$$F(x) = \int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \overset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^{\frac{1}{x}} \cos u\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{u}\Big) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

由于 $\frac{|\cos u|}{u^2} \leqslant \frac{1}{u^2}$, 而广义积分 $\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分 $F(x)$ 收敛.

(2) 由 (1) 可知, $\forall x > 0$, 我们有

$$|F(x)| \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{|\cos u|}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = x.$$

由于 F 为奇函数, 则 $\forall x < 0$, 我们也有

$$|F(x)| = |-F(-x)| \leqslant -x = |x|.$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$.

(3) 由 (1) 可知, $\forall x > 0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\sin u)}{u^2} \\
&= \left.\frac{\sin u}{u^2}\right|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2\sin u}{u^3}\,\mathrm{d}u \\
&= -x^2 \sin\frac{1}{x} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2\sin u}{u^3}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

由此立刻可得

$$|F(x)| \leqslant x^2 + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = x^2 + \Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} = 2x^2.$$

由于 F 为奇函数, 则 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 均有

$$|F(x)| \leqslant 2x^2.$$

于是若令 $F(0) = 0$, 则由夹逼原理可知

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

例 4. 假设 $\alpha > 0$. 判断 $\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解: 由广义积分的性质可知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\alpha y^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由此立刻可得知 $\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x$ 不为绝对收敛, 它为条件收敛当且仅当 $1-\frac{1}{\alpha} > 0$, 也即 $\alpha > 1$.

例 5. 求证: 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 广义积分

$$\int_0^{+\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1+x^p} \right) \mathrm{d}x$$

收敛.

证明: 由广义积分的定义可知

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1+x^p} \right) \mathrm{d}x \\
= &\int_0^{1} \left(\log\left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1+x^p} \right) \mathrm{d}x \\
&+ \int_1^{+\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{x^p}\right) - \frac{1}{1+x^p} \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\log\big(1+\frac{1}{x^p}\big) - \frac{1}{1+x^p} \Big)\,\mathrm{d}x \\
=\ &\int_0^1 \log(1+x^p)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \log x^p\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p},
\end{aligned}
$$

其中仅第二个积分为广义积分. 但

$$
\int_0^1 \log x^p\,\mathrm{d}x = \int_0^1 p\log x\,\mathrm{d}x = px(\log x - 1)\Big|_0^1 = -p
$$

收敛. 故 $\int_0^1 \Big(\log\big(1+\frac{1}{x^p}\big) - \frac{1}{1+x^p} \Big)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

另外, 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$\log\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{2x^{2p}}+o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big)-\frac{1}{x^p}\frac{1}{1+\frac{1}{x^p}}$$

$$=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{2x^{2p}}+o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big)-\frac{1}{x^p}\Big(1-\frac{1}{x^p}+o\Big(\frac{1}{x^p}\Big)\Big)$$

$$=\frac{1}{2x^{2p}}+o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big)=\frac{1}{2x^{2p}}\big(1+o(1)\big).$$

由于 $p>\frac{1}{2}$, 于是广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^{2p}}$ 收敛, 从而广义积分 $\int_1^{+\infty}\Big(\log\big(1+\frac{1}{x^p}\big)-\frac{1}{1+x^p}\Big)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 因此所证结论成立.

例 6. 已知 $0 < a < b$ 且 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 由分部积分可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2})\,\mathrm{d}(-\frac{1}{x})$$

$$= -\frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{-2a^2xe^{-a^2x^2} + 2xb^2e^{-b^2x^2}}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -2a\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2}\,\mathrm{d}(ax) + 2b\int_0^{+\infty} e^{-(bx)^2}\,\mathrm{d}(bx)$$

$$= -2a \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2b \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}(b-a).$$

例 7. 求证: $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^2 \frac{\cos ax}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$

证明: $\forall a > 1$, 由变量替换可得

$$\int_1^2 \frac{\cos ax}{x}\,\mathrm{d}x \overset{y=ax}{=\!=} \int_a^{2a} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y.$$

$\forall y > 1$, 定义 $g(y) = \frac{1}{y}$, 则 g 单调递减且

$$\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0.$$

又 $\forall A \geqslant 1$, 我们有

$$\left|\int_1^A \cos y\,\mathrm{d}y\right| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2,$$

则由 Dirichlet 判别准则可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y$ 收敛,

进而由 Cauchy 准则可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ 使得

$\forall A_1, A_2 > M$, 我们均有 $\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon$, 于是

$\forall a > M$, 我们有 $\left| \int_a^{2a} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon$, 由此可得

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^2 \frac{\cos ax}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

例 8. 判断 $\int_1^{+\infty}(\sin x)(\sin\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: $\forall x \geqslant 1$, 定义 $g(x)=\sin\frac{1}{x}$, 则 g 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. 又 $\forall A \geqslant 1$, 我们有

$$\left|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| = |\cos 1-\cos A| \leqslant 2,$$

则由 Dirichlet 准则可知 $\int_1^{+\infty}(\sin x)(\sin\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $x\to+\infty$ 时, $|(\sin x)(\sin\frac{1}{x})| \sim \frac{|\sin x|}{x}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较法则知 $\int_1^{+\infty}(\sin x)(\sin\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

例 9. 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 由于 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$, 而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^{1} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y + \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y,$$

且 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ 为条件收敛, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 为条件收敛.

例 10. 设 $\alpha > 0$. 计算 $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \,\mathrm{d}x$.

解: 由于 $\forall x \geqslant 0$, 我们有

$$|e^{-\alpha x} \sin \beta x| \leqslant e^{-\alpha x}, \quad |e^{-\alpha x} \cos \beta x| \leqslant e^{-\alpha x},$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由比较法则可知广义积分 I, J 均为收敛.

由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_0^{+\infty} \sin\beta x \, \mathrm{d}\Big(\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\Big) \\
&= -\frac{\sin\beta x}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x \, \mathrm{d}x = \frac{\beta}{\alpha} J, \\
J &= \int_0^{+\infty} \cos\beta x \, \mathrm{d}\Big(\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\Big) \\
&= -\frac{\cos\beta x}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} I.
\end{aligned}
$$

由此立刻可得 $I = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $J = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

例 11. 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 的敛散性.

解: 由广义积分的定义可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}.$$

下面针对 m 分情况讨论.

情况 1: $m \leqslant \frac{1}{2}$. 则 $\forall x \geqslant 1$, 均有 $\frac{1}{\sqrt{x}+x^m} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$ 为发散, 于是由比较法则立刻可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 发散, 进而可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 发散.

情况 2: $m > \frac{1}{2}$. 此时我们有

$$\frac{1}{\sqrt{x}+x^m} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\ (x \to 0^+),\quad \frac{1}{\sqrt{x}+x^m} \sim \frac{1}{x^m}\ (x \to +\infty).$$

又 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^m}$ 收敛当且仅当 $m > 1$, 则由比较法则可知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 收敛当且仅当 $m > 1$.

综上可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^m}$ 收敛当且仅当 $m > 1$.

例 12. 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解: $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \overset{x=\tan t}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{(\tan^2 t+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(\sec^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos^2 t}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1.$$

例 13. 计算广义积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3+1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

解: $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3+1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

例 14. 计算广义积分 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x = \int_0^{100\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$= \sqrt{2}\int_0^{100\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 100\sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$

$= 100\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = -100\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}$

$= 200\sqrt{2}.$

例 15. 求实数 p 使广义积分 $\int_0^1 \frac{\ln(\cos x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

解: 当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^p} = \frac{\ln(1+(\cos x - 1))}{x^p} \sim \frac{\cos x - 1}{x^p}$$

$$\sim -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x^p} = -\frac{1}{2x^{p-2}}.$$

而广义积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{p-2}}$ 收敛当且仅当 $p-2<1$,

故广义积分 $\int_0^1 \frac{\ln(\cos x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p<3$.

例 16. 假设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 并且 $\forall x\in[0,+\infty)$, 均有 $f(x)>0$, $f'(x)>0$.

(i) 求证 $\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 若 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}$ 收敛, 求证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ 收敛.

证明: (i) 由于 $\forall x\in[0,+\infty)$, 我们有 $f'(x)>0$, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增, 故 $\frac{1}{f}$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递减且大于 0, 从而由单调有界定理可知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$ 存在且有限, 进而可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{f(x)}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{f(0)}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}.$$

$\forall x \geqslant 0$, 我们均有

$$0 \leqslant \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))} \leqslant \frac{f'(x)}{(f(x))^2},$$

于是由 (i) 以及比较法则可知广义积分

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)}\right) \mathrm{d}x$$

收敛, 进而可知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ 收敛.

谢谢大家!