微积分 A (2)

姚家燕

第 8 讲

重要通知

- 希望大家认真温习第 1 章!
- 希望大家能重温上学期所学的定积分、不定积分以及广义积分!

第 8 讲

例 11. 假设 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$, 其中函数 g 在原点 $(0,0)$ 处连续.

(1) 问 g 满足什么条件时 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 均存在? 此时它们的值是多少?

(2) 在上述条件下, 函数 f 是否在原点处可微? 若不可微, 说明理由. 若可微, 计算 $\mathrm{d}f(0,0)$.

解: (1) 若 $f'_x(0,0)$ 存在, 由 g 在原点的连续性,

$$
\begin{aligned}
g(0,0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|g(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\\
&= f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|g(x,0)}{x}=-g(0,0),
\end{aligned}
$$

于是 $g(0,0)=0$. 反过来, 假设 $g(0,0)=0$, 那么由夹逼原理及 g 在原点的连续性可得

$$
\begin{aligned}
f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{|x|g(x,0)}{x}=0,\\
f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{|y|g(0,y)}{y}=0.
\end{aligned}
$$

故所求条件为 $g(0,0)=0$, 此时我们有

$$
f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0.
$$

(2) 在 (1) 中得到的条件下, 函数 f 在原点处可微且我们有 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

事实上, 由于 g 在原点处连续, $g(0,0)=0$, 且 $|x-y|\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}$, 则 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0) &= |x-y|g(x,y)=|x-y|o(1) \\ &= o(|x-y|)=o(\sqrt{x^2+y^2}), \end{aligned}$$

故由微分的定义可知 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

例 12. 证明函数 $f(x,y)=\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上可以取到最大值和最小值, 并求出它的最大值和最小值以及最大值点和最小值点.

解: 由于 f 为初等函数, 因此连续可导且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(1+x^2+y^2)-2x(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1+y^2-x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(1+x^2+y^2)-2y(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1+x^2-y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

故函数 f 的有两个驻点: $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$, 于是 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上至多只有两个极值点.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 我们有

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \frac{|x+y|}{1+x^2+y^2} \leqslant \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{1+x^2+y^2},$$

那么由夹逼原理可得知 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = 0$,

再注意到 $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

从而由函数极限的保序性可得知, $\exists R > 0$ 使得

当 $x^2 + y^2 > R^2$ 时, 均有$-\frac{1}{\sqrt{2}} < f(x,y) < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

于是由最值定理可知

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \max_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y),$$
$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y),$$

这表明 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最大值与最小值, 但 $\mathbb{R}^2$ 为开集, 故相应的最值点也为 f 的极值点, 又我们已知函数 f 只有两驻点: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, 则它们必为 f 的最大值点与最小值点, 相应的最大值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 最小值为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

例 13. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 而且函数 $u,v:D\to\mathbb{R}$ 在 D 上连续且在 D 的内部为二阶连续可导. 若 $\forall (x,y)\in \mathrm{Int}D$, 均有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=e^{u(x,y)},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)\leqslant e^{v(x,y)},$$

且 $\forall (x,y)\in\partial D$, 成立 $u(x,y)=v(x,y)$. 求证:

$$\forall (x,y)\in D,\text{ 均有 } u(x,y)\leqslant v(x,y).$$

证明: 定义 $f = v - u$. 用反证法, 假设函数 f 在 D 上不为非负, 由题设得 f 在 $\mathrm{Int}D$ 上不为非负. 又 f 连续且 D 为有界闭集, 则 f 在 D 上有最小值. 将相应的最小值点记作 P_0. 由于 f 在 ∂D 上等于零但在 $\mathrm{Int}D$ 上却不为非负, 于是 $P_0 \in \mathrm{Int}D$ 且 $f(P_0) < 0$, 故 P_0 为 f 的极小值点, 由此立刻知海赛矩阵 $H_f(P_0)$ 为半正定.

进而我们就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) &= (1,0)H_f(P_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \geqslant 0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) &= (0,1)H_f(P_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \geqslant 0.\end{aligned}$$

但由题设又可得知

$$0 \leqslant \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \leqslant e^{v(P_0)} - e^{u(P_0)} < 0,$$

矛盾! 故所证结论成立.

例 14. 求 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\frac{(x+ay)\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某个二元函数的全微分, 并求该函数.

解: 由题设我们可假设 $\mathrm{d}f(x,y) = \frac{(x+ay)\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, 由于 $\frac{x+ay}{(x+y)^2}, \frac{y}{(x+y)^2}$ 为初等函数, 因此连续可导, 从而 f 为二阶连续可导, 因而我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x+ay}{(x+y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(x+y)^2},$$

则 $\frac{a(x+y)^2-2(x+ay)(x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, 由此可得 $a=2$,

进而我们就有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x,y) &= \frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}x}{x+y} - y\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+y}\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}x}{x+y} + x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+y}\right)\right) - (x+y)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+y}\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{x}{x+y}\right) + \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y} \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{x}{x+y} + \log|x+y|\right),
\end{aligned}
$$

由此立刻可得知 $f(x,y) = \frac{x}{x+y} + \log|x+y| + C$, 其中 C 为任意的常数.

例 15. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, $f\in\mathscr{C}(D)$ 在 D 的内部可微使得 $\forall(x,y)\in D$, $|f(x,y)|\leqslant 1$. 求证: $\exists(x_0,y_0)\in\mathring{D}$ 使得我们有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 16.$$

证明: $\forall(x,y)\in D$, 令 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$. 则 $g\in\mathscr{C}(D)$ 在 D 的内部可微且 $\forall(x,y)\in\partial D$, $g(x,y)=f(x,y)+2\geqslant 1$. 又 $g(0,0)=f(0,0)\leqslant 1$, 且 $g\in\mathscr{C}(D)$, 于是我们由最值定理立刻可得知,

$\exists(x_0, y_0) \in \mathring{D}$ 使得函数 g 在该点处取到最小值，则该点也为 g 的极小值点，而 g 在该点处可微，于是点 (x_0, y_0) 为 g 的驻点，也即

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 4x_0, \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + 4y_0, \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 = 16(x_0^2 + y_0^2) \leqslant 16.$$

例 16. 设 $f\in\mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ 且 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)>0$, $f''_{xy}(x,y)f(x,y)=f'_x(x,y)f'_y(x,y)$. 求证:

(1) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 均有 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f'_x}{f})(x,y)=0$.

(2) $\exists\varphi,\psi\in\mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 均有

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

证明: (1) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 由题设立刻可得

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{f'_x}{f}\Big)(x,y)=\frac{f''_{yx}(x,y)f(x,y)-f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{(f(x,y))^2}=0.$$

(2) 由 (1) 以及单变量的 Lagrange 中值定理可知, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 我们有 $\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)} = \frac{f'_x(x,0)}{f(x,0)}$, 也即

$$\frac{\partial(\log f)}{\partial x}(x,y) = \frac{f'_x(x,0)}{f(x,0)},$$

从而 $\exists \varphi_1, \psi_1 \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 我们有

$$\log f(x,y) = \varphi_1(x) + \psi_1(y).$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 定义 $\varphi(x) = e^{\varphi_1(x)}$, $\psi(y) = e^{\psi_1(y)}$, 则我们有 $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. 但 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$, 于是我们有 $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^{(2)}(\mathbb{R})$.

例 17. 求 $z=\frac{e^x}{1-y}$ 在原点的二阶 Taylor 多项式.

解: 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
z &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+x^2o(1)\right)\left(1+y+y^2+y^2o(1)\right) \\
&= 1+x+y+\frac{1}{2}x^2+xy+y^2+x^2o(1)+y^2o(1) \\
&= 1+x+y+\frac{1}{2}x^2+xy+y^2+o(x^2+y^2).
\end{aligned}
$$

故所求多项式为 $1+x+y+\frac{1}{2}x^2+xy+y^2$.

例 18. 如果 f 可微, 求证: 曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 上任意点处的切平面过一定点, 并求该定点.

证明: 定义 $F(x, y, z) = f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)$, 则

$$\mathrm{grad}F = \begin{pmatrix} \partial_1 f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)\frac{1}{z-c} \\ \partial_2 f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)\frac{1}{z-c} \\ \partial_1 f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)\frac{a-x}{(z-c)^2} + \partial_2 f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)\frac{b-y}{(z-c)^2} \end{pmatrix}.$$

曲面在任意点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$0 = \partial_1 f\left(\frac{x_0-a}{z_0-c}, \frac{y_0-b}{z_0-c}\right)\frac{x-x_0}{z_0-c} + \partial_2 f\left(\frac{x_0-a}{z_0-c}, \frac{y_0-b}{z_0-c}\right)\frac{y-y_0}{z_0-c}$$

$$+\left(\partial_1 f\left(\frac{x_0-a}{z_0-c}, \frac{y_0-b}{z_0-c}\right)\frac{a-x_0}{(z_0-c)^2} + \partial_2 f\left(\frac{x_0-a}{z_0-c}, \frac{y_0-b}{z_0-c}\right)\frac{b-y_0}{(z_0-c)^2}\right)(z-z_0).$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\partial_1 f\Big(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\Big)(x-x_0)(z_0-c)\\
&+\partial_2 f\Big(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\Big)(y-y_0)(z_0-c)\\
&-\partial_1 f\Big(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\Big)(a-x_0)(z_0-z)\\
&-\partial_2 f\Big(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\Big)(b-y_0)(z_0-z)=0.
\end{aligned}
$$

由于点 (a,b,c) 恰好满足上述方程, 故题设曲面任意点处的切平面均过定点 (a,b,c).

例 19. 设曲面 S 由 $ax+by+cz=G(x^2+y^2+z^2)$ 确定, 其中 G 可导并且 a,b,c 不全为零. 求证: S 上任意点处的法线与某定直线相交或平行.

证明: 令 $F(x,y,z)=G(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)$, 则

$$\mathrm{grad}F=\begin{pmatrix} 2xG'(x^2+y^2+z^2)-a \\ 2yG'(x^2+y^2+z^2)-b \\ 2zG'(x^2+y^2+z^2)-c \end{pmatrix}.$$

设所求定直线的方程为 $\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$.

上述直线与曲面 S 上任意点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法线相交或平行当且仅当下述三个向量

$$\mathrm{grad}F(P_0), \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

线性相关, 也即我们有

$$\begin{vmatrix} 2x_0G'(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - a & \alpha & x_1 - x_0 \\ 2y_0G'(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - b & \beta & y_1 - y_0 \\ 2z_0G'(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - c & \gamma & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

根据行列式的性质, 该式等价于

$$2G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\begin{vmatrix} x_0 & \alpha & x_1-x_0 \\ y_0 & \beta & y_1-y_0 \\ z_0 & \gamma & z_1-z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha & x_1-x_0 \\ b & \beta & y_1-y_0 \\ c & \gamma & z_1-z_0 \end{vmatrix}.$$

而当 $\alpha=a$, $\beta=b$, $\gamma=c$, $x_1=y_1=z_1=0$ 时, 上式成立, 也即曲面任意点处的法线与定直线

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

平行或相交.

例 20. 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为二阶连续可导函数且 $u(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

求函数 f 的表达式.

解: 由题设可知 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{xf'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{x^2f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2}\\ &\quad -\frac{x^2f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

由对称性可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y^2 f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} \\
&\quad - \frac{y^2 f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z^2 f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} \\
&\quad - \frac{z^2 f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} &= \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{x^2 f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} \\
&- \frac{x^2 f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y^2 f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} \\
&- \frac{y^2 f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z^2 f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} \\
&- \frac{z^2 f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).
\end{aligned}
$$

从而 $\forall r > 0$, $f''(r) + \frac{2f'(r)}{r} = 0$, 故 $f'(r) = -\frac{C_1}{r^2}$,
进而 $f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$, 其中 C_1, C_2 为常数.

例 21. 设 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z = x - ye^z$ 确定的隐函数, 求 $\mathrm{d}u$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解: 由题设知 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}$.

注意到 $z = x - ye^z$, 两边分别对 x, y 求偏导数可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+ye^z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^z}{1+ye^z}$. 于是

$$\mathrm{d}u = \left(2x + \frac{2z}{1 + ye^z}\right)\mathrm{d}x + \left(2y - \frac{2ze^z}{1 + ye^z}\right)\mathrm{d}y.$$

与此同时, 我们也有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
&= -\frac{2e^z}{(1+ye^z)^2} + 2z\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^z}{1+ye^z}\right) \\
&= -\frac{2e^z}{(1+ye^z)^2} - 2z \cdot \frac{e^z(1+ye^z)\frac{\partial z}{\partial x} - e^z \cdot ye^z\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+ye^z)^2} \\
&= -\frac{2e^z}{(1+ye^z)^2} - \frac{2ze^z}{(1+ye^z)^3} \\
&= -\frac{2e^z(1+ye^z+z)}{(1+ye^z)^3} = -\frac{2(1+x)e^z}{(1+ye^z)^3}.
\end{aligned}
$$

例 22. 设隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ 确定. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 方法 1. 由题设可知

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad 0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由此我们可立刻导出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u}{u-v},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}=-3uv$, 进而可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-3v\frac{\partial u}{\partial x}-3u\frac{\partial v}{\partial x}=-3(u+v)=-3x.$$

方法 2. 由题设可知 $2uv = x^2 - y$, 从而

$$\begin{aligned} z &= (u+v)(u^2 - uv + v^2) \\ &= x\left(y - \frac{1}{2}(x^2 - y)\right) \\ &= \frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}x^3, \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}x^2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -3x.$$

例 23. 固定 $k>0$. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|^k}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

问 k 为何值时函数 f 在原点连续, 可导, 可微或连续可导?

解: 连续性. 当 $k>1$ 时, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{|xy|^k}{x^2+y^2}\leqslant\frac{(\frac{1}{2}(x^2+y^2))^k}{x^2+y^2}=\frac{1}{2^k}(x^2+y^2)^{k-1}.$$

于是由夹逼原理可知此时函数 f 在原点连续.

当 $k = 1$ 时, 由于 $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$, 由复合极限法则可知此时函数 f 在原点不连续.

当 $k < 1$ 时, 因 $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}|x|^{2k-2} = +\infty$, 则由复合极限法则可知 f 在原点不连续.

综上所述可知 f 在原点连续当且仅当 $k > 1$.

可导性. $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 因 $f(x,0) = f(0,y) = 0$, 于是由偏导数的定义可知 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, 故函数 f 在原点处可导.

可微性. 因 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, 则由微分的定义立刻可知 f 在原点可微当且仅当

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|^k}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

而这又等价于说

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|^{\frac{2k}{3}}}{x^2+y^2}=0,$$

由此可知 f 在原点处可微当且仅当 $k>\frac{3}{2}$.

连续可导性. 若 f 在原点连续可导, 则由前面讨论可知 $k > \frac{3}{2}$. 此时 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{k|x|^{k-1}|y|^k \operatorname{sgn} x}{x^2+y^2} - \frac{2x|xy|^k}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{k|x|^k|y|^{k-1} \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2} - \frac{2y|xy|^k}{(x^2+y^2)^2}.$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leqslant \frac{k|x|^{k-1}|y|^k}{x^2+y^2}+\frac{2|x|^{k+1}|y|^k}{(x^2+y^2)^2} \\
&\leqslant \frac{k}{2^{k-1}}(x^2+y^2)^{k-2}|y|+\frac{1}{2^{k-1}}(x^2+y^2)^{k-2}|x| \\
&\leqslant \frac{k}{2^{k-1}}(x^2+y^2)^{k-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2^{k-1}}(x^2+y^2)^{k-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{k+1}{2^{k-1}}(x^2+y^2)^{k-\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{k|x|^k|y|^{k-1}}{x^2+y^2}+\frac{2|x|^k|y|^{k+1}}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{k+1}{2^{k-1}}(x^2+y^2)^{k-\frac{3}{2}},$$

由夹逼原理可知 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点连续.

例 24. $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$f(x,y,z)=x^2+2y-xyz.$$

设 f 在点 $(1,1,0)$ 处的梯度方向为 $\vec{\ell}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}}(1,1,0)$.

解: 由题设可知

$$\operatorname{grad}f(1,1,0)=\begin{pmatrix}2x-yz\\2-xz\\-xy\end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,0)}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},$$

于是我们有 $\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}}(1,1,0)=\|\operatorname{grad}f(1,1,0)\|=3.$

例 25. 设隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$z = f(x + y + z)$$

确定, 其中 f 为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类函数且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 将方程 $z = f(x + y + z)$ 对 x 求偏导数, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(x + y + z)\frac{\partial(x + y + z)}{\partial x} \\
&= f'(x + y + z)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

由此立刻可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x+y+z)}{1-f'(x+y+z)}$.

进而我们就有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{f'(x+y+z)}{1-f'(x+y+z)}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(-1+\frac{1}{1-f'(x+y+z)}\Big) \\
&= -\frac{1}{(1-f'(x+y+z))^2}\cdot\frac{\partial(1-f'(x+y+z))}{\partial x} \\
&= \frac{f''(x+y+z)}{(1-f'(x+y+z))^2}\cdot\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} \\
&= \frac{f''(x+y+z)}{(1-f'(x+y+z))^2}\Big(1+\frac{\partial z}{\partial x}\Big) \\
&= \frac{f''(x+y+z)}{(1-f'(x+y+z))^3}.
\end{aligned}
$$

例 26. 假设φ为二阶连续可微, 而 $z=z(x,y)$ 是由函数方程 $x^3+y^3+z^3=\varphi(z)$ 确定的隐函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 并说明隐函数存在的条件.

解: 定义 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-\varphi(z)$, 则 F 为二阶连续可微并且 $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=3z^2-\varphi'(z)$, 则当 $3z^2-\varphi'(z)\neq 0$ 时, 由方程 $F(x,y,z)=0$ 可确定隐函数 $z=z(x,y)$. 此时我们还有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{3x^2}{\varphi'(z)-3z^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{3y^2}{\varphi'(z)-3z^2},$$

由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{3y^2}{\varphi'(z) - 3z^2}\Big) \\
&= -\frac{3y^2}{(\varphi'(z) - 3z^2)^2}\big(\varphi''(z) - 6z\big)\frac{\partial z}{\partial x} \\
&= \frac{9x^2y^2\big(6z - \varphi''(z)\big)}{(\varphi'(z) - 3z^2)^3}.
\end{aligned}
$$

例 27. 设 p 为实数. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 令

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

请分析 p 取何值时, 函数 f 在原点处:

(1) 连续; (2) 可导; (3) 可微.

解: (1) 若 $p > 0$, 则 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 我们有

$$|f(x,y)| \leqslant (x^2+y^2)^p.$$

由夹逼原理可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

因此函数 f 在原点处连续.

现假设 $p \leqslant 0$. $\forall n \geqslant 1$, 令 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $f(x_n, 0) = 0$, $f(y_n, 0) = y_n^{2p} \geqslant 1$. 故 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 收敛到 0, 但 $\{f(x_n, 0)\}$, $\{f(y_n, 0)\}$ 却不收敛到同一个极限. 这表明 f 在原点间断.

综上所述可知 f 在原点连续当且仅当 $p > 0$.

(2) 若 $p > \frac{1}{2}$, 由夹逼原理可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}|x|^{2p-1}(\operatorname{sgn} x)\sin\frac{1}{|x|} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}|y|^{2p-1}(\operatorname{sgn} y)\sin\frac{1}{|y|} = 0,$$

故 f 在原点可导且 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

若 $p \leqslant \frac{1}{2}$, 由 $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sgn} x)\sin\frac{1}{|x|}$ 不存在可知 f 在原点不可导. 故 f 在原点可导当且仅当 $p > \frac{1}{2}$.

(3) 若 f 在原点可微, 则它在该点可导, 故 $p > \frac{1}{2}$.

现假设 $p > \frac{1}{2}$, 此时我们有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{p-\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

于是由可微的定义可知 f 在原点可微.

综上所述可知 f 在原点可微当且仅当 $p > \frac{1}{2}$.

例 28. 假设由方程

$$f(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2) = 0$$

可确定 $u = \varphi(x, y, z)$, 其中 f, φ 可微. 记

$$X = (u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2).$$

若 $xyzu \neq 0$ 且 $\partial_1 f(X) + \partial_2 f(X) + \partial_3 f(X) \neq 0$,
求证: $\dfrac{u'_x}{x} + \dfrac{u'_y}{y} + \dfrac{u'_z}{z} = \dfrac{1}{u}$.

证明: 由于 $f(u^2-x^2, u^2-y^2, u^2-z^2)=0$, 故

$$\partial_1 f(X)\frac{\partial}{\partial x}(u^2-x^2)+\partial_2 f(X)\frac{\partial}{\partial x}(u^2-y^2)$$
$$+\partial_3 f(X)\frac{\partial}{\partial x}(u^2-z^2)=0,$$

也即我们有

$$\partial_1 f(X)(2uu'_x-2x)+\partial_2 f(X)(2uu'_x)+\partial_3 f(X)(2uu'_x)=0,$$

故 $\frac{u'_x}{x}\big(\partial_1 f(X)+\partial_2 f(X)+\partial_3 f(X)\big)=\frac{1}{u}\partial_1 f(X)$.

由对称性立刻可得

$$\frac{u_y'}{y}\big(\partial_1 f(X)+\partial_2 f(X)+\partial_3 f(X)\big)=\frac{1}{u}\partial_2 f(X),$$
$$\frac{u_z'}{z}\big(\partial_1 f(X)+\partial_2 f(X)+\partial_3 f(X)\big)=\frac{1}{u}\partial_3 f(X).$$

于是我们就有

$$\frac{u_x'}{x}+\frac{u_y'}{y}+\frac{u_z'}{z}=\frac{1}{u}.$$

例 29. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$. 研究 f 在原点的连续性, 可导性以及可微性.

解: 由于 f 为初等函数, 因此在原点连续.

与此同时, 由于极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

不存在, 故 f 在原点处没有关于第一个变量的偏导数, 进而可知 f 在原点处不可微.

谢谢大家!