微积分 A (1)

姚家燕

第 20 讲

§1. Riemann 积分的概念

定义 1. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数.

- **分割:** 称 $P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的分割. 它将 $[a,b]$ 分成内部不相交的小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 令

$$\begin{aligned}\Delta x_i &:= x_i-x_{i-1}\ (1\leqslant i\leqslant n),\\ \lambda(P) &:= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\ (\text{称为 } P \text{ 的步长}).\end{aligned}$$

- 取点: 称 $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ 为分割 P 的取点, 其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 此时称 (P, ξ) 为 $[a, b]$ 的带点分割.
- Riemann 和: 对 $[a, b]$ 的带点分割 (P, ξ), 令

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为 f 关于带点分割 (P, ξ) 的 Riemann 和.

- Riemann 积分: 如果存在 $I \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使对于 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, $|\sigma(f;P,\xi) - I| < \varepsilon$. 此时记

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f;P,\xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分 (Riemann 积分), 简记为 $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 并且称 f 在 $[a,b]$ 上 (Riemann) 可积. 否则称之为不可积.

评注

- 常值函数可积且 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.
- 仅在有限个点处不为零的函数为可积函数, 并且其积分为零. 事实上, 如果函数 f 仅在点 $c_1, c_2 \ldots, c_k$ 处不为零, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} |f(c_i)|$, $\delta = \frac{\varepsilon}{k(M+1)}$, 那么对 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 均有

$$|\sigma(f;P,\xi)| < kM\delta < \varepsilon.$$

- 记 $\mathscr{R}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上所有可积函数的集合.
- 否定形式: 函数 f 在 $[a,b]$ 上不可积当且仅当 $\forall I \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的带点分割 (P,ξ) 满足 $\lambda(P) < \delta$, 但我们却有

$$|\sigma(f;P,\xi) - I| \geqslant \varepsilon_0.$$

- 从现在开始, 我们约定:

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

例 1. (Dirichlet 函数) $\forall x \in [0,1]$, 定义

$$D(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & 若\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求证: $D \notin \mathscr{R}[0,1]$.

证明: 用反证法. 假设 D 可积并且其积分为 I. 令 $\varepsilon = \frac{1}{4}$. 于是由可积性可知, $\exists \delta > 0$ 使得对于 $[0,1]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时,

$$|\sigma(D; P, \xi) - I| < \frac{1}{4}.$$

选取 $n=[\frac{1}{\delta}]+1$, $P: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 为 $[0,1]$ 的均匀分割. 则 $\lambda(P)=\frac{1}{n}<\delta$. 选取点 $\xi=\{\xi_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\xi'=\{\xi_i'\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 使得对 $1\leqslant i\leqslant n$, 均有 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\cap\mathbb{Q}$, $\xi_i'\in[x_{i-1},x_i]\setminus\mathbb{Q}$, 那么

$$|\sigma(D;P,\xi)-I|<\frac{1}{4},$$
$$|\sigma(D;P,\xi')-I|<\frac{1}{4}.$$

注意到

$$\sigma(D;P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0,$$

$$\sigma(D;P,\xi')=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i')\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1,$$

于是 $|I|<\frac{1}{4}$, $|1-I|<\frac{1}{4}$, 从而我们有

$$\frac{1}{2}>|I|+|1-I|\geqslant|I+(1-I)|=1.$$

矛盾! 故所证结论成立.

函数可积的必要条件

定理 1. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证明: 假设 f 的积分为 I, 则 $\exists \delta > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意的带点分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 我们有 $|\sigma(f;P,\xi) - I| < 1$. 定义 $n = [\frac{b-a}{\delta}] + 1$, 并设 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a,b]$ 的均匀分割, 则我们立刻有 $\lambda(P) = \frac{1}{n}(b-a) < \delta$.

$\forall x \in [a,b]$, 均可以找到 $k \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使得 $x \in [x_{k-1}, x_k]$. 取点 $\xi = \{\xi_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 使得 $\xi_k = x$, 而其余点 ξ_i 则为分割 P 中的适当点. 则

$$\begin{aligned} 1 &> |\sigma(f;P,\xi) - I| \\ &= \left| f(x)\lambda(P) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} f(\xi_i)\lambda(P) - I \right| \\ &\geqslant |f(x)|\lambda(P) - \left| \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} f(\xi_i)\lambda(P) - I \right|. \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}\lambda(P)|f(x)| &< 1+|I|+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}|f(\xi_i)|\lambda(P)\\ &\leqslant 1+|I|+\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|f(x_j)|\lambda(P),\end{aligned}$$

则我们有 $|f(x)| < \frac{1}{\lambda(P)}(1+|I|)+\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|f(x_j)|$,

从而 f 为有界函数.

判断函数可积的 Darboux 准则

定义 2. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

为 $[a,b]$ 的分割. 对于 $1\leqslant i\leqslant n$, 定义

- $m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x),\ M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$,
- $L(f;P)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \quad$ (Darboux 下和),
- $U(f;P)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad$ (Darboux 上和).

评注

- 定义 $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

  若 (P,ξ)为 $[a,b]$ 的带点分割, 则我们有

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leqslant L(f;P) \leqslant \sigma(f;P,\xi) \\ &\leqslant U(f;P) \leqslant M(b-a). \end{aligned}$$

- 若 P_1, P_2 为 $[a,b]$ 的分割且 $P_1 \subseteq P_2$, 则

$$L(f;P_1) \leqslant L(f;P_2) \leqslant U(f;P_2) \leqslant U(f;P_1).$$

引理 1. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而 P_1, P_2 为 $[a,b]$ 的两个分割, 则 $L(f;P_1)\leqslant U(f;P_2)$.

证明: 记 Q 为 P_1, P_2 合起来所得到的 $[a,b]$ 的分割, 则 $P_1\subseteq Q$, $P_2\subseteq Q$, 从而

$$L(f;P_1)\leqslant L(f;Q)\leqslant U(f;Q)\leqslant U(f;P_2).$$

注: 由此定义**下积分**: $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\sup\limits_P L(f;P)$, **上积分**: $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\inf\limits_P U(f;P)$, 则我们有

$$L(f;P)\leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant U(f;P).$$

引理 2. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

为 $[a,b]$ 的分割. 则

$$L(f;P) = \inf_{\xi}\sigma(f;P,\xi),\ \ U(f;P) = \sup_{\xi}\sigma(f;P,\xi).$$

证明: 仅考虑 Darboux 下和. 此时, 我们有

$$\begin{aligned}\inf_{\xi}\sigma(f;P,\xi) &= \inf_{\xi}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\inf_{\xi_i\in\Delta_i} f(\xi_i)\Big)\Delta x_i = L(f;P).\end{aligned}$$

定理 2. (Darboux) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 则下述结论等价:

(1) $f\in\mathscr{R}[a,b]$,

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 P 使得

$$U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon.$$

(3) $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明: (1)⇒(2) 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 I 为 f 的积分.

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意带点

分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, $|\sigma(f;P,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$.

故 $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(f;P,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$, 则由引理 2 可知

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant L(f;P) \leqslant U(f;P) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3},$$

故 $U(f;P) - L(f;P) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. 因此 (2) 成立.

(2)⇒(3) 假设 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 P 使得我们有 $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon. \end{aligned}$$

再由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3)⇒(1) 设 $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, 并将该值记作 I. 由上积分的定义, $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 $P_0 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得

$$0 \leqslant U(f;P_0) - I < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

定义 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{4nM+1}$, 则对 $[a,b]$ 的任意的分割 P, 当 $\lambda(P) < \delta_1$ 时, 记 Q 为 P, P_0 合起来所组成的新分割, 则我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant U(f;P) - I \leqslant U(f;Q) + 2nM\lambda(P) - I \\
&\leqslant U(f;P_0) - I + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

同样借助于 $I = \underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 以及下积分的定义可知, $\exists\delta_2 > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意的分割 P, 当 $\lambda(P) < \delta_2$ 时, 我们均有 $0 \leqslant I - L(f;P) < \varepsilon$, 选取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 (P,ξ), 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 我们有

$$I - \varepsilon < L(f;P) \leqslant \sigma(f;P,\xi) \leqslant U(f;P) < I + \varepsilon,$$

也即 $|\sigma(f;P,\xi) - I| < \varepsilon$, 故 $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

评注

由前面可知 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 等价于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对于 $[a,b]$ 的任意分割 P, 当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 均有 $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$. 此时我们也称

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \big(U(f;P) - L(f;P)\big) = 0.$$

利用振幅刻画函数的可积性

定义 3. 假设 X 为非空数集, 而 $f: X \to \mathbb{R}$ 为有界函数. 对于任意非空子集 $J \subseteq X$, 定义

$$\omega(f; J) := \sup_{x,y \in J} |f(x) - f(y)|,$$

并称之为 f 在 J 上的振幅.

引理 3. 令 $M = \sup\limits_{x\in J} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in J} f(x)$, 则

$$\omega(f;J) = M - m.$$

证明: 因 $\forall x, y \in J$, 均有 $|f(x) - f(y)| \leqslant M - m$, 因此 $\omega(f;J) \leqslant M - m$. 与此同时, 我们也有

$$\begin{aligned} M - m &= \sup_{x\in J} f(x) - \inf_{y\in J} f(y) \\ &= \sup_{x,y\in J} \big(f(x) - f(y)\big) \leqslant \omega(f;J). \end{aligned}$$

故所证结论成立.

定理 3. 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 那么 $f\in\mathscr{R}[a,b]$ 当且仅当我们有

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0.$$

证明: 对任意的分割 $P: a=x_0<\cdots<x_n=b$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\ &= U(f;P)-L(f;P),\end{aligned}$$

于是由前面讨论立刻可知所证结论成立.

例 2. (Dirichlet 函数) $\forall x \in [0,1]$, 定义

$$D(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & 若\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求证: $D \notin \mathscr{R}[0,1]$.

证明: 对于 $[a,b]$ 的任意分割

$$P_0 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

由于 D 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界分别为 1、0, 故 $\sum_{i=1}^{n} \omega(D;\Delta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$. 由此得证.

一致连续函数

定义 4. 设 X 为非空的数集. 称 $f: X \to \mathbb{R}$ 为一致连续, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x-y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

否定表述: 函数 f 在 X 上不为一致连续当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, 存在 $x, y \in X$ 满足 $|x-y| < \delta$, 但 $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$.

命题 1. 函数 f 为一致连续当且仅当对于 X 中任意的数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 那么 $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n) - f(y_n)\big) = 0$.

证明: **充分性.** 用反证法, 设 f 在 X 上非一致连续, 那么 $\exists\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall\delta > 0$, 存在 $x, y \in X$ 满足 $|x - y| < \delta$, 但是 $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$. 从而 $\forall n \geqslant 1$, 均存在 $x_n, y_n \in X$ 满足 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$. 于是 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 但 $\{f(x_n) - f(y_n)\}$ 不收敛到 0. 矛盾! 得证.

必要性. 假设 f 在 X 上一致连续, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 于是对于 X 中的任意数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 那么 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $|x_n - y_n| < \delta$, 从而我们有 $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, 由此可知所证成立.

注: 该结论常用于证明某函数不为一致连续.

微积分 A (1)

姚家燕

第 21 讲

第 20 讲回顾: Riemann 积分的概念

- 对于分割 $P: \ a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 令

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= [x_{i-1}, x_i] \, (1 \leqslant i \leqslant n), \\
\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \, (1 \leqslant i \leqslant n), \\
\lambda(P) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \, (\text{称为 } P \text{ 的步长}).
\end{aligned}$$

- 取点: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, 其中 $\xi_i \in \Delta_i$. 此时我们称 (P, ξ) 为带点分割.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数.

- Riemann 和: $\sigma(f;P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.
- Riemann 积分:

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi).$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得对 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ),

当 $\lambda(P)<\delta$ 时, 均有 $|\sigma(f;P,\xi)-I|<\varepsilon$.

- 记 $\mathscr{R}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上可积函数的集合.

- 否定形式: 函数 f 在 $[a,b]$ 上不可积当且仅当 $\forall I \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的某个带点分割 (P,ξ) 满足 $\lambda(P) < \delta$, 但我们却有 $|\sigma(f;P,\xi) - I| \geqslant \varepsilon_0$.
- 常值函数可积且 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.
- 有限个点处不为零的函数可积且积分为零.
- Dirichlet 函数不可积.
- Riemann 可积的必要条件: 可积函数有界.

回顾: 判断函数可积的 Darboux 准则

- 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数, 而

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

为 $[a,b]$ 的分割. 对于 $1\leqslant i\leqslant n$, 令

$$m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x),\quad M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x),$$

$$L(f;P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\inf_{\xi}\sigma(f;P,\xi),$$

$$U(f;P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sup_{\xi}\sigma(f;P,\xi).$$

- 若 P_1, P_2 为 $[a,b]$ 的分割且 $P_1 \subseteq P_2$, 则

$$L(f;P_1) \leqslant L(f;P_2) \leqslant U(f;P_2) \leqslant U(f;P_1).$$

- 若 P_1, P_2 为 $[a,b]$ 的两个分割, 则

$$L(f;P_1) \leqslant U(f;P_2).$$

- 下积分: $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\limits_P L(f,P)$.
- 上积分: $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\limits_P U(f,P)$.
- $L(f,P) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f,P)$.

函数可积性判别准则 (Darboux 准则)

设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界, 则下述结论等价:

(1) $f\in\mathscr{R}[a,b]$;

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 P 使得

$$U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon;$$

(3) $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\big(U(f;P)-L(f;P)\big)=0$;

(4) $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0$;

(5) $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

回顾: 一致连续函数

- 一致连续函数: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- 刻画: 函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 上为一致连续当且仅当对于 X 当中的任意的两个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 则我们有
$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

例 3. 求证: 余弦函数在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 选取 $\delta = \varepsilon$, 则对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 当 $|x-y| < \delta$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos y| &= \left|2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}\right| \\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y| < \varepsilon, \end{aligned}$$

因此余弦函数在 $\mathbb{R}$ 上为一致连续.

作业题: 第 5.1 节第 136 页第 9 题第 (2) 小题, 第 15 题第 (2) 小题.

例 4. 求证: $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证明: 事实上, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)=0$, 但

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=+\infty,$$

故所证结论成立.

例 5. 证明 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证明: $\forall n\geqslant 1$, 令 $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi}\in(0,1)$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=1$, 因此所证结论成立.

定理 4. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 f 为一致连续.

证明: 用反证法, 设 f 在 $[a,b]$ 上不为一致连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 X 中数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 使得 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$. 由于 $\{x_n\}$ 有界, 因此存在收敛子列 $\{x_{k_n}\}$, 设其极限为 c. 由数列极限的保序性可知 $c \in [a,b]$, 而由夹逼原理可知 $\{y_{k_n}\}$ 也收敛到 c, 再由 f 的连续性得 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})) = f(c) - f(c) = 0$. 矛盾!

由此可知所证结论成立.

连续函数为可积函数

定理 5. $\mathscr{C}[a,b] \subseteq \mathscr{R}[a,b]$.

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x, y \in [a,b]$, 若 $|x-y| < \delta$, 则 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a+1}$. 对 $[a,b]$ 的任意分割 $P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 当 $\lambda(P) < \delta$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a+1}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

因此所证结论成立.

定理 6. 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数并且仅在有限多个点间断, 则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

定义 5. 称函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为逐段 (或分段) 连续函数, 如果 f 在 $[a,b]$ 上至多只有有限多个间断点, 且均为第一类间断点.

注: 函数 f 为逐段连续当且仅当存在 $[a,b]$ 的分割使得 f 在该分割的每个小区间上均连续. 因此逐段连续函数为有界函数.

推论. 若 f 在 $[a,b]$ 上逐段连续, 则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

单调函数为可积函数

定理 7. 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调, 则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

证明: 不失一般性, 假设 f 为单调递增 (否则可考虑 $-f$). $\forall\varepsilon>0$, 选取 $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, 则对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 P: $a=x_0<\cdots<x_n=b$, 当 $\lambda(P)<\delta$ 时, 我们均有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\delta\\ &= \big(f(b)-f(a)\big)\delta<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此所证结论成立.

Lebesgue 判别准则

定义 6. 我们称数集 X 为零测度集, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一列开区间 $\{(a_n, b_n)\}$ 使得

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

注: (1) 空集为零测度集;

(2) 零测度集的子集也为零测度集;

(3) 有限集以及可数集为零测度集.

定理 8. (Lebesgue) 区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 为 Riemann 可积当且仅当由 f 的所有间断点所构成的集合为零测度集.

推论. 如果 $f:[a,b]\to[c,d]$ 可积, 而 $g\in\mathscr{C}[c,d]$, 则 $g\circ f\in\mathscr{R}[a,b]$.

证明: 假设 $D(f)$, $D(g\circ f)$ 分别为 f, $g\circ f$ 的间断点集. 由于 g 连续, 因此 $D(g\circ f)\subseteq D(f)$, 从而我们有 $g\circ f\in\mathscr{R}[a,b]$.

§2. Riemann 积分的性质

命题 1. (积分的线性性) 假设函数 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由定积分的定义可知

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(\alpha f + \beta g; P, \xi)$$

$$= \lim_{\lambda(P)\to 0} \Big(\alpha\sigma(f; P, \xi) + \beta\sigma(g; P, \xi)\Big)$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论. 如果 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则在有限多个点处改变 f 的取值, 既不会改变可积性, 也不改变积分.

证明: 将改变后的函数记作 g. 定义 $F = g - f$, 那么 F 仅在有限多个点处不为零, 因此为可积. 又 $g = f + F$, 则 g 也可积并且我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

命题 2. (积分区间的可加性) 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数, 而 $c\in(a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 f 分别在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积, 此时

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 充分性. 假设 f 分别在区间 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,c]$ 的分割 P_1 与 $[c,b]$ 的分割 P_2 使得我们有

$$U(f;P_1)-L(f;P_1)<\frac{\varepsilon}{2},\ U(f;P_2)-L(f;P_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $P = P_1 \cup P_2$, 则 P 为 $[a, b]$ 的分割, 并且

$$
\begin{aligned}
& U(f;P) - L(f;P) \\
={} & \big(U(f;P_1) + U(f;P_2)\big) - \big(L(f;P_1) + L(f;P_2)\big) \\
={} & \big(U(f;P_1) - L(f;P_1)\big) + \big(U(f;P_2) - L(f;P_2)\big) \\
<{} & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

因此函数 f 在 $[a, b]$ 上可积.

$\forall\varepsilon > 0$, 援引前面的记号, 我们有

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant U(f;P_1) - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f;P_1) - L(f;P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \\
0 \leqslant U(f;P_2) - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U(f;P_2) - L(f;P_2) < \frac{\varepsilon}{2}, \\
0 \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - L(f;P) \leqslant U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon, \\
U(f;P) = U(f;P_1) + U(f;P_2),
\end{gathered}
$$

由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
0 \ \leqslant \ & \Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \\
& + \big(U(f;P) - L(f;P)\big) < 2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

进而可得

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon &\leqslant -\big(U(f;P)-L(f;P)\big) \\
&\leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&< 2\varepsilon - \big(U(f;P)-L(f;P)\big) \leqslant 2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

再由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.
$$

必要性. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的分割 P 使 $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$. 将 P 分别限制在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上并补上点 c, 由此可以得到 $[a,c]$ 的分割 P_1 以及 $[c,b]$ 的分割 P_2. 令 $Q = P_1 \cup P_2$, 则 $P \subseteq Q$, 从而

$$
\begin{aligned}
U(f;P_1) - L(f;P_1) &\leqslant U(f;Q) - L(f;Q) \\
&\leqslant U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon, \\
U(f;P_2) - L(f;P_2) &\leqslant U(f;Q) - L(f;Q) \\
&\leqslant U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

由此可知 f 分别在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积.

评注

- 我们已约定

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

由上述命题可知: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, 均有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- 由该命题可导出: 若函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 有界且仅在有限多个点处间断, 则 $f \in \mathscr{R}[a, b]$.

例 1. (阶梯函数) 设

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

为 $[a, b]$ 的分割, 而函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x) = k_i, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

此时称 f 为阶梯函数. 则 $f \in \mathscr{R}[a, b]$ 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}).$$

命题 3. (保序性) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 $f \geqslant g$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 若 $\exists m, M \in \mathbb{R}$ 使得 $m \leqslant f \leqslant M$, 则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证明: $\displaystyle \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i.$

推论. (保号性) 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 非负, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

命题 3′. (严格保号性) 若函数 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 非负, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 当且仅当 $f \equiv 0$.

证明: 充分性源于积分定义. 下面证明必要性. 用反证法, 假设 f 在点 $x_0 \in [a,b]$ 处不等于零, 则 $f(x_0) > 0$. 由连续函数保序性, $\exists c, d \in [a,b]$ 使得 $c < d$, $x_0 \in [c,d]$, 并且 $\forall x \in [c,d]$, 我们有 $f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(x_0)$. 由此我们可立刻导出

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}f(x_0)(d-c) > 0,$$

矛盾! 故所证结论成立.

推论. **(严格保序性)** 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 使 $\forall x \in [a,b]$, 我们有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, 且等号成立当且仅当 $f \equiv g$.

证明: 定义 $F = f - g$, 则函数 $F \in \mathscr{C}[a,b]$ 非负, 故 $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $F \equiv 0$, 也即 $f \equiv g$. 因此所证结论成立.

注: 对可积函数有类似的结论, 此时将函数相等换成二者仅在某个零测度集上不相等.

例 2. 若 $f \in \mathscr{C}[a-1, b+1]$ (其中 $a < b$), 求证

$$\lim_{t \to 0} \int_a^b |f(x+t) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0.$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a-1, b+1]$, 则 f 一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a-1, b+1]$, 当 $|x-y| < \delta_1$ 时, 我们有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. 令 $\delta = \min(\delta_1, \frac{1}{2})$, 于是 $\forall x \in [a, b]$ 以及 $\forall t \in \mathbb{R}$, 当 $|t| < \delta$ 时, 均有 $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, 故

$$\int_a^b |f(x+t) - f(x)| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

因此所证结论成立.

例 3. 求证: $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}$.

证明: $\forall x \in [1,2]$, 定义 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. 那么 f 可导并且 $\forall x \in (1,2)$, 均有 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0$. 因此函数 f 严格递减, 从而我们有

$$\frac{2}{5} = f(2) < \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < f(1) = \frac{1}{2}.$$

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 5 题第 (3), (4) 题

补充题: 求证: $\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

命题 4. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明: 对于区间 $[a,b]$ 的任意分割

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

我们有 $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i$,

于是由夹逼原理知 $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i = 0$,

从而我们有 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$. 又 $\forall x \in [a,b]$, 均有

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

由此我们可立刻导出

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

因此所证结论成立.

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 8 题.

命题 5. 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$.

证明: 定义 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, 则 $\forall x, y \in [a,b]$,

$$\left|(f(x))^2-(f(y))^2\right| = \left|f(x)+f(y)\right|\cdot\left|f(x)-f(y)\right| \leqslant 2M\left|f(x)-f(y)\right|.$$

于是对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 P, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2;\Delta_i)\Delta x_i \leqslant 2M\sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$

由于 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则由夹逼原理可知

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f^2; \Delta_i)\Delta x_i = 0,$$

故 $f^2 \in \mathscr{R}[a,b]$. 又 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则

$$f+g, f-g \in \mathscr{R}[a,b],$$

由此可得 $fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big) \in \mathscr{R}[a,b]$,
从而所证结论成立.

Cauchy 不等式

定理 1. 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right).$$

证明: $\forall t \in \mathbb{R}$, 令 $F(t) = \int_a^b \big(tf(x) - g(x)\big)^2 \mathrm{d}x$, 则

$$F(t) = t^2\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x - 2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

由于 F 为关于 t 的二次多项式且恒 $\geqslant 0$, 因此其判别式 $\leqslant 0$. 由此立刻可得所要结论.

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 9 题.

经典的 Hölder 不等式

定理 2. 若 $x_k, y_k, p, q > 0\,(1 \leqslant k \leqslant n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}$, 并且等号成立当且仅当 $x_k^p y_k^{-q}$ 为不依赖 k 的常数.

积分 Hölder 不等式

定理 3. 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明: 对 $[a,b]$ 的任意带点分割 (P,ξ), 我们有

$$\begin{aligned}
|\sigma(fg;P,\xi)| &= \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left(|f(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(|g(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

于是由经典的 Hölder 不等式可知

$$|\sigma(fg;P,\xi)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(|f(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}\right)\cdot\left(|g(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|^p\Delta x_i\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|g(\xi_i)|^q\Delta x_i\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\sigma(|f|^p;P,\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sigma(|g|^q;P,\xi)\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

由于 $f,g\in\mathscr{C}[a,b]$, 从而 $|f|^p,|g|^q\in\mathscr{C}[a,b]$, 进而由定积分定义及极限保序性可得所要不等式.

定理 4. (积分第一中值定理)

若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明: 令 $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 那么 $m \leqslant f \leqslant M$, 由此可得 $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$.

由最值定理知 $\mathrm{Im} f = [m, M]$, 故 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 4′. (广义积分第一中值定理) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, $g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 g 不变号, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由于 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$. 设 f 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m. 又 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 不失一般性, 由此我们可以假设 $g \geqslant 0$, 否则考虑 $-g$. 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

进而我们就有

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 此时 $\forall \xi \in [a,b]$, 所证结论成立. 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, 则

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由连续函数最值定理与介值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = f(\xi)$. 故所证结论成立.

例 4. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0.$

证明: $\forall x\geqslant 1$, 定义 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则 f 连续, 从而 $\forall n\geqslant 1$, 由积分中值定理知 $\exists \xi_n\in[n,n+\pi]$ 使得

$$\left|\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\pi\right|\leqslant\frac{\pi}{\xi_n}\leqslant\frac{\pi}{n},$$

于是由夹逼原理可知所证结论成立.

作业题: 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}}=1.$

§3. 微积分基本定理

定义 1. 假设 J 为区间, 而 $F, f : J \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 F 在 J 上连续, 在 J 的内部可导且 $F' = f$, 则称 F 为 f 的一个原函数.

定理 1. 设 $f \in \mathscr{R}[a, b]$. $\forall x \in [a, b]$, 定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么 $F \in \mathscr{C}[a, b]$. 如果 f 在点 $x_0 \in [a, b]$ 连续, 那么 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

证明: 由于 f 可积, 则 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| < +\infty$, 于是 $\forall x, y \in [a,b]$, 我们均有

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_y^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|x-y|.$$

从而由夹逼原理可知, $\forall x_0 \in [a,b]$, 我们有

$$\lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0,$$

进而可知函数 F 在 $[a,b]$ 上连续.

假设 f 在点 x_0 处连续, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall t \in [a,b]$, 当 $|t - x_0| < \delta$ 时, $|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 均有

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

故 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

注: 若 f 在点 x_0 仅有单侧连续, 则 F 在点 x_0 有相应的单侧导数. 在跳跃间断点处亦如此.

推论 1. 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 并且 $F' = f$, 也即 F 为 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

推论 2. 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ 可导. $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 令 $G(u) = \int_{\psi(u)}^{\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t$. 那么函数 G 可导且 $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 我们均有

$$G'(u) = f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u).$$

证明: $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 我们有

$$G(u) = \int_a^{\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{\psi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(u)\big) - F\big(\psi(u)\big).$$

于是由复合函数求导法则可知 G 可导且

$$\begin{aligned} G'(u) &= F'\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - F'\big(\psi(u)\big)\psi'(u) \\ &= f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u), \end{aligned}$$

因此所证结论成立.

例 1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin 3t}{t}\,\mathrm{d}t$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin 3t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = 3.$

例 2. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

解: $\forall x>0$, 我们有 $\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant x$, 于是由夹逼原理可得知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t=+\infty$, 进而我们由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)e^{x^2}}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例 3. 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, $f(x) > 0$. $\forall x \in [a,b]$, 令 $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$. 求证: 函数 G 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点.

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 因而 G 在 $[a,b]$ 上可导, 从而连续. 又 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) > 0$, 那么

$$G(a) = \int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < 0,\ \ G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0,$$

由连续函数介值定理可知 G 在 $[a,b]$ 上有零点. $\forall x \in [a,b]$, $G'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 则 G 为严格递增, 从而为单射, 故在 $[a,b]$ 上仅有一个零点.

例 4. 如果 $f:[0,1]\to(0,1)$ 为可积函数, 求证: 存在唯一的 $\xi\in(0,1)$ 使得 $2\xi-\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

证明: $\forall t\in[0,1]$, 令 $F(t)=2t-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-1$, 则 $F\in\mathscr{C}[0,1]$. 由严格保序性可得

$$F(1)=1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-f(x))\,\mathrm{d}x>0,$$

而且 $F(0)=-1$, 于是由连续函数介值定理可知 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$, 即 $2\xi-\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

与此同时, 对任意 $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, 我们还有

$$\begin{aligned} F(t) - F(s) &= \left(2t - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(2s - \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \int_0^t (2 - f(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^s (2 - f(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_s^t \big(2 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant t - s > 0, \end{aligned}$$

于是 F 为单射, 从而所求函数方程的解唯一.

例 5. 设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 若\ x\in[0,1) \\ 1, & 若\ x\in[1,2] \end{cases}$. $\forall x\in[0,2]$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 计算 F'.

解: 因为 f 在 $[0,2]\setminus\{1\}$ 上连续, 由此立刻可知 $\forall x\in[0,2]\setminus\{1\}$, 我们有 $F'(x)=f(x)$. 而 $x=1$ 为 f 的跳跃间断点, 于是我们有

$$F'_-(1)=f(1-0)=2,\ F'_+(1)=f(1+0)=1,$$

因此函数 F 在点 $x=1$ 处不可导.

微积分 A (1)

姚家燕

第 22 讲

第 21 讲回顾: 一致连续函数

- 一致连续函数: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in X$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- 刻画: 函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 上为一致连续当且仅当对于 X 当中的任意的两个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, 则我们有
$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$
- 闭区间上的连续函数一致连续.
- 非一致连续例子: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, 1)$.

回顾: 典型的可积函数类

- 在闭区间上仅有限多个点间断点的有界函数可积. 特别地, 闭区间上的连续函数、逐段连续函数均可积.
- 闭区间上的单调函数可积.
- 闭区间上的有界函数为 Riemann 可积当且仅当其间断点集为零测度集.

回顾: 定积分的性质

- (线性性) 假设 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 而且 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 在有限多个点处改变函数的值, 既不会改变函数的可积性, 也不改变积分的大小.

- (积分区间的可加性) 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数而 $c\in(a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 f 分别在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上可积, 此时

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, 我们均有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

- (保序性) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ 且 $f \geqslant g$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 若 $\exists m, M \in \mathbb{R}$ 使 $m \leqslant f \leqslant M$, 则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

- (保号性) 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 非负, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

- (严格保号性) 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 为非负函数, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 当且仅当 $f \equiv 0$.

- (严格保序性) 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 使 $f \geqslant g$, 则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
且等号成立当且仅当 $f \equiv g$.

典型例子

- (阶梯函数) 如果 $f(x) = k_i$, $\forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, 则 f 可积, 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1})$, 其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- 若 $f \in \mathscr{C}[a-1, b+1]$ (其中 $a < b$), 则

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b |f(x+t) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

- (严格保序性) $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}$.

- 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

- 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $fg \in \mathscr{R}[a,b]$.
- (Cauchy 不等式) 若 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x\right).$$

- (Hölder) 若 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

- (积分第一中值定理) 若$f\in\mathscr{C}[a,b]$, 则$\exists\xi\in[a,b]$使得我们有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

- (广义积分第一中值定理) 如果 $f\in\mathscr{C}[a,b]$, $g\in\mathscr{R}[a,b]$ 且 g 不变号, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

回顾: 原函数与变上、下限积分求导

- 设 J 为区间, 而 $F, f : J \to \mathbb{R}$ 为函数. 若 F 在 J 上连续, 在 J 的内部可导并且 $F' = f$, 则称 F 为 f 的一个原函数.
- 设 $f \in \mathscr{R}[a, b]$. $\forall x \in [a, b]$, 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F \in \mathscr{C}[a, b]$. 如果 f 在点 $x_0 \in [a, b]$ 连续, 则 F 在点 x_0 处可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.
- 若 f 在点 x_0 仅有单侧连续, 则 F 在该点有相应的单侧导数. 在跳跃间断点处亦如此.

- 如果 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 且 $F' = f$, 也即 F 为 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.
- 有跳跃间断点的函数没有原函数.
- 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ 可导. $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 定义 $G(u) = \int_{\psi(u)}^{\varphi(u)} f(t)\mathrm{d}t$. 那么 G 为可导函数且 $\forall u \in [\alpha, \beta]$, 均有
$$G'(u) = f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u) - f\big(\psi(u)\big)\psi'(u).$$
- 典型例子: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin 3t}{t}\mathrm{d}t = 3.$

命题 1. 有跳跃间断点的函数没有原函数.

证明: 用反证法, 假设函数 f 有原函数且它在点 x_0 跳跃. 不失一般性, 设 $f(x_0+0)>f(x_0-0)$, 否则考虑 $-f$. 选取 $\alpha \in \big(f(x_0-0), f(x_0+0)\big)$ 使得 $\alpha \neq f(x_0)$. 因 $f(x_0-0) < \alpha$, 由函数极限保序性知存在 $c < x_0$ 使 $\forall x \in [c, x_0)$, $f(x) < \alpha$. 同理可知存在 $d > x_0$ 使 $\forall x \in (x_0, d]$, $f(x) > \alpha$. 又因 $\alpha \neq f(x_0)$, 于是 f 在 $[c, d]$ 上不会取到 α, 这与 Darboux 定理矛盾! 故所证结论成立.

例 6. 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$, 定义

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

计算 F''.

解: $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$F(x) = x\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

于是 $F'(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 从而 $F''(x) = f(x)$.

作业题: 第 5.3 节第 145 页第 1 题第 (4), (5) 题, 第 2, 3, 4 题, 第 146 页第 5 题, 第 7 题, 第 8 题第 (3), (4) 小题, 第 11 题. 提示: 见第 19 讲第 30 页, 将那里的 f 换成 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

补充题: (加强的积分第一中值定理)

若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 在 (a,b) 内连续, 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

微积分基本定理

定理 2. (Newton-Leibniz 公式) 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $G \in \mathscr{C}[a,b]$ 为 f 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G\Big|_a^b := G(b) - G(a).$$

证明: $\forall u \in [a,b]$, 定义 $F(u) = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$. 则 F 可导且 $\forall x \in (a,b)$, $F'(x) = f(x) = G'(x)$. 于是 $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = G(x) + C$, 从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

评注

- 因为 $G' = f$, 故 $\mathrm{d}G(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$. 出于简便, 人们常将 Newton-Leibniz 公式写成:
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}G(x) = G\Big|_a^b = G(b) - G(a).$$
- 设 $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ 可导并且 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $G'(x) = f(x)$. 若 $G(a+0)$, $G(b-0)$ 均存在且有限, 则我们有
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G\Big|_a^b := G(b-0) - G(a+0).$$

例 7. 计算 $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \,\mathrm{d}(-\cos x) = -\cos x\Big|_0^\pi$

$$= -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

例 8. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x \ (0 < r < 1)$.

解: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\,\mathrm{d}x}{1-2r\cos x+r^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \,\mathrm{d}\Big(2\arctan\big(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\big)\Big)$

$$= 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

例 9. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 若\ x\in[0,1)\\ 1, & 若\ x\in[1,2]\end{cases}$. $\forall x\in[0,2]$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 计算 F'.

解: $\forall x\in[0,2]$, 当 $x\leqslant 1$ 时, 我们有

$$F(x)=\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^x=x^2,$$

故 $\forall x<1$, $F'(x)=2x$. 当 $x\geqslant 1$ 时, 我们则有

$$F(x)=\int_0^1 2t\,\mathrm{d}t+\int_1^x 1\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+t\Big|_1^x=x,$$

则 $\forall x>1$, $F'(x)=1$. 而 $F'_-(1)=2$, $F'_+(1)=1$, 因此函数 F 在点 $x=1$ 处不可导.

例 10. 若 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 求证:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 因此 $|f|$ 连续, 从而由最值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使 $|f(\xi)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. 又由积分中值定理, $\exists \eta \in [a,b]$ 使得我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta),$$

由此我们立刻可以导出

$$|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_{\eta}^{\xi} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{\eta}^{\xi} |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[a,b]} |f(x)| &= |f(\xi)| \leqslant |f(\eta)| + |f(\xi)-f(\eta)| \\
&\leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_{a}^{b} |f'(x)|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

因此所证结论成立.

例 11. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

于是由夹逼原理立刻可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

例 12. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

解: $\forall n \geqslant 1$, 令 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$. 则 $I_n \geqslant 0$, 且

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1} x\,\mathrm{d}x = I_{n+1}.$$

于是由单调有界定理可知数列 $\{I_n\}$ 收敛. 设其极限为 I. 则由数列极限的保号性可知 $I \geqslant 0$.

注意到 $\forall n \geqslant 1$ 以及 $\forall \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 我们有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

则由极限保序性可得 $0 \leqslant I \leqslant \varepsilon$, 再由 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ 可任意小立刻可得 $I = 0$.

作业题: 第 5.2 节第 141 页第 7 题第 (2) 小题.

例 13. 令 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$. 比较 I_1, I_2 的大小.

证明: $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 我们有 $\sin x < x$. 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上, 正弦函数严格递增, 余弦函数严格递减, 故

$$\sin(\sin x) < \sin x,\ \cos(\sin x) > \cos x.$$

从而 $I_1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. 另外,

$$I_2 > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

于是我们有 $I_2 > I_1$.

例 14. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$, 求证: $\exists \xi \in [0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(\xi).$$

证明: $\forall x \in [0,1]$, 定义 $g(x) = x^2$, 则 g 连续并且非负. 由积分第一中值定理知, $\exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)x^2\,\mathrm{d}x &= f(\xi)\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= f(\xi)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}f(\xi).\end{aligned}$$

§4. 不定积分

定义 1. 将定义在区间上的函数 f 的原函数的一般表达式称为 f 的不定积分, 记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

评注: (1) $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是以 x 为自变量的函数.

(2) 若 F, G 均为 f 的原函数, 则 $F' = G'$, 于是存在常数 C 使得 $G - F = C$, 故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ (其中 } C \text{ 为常数)}.$$

(3) 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$.

不定积分与导数、微分的关系

- 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, 则 $F'(x) = f(x)$,

  $$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x) = f(x),$$

  $$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

  $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

- (线性性) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

  $$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

基本的不定积分公式

- $\int \mathrm{d}x = x + C.$
- $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1),$

  $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log|x| + C.$
- $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1),$

  $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C.$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$

  $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

- $\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$.
- $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$.
- $\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$.

例 1. 计算 $\int |x-1|\,\mathrm{d}x$.

解: 当 $x \geqslant 1$ 时, 我们有

$$\int |x-1|\,\mathrm{d}x = \int (x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x + C_1.$$

当 $x < 1$ 时, 我们则有

$$\int |x-1|\,\mathrm{d}x = \int (1-x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

由于原函数在点 $x = 1$ 处连续, 则 $C_1 = 1 + C_2$,

故 $\int |x-1|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 1 + C, & 若\ x \geqslant 1, \\ x - \frac{1}{2}x^2 + C, & 若\ x < 1. \end{cases}$

例 2. 计算 $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$.

解: $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= 2\int dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= 2x - 2\arctan x + C$.

例 3. 计算 $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)(\sin^2 x)}$.

解: $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)(\sin^2 x)} = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos^2 x)(\sin^2 x)}dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$= \tan x - \cot x + C$.

例 4. 计算 $\int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解:
$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int \mathrm{d}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \log|x| + \arctan x\right)$$
$$= x^3 - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \log|x| + \arctan x + C.$$

例 5. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}\ (a \neq 0)$.

解:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2a}\Big(\log|x+a| - \log|x-a|\Big) + C$$
$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$$

例 6. 计算 $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$.

解: $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int (1+\sin x)\mathrm{d}x$
$= x - \cos x + C$.

例 7. 计算 $\int e^{|x|}\mathrm{d}x$.

解: 当 $x \geqslant 0$, $\int e^{|x|}\mathrm{d}x = \int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C_1$.
当 $x < 0$ 时, $\int e^{|x|}\mathrm{d}x = \int e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x} + C_2$.
由于原函数在点 $x = 0$ 连续, 从而 $C_2 = 2 + C_1$.
故 $\int e^{|x|}\mathrm{d}x = \begin{cases} e^{x} + C, & 若\ x \geqslant 0, \\ 2 - e^{-x} + C, & 若\ x < 0. \end{cases}$

1. 第一换元积分法 (凑微分):

若 $F'(y)=f(y)$, 而 u 为可导函数, 则

$$(F\circ u)'(x)=F'(u(x))u'(x)=f(u(x))u'(x).$$

故 $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=F(u(x))+C$. 通常也将左式写成 $\int f(u(x))\mathrm{d}u(x)$, 则我们有

$$\begin{aligned}\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x &= \int f(u(x))\mathrm{d}u(x)\\ &= F(u(x))+C.\end{aligned}$$

例 8. 计算 $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

解: $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = \int \mathrm{d}(e^{x^2}) = e^{x^2} + C$.

例 9. 设 $a \neq 0$. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}\big(\arctan\frac{x}{a}\big)$
$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

例 10. 设 $a > 0$. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \mathrm{d}(\arcsin\frac{x}{a}) = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

例 11. 计算 $\int \tan x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$
$= -\int \mathrm{d}\big(\log|\cos x|\big) = -\log|\cos x| + C$.

例 12. 计算 $\int \cot x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \log|\sin x| + C$.

例 13. 计算 $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x$
$= \int \mathrm{d}(\tan x - x) = \tan x - x + C$.

例 14. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+4x^2)(\arctan 2x+1)^2}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+4x^2)(1+\arctan 2x)^2}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{(1+(2x)^2)(1+\arctan 2x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\arctan 2x)}{(1+\arctan 2x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+\arctan 2x)}{(1+\arctan 2x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Big(\frac{1}{1+\arctan 2x}\Big)$$

$$= -\frac{1}{2(1+\arctan 2x)} + C.$$

例 15. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

解: 方法 1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \int \frac{\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

方法 2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos x-1} - \frac{1}{\cos x+1}\right)\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C$

$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{(\cos x-1)^2}{\cos^2 x-1}\right| + C = \log\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$

$= \log\left|\csc x - \cot x\right| + C.$

例 16. 计算 $\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$= \int \left(-\frac{1}{2}\frac{(3+2x-x^2)'}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} \right)\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\mathrm{d}x$

$= -\sqrt{3+2x-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-1}{2})^2}}\mathrm{d}(\frac{x-1}{2})$

$= -\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin\frac{x-1}{2} + C.$

例 17. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = -\int \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{e^{-x}+1} = -\log(1+e^{-x}) + C.$

微积分 A (1)

姚家燕

第 23 讲

第 22 讲回顾: 微积分基本定理 (Newton-Leibniz 公式)

- 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $G \in \mathscr{C}[a,b]$ 为 f 的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G\big|_a^b := G(b) - G(a)$.
- 设 $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ 可导并且 $\forall x \in (a,b)$, 均有 $G'(x) = f(x)$. 若 $G(a+0)$, $G(b-0)$ 均存在且有限, 则我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G\Big|_a^b := G(b-0) - G(a+0).$$

回顾: 不定积分

- 将定义在区间上的函数 f 的原函数的一般表达式称为 f 的不定积分, 记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. 这是一个以 x 为自变量的函数.
- 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C$.

不定积分与导数、微分的关系

- 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, 则 $F'(x) = f(x)$,

$$\Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big)' = F'(x) = f(x),$$

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}\Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

- **(线性性)** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

基本的不定积分公式

- $\int \mathrm{d}x = x + C.$
- $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1),$

  $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \log|x| + C.$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1),$

  $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C.$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$

  $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

- $\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$.
- $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$.
- $\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$.

回顾: 求不定积分的基本方法

- 分段计算, 线性性, 降低三角函数的幂次.
- 第一换元积分法 (凑微分):

若 $F'(y) = f(y)$, 则

$$\begin{aligned}\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x &= \int f(u(x))\mathrm{d}u(x) \\ &= F(u(x)) + C.\end{aligned}$$

例 18. 计算 $\int \sec x \, dx$.

解: $\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$

$= \log\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C$

$= \log|\sec x + \tan x| + C$.

作业题: 第 5.4 节第 156 页第 2 题第 (1), (2) 题, 第 3 题第 (1), (6), (7), (9) 小题, 第 4 题第 (3), (4), (9), (11) 题, 其中 $\sinh = \mathrm{sh}$.

补充题: 计算 $\int \sec x \, dx$ (模仿例 15).

2. 第二换元积分法:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= F(t) + C \overset{t=t(x)}{=} F(t(x)) + C.$$

例 19. 计算 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}(t^2) = \int \frac{\sin t}{t} \cdot (2t)\,\mathrm{d}t$

$$= \int 2\sin t\,\mathrm{d}t = -2\cos t + C$$

$$= -2\cos\sqrt{x} + C.$$

例 20. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}} \overset{u=\sqrt[3]{1+x}}{=\!=} \int \frac{\mathrm{d}(u^3-1)}{1+u}$

$= \int \frac{3u^2\,\mathrm{d}u}{1+u} = 3\int \left(u - 1 + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$

$= 3\left(\frac{1}{2}u^2 - u + \log|1+u|\right) + C$

$= 3\left(\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{1+x} + \log\left|1+\sqrt[3]{1+x}\right|\right) + C.$

例 21. 计算 $\int \frac{x-2}{1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{x-2}{1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x \overset{u=\sqrt{x+1}}{=\!=} \int \frac{u^2-3}{1-u}\mathrm{d}(u^2-1)$

$= \int \Big(-2u^2 - 2u + 4 - \frac{4}{1-u}\Big)\mathrm{d}u$

$= -\frac{2}{3}u^3 - u^2 + 4u + 4\log|1-u| + C_1$

$= -\frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1} - x + 4\log|1-\sqrt{1+x}| + C.$

注: 当被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 时, 常用三角函数代换法.

例 22. 计算 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

解: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\overset{x=a\sin t}{\underset{|t|\leqslant\frac{\pi}{2}}{=\!=}} \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}(a\sin t)$$

$$= \int (a\cos t)\cdot(a\cos t)\,\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \tfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\Big(t + \frac{\sin 2t}{2}\Big) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\big(t + \sin t\cos t\big) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 23. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{x=a\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{=}} \int \frac{\mathrm{d}(a\tan t)}{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}$

$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$

$= \log|\sec t + \tan t| + C_1$ (见例 18)

$= \log|\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x}{a}| + C_1$

$= \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

例 24. 计算 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}\,\mathrm{d}x$

$$\overset{x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t}{\underset{|t|\leqslant\frac{\pi}{2}}{=}} \int \frac{1-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)^2}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)^2}}\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t\Big)$$

$$= \int (\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int (\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}\tfrac{1-\cos 2t}{2})\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{11}{8}t - \frac{5}{16}\sin 2t + C = \frac{11}{8}t - \frac{5}{8}\sin t\cos t + C$$

$$= \frac{11}{8}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2}) - \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2}))^2}+C$$

$$= \frac{11}{8}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})\sqrt{1+x-x^2}+C.$$

例 25. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$.

解: 被积函数的定义域为 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$.

当 $x>a$ 时, 考虑变换 $x=a\sec t\ (0<t<\frac{\pi}{2})$,

则 $\mathrm{d}x=a\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$, 由此可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{1}{a\tan t}\cdot a\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$$

$$=\log|\sec t+\tan t|+C_1=\log\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_1'.$$

当 $x < -a$ 时, 考虑变换 $u = -x$, 则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\log\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C_2$$

$$= \log\left|\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + C_2 = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_2'.$$

于是我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1', & \text{若 } x > a, \\ \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_2', & \text{若 } x < -a. \end{cases}$$

因为原函数的定义域由两个不相交的区间组成，故常数 C_1' 和 C_2' 可以不同，但计算不定积分的目的只是为了得到一个原函数，因此人们通常将上式合并成一个统一的表达式:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

作业题: 第 5.4 节第 157 页第 6 题第 (1), (2), (3), (5) 题.

3. 分部积分法:

设函数 u, v 均为一阶连续可导. 由于

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u,$$

则 $u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

例 26. 计算 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$

$$= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

例 27. 计算 $\int \log x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \log x \, \mathrm{d}x = x\log x - \int x \mathrm{d}(\log x)$

$= x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x\log x - x + C$.

例 28. 计算 $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

解: $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x - \int x \, \mathrm{d}(\arcsin x)$

$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$= x\arcsin x + \int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \int \mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

例 29. 计算 $\int xe^x \mathrm{d}x$.

解: $\int xe^x \mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(e^x) = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$.

例 30. 计算 $\int 3x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x$.

解: $\int 3x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}(x^3)$

$= x^3 \arctan x - \int x^3\,\mathrm{d}(\arctan x)$

$= x^3 \arctan x - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$= x^3 \arctan x - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= x^3 \arctan x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$

$= x^3 \arctan x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$.

例 31. 计算 $\int x\log^2 x\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x\log^2 x\,\mathrm{d}x = \int \log^2 x\,\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

$$= \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\log^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\log x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int x\log x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int \log x\,\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{x^2}{4} + C.$$

例 32. 计算 $\int x\sqrt{x^2+1}\log\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x\sqrt{x^2+1}\log\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&= \int\sqrt{x^2+1}\log\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}\left(\tfrac{x^2}{2}\right) \overset{y=\sqrt{x^2+1}}{=\!=} \int y\log\sqrt{y^2-2}\cdot y\,\mathrm{d}y \\
&= \int \tfrac{1}{2}\log(y^2-2)\,\mathrm{d}\left(\tfrac{y^3}{3}\right) = \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \int \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{y^4}{y^2-2}\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \tfrac{1}{3}\int\left(y^2+2+\tfrac{4}{y^2-2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \tfrac{1}{9}y^3 - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\int\left(\tfrac{1}{y-\sqrt{2}} - \tfrac{1}{y+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{6}y^3\log(y^2-2) - \tfrac{1}{9}y^3 - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\log\left|\tfrac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}}\right| + C \\
&= \tfrac{1}{6}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\log(x^2-1) - \tfrac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\log\tfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}
$$

例 33. 计算 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

解: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\,\mathrm{d}(\sqrt{a^2 - x^2})$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

由此我们立刻可得

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}) + C.$$

例 34. 计算 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$.

解: $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \left(\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x$

$= x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,$

由此立刻可得

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

作业题: 计算 $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$.

例 35. 设 $m \in \mathbb{N}^*$. 求 $I_m = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m}$ $(a > 0)$.

解: $I_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} - \int x\,\mathrm{d}\frac{1}{(x^2+a^2)^m}$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m} - 2ma^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}.$$

于是 $I_{m+1} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m} I_m$. 注意到

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

由此可得 I_m 的一般表达式.

例 36. 计算 $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ $(ab\neq 0)$.

解: $\int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\mathrm{d}x = \int e^{(a+ib)x}\mathrm{d}x$

$= \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + \widetilde{C} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)e^{ibx} + \widetilde{C}$.

由此可得

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

作业题: 第 5.4 节第 157 页第 7 题第 (3), (6), (10), (12).

有理函数的不定积分

设 $Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\ (a_n\neq 0)$.
由代数基本定理可知 Q 有 n 个根 (包括重数),
其中复根成对出现. 于是

$$Q(x)=a_n\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_j)^{l_j}\cdot\prod_{k=1}^{t}(x^2+p_kx+q_k)^{m_k},$$

这里 $\alpha_j\in\mathbb{R}$ 均不相同, $p_k^2-4q_k<0$, 而且

$$\sum_{j=1}^{s}l_j+2\sum_{k=1}^{t}m_k=n.$$

任意的有理真分式 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P,Q 为多项式且 $\deg P<\deg Q$) 可分解为

$$R(x)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{u=1}^{l_j}\frac{a_{j,u}}{(x-\alpha_j)^u}+\sum_{k=1}^{t}\sum_{v=1}^{m_k}\frac{b_{k,v}x+c_{k,v}}{(x^2+p_kx+q_k)^v},$$

其中 $a_{j,u},b_{k,v},c_{k,v}\in\mathbb{R}$ 为常数. 为证明分解式, 我们可将 $a_{j,u},b_{k,v},c_{k,v}$ 看成未知元 (共有 n 个), 两边乘以 $Q(x)$, 比较多项式的系数, 得到 n 个线性方程, 由此可以唯一确定未定元的值.

于是有理真分式 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 最终可以分解成如下 4 种最简单的分式之和 $(m \geqslant 2)$:

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^m}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} \quad (p^2-4q<0).$$

由于 $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + \frac{4q-p^2}{4}$, 经过变量替换, 有理分式的不定积分可归结成下述 6 种最简单的分式的不定积分 $(a>0)$:

$$\frac{1}{x-\alpha}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)^m}, \quad \frac{x}{x^2+a^2}, \quad \frac{1}{x^2+a^2}, \quad \frac{x}{(x^2+a^2)^m}, \quad \frac{1}{(x^2+a^2)^m}.$$

这些不定积分有显式表达式:

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha} = \log|x-\alpha| + C,$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + C,$
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2) + C,$
- $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} + C,$
- $I_{m+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m} I_m.$

例 37. 计算 $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 由题设可知 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ 的标准分解形如

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

将上式两边同乘以 $(x-2)(x^2+1)^2$ 后可得

$$\begin{aligned}&2x^2+2x+13 = (A+B)x^4 + (C-2B)x^3\\&+(2A+B-2C+D)x^2 + (C-2B+E-2D)x\\&+(A-2C-2E).\end{aligned}$$

比较系数并解方程组可得

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

故 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-2}{x^2+1} + \frac{-3x-4}{(x^2+1)^2}$，由此可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} \\
&\quad -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - 3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \\
&= \log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 2\arctan x + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} \\
&\quad -4\Big(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\Big) + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\arctan x + \frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1} + C.
\end{aligned}$$

例 38. 计算 $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,\mathrm{d}x$.

解: 由带余除法可得

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=1+\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.$$

又 $x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$, 由此我们知

$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 的标准分解形如:

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

两边同乘以 $x^4-3x^3+3x^2-x$ 可得

$$\begin{aligned} x^3+1 &= (A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2 \\ &\quad +(3A+B-C+D)x-A. \end{aligned}$$

由此可得 $A=-1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$. 则

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &\quad +2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} \\ &= x - \log|x| + 2\log|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

例 39. 计算 $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 由题设可知 $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ 的标准分解形如:

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

两边乘以 $(x+1)(x^2+1)^2$ 可得

$$\begin{aligned} 2x = {} & A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) \\ & +(Dx+E)(x+1). \end{aligned}$$

在上式中选取 $x=-1$, 由此立刻可得 $A=-\frac{1}{2}$.

比较系数可得 $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=E=1$, 则

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$\begin{aligned}\int\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{-1}{2(x+1)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int\frac{-1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x\\ &\quad-\frac{1}{2(x^2+1)}+\Big(\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x\Big)+C\\ &= \frac{1}{4}\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C.\end{aligned}$$

例 40. 计算 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}\,dx$.

解: 由题设可知 $\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}$ 的标准分解形如

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

故 $x^2+1=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$. 令 $x=-1$ 可得 $A=\frac{2}{9}$. 令 $x=2$ 则可得 $C=\frac{5}{3}$. 再取 $x=0$ 可得 $B=\frac{7}{9}$. 于是我们有

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{2}{9(x+1)}+\frac{7}{9(x-2)}+\frac{5}{3(x-2)^2}.$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{9(x+1)}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int \frac{7}{9(x-2)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{3(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{9}\log|x+1| + \frac{7}{9}\log|x-2| - \frac{5}{3(x-2)} + C.\end{aligned}$$

作业题: 第 5.5 节第 163 页第 1 题第 (1), (2), (5), (7) 题. 提示: 第 (7) 题可按今天讲的方法解答, 但用变量替换加分部积分会更加简单!

三角有理函数的不定积分

假设 $R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, 其中 $P(u,v),Q(u,v)$ 均为关于变量 u,v 的多项式. 所谓的三角有理函数就是指 $R(\sin x,\cos x)$. 下面我们将由万能公式来将之转化成有理分式的不定积分.

令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $x=2\arctan t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \mathrm{d}(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\\
\sin x &= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\\
\cos x &= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

从而我们有

$$
\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.
$$

例 41. 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法 1.

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = t+\log(1+t^2)+C$$

$$= \tan\frac{x}{2}+\log(1+\tan^2\frac{x}{2})+C = \tan\frac{x}{2}-2\log|\cos\frac{x}{2}|+C.$$

方法 2. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

$$= \tan\frac{x}{2}-\log(1+\cos x)+C = \tan\frac{x}{2}-2\log|\cos\frac{x}{2}|+C.$$

在一些特殊情形, 上述讨论可以简化:

- 被积函数为 $\sin x$ 的奇函数 (将 $\sin x$ 变换成 $-\sin x$ 后会出现一个负号):

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=\!=} -\int R(1-t^2, t)\,\mathrm{d}t.$$

- 被积函数为关于 $\cos x$ 的奇函数:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x \overset{t=\sin x}{=\!=} \int R(t, 1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

- 将 $\sin x, \cos x$ 变换成 $-\sin x, -\cos x$ 后不变:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=\!=} \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

例 42. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$.

解: $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$
$$= \int \frac{1}{a^2\tan^2 x + b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a^2\tan^2 x + b^2} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{a}{b}\tan x)}{ab\Big(1 + (\frac{a\tan x}{b})^2\Big)}$$
$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$

例 43. 计算 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\mathrm{d}x$.

解: $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^7 x}\mathrm{d}(\sin x) \overset{t=\sin x}{=\!=} \int \frac{1-t^2}{t^7}\mathrm{d}t$

$$= \int (t^{-7} - t^{-5})\mathrm{d}t = -\frac{1}{6t^6} + \frac{1}{4t^4} + C$$

$$= -\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + C.$$

作业题: 第 5.5 节第 164 页第 2 题第 (2), (5), (6), (7) 小题. 注: 求三角有理函数的不定积分通常很困难, 首先应考虑利用三角函数的关系.

例 44. 计算 $\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x$.

解:
$$
\begin{aligned}
\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x &= \int \sec x \,\mathrm{d}(\tan x) \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \,\mathrm{d}(\sec x) \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) \,\mathrm{d}x \\
&= \sec x \cdot \tan x + \log|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

故 $\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \log|\sec x + \tan x| + C$.

某些无理函数的不定积分

考虑不定积分 $\int R(x, y(x))\,\mathrm{d}x$, 其中 $y = y(x)$ 为无理函数, $R(x, y)$ 是关于变量 x, y 的有理分式. 我们希望寻求变量替换 $x = x(t)$ 来使得原来的不定积分能转化成以 t 为变量、前面已解决的不定积分. 常见的情形有以下两种.

1. $y(x)=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $n\geqslant 1$ 为整数, $ad-bc\neq 0$.

解: 令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 则 $t^n=\frac{ax+b}{cx+d}$, 从而 $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$,

于是 $\mathrm{d}x=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t$, 进而可得

$$\int R\Big(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=\!=}\int R\Big(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t.$$

例 45. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

$$\overset{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{=} \int t \cdot \frac{1}{-\frac{1+t^3}{1-t^3}+1}\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1+t^3}{1-t^3}\Big) = \int \frac{1-t^3}{-2t^2} \cdot \Big(-\frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{3}{(1-t)(1+t+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \Big(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\log|1-t| + \int \frac{(t+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\log|1-t| + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2)}{\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2} + \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2}$$

$$= -\log|1-t| + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2)}{\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2} + \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2}$$

$$= -\log|1-t|+\frac{1}{2}\log(\frac{3}{4}+(t+\frac{1}{2})^2)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})+C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2} + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t^3}{(1-t)^3}\right| + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}) + C$$

$$= -\frac{3}{2}\log|\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}|$$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{2}\right) + C.$$

2. $y(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$.

解: 通常先将 $ax^2 + bx + c$ 配方, 然后再来应用三角函数将原来那个不定积分转化成三角有理函数的不定积分.

例 46. 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x^2-2x+5}}$.

解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{(x-1)^2+4}}$

$$\xlongequal[|t|<\frac{\pi}{2}]{x=1+2\tan t} \int \frac{\mathrm{d}(1+2\tan t)}{2+\sqrt{4\tan^2 t+4}} = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{2+\frac{2}{\cos t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(\cos t)\cdot(1+\cos t)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(\cos t)\cdot(1+\cos t)} = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \log|\sec t + \tan t| - \tan\frac{t}{2} + C_1.$$

由于 $\tan t = \frac{x-1}{2}$, $\sec t = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}$,

$\tan\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{\sec t - 1}{\tan t} = \frac{\sqrt{x^2-2x+5}-2}{x-1}$, 于是我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x^2-2x+5}} = \log|\sec t + \tan t| - \tan\frac{t}{2} + C_1$$

$$= \log(\sqrt{x^2-2x+5} + x - 1) - \frac{\sqrt{x^2-2x+5}-2}{x-1} + C.$$

作业题: 第 5.5 节第 164 页第 3 题第 (6), (8) 题, 第 4 题第 (1), (4) 题.

§5. 定积分的计算

分段函数的积分

例 1. 计算 $\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |x-1|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(x - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2$$
$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{4}{2} - 2\right) - \left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = 1.$$

定积分的换元积分公式

定理 1. 若 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 而 $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ 连续可导, 则 $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

证明: 设 F 为 f 的一个原函数. $\forall t \in [\alpha, \beta]$, 令 $G(t) = F(\varphi(t))$. 则 G 连续可导且 $\forall t \in [\alpha, \beta]$,

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

于是由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} G'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注: 与不定积分不同, 在上述定理中, 我们无需假设 φ 为双射.

例 2. 计算 $\int_{-4}^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}$.

解: $\int_{-4}^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}\overset{u=-x}{=}\int_{4}^{3}\frac{\mathrm{d}(-u)}{\sqrt{(-u)^2-4}}=\int_{3}^{4}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-4}}$

$$\overset{u=2\sec t}{=}\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}(2\sec t)}{2\tan t}=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\tan t}$$

$$=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^2 t}\overset{z=\sin t}{=}\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}=\log\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}+\log 2.$$

例 3. 计算 $\int_1^6 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3x-2}}$.

解: $$\int_1^6 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3x-2}} \overset{u=\sqrt{3x-2}}{=\!=} \int_1^4 \frac{\frac{u^2+2}{3}\,\mathrm{d}\frac{u^2+2}{3}}{u} = \int_1^4 \frac{u^2+2}{3u}\cdot\frac{2u}{3}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_1^4 \frac{2}{9}(u^2+2)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\Big(\frac{u^3}{3}+2u\Big)\Big|_1^4 = \frac{2}{9}(21+6) = 6.$$

例 4. 计算 $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

解: $$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{x=\pi-t}{=\!=} \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\pi-t)$$
$$= \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - I.$$

于是 $I = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1+\cos^2 t} = -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

定积分的分部积分公式

定理 2. 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

证明: $\forall x \in [a, b]$, 我们有

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

于是 $\int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b$. 由此立刻可得所要结论.

例 5. 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}(t^2) = 2\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = 2e - 2e^t\Big|_0^1 = 2.$$

例 6. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x = \int_1^e \log x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \log x\,\mathrm{d}x$$
$$= x(\log x - 1)\Big|_1^e - x(\log x - 1)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} = 2 - \frac{2}{e}.$$

例 7. 计算 $\int_0^1 x(\log x)^2\,\mathrm{d}x$.

解: $\displaystyle\int_0^1 x(\log x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(\log x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}(\log x)^2$

$\displaystyle = -\int_0^1 x\log x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\log x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$

例 8. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}(\arcsin x)$

$\displaystyle = \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

例 9. 对任意整数 $n \geqslant 0$, 计算

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

解: 由定义可知 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1$.
当 $n \geqslant 2$ 时, 应用分部积分可得

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x) \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
&\quad -(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}$$

故 $\forall n \geqslant 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 进而 $\forall n \geqslant 1$, 我们有

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \cdot I_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

$$I_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} \cdot I_0 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

最后 $\forall n \geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t = I_n. \end{aligned}$$

定积分的对称性

定理 3. 设 $f \in \mathscr{R}[-a,a]$, 其中 $a>0$.

- 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明: $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=} \int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}(-t) = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^a \big(f(x) + f(-x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

由此立刻可得所要的结论.

例 10. 计算 $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法 1. 由题设可知

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,\mathrm{d}(\pi-x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

方法 2. 由题设可知

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (-x)\,\mathrm{d}(\arctan\cos x)$$

$$= -x\arctan\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \arctan\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \int_0^\pi \arctan\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \arctan\cos(\pi-x)\,\mathrm{d}(\pi-x)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(-\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 11. 计算 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=2\sin t}{=\!=} 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,\mathrm{d}(2\sin t)$$

$$= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

作业题: 第 5.6 节第 170 页第 1 题第 (1), (3) 题, 第171页第2题第(7), (8)题, 第3题第(1), (9)题.

周期连续函数的定积分

定理 4. 如果 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 是周期为 $T > 0$ 的周期函数, 则 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明:
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x+T)\,\mathrm{d}(x+T)$$
$$= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

微积分 A (1)

姚家燕

第 24 讲

第 23 讲回顾: 求不定积分的基本方法

- 分段计算, 线性性, 降低三角函数的幂次.
- 第一换元积分法 (凑微分): 若 $F'(y) = f(y)$, 则 $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u(x))\mathrm{d}u(x) = F(u(x)) + C$.
- 第二换元积分法: 如果 $f(x(t))x'(t) = F'(t)$, 则

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &\overset{x=x(t)}{=} \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(t) + C \overset{t=t(x)}{=} F(t(x)) + C.\end{aligned}$$

- 分部积分: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.
- $\int P(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$, 其中 $P(x)$ 为多项式.
- $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ $(ab \neq 0)$.

- $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \log|\sec x + \tan x| + C$.
- $\int \csc x \, \mathrm{d}x = \log|\csc x - \cot x| + C$.

下面假设 $a > 0$.

- 若含 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 作变换 $x = a \sin t$ $(|t| \leqslant \frac{\pi}{2})$.
- 若含 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 作变换 $x = a \tan t$ $(|t| < \frac{\pi}{2})$.
- 若含 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 要分情况讨论: 当 $x > a$ 时, 定义 $x = a \sec t$ $(0 \leqslant t < \frac{\pi}{2})$; 而当 $x < -a$ 时, 定义 $x = -u$ 或 $x = -a \sec t$ $(0 \leqslant t < \frac{\pi}{2})$.

回顾: 多项式的因式分解

设 $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \ (a_n \neq 0)$. 由代数基本定理可知 Q 有 n 个根 (包括重数), 其中复根成对出现. 于是

$$Q(x) = a_n \prod_{j=1}^{s} (x - \alpha_j)^{l_j} \cdot \prod_{k=1}^{t} (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k},$$

这里 $\alpha_j \in \mathbb{R}$ 均不相同, $p_k^2 - 4q_k < 0$, 而且

$$\sum_{j=1}^{s} l_j + 2 \sum_{k=1}^{t} m_k = n.$$

回顾: 有理分式的分解

有理分式 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 总可以表示成:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{u=1}^{l_j} \frac{a_{j,u}}{(x-\alpha_j)^u} \\ &+ \sum_{k=1}^{t}\sum_{v=1}^{m_k} \frac{b_{k,v}x + c_{k,v}}{(x^2+p_k x+q_k)^v}, \end{aligned}$$

其中 $T(x)$ 为多项式, $a_{j,u}, b_{k,v}, c_{k,v} \in \mathbb{R}$ 为常数.

求标准分解的方法: 待定系数, 带入特殊值.

有理分式的不定积分可以归结成 6 种最简单的有理分式的不定积分 ($a > 0$, $m \geqslant 2$):

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha} = \log|x - \alpha| + C$,
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + C$,
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\log(x^2 + a^2) + C$,
- $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$,
- $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} + C$,
- $I_{m+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{x}{2a^2m(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}I_m$.

回顾：三角有理函数的不定积分

设 $R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$，其中 P,Q 是以 u,v 为变量的多项式. 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t$. 于是

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

故 $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=\!=}\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

在一些特殊情形, 上述讨论可以简化:

- 被积函数为 $\sin x$ 的奇函数 (将 $\sin x$ 变换成 $-\sin x$ 后会出现一个负号):

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x \,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=\!=} -\int R(1-t^2, t)\,\mathrm{d}t.$$

- 被积函数为关于 $\cos x$ 的奇函数:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x \overset{t=\sin x}{=\!=} \int R(t, 1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

- 将 $\sin x, \cos x$ 变换成 $-\sin x, -\cos x$ 后不变:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=\!=} \int R\Big(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

回顾: 两类无理函数的不定积分

设 $R(x,y)$ 是关于变量 x,y 的有理分式.

(1) $$\int R\Big(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=} \int R\Big(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t,$$

(2) $$\int R\Big(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,\mathrm{d}x=\int R\Big(x,\sqrt{a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}\Big)\,\mathrm{d}x,$$

再进行适当的三角代换.

回顾: 定积分的计算

- 利用求不定积分的方法 (分段积分等等).
- 换元公式: $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$
- 分部积分公式: 若 $u, v \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$, 则

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = uv\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

- 对称性: (1) 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

  (2) 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$
- 若 f 以 T 为周期, 则 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$

定积分与数列极限

定理 5. 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\{P_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一列分割使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$. 记 $P_n = (x_i^{(n)})_{0\leqslant i\leqslant k_n}$. 则对任意点 $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k_n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 $\exists \delta > 0$ 使得对于区间 $[a,b]$ 的任意的带点分割 (P,ξ),

当 $\lambda(P) < \delta$ 时, 我们均有

$$\left|\sigma(f; P, \xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

$\forall n \geqslant 1$, 选取 $\xi_n = \{\xi_i^{(n)}\}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$, 则 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$, 均有 $\lambda(P_n) < \delta$, 故

$$\left|\sigma(f; P_n, \xi_n) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

也即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$

推论. 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\xi_i^{(n)} \in [a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n} i]$.

注: 该结论常用来计算一些复杂的数列极限.

例 12. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$.

解: $\forall x \in [0,\pi]$, 令 $f(x) = \sin x$. 则 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$,

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^{\pi}\sin x\ \mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

又 $\forall n\geqslant 1$, 我们均有

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{2}{\pi}$.

例 13. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\gamma+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\gamma}$, 其中 $\gamma > 0$.

解: $\forall x \in [0,1]$, 定义 $f(x) = x^{\gamma}$. 则 $f \in \mathscr{C}[0,1]$,

并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\gamma+1}$, 进而可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{k}{n}\Big)^{\gamma} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\gamma+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\gamma}.
\end{aligned}$$

例 14. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解: $\forall x\in[0,1]$, 定义 $f(x)=\frac{1}{1+x}$. 则 $f\in\mathscr{C}[0,1]$, 并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\log 2$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\log 2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.\end{aligned}$$

作业题: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

例 15. (Jensen 不等式) 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $m, M \in \mathbb{R}$ 使 $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 若 $\varphi \in \mathscr{C}[m,M]$ 为凸函数, 求证: $\varphi\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$.

证明: 因 φ 连续而 f 可积, 则 $\varphi \circ f$ 可积, 进而

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \varphi\Big(\frac{1}{b-a}\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\Big)$$

$$= \lim_{\lambda(P)\to 0}\varphi\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{b-a} f(\xi_i)\Big) \leqslant \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{b-a}\varphi\big(f(\xi_i)\big)$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

带积分余项的 Taylor 公式

定理 6. 设 $n \geqslant 0$ 为整数. 如果 $f \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a,b]$, 而 $x_0 \in [a,b]$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

注: 通常称 $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$ 为积分余项. 令 $u = x_0 + t(x-x_0)$, 则我们有

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))\,\mathrm{d}t.$$

证明: $\forall k \in \mathbb{N}\ (1 \leqslant k \leqslant n)$, 由分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^k f^{(k+1)}(u)\,\mathrm{d}u \\
=&\frac{1}{k!}(x-u)^k f^{(k)}(u)\Big|_{x_0}^{x} - \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(u)\,\mathrm{d}\big((x-u)^k\big) \\
=&-\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^{k-1} f^{(k)}(u)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

将上述 n 个等式相加可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \int_{x_0}^{x} f'(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u,$$

由此立刻可得所要结论.

评注

- 由加强的积分第一中值定理得 Cauchy 余项:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in (0,1).$$

- 由广义积分第一中值定理得 Lagrange 余项:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in [0,1]. \end{aligned}$$

§6. 积分的应用

直角坐标系下平面区域的面积

典型问题: 假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(x) \geqslant g(x)$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

例 1. 计算由曲线 $y=2-x^2$ 与 $y=x$ 所围的区域的面积.

解: 设两曲线的交点为 (x_0,y_0), 则 $y_0=2-x_0^2$, $y_0=x_0$, 故 $x_0=-2$ 或 1, 于是两曲线的交点为 $(-2,-2)$ 和 $(1,1)$, 进而可知所求面积为

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

例 2. 计算由曲线 $y = x^2$, 曲线 $y = \sqrt{x}$ 及直线 $x = 2$ 所围成的区域的面积.

解: 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 的两个交点为 $(0, 0)$, $(1, 1)$, 曲线 $y = x^2$ 与直线 $x = 2$ 的交点为 $(2, 4)$, 曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x = 2$ 的交点为 $(2, \sqrt{2})$, 这些交点将所围的区域分割成两部分. 我们将夹在 $(0, 0)$ 与 $(1, 1)$ 之间的面积记为 S_1, 其余部分的面积记作 S_2.

于是我们有

$$S_1 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2 \\ &= 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

故所求总面积为 $S = S_1 + S_2 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$.

例 3. 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 所围区域的面积.

解: 由对称性知所求面积为第一象限内面积的 4 倍, 后者由曲线 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ (0\leqslant x\leqslant a)$ 与直线 $y=0$ 围成, 故所求面积为

$$S=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\sin t}{=\!=} 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}(a\sin t)$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

直角坐标系下由参数表示的曲线所围成的平面区域的面积

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中 x, y 连续, $y \geqslant 0$, $x(t)$ 为严格递增, 则存在连续反函数 $t = t(x)$. 定义 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$. 由 Γ, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S = \int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

例 4. 求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴所围成的区域的面积.

解: 因 $\forall t \in [0, 2\pi]$, 均有 $x'(t) = a(1-\cos t) \geqslant 0$ 并且 $x'(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 的任意子区间上不恒为零, 从而 $x(t)$ 为严格递增, 则所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\Big(t - 2\sin t + \frac{t+\frac{1}{2}\sin 2t}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 2 题第 (1), (4), (7) 小题, 其中 (7) 中 “确定 $k > 0$ 的值”.

极坐标系下平面区域的面积

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的区域的面积等于

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(\rho(\theta)\right)^2 \mathrm{d}\theta.$$

例 5. 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围的区域的面积.

解: $$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\rho(\theta)\big)^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \Big(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\Big(\theta+2\sin\theta+\frac{\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 2 题第 (6) 小题. 改为"所围图形的公共部分的面积".

曲线的弧长问题

1. 若在直角坐标系下曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 $x(t), y(t)$ 为连续可导并且导数不同时为零，这样的曲线称为光滑曲线. 则 Γ 的弧微分为

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

其弧长为 $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$

2. 若在直角坐标系下曲线 Γ 的方程为

$$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b),\ \text{其中}\ f\ \text{连续可导},$$

则其弧微分为 $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, 弧长为

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. 若曲线 Γ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),\ \text{其中}\ \rho(\theta)\ \text{连续可导},$$

其参数表示为 $x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta, y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta$,

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \\ y'(\theta) &= \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta, \end{aligned}$$

则 $\big(x'(\theta)\big)^2 + \big(y'(\theta)\big)^2 = \big(\rho(\theta)\big)^2 + \big(\rho'(\theta)\big)^2$, 于是弧微分 $\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$, 故弧长为

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

4. 若在直角坐标系下空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),\ x, y, z \text{ 为连续可导,}$$

且其导数不全为零, 则其弧微分为

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

于是曲线的弧长为

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

例 6. 求圆 $x^2+y^2=R^2$ 的周长.

解: 方法 1. 由对称性, 所求周长为圆周在第一象限内的 4倍, 而圆周在第一象限内的方程为

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant R).$$

故所求周长为

$$L=4\int_0^R\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=4\int_0^R\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=2\pi R.$$

方法 2. 圆周的参数方程为

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

从而所求圆周的周长为

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = 2\pi R. \end{aligned}$$

例 7. 求心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$的弧长.

解: 所求弧长为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1+\cos\theta))^2 + (a(-\sin\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^{2\pi} |\cos\frac{\theta}{2}|\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{t=\frac{\theta}{2}}{=} 2a\int_0^{\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}(2t) = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t - 4a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4a\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4a\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 8a.$$

例 8. 求旋轮线的一拱

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ \ a > 0)$$

的弧长.

解: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

例 9. 求空间螺旋线

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ct\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的弧长.

解: 所求弧长为

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}. \end{aligned}$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 3 题第 (1), (5) 题.

曲线的曲率

假设曲线 Γ 的参数表示 $x(t), y(t)$ 关于 t 二阶连续可导, 将它在点 (x, y) 处的切线与 x 轴的正向的夹角记为 α, 那么 $\tan\alpha$ 为切线的斜率, 故 $\tan\alpha = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, 从而 $\alpha = \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\cdot\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = \frac{x'y''-x''y'}{(x')^2+(y')^2}.$$

曲线 Γ 在点 (x,y) 处的曲率为 $\kappa := \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\ell}\right|$. 则

$$\kappa = \left|\frac{\alpha'(t)}{\ell'(t)}\right| = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

特别地, 如果在直角坐标系下曲线 Γ 的方程为

$y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 且 f 二阶连续可导, 则

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

如果 Γ 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$, 其中 $\rho(\theta)$ 二阶连续可导, 则 $\kappa=\frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

例 10. 求圆 $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的曲率.

解: 所求圆在点 (x,y) 处的曲率为

$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|(-R\sin t)^2-(-R\cos t)(R\cos t)|}{\left((-R\sin t)^2+(R\cos t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R}.$$

注: 若曲线 Γ 在点 (x, y) 处的曲率等于 κ, 则称 $R = \frac{1}{\kappa}$ 为曲线 Γ 在点 (x, y) 的曲率半径.

例 11. 求抛物线 $x = y^2$ 上任意一点处的曲率与曲率半径.

解: 所求抛物线在点 (x, y) 的曲率为

$$\kappa = \frac{|x''(y)|}{((x'(y))^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

相应的曲率半径为 $R = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}(4y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$.

作业题:

1. 证明极坐标下的曲率公式,

2. 求下列曲线的曲率半径:

(1) $y^2 = 2px \ (p > 0)$,

(2) $x = a\cos t,\ y = b\sin t \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a, b > 0)$,

(3) 心脏线 $\rho = a(1 + \cos\theta) \ (a > 0)$.

微积分 A (1)

姚家燕

第 25 讲

第 24 讲回顾: 定积分与数列极限

- 设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 而 $\{P_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一列分割使 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P_n) = 0$. 记 $P_n = (x_i^{(n)})_{0\leqslant i\leqslant k_n}$. 那么对任意的点 $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k_n)$,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- 若 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\xi_i^{(n)} \in [a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n} i]$.

回顾: Jensen 不等式

- 假设 $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $m, M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in [a,b]$, 我们均有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 若 $\varphi \in \mathscr{C}[m,M]$ 为凸函数, 则我们有

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

注: 若 φ 为凹函数, 上述不等式依然成立, 只是此时应该将 "$\leqslant$" 改为 "$\geqslant$".

回顾: 带积分余项的 Taylor 公式

假设 $n \in \mathbb{N}$. 如果 $f \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a,b]$, 而 $x_0 \in [a,b]$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u.$$

通常将 $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$ 称为积分余项. 令 $u = x_0 + t(x-x_0)$, 则

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+t(x-x_0))\,\mathrm{d}t.$$

评注

- 由加强的积分第一中值定理得 Cauchy 余项:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in (0,1).$$

- 由广义积分第一中值定理得 Lagrange 余项:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ \ \theta \in [0,1]. \end{aligned}$$

回顾：直角坐标系下平面区域的面积

典型问题：设 $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big| \,\mathrm{d}x.$$

回顾：直角坐标系下由参数表示的曲线所围成的平面区域的面积

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,

其中 x, y 连续, $y \geqslant 0$, $x(t)$ 为严格递增, 则存在连续反函数 $t = t(x)$. 定义 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.

由 Γ, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围区域的面积等于

$$S = \int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=\!=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

回顾: 极坐标系下平面区域面积

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的区域的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big(\rho(\theta)\big)^2 \, \mathrm{d}\theta.$$

光滑曲线的弧长

- 参数方程: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$
- 函数图像: $L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$
- 极坐标方程: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, \mathrm{d}\theta.$
- 空间曲线参数方程:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

曲线的曲率与曲率半径

- 参数方程: $\kappa = \frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 函数图像: $\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 极坐标方程: $\kappa = \frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 曲率半径: $R = \frac{1}{\kappa}$.

作业题: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 2 题第 (1), (4), (7) 小题, 其中 (7) 中“确定 $k>0$ 的值”.

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 2 题第 (6) 小题, 改为“所围图形的公共部分的面积”.

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 3 题第 (1), (5) 题.

作业题:

1. 证明极坐标下的曲率公式,

2. 求下列曲线的曲率半径:

(1) $y^2 = 2px \ (p > 0)$,

(2) $x = a\cos t,\ y = b\sin t \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a, b > 0)$,

(3) 心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta) \ (a > 0)$.

由平面截面积求立体体积

典型问题: 将一个物体置于平面 $x = a$ 与 $x = b$ 之间 $(a < b)$. $\forall x \in [a, b]$, 用垂直于 x 轴的平面去截此物体所得到的截面的面积为 $S(x)$, 并且假设 $S \in \mathscr{R}[a, b]$, 则该物体的体积为

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

旋转体的体积

问题的表述: 假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$, 并且 $f \geqslant 0$. 求由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ $(b > a \geqslant 0)$ 及 x 轴所围区域分别绕 x 轴和 y 轴生成的旋转体的体积.

绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积

解: 用垂直 x 轴的平面截旋转体所得的截面是半径为 $f(x)$ 的圆盘, 则 $S(x) = \pi(f(x))^2$. 于是所求旋转体的体积为 $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$.

绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积

解: 设由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = z$, x 轴所围区域绕 y 轴旋转得到的体积为 $V(z)$. 当 $h \to 0$ 时,

$$\begin{aligned} V(z+h) - V(z) &= \pi(z+h)^2 y - \pi z^2 y + o(h) \\ &= 2\pi z y h + o(h), \end{aligned}$$

故 $V'(z) = 2\pi z f(z)$. 则所求旋转体的体积为

$$V = V(b) = \int_a^b V'(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

评注

如果 Γ 的方程为 $x = g(y) \geqslant 0\ (0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d)$, 在前面的讨论中须交换 x, y 的作用. 具体来说, 由 Γ 与直线 $y = c$, $y = d$ 及 y 轴所围平面图形绕 y 轴旋转一周后所产生的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 \mathrm{d}y,$$

上述图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y)\, \mathrm{d}y.$$

例 12. 计算球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 的体积.

解: 题设球体由上半圆 $x^2+y^2=R^2\ (y \geqslant 0)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转生成. 因上半圆方程为 $y=\sqrt{R^2-x^2}\ (-R \leqslant x \leqslant R)$, 故球体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^{R} y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} (R^2-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

例 13. 求曲线 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 绕 x 旋转所得到的旋转体的体积.

解: 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi^2. \end{aligned}$$

例 14. 求旋轮线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \ a > 0)$$

绕 x 旋转所得到的旋转体的体积.

解: $\forall t \in (0, 2\pi)$, 均有 $x'(t) = a(1 - \cos t) > 0$, 故 $x(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上严格递增, 从而有连续反函数 $t = t(x)$, 则 $y = y(t(x))$, 故所求体积为

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 \,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 \cdot a(1 - \cos t) \,\mathrm{d}t$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \,\mathrm{d}t = 5a^3\pi^2.$$

更一般的旋转体的体积

问题表述: 假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$, 并且 $f \geqslant g \geqslant 0$.

求由 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ 所围成的

区域 $(b > a \geqslant 0)$ 分别绕着 x 轴以及 y 轴旋转

所生成的旋转体的体积 V_x 与 V_y.

解: 设由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围区域绕 x 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_1, 而由 $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围区域绕 x 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_2, 于是所求体积为夹在上述两旋转体之间部分, 故

$$V_x=V_1-V_2=\pi\int_a^b\left(\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right)\mathrm{d}x.$$

设由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围成的区域绕 y 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_1, 由 $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ 以及 y 轴所围得区域绕 y 轴旋转而生成的旋转体的体积为 V_2, 那么所求体积为夹在上述两旋转体之间的部分, 故

$$V_y = V_1 - V_2 = 2\pi \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

例 15. 求由圆弧 $y=\sqrt{2-x^2}$, 抛物线 $y=\sqrt{x}$ 及 y 轴所围平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转生成的旋转体的体积.

解: 圆弧与抛物线的交点为 $(1,1)$. 则所围区域绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积为

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi\int_0^1 \left((\sqrt{2-x^2})^2-(\sqrt{x})^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^1 (2-x^2-x)\,\mathrm{d}x = \pi\left(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}\pi.
\end{aligned}
$$

所围区域绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积为

$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^1 (x\sqrt{2-x^2}-x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\Big(-\frac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big)\Big|_0^1 \\
&= \frac{20\sqrt{2}-22}{15}\pi.
\end{aligned}
$$

作业题: 第 5.7 节第 185 页第 7 题第 (1), (3) 题.

旋转体的侧面积

问题的表述: 求光滑曲线 Γ 绕 x 轴或 y 轴旋转生成的曲面的面积.

绕 x 轴旋转生成的曲面的侧面积

解: 面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|y|\,\mathrm{d}\ell$.

1. 若在直角坐标系下曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 x, y 连续可导, 则所求侧面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \, \mathrm{d}\ell(t) \\ &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2. 如果曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 其中 f 连续可导, 则所求侧面积为

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. 若曲线 Γ 的极坐标方程为

$$\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 连续可导, 则所求侧面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

绕 y 轴旋转生成的曲面的侧面积

解: 侧面积的面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|x|\,\mathrm{d}\ell$. 于是在前面的参数方程表示下, 所求侧面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|\,\mathrm{d}\ell(t) \\
&= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

若曲线 Γ 的方程为 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 其中 f 为连续可导, 则所求侧面积为

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

若曲线 Γ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta) \ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 连续可导, 则所求侧面积为

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\rho(\theta) \cos\theta| \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} \, \mathrm{d}\theta.$$

例 16. 求椭圆

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi],\ a > b > 0)$$

绕长轴旋转生成的旋转体的侧面积.

解: 令 $\varepsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$. 由题设知所求旋转体由椭圆上半部分绕 x 轴旋转生成, 故其侧面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{\pi} |y(t)|\, \mathrm{d}\ell(t) \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} b \sin t \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= 2\pi b \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t}\, \mathrm{d}(-\cos t) \\
&\overset{u=\cos t}{=} 2\pi ab \int_1^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\, \mathrm{d}(-u) \\
&= 2\pi ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= 4\pi ab \int_0^{1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\, \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1-\varepsilon^2 u^2}\,\mathrm{d}u \\
&\overset{u=\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta}{=} 4\pi ab \int_0^{\arcsin\varepsilon} \cos\theta\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta\right) \\
&= \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\arcsin\varepsilon} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\arcsin\varepsilon} (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\arcsin\varepsilon} \\
&= 2\pi ab\left(\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right).
\end{aligned}
$$

例 17. 求心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 围绕极轴旋转生成的旋转面的面积.

解: 所求旋转面由心脏线上半部分绕极轴旋转生成, 故所求面积为

$$S = 2\pi \int_0^\pi |\rho\sin\theta| \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^\pi (1+\cos\theta)\sin\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{32}{5}\pi a^2 \cos^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

例 18. 求曲线 $y = \frac{1}{3}x^3$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 围绕着 x 轴旋转生成的旋转面的面积.

解: 所求面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 |y| \, \mathrm{d}\ell(x) = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1 + (x^2)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{6} \int_0^1 \sqrt{1 + x^4} \, \mathrm{d}(1 + x^4) \\ &= \frac{\pi}{9} (1 + x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{9} (\sqrt{8} - 1). \end{aligned}$$

例 19. 求曲线 $y=x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 围绕 x 轴旋转生成的旋转体的侧面积.

解: 所求侧面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^1 |y|\mathrm{d}\ell(x) = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}\pi x^2\Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

注: 如果曲线由若干光滑弧组成, 可以分别计算每段弧旋转后生成的侧面积, 然后求和.

作业题: 第 5.7 节第 186 页第 8 题第 (1), (4) 题.

平面光滑曲线的质心

设曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 x, y 为连续可导. 设其线密度为 $\mu(t)$, 那么质量微元为 $\mathrm{d}M(t) = \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)$, 故其质量为

$$M = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}M(t) = \int_\alpha^\beta \mu(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲线关于 y 轴的静力矩微元为

$$\mathrm{d}M_y(t) = x(t)\,\mathrm{d}M(t) = x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t),$$

故曲线关于 y 轴的静力矩为

$$M_y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}M_y(t) = \int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

同理, 曲线关于 x 轴的静力矩为

$$M_x = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}M_x(t) = \int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲线的质心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 的坐标公式为:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}.$$

若 Γ 为均匀 (即 μ 为常数), 且其弧长为 L, 则

$$\overline{y} = \frac{1}{L}\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}\ell(t),$$

由此可得 $2\pi\overline{y}L = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}\ell(t)$.

若曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 那么该曲线的质心坐标公式为:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x},$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}.$$

作业题: 求密度均匀抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的质心.

例 20. 求密度均匀半圆周 $x^2 + y^2 = R^2\,(y \geqslant 0)$ 的质心.

解: 由题设可知上半圆周的参数方程为

$$x = R\cos t,\ \ y = R\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant \pi),$$

从而其弧长为 $L = \pi R$, 故所求质心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 满足:

$$\overline{x} = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\cos t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 0,$$
$$\overline{y} = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2R}{\pi},$$

因此所求质心为 $(0, \frac{2R}{\pi})$.

第 5 章总复习

- 定积分: 分割, 步长, 带点分割, Riemann 和, Riemann 积分 (也被称为定积分), 可积函数, 不可积函数 (Dirichlet 函数不可积).
- 可积函数的基本性质: 可积函数有界.
- 可积性判断准则: Darboux 判别准则, 振幅判别准则, Lebesgue 判别准则.

- 可积函数类: 仅仅有有限多个间断点的有界连续函数 (逐段连续函数), 单调函数.
- 一致连续性: 定义, 刻画, 闭区间上的连续函数为一致连续以及该结论的拓广.
- 定积分的性质: 线性, 关于积分区间可加性, 有限韧性, (严格) 保序性、保号性, 绝对值不等式, 乘积的可积性, 积分第一中值定理, Cauchy、Hölder、Jensen 不等式.

- 定积分的理论计算: 变上、下限积分及求导, 原函数, Newton-Leibniz 公式.
- 不定积分: 定义, 不定积分与导数、微分的关系, 基本的不定积分公式.
- 计算不定积分的基本方法: 分段法, 线性性, 降低三角函数的幂等, 换元法, 分部积分法, 有理函数的不定积分 (有理函数标准分解), 三角有理函数的不定积分, 两类特殊的无理函数的不定积分.

- 计算定积分的基本方法: 分段法, 线性性, 降低三角函数的幂等, 换元法, 分部积分法, 有理函数的定积分 (有理函数的标准分解), 三角有理函数的定积分, 两特殊无理函数的定积分, 定积分的对称性 (奇偶性), 周期的连续函数的定积分.
- 定积分与数列极限: 某些复杂数列极限可以转换成 Riemann 和, 再利用定积分来计算.

直角坐标系下平面区域的面积

假设 $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$. 则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 所围平面区域的面积等于

$$S = \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big| \, \mathrm{d}x.$$

直角坐标系下由参数表示的曲线所围成的平面区域的面积

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,
其中 x, y 连续可导, $y \geqslant 0$, 而 $x(t)$ 为严格递增,
则有连续反函数 $t = t(x)$. 令 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.
由 Γ, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围区域的面积为

$$S = \int_a^b y(t(x))\,\mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

极坐标系下平面区域的面积

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为

$$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

其中 $\rho(\theta)$ 为连续函数. 那么曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的区域的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big(\rho(\theta)\big)^2 \,\mathrm{d}\theta.$$

光滑曲线的弧长

- 参数方程: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$
- 函数图像: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$
- 空间曲线参数方程:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲线的曲率与曲率半径

- 参数方程: $\kappa = \frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 函数图像: $\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 极坐标方程: $\kappa = \frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- 曲率半径: $R = \frac{1}{\kappa}$.

由平面截面积求立体体积

典型问题: 将一个物体置于平面 $x = a$ 与 $x = b$ 之间 $(a < b)$. $\forall x \in [a, b]$, 用垂直于 x 轴的平面去截此物体所得到的截面的面积为 $S(x)$, 并且假设 $S \in \mathscr{R}[a, b]$, 则该物体的体积为

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

旋转体的体积

假设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $f \geqslant 0$. 由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b\,(b > a \geqslant 0)$ 以及 x 轴所围区域分别绕 x 轴和 y 旋转所生成的旋转体体积为:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x, \;\; V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x.$$

注: 同样可求由 $x = g(y) \geqslant 0$ $(0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d)$, $y = c$, $y = d$ 以及 y 轴所围图形绕 x 轴或 y 轴旋转得到的旋转体体积: 交换 x, y 的作用.

更一般的旋转体的体积

假设 $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$ 且 $f \geqslant g \geqslant 0$. 则由 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ $(b > a \geqslant 0)$ 所围的区域分别绕 x 轴与 y 轴旋转所生成的旋转体体积:

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) \mathrm{d}x, \\ V_y &= 2\pi \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

绕 x 轴旋转生成的曲面的侧面积

面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|y|\,\mathrm{d}\ell$.

- 参数方程:

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

- 函数图像: $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程:

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

绕 y 轴旋转生成的曲面的侧面积

面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi|x|\mathrm{d}\ell$.

- 参数方程:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

- 函数图像: $S = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$
- 极坐标方程:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\cos\theta|\sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

参数方程表示的平面光滑曲线的质心

设线密度为 $\mu(t)$, 则质心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 的坐标公式为:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_\alpha^\beta y(t)\mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}{\int_\alpha^\beta \mu(t)\,\mathrm{d}\ell(t)}.$$

若曲线 Γ 的方程为 $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 则

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x},$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}.$$

典型例子: 均匀半圆周 $x^2+y^2=R^2\,(y \geqslant 0)$ 的质心为 $(0, \frac{2R}{\pi})$.

综合练习

例 1. 若 $f \in \mathscr{C}[-1,1]$, 求证:

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

证明: 由于 $f \in \mathscr{C}[-1,1]$, 因此存在 $M>0$ 使得 $\forall x\in[-1,1]$, 均有 $|f(x)|\leqslant M$. 又 f 在原点处连续, 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,1)$ 使得 $\forall x\in[-\delta,\delta]$, $|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}$. 令 $\eta=\frac{\varepsilon\delta^2}{8M+1}$. 则 $\forall h\in(0,\eta)$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_{-1}^{-\delta} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{1} \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2Mh}{\delta^2}(1-\delta) + \frac{2Mh}{\delta^2}(1-\delta)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\delta}^{\delta} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{h} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

由此可得 $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h(f(x)-f(0))}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$, 再注意到

$\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{h\to 0^+}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{1} = \lim\limits_{h\to 0^+} 2\arctan\frac{1}{h} = \pi$,

由此可知所证结论成立.

例 2. 若 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, 求证: $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \Big(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t \Big)\,\mathrm{d}u.$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $F(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$, 则 F 连续可导且 $F' = f$, 从而 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \Big(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t \Big)\,\mathrm{d}u = \int_0^x F(u)\,\mathrm{d}u \\
= \ & uF(u)\Big|_0^x - \int_0^x u\,\mathrm{d}F(u) = xF(x) - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u \\
= \ & \int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

例 3. 若 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导并且 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 求证: $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24}\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

证明: 方法 1. 令 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$. 由于 f 为二阶可导, 则由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, $\forall x\in[a,b]$, 存在 $\xi(x)$ 介于 $x, \frac{a+b}{2}$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) \\ &\quad +\frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2, \end{aligned}$$

由此我们立刻可以导出

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| &= \Big|f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2\,\mathrm{d}x\Big| \\
&= \Big|f'(\frac{a+b}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b + \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2\,\mathrm{d}x\Big| \\
&= \Big|\int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_a^b \frac{|f''(\xi(x))|}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{3}(x-\frac{a+b}{2})^3\Big|_a^b = \frac{(b-a)^3}{24}M,
\end{aligned}
$$

故所证结论成立.

方法 2. $\forall t\in[a,b]$, 定义 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 那么 $F'=f$. 由于 f 为二阶可导, 故 F 为三阶可导. 于是由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$ 以及 $\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得

$$\begin{aligned} F(a) &= F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+F'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(a-\frac{a+b}{2}\Big) \\ &\quad +\frac{1}{2!}F''\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(a-\frac{a+b}{2}\Big)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)\Big(a-\frac{a+b}{2}\Big)^3, \\ F(b) &= F\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+F'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big) \\ &\quad +\frac{1}{2!}F''\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_2)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)^3. \end{aligned}$$

又由于 $F(a)=0$, $f(\frac{a+b}{2})=0$, $F'=f$, $F''=f'$, $F'''=f''$, 由此我们立刻可得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) = \frac{(b-a)^3}{24}\cdot\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)).$$

因为 $\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$ 介于 $f''(\xi_1)$, $f''(\xi_2)$ 之间, 则由 Darboux 定理可知, 存在 ξ 介于 ξ_1,ξ_2 之间使得 $f''(\xi)=\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$, 故

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{(b-a)^3}{24}|f''(\xi)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|,$$

因此所证结论成立.

例 4. 若 $f \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$ 使得 $f(a)=0$, 求证:

$$\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b (f'(x))^2 (x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall t \in [a,b]$, 定义

$$F(t) = \frac{(t-a)^2}{2}\int_a^t (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^t (f'(x))^2 (x-a)^2\,\mathrm{d}x - \int_a^t (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

则 F 连续可导且 $F(a)=0$, 而 $\forall t \in [a,b]$, 均有

$$\begin{aligned} F'(t) &= (t-a)\int_a^t (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - (f(t))^2 \\ &\geqslant \left(\int_a^t f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - (f(t))^2 = 0. \end{aligned}$$

则 F 递增, 从而 $F(b) \geqslant F(a) = 0$, 由此得证.

下面我们将介绍上述不等式的另外一个证明.

于是 $F'(a) = 0$, 并且 $\forall t \in [a, b]$, 均有

$$\begin{aligned} F''(t) &= \int_a^t (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x + (t-a)(f'(t))^2 - 2f(t)f'(t) \\ &= \int_a^t (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x + \int_a^t (f'(t))^2 \, \mathrm{d}x - 2\int_a^t f'(x)f'(t) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^t \left((f'(x))^2 + (f'(t))^2 - 2f'(x)f'(t)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^t \left(f'(x) - f'(t)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0, \end{aligned}$$

故 F' 递增, 于是 $\forall t \in [a, b]$, $F'(t) \geqslant F'(a) = 0$,

则 F 递增, 从而 $F(b) \geqslant F(a) = 0$, 由此得证.

例 5. 若 $f \in \mathscr{C}[0,2\pi]$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 由积分第一中值定理可知,

$$\int_0^{2\pi} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k),$$

其中 $\xi_k \in [\frac{2(k-1)\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n}]$. 由定积分的定义得证.

注: 同样可证, $\forall f \in \mathscr{C}[0,2\pi]$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 6. 设 $R > 0$. 求证:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

证明: $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 定义 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. 则函数 f 可导且 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 我们均有

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0,$$

于是 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 我们均有 $f(x) \geqslant f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$.

进而由定积分的严格保序性可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Rx}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

例 7. 若 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$ 使得

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

求证: 函数 f 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点.

证明: $\forall t \in [0,\pi]$, 我们现定义 $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, $G(t) = \int_0^t F(x)\sin x\,\mathrm{d}x$, 则 F, G 均为连续可导函数且 $F(0) = F(\pi) = G(0) = 0$, 于是

$$G(\pi) = -F(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0,$$

从而由 Rolle 定理可知, $\exists \xi \in (0, \pi)$ 使得

$$0 = G'(\xi) = F(\xi) \sin \xi,$$

于是 $F(\xi) = 0$. 对 F 分别在 $[0, \xi]$, $[\xi, \pi]$ 上应用 Rolle 定理可知, 存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, \pi)$ 使得

$$0 = F'(\xi_1) = f(\xi_1),\ 0 = F'(\xi_2) = f(\xi_2),$$

因此所证结论成立.

例 8. 求 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\neq0.$

解: 由题设可知

$$\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to0}\frac{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}{ax-\sin x}\cdot(ax-\sin x)=0.$$

又 $\forall t>-1\ (t\neq0)$, 均有 $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}>0$, 故 $b=0$.

注意到 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^3)}{x}=0$,则

$$a-1 = \lim_{x\to0}\frac{a-\frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0.$$

于是 $a=1$, 进而由 L'Hospital 法则可得

$$c = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

例 9. 问 a,b,c 何值时 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数.

解: 由于 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$, 则不定积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数当且仅当 $A_1 = B_1 = 0$, 而这则等价于关于 A_2, A_3, B_2 的方程组 $A_2+B_2 = 0$, $A_3-2A_2 = a$, $A_2-2A_3 = b$, $A_3 = c$ 有解, 这又等价于 $a+2b+3c = 0$. 于是不定积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数当且仅当

$$a + 2b + 3c = 0.$$

例 10. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\int_0^{u^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解: 由 L'Hospital 法则可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\int_0^{u^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\int_0^{u^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin(1-t)\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(1-x^2)\cdot(2x)}{3x}\\
=&\frac{2}{3}\arcsin 1=\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

例 11. 寻求无穷小量 $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$ 在 $x\to 0$ 时的阶.

解: 由题设可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^8} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t}{x^8} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos(\sin^2 x)\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(2\sin x\cos x)}{8x^7} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}(\sin^2 x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^4\right)^{\frac{3}{2}}}{4x^6} = \frac{1}{8\sqrt{2}},
\end{aligned}
$$

由此可知所求阶为 8.

例 12. 若函数 $f \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导, 并且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求证:

(1) $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = -\xi f(\xi)$.

(2) $\exists \eta \in (0,1)$ 使得 $2f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$.

证明: (1) $\forall t \in [0,1]$, 我们令 $F(t) = t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 F 可导且 $F(0) = F(1) = 0$. 由 Rolle 定理知, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $0 = F'(\xi) = \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \xi f(\xi)$, 由此立刻可得所要结论.

(2) $\forall t \in [0,1]$, 我们有

$$F'(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + tf(t).$$

于是 $F' \in \mathscr{C}[0,1]$ 在 $(0,1)$ 内可导. 注意到

$$F'(0) = F'(\xi) = 0,$$

则由 Rolle 定理可知 $\exists \eta \in (0,\xi)$ 使得

$$0 = F''(0) = 2f(\eta) + \eta f'(\eta).$$

故所证结论成立.

例 13. 若 $f \in \mathscr{C}[0,1]$, 求证:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall x \in [0,1]$, 定义 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 F 连续可导且 $F' = f$, 于是由分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 (F(\sqrt{x}) - F(x^2))\,\mathrm{d}x \\
&= x(F(\sqrt{x}) - F(x^2))\Big|_0^1 - \int_0^1 x(F(\sqrt{x}) - F(x^2))'\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 x\left(\frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2xf(x^2)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^1 x\left(\frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2xf(x^2)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2x^2 f(x^2)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 xf(x^2)\,\mathrm{d}(x^2) - \int_0^1 xf(\sqrt{x})\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) \\
&= \int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

例 14. 计算 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 因 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^4 x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-t}\sin^4(-t)}{e^{-t}+1}\,\mathrm{d}(-t)$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-t}\sin^4 t}{e^{-t}+1}\,\mathrm{d}t,$$

于是 $I=\frac{1}{2}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}\sin^4 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x\Big)$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.$$

例 15. 若 $f \in \mathscr{C}[1,+\infty)$ 使得 $\forall x \geqslant 1$, 均有

$$f(x) = \log x - \int_1^e f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $a = \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$. $\forall x \geqslant 1$, $f(x) = \log x - a$, 故

$$\begin{aligned} a &= \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e (\log x - a)\,\mathrm{d}x \\ &= x(\log x - 1 - a)\Big|_1^e = e(-a) + 1 + a, \end{aligned}$$

由此立刻可得 $a = \frac{1}{e}$.

例 16. 设 f 连续可导且其反函数 f^{-1} 也为连续可导. 若 $F' = f$, 求 $\int f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$.

解: $\int f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \overset{y=f(x)}{=} \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$$= xf(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= xf(x) - F(x) + C$$

$$= f^{-1}(y)y - F \circ f^{-1}(y) + C.$$

例 17. 计算 $\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\,\mathrm{d}x \xlongequal[|t|<\frac{\pi}{2}]{x=\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t} \int \frac{\sqrt{3}\sec t}{\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{\sqrt{3}}{(\sin t)(\cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\cos t} + \log|\csc t - \cot t|\right) + C$$

$$= \sqrt{2x^2+3} + \sqrt{3}\log\frac{\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}|x|} + C.$$

例 18. 计算 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{=}} \int \frac{e^t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\,\mathrm{d}t$

$= \int e^t \cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\Big(\int e^{t+it}\,\mathrm{d}t\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\Big) + C$

$= \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{2}e^{t+it}(1-i)\Big) + C = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) + C$

$= \frac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{(1+x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

例 19. 计算 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解: $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,\mathrm{d}x \overset{x=\log t}{=} \int \frac{t-1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^{-2}}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{1-t^{-2}}}\,\mathrm{d}(t^{-1})$$

$$= \log\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + \arcsin(t^{-1}) + C$$

$$= \log(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin(e^{-x}) + C.$$

例 20. 计算 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$.

解: 由于 $I_1 = \int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$

$$= \arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right) + C_1,$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}$$

$$= \log\left|\sin x+\cos x+\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}\right|+C_2,$$

由此可导出 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)$

$$-\frac{1}{2}\log\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin(2x)}\right|+C.$$

例 21. 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \,\mathrm{d}x$.

解: $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x \,\mathrm{d}x$

$= \int (\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}) e^x \,\mathrm{d}x$

$= \int \left(e^x \,\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2}) + \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}(e^x)\right)$

$= e^x \tan\frac{x}{2} + C.$

例 22. 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x \overset{y=\sqrt{e^x-1}}{=\!=} \int_0^1 y\,\mathrm{d}\big(\log(1+y^2)\big)$$

$$= \int_0^1 \frac{2y^2\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = 2 - \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}y}{1+y^2}$$

$$= 2 - 2\arctan y\Big|_0^1$$

$$= 2 - \frac{\pi}{2}.$$

例 23. 计算定积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

解: 方法 1.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\cos^2 x-\sin^2 x)^2+2\cos^2 x\sin^2 x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x)+\frac{1}{2}\sin^2(2x)} \overset{u=2x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{\cos^2 u+\frac{1}{2}\sin^2 u} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{(1+\frac{1}{2}\tan^2 u)\cos^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan u)}{1+(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan u)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

方法 2.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{1+\cos 2x}{2})^2 + (\frac{1-\cos 2x}{2})^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\,\mathrm{d}x}{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)+1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2(2x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{(\frac{1}{\cos^2(2x)}+1)\cos^2(2x)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(\tan(2x))}{(1+\tan^2(2x)+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(2x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

例 24. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续且 $\forall x \in [0,1]$, 均有 $f(x) > 0$. 求证:

$$e^{\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 $\varphi(x) = e^x$, 则 φ 为凸函数, 于是由 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} e^{\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x} &= \varphi\Big(\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leqslant \int_0^1 \varphi\big(\ln f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

例 25. 如果函数 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$ 使得

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0,$$

求证: 函数 f 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

证明: 用反证法, 假设函数 f 在 $(0,\pi)$ 内至多有一个零点. 由于 $f \in \mathscr{C}[0,\pi]$, 于是由积分中值定理可知, $\exists \xi \in (0,\pi)$ 使得

$$0 = \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = f(\xi)\sin\xi,$$

从而 $f(\xi)=0$, 进而可知 ξ 为 f 在 $(0,\pi)$ 内的唯一零点. 再由连续函数介值定理知 f 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,π) 内取常号. 又 $\forall x\in(0,\pi)$, $\sin x>0$, 而

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0,$$

故 f 在 $(0,\xi)$, (ξ,π) 内的符号相反.

不失一般性, 设 f 在 $(0,\xi)$ 内取负号, 在 (ξ,π) 内取正号, 否则我们可以考虑函数 $-f$.

则 $\forall x \in (0,\pi)$, 均有 $f(x)\sin(x-\xi) \geqslant 0$, 但

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin(x-\xi)\,\mathrm{d}x &= \cos\xi\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &\quad -\sin\xi\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= 0,\end{aligned}$$

于是由定积分的严格保号性可得知, $\forall x \in [0,\pi]$, 我们均有 $f(x)\sin(x-\xi)=0$, 矛盾! 故假设条件不成立, 从而所证结论成立.

例 26. 若 $f\in\mathscr{R}[a-1,b+1]$ 在点 a,b 连续, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

证明: $\forall t\in[a-1,b+1]$, 定义

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则 $F(a)=0$, 并由题设知 F 在 $[a-1,b+1]$ 上连续, 在点 a,b 可导且 $f(a)=F'(a)$, $f(b)=F'(b)$.

于是我们就有

$$
\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - F(b)\Big) \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - F(b)\Big) \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(F(b+h)-F(a+h)-F(b)\Big) \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(F(b+h)-F(b)\Big) - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(F(a+h)-F(a)\Big) \\
= & F'(b)-F'(a) = f(b)-f(a).
\end{aligned}
$$

例 27. 若知 $f'(x) = \frac{\cos x}{x}$, $f(\frac{\pi}{2}) = a$, $f(\frac{3\pi}{2}) = b$, 计算 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解: 由题设可知

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f'(x)x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3\pi b}{2} - \frac{\pi a}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}(3b - a) + 2. \end{aligned}$$

例 28. 若 $f \in \mathscr{C}(a,b)$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在且有限, 求证: 函数 f 在 (a,b) 上一致连续. 注: 区间 (a,b) 可以是无限区间.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由于极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在且有限, 由 Cauchy 准则, $\exists c \in (a,b)$ 使得 $\forall x, y \in (a,c)$, 均有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 同样由 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在且有限知, $\exists d \in (a,b)$ 使得 $\forall x, y \in (d,b)$, 我们均有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

现选取 $a_1 \in (a,c)$, $b_1 \in (d,b)$ 使得 $a_1 < b_1$. 因为 $f \in \mathscr{C}(a,b)$, 故 f 在 $[a_1,b_1]$ 上连续, 从而一致连续, 于是 $\exists \delta_1 > 0$ 使得 $\forall x,y \in [a_1,b_1]$, 当 $|x-y| < \delta_1$ 时, 我们均有 $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由此令 $\delta = \min(\delta_1, \frac{1}{2}(b_1-a_1))$. $\forall x,y \in (a,b)$, 当 $|x-y| < \delta$ 时, 不失一般性, 可假设 $x < y$.

下面分情况讨论:

(1) 若 x,y 同属于 $(a,a_1]$, $[a_1,b_1]$, $[b_1,b)$ 当中的一个, 则 $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

下设 x,y 不同属于 $(a,a_1]$, $[a_1,b_1]$, $[b_1,b)$.

(2) 若 $x \in (a, a_1)$, 因 $|x-y| < \delta \leqslant \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$, 则 $y \in [a_1, b_1]$, 于是 $|a_1 - y| \leqslant |x-y| < \delta$, 故

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) 若 $x \in [a_1, b_1]$, 则我们有 $y \in (b_1, b)$, 进而知 $|x - b_1| \leqslant |x-y| < \delta$. 又 $b_1, y \in (d, b)$, 故

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f(b_1)| + |f(b_1) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

综上所述可知 f 在 (a, b) 上一致连续.

例 29. 若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为一致连续, 而 $\{x_n\}$ 为开区间 (a,b) 中的 Cauchy 数列, 则 $\{f(x_n)\}$ 也为 Cauchy 数列.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 因 f 一致连续, 则 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 当 $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 又数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列, 则 $\exists N>0$ 使得 $\forall m,n>N$, 我们均有 $|x_m-x_n|<\delta$, 进而可知 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$, 故 $\{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 数列.

例 30. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(a, b)$. 则 f 在 (a, b) 上一致连续当且仅当且极限 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 均存在且有限.

证明: 充分性. 假设 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 收敛. 将上述极限定义为 $f(a), f(b)$, 则 $f \in \mathscr{C}[a, b]$, 从而 f 在 $[a, b]$ 上一致连续, 进而在 (a, b) 上也为一致连续.

必要性. 假设 f 在开区间 (a, b) 上一致连续. 下证 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 收敛. 对 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 可类似讨论.

$\forall n \geqslant 1$, 令 $a_n = a + \frac{1}{n}(b-a)$. 则数列 $\{a_n\}$ 在开区间 (a,b) 中趋近于 a, 因此为 Cauchy 数列, 于是 $\{f(a_n)\}$ 也为 Cauchy 数列, 故收敛. 设其极限为 A. 下面将证明 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$. $\forall \varepsilon > 0$, 由一致连续性可知, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in (a,b)$, 当 $|x-y| < 2\delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$, 故 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$ 时, $|a_n - a| < \delta$, $|f(a_n) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

进而可知 $\forall x \in (a, a+\delta)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
|x - a_{N+1}| &\leqslant |x - a| + |a_{N+1} - a| < 2\delta, \\
|f(x) - A| &\leqslant |f(x) - f(a_{N+1})| + |f(a_{N+1}) - A| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此所证结论成立.

注: 若 (a, b) 为无限区间, 上述结论的必要性可不成立. $\forall x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = x$. 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上为一致连续, 但极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ 不收敛.

谢谢大家!