第 3 次习题课解答

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 极值

(1) **定义:** 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) **极小值点与极小值:** 若 $\exists r > 0$ 使 $\forall X \in B(X_0, r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的 (局部) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (局部) 极小值.

(b) **极大值点与极大值:** 若 $\exists r > 0$ 使 $\forall X \in B(X_0, r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的 (局部) 极大值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (局部) 极大值.

(c) **极小值点和极大值点合称极值点.**

(2) **极值点的必要条件:** 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) 若 X_0 为 f 的极值点, 则 $J_f(X_0) = \vec{0}$, 即 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

下面假设 f 为二阶连续可微函数.

(b) 若 X_0 为 f 的极小值点, 则 $H_f(X_0)$ 为正定或半正定.

(c) 若 X_0 为 f 的极大值点, 则 $H_f(X_0)$ 为负定或半负定.

(3) **极值点的充分条件:** 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数使得 $J_f(X_0) = \vec{0}$.

(a) 若 $H_f(X_0)$ 正定, 则 X_0 为 f 的极小值点;

(b) 若 $H_f(X_0)$ 负定, 则 X_0 为 f 的极大值点;

(c) 若 $H_f(X_0)$ 不定, 则 X_0 不为 f 的极值点.

(4) **极值点的必要条件:** 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数.

(a) 若 X_0 为 f 的极小值点, 则 $H_f(X_0)$ 正定或半正定;

(b) 若 X_0 为 f 的极大值点, 则 $H_f(X_0)$ 负定或半负定.

2. 条件极值

(1) **k-维曲面:** 设 n, k $(n > k \geqslant 1)$ 为整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(X)$ 的秩为 $n - k$. 令

$$S = \Big\{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n - k\Big\}.$$

若 $S \neq \emptyset$, 则称 S 为 k 维曲面.

注: $\forall X_0 \in S$, 由隐函数定理, 在 X_0 的某邻域内, S 中点可表成 k 个变量的函数.

(2) **条件极小值与条件极大值:** 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 k 维曲面, $X_0 \in S$, 而 $f : S \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) 若 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 称 X_0 为函数 f 在 S 上的 (条件) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极小值.

(b) 若 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 称 X_0 为函数 f 在 S 上的 (条件) 极大值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极大值.

(c) 若 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为函数 f 在 S 上的最小值点, 而称 $f(X_0)$ 为最小值.

(d) 若 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为函数 f 在 S 上的最大值点, 而称 $f(X_0)$ 为最大值.

注: 条件最值点必为条件极值点.

(3) **条件极值的必要条件 (Lagrange 乘数法):** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $f, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}$ 为 Ω 上的 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-k})}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \Big\{ X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k \Big\} \neq \emptyset.$$

$\forall X \in \Omega$ 及 $\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$, 定义

$$(\text{拉氏函数}) \quad L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \varphi_j(X).$$

若 $X_0 \in S$ 为 f 在 S 上的条件极值点, 则 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$ 使得 (X_0, λ) 为 L 的驻点.

注: 点 (X_0, λ) 为 L 的驻点当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(X_0, \lambda) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(X_0, \lambda) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n-k). \end{cases}$$

等价地, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \sum\limits_{j=1}^{n-k} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X_0) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \varphi_i(X_0) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n-k). \end{cases}$$

(4) **求曲面上的条件极值的典型方法:**

(a) 由于 Lagrange 乘数法只给出条件极值点的必要条件, 为了确定条件极值点, 还需想办法将条件极值问题转化成最值问题, 比如将之转化成有界闭集上的连续函数的最值问题.

(b) 定义拉氏函数并求其驻点, 由此得到原来那个函数可能的条件极值点.

(c) 比较原来那个函数在上述驻点处值的大小, 由此确定极值点.

(5) **求有界闭区域上的最值的典型方法:**

(a) 极值或最值问题通常可被转化成有界闭区域上的连续函数的最值问题, 由此可知问题的解一定存在, 关键在于如何确定最值点.

(b) 求函数在区域内部的驻点并计算相应值.

(c) 将函数限制在闭区域的边界上, 求相应的拉氏函数的驻点, 并计算原来那个函数的相应值.

(d) 比较上述值的大小, 由此确定最值点.

第 2 部分 题目解答

1. 求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有极值.

解: 由于 f 为初等函数, 因此为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类. 又

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=8x^3-4x,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4y^3-4y,$$

从而可知函数 f 的驻点为

$$P_1=(0,0),\ P_2=(0,1),\ P_3=(0,-1),\ P_4=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},0\Big),\ P_5=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},1\Big),$$
$$P_6=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\Big),\ P_7=\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\Big),\ P_8=\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\Big),\ P_9=\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\Big).$$

另外 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=24x^2-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-4$. 因此海赛矩阵 H_f 在点 P_1 负定, 在 P_5,P_6,P_8,P_9 正定, 在 P_2,P_3,P_4,P_7 不定, 从而 f 的极大值点为 P_1, 极小值点为 P_5,P_6,P_8,P_9.

2. 求函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

解: 由题设可知 f 为初等函数, 因此为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类. 又

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{-(x^2+y^2)}-2x(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}=2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^{-(x^2+y^2)}-2y(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}=2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}.\end{aligned}$$

故 f 的驻点为 $(0,0)$ 以及单位圆周上的任意点. 另外我们也有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\\ &\quad -4x^2e^{-(x^2+y^2)}-4x^2(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\\ &= 2(1-5x^2-y^2+2x^4+2x^2y^2)e^{-(x^2+y^2)},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= -4xye^{-(x^2+y^2)}-4xy(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\\ &= -4xy(2-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\\ &\quad -4y^2e^{-(x^2+y^2)}-4y^2(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\\ &= 2(1-x^2-5y^2+2x^2y^2+2y^4)e^{-(x^2+y^2)}.\end{aligned}$$

于是在原点 $(0,0)$ 处, 我们有 $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, 故 $H_f(0,0)$ 为正定矩阵, 则原点为 f 的极小值点, 相应的极小值为 0.

另外，可证明海赛矩阵 H_f 在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 的任意点处的特征值为 $0,-\frac{4}{e}$，此时 H_f 为半负定，故不能用之来判断 f 是否在该点取极值.

$\forall u\in\mathbb{R}$，定义 $F(u)=ue^{-u}$. 则 F 为初等函数，故为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类且

$$F'(u)=e^{-u}-ue^{-u}=(1-u)e^{-u}.$$

则 F' 在 $(-\infty,1)$ 上为正而在 $(1,+\infty)$ 上为负，故 F 在点 $u=1$ 处取最大值，也即 $\forall u\in\mathbb{R}$，均有 $F(u)\leqslant F(1)=\frac{1}{e}$. 从而 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，我们有

$$f(x,y)=F(x^2+y^2)\leqslant F(1)=\frac{1}{e}.$$

这表明 f 在单位圆上的任意一点处取最大值 $\frac{1}{e}$. 由于这些点均为 $\mathbb{R}^2$ 的内点，因此它们也是 f 的极大值点，相应的极大值为 $\frac{1}{e}$.

3. 设 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微. $\forall r\geqslant 0$ 及 $\forall\theta\in[0,2\pi)$，令 $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

(1) 求证: $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\frac{1}{r}\big(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\big)$，其中 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r>0$.

(2) 若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\big(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\big)=a>0$，求证 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值.

证明: (1) $\forall r>0$，由复合可微法则可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\sin\theta\\ &= \frac{1}{r}\Big(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big).\end{aligned}$$

(2) 由题设知 $\exists R>0$ 使得当 $x^2+y^2>R^2$ 时，我们有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)>\frac{a}{2}.$$

固定 $\theta\in[0,2\pi)$. $\forall r\geqslant 0$，定义 $F(r)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. 那么由复合可微法则可知 F 可微且 $\forall r>R$, $F'(r)=\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)>\frac{a}{2r}>0$. 故 F 在 $[R,+\infty)$ 上严格递增，特别地，$\forall r>R$，均有 $F(r)>F(R)$. 又闭圆盘为有界闭集而 f 为连续函数，由最值定理可得

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y)=\inf_{x^2+y^2\leqslant R^2}f(x,y)=\min_{x^2+y^2\leqslant R^2}f(x,y).$$

由此可知所证结论成立.

4. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, $f:D\to\mathbb{R}$ 在 D 上连续, 在其内部可导并且在边界上为零. 若存在严格单调函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $g(0)=0$ 且 $\forall(x,y)\in\mathrm{Int}D$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=g(f(x,y)),$$

求证: $\forall(x,y)\in D$, 均有 $f(x,y)=0$.

证明: 反证法, 假设 f 在 D 上不恒为零. 因为 D 为有界闭集, 而 f 在 D 上连续, 由最值定理可知 f 在 D 上有最值. 又 f 在 ∂D 上恒为零, 而在 D 上不恒为零, 因而 f 在 D 上的最大值和最小值当中必然有一个不等于零, 我们将相应最值点记作 P_0. 由 $f(P_0)\neq 0$ 知 $P_0\in\mathrm{Int}D$, 则 P_0 为 f 的极值点, 故

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=0,$$

从而 $g(f(P_0))=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=0$. 但是 g 为严格单调函数, 而

$$g(f(P_0))=g(0)=0,\ \text{且}\ f(P_0)\neq 0.$$

矛盾! 故所证结论成立.

注: 通常选取 $g(u)=cu$, 其中 $c\neq 0$ 为常数.

5. 求周长为 $2p$ 的三角形使得绕其一边旋转所形成的旋转体的体积最大.

解: 不失一般性, 设三角形的三边的边长分别为 x, y, $2p-x-y$ 且三角形绕长度为 x 的边旋转, 并将该边上的高记作 h. 则 $x>0$, $y>0$, $2p-x-y>0$. 由三角不等式可知 $x+y>2p-x-y$, $x+(2p-x-y)>y$, $y+(2p-x-y)>x$, 于是 $0<x<p$, $0<y<p$ 且 $x+y>p$. 由海伦公式可知

$$\frac{1}{2}xh=\sqrt{p(p-x)(p-y)\big(p-(2p-x-y)\big)}.$$

故 $h=\frac{2}{x}\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. 从而旋转体的体积为

$$V(x,y)=\frac{1}{3}\pi h^2x=\frac{4\pi}{3x}p(p-x)(p-y)(x+y-p).$$

由此令 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant x,y\leqslant p,\ x+y\geqslant p\}$, 则 D 为有界闭集, 并且初等函数 V 在 $D\setminus\{(0,p)\}$ 上连续. 又 $\forall(x,y)\in D\setminus\{(0,p)\}$, 我们有

$$0\leqslant V(x,y)=\frac{4\pi}{3x}p(p-x)(p-y)(x+y-p)\leqslant\frac{4\pi}{3}p(p-x)(x+y-p),$$

由夹逼原理可得 $\lim\limits_{D\ni(x,y)\to(0,p)}V(x,y)=0$. 若令 $V(0,p)=0$, 则 V 为 D 上的连续函数, 因此在 D 上有最值. 注意到

$$\partial D=\big\{(p,y)\mid 0\leqslant y\leqslant p\big\}\cup\big\{(x,p)\mid 0\leqslant x\leqslant p\big\}\cup\big\{(x,y)\mid x+y=p\big\},$$

而 V 在 ∂D 上等于零, 则 V 在 D 上的最大值点属于 $\mathrm{Int}D$, 因此该点也为它的极大值点. 又 V 在 $\mathrm{Int}D$ 上为初等函数, 故连续可导且 $\forall (x,y)\in \mathrm{Int}D$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) &= -\frac{4\pi}{3x^2}p(p-x)(p-y)(x+y-p)-\frac{4\pi}{3x}p(p-y)(x+y-p) \\
&\quad +\frac{4\pi}{3x}p(p-x)(p-y)=\frac{4\pi}{3x^2}p(p-y)(p^2-py-x^2), \\
\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) &= -\frac{4\pi}{3x}p(p-x)(x+y-p)+\frac{4\pi}{3x}p(p-x)(p-y) \\
&= \frac{4\pi}{3x}p(p-x)(2p-x-2y).
\end{aligned}$$

则 V 在 $\mathrm{Int}D$ 内的极值点为 $\left(\frac{1}{2}p,\frac{3}{4}p\right)$. 此时三角形的三边分别为 $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$, 相应的旋转体的体积为 $\frac{\pi}{12}p^3$.

6. 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线到原点的最长距离和最短距离.

解: $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. 则 $\sqrt{f(x,y,z)}$ 为原点到点 (x,y,z) 的距离且 f 为初等函数. 令

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x^2+y^2,\ x+y+z=1\right\}.$$

由于 S 为椭圆, 因此为有界闭集, 从而 f 在 S 上有最大值和最小值, 这表明原点到 S 上的点的距离有最大值和最小值, 相应点为函数 f 在 S 上的条件极大值点和条件极小值点. $\forall (x,y,z,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^5$, 定义

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1).$$

于是拉氏函数 L 的驻点满足

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda,\mu)=2x-2\lambda x+\mu, \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda,\mu)=2y-2\lambda y+\mu, \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda,\mu)=2z+\lambda+\mu, \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda,\mu)=z-x^2-y^2, \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial \mu}(x,y,z,\lambda,\mu)=x+y+z-1,
\end{aligned}$$

于是 $x=y=\frac{\mu}{2(\lambda-1)}$, $z=-\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$, $z=2x^2$, $2x+z-1=0$, 由此可得

$$x=y=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}),\ z=2\mp\sqrt{3},$$

则所求最长距离和最短距离分别为 $(9+5\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$ 和 $(9-5\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$.

7. 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\}$ 上的最大值和最小值.

解: 由于 D 为有界闭集而 f 为连续函数, 由最值定理可知 f 在 D 上有最值. 若最值点位于 D 的内部, 则在该点, $0=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$, $0=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y$, 故该点为 $(0,0)$, 相应地, $f(0,0)=2$. 若最值点位于 D 的边界, 则该点为 f 在 ∂D 上的条件极值点.

$\forall(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$, 令 $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\big(x^2+\frac{y^2}{4}-1\big)$, 其驻点满足

$$0=\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x,\ 0=\frac{\partial L}{\partial y}=-2y+\frac{1}{2}\lambda y,\ 0=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+\frac{y^2}{4}-1.$$

则该点为 $(0,\pm2,4)$ 或 $(\pm1,0,-1)$, 并且 $f(0,\pm2)=-2$, $f(\pm1,0)=3$. 比较 f 在上述点处值的大小可知 f 在 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

注: 关于函数 f 在 ∂D 上的性态, 由于问题的特殊性, 这里也可绕开 Lagrange 乘数法. 事实上, 若 $(x,y)\in\partial D$, 则 $-1\leqslant x\leqslant 1$, 且 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, 于是

$$f(x,y)=x^2-y^2+2=5x^2-2.$$

由此立刻可知 f 在 ∂D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

8. 求椭球面 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=1$ 长半轴的长度与方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$ 的特征值之间的关系.

解: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 则 f 为初等函数, 从而连续可导. 又因椭球面为有界闭集, 因此 f 在椭球面上有最大值点和最小值点, 而 $\sqrt{f}$ 在上述最大值点的值就是所求椭球面长半轴的长度.

$\forall(x,y,z,\lambda)\in\mathbb{R}^4$, 定义

$$\begin{aligned}L(x,y,z,\lambda) \;\;=\;\; & x^2+y^2+z^2-\lambda(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2\\ & +2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz-1),\end{aligned}$$

则其驻点满足

$$\begin{aligned}&2x-\lambda(2a_{11}x+2a_{12}y+2a_{13}z)=0,\\ &2y-\lambda(2a_{22}y+2a_{12}x+2a_{23}z)=0,\\ &2z-\lambda(2a_{33}z+2a_{13}x+2a_{23}y)=0,\\ &a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz-1=0.\end{aligned}$$

由于原点不在椭球面上, 因此我们有 $\lambda \neq 0$. 令 $X=(x,y,z)^T$. 由前面的三个方程可得 $AX=\frac{1}{\lambda}X$, 于是 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A 的特征值, 而 X 为相应的特征向量, 此时

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \lambda x(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)+\lambda y(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z) \\ &\quad +\lambda z(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z) \\ &= \lambda(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2) \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$ 为 A 的三个特征值. 由 Lagrange 乘数法以及前面讨论可知 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ 为所求椭球面长半轴的长度.

9. 用 Lagrange 乘数法求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴和短半轴的长度.

解: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 令 $f(x,y)=x^2+y^2$, 则 f 为初等函数, 故连续可导. 又椭圆为有界闭集, 则 f 在椭圆上有最大值点和最小值点且 $\sqrt{f}$ 在上述最大值点和最小值点所取的值分别就是我们所求的椭圆的长半轴和短半轴的长度.

$\forall (x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$, 令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(5x^2+4xy+2y^2-1)$. 则 L 为初等函数, 因此连续可导. 在 L 的驻点处, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x}=2x-\lambda(10x+4y), \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda(4x+4y), \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda}=5x^2+4xy+2y^2-1. \end{aligned}$$

由此立刻可导出 $(1-5\lambda)x-2\lambda y=0$, $-2\lambda x+(1-2\lambda)y=0$. 由于 $(0,0)$ 不在椭圆上, 故上述关于 x,y 的线性方程组有非零解, 从而我们有

$$0=\begin{vmatrix} 1-5\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 1-2\lambda \end{vmatrix}=6\lambda^2-7\lambda+1.$$

由此可知 $\lambda=1$ 或 $\frac{1}{6}$. 由 $(1)\times x+(2)\times y$ 以及 (3) 可得

$$f(x,y)=x^2+y^2=\lambda(5x^2+2xy+2xy+2y^2)=\lambda.$$

于是 f 在椭圆上的最大值为 1, 最小值为 $\frac{1}{6}$, 进而可知所求椭圆的长半轴的长为 1, 短半轴的长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

10. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 中的一个内接等腰三角形使其底边平行于长轴且其面积最大.

解: 由对称性可知, 所求内接等腰三角形顶点为 $(0,2)$. 设其右端点为 (x,y), 则 $x>0$ 且三角形的面积为 $f(x,y)=x(2-y)$, 该函数可被看成是 $\mathbb{R}^2$ 上的

初等函数, 故二阶连续可导. 将椭圆位于第一、四卦限的部分记为 S, 则 S 为有界闭集. 由最值定理可知 f 在 S 上有最大值, 该值就是所求最大面积.

$\forall x>0$ 以及 $y,\lambda\in\mathbb{R}$, 定义 $L(x,y,\lambda)=x(2-y)+\lambda(x^2+3y^2-12)$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 2-y+2\lambda x,\\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= -x+6\lambda y,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= x^2+3y^2-12.\end{aligned}$$

从而 L 的驻点为 $(3,-1,-\frac{1}{2})$. 由 Lagrange 乘数法知 f 在点 $(3,-1)$ 处取到最大值 9, 相应的等腰三角形的三个顶点为 $(0,2)$, $(-3,-1)$, $(3,-1)$.

11. 用 Lagrange 乘数法求曲线

$$C:\begin{cases} x^2+y^2-2z=0\\ x+y+2z=4\end{cases}$$

上的点到 xoy 平面的距离的最大值和最小值.

解: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 令 $f(x,y,z)=z$, 则 f 为初等函数, 因此连续可导. $\forall(x,y,z)\in C$, 我们有 $z\geqslant 0$, 此时 $f(x,y,z)$ 是点 (x,y,z) 到 xoy 平面的距离. 而 C 为有界闭集, 由最值定理可知函数 f 在 C 上有最大值和最小值.

$\forall(x,y,z,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^5$, 令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x^2+y^2-2z)+\mu(x+y+2z-4)$. 则 L 为初等函数, 故连续可导. 若 (x,y,z,λ,μ) 为 L 的驻点, 则

$$\begin{aligned}0 &= 2\lambda x+\mu,\\ 0 &= 2\lambda y+\mu,\\ 0 &= 1-2\lambda+2\mu,\\ 0 &= x^2+y^2-2z,\\ 0 &= x+y+2z-4,\end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\begin{cases} x=1\\ y=1\\ z=1\\ \lambda=\frac{1}{6}\\ \mu=-\frac{1}{3}\end{cases},\quad \begin{cases} x=-2\\ y=-2\\ z=4\\ \lambda=-\frac{1}{6}\\ \mu=-\frac{2}{3}\end{cases}.$$

而由 Lagrange 乘数法可知, 上述两个驻点正好对应于函数 f 在曲线 C 上的最大值和最小值, 于是所求最大值为 4, 最小值为 1.

12. 设 Γ 是为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 所截的椭圆. 求上述椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 令 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. 则 $\forall P\in\Gamma$, $\sqrt{f(P)}$ 为 P 到原点的距离. 由于 f 为连续函数而 Γ 为有界闭集, 由最值定理知 f 在 Γ 上有最大值与最小值.

方法 1. $\forall(x,y,z,\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^5$, 定义

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1).$$

则在 L 的驻点处, 我们有

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda,\mu)=2x-2\lambda x+\mu, \tag{1}$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda,\mu)=2y-2\lambda y+\mu, \tag{2}$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda,\mu)=2z+\lambda+\mu, \tag{3}$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda,\mu)=z-x^2-y^2, \tag{4}$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mu}(x,y,z,\lambda,\mu)=x+y+z-1. \tag{5}$$

由 (1), (2) 得 $(1-\lambda)(x-y)=0$. 若 $\lambda=1$, 则 $\mu=0$, 而由 (3) 可得 $z=-\frac{1}{2}$, 带入 (4) 得 $x^2+y^2=-\frac{1}{2}$, 无解. 故 $x=y$. 联立 (4), (5) 得 $x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, 从而 $z=2\mp\sqrt{3}$. 由拉氏乘数法可知这些点恰好是 f 在 Γ 上的最值点, 由此可得 Γ 上的点到原点的最大距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, 最小距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

方法 2. 考虑椭圆 Γ 的参数表示:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos t, \\ y = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\sin t, \\ z = 2-\frac{\sqrt{6}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{6}}{2}\sin t, \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

则 $z=2-\sqrt{3}\sin(t+\frac{\pi}{4})$ 的像集为 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$. 又 $f(x,y,z)=z+z^2$ 关于 z 在 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 上递增, 故 f 在 Γ 上所取最大值为 $9+5\sqrt{3}$, 最小值为 $9-5\sqrt{3}$, 从而 Γ 上的点到原点的最大距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, 最小距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.