微积分 A (2)

姚家燕

第 4 讲

第 3 讲回顾: 无穷小函数的阶

- $f(X) = o(1)\ (\Omega \ni X \to X_0)$.
- $f(X) = O(g(X))\ (\Omega \ni X \to X_0)$; f, g 同阶.
- 高阶无穷小 $(k > 0)$: 若当 $\Omega \ni X \to X_0$ 时,

  $f(X) = o(\|X - X_0\|^k) = \|X - X_0\|^k o(1)$.

回顾: 全微分

- 线性函数, 线性函数的向量表示, 全微分.
- 可微蕴含连续, 但反之不对.
- 微分若存在, 则唯一.
- 线性函数在每点的微分均等于其本身.
- 记号 $\mathrm{d}x_j$ 的定义.

回顾: 全微分及偏导数

- 记号 $\mathrm{d}x_j$ 的定义以及线性函数的微分表示.
- 多元函数求微分的四则运算法则.
- 偏导数的定义及其几何意义.
- 可导与可微的关系: 可微蕴含可导, 但可导并不意味着连续, 因此也不意味着可微.
- 微分的表达式 (利用偏导数).

回顾：计算二元函数的微分的方法

问题: 如何判断函数 f 在点 (x_0, y_0) 是否可微?

- 判断 f 在该点的连续性. 若连续, 则继续.
- 判断 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 的存在性.
- 若在该点可导, 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时, 估计

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

的阶. 若为 $o(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$, 则可微.

回顾: 连续性, 可导性, 可微性, 连续可导性之间的关系

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{连续} \arrow[ld, shift left, "/" marking] \arrow[dd, shift left, "/" marking] \\
\text{连续可导} \arrow[r, shift left] & \text{可微} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[ru, shift left] \arrow[rd, shift left] & \\
 & & \text{可导} \arrow[lu, shift left, "/" marking] \arrow[uu, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}
$$

- 初等函数在定义区域内部连续可导、可微.

第 4 讲

方向导数

定义 4. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $X_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数, $\vec{\ell}$ 为非零向量, $\vec{\ell^0} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)^T$ 为其单位向量, 其中 α_j 为 $\vec{\ell}$ 与 x_j 轴的夹角.

若极限 $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(X_0 + h\vec{\ell^0}) - f(X_0)}{h}$ 存在, 则称之为 f 在点 X_0 处沿 $\vec{\ell}$ 方向的方向导数, 记作 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0)$, 或 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}\Big|_{X_0}$, 或 $f'_{\vec{\ell}}(X_0)$. 于是 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{\ell^0}}(X_0)$.

定理 5. 若 f 在点 X_0 可微, 则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0)$ 存在且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) \cos \alpha_j.$$

证明: 由于 f 在点 X_0 可微, 则当 $h \to 0^+$ 时,

$$f(X_0 + \vec{\ell}^0 h) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) h \cos \alpha_j + o(\|\vec{\ell}^0 h\|)$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) \cos \alpha_j\Big) h + o(|h|),$$

由此立刻可得所要结论.

评注

- 即便 $\vec{\ell}^0 = \vec{e}_j$, 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0)$ 也不一定为 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$, 这是因为前者为单侧极限, 而后者却为双侧极限.
- 若 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 存在, 则 f 在 X_0 处沿 $\vec{e}_j, -\vec{e}_j$ 的方向导数分别为 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0), -\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$.
- 函数 f 在 X_0 处沿任意的方向均有方向导数并不意味着 f 在该点可导或可微.

例 9. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$. 求证: 函数 f 在点 $(0,0)$ 处不可微, 但在该点处沿任意方向均有方向导数.

证明: 因极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-|h|}{h}$ 不存在, 故 f 在原点处不可导, 从而不可微. 但沿任意方向 $\vec{\ell}^0=(\cos\alpha,\sin\alpha)^T$, 均有方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h\cos\alpha,h\sin\alpha)-f(0,0)}{h}=-1.$$

作业题: 第1.4节第43页第 9 题, 第 11.(3) 题.

数量场的梯度

定义 5. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集. 定义在 Ω 上的实值函数也称为 Ω 上的数量场.

定义 6. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $X_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在点 X_0 沿任意方向有方向导数. 称向量 $\vec{e}$ 为 f 在点 X_0 的梯度, 若 f 在 X_0 处沿 $\vec{e}$ 的方向导数的值最大且该值等于 $\|\vec{e}\|$, 此时将 $\vec{e}$ 记作 $\mathrm{grad} f(X_0)$ 或 $\vec{\nabla} f(X_0)$, 也将之记作 $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(X_0)$, 或 $\mathbf{grad} f(X_0)$, 或 $\nabla f(X_0)$.

定义 7. 将 $\mathbb{R}^n$ 中的向量表示成列向量. 若

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

令 $X \cdot Y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, 称为 X, Y 的内积或点积.

命题 2. 若 f 在点 X_0 处可微, 则

$$\operatorname{grad} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}.$$

证明: 设右边为 $\vec{e}$, $\vec{\ell^0} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)^T$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell^0}}(X_0) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\cos\alpha_j \\ &= \vec{e}\cdot\vec{\ell^0} = \|\vec{e}\|\cos\langle \vec{e}, \vec{\ell^0}\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\langle \vec{e}, \vec{\ell^0}\rangle$ 表示 $\vec{e}$ 与 $\vec{\ell^0}$ 的夹角. 由此得证.

推论: f 在点 X_0 沿梯度增长最快, 反向最慢.

方向导数与梯度的关系: $\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell^0}}(X_0) = \mathrm{grad}f(X_0)\cdot\vec{\ell^0}$.

基本的梯度公式

设 u, v 为可微数量场, a, b 为常数.

- $\operatorname{grad} c = \vec{0}$, 其中 c 为常值函数.
- $\operatorname{grad}(au + bv) = a \operatorname{grad} u + b \operatorname{grad} v$.
- $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$.
- $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\big(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v\big), \ v \neq 0$.
- $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$ (f 为单变量、可导).

例 10. $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, 定义

$$f(x,y,z)=x^2+e^{xyz}+\log(x^2+y^2+z^2).$$

求 f 在点 $P_0=(1,0,0)$ 处的梯度与最大的方向导数, 以及沿 $\vec{\ell}=(1,2,-2)^T$ 的方向导数.

解: 由题设可知

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2x+yze^{xyz}+\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ xze^{xyz}+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ xye^{xyz}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix},$$

故 f 在点 P_0 处的梯度为 $\operatorname{grad} f(P_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

在点 P_0 处的最大方向导数为 $\|\operatorname{grad} f(P_0)\| = 4$.

沿 $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 的单位向量为 $\vec{\ell}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

于是 f 在点 P_0 处沿 $\vec{\ell}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(P_0) = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \vec{\ell}^0 = \frac{4}{3}.$$

例 11. 设函数 f 在点 (x_0, y_0) 处可微且

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = 3\,\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y.$$

求单位向量 $\vec{l}_1^0, \vec{l}_2^0$ 使得 f 在点 (x_0, y_0) 处沿 $\vec{l}_1^0$ 增长最快, 沿 $\vec{l}_2^0$ 减少最快.

解: 由题设可知 $\vec{l}_1^0$ 为梯度方向, 并且 $\vec{l}_2^0 = -\vec{l}_1^0$. 又 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2$. 故

$$\vec{l}_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{l}_2^0 = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}.$$

作业题: 第 1.4 节第 43 页第 13 题.

高阶偏导数

定义 8. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集. 若 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在 Ω 上可导, 则我们可以在 Ω 上定义 n 个偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 如果 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 关于第 j 个变量有偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)$, 我们将之称为二阶偏导数, 记作 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ 或者 $\partial_{ji} f$. 特别地, 当 $i = j$ 时, 我们将之记作 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. 如此递归下去, 我们可定义三阶偏导数以及任意阶的偏导数.

问题: 求二阶偏导数时能否交换求导次序?

回答: 一般不行.

例 12. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

则 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 当 $y\neq 0$ 时, $f(x,y)=\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}$,
由此立刻可得 $f(x,y)=xy-\frac{2xy^3}{x^2+y^2}$.

从而我们就有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(xy - \frac{2xy^3}{x^2+y^2}\Big) \\
&= y - \frac{2y^3}{x^2+y^2} + \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\cdot(2x) \\
&= \frac{(x^2-y^2)y}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

特别地，我们有 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$.

由偏导数的定义, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0.$$

于是 $\forall y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$$

由反对称性或直接由偏导数的定义可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x.$$

从而我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1.$$

因此 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

问题: 何时能交换求偏导函数的次序?

定理 6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集. 若 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在 Ω 上有二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i \neq j)$, 并且它们当中的一个在点 $X_0 \in \Omega$ 处连续, 则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0).$$

分析: 出于简便, 仅考虑 $n = 2$ 的情形. 首先

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)}{h_2}.$$

记 $X_0=(a_1,a_2)$. 于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2)=\lim_{h_1\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,a_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)}{h_1}\\
&=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\Big(\lim_{h_2\to 0}\frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)}{h_2}\\
&\quad -\lim_{h_2\to 0}\frac{f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)}{h_2}\Big)\\
&=\lim_{h_1\to 0}\lim_{h_2\to 0}\frac{1}{h_1h_2}\Big(\big(f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)\big)\\
&\quad -\big(f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)\big)\Big).
\end{aligned}
$$

故定理 6 等价于说上述累次极限可交换次序.

证明: 出于简便, 仅考虑 $n=2$ 的情形并且假设 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ 在点 $X_0=(a_1,a_2)$ 处连续. 定义

$$\begin{aligned} F(h_1,h_2) &= \big(f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)\big) \\ &\quad -\big(f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)\big), \end{aligned}$$

则由偏导数的定义可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2) &= \lim_{h_1\to 0}\lim_{h_2\to 0}\frac{1}{h_1h_2}F(h_1,h_2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1,a_2) &= \lim_{h_2\to 0}\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1h_2}F(h_1,h_2). \end{aligned}$$

令 $\varphi(x_1)=f(x_1,a_2+h_2)-f(x_1,a_2)$. 则我们有

$$F(h_1,h_2)=\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1).$$

因 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 存在, 则 φ 可导, 从而由 Lagrange 中值定理可知, $\exists\theta_1\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} F(h_1,h_2) &= \varphi'(a_1+\theta_1h_1)h_1 \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2) \\ &\quad -\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1h_1,a_2)\Big)h_1. \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ 存在, 于是在上式中对第二个变量应用 Lagrange 中值定理可知, $\exists \theta_2 \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} F(h_1,h_2) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2)\Big) h_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)(a_1+\theta_1 h_1, a_2+\theta_2 h_2) h_1 h_2. \end{aligned}$$

由夹逼原理, 连续性以及复合极限法则可知

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{F(h_1,h_2)}{h_1 h_2} &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+\theta_2 h_2) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1,a_2), \end{aligned}$$

也即二重极限存在. 故所证结论成立.

定义 9. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $k \geqslant 0$ 为整数. 记

$$\mathscr{C}^{(k)}(\Omega) = \{f \mid f \text{ 在 } \Omega \text{ 上的 } k \text{ 阶偏导数连续}\}.$$

特别地, $\mathscr{C}^{(0)}(\Omega) = \mathscr{C}(\Omega)$. 若 $f \in \mathscr{C}^{(k)}(\Omega)$, 则称 f 在 Ω 上 k 阶连续可导, 也称 k 阶连续可微.

定理 7. 设 $k \geqslant 2$ 为整数. 若 $f \in \mathscr{C}^{(k)}(\Omega)$, 则对任意整数 $1 \leqslant r \leqslant k$, 均有 $f \in \mathscr{C}^{(r)}(\Omega)$ 且 f 的任意一个 r 阶偏导数均与求偏导的次序无关.

证明: 记 g 为 f 的任意一个 $k-1$ 阶偏导函数. 由于 g 的任意偏导数是 f 的一个 k 阶偏导数, 故该偏导数连续, 从而 g 连续可导, 因此连续, 如此递降下去可知, 对任意的整数 $1 \leqslant r \leqslant k$, f 的任意一个 r 阶偏导函数均连续. 对任意的一组指标 $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$, 因 $\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \frac{\partial^{r-2} f}{\partial x_{i_3} \cdots \partial x_{i_r}}$ 连续, 故前两个求偏导可以交换次序, 如此进行下去可知任意改变求偏导的次序都不变.

作业题: 第 1.4 节第 43 页第 15 题第 (1), (4) 题.

§5. 向量值函数的微分

回顾: 设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为线性映射, $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底, 而 $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的自然基底. 令 $a_{ij}=A\vec{e}_j\cdot\vec{f}_i$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$, 则 $A\vec{e}_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\vec{f}_i$. 若 $X=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\vec{e}_j$, 那么

$$AX=\sum_{j=1}^{n}x_jA\vec{e}_j=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\vec{f}_i=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)\vec{f}_i.$$

故 $(AX)_i=(AX)\cdot\vec{f}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$. 于是 A 与矩阵 $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ 对应起来, 可将之视为同一.

定义 1. 设 $X_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $\vec{f} : B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为映射. 若 $\lim\limits_{X \to X_0} \frac{\|\vec{f}(X)\|}{|g(X)|} = 0$, 则记

$$\vec{f}(X) = \vec{o}(|g(X)|) = |g(X)|\vec{o}(1) \ (X \to X_0).$$

如果记 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$, 则上式成立当且仅当对任意的整数 $1 \leqslant i \leqslant m$, 我们均有

$$f_i(X) = o(|g(X)|) \ (X \to X_0).$$

定义 2. 假设 $X_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $\vec{f}: B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 如果存在线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得 $X \to X_0$ 时,

$$\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0) = A(X - X_0) + \vec{o}(\|X - X_0\|),$$

则称 $\vec{f}$ 在点 X_0 可微并将映射 A 记作 $\mathrm{d}\vec{f}(X_0)$, 称为 $\vec{f}$ 在点 X_0 的全微分或微分. 线性映射 A 所对应的矩阵记作 $J\vec{f}(X_0)$, 也被记作 $J_{\vec{f}}(X_0)$, 称为 $\vec{f}$ 在点 X_0 处的 Jacobi 矩阵.

评注

- 若 $\vec{f}$ 在点 X_0 处可微, 则其微分唯一.
- 可微性蕴含连续性.
- 若记 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$, 则 $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ 为 $\vec{f}$ 在点 X_0 处的微分当且仅当 $X \to X_0$ 时, 对任意的整数 $1 \leqslant i \leqslant m$, 我们均有

$$f_i(X) - f_i(X_0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^{(0)}) + o(\|X - X_0\|).$$

也即 f_i 在点 X_0 处可微, 并且有 $a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)$. 故 $\mathrm{d}\vec{f}(X_0)$ 所对应的矩阵的第 i 个行向量正好对应于 $\mathrm{d}f_i(X_0)$ 所对应的矩阵. 由此可知 $\vec{f}$ 在点 X_0 可微当且仅当 $f_1,\ldots,f_m$ 在该点可微且

$$\mathrm{d}\vec{f}(X_0)=\begin{pmatrix}\mathrm{d}f_1(X_0)\\ \vdots\\ \mathrm{d}f_m(X_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j\end{pmatrix},$$

进而我们就有

$$\mathrm{d}\vec{f}(X_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix},$$

也即 $J_{\vec{f}}(X_0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. 若将最右边那个列向量记作 $\mathrm{d}X$, 则 $\mathrm{d}\vec{f}(X_0)=J_{\vec{f}}(X_0)\,\mathrm{d}X$. 通常也将 $J_{\vec{f}}(X_0)$ 记作 $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X_0)$ 或 $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\Big|_{X_0}$.

当 $m=n$ 时, 相应行列式被称为 Jacobi 行列式, 记作 $\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(X_0)$ 或 $\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\Big|_{X_0}$.

例 1. $\forall (r,\varphi)\in D=(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$, 定义

$$\vec{f}(r,\varphi)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

求 $\vec{f}$ 在点 (r,φ) 处的微分及其 Jacobi 行列式.

解: 由于 $\vec{f}$ 的分量均为初等函数, 故可微且

$$J_{\vec{f}}(r,\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

则所求 Jacobi 行列式 $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$, 而所求微分为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{f}(r,\varphi) &= \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

作业题: 第 1.5 节第 54 页第 2 题并求其微分.

谢谢大家!