微积分 A（2）期中考试样卷　　A 卷

系名__________ 班级____________ 姓名______________ 学号_______________

一． 填空题（每空 3 分，共 9 题 10 空）**（请将答案直接写在答题卡相应划线处！）**

1. 函数 $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}$ 沿任意射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha\ (0\le t<+\infty)$ 的极限

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=$____①____；

当 $x\to\infty, y\to\infty$ 时，$f(x,y)$ 是否为无穷小？____②____（填“是”或“否”）。

2. 设函数 $f(u,v)$ 连续可微，$z=f(xy,x-y)$，则 $\mathrm{d}z=$____③____。

3. 设 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$v=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 Jacobi 矩阵的行列式 $\dfrac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}=$____④____。

4. 已知映射 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^v+u^3, \\ y=\mathrm{e}^u-v^3 \end{cases}$ 有逆映射 $\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y) \end{cases}$，当 $(u,v)=(0,1)$ 时，$(x,y)=(\mathrm{e},0)$，则偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{e},0)=$____⑤____。

5. 记函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在 $(1,0,1)$ 处的梯度方向为 $\mathbf{v}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}\right|_{(1,0,1)}=$____⑥____。

6. 设可微函数 $u(x,y)$ 满足 $u(x,x^2)=1$ 且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)=x$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)=$____⑦____。

7. 曲线 $x=t,\ y=2\cos t,\ z=3\sin t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为____⑧____。

8. 曲面 $z+\ln z=y+\ln x$ 在 $(1,1,1)$ 点的切平面方程为____⑨____。

9. 设 $F(x,y)=\int_0^1 \sin(xt)\mathrm{e}^{-4yt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0)=$____⑩____。

二. 解答题（共 8 题）**（请写出详细的计算过程和必要的根据！）**

10. （8 分） 设 $z=f(x,\dfrac{x}{y})$，其中 $f\in C^{(2)}(\mathbf{R}^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)$。

11. （10 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 回答问题，并说明理由。

（Ⅰ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

（Ⅱ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否存在偏导数？若存在，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$；

（Ⅲ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求在点 $(0,0)$ 处的全微分；

（Ⅳ）函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

12. （13 分） 求 $f(x,y)=xy^3-x$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

13. （20 分）设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{3x}+y^3-3y\mathrm{e}^x$。

（Ⅰ）求 $f(x,y)$ 的所有驻点，并找出其中所有的极值点，并说明极值点的类型；

（Ⅱ）求 $f(x,y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式；

(Ⅲ) 求隐函数形式曲线 $f(x,y)=3$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线和法线方程；

(Ⅳ) 证明方程 $f(x,y)=3$ 在 $(0,-1)$ 点附近确定了一个隐函数 $x=x(y)$，并求 $x=x(y)$ 在 $y=-1$ 处的二阶 Taylor 多项式。

14. （8 分）设 $I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}x$，证明：$I(y)=\mathrm{e}^{-y^2}\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$。

15. （6 分） 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是非空有界闭区域，f 是 D 上的连续函数。证明：至多只有一个函数 $u(x,y)$ 在 D 上连续，在 D 的内部 $\overset{\circ}{D}$ 为 $C^{(2)}$ 类，且满足

$$\begin{cases} u''_{xx}+u''_{yy}=\mathrm{e}^u, & (x,y)\in\overset{\circ}{D} \\ u=f, & (x,y)\in\partial D \end{cases}$$

16. （5 分）设 K 是 $\mathbf{R}^k$ 的非空有界闭子集，函数 $f:\mathbf{R}^m\times K\to\mathbf{R}$ 连续，记 $g(\mathbf{x})=\min\limits_{\mathbf{y}\in K}f(\mathbf{x},\mathbf{y})$。证明 $g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 连续。