第 2 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 高阶偏导数

(1) **二阶偏导数可交换次序的充分条件:**
设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集. 若 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在 Ω 上有二阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, 且当中一个在点 $X_0 \in \Omega$ 连续, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$.

(2) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $k \geqslant 0$ 为整数. 记 $\mathscr{C}^{(k)}(\Omega)$ 为 Ω 上具有 k 阶连续偏导数的所有函数的集合.

(3) 设 $k \geqslant 2$ 为整数. 若 $f \in \mathscr{C}^{(k)}(\Omega)$, 则对任意整数 r $(1 \leqslant r \leqslant k)$, 均有 $f \in \mathscr{C}^{(r)}(\Omega)$ 并且 f 的任意 r 阶偏导数均与求偏导的次序无关.

2. 向量值函数的微分

(1) **定义:** 向量值函数的微分, Jacobi 矩阵, Jacobi 行列式.

(2) **向量值函数微分的性质:** 微分的唯一性, 可微性蕴含连续性.

(3) **微分的链式法则 (矩阵表示):**

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\vec{f} \circ \vec{g})(X_0) &= \mathrm{d}\vec{f}(\vec{g}(X_0)) \circ \mathrm{d}\vec{g}(X_0), \\
J_{\vec{f} \circ \vec{g}}(X_0) &= J_{\vec{f}}(\vec{g}(X_0)) \cdot J_{\vec{g}}(X_0), \\
\frac{\partial f_i(g_1, \ldots, g_m)}{\partial x_j} &= \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(*)\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}(*)\frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}(*)\frac{\partial g_m}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

3. 隐函数定理、反函数定理及其应用

(1) **隐函数定理:**

(a) **两个变量的方程:** 设函数 $F(x, y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得

$$F(x_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类的解 $y = f(x)$, 并且

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

(b) **多个变量的方程:** 设函数 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得

$$F(X_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(X_0, y_0) \neq 0.$$

则方程 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ 在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 并且

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, f(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, f(X))}.$$

(c) **多个变量的方程组:** 设 $F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $F_i(X_0,Y_0)=0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(X_0,Y_0)\neq 0$. 则方程组

$$F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

在局部上有 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类解 $y_i=f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, 且

$$J_{\vec{f}}(X)=-\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(X,\vec{f}(X))\right)^{-1}\cdot\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X,\vec{f}(X)).$$

(2) **反函数定理:** 设 $X=\vec{g}(Y)$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $X_0=\vec{g}(Y_0)$ 且 $J_{\vec{g}}(Y_0)$ 可逆. 则局部上存在 $\mathscr{C}^{(1)}$ 反函数 $Y=\vec{f}(X)$, 并且 $J_{\vec{f}}(X)=\left(J_{\vec{g}}(\vec{f}(X))\right)^{-1}$, 也即

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(X)=\left(\frac{\partial(g_1,g_2,\ldots,g_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}(\vec{f}(X))\right)^{-1}.$$

4. 空间曲面的切平面与法线

(1) **曲面 $S:z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程:**

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

(2) **曲面** $S:\begin{cases}x=f_1(u,v)\\ y=f_2(u,v)\\ z=f_3(u,v)\end{cases}$ **在参数 (u_0,v_0) 所对应点处的切平面方程为:**

$$\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}=\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\begin{pmatrix}u-u_0\\ v-v_0\end{pmatrix},$$

该切平面也可以表示成:

$$\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(x-x_0)+\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(y-y_0)+\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)(z-z_0)=0.$$

相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(u_0,v_0)}.$$

(3) **曲面 $S:F(x,y,z)=0$ 在点 P_0 处的切平面方程为:**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0.$$

相应的的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

5. 空间曲线及切线和法平面

(1) **空间曲线 Γ 的参数表示:** $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad\ t \in [\alpha, \beta]. \\ z = z(t), \end{cases}$ 若上述函数在点 $t = t_0$ 处可微, 则称曲线 Γ 在相应点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 相应的切线方程为

$$\begin{cases} x - x_0 = x'(t_0)(t - t_0), \\ y - y_0 = y'(t_0)(t - t_0), \\ z - z_0 = z'(t_0)(t - t_0). \end{cases}$$

该切线方程也可表述成

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

这里假设 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))^T$ 不为零向量. 我们将过点 P_0 且与上述切线垂直的平面称为 Γ 在点 P_0 处的法平面, 其方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) **空间曲线 Γ 的隐函数表示:** $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$ 设 F_1, F_2 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微且 $\mathrm{grad}F_1(P_0)$, $\mathrm{grad}F_2(P_0)$ 不为零, 则曲线 Γ 在该点的切线为

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

该切线的方向为

$$\vec{T} = \mathrm{grad}F_1(P_0) \times \mathrm{grad}F_2(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(P_0) \\ \frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}(P_0) \\ \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}(P_0) \end{pmatrix}.$$

只有当 $\vec{T} \neq \vec{0}$ 时, 上述方程组才能定义一条直线. 此时 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y,z)}(P_0)$ 的秩等于 2. 借助 $\vec{T}$, 我们也可以得到上述切线方程的另外一个表述:

$$\frac{x - x_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}(P_0)}.$$

6. Taylor 公式

设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $f \in \mathscr{C}^{(2)}(B(X_0, r))$, 而 $X \in B(X_0, r)$.

(1) **一阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:**

$$\begin{aligned} f(X) \quad &= \quad f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)(x_j - x_j^{(0)}) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)(x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) \\ &= \quad f(X_0) + J_f(X_0)\,\Delta X + \frac{1}{2!}(\Delta X)^T H_f(X_\theta)\,\Delta X, \end{aligned}$$

其中 $\Delta X = X - X_0$, $H_f(X_\theta) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$, $\theta \in (0, 1)$.

(2) **带 Lagrange 余项的一般 Taylor 展式:** 若 f 为 $\mathscr{C}^{(m+1)}(B(X_0,r)$ 类, 则

$$f(X)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^k f(X_0)+\frac{1}{(m+1)!}\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^{m+1} f(X_\theta).$$

(3) **带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式:** 当 $X\to X_0$ 时, 我们有

$$f(X)=f(X_0)+J_f(X_0)\,\Delta X+\frac{1}{2!}(\Delta X)^T H_f(X_0)\Delta X+o(\|\Delta X\|^2),$$

其中 $\Delta X=X-X_0$.

第 2 部分 习题课题目

1. (微分形式的不变性) 设 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 为连续可微函数. 将 z 看成是 x, y 的函数. 求证:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

2. 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$, 其中 f 为可微函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (a, a) 处可微, 并且 $f(a, a) = a$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, a) = b.$$

令 $\varphi(x) = \big(f(x, f(x, f(x, x)))\big)^2$. 求 $\varphi'(a)$.

4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{若 } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

问 f 是否有二阶偏导数?

5. 设 $D = [0, a] \times [0, b]$, 而函数 $F : D \to \mathbb{R}$ 关于第二个变量的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 存在. 求证: 存在函数 $g : [0, a] \to \mathbb{R}$, $h : [0, b] \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall (x, y) \in D$, 我们均有 $F(x, y) = g(x) + h(y)$ 当且仅当 $\forall (x, y) \in D$, 均有 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$.

6. 假设 $D = [0, a] \times [0, b]$, 而 $u \in \mathscr{C}^{(2)}(D)$ 使得 $\forall (x, y) \in D$, 均有 $u(x, y) \neq 0$. 求证: 存在 $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $g : [0, b] \to \mathbb{R}$ 使 $\forall (x, y) \in D$, $u(x, y) = f(x)g(y)$ 当且仅当在 D 上, 成立 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

7. 设 $u(x, y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 φ 为二阶可导, 而 ψ 为一阶可导. 求证: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

8. 假设 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 二阶可导且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
(1) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$; (2) 若 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, 求 f 的表达式.

9. 设函数 $f(u)$ 为二阶可导且 $z = \frac{1}{x}f(xy) + yf(x + y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

10. 设 $z = \arctan\frac{x+y}{x-y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11. 设 $g(x) = f(x, \varphi(x^2, x^2))$, 其中 f, φ 均为二阶连续可导, 求 $g''(x)$.

12. 设 $z = f\big(xy, \frac{x}{y}\big)$, 其中 f 为二阶连续可导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. 设函数 $u(x,y)$ 为二阶连续可导且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u(x,2x)=x,\ u'_x(x,2x)=x^2,$$

求 $u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$.

14. 考虑三元方程 $xy-z\log y+e^{xz}=1$, 由隐函数定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的某个邻域使得在此邻域内, 该方程 (　)

(A) 只能确定一个连续可导的隐函数 $z=z(x,y)$;

(B) 可确定两个连续可导的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$;

(C) 可确定两个连续可导的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$;

(D) 可确定两个连续可导的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

15. 通过曲面 $S:\ e^{xyz}+x-y+z=3$ 上的点 $(1,0,1)$ 的切平面 (　).
(A) 通过 y 轴; (B) 平行于 y 轴; (C) 垂直于 y 轴; (D) A, B, C 都不对.

16. 求证: 方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 在点 $(1,0,-1)$ 的某个邻域内可确定一个隐函数 $z=z(x,y)$, 并在该点处求微分 $\mathrm{d}z$.

17. 假设由方程组 $\begin{cases} F(y-x,y-z)=0, \\ G(xy,\frac{z}{y})=0, \end{cases}$ 可确定隐函数 $x=x(y)$, $z=z(y)$, 其中 F,G 均为连续可导. 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

18. 若隐函数 $y=y(x)$ 由 $ax+by=f(x^2+y^2)$ 确定, 而 a,b 为常数. 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

19. 设 $x=x(z)$, $y=y(z)$ 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+2y^2-z^2-1=0 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

20. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

21. 求曲面 $S:\ 2x^2-2y^2+2z=1$ 上的所有点使过这些点的切平面与直线

$$L:\ \begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

平行.

22. 过直线

$$\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求该切平面的方程.

23. 求螺线

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \quad (a > 0,\ c > 0) \\ z = ct \end{cases}$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi c}{4}\right)$ 处的切线与法平面.

24. 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $M(1,1,2)$ 处的切线与法平面.

25. 求曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 上的点使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

26. $\forall (x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$, 定义 $f(x,y) = x^y$. 求函数 f 在点 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式.

27. 求 $f(x,y) = \frac{\cos x}{1+y}$ 在点 $(0,0)$ 处带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式.

28. 求 $f(x,y) = \sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式.

29. 求证: 方程 $x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 的邻域内确定一个 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类隐函数 $z=z(x,y)$, 并计算它在点 $(0,0)$ 处二阶带 Peano 余项的 Taylor 展式.