微积分 A (2)

姚家燕

第 9 讲

第 9 讲

例 30. 假设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为二阶连续可导函数，而隐函数 $z=z(x,y)$ 可由方程 $x+y=f(x,z)$ 确定，其中 $\partial_2 f(x,z)\neq 0$. 计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: 将方程两边分别对 x,y 求偏导可得

$$1=\partial_1 f(x,z)+\partial_2 f(x,z)\frac{\partial z}{\partial x},\quad 1=\partial_2 f(x,z)\frac{\partial z}{\partial y},$$

由此我们立刻可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-\partial_1 f(x,z)}{\partial_2 f(x,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\partial_2 f(x,z)}.$$

于是我们有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial_2 f(x,z)}\right) = -\frac{1}{(\partial_2 f(x,z))^2}\frac{\partial}{\partial x}(\partial_2 f(x,z))$$

$$= -\frac{1}{(\partial_2 f(x,z))^2}\left(\partial_{12} f(x,z) + \partial_{22} f(x,z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{1}{(\partial_2 f(x,z))^2}\left(\partial_{12} f(x,z) + \partial_{22} f(x,z)\cdot\frac{1-\partial_1 f(x,z)}{\partial_2 f(x,z)}\right)$$

$$= \frac{\partial_{22} f(x,z)\cdot\partial_1 f(x,z) - \partial_{12} f(x,z)\cdot\partial_2 f(x,z) - \partial_{22} f(x,z)}{(\partial_2 f(x,z))^3}.$$

例 31. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处的偏导数 $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, 并考察 f 在原点处的连续性和可微性.

解: 由偏导数的定义可知

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\quad f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们有

$$0\leqslant |f(x,y)|\leqslant \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\leqslant \frac{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2},$$

于是由夹逼原理可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

从而 f 在原点处连续. 下证 f 在原点处不可微.

用反证法, 假设 f 在原点处可微, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,-x)-(x+x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{2}x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

矛盾! 故 f 在原点处不可微.

例 32. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}(1-e^{-xy}), & 若\ x\neq 0,\\ y, & 若\ x=0.\end{cases}$$

考察函数 f 的连续性、可微性与连续可导性，并给出理由.

解: $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(1-e^{-x}), & 若\ x\neq 0,\\ 1, & 若\ x=0.\end{cases}$$

则由定义可得

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-e^{-x})=1=g(0),$$

故 g 为连续函数. 由复合函数求导法则可知, 当 $x \neq 0$ 时, 均有 $g'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x^2}$. 另外,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1+e^{-x}}{2x} = -\frac{1}{2}, \\ \lim_{x\to 0} g'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-xe^{-x}}{2x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此 g 为连续可导. 又 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 我们有

$$f(x,y) = yg(xy).$$

于是 f 为连续可导, 从而可微, 进而连续.

例 33. 设 $z_0 \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. 求 $\mathbb{R}^3$ 上的连续可导函数 $z = z(x, y, t)$ 使得

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z(x, y, 0) = z_0(x, y).$$

证明: 固定 $x, y \in \mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, 定义

$$f(t) = z(x - at, y - bt, t),$$

则 f 可导, 且我们有

$$f'(t) = \Big(-a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\Big)(x - at, y - bt, t) = 0,$$

于是 f 为常值函数, 从而 $\forall t \in \mathbb{R}$, 均有

$$z(x-at, y-bt, t) = z(x, y, 0) = z_0(x, y),$$

由此可知, $\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, 我们有

$$z(x, y, t) = z_0(x+at, y+bt).$$

该函数也的确满足原来的偏微分方程, 因此它就是所求偏微分方程的解.

例 34. 设 $D=[0,a]\times[0,b]$, $F:D\to\mathbb{R}$ 为函数. 求证: 存在函数 $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $F(x,y)=f(y)$ 当且仅当 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0$.

证明: 必要性. 若存在函数 $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall(x,y)\in D$, 均有 $F(x,y)=f(y)$, 则由偏导数的定义立刻可知 $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0$.

充分性. $\forall(x,y)\in D$, 由 Lagrange 中值定理

可知, 存在 ξ 介于 $0,x$ 之间使得

$$F(x,y)-F(0,y)=x\frac{\partial F}{\partial x}(\xi,y)=0,$$

也即有 $F(x,y)=F(0,y)$. 于是, 若 $\forall y\in[0,b]$,

定义 $f(y)=F(0,y)$. 则 $\forall(x,y)\in D$, 我们均有

$$F(x,y)=f(y).$$

例 35. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集, 而 $(x_0, y_0) \in \Omega$. 若 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内可导且偏导数有界, 求证: f 在点 (x_0, y_0) 处连续.

证明: 由题设可知存在 $\exists r, M > 0$ 使得

$$B((x_0, y_0), \sqrt{2}r) \subseteq \Omega,$$

且 f 在 $B((x_0, y_0), \sqrt{2}r)$ 上可导, 并且

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \sqrt{2}r),$$

我们均有 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant M$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant M$.

$\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),r)$, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 ξ 介于 x_0, x 之间, 存在 η 介于 y_0, y 之间使得

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y) &= (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y), \\ f(x_0,y) - f(x_0,y_0) &= (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta). \end{aligned}$$

因 $|\xi - x_0| < r$, $|y - y_0| < r$, $|\eta - y_0| < r$, 则

$(\xi, y), (x_0, \eta) \in B((x_0, y_0), \sqrt{2}r)$, 故

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x_0,y_0)| &\leqslant |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| \\
&= \left|(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\right| + \left|(y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)\right| \\
&\leqslant M|x - x_0| + M|y - y_0|.
\end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知 f 在点 (x_0, y_0) 处连续.

例 36. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集, 而 $(x_0, y_0) \in \Omega$. 若函数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 使得 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 存在, 它在点 (x_0, y_0) 的某邻域内关于 y 有偏导数, 并且该偏导函数在点 (x_0, y_0) 处连续, 求证: 函数 f 在点 (x_0, y_0) 处可微.

证明: 由题设可知 $\exists r > 0$ 使得

$$B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega,$$

且 f 在 $B((x_0, y_0), r)$ 上有偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$, 后者还在点 (x_0, y_0) 处连续.

由偏导数的定义、Lagrange 中值定理、夹逼原理以及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 (x_0, y_0) 处的连续性可知，当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$，我们有

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) - f(x_0,y_0) = (f(x,y_0) - f(x_0,y_0)) + (f(x,y) - f(x,y_0)) \\
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + o(1)\Big)(x - x_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y - y_0)) \\
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + o(1)\Big)(x - x_0) + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(1)\Big)(y - y_0) \\
&= (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(x - x_0) + o(y - y_0) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(1)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},
\end{aligned}
$$

其中 $\theta \in (0, 1)$. 因此 f 在点 (x_0, y_0) 处可微.

例 37. 假设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 在点 $X_0\in\mathbb{R}^3$ 可微, $\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2,\vec{\ell}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中互相垂直的单位向量, 求证: 在点 X_0 处, 我们有

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_3}\Big)^2=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2.$$

证明: 我们记 $\vec{\ell}_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j})^T$ $(1\leqslant j\leqslant 3)$. 则在点 X_0 处, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_1}&=a_{11}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{21}\frac{\partial f}{\partial y}+a_{31}\frac{\partial f}{\partial z},\\ \frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_2}&=a_{12}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial f}{\partial y}+a_{32}\frac{\partial f}{\partial z},\\ \frac{\partial f}{\partial\vec{\ell}_3}&=a_{13}\frac{\partial f}{\partial x}+a_{23}\frac{\partial f}{\partial y}+a_{33}\frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}$$

令 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. 因 $\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2,\vec{\ell}_3$ 为正交的单位向量, 则 A 为正交矩阵, 故

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3}\right)^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_3} \end{pmatrix} \\
&= \left(A\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}\right)^T A\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}^T A^T A\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.
\end{aligned}
$$

例 38. 求函数 $z = \frac{\sin x}{1-\sin y}$ 在原点 $(0,0)$ 处带二阶 Peano 余项的 Taylor 展式.

解: 当 $(x,y) \to (0,0)$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin x}{1-\sin y} &= \sin x\,(1+\sin y+o(\sin y)) \\
&= (x+o(x^2))(1+y+o(y)) \\
&= x+xy+xo(y)+(1+y)o(x^2) \\
&= x+xy+o(x^2+y^2).
\end{aligned}
$$

例 39. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x-y+\frac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 求证: 函数 f 在原点处连续, 沿任意方向的方向导数都存在, 但不可微.

证明: (1) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们有

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|x-y+\frac{xy^3}{x^2+y^4}\right|$$

$$\leqslant\ |x|+|y|+\frac{|xy^2|\cdot|y|}{x^2+y^4}\leqslant|x|+|y|+\frac{1}{2}|y|.$$

于是由夹逼原理可知函数 f 在原点连续.

(2) 固定 $\vec{\ell}^0=(\cos\theta,\sin\theta)$. 由定义可知

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}^0}(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h\vec{\ell}^0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\cos\theta-\sin\theta+\frac{h^4(\cos\theta)\sin^3\theta}{h(h^2\cos^2\theta+h^4\sin^4\theta)}\right)$$

$$=\cos\theta-\sin\theta.$$

故 f 在原点处沿任意方向的方向导数存在.

(3) 用反证法, 假设 f 在原点可微. 由定义可得 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$. 由复合函数极限法则,

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{y\to0^+} \frac{y^2\cdot y^3}{(y^4+y^4)\sqrt{y^4+y^2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

矛盾! 故 f 在原点处不可微.

例 40. 设 ℓ 正则曲面 $S: F(x,y,z)=0$ 上在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面上过点 P_0 的直线, 求证: 在曲面 S 上存在过点 P_0 的曲线使得它在点 P_0 处的切线为 ℓ.

证明: 由于 S 为正则曲面, 则 $\mathrm{grad} F(P_0) \neq \vec{0}$. 不失一般性, 设 $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$. 由隐函数定理知, 方程 $F(x,y,z)=0$ 可在点 P_0 的邻域内确定隐函数 $z=f(x,y)$, 其中

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ \delta>0.$$

假设直线 ℓ 的单位方向为 (a, b, c). 因 ℓ 位于曲面 S 在点 P_0 处的切平面上, 则

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - c = 0,$$

也即 $c = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. $\forall t \in (-\delta, \delta)$, 我们有 $|at| < \delta$, $|bt| < \delta$, 由此定义

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at, \\ y(t) = y_0 + bt, \\ z(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt), \end{cases}$$

进而我们得到曲面 S 上的一条过 P_0 的曲线且该曲线在点 P_0 的切线为

$$\frac{x-x_0}{x'(0)}=\frac{y-y_0}{y'(0)}=\frac{z-z_0}{z'(0)}.$$

但 $x'(0)=a$, $y'(0)=b$, 而

$$z'(0)=a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=c,$$

因此上述切线就是题设直线 ℓ, 即曲线 Γ 满足题设条件, 故所证成立.

例 41. 假设 $z = z(x, y)$ 为二阶连续可导且满足

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

其中 $B^2 - AC > 0$ 且 $C \neq 0$. 若令

$$\begin{cases} u = x + \alpha y, \\ v = x + \beta y, \end{cases}$$

试确定 α, β 的值使得原方程等价于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

解: 由题设可知

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) z, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \alpha + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \beta = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}\right) z, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}\right) z \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}\right) z.
\end{aligned}
$$

带入题设方程可得

$$
\begin{aligned}
0 &= A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\
&= A\Big(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\Big)^2 z + 2B\Big(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big(\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\Big)z \\
&\quad + C\Big(\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\Big)^2 z \\
&= (A + 2B\alpha + C\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\
&\quad + 2\big(A + B(\alpha+\beta) + C\alpha\beta\big)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\
&\quad + (A + 2B\beta + C\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}
$$

于是要使题设方程等价于 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 只需假设

$$A + 2B\alpha + C\alpha^2 = 0, \ \ A + 2B\beta + C\beta^2 = 0,$$

$$A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta \neq 0.$$

由于 $B^2 - AC > 0$, 因此我们只需令

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}, \\ \beta &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}. \end{aligned}$$

此时我们还有

$$
\begin{aligned}
& A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta \\
= \ & A-\frac{2B^2}{C}+A=\frac{2}{C}(AC-B^2)\neq 0.
\end{aligned}
$$

于是要使题设方程等价于 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 只需假设

$$
\alpha=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{C},\ \beta=\frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{C}.
$$

此时存在两个连续可导函数 f,g 使得

$$
z(x,y)=f(u)+g(v)=f(x+\alpha y)+g(x+\beta y).
$$

例 42. $\forall x, y, z > 0$, 定义

$$f(x, y, z) = \log x + 2\log y + 3\log z.$$

求 f 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ $(r > 0)$ 上的最大值, 并证明 $\forall a, b, c > 0$, 均有

$$ab^2c^3 \leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

解: 令 $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z > 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2\}$, 则 S 为二维曲面.

固定 $P^* \in S$. 注意到

$$\lim_{u \to 0^+} \log u = -\infty,$$

而 $\forall (x, y, z) \in S$, 我们有

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \log x + 2\log y + 3\log z \\ &\leqslant \log x + 2\log(\sqrt{6}r) + 3\log(\sqrt{6}r) \\ &= \log x + 5\log(\sqrt{6}r), \end{aligned}$$

同理, 我们也有

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\leqslant 2\log y + 4\log(\sqrt{6}r), \\ f(x, y, z) &\leqslant 3\log z + 3\log(\sqrt{6}r). \end{aligned}$$

由此知 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $\forall(x,y,z)\in S$, 当 $0<x<\varepsilon$ 或者 $0<y<\varepsilon$ 或者 $0<z<\varepsilon$ 时, 我们总会有 $f(x,y,z)<f(P^*)$. 定义

$$S_\varepsilon=\{(x,y,z)\mid x,y,z\geqslant\varepsilon,\ x^2+y^2+z^2=6r^2\}.$$

则 S_ε 为有界闭集, 并且 $P^*\in S_\varepsilon$. 而 f 为连续函数, 于是它在 S_ε 上有最大值. 由前面的讨论可知, 该最大值也是 f 在 S 上的最大值. 我们将相应的最大值点记作 (x_0,y_0,z_0).

$\forall x, y, z > 0$ 以及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda) &= \log x + 2\log y + 3\log z \\ &\quad +\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6r^2). \end{aligned}$$

由 Lagrange 乘数法可知, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \lambda) = \frac{1}{x_0} + 2\lambda x_0, \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \lambda) = \frac{2}{y_0} + 2\lambda y_0, \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, \lambda) = \frac{3}{z_0} + 2\lambda z_0, \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, z_0, \lambda) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 6r^2. \end{aligned}$$

于是我们有

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}},\ y_0 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}},\ z_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2\lambda}},$$

$$-\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2\lambda} - 6r^2 = 0,$$

从而 $\lambda = -\frac{1}{2r^2}$, 进而可知 f 在 D 上的最大值点为 $(r, \sqrt{2}r, \sqrt{3}r)$, 相应的最大值为

$$f(r, \sqrt{2}r, \sqrt{3}r) = 6\log r + \log 2 + \frac{3}{2}\log 3.$$

$\forall a, b, c > 0$, 我们令

$$r = \sqrt{\frac{1}{6}(a+b+c)},$$

则 $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 = 6r^2$, 从而我们有

$$\begin{aligned} &\log\sqrt{a} + 2\log\sqrt{b} + 3\log\sqrt{c} \\ \leqslant\ & 6\log r + \log 2 + \frac{3}{2}\log 3. \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$ab^2c^3 \leqslant 108r^{12} = 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

例 43. 假设 $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$, $w=h(x,y)$ 均有二阶连续偏导数且满足

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v},\ \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0.$$

证明: $w=h(f(u,v),g(u,v))$ 满足 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

证明: 由复合求导法则可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial h}{\partial x}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\\ &\quad+\frac{\partial h}{\partial y}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial g}{\partial u}(u,v),\end{aligned}$$

由此我们立刻可以导出

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial h}{\partial x}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial h}{\partial y}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\Big)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial h}{\partial x}(f(u,v),g(u,v))\Big)\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial h}{\partial x}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(f(u,v),g(u,v))\Big)\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial h}{\partial y}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$$

$$=\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial g}{\partial u}\Big)\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial h}{\partial x}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$+\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial g}{\partial u}\Big)\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial h}{\partial y}(f(u,v),g(u,v))\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.$$

为简便记号, 下面省去自变量. 由对称性可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

由前面讨论立刻可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right) \\ &+ 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\right) + \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \\ &+ \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right).\end{aligned}$$

又由于 $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial u}=-\frac{\partial f}{\partial v}$, 于是我们有

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}=0,$$
$$(\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2=(\frac{\partial g}{\partial v})^2+(\frac{\partial g}{\partial u})^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=-\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}=-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.$$

但 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$, 从而最终我们有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

例 44. 设 $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$, $z = h(x, y)$, 其中 f, g, h 为可微函数. 求证:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -1.$$

证明: 由题设可知

$$x = f(g(x, z), z),\ z = h(x, g(x, z)).$$

由此立刻可得

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x},\quad 0 = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x},\quad 1 = \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}.$$

于是我们就有

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}},\ \frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}=1.$$

进而立刻可得知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\Big(-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\Big)\\ &= -\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}=-1.\end{aligned}$$

例 45. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 可微且使得

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty.$$

求证: $\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\exists(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 使得我们有

$$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=\vec{v}.$$

证明: $\forall\vec{v}=(v_1,v_2)^T\in\mathbb{R}^2$ 以及 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 令 $F(x,y)=f(x,y)-v_1x-v_2y$. 则 F 为可微函数并且 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 我们有

$$\begin{aligned} F(x,y) &\geqslant f(x,y)-(|v_1x|+|v_2y|) \\ &\geqslant \sqrt{x^2+y^2}\Big(\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{v_1^2+v_2^2}\Big), \end{aligned}$$

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} F(x,y)=+\infty$, 则 $\exists R>0$ 使得 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 当 $x^2+y^2>R^2$ 时, 均有 $F(x,y)>F(0,0)$, 由此立刻可得

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} F(x,y)=\inf_{x^2+y^2\leqslant R^2} F(x,y).$$

又 F 连续而 $\bar{B}((0,0);R)$ 为有界闭集, 则上述下确界能在圆盘内某点 (x_0,y_0) 处取到, 该点也是 F 的极小值点, 从而

$$\vec{0}=\mathrm{grad}F(x_0,y_0)=\mathrm{grad}f(x_0,y_0)-\vec{v}.$$

例 46. 假设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续可导函数使得 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 我们均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)>0.$$

求证: 原点为函数 f 的唯一极小值点且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

证明: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)>0,$$

于是 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 不全为零, 因此点 (x,y) 不为 f 的驻点, 因而也不是 f 的极值点.

任取 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. $\forall t\in\mathbb{R}$, 令

$$F(t)=f(tx,ty).$$

则 F 连续可导. 由单变量 Lagrange 中值定理可知, $\exists\theta\in(0,1)$ 使得我们有

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0)=F'(\theta)&=x\frac{\partial f}{\partial x}(\theta x,\theta y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(\theta x,\theta y)\\ &=\frac{1}{\theta}\Big(\theta x\frac{\partial f}{\partial x}(\theta x,\theta y)+\theta y\frac{\partial f}{\partial y}(\theta x,\theta y)\Big)>0. \end{aligned}$$

故 $(0,0)$ 为 f 的严格最小值点, 因此也为 f 的极小值点, 则 $\mathrm{d}f(0,0)=0$. 由前面的讨论可知, 原点为 f 的唯一极小值点. 又由微分定义知

$$f(x,y)-f(0,0)=o(\sqrt{x^2+y^2}),\quad (x,y)\to(0,0),$$

由此我们立刻可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

例 47. 设光滑曲面 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$, 而 $P_0(x_0,y_0,z_0)\notin S$. 取 S 上的点 P_1 使得线段 P_0P_1 恰是点 P_0 到 S 的距离, 求证: 向量 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与曲面 S 在点 P_1 处的切平面垂直.

证明: 记 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$. $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 令

$$f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

则 f 为初等函数, 故连续可导.

$\forall (x,y,z,\lambda)\in\mathbb{R}^4$, 定义

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda F(x,y,z).$$

因点 P_1 为 $\sqrt{f}$ 在 S 上的最小值点, 则它是 f 在 S 上的最小值点, 从而也是条件极小值点, 于是 $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 (P_1, λ) 为 L 的驻点, 故

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial x}(P_1, \lambda) = 2(x_1 - x_0) + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}(P_1), \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial y}(P_1, \lambda) = 2(y_1 - y_0) + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}(P_1), \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial z}(P_1, \lambda) = 2(z_1 - z_0) + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}(P_1),
\end{aligned}$$

则 $\overrightarrow{P_0P_1} = -\frac{\lambda}{2}\mathrm{grad}F(P_1)$, 又 $\mathrm{grad}F(P_1)$ 为 S 在点 P_1 的法向量, 因此它与 S 在该点的切平面垂直, 从而 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 也与该切平面垂直.

§1. 含参变量积分的概念及其性质

回顾: 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数. 如果 $\forall X \in \Omega$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall Y \in \Omega$, 当 $\|X - Y\| < \delta$ 时, 我们均有

$$|f(X) - f(Y)| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在 Ω 上连续.

定义 1. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集, 而 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ 为函数. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X, Y \in \Omega$, 当 $\|X - Y\| < \delta$ 时, 我们有 $|f(X) - f(Y)| < \varepsilon$, 则称函数 f 在 Ω 上一致连续.

否定形式: 函数 f 在 Ω 上不为一致连续当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists X, Y \in \Omega$ 使 $\|X - Y\| < \delta$ 但我们却有 $|f(X) - f(Y)| \geqslant \varepsilon_0$.

评注

- 函数 f 在 Ω 上不为一致连续当且仅当 $\exists\varepsilon_0>0$ 使得对任意的整数 $k\geqslant 1$, 均存在 $X_k, Y_k\in\Omega$ 使得 $\|X_k-Y_k\|<\frac{1}{k}$, 但 $|f(X_k)-f(Y_k)|\geqslant\varepsilon_0$.
- 函数 f 在 Ω 上不为一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 Ω 中的两点列 $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|X_k-Y_k\|=0$, 但 $\forall k\geqslant 1$, 我们却有

$$|f(X_k)-f(Y_k)|\geqslant\varepsilon_0.$$

- 一致连续蕴含连续, 但反之不对: $\forall x \in (0,1)$, 令 $f(x)=\frac{1}{x}$, 则 f 在 $(0,1)$ 上连续但非一致连续. 事实上, $\forall k \geqslant 1$, 我们有

$$\left|f\Big(\frac{1}{2(k+1)}\Big)-f\Big(\frac{1}{k+1}\Big)\right| = k+1 \geqslant 2,$$

而与此同时, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}\right| = 0.$

作业题: 判断下列函数是否一致连续:

(1) $f(x)=x\sin x \ (0 \leqslant x < +\infty)$.

回顾: 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, 则 Ω 中的任意点列 $\{X_k\}$ 均有子列 $\{X_{\ell_k}\}$ 在 Ω 中收敛.

定理 1. 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上一致连续.

证明: 用反证法, 假设 f 在 Ω 上不为一致连续, 那么 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall k \geqslant 1$, 均 $\exists X_k, Y_k \in \Omega$ 使得 $\|X_k - Y_k\| < \frac{1}{k}$, 但是却有 $|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0$. 由于 Ω 为有界闭集, 因此 $\{X_k\}$ 有子列 $\{X_{\ell_k}\}$ 在 Ω 中收敛, 设其极限为 $A \in \Omega$. 于是

$$\lim_{k \to +\infty} Y_{\ell_k} = \lim_{k \to +\infty} X_{\ell_k} + \lim_{k \to +\infty} (Y_{\ell_k} - X_{\ell_k}) = A.$$

由假设、函数连续性以及复合极限法则可知

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 &\leqslant \lim_{k\to+\infty} \left|f(X_{\ell_k}) - f(Y_{\ell_k})\right| \\
&= \left| \lim_{k\to+\infty} f(X_{\ell_k}) - \lim_{k\to+\infty} f(Y_{\ell_k}) \right| = 0.
\end{aligned}
$$

矛盾！故所证结论成立.

作业题: 判断下列函数是否一致连续:

(2) $f(x) = \frac{x^2+1}{4-x^2}$ $(-1 < x < 1)$.

极限与极限次序可交换性

定理 2. 如果 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数，则 $\forall(x_0,y_0)\in[a,b]\times[c,d]$，均有

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

证明: $\forall y\in[c,d]$，由于函数 f 在点 (x_0,y) 连续，于是由复合函数极限法则可知

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y).$$

同样利用函数 f 在点 (x_0, y_0) 处的连续性以及复合函数极限法则可得

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0).$$

援用同样的证明或利用对称性可知

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

因此所证结论成立.

定义 2. 假设 $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ 为函数. 如果 $\forall y \in [c, d]$, 下述积分

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

均有定义, 则我们将之称为 (以 y 为参变量的) 含参变量积分.

极限与积分次序可交换性

定理 3. 如果 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 则 $I:[c,d]\to\mathbb{R}$ 也为连续函数.

证明: 由于 $[a,b]\times[c,d]$ 为有界闭集而 f 连续, 则 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上一致连续. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得对任意 $(x,y),(x',y')\in[a,b]\times[c,d]$, 当 $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<\delta$ 时, 我们有

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

任取定 $y_0 \in [c,d]$. $\forall y \in [c,d]$, 当 $|y-y_0|<\delta$ 时, $\forall x \in [a,b]$, 均有 $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. 于是

$$|I(y)-I(y_0)| = \left|\int_a^b \big(f(x,y)-f(x,y_0)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

因此 I 在点 y_0 处连续, 从而 I 为连续函数.

注: (1) 我们有 $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(2) 由于连续性为局部性质, 因此如果在定理中将 $[c,d]$ 换成开区间, 则相应结论依然成立.

求导与积分次序可交换性

定理 4. 如果 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数使得偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上存在且连续, 则 $I:[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续可导且

$$I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

注: 同前面一样, 可在定理条件中将 $[c,d]$ 换成开区间, 相应结论依然成立.

证明: 固定 $y_0 \in [c,d]$. $\forall x \in [a,b]$ 及 $\forall y \in [c,d]$, 若 $y \neq y_0$, 由单变量函数的 Lagrange 中值定理可知, $\exists \theta = \theta(x,y) \in (0,1)$ 使得

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y-y_0)) \cdot (y-y_0).$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}
\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0} &= \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0+\theta(y-y_0))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 为连续, 因此为一致连续, 从而 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对任意 $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times [c, d]$, 当 $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta$ 时, 我们有

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', y')\Big| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

进而 $\forall y \in [c, d]$, 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,\mathrm{d}x\Big| \\
\leqslant\ & \int_a^b \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y - y_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\Big|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是 I 在点 y_0 处可导, 并且我们有

$$I'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,\mathrm{d}x,$$

从而 $\forall y \in [c, d]$, 我们有

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

随后再利用 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 的连续性以及极限与积分次序可交换性可知 I' 连续, 故 I 为连续可导.

定理 5. 假设 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数使得偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上存在且连续，而 $\alpha,\beta:[c,d]\to[a,b]$ 可导. $\forall y\in[c,d]$, 定义

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

则 $J:[c,d]\to\mathbb{R}$ 为可导函数且

$$J'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

证明: $\forall u, v \in [a,b]$ 以及 $\forall y \in [c,d]$, 定义

$$F(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

则 F 连续可微且 $\forall u, v \in [a,b]$ 以及 $\forall y \in [c,d]$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v,y) &= -f(u,y), \\
\frac{\partial F}{\partial v}(u,v,y) &= f(v,y), \\
\frac{\partial F}{\partial y}(u,v,y) &= \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

注意到 $J(y)=F(\alpha(y),\beta(y),y)$, 则由复合函数可微法则可知 J 为可导函数且

$$
\begin{aligned}
J'(y) &= \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(y),\beta(y),y)+\frac{\partial F}{\partial v}(\alpha(y),\beta(y),y))\beta'(y) \\
&\quad +\frac{\partial F}{\partial u}(\alpha(y),\beta(y),y)\alpha'(y) \\
&= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).
\end{aligned}
$$

积分与积分次序可交换性

定理 6. 若 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 连续, 则

$$\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\forall x\in[a,b]$ 以及 $\forall t\in[c,d]$, 定义

$$F(x,t)=\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$g(t)=\int_a^b F(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\Big(\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

则 $F:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 连续且 $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)=f(x,t)$, 于是 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 为连续. 再由求导与积分次序可交换性可知函数 g 连续可导且我们有

$$g'(t)=\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y &= \int_c^d g'(y)\,\mathrm{d}y\\ &= g(d)-g(c)=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 1. $\forall\theta\in(-1,1)$, 定义

$$I(\theta)=\int_0^{\pi}\log(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

求 $I(\theta)$.

解: 由题设条件以及求导与积分次序可交换性可知 I 为连续可导且 $\forall\theta\in(-1,1)\setminus\{0\}$, 均有

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1}{\theta}\Big(1-\frac{1}{1+\theta\cos x}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\theta\cos x}. \end{aligned}$$

利用变量替换, 我们有

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\theta\cos x} \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\big(2\arctan t\big)}{1+\theta\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2+\theta(1-t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+\theta)+(1-\theta)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\big(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\big)}{1+\big(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\big)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \arctan\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\,\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\theta^2}}.$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}
I'(\theta) &= \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{\sqrt{1-\theta^2}-1}{\sqrt{1-\theta^2}} \\
&= \frac{-\theta\pi}{(\sqrt{1-\theta^2}+1)\sqrt{1-\theta^2}}.
\end{aligned}$$

注意到 $I(0) = 0$, 故 $\forall \theta \in (-1, 1)$, 我们有

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= \int_0^\theta I'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\theta \frac{-\pi t\,\mathrm{d}t}{(\sqrt{1-t^2}+1)\sqrt{1-t^2}} \\
&= \int_0^\theta \frac{\pi\,\mathrm{d}(\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}+1} = \pi \log(\sqrt{1-t^2}+1)\Big|_0^\theta \\
&= \pi \log \frac{\sqrt{1-\theta^2}+1}{2}.
\end{aligned}$$

谢谢大家!