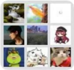
微积分 A (2)

姚家燕

第 3 讲



群聊：2024春微积分A(2)学生群

该二维码7天内(3月8日前)有效，重新进入将更新

改群昵称为: xxx+班级号，例如: 张三+工物10

在听课过程中,

严禁使用与教学无关的电子产品!

本学期的主要内容

- 多元微分学 (第 1 章)
- 含参积分以及广义含参积分 (第 2 章)
- 重积分 (第 3 章)
- 曲线积分与曲面积分 (第 4 章)
- 级数理论 (第 5, 6, 7 章)

期中考试时间与内容

考试时间

2024 年 4 月 20 日星期六上午 9:50-11:50

考试内容

- 多元微分学 (第 1 章)
- 含参积分以及广义含参积分 (第 2 章)

教学材料

- 刘智新 闫浩 章纪民编《高等微积分教程 (下)》清华大学数学科学系自编教材 (2014)
- 教学 ppt、作业及习题课解答、课外资料

除课堂上所布置的作业外, 建议大家自己做完该书中所有习题! 对于喜欢做题目的同学, 可以自行解答所推荐的习题集当中的题目!

如何获取上述教学材料? 网络学堂

- 各个打印社以及清华大学主楼机房可上网.
- 仅在每次上完课后才上传讲义, 若需要提前预习的同学可以看教材《微积分 A (2)》.
- 当教材与讲义不一致时, 以讲义为准.

强力推荐的习题辅导书

- 吉米多维奇著, 数学分析习题集. 高等教育出版社 (1986)
- 华苏 扈志明 莫骄编, 微积分学习指导—典型例题精解. 科学出版社 (2004)
- 刘坤林 谭泽光编著, 大学数学: 概念, 方法与技巧. 清华大学出版社 (2001)

其它习题辅导书

- 李大华 胡适耕 林益编, 高等数学典型问题 100 类. 华中工学院出版社 (1987).
- 高等数学辅导, 同济高数配套书. 机械工业出版社 (2002).
- 方企勤 林源渠著, 数学分析习题课教材. 北京大学出版社 (1990).
- 刘玉琏 杨奎元 刘伟 吕凤编, 数学分析讲义学习辅导书 (两册). 高教出版社 (2006).

数学专业学生常用教材

- 常庚哲 史济怀编, 数学分析教程.
  高等教育出版社 (2004)
- 张筑生著, 数学分析新讲.
  北京大学出版社 (1990)
- 卓里奇著, 数学分析. 高教出版社 (2006)

学习方法

- 千万不要松懈! 第一个月非常重要! 刚开始会遇到许多新知识, 可能会不适应, 但只要坚持下去, 等入了门, 一切都会容易起来.
- 用兴趣来推动学习.
- 关键在于课堂上的理解, 要学会听课, 不要指望老师在课堂上将所有知识都讲细讲透.

- 要勇敢、及时地提问, 不要担心问题太简单. 所提的问题都是对老师教学的反馈和有益补充, 让老师明白在教学过程中有哪些地方讲的不够清楚. 问题得不到及时解决而积累下来, 会为后面学习带来更大困难!
- 学的不好, 但却不知道如何来提问, 怎么办? 找老师! 在学习中遇到任何困难都要勇敢地找老师, 充分利用老师!

- 学习上要扎扎实实, 切忌不求甚解、因某些方法或思想很简单而掉以轻心, 要牢记复杂源于简单!
- 题目都会做, 但一做就错! 原因不在于所谓粗心, 而是基本功不扎实, 没真正掌握基本原理或方法!
- 要学会总结和寻找适合自己的学习方法!
- 如何适应 ppt 教学? 边听边记, 以听为主!

- 不要求课前预习, 但课后一定要先温习再做作业. 布置的作业涉及到课堂上所授内容的核心, 独立理解并完成作业会极大帮助消化课堂内容.
- 题目不在多, 而在于精, 要弄明白每道题的目的, 由此来有针对性的练习. 做题的目的在于掌握某种理论、方法或者技巧, 解题的数量应以此作为度量.

如何做作业? (不鼓励花过多时间!)

- 在做作业前, 一定要先温习讲义尤其是例题, 学习其解法 (特别是模仿其表述方式)!
- 若做作业时轻松流畅, 不用再做别的习题.
- 若做作业时不是太轻松, 请再仔细温习讲义, 尤其是相关例题. 做完作业后, 在教材以及推荐的习题集中找相应题目, 练熟为止.
- 若按上述方法还是不行, 找老师!

作业要求

- 每周五晚在网络学堂作业栏发布本周作业
- 请用《数学文稿纸》手写作业
- 抄题, 解答时要写 “解:” 或 “证明:”
- 两道题之间要空行
- 将作业扫描成一个单独的 pdf 文件, 每周三上课前提交到网络学堂的作业栏, 下一周的周二网上发作业
- 不接受补交作业!

期末总评成绩计算方式

- 平时占 20%, 期中占 30%, 期末占 50%
- 拒绝修改上述规则的任何建议!

清华大学本科生学籍管理规定

第十条 学生应当参加学校教育计划规定的各项活动，自觉遵守课堂纪律，完成规定学业. 因故不能参加学校教育计划规定的活动，应当事先请假并获得批准，未经批准而缺席的，学校视情节轻重根据有关规定给予相应的批评教育，纪律处分. 未请假或者请假未获批准连续两周未参加教学计划规定的活动的，予以退学处理.

第十七条 含实验或者作业的课程，学生在按时完成课程实验（包括实验报告）和作业后，方可参加该课程考核.

规则制度

- 上课期间严禁使用与教学无关的电子产品
- 严禁以任何形式外传课堂内容
- 务必按时上交作业 (允许三次不交作业)
- 无故缺交平时作业 4 次及 4 次以上或无故缺席期中考试，取消参加期末考试的资格!
- 严禁以任何方式在考试后来要成绩!
- 拒绝修改上述规则的任何建议!

主讲老师联系方式与答疑时间

欢迎大家平时到办公室来咨询或讨论问题，
拒绝在考试后以各种名目来要分数！
不建议网上提问，因为无法保证时效和准确！

- 地点：理科楼数学系 A 216
- 电话：62794494
- 时间：每周三下午 18:00-19:00
- 每次上课前时采用雨课堂签到并随机点名，请大家务必准时出席！

数学史

- 《数学文化》 http://www.global-sci.org/mc/
- 《数学与人文》 http://intlpress.sinaapp.com/mh/

第 2 讲回顾：二重极限与累次极限

二重极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

累次极限: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

- 二者的存在性之间一般没有关系.
- 如果二重极限与某一个累次极限同时存在, 则二者必然相等.
- 如果两个累次极限均存在但不相等, 则二重极限不存在.

回顾: 连续函数的局部性质

- 向量值函数的连续性, 连续函数, 连续函数空间 $\mathscr{C}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 和 $\mathscr{C}(\Omega)$.
- 多元数量值连续函数经过四则运算后仍为连续函数; 多元向量值连续函数经过加、减、数乘与复合运算后仍连续.
- 多变元的初等函数在 其定义区域内 连续.

回顾: 连续函数的性质

- 向量值函数连续当且仅当开集的原像集为开集 (闭集的原像集为闭集).
- 弧连通集: 任意两点可用连续曲线连接.
- 连通性: 折线连通集为弧连通集. 可以证明弧连通开集为折线连通. 实数集 $\mathbb{R}$ 的子集 D 为弧连通集当且仅当它为区间.

回顾: 连续函数的整体性质

- 最值定理: 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空的有界闭集, $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上有最大值和最小值.
- 连通性定理: 若 $f \in \mathscr{C}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ 而 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通, 则 $f(\Omega)$ 为弧连通集.
- 介值定理: 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 连通, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则对任意 $X_1, X_2 \in \Omega$ 及介于 $f(X_1)$, $f(X_2)$ 之间的任意 μ, $\exists X_0 \in \Omega$ 使得 $f(X_0) = \mu$.

回顾: 连续函数整体性质的典型应用

例 9. 证明: 存在正实数 m, M 使得对任意的 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$m \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant \|X\|_n \leqslant M \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

第 3 讲

作业题: 第 1.3 节第 22 页第 1 题第 (3), (4), (11), (12) 小题, 第 2 题第 (1), (2), (3), (5) 小题, 其中第 (5) 题当中应该将 xy 改为 $|xy|$.

作业题: 第 1.3 节第 23 页第 3 题 第 (2) 小题.

注: 应将题中的 $0+$ 改为 0^+.

作业题: 第 1.3 节第 23 页第 6 题第 (1), (4) 题.

例 10. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$. 定义

$$\rho(X, \Omega) = \inf_{Y \in \Omega} \|X - Y\|,$$

并称之为点 X 到集合 Ω 的距离.

(1) 给定 Ω, 证明 $\rho(X, \Omega)$ 为变量 $X \in \mathbb{R}^n$ 的 n 元连续函数.

(2) 给定 $X \in \mathbb{R}^n$, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 证明: $\exists X_0 \in \Omega$ 使得 $\rho(X, \Omega) = \|X - X_0\|$.

证明: (1) 固定 $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$. 则 $\forall Y \in \Omega$,

$$\|X_1 - Y\| \leqslant \|X_1 - X_2\| + \|X_2 - Y\|.$$

对 $Y \in \Omega$ 取下确界可得

$$\rho(X_1, \Omega) \leqslant \|X_1 - X_2\| + \rho(X_2, \Omega),$$

也即 $\rho(X_1, \Omega) - \rho(X_2, \Omega) \leqslant \|X_1 - X_2\|$, 进而由对称性可知 $\rho(X_2, \Omega) - \rho(X_1, \Omega) \leqslant \|X_1 - X_2\|$, 故 $|\rho(X_1, \Omega) - \rho(X_2, \Omega)| \leqslant \|X_1 - X_2\|$.

于是 $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$, 若令 $\delta = \varepsilon$, 那么 $\forall X \in B(X_0, \delta)$, 我们有

$$|\rho(X, \Omega) - \rho(X_0, \Omega)| \leqslant \|X - X_0\| < \varepsilon,$$

故 $\rho(X, \Omega)$ 为关于变量 X 的连续函数.

(2) 固定 $X \in \mathbb{R}^n$. $\forall Y \in \Omega$, 定义

$$F(Y) = \|X - Y\|.$$

则 $\forall Y_1, Y_2 \in \Omega$, 由三角不等式可知

$$\|X - Y_1\| \leqslant \|Y_1 - Y_2\| + \|X - Y_2\|.$$

也即 $\|X-Y_1\|-\|X-Y_2\|\leqslant\|Y_1-Y_2\|$. 再由对称性可得 $\|X-Y_2\|-\|X-Y_1\|\leqslant\|Y_1-Y_2\|$. 综合上述两个不等式可知

$$|F(Y_1)-F(Y_2)|\leqslant\|Y_1-Y_2\|.$$

援引前面的讨论可知 F 为连续函数. 由于 Ω 为有界闭集, 从而由最值定理知, $\exists X_0\in\Omega$ 使得

$$\rho(X,\Omega)=\inf_{Y\in\Omega}F(Y)=F(X_0)=\|X-X_0\|.$$

例 11. 假设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, 而 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭集. 求证: $\exists Y_0 \in \Omega$ 使得 $\|X_0 - Y_0\| = \inf_{Y\in\Omega} \|X_0 - Y\|$.

证明: 将所要证等式的右边记作 R. $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, 定义 $f(Y) = \|X_0 - Y\|$. 则 f 为连续函数, 且

$$R = \inf_{Y\in\Omega} f(Y) = \inf_{Y\in\bar{B}(X_0,R+1)\cap\Omega} f(Y).$$

但 $\bar{B}(X_0, R+1)\cap\Omega$ 为有界闭集, 由最值定理, $\exists Y_0 \in \bar{B}(X_0, R+1)\cap\Omega$ 使得 $R = \|X_0 - Y_0\|$.

例 12. 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. 定义

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{\substack{X \in \Omega_1 \\ Y \in \Omega_2}} \|X - Y\|.$$

称为集合 Ω_1, Ω_2 之间的距离. 若 Ω_1 为有界闭集而 Ω_2 为闭集, 求证: 存在 $X_0 \in \Omega_1$, $Y_0 \in \Omega$ 使得

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \|X_0 - Y_0\|.$$

证明: 首先证明

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{\substack{X \in \Omega_1 \\ Y \in \Omega_2}} \|X - Y\| = \inf_{X \in \Omega_1} \inf_{Y \in \Omega_2} \|X - Y\|.$$

$\forall X \in \Omega_1$, $Y \in \Omega_2$, 均有 $\rho(\Omega_1, \Omega_2) \leqslant \|X - Y\|$,
故 $\rho(\Omega_1, \Omega_2) \leqslant \rho(X, \Omega_2)$, 于是我们有

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) \leqslant \inf_{X \in \Omega_1} \rho(X, \Omega_2) = \inf_{X_1 \in \Omega_1} \inf_{X_2 \in \Omega_2} \|X_1 - X_2\|.$$

反过来, $\forall X \in \Omega_1$, $Y \in \Omega_2$, 我们有

$$\inf_{X_1 \in \Omega_1} \inf_{X_2 \in \Omega_2} \|X_1 - X_2\| \leqslant \inf_{X_2 \in \Omega_2} \|X - X_2\| \leqslant \|X - Y\|.$$

由此立刻可得

$$\inf_{X_1 \in \Omega_1} \inf_{X_2 \in \Omega_2} \|X_1 - X_2\| \leqslant \rho(\Omega_1, \Omega_2).$$

于是我们就有

$$\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\inf_{X_1\in\Omega_1}\inf_{X_2\in\Omega_2}\|X_1-X_2\|=\inf_{X_1\in\Omega_1}\rho(X_1,\Omega_2).$$

由于 $\rho(X_1,\Omega_2)$ 关于变量 X_1 连续, 而 Ω_1 为有界闭集, 由最值定理可知, $\exists X_0\in\Omega_1$ 使得

$$\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\rho(X_0,\Omega_2),$$

进而由 Ω_2 为闭集可知, $\exists Y_0\in\Omega_2$ 使得

$$\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\rho(X_0,\Omega_2)=\|X_0-Y_0\|.$$

无穷小函数的阶

定义 3. 设 $n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, 而 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为 Ω 的极限点, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数.

(1) 若 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = 0$, 称 f 在 $\Omega \ni X \to X_0$ 时为无穷小函数 (或无穷小量), 记作

$$f(X) = o(1) \ (\Omega \ni X \to X_0).$$

可见 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = A$ 当且仅当

$$f(X) - A = o(1) \ (\Omega \ni X \to X_0).$$

(2) 设 $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 为函数. 若存在 $\beta>0,\ \delta>0$ 使 $\forall X\in\Omega\cap\mathring{B}(X_0,\delta)$, $|f(X)|\leqslant\beta|g(X)|$, 则记

$$f(X)=O(g(X))\ (\Omega\ni X\to X_0).$$

若还有 $g(X)=O(f(X))$, 则称 f,g 为同阶.

(3) 设 $k\geqslant 0$. 若 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\frac{f(X)}{\|X-X_0\|^k}=0$, 则称 f 在 $\Omega\ni X\to X_0$ 时为 $\|X-X_0\|^k$ 的高阶的无穷小, 记作 $f(X)=o(\|X-X_0\|^k)\ (\Omega\ni X\to X_0)$.

例 13. $\forall X=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$f_1(X)=\sum_{j=1}^n a_jx_j,\ f_2(X)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j.$$

求证: 当 $X\to(0,\ldots,0)$ 时, 我们有

$$f_1(X)=O(\|X\|),\quad f_2(X)=O(\|X\|^2).$$

证明: 由 Cauchy 不等式立刻可得

$$|f_1(X)|\leqslant\sum_{j=1}^n|a_j||x_j|\leqslant\Big(\sum_{j=1}^n|a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|X\|.$$

令 $M = \sup\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$. 同样由 Cauchy 不等式知

$$|f_2(X)| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}||x_i||x_j| \leqslant M \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |x_i||x_j|$$

$$= M\sum_{i=1}^n |x_i|\Big(\sum_{j=1}^n |x_j|\Big) = M\Big(\sum_{j=1}^n |x_j|\Big)^2$$

$$\leqslant nM\sum_{j=1}^n |x_j|^2 = nM\|X\|^2.$$

因此所证结论成立.

§4. 多元函数的全微分及偏导数

回顾: 称 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为线性函数, 若 $\forall X, Y\in\mathbb{R}^n$ 以及 $\forall\lambda, \mu\in\mathbb{R}$, 我们均有

$$L(\lambda X+\mu Y)=\lambda L(X)+\mu L(Y).$$

设 $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底, 令 $a_j=L(\vec{e}_j)$. $\forall X=(x_1, \ldots, x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 我们有 $X=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\vec{e}_j$,

由此可得 $L(X)=\sum\limits_{j=1}^{n}L(\vec{e}_j)x_j=\sum\limits_{j=1}^{n}a_jx_j$.

线性函数的向量表示

$\forall X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$L(X) = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)X,$$

于是线性函数 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可以与 n 阶行向量

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

视为等同.

n 元函数的全微分

定义 1. 假设 $X_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为函数. 若存在线性函数 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$f(X) - f(X_0) = L(X - X_0) + o(\|X - X_0\|),$$

则称 f 在点 X_0 处可微, 并将线性函数 L 记作 $\mathrm{d}f(X_0)$, 称为 f 在点 X_0 处的全微分或微分.

评注

- 由于函数 $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为线性函数当且仅当 $\exists a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ 使 $\forall Y = (y_1,\ldots,y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 均有 $L(Y) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j y_j$. 故 f 在点 X_0 处可微当且仅当 $\exists a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $X \to X_0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(X) - f(X_0) &= L(X - X_0) + o(\|X - X_0\|) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j - x_j^{(0)}) + o(\|X - X_0\|).
\end{aligned}
$$

- f 在点 X_0 可微蕴含在该点连续, 反之不对.

定理 1. 若 f 在点 X_0 可微, 则其微分唯一.

证明: 假设 f 在点 X_0 处有两个微分, 也就是说存在 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 与 $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ 使得当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j - x_j^{(0)}) + o(\|X - X_0\|),$$

$$f(X) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x_j - x_j^{(0)}) + o(\|X - X_0\|),$$

于是当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j - b_j)(x_j - x_j^{(0)}) = o(\|X - X_0\|).$$

特别地, 对于每个固定的指标 $1 \leqslant j \leqslant n$, 通过选取 $x_i = x_i^{(0)}$ $(i \neq j)$ 可知, 当 $x_j \to x_j^{(0)}$ 时,

$$(a_j - b_j)(x_j - x_j^{(0)}) = o(|x_j - x_j^{(0)}|),$$

也即 $a_j - b_j = \lim\limits_{x_j \to x_j^{(0)}} \frac{o(|x_j - x_j^{(0)}|)}{x_j - x_j^{(0)}} = 0$. 由此得证.

例 1. 若 $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 线性, 则 $\forall X, X_0 \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$L(X) - L(X_0) = L(X - X_0),$$

于是 L 在点 X_0 处的微分为 $\mathrm{d}L(X_0) = L$, 也即 $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, 均有 $\mathrm{d}L(X_0)(Y) = L(Y)$.

例 2. 固定 $1 \leqslant j \leqslant n$. $\forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 令 $\pi_j(X) = x_j$. 则 π_j 为线性函数且 $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\pi_j(X_0) = \pi_j$, 也即 $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}\pi_j(X_0)(Y) = \pi_j(Y) = y_j.$$

由于 $\mathrm{d}\pi_j(X_0)$ 不依赖 X_0, 通常将上式简写成

$$\mathrm{d}\pi_j(Y) = \pi_j(Y) = y_j.$$

如同在单变量的情形, 常用 x_j 来表示 π_j, 而将 $\mathrm{d}\pi_j$ 简记作 $\mathrm{d}x_j$. 则我们有

$$\mathrm{d}x_j(X_0)(Y) = y_j.$$

同前面一样, 我们也常将之简写成

$$\mathrm{d}x_j(Y) = y_j.$$

线性函数的表示

命题 1. 设 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 线性使得 $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 均有 $L(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j$, 则

$$L = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathrm{d}x_j.$$

证明: 由于 $L(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathrm{d}x_j(Y)$, 因此所证结论成立.

定理 2. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $X_0 \in \Omega$, 而函数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ 在点 X_0 可微. 则下列性质成立:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ 在点 X_0 处可微, 并且

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(X_0) = \lambda \, \mathrm{d}f(X_0) + \mu \, \mathrm{d}g(X_0).$$

- fg 在点 X_0 处可微并且

$$\mathrm{d}(fg)(X_0) = f(X_0) \, \mathrm{d}g(X_0) + g(X_0) \, \mathrm{d}f(X_0).$$

- 若 $g(X_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在点 X_0 处可微并且

$$\mathrm{d}\Big(\frac{f}{g}\Big)(X_0) = \frac{g(X_0)\mathrm{d}f(X_0) - f(X_0)\mathrm{d}g(X_0)}{(g(X_0))^2}.$$

偏导数 全微分的计算

定义 2. 设 $X_0=(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})\in\mathbb{R}^n$, 而函数 f 定义在点 X_0 的某邻域上. 固定 $1\leqslant j\leqslant n$. 若

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^{(0)},\ldots,x_{j-1}^{(0)},x_j^{(0)}+h,x_{j+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})-f(X_0)}{h}$$

存在, 则称函数 f 在点 X_0 处关于第 j 个变量有偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$, 通常也会将之记作 $\partial_j f(X_0)$ 或 $f'_{x_j}(X_0)$. 若对于 $1\leqslant j\leqslant n$, 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 均存在, 则称函数 f 在点 X_0 处可导.

评注

- 设 $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底, 那么

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(X_0 + h\vec{e}_j) - f(X_0)}{h}.$$

令 $F(h) = f(X_0 + h\vec{e}_j)$. 则 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = F'(0)$, 也即将变量 $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ 固定, 而将 f 看成是 x_j 的单变量函数来求导.

- 几何意义: 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 实际上表示平面曲线 $y = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{j-1}^{(0)}, x, x_{j+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ 在点 $x = x_j^{(0)}$ 处的切线方向.
- 当 $n \geqslant 2$ 时, n 元函数 f 在点 X_0 可导并不意味它在该点连续, 更不意味在该点可微.

例 3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } xy = 0, \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, 但 f 在原点不连续.

例 4. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, 定义

$$f(x,y,z) = x^2 + e^{xyz} + \log(x^2+y^2+z^2).$$

求函数 f 的偏导数.

解: 由定义可知, 在点 (x,y,z) 处,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2x + yze^{xyz} + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xze^{xyz} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xye^{xyz} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}$$

定理 3. 若 f 在点 X_0 处可微, 则它可导且

$$\mathrm{d}f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j.$$

证明: 由题设可知存在 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 我们均有

$$\mathrm{d}f(X_0)(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j(Y),$$

也即我们有 $\mathrm{d}f(X_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j$.

对任意的 $1 \leqslant j \leqslant n$, 由微分定义, 当 $h \to 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(X_0 + h\vec{e}_j) - f(X_0) &= \mathrm{d}f(X_0)(h\vec{e}_j) + o(\|h\vec{e}_j\|) \\ &= a_j h + o(|h|). \end{aligned}$$

由此我们立刻可得

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + h\vec{e}_j) - f(X_0)}{h} = a_j,$$

也即 f 在点 X_0 处关于第 j 个变量可导, 并且 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = a_j$. 故所证结论成立.

例 5. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 讨论函数 f 在原点处的连续性, 可导性与可微性.

解: 因 $0\leqslant f(x,y)\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, 则由夹逼原理可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

于是函数 f 在原点处连续. 由偏导数的定义知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.\end{aligned}$$

因此函数 f 在原点处可导.

下证 f 在原点不可微. 用反证法, 设 f 在原点可微, 则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} & f(x,y)-f(0,0) \\ = \; & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}) \\ = \; & o(\sqrt{x^2+y^2}), \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 进而由复合函数极限法则可知 $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 矛盾! 由此得证.

计算两个变量的函数的微分的方法

问题: 如何判断函数 f 在点 (x_0, y_0) 是否可微?

- 判断 f 在该点的连续性. 若连续, 则继续.
- 判断 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 的存在性.
- 若在该点可导, 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时, 估计

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

的阶. 若为 $o(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$, 则可微.

定义 3. 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空开集, 而 $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

- 若 f 在 Ω 的每点可导, 则称 f 在 Ω 上可导, 由此可以在 Ω 上定义 n 个函数 $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$, 将它们称为 f 在 Ω 上的偏导函数.
- 若 $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ 在点 $X_0\in\Omega$ 处连续, 则称 f 在点 X_0 处连续可导.
- 若 f 在 Ω 每点均连续可导, 则称 f 在 Ω 上连续可导. 这样函数的集合记作 $\mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$.

注: 初等函数在 其定义区域的内部 连续可导.

定理 4. 若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, 而函数 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ 在点 $X_0 \in \Omega$ 处连续可导, 则 f 在该点可微.

注: 该定理的逆命题不成立.

分析: 仅仅考虑 $n=2$ 的情形. 我们需要证明: 当 $(h_1,h_2)\to(0,0)$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
&f(x_1^{(0)}+h_1, x_2^{(0)}+h_2) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_2 \\
&\quad + o(\|(h_1,h_2)\|).
\end{aligned}
$$

证明: 出于简便, 仅考虑 $n=2$ 的情形. 由于 f 在点 X_0 处连续可导, 于是 $\exists r>0$ 使得函数 f 在 $B(X_0,\sqrt{2}r)$ 上可导且其偏导函数在点 X_0 处连续. 记 $X_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$. $\forall h_1,h_2\in(-r,r)$, 令

$$
\begin{aligned}
F(h_1,h_2) &= f(x_1^{(0)}+h_1,x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\\
&= \big(f(x_1^{(0)}+h_1,x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)}+h_2)\big)\\
&\quad +\big(f(x_1^{(0)},x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\big).
\end{aligned}
$$

由 Lagrange 中值定理知, $\exists \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) \;&=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)} + \theta_1 h_1, x_2^{(0)} + h_2)h_1 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + \theta_2 h_2)h_2. \end{aligned}$$

而由夹逼原理可知

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \theta_1 h_1 = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \theta_2 h_2 = 0,$$

又 f 在点 X_0 连续可导, 由复合函数极限法则,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}+\theta_1 h_1, x_2^{(0)}+h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}),$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}+\theta_2 h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}).$$

于是当 $(h_1, h_2) \to (0, 0)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + o(1)\Big)h_1 \\ &\quad + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + o(1)\Big)h_2. \end{aligned}$$

另外注意到 $|h_1| \leqslant \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, $|h_2| \leqslant \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, 于是当 $(h_1,h_2) \to (0,0)$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
F(h_1,h_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_2 \\
&\quad + o(1)h_1 + o(1)h_2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_2 + o(1)\sqrt{h_1^2+h_2^2} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})h_2 + o(\|(h_1,h_2)\|).
\end{aligned}
$$

这表明函数 f 在点 X_0 处可微.

推论. 初等函数在其定义区域的内部可微.

例 6. $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, 定义

$$f(x,y,z)=x^2+e^{xyz}+\log(x^2+y^2+z^2).$$

则 f 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上可导并且其偏导函数连续, 进而可知 f 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上可微且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x,y,z) &= \left(2x+yze^{xyz}+\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\\ &\quad+\left(xze^{xyz}+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}y\\ &\quad+\left(xye^{xyz}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

例 7. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

求证: 函数 f 在点 $(0,0)$ 处可微但不连续可导.

证明: 由定义立刻可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{|h|}}{h}=0.$$

由对称性可知 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=o(\|(x,y)\|).$$

故 f 在点 $(0,0)$ 处可微且其微分 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由初等函数的性质可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

于是 $\forall k\in\mathbb{R}$，我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x|}-\frac{\mathrm{sgn}x}{\sqrt{1+k^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x|},$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx)$ 不存在，故 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在点 $(0,0)$ 间断.

例 8. 若函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 关于它的第一个变量连续, 而关于第二个变量的偏导函数在 $\mathbb{R}^2$ 上有界, 求证: 函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

证明: 由题设可知, $\exists M>0$ 使得 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\leqslant M$. 取 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 y_0, y 使得

$$
\begin{aligned}
&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|+|f(x,y)-f(x,y_0)|\\
&=|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|+|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)||y-y_0|\\
&\leqslant|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|+M|y-y_0|,
\end{aligned}
$$

由题设及夹逼原理知 f 在 (x_0,y_0) 连续. 得证.

连续性，可导性，可微性，连续可导性之间的关系

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
 & & \text{连续} \arrow[dl, shift left, "/" marking] \arrow[dd, shift left, "/" marking] \\
\text{连续可导} \arrow[r, shift left] & \text{可微} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\
 & & \text{可导} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[uu, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

作业题：第 1.4 节第 42 页第 1 题第 (5), (7) 题，第2题((1) 中改$\sqrt{x}$为$\sqrt{|x|}$),第4 题第 (4), (5) 题，将 (4) 中左边改为u. 第 43 页第 7 题 (不用交).

谢谢大家!