微积分作业4

清華大学 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：WJF-HW 姓名：微积分 姚班30 编号：赵瀚宇 科目：2023040163 3.29 第 1 页

1. 判断下列函数是否一致连续

(1) $f(x) = x\sin x \ (0 \le x < +\infty)$ (2) $f(x) = \frac{x^2+1}{4-x^2} \ (-1 < x < 1)$

解：(1) 否. 令 $\epsilon = 1$. $\forall \delta > 0$. 取 $a_n = 2n\pi + \frac{1}{2n\pi}$, $b_n = 2n\pi + \frac{2}{2n\pi}$

则 $|a_n - b_n| = \frac{1}{2n\pi}$，因此 $\exists N > 0$, $\forall n > N$, $|a_n - b_n| < \delta$

但 $f(a_n) = (2n\pi + \frac{1}{2n\pi})\sin\frac{1}{2n\pi}$，$f(b_n) = (2n\pi + \frac{2}{(2n)\pi})\sin\frac{2}{(2n)\pi}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 2$，$\exists N_1 > 0$，$\forall n > N_1$，$|a_n - b_n| < \delta$ 且 $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \epsilon$

因此 $f(x)$ 不为一致连续

(2) 是. 因为 $f(x)$ 为初等函数，且 $f(\pm 1)$ 存在. 因此 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1)$

可以延伸 $f(x)$ 至 $x = \pm 1$. 此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 为连续函数，因此一致连续

2. $\forall x \in \mathbb{R}$. 定义 $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2}\,dy$. 求 F'

解：由求导与积分次序可交换性可知。

$$F'(x) = \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2})\,dy + 2x e^{-x(x^2)^2} - e^{-x\cdot x^2}$$
$$= \int_x^{x^2} e^{-xy^2}\cdot(-y^2)\,dy + 2xe^{-x^5} - e^{-x^3}$$
$$= -\int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2}\,dy + 2xe^{-x^5} - e^{-x^3}$$

3. 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可微，$\forall x \in \mathbb{R}$，定义 $F(x) = \int_0^x (x+y) f(y)\,dy$，求 F''

解：由求导与积分次序可交换性

$$F'(x) = \int_0^x f(y)\,dy + (x+x)f(x) = 2xf(x) + \int_0^x f(y)\,dy$$
$$F''(x) = 2[f(x) + xf'(x)] + f(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$$

4. 设 $\varphi \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\forall x, t \in \mathbb{R}$, 设.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

求证：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

证明：由求导与积分可交换性

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\varphi'(x+at)\cdot a+\varphi'(x-at)(-a)\right] + \frac{1}{2a}\left[\psi(x+at)\cdot a-\psi(x-at)(-a)\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)\right] + \frac{1}{2}\left(\psi(x+at)+\psi(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}\left[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)\right] + \frac{a}{2}\left(\psi'(x+at)-\psi'(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\psi(x+at)-\psi(x-at)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\psi'(x+at)-\psi'(x-at)\right]$$

故 $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

5. 证明：广义含参积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}dx$ 在含 $t=0$ 的区间上不为一致收敛

证明：不失一般性，假设该区间为 $[0,a]$. 令 $\epsilon=\frac{1}{4}$，$\forall M>0$

取 $A'=\frac{\pi}{3t}$，$A''=\frac{2\pi}{3t}$，$t<\frac{\pi}{3M}$ 则 $A', A''>M$

$$\int_{A'}^{A''}\frac{\sin(tx)}{x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta > \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2\pi}{3}}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} > \epsilon$$

因此该积分不为一致收敛.

6. 讨论下列积分在所给区间上的一致收敛性.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}dx$ $(-\infty<y<+\infty)$ (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}e^{-tx}dx$ $(0\le t<+\infty)$

解：(1)

定义 $f(x,y)=\cos(xy)$，$g(x,y)=\frac{1}{1+x^2}$，其中 $y\in[c,+\infty)$，且 $c>0$

则 $g(x,y)$ 在 $[0,+\infty)$ 上关于 x 单调递减，且 $\lim_{x\to+\infty}g(x,y)=0$ 对 y 一致成立

并且 $\forall A>1$，$\left|\int_0^A\cos(xy)dx\right| = \left|\frac{1}{y}(\sin(Ay))\right| \le \frac{1}{|y|} \le \frac{1}{c}$

由狄利克雷判别准则可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+x^2}dx$ 对于 $y\in[c,+\infty)$ 一致收敛

由奇偶性，这也说明 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+x^2}dx$ 对于 $y\in[c,+\infty)$ 一致收敛

因为这一积分对 y 为偶函数，因此它对 $y\in(-\infty,-c]$ 一致收敛.

但若区间包含 $y=0$，不失一般性取 $[0,a]$ 包含于这一区间. $\forall M>0$，

令 $A'=$ ，$A''=$ ，$y=$ ，则 $A', A''>M$，且

$$\int_{A'}^{A''}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}dx$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ 及 $x \in \mathbb{R}$，有 $\left|\frac{\cos(yx)}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$

因 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ 收敛，因此由 Weierstrass 判别法知 ~~[illegible]~~ 所求积分一致收敛

(2) 对 $t \in [0,+\infty)$，$x \in [1,+\infty)$ 定义 $f(x,t) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$，$g(x,t) = e^{-tx}$。

对 $f(x,t)$ 这一单变量已被使用阿贝尔-狄利克雷判别准则，

因为 $\left|\int_1^A \cos x\, dx\right| \le 2$ 且 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调函数并趋于零，

可知 $\int_1^{+\infty} f(x,t)dx$ 对于 $t \in [0,+\infty)$ 一致收敛。

同时，$g(x,t)$ 有界 并且 对于 变量 x 单调，因此由阿贝尔-狄利克雷判别准则知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-tx} dx$ 一致收敛。

7. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

解：由 $\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$，记原积分为 I

可知 $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} dy$

由于在 $x \in [0,1]$，$y \in [0,1]$，$\left|\frac{1}{1+x^2y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right| < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

而 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$，因此 $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ 一致收敛。

由积分积分可交换性，可知

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\overset{(x=\sin\theta)}{=} \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2\sin^2\theta} d\theta \overset{(z=\tan\theta)}{=} \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2\frac{z^2}{1+z^2}} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+(1+y^2)z^2}$$

$$= \int_0^1 dy \left(\arctan \sqrt{1+y^2}\, z \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$= \int_0^1 dy \cdot \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{2}+1)$$

(2) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx \qquad (a,b>0)$

解：$\frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,dy$. 若令原积分为 I 则

$I = \int_0^1 dx\int_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy$.

因为对 $x\in[0,1]$, $y\in[a,b]$, $\left|x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right| \le \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^a$

而 $x\to 0$ 时 $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^a = 0$ （因为 sin 函数有界）

因此 $\int_0^1 \sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^a\,dx$ 存在，由而 $\int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$ 一致收敛

由积分积分可交换性知

$I = \int_a^b dy\int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$

$\overset{(x=e^{-t})}{=} \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-yt}\sin t\, e^{-t}\,dt$

$= \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\sin t\,dt$

$= \int_a^b dy\left[\frac{e^{-(y+1)t}}{(y+1)^2+1}\left(-\cos t + (y+1)\sin t\right)\Big|_0^{+\infty}\right]$

$= \int_a^b dy\,\frac{-(-1)}{(y+1)^2+1} \overset{(z=y+1)}{=} \int_{a+1}^{b+1}\frac{dz}{z^2+1} = \arctan(b+1) - \arctan(a+1)$.

(3). $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx \quad (a,b>0)$

解：$\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} = \int_a^b e^{-yx^2}dy$，若令原积分为 I，则

$I = \int_0^{+\infty}dx\int_a^b xe^{-yx^2}dy$

因为对 $x\in[0,+\infty)$, $y\in[a,b]$, $|xe^{-yx^2}| \le xe^{-ax^2}$，而 $\lim_{x\to+\infty} xe^{-ax^2}=0$，故 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}dx$ 存在.

因此 $\int_0^{+\infty} xe^{-yx^2}dx$ 一致收敛.

由积分积分可交换性知

$I = \int_a^b dy\int_0^{+\infty}dx\, xe^{-yx^2}$

$= \int_a^b dy\left(\frac{-1}{2y}e^{-yx^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \int_a^b dy\cdot\frac{1}{2y} = \frac{1}{2}\ln(b/a)$.

(4) $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin(yx)dx$

解： 令 $I(y)=\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin(yx)dx$

$\forall x\ge 0,\ y\in\mathbb{R}$, 令 $f(x,y)=xe^{-ax^2}\sin(xy)$

则 $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2e^{-ax^2}\cos xy$.

$|f(x,y)|\le xe^{-ax^2}$, $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\le x^2e^{-ax^2}$,

但 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$, $\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx$ 均收敛，则由可知

$\int_0^{+\infty}f(x,y)dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ 均对 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛

由求导积分交换知 I 连续可导，且 $\forall y\in\mathbb{R}$ 有

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}\cos(yx)dx=\int_0^{+\infty}(x^2-\frac{1}{2a})e^{-ax^2}\cos(yx)dx+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yx\,dx$$

$$=\frac{xe^{-ax^2}}{-2a}\cos(yx)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-ax^2}}{-2a}(-\sin yx)\cdot y\,dx+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yx\,dx$$

$$=-\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}x\sin xy\,e^{-ax^2}dx+\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{y}e^{-ax^2}\sin xy\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}(e^{-ax^2})'\sin xy\,dx\right)$$

$$=-\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}x\sin xy\,e^{-ax^2}dx+\frac{1}{2a}\left[-\frac{1}{y}\int_0^{+\infty}(-2ax)e^{-ax^2}\sin xy\,dx\right]$$

$$=I(y)\left(-\frac{y}{2a}+\frac{1}{y}\right)$$

此可分离变量为 $\frac{dI}{I}=\frac{dy}{2ay}(2a-y^2)$

故 $I=ye^{-\frac{y^2}{4a}}\cdot C$, C为常参数

$I'(y)=Ce^{-\frac{y^2}{4a}}(1-\frac{y^2}{2a})$

$I'(0)=C$

但 $I'(0)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a^{\frac32}}\Gamma(\frac32)=\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac32}}$

因此 原积分为 $I(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{\frac32}}ye^{-\frac{y^2}{4a}}$.

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}$，其中 $y>0$，$n\ge 0$ 为整数

解： 对 $n\ge 0$，取 $C>0$ 令 $I_n(y)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}$. $f_n(x,y)=\frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$，其中 $y\in[C,+\infty)$

~~则 $I_n(y)=$~~ $\frac{\partial f_n(x,y)}{\partial y}=-\frac{(n+1)}{(x^2+y)^{n+2}}=-(n+1)f_{n+1}(x,y)$

因为 $f_n(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$ 不超过分段函数 $g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c^{n+1}}, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x^{2(n+1)}}, & x>1.\end{cases}$

而且 $\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ 收敛，因此可知 $\int_0^{+\infty} f_n(x,y)\,dx$ 对 $y\in[c,+\infty)$ 一致收敛.

因此可知 $I_n(y)$ 在 $[c,+\infty)$ 连续可导

且 $I_n'(y)=\int_0^{+\infty} dx\cdot\dfrac{-(n+1)}{(y+x^2)^{n+2}}$

$=-(n+1)\,I_{n+1}(y)$.

同时，因为 $I_0(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{y+x^2}=\left(\arctan\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(\sqrt{y}\right)^{-1}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{y}}$

设 $I_n(y)=c_n y^{-a_n}$

则 $I_{n+1}(y)=-\dfrac{I_n'(y)}{n+1}=\dfrac{c_n a_n}{n+1}y^{-a_n-1}$

因此 $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+1\\ c_{n+1}=\dfrac{c_n a_n}{n+1}\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a_n=n+\frac{1}{2}\\ c_n=\dfrac{(n-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2})}{n!}\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

即 $I_n(y)=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2}y^{-n-\frac{1}{2}}$

這对 $y>c$ 成立，但取 $c\to0^+$ 可知 其对 $\forall y>0$ 成立.

综合上述讨论，$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}=\dfrac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!}y^{-n-\frac{1}{2}}$.