第 1 次作业题

1. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 下列函数的极限是否存在? 若存在, 求出该极限.

(1) $(x^2+y^2)e^{-x-y}$, (2) $\frac{x+y}{|x|+|y|}$, (3) $\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$, (4) $\frac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}$.

2. 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$,

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}$, (4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{x^2}$.

3. 讨论下列累次极限与二重极限是否存在, 若存在, 求其值:

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to 0^+}\frac{x^y}{1+x^y},\ \lim_{y\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y},\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0^+}}\frac{x^y}{1+x^y}.$$

4. 判断下列函数在原点 $(0,0)$ 的连续性

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

5. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=\ln(x+\sqrt{x^2-y^2})$, (2) $z=\cos(1+2^{xy})$.

6. 考察下列函数在坐标原点的可微性:

(1) $f(x,y)=\sqrt{|x|}\cos y$, (2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

(4) $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 φ 在原点的某邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$.

7. 求下列函数的全微分:

(1) $u=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$, (2) $z=\frac{x-y}{x+y}$.

8. 求证: 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 在原点处不连续, 但沿任何方向的方向导数均存在.

9. 求 $z=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_ix_j$ 在 $P_0=(1,1,\ldots,1)$ 处沿方向 $\vec{\ell}=(-1,-1,\ldots,-1)^T$ 的方向导数.

10. 设 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz$, $P=(1,1,1)$, 求 u 在点 P 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(P)$ 的最值, 并指出取得最值时的方向, 再指出沿哪一个方向的方向导数为零.

11. 证明下列函数所满足的相应等式:

(1) $u=2\cos^2(x-\frac{y}{2})$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$,
(2) $n>0$, $u=(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})^{2-n}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$.

12. 求由变换 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\cos\theta\cos\varphi \quad (r>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi) \\ z=r\sin\varphi \end{cases}$ 所确定的向量值函数 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(r,\theta,\varphi) \\ f_2(r,\theta,\varphi) \\ f_3(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix}$ 的 Jacobi 矩阵和微分.