微积分 A (2)

姚家燕

第 7 讲

重要通知

- 希望大家认真温习第 1 章!
- 希望大家能重温上学期所学的定积分、不定积分以及广义积分!

第 6 讲回顾: Taylor 公式

- 一阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$
\begin{aligned}
f(X) = f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)(x_j - x_j^{(0)}) \\
+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)(x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) \\
= f(X_0) + J_f(X_0)\,\Delta X + \frac{1}{2!}(\Delta X)^T H_f(X_\theta)\,\Delta X,
\end{aligned}
$$

其中 $\Delta X = X - X_0$, $H_f(X_\theta) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$, $\theta \in (0,1)$.

评注

- 该式为带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式.
- 由于 f 为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类, 则 H_f 连续. 由夹逼原理与复合极限法则知, 当 $X \to X_0$ 时, 我们有

$$H_f(X_0+\theta(X-X_0)) = H_f(X_0)+\vec{o}(1).$$

进而可得带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0)+J_f(X_0)\,\Delta X \\ &\quad +\frac{1}{2!}(\Delta X)^T H_f(X_0)\Delta X+o(\|\Delta X\|^2). \end{aligned}$$

- $H_f(X) = J_{\mathrm{grad} f}(X)$.
- 更一般地, 若 f 为 $\mathscr{C}^{(m+1)}$ 类, 则有

$$f(X) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^k f(X_0)$$
$$+\frac{1}{(m+1)!}\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^{m+1} f(X_\theta),$$

其中 $\theta \in (0,1)$, 并且 $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$.
人们通常将 $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - x_j^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^k f(X_0)$
称为 f 在点 X_0 处的 m 阶 Taylor 多项式.

回顾: 极值

- 极大值, 极小值, 严格极大值, 严格极小值, 最大值, 最小值.
- 必要条件: 极值点为驻点 (Fermat 定理).
- 高维 Rolle 定理、微分中值定理及思想.
- 充分条件: 设 f 为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类, X_0 为其驻点,
  若 $H_f(X_0)$ 正定, 则 X_0 为 f 的极小值点;
  若 $H_f(X_0)$ 负定, 则 X_0 为 f 的极大值点;
  若 $H_f(X_0)$ 不定, 则 X_0 不为 f 的极值点.

第 7 讲

例 3. 假设 $D = [-a, a] \times [-b, b]$, 其中 $a, b > 0$. 若 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(D)$ 使得 $\forall (x, y) \in \mathrm{Int} D$, 我们均有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \neq 0,$$

求证: 函数 f 在 D 上有最值且其最值点属于 ∂D.

证明: 由于 D 为有界闭集, 而且 f 为连续函数, 于是由最值定理可知 f 在 D 上有最值. 反证法, 假设函数 f 在 D 上的最值点 P_0 位于 D 的内部,

则该点也为函数 f 的极值点. 但由题设可知

$$\begin{aligned}\det H_f(P_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \\ &\quad -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)\right)^2 < 0,\end{aligned}$$

于是海赛矩阵 $H_f(P_0)$ 为不定矩阵, 从而点 P_0 不是 f 的极值点, 矛盾! 因此所证结论成立.

回顾: 假设 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 为实对称矩阵, 它的特征根为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

- 称 A 半正定, 若 $\forall X \in \mathbb{R}^n$, 均有 $X^TAX \geqslant 0$, 而这又等价于说 $\lambda_1 \geqslant 0$.
- 称 A 半负定, 若 $\forall X \in \mathbb{R}^n$, 均有 $X^TAX \leqslant 0$, 而这又等价于说 $\lambda_n \leqslant 0$.

例 4. 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f: B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数.

(1) 若 X_0 为 f 的极小值点, 则 $H_f(X_0)$ 半正定.

(2) 若 X_0 为 f 的极大值点, 则 $H_f(X_0)$ 半负定.

证明: (1) 由于 X_0 为函数 f 的极小值点, 于是我们就有 $J_f(X_0) = \vec{0}$. 固定向量 $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. 由带 Peano 余项的 Taylor 公式可知, 当 $t \to 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(X_0 + tX) &= f(X_0) + J_f(X_0)\,tX \\ &\quad + \frac{1}{2!} X^T H_f(X_0) X \cdot t^2 + o(\|tX\|^2). \end{aligned}$$

注意到 $f(X_0+tX) \geqslant f(X_0)$, 于是我们有

$$0 \leqslant \frac{1}{2!} X^T H_f(X_0) X \cdot t^2 + t^2 o(1).$$

进而可得知 $0 \leqslant X^T H_f(X_0) X$. 这表明 $H_f(X_0)$ 为半正定.

(2) 如果 X_0 为 f 的极大值点, 那么它为 $-f$ 的极小值点, 从而 $H_{-f}(X_0)$ 为半正定, 故 $H_f(X_0)$ 为半负定.

例 5. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 而且函数 $u:D\to\mathbb{R}$ 在 D 上为连续且在 D 的内部为二阶连续可导. 若 $\forall(x,y)\in \mathrm{Int}D$, 均有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=u(x,y),$$

并且 $\forall(x,y)\in\partial D$, 成立 $u(x,y)\geqslant 0$. 求证:

$$\forall(x,y)\in D,\ \text{均有}\ u(x,y)\geqslant 0.$$

证明: 用反证法, 假设函数 u 在 D 上不为非负, 由题设可得 u 在 $\mathrm{Int}D$ 上不为非负. 又 u 连续而且 D 为有界闭集, 于是 u 在 D 上有最小值. 将相应的最小值点记作 P_0. 由于 u 在 ∂D 上为非负但在 $\mathrm{Int}D$ 上却不为非负, 于是 $P_0 \in \mathrm{Int}D$ 并且 $u(P_0) < 0$, 从而 P_0 为 u 的极小值点, 由此立刻可得知海赛矩阵 $H_u(P_0)$ 为半正定.

进而我们就有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_0) &= (1,0)H_u(P_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \geqslant 0,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_0) &= (0,1)H_u(P_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

但由题设又可得知

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_0) = u(P_0) < 0,
$$

矛盾! 故所证结论成立.

例 6. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 而且函数 $u: D\to\mathbb{R}$ 在 D 上为连续且在 D 的内部为二阶连续可导. 若 $\forall (x,y)\in \mathrm{Int}D$, 均有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=u(x,y),$$

并且 $\forall (x,y)\in\partial D$, 成立 $u(x,y)>0$. 求证:

$$\forall (x,y)\in D,\ 均有\ u(x,y)>0.$$

证明: 由于 u 为连续函数而且 ∂D 为有界闭集, 则 u 在 ∂D 上有最小值, 设为 m, 于是 $m > 0$. $\forall (x,y) \in D$, 现定义 $v(x,y) = u(x,y) - \frac{m(e^x+e^y)}{2e}$, 则 v 在 D 上连续, 在 D 的内部二阶连续可导且使得 $\forall (x,y) \in \mathrm{Int}D$, 我们均有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = v(x,y).$$

另外, $\forall (x,y) \in \partial D$, 我们还有

$$v(x,y) \geqslant m - \frac{m(e^x+e^y)}{2e} \geqslant 0.$$

下面来证明 v 在 D 上非负. 用反证法, 假设 v 在 D 上不为非负, 那么 v 在 $\mathrm{Int}D$ 上不为非负. 又 v 为连续而 D 为有界闭集, 于是 v 在 D 上有最小值. 将相应的最小值点记作 P_0. 由于 v 在 ∂D 上为非负, 但是在 $\mathrm{Int}D$ 上却不为非负, 于是 $P_0 \in \mathrm{Int}D$ 且 $v(P_0) < 0$, 从而 P_0 为 v 的极小值点, 故海赛矩阵 $H_v(P_0)$ 为半正定.

于是我们就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(P_0) &= (1,0)H_v(P_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \geqslant 0,\\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(P_0) &= (0,1)H_v(P_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \geqslant 0.\end{aligned}$$

但我们有 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(P_0)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(P_0)=v(P_0)<0$, 矛盾!
由此可知 $\forall (x,y)\in D$, 我们均有

$$u(x,y)=v(x,y)+\frac{m(e^x+e^y)}{2e}\geqslant \frac{m(e^x+e^y)}{2e}>0,$$

因此所证结论成立.

条件极值

定义 2. 设 $n > k \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X)$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k\}.$$

若 $S \neq \emptyset$, 则称 S 为 k 维曲面. 此时 S 为闭集.

注: $\forall X_0 \in S$, 由隐函数定理可知, 在 X_0 的某个邻域内, S 中的点可表示成 k 个变量的函数.

例 7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 定义

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

则 $J_\varphi(x,y) = (2x, 2y)$ 的秩为 1, 于是单位圆周 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 为一维曲面.

例 8. $\forall (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R}$, 定义 $\varphi(x,y) = y$. 则 $J_\varphi(x,y) = (0,1)$ 的秩为 1, 故 x 轴上的开区间

$$(0,1) \cong \big\{(x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \mid y = 0\big\}$$

为一维曲面, 但闭区间 $[0,1]$ 不是一维曲面.

定义 3. 假设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 k 维曲面, $X_0 \in S$, 而 $f : S \to \mathbb{R}$ 为函数.

(1) 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的 (条件) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极小值.

(2) 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的 (条件) 极大值点, 称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极大值.

(3) 如果 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的最小值点, 称 $f(X_0)$ 为最小值.

(4) 如果 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为 f 在 S 上的最大值点, 称 $f(X_0)$ 为最大值.

注: 条件最值点必为条件极值点.

定理 4. (Lagrange 乘数法) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k\} \neq \emptyset.$$

$\forall X \in \Omega$ 及 $\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$, 定义

$$\text{(拉氏函数)} \quad L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \varphi_j(X).$$

如果点 $X_0 \in S$ 为函数 f 在 S 上的条件极值点, 则 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$ 使得 (X_0, λ) 为 L 的驻点.

评注

- 点 (X_0,λ) 为 L 的驻点当且仅当
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(X_0,\lambda)=0\ (1\leqslant i\leqslant n),\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(X_0,\lambda)=0\ (1\leqslant i\leqslant n-k). \end{cases}$$
等价地, 我们有
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)+\sum\limits_{j=1}^{n-k}\lambda_j\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X_0)=0\ (1\leqslant i\leqslant n),\\ \varphi_i(X_0)=0\ (1\leqslant i\leqslant n-k). \end{cases}$$
- 即便 (X_0,λ) 为 L 的驻点, 点 X_0 也不一定为 f 在 S 上的条件极值点, 还需具体分析!

证明: 仅考虑 $k=n-1$ 的情形, 并假设

$$S=\{X\in\Omega \mid \varphi(X)=0\}.$$

由于 $J_\varphi(X_0)$ 的秩为 1, 于是 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X_0)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 不全为零. 不失一般性, 假设 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(X_0)\neq 0$. 那么存在点 X_0 的邻域使得在该邻域内 $\varphi(X)=0$ 的解为 $x_n=g(x_1,\ldots,x_{n-1})$, 其中点 $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ 属于点 $X_n^{(0)}=(x_1^{(0)},\ldots,x_{n-1}^{(0)})$ 的某个邻域内. 令

$$F(x_1,\ldots,x_{n-1})=f(x_1,\ldots,x_{n-1},g(x_1,\ldots,x_{n-1})).$$

由题设条件可知 $X_n^{(0)}$ 为 F 的 (无条件) 极值点, 于是对任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = 0$, 也即

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = 0.$$

由隐函数定理可知, 我们有 $\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X_0)}$, 从而对任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 我们均有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = -\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_n^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X_0)}.$$

令 $\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X_0)}$. 则对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0),$$

也即 $\frac{\partial L}{\partial x_i}(X_0, \lambda) = 0$. 又 $X_0 \in S$, 于是我们有

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(X_0, \lambda) = \varphi(X_0) = 0,$$

从而所证结论成立.

求曲面上的条件极值的典型方法

- 由于 Lagrange 乘数法只给出条件极值点的必要条件，于是为了确定条件极值点，首先需想办法将条件极值问题转化成最值问题，例如有界闭集上的连续函数的最值问题.
- 定义拉氏函数并求它的驻点，由此得到原来那个函数可能的条件极值点.
- 比较原来那个函数在上述驻点处值的大小，由此确定极值点.

例 9. 求空间椭圆

$$S:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ \\ lx+my+nz=0\end{cases}$$

的长、短半轴的长度, 其中 $l^2+m^2+n^2=1$.

解: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$$

椭圆的长、短半轴的长度也就是 $\sqrt{f}$ 在 S 上的最大值和最小值, 于是我们只需求 f 在 S 上的最大值和最小值. 又 S 为有界闭集并且 f 连续, 故 f 在 S 上有最值. $\forall(x, y, z, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5$, 令

$$
\begin{aligned}
L(x, y, z, \lambda, \mu) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
&\quad + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + \mu(lx + my + nz).
\end{aligned}
$$

由 Lagrange 乘数法知最值点 (x, y, z) 满足:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} + \mu l, \tag{1}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} + \mu m, \tag{2}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} + \mu n, \tag{3}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \tag{4}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mu} = lx + my + nz. \tag{5}$$

由关系式 (1), (2), (3) 立刻可得

$$2(x^2+y^2+z^2)+2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$+\mu(lx+my+nz)=0,$$

也即 $\lambda=-(x^2+y^2+z^2)$. 同时我们也有

$$x=-\frac{a^2l}{2(a^2+\lambda)}\mu,\ y=-\frac{b^2m}{2(b^2+\lambda)}\mu,\ z=-\frac{c^2n}{2(c^2+\lambda)}\mu.$$

由于原点不在 S 上, 则 $\mu \neq 0$, 从而我们有

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\mu}(lx + my + nz) \\ &= \frac{a^2l^2}{2(a^2+\lambda)} + \frac{b^2m^2}{2(b^2+\lambda)} + \frac{c^2n^2}{2(c^2+\lambda)}. \end{aligned}$$

出于简化记号, 定义

$$\begin{aligned} A &= a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2, \\ B &= \frac{1}{2}\Big(a^2l^2(b^2+c^2) + b^2m^2(c^2+a^2) + c^2n^2(a^2+b^2)\Big), \\ C &= a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

于是由前面的关系式可知 $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$. 我们由此立刻可得

$$f(x,y,z) = -\lambda = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

拉氏函数的驻点所对应的 f 的值只有两个, 而 f 在 S 上有最值, 故椭圆的长、短半轴分别为

$$a^* = \Big(\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad b^* = \Big(\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

例 10. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内接长方体的体积的最大值.

解: 由对称性, 只需要考虑椭球面内关于每一个坐标轴对称的内接长方体, 设它在第一卦限的顶点为 (x,y,z), 则其体积为 $8xyz$. 令

$$S=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x,y,z\geqslant 0\right\}.$$

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 定义 $F(x,y,z)=8xyz$, 则 F 为初等函数, 因此为无穷可导. 由最值定理可知 F 在 S 上有最大值, 这个值也就是所求的最大值,

并且相应的最值点必定会落在第一卦限的内部.
$\forall x, y, z > 0$ 以及 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 定义

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1),$$

由 Lagrange 乘数法可知最值点 (x, y, z) 满足:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2},\ 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2},$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2},\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

因此 $\lambda = -12xyz$, 进而 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$,
从而所求最大值为 $\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$.

初等方法: 由对称性, 只需要考虑椭球面内关于每一个坐标轴对称的内接长方体, 设它在第一卦限的顶点为 (x, y, z), 则其体积为 $8xyz$. 又

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{c^2} \leqslant \left(\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right)^3 = \frac{1}{27},$$

并且等号成立当且仅当 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$, 从而所求最大值为 $8 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{3}abc$.

求有界闭区域上的最值的典型方法

- 极值或最值问题常可被转化有界闭区域上的连续函数的最值问题, 由于问题的解一定存在, 关键在于如何确定最值点.
- 求函数在区域内部的驻点并计算相应值.
- 将函数限制在边界上, 求相应的拉氏函数的驻点, 并计算原来那个函数的相应值.
- 比较上述值的大小, 由此确定最值点.

例 11. 设 $P_1=(0,0)$, $P_2=(1,0)$, $P_3=(0,1)$, 而 D 为三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 所围区域. $\forall P=(x,y)\in D$, 令

$$f(P) = |PP_1|^2 + |PP_2|^2 + |PP_3|^2.$$

求 f 在 D 上的最大值和最小值.

解: $\forall (x,y) \in D$, 我们有

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2 \\ &= 3x^2+3y^2-2x-2y+2. \end{aligned}$$

于是我们也可以将 f 看成是定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的初等函数, 故 f 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数. 由于 D 为有界闭集, 故函数 f 在 D 上有最值.

(1) 如果 f 在 D 上的最值点在 D 的内部, 那么该点必为 f 的局部极值点, 在该点处, 我们有

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2,\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2,$$

于是该点为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 并且 $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

(2) 若 f 在 D 上的最值点位于 D 的边界, 那么该点为 f 的条件极值点. 除了顶点以外, ∂D 由下述线段组成:

$$C_1: \ y = 0, \ 0 < x < 1,$$

$$C_2: \ x = 0, \ 0 < y < 1,$$

$$C_3: \ x + y = 1, \ 0 < x < 1.$$

于是我们需要来分别考虑 f 在 C_1, C_2, C_3 上的条件极值, 相应的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L_1(x,y,\lambda_1) &= f(x,y)+\lambda_1 y, \\ L_2(x,y,\lambda_2) &= f(x,y)+\lambda_2 x, \\ L_3(x,y,\lambda_3) &= f(x,y)+\lambda_3(x+y-1). \end{aligned}$$

拉氏函数 L_1 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial L_1}{\partial x}=6x-2, \\ 0=\frac{\partial L_1}{\partial y}=6y-2+\lambda_1, \\ 0=\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}=y, \end{cases}$$

从而该点为 $(\frac{1}{3},0,2)$, 并且 $f(\frac{1}{3},0)=\frac{5}{3}$.

拉氏函数 L_2 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L_2}{\partial x} = 6x - 2 + \lambda_2, \\ 0 = \frac{\partial L_2}{\partial y} = 6y - 2, \\ 0 = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2} = x, \end{cases}$$

则该点为 $(0, \frac{1}{3}, 2)$, 并且我们有 $f(0, \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$.

拉氏函数 L_3 的驻点满足:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L_3}{\partial x} = 6x - 2 + \lambda_3, \\ 0 = \frac{\partial L_3}{\partial y} = 6y - 2 + \lambda_3, \\ 0 = \frac{\partial L_3}{\partial \lambda_3} = x + y - 1, \end{cases}$$

故该点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$, 并且我们有 $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.

另外, 在三个顶点处, 我们有

$$f(P_1) = 2,\ f(P_2) = 3,\ f(P_3) = 3.$$

由于 f 在 D 上有最值, 故 f 在 D 上的最值点必在上述点中, 通过比较 f 在这些点处的值知 f 在点 P_2, P_3 处取到最大值 3, 而在点 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 处取到最小值 $\frac{4}{3}$.

作业题: 第 1.9 节第 93 页第 4 题第 (2) 小题, 第 94 页第 7 题第 (2) 小题.

例 12. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的距离.

解: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 定义

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= z^2 - xy - x + y - 4, \\ f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

那么 F, f 均为初等函数. 特别地, 由于 F 连续, 故 $S := F^{-1}(0)$ 为闭集. 则存在原点到 S 上的点的最短的距离, 也即 f 在曲面 S 上有最小值. 我们将相应的最小值点记作 (x_0, y_0, z_0).

$\forall(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$, 定义

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - x + y - 4).$$

由 Lagrange 乘数法, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ 使得 (x_0, y_0, z_0, λ) 为拉氏函数 L 的驻点, 在该点处, 我们有

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \lambda) &= 2x_0 - \lambda(y_0 + 1), \\
0 = \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \lambda) &= 2y_0 + \lambda(-x_0 + 1), \\
0 = \frac{\partial L}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, \lambda) &= 2z_0 + 2\lambda z_0, \\
0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, z_0, \lambda) &= z_0^2 - x_0 y_0 - x_0 + y_0 - 4.
\end{aligned}$$

由此可得所求驻点为

$$P_1 = \left(1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}, 0, -\frac{2(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\right),$$

$$P_2 = \left(1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}, 0, \frac{2(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\right),$$

$$P_3 = (-1, 1, 1, -1),\ P_4 = (-1, 1, -1, -1),$$

而函数 f 在相应点处的值分别为 $2(1+\sqrt{5})^2$, $2(1-\sqrt{5})^2$, 3, 3, 由此知原点到曲面 S 的距离为 $\sqrt{3}$, 曲面上相应点为 $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$.

作业题: 第 1.9 节第 94 页第 9 题第 (1) 小题.

第 1 章小结

1. 极限的一般性质:

- 与单变量数量值函数极限的关系.
- 极限的计算: 转化成单变量函数的情形! 夹逼原理, 复合极限法则, 利用极限存在的必要条件来得出极限的不存在性.
- 极限的性质: 唯一, 保序、保号, 四则运算, 序列极限与函数极限的关系, Cauchy 准则.
- 二重极限与累次极限的关系.

2. 连续函数的基本性质:

- 四则运算法则.
- 复合法则 (初等函数在其定义区域内连续).
- 最值定理及其应用:

  (1) 若 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭集, 则 $\exists Y_0 \in \Omega$ 使得 $\|X_0 - Y_0\| = \inf\limits_{Y \in \Omega} \|X_0 - Y\|$.

  (2) 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 Ω_1 有界闭集而 Ω_2 为闭集, 则存在 $X_0 \in \Omega_1$, $Y_0 \in \Omega_2$ 使得

$$\inf_{X \in \Omega_1, Y \in \Omega_2} \|X - Y\| = \|X_0 - Y_0\|.$$

- 连通性 (介值定理).

3. 无穷小 (向量值) 函数的阶: 定义.

4. 微分与偏导数的定义及其性质:

- 连续, 可微, 可导, 连续可导之间的关系.
- 偏导数, Jacobi 矩阵, Jacobi 行列式.
- 方向导数, 梯度及其几何意义.
- 高阶偏导数, 计算二阶偏导数何时可以交换求导次序 (二阶偏导函数连续).
- 复合求微分法则, 复合函数的二阶偏导数.
- 判断函数在一点可微的标准方法.
- 初等函数在其定义区域的内部无穷可导.

5. 隐函数定理与反函数定理:

- 隐函数定理: 两个变量一个方程, 多个变量一个方程, 多个变量多个方程.
- 隐函数的二阶偏导数.
- 反函数定理.

6. 几何应用:

- 曲面 (三种表示法) 的切平面与法线.
- 空间曲线 (两种表示法) 的切线与法平面.

7. Taylor 公式:

- 带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式.
- 带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

8. 极值: 必要条件, 充分条件 (海赛), 方法.

9. 条件极值:

- k 维曲面.
- 必要条件 (Lagrange 乘数法).
- 求条件极值的方法 (曲面或空间闭区域).

综合练习

例 1. 假设 $n \geqslant 1$ 为整数, 而 $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$, 则 $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$.

证明: $\forall z \in \mathbb{C}$, 定义

$$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0.$$

则 P 为连续函数. 令

$$\mu = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

我们将证明 $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu = |P(z_0)|$. 由于

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^n} = \lim_{|z|\to+\infty} \left|1 + \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^{j-n}\right| = 1,$$

则 $\exists R > 0$ 使得 $|z| > R$ 时, $|P(z)| \geqslant 2\mu + 1$. 故

$$\mu = \inf_{|z|\leqslant R} |P(z)|.$$

由于 $|P|$ 为连续函数而闭圆盘为有界闭集, 从而由最值定理立刻可知 $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu = |P(z_0)|$. 下面将证明 $\mu = 0$, 由此立刻可推出所要结论.

用反证法, 假设 $\mu \neq 0$. $\forall z \in \mathbb{C}$, 定义

$$Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}.$$

由前面的讨论知 $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$, 从而我们可以将多项式 $Q(z)$ 表示成

$$Q(z) = 1 + q_k z^k + \cdots + q_n z^n,$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant n$, $q_k, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$ 且 $q_k \neq 0$.

记 $q_k = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$. 取 $\varphi = \frac{\pi-\theta}{k}$. 那么 $\forall r > 0$,

$$\begin{aligned} Q(re^{i\varphi}) &= 1 + q_k r^k e^{ik\varphi} + \sum_{j=k+1}^{n} q_j r^j e^{ij\varphi} \\ &= 1 - \rho r^k + \sum_{j=k+1}^{n} q_j r^j e^{ij\varphi}. \end{aligned}$$

由于对任意整数 $j \geqslant 1$, 我们均有

$$\lim_{r\to 0^+} r^j = 0,$$

于是 $\exists r > 0$ 使得我们有

$$\rho r^k < 1, \ \sum_{j=k+1}^{n} |q_j| r^{j-k} < \frac{1}{2}\rho.$$

由此我们立刻可得

$$\begin{aligned} |Q(re^{i\varphi})| &\leqslant |1-\rho r^k| + \sum_{j=k+1}^{n} |q_j| r^j |e^{ij\varphi}| \\ &\leqslant 1-\rho r^k + \frac{1}{2}\rho r^k < 1 = |Q(0)|. \end{aligned}$$

矛盾! 故 $\mu = 0$, 从而所证结论成立.

例 2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为面单连通区域, 而 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 为可微使得 $\forall P \in \Omega$, 均有 $\operatorname{grad} u(P) \neq \vec{0}$. 求证: 函数 u 在 Ω 内没有封闭的等值面.

证明: 用反证法, 假设 $\exists a \in \mathbb{R}$ 使 $u(x, y, z) = a$ 在 Ω 内定义一个封闭曲面 S. 因 Ω 为面单连通, 则 S 所围的闭区域 Ω_1 包含于 Ω. 又 Ω_1 为有界闭集而 u 连续, 于是 u 在 Ω_1 上有最大值 M 和最小值 m. 注意到 $\operatorname{grad} u \neq \vec{0}$, 因此最值点属于 $\partial\Omega_1 = S$, 从而 $M = m = a$, 故 $\operatorname{grad} u$ 在 $\mathring{\Omega}_1$ 上恒为零, 矛盾! 因此所证结论成立.

例 3. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 使 $f(0,0)=1$, $f(1,0)=e$, 且 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=g(x^2+y^2)=\varphi(x)\varphi(y)$, 其中 $g\in\mathscr{C}[0,+\infty)$, 求函数 f 的表达式.

解: 由题设知 $1=f(0,0)=\varphi(0)\varphi(0)$, 故 $\varphi(0)=\pm1$.

若 $\varphi(0)=1$, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x^2)=\varphi(x)\varphi(0)=\varphi(x)$, 从而 $\varphi(x)=g(x^2)$. 于是 $\forall x,y\geqslant 0$, 我们有

$$g(x+y)=\varphi(\sqrt{x})\varphi(\sqrt{y})=g(x)g(y).$$

又 $g\in\mathscr{C}[0,+\infty)$, 则 $\exists a>0$ 使得 $\forall x\geqslant 0$, 均有 $g(x)=a^x$. 注意到 $e=f(1,0)=g(1)=a$, 于是 $g(x)=e^x$, 故 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 均有 $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

若 $\varphi(0)=-1$, 则 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$g(x^2)=\varphi(x)\varphi(0)=-\varphi(x),$$

从而 $\varphi(x)=-g(x^2)$. 于是 $\forall x,y\geqslant 0$, 我们均有 $g(x+y)=\varphi(\sqrt{x})\varphi(\sqrt{y})=g(x)g(y)$. 援用与前面同样的讨论可知 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

例 4. 设 $f:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续可导使得 $\forall(x,y)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 我们均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

(1) $\forall(u,v)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 令 $F(u,v)=f(u,uv)$. 则 F 为连续可导并且 $\forall(u,v)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 均有 $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\sqrt{1+v^2}$.

(2) 求函数 f 的表达式.

解: (1) 由 f 为连续可导, 则 F 也为连续可导, 并且由题设可知, $\forall (u,v) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$, 均有

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) \\ &= \frac{1}{u}\Big(u\frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + uv\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv)\Big) \\ &= \frac{1}{u}\sqrt{u^2+(uv)^2} = \sqrt{1+v^2}. \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 立刻可知 $F(u,v) = u\sqrt{1+v^2} + g(v)$, 其中 g 连续可导. 于是 $\forall (x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$, 我们有 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + g(\frac{y}{x})$.

例 5. 设 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 使 $f(0) \neq -1$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
(1) 求证: 存在 $t_0 = 1$ 的邻域 U 和 $x_0 = 0$ 的邻域 V 以及函数 $g \in \mathscr{C}^{(1)}(U;V)$ 使得 $\forall (t,x) \in U \times V$, 我们有 $\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u = x$ 当且仅当 $x = g(t)$.
(2) 求 $g'(1)$.

解: (1) $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, 令 $F(t,x) = \int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u - x$. 则 $F \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, 且 $F(1,0) = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = -f(0) - 1 \neq 0.$$

于是由隐函数定理可知, 存在 $t_0=1$ 的邻域 U 和 $x_0=0$ 的邻域 V, 以及函数 $g\in\mathscr{C}^{(1)}(U;V)$ 使得 $\forall(t,x)\in U\times V$, 我们有 $F(t,x)=0$, 也即 $\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u=x$, 当且仅当 $x=g(t)$.

(2) 由 (1) 知,$\forall t\in U$, 均有 $\int_{g(t)}^t f(u)\,\mathrm{d}u=g(t)$, 将之对 t 求导可得 $f(t)-f(g(t))g'(t)=g'(t)$. 令 $t=1$ 并注意到 $g(1)=0$, 则 $g'(1)=\frac{f(1)}{1+f(0)}$.

例 6. 设 f 为 $\mathbb{R}^2$ 上的可微函数使 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数 g 使 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(\sqrt{x^2+y^2})=f(x,y)$.

证明: $\forall r\geqslant 0$ 以及 $\forall\theta\in[0,2\pi)$, 定义

$$h(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

那么由复合可微法则可知 h 可微. 又由题设知

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\ &\quad +r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)=0,\end{aligned}$$

故 h 仅依赖 r. 再令 $g(r)=h(r,0)$, 由此得证.

例 7. 假设 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 为连续可导. 若 $\exists\alpha>0$ 使得 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 我们均有

$$y\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)-x\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\geqslant\alpha,$$

求证: $\lim\limits_{t\to+\infty}F(-\cos t,\sin t,t)=+\infty$.

证明: $\forall t\in\mathbb{R}$, 令 $f(t)=F(-\cos t,\sin t,t)$. 那么由复合函数微分法则可知 f 为连续可导, 且

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(-\cos t,\sin t,t)\sin t\\ &\quad+\frac{\partial F}{\partial y}(-\cos t,\sin t,t)\cos t+\frac{\partial F}{\partial z}(-\cos t,\sin t,t)\geqslant\alpha.\end{aligned}$$

于是由单变量函数的 Lagrange 中值定理可知, $\forall t > 0$, $\exists \theta \in (0, t)$ 使得我们有

$$f(t) = f(0) + f'(\theta)t \geqslant f(0) + \alpha t.$$

又由于 $\alpha > 0$, 于是我们有

$$\lim_{t \to +\infty} F(-\cos t, \sin t, t) = +\infty.$$

例 8. 计算 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log(xy)}$.

解: $\forall x, y \geqslant 2$, 均有 $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log(xy)} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\log(xy)}$, 于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log(xy)} = 0$.

例 9. 求函数 $f(x,y)=x^2y$ 在点 $(1,-1)$ 处的二阶 Taylor 多项式.

解: 令 $u=x-1$, $v=y+1$. 则我们有

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (u+1)^2(v-1)=(1+2u+u^2)(v-1) \\ &= -1-2u+v-u^2+2uv+u^2v \\ &= -1-2u+v-u^2+2uv+o(u^2+v^2) \\ &= -1-2(x-1)+(y+1)-(x-1)^2 \\ &\quad +2(x-1)(y+1)+o\big((x-1)^2+(y+1)^2\big). \end{aligned}$$

于是所求二阶 Taylor 多项式为

$$-1-2(x-1)+(y+1)-(x-1)^2+2(x-1)(y+1).$$

例 10. 设 $k \geqslant 0$ 为实数. 称函数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为 k 次齐次函数, 若 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ 与 $\forall t > 0$, 均有

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z).$$

设 f 可微, 求证: 函数 f 为 k 次齐次函数当且仅当 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = kf(x, y, z).$$

证明: 必要性. 假设 f 为 k 次齐次, 那么 $\forall t > 0$ 及 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, 均有 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$.

将上式两边对 t 求导可得

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)& \\ +z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) &= kt^{k-1}f(x,y,z), \end{aligned}$$

再令 $t=1$ 立刻可得所要结论.

充分性. 假设 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 均有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ 及 $\forall t>0$, 令 $F(t)=t^{-k}f(tx,ty,tz)$.

则 F 为可导函数且 $\forall t>0$, 我们有

$$\begin{aligned} F'(t) &= xt^{-k}\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+yt^{-k}\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz) \\ &\quad +zt^{-k}\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)-kt^{-k-1}f(tx,ty,tz) \\ &= t^{-k-1}\Big(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz) \\ &\quad +tz\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)-kf(tx,ty,tz)\Big)=0, \end{aligned}$$

于是 $\forall t>0$, 均有 $F(t)=F(1)=f(x,y,z)$, 也即 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$. 故所证成立.

谢谢大家!