第 2 次作业题

1. 设 $z=\arctan\frac{u}{v}$, $u=x^2+y^2$, $v=xy$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 已知 $u=f(x,y)$, 其中 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, f 可微, 证明:

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)\Big)^2+\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)\Big)^2=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big)^2.$$

3. 设 f 满足 Laplace 方程 $\partial_{11}f+\partial_{22}f=0$, 证明: $u(x,y)=f(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$ 也满足 Laplace 方程.

4. 设向量值函数 $\mathbf{Y}=\mathbf{f}(\mathbf{U})$, $\mathbf{U}=\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 可微, 求复合函数 $\mathbf{Y}=\mathbf{f}\circ\mathbf{g}(\mathbf{X})$ 的 Jacobi 矩阵和全微分, 其中

$$\begin{cases} y_1=u_1+u_2\\ y_2=u_1u_2\\ y_3=\frac{u_2}{u_1}\end{cases},\quad \begin{cases} u_1=\frac{x}{x^2+y^2}\\ u_2=\frac{y}{x^2+y^2}\end{cases}.$$

5. 问方程 $e^{-(x+y+z)}=x+y+z$ 在哪些点附近可确定一个隐函数 $z=z(x,y)$, 并求相应的 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 问方程组 $\begin{cases} x+y+z+z^2=0\\ x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$ 在点 $P(-1,1,0)$ 的附近能否确定一个向量值函数 $\begin{pmatrix} y\\ z\end{pmatrix}=\mathbf{f}(x)$? 如果能, 求 $y'(-1),z'(-1)$.

7. 求向量值函数 $\begin{cases} u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases}$ 的逆映射的 Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式.

8. 求下列曲面在给定点处的切平面方程和法线方程:

(1) $z=x^2+y^2$, 点 $P(1,2,5)$,

(2) $(2a^2-z^2)x^2=a^2y^2$, 点 $P(a,a,a)$, 其中 $a>0$,

(3) $\begin{cases} x=u+v\\ y=u^2+v^2\\ z=u^3+v^3\end{cases}$, 点 $(u,v)=(1,2)$.

9. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求点 P 使过该点的法线与坐标轴的正方向成等角.

10. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于 $x+4y+6z=0$ 的切平面.

11. 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $P(1,-2,1)$ 的切线与法平面方程.

12. 证明: 螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ 的切线与 z 轴成定角.

13. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 定义 $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$. 求 f 在原点一阶带 Lagrange 余项和二阶带 Peano 余项的 Taylor 公式.

14. 研究下列函数的极值:

(1) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;

(2) $z = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$ $(x_i > 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$.

15. 求由方程 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{2}{3}z = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 的极值.