微积分第1次作业

清華大学 TSINGHUA UNIVERSITY　数学作业纸

班级：微积分　姓名：赵瀚宏　编号：2023040163　科目：姚预30　第 1 页

1. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，下列函数极限是否存在？若存在求出极限

(1) $(x^2+y^2)e^{-x-y}$　(2) $\frac{x+y}{|x|+|y|}$　(3) $\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$　(4) $\frac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}$

解：(1) 当 $(x,y)\to(0,0)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x+y = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2=0$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)e^{-x-y}=0$

(2) 取 $y=0$，$x=t$，而 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{|t|}$ 不存在，所以该极限不存在.

(3) 取 $y=0$，同 $x=t$，得 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^4\cdot 0}{t^6}=0$

取 $y=t$，$x=t^2$，得 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^8\cdot t^4}{(2t^4)^3}=\frac{1}{8}$

不相等，所以该极限不存在.

(4) 令 $\rho=x^2y$ 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\rho=0$

同时 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho-\arcsin\rho}{\rho^3}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\cos\rho-\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}}{3\rho^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{(1-\frac{1}{2}\rho^2+o(\rho^2))-(1+\frac{\rho^2}{2}+o(\rho^2))}{3\rho^2}$

$=-\frac{1}{3}$

因此极限存在且等于 $-\frac{1}{3}$

2 求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}$　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

解：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(\lim\limits_{x\to 3}(x+\sin y))}{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln 3}{3}$

(2) ~~因为 $2(x^2+xy+y^2)\ge(x+y)^2$ 所以 $0\le\left|\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right|\le\frac{2}{|x+y|}$ 得 $\lim\limits_{x\to\infty}$~~

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$\rho>0$，$\theta\in[0,2\pi)$，则

$0\le\left|\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right|=\frac{1}{\rho}\left|\frac{\cos\theta+\sin\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}\right|\le\frac{1}{\rho}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\rho}=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}$

因 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\sqrt{x^2+y^2}=+\infty$，由夹逼原理有

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy}=0.$

(3) 令 $t=x-y$，由 $x^2+y^2\le(x-y)^2$（当 $x.y\ge 0$）

知 $0\le(x^2+y^2)e^{y-x}\le t^2e^{-t}$，$\lim\limits_{t\to+\infty}t^2e^{-t}=0$，由夹逼原理

△但 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}x-y=+\infty$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}=0.$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=\exp\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}x^2\ln\frac{|xy|}{x^2+y^2}$

由 $0\le\frac{|xy|}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$，有 $\ln\frac{|xy|}{x^2+y^2}<-\ln 2$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}x^2\ln\frac{|xy|}{x^2+y^2}=-\infty$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$

3、讨论下列累次极限与二重极限是否存在，若存在，求其值

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to0^+}\frac{x^y}{1+x^y}$ (2) $\lim\limits_{y\to0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}$ (3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to0^+}}\frac{x^y}{1+x^y}$

解：(1) $\lim\limits_{y\to0^+}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 故极限为 $\frac{1}{2}$

(2) 对 $y>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}=1$，故极限为1

(3) 因为两个累次极限不相等，二重极限一定不存在

相 $x\to+\infty$，$y\to0^+$ 时 x,y 均不为零

4、判断下列函数在原点 $(0,0)$ 的连续性

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

解：(1) 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则 $|x^3+y^3|=|\rho^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)|\le2\rho^3=2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$

~~当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$x^2+y^2\to0$，因此 $x^2+y^2\to0$~~

故 $0\le\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}\le2\sqrt{x^2+y^2}$

取 $(x,y)\to(0,0)$，知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$

因此该函数在原点连续。

(2) 反设在 $(0,0)$ 连续，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0$

但令 $x=t^2$，$y=t$，有 $\lim\limits_{t\to0}\frac{t^2\cdot t^2}{t^4+t^4}=\frac{1}{2}\neq0$ 矛盾！

因此该函数在 $(0,0)$ 不连续。

5. 求下列函数的偏导数

(1) $z=\ln(x+\sqrt{x^2-y^2})$ (2) $z=\cos(1+2^{xy})$

解：(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}(x+\sqrt{x^2-y^2})}$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(1+2^{xy})\cdot 2^{xy}(y\ln 2) = -y\ln 2\cdot 2^{xy}\sin(1+2^{xy})$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(1+2^{xy})\cdot 2^{xy}(x\ln 2) = -x\ln 2\cdot 2^{xy}\sin(1+2^{xy})$

6. 考察下列函数在坐标原点的可微性

(1) $f(x,y) = \sqrt{|x|}\cos y$　(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$　(4) $f(x,y) = |x-y|\,\varphi(x,y)$，其中 φ 在原点某邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$

解：(1) 因为 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}\cos 0 - \sqrt{|0|}\cos 0}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ 不存在

所以这一函数在原点不可微.

(2) ~~令 $y=kt$, $x=t$, 其中 $t\to 0$. 有 $\lim_{t\to 0}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$~~ 我们有 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0} = 0$

同时，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

如果微分存在，应为 $f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y$

我们来验证 $f(x,y) - 0 - 0x - 0y = f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否为 $o(\sqrt{x^2+y^2})$.

这即考察 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$

令 $x=kt$, $y=t$, 则 $\lim_{t\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2k}{k^2+1}$ 随 k 改变

因此这一极限不存在，也即这一函数在坐标原点不可微.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0} = 0$，同时 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

如果微分存在，只能为 $f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$

我们考察 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

令 $x=kt$, $y=t$, 则 $\lim_{t\to 0}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$

因此这一极限不存在，即 $\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 在坐标原点不可微

(4) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x,0)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\varphi(x,0)$

因 φ 在原点某邻域连续，$\lim_{x\to 0}\varphi(x,0)=0$. 而 $\frac{|x|}{x}$ 有界

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\varphi(x,0)=0$，即 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

同样，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

又因为 $f(0,0)=0$，如果微分存在，必然为 0.

最后，验证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-y)\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.是否成立.

因为 $(x-y)^2\le 2(x^2+y^2)$，所以 $0\le\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\sqrt{2}$ 有界

但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

的确成立.

因此 $f(x,y)$ 在原点可微，且微分为零.

7. 求下列函数的全微分

(1) $u=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ (2) $z=\frac{x-y}{x+y}$

解：(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$

因此 $du(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}dy+\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}dz$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$

因此 $dz(x,y)=\frac{2y}{(x+y)^2}dx-\frac{2x}{(x+y)^2}dy$

8. 求证：函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^3/y & y\ne 0\\ 0 & y=0\end{cases}$ 在原点处不连续，但沿任何方向的方向导数都存在

证明：令 $x=0$、$y=t$，$\lim\limits_{t\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{x^3}{y}=0$

令 $x=t$，$y=t^3$，$\lim\limits_{t\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{x^3}{y}=1$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，故它在原点不连续

同时，对于任一个归一化的方向向量 $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$

若 $\sin\alpha\ne 0$，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{(h\cos\alpha)^3}{h\sin\alpha}}{h}=\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\cdot 0=0$，即 $\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=0$

若 $\sin\alpha=0$，$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$

因此沿任一方向的方向导数存在

9. 求 $z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j$ 在 $P_0=(1,1,\cdots,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(-1,-1,\cdots,-1)^T$ 的方向导数

解： $\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1+\cdots+x_n)^2=2(x_1+\cdots+x_n)$. 将 $\vec{l}=(-1,\cdots,-1)^T$ 归一化得 $\vec{l^0}=(-\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots,-\frac{1}{\sqrt{n}})^T$

故 $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial l_0}=\sum_{i=1}^{n}(-\frac{1}{\sqrt{n}})\cdot 2(x_1+\cdots+x_n)$

$=-2\sqrt{n}(x_1+\cdots+x_n)$

代入 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$, 故 $\frac{\partial z}{\partial l}=-2n\sqrt{n}$.

10. 设 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz$, $P=(1,1,1)$. 求 u 在点 P 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}(P)$ 的最值，指出取最值的方向，再指出沿哪一个方向的方向导数为零

解： 对单位方向向量 $\vec{l^0}=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cos\alpha_3)$,

$\frac{\partial u}{\partial l^0}(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha_2+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha_3$

$=(2x-y-z)\cos\alpha_1+(2y-x+z)\cos\alpha_2+(2z-x+y)\cos\alpha_3$

$=2\cos\alpha_2+2\cos\alpha_3$

因此，方向导数最大时 $\vec{l^0}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$; 最小时 $\vec{l^0}=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

最大值为 $\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, 最小值为 $-2\sqrt{2}$

若方向导数为零，则 $\cos\alpha_2+\cos\alpha_3=0$

一般地， $(a,b,-b)$ 方向的方向导数均为零 $(\forall a,b)$

11. 证明下列函数满足的相应等式

(1) $u=2\cos^2(x-\frac{y}{2})$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

(2) $n>0$, $u=(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})^{2-n}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$

证明：(1) $\frac{\partial u}{\partial y}=2\cdot 2\cos(x-\frac{y}{2})(-\sin(x-\frac{y}{2}))(-\frac{1}{2})=\sin(2x-y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})=\cos(2x-y)(-1)=-\cos(2x-y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=\cos(2x-y)\cdot 2$

因此 $2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

(2) $u=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}$

$\forall i$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot 2x_i$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=2[(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}}+(-\frac{n}{2})\cdot 2x_i\cdot(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}\cdot x_i]$

$=2[x_1^2+\cdots+x_n^2-nx_i^2](x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}$

因此，$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 2\left[n(x_1^2+\cdots+x_n^2) - n(x_1^2+\cdots+x_n^2) \right] (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}$

$= 0$

得证.

12. 求由变换 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$ $(r>0,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi)$

所确定的向量值函数 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,\theta,\varphi) \\ f_2(r,\theta,\varphi) \\ f_3(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix}$ 的 Jacobi 矩阵和微分

解：$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

故其微分为

$$d\vec{f}(r,\theta,\varphi) = J_f(r,\theta,\varphi)\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi\, dr - r\sin\theta\cos\varphi\, d\theta - r\cos\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi \end{pmatrix}$$