第三次作业题

清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：微积分　姓名：姚致弘　编号：2023040163　科目：赵瀚宏　

1. 求函数 $f(x,y)=xy(4-x-y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x+y\le 6,\ y\ge 0,\ x\ge 1\}$ 上的最值

解：① 如果最值在 D 的内部取到，则

$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0$　得 $\begin{cases}4y-2yx-y^2=0\\4x-2xy-x^2=0\end{cases}$

因 $x>0, y>0$，有 $\begin{cases}4=2x+y\\4=2y+x\end{cases}$ 故 $x=y=\frac{4}{3}$ 确在D内

此时 $f=\frac{64}{27}$

② 如果最值在D的边界取到：

C_1: $y=0$　对应 $L_1=f(x,y)+\lambda_1(y)=4xy-x^2y-xy^2+\lambda y$.

$$\begin{cases}\frac{\partial L_1}{\partial x}=4y-2xy-y^2=0\\\frac{\partial L_1}{\partial y}=4x-x^2-2xy+\lambda_1=0\\\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}=y=0\end{cases}$$ 故 $\begin{cases}4x-x^2+\lambda_1=0\\y=0\end{cases}$

但 $f(x,y)=0$

C_2: $x=1$　对应 $L_2=f(x,y)+\lambda_2(x-1)=4xy-xy^2-x^2y+\lambda_2x-\lambda_2$

$$\begin{cases}\frac{\partial L_2}{\partial x}=4y-y^2-2xy+\lambda_2=0\\\frac{\partial L_2}{\partial y}=4x-2xy-x^2=0\\\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2}=x-1=0\end{cases}$$ 故 $\begin{cases}x=1\\y=3/2\end{cases}$，且确在D内

$f(x,y)=\frac{9}{4}$

C_3: $x+y=6$　对应 $L_3=f(x,y)+\lambda_3(x+y-6)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L_3}{\partial x}=4y-y^2-2xy+\lambda_3=0\\\frac{\partial L_3}{\partial y}=4x-2xy-x^2+\lambda_3=0\\\frac{\partial L_3}{\partial \lambda_3}=x+y-6=0\end{cases}$$ 得 $4y-y^2=4x-x^2$，即 $x=y$ 或 $x+y=4$.

故 $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$，且确在D内

$f(x,y)=-18$

综合上述讨论，f 最有最大值 $\frac{64}{27}$

最小值 -18.

2. 求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的条件极值

解：因为 f 为初等函数，所以在 $x^2+y^2+z^2=1$ 条件下存在条件极值

拉氏函数为 $L=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

有 $$\begin{cases}0=\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x\\0=\frac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y\\0=\frac{\partial L}{\partial z}=2+2\lambda z\\0=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1\end{cases}$$ 得 $\lambda\ne0$ 且 $1=\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{9}{4\lambda^2}$

故 $\lambda=\pm\frac{3}{2}$

当 $\lambda=\frac{3}{2}$，有 $x=-\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，$z=-\frac{2}{3}$. $f(x,y,z)=-3$

当 $\lambda=-\frac{3}{2}$，有 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$，$z=\frac{2}{3}$. $f(x,y,z)=3$

因此 $f(x,y,z)$ 在 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ 处取条件极小值 -3

在 $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 处取条件极大值 3.

3. 求椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点到直线 $x+y=4$ 的距离的最值

解：因为 $x^2+y^2/4=1$ 为有界闭集，该距离函数存在最值.

令 $f(x,y,z)=\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}$，则 $|f(x,y,z)|$ 为任一点 (x,y) 到直线 $x+y=4$ 的距离. 下求解 $f(x,y)$ 在给定 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 下条件最值

令 $L=\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$

有 $\begin{cases} 0=\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}}+2\lambda x \\ 0=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\lambda}{2}y \\ 0=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+\frac{y^2}{4}-1 \end{cases}$ 得 $x=-\frac{1}{2\sqrt{2}\lambda}$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{\lambda}$

代入：$1=\frac{1}{8\lambda^2}+\frac{1}{2\lambda^2}=\frac{5}{8\lambda^2}$

故 $\lambda=\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$

当 $\lambda=\sqrt{\frac{5}{8}}$，有 $x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，$y=\frac{-4}{\sqrt{5}}$. $f(x,y)=\frac{-\sqrt{5}-4}{\sqrt{2}}$

当 $\lambda=\sqrt{\frac{5}{8}}$，有 $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$y=\frac{4}{\sqrt{5}}$，$f(x,y)=\frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{2}}$

因此可知 $f(x,y)$ 只有条件最大值 $-\frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{2}}$，最小值 $-\frac{-\sqrt{5}+4}{\sqrt{2}}$

故距离最小值为 $2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}$，最大值为 $2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}$