第 4 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 一致连续函数

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数.

(1) **一致连续的定义:** 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X, Y \in \Omega$, 当 $\|X - Y\| < \delta$ 时, 我们有

$$|f(X) - f(Y)| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在 Ω 上一致连续.

(2) **非一致连续的刻画:** 函数 f 在 Ω 上非一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 Ω 中的点列 $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ 使 $\lim\limits_{k\to+\infty} \|X_k - Y_k\| = 0$, 但 $\forall k \geqslant 1$, 却有 $|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0$.

(3) **一致连续的充分条件:** 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上一致连续.

注: 若 Ω 不为有界闭集, 时常可通过证明 f 为 Lipschitz 函数或 f 在 Ω 边界上的极限存在且有限而得出一致连续性.

2. 含参变量常义积分及其性质

(1) **极限与积分次序可交换性:** 被积函数连续.

(2) **积分与积分次序可交换性:** 被积函数连续.

(3) **求导与积分次序可交换性:** 被积函数连续, **关于参数的偏导函数连续**.

(4) **变上、下限含参积分求导:** 被积函数连续, **关于参数的偏导函数连续**, 上、下限可导.

3. 广义含参变量积分及其性质

(1) **一致收敛的定义及准则:**

(a) **定义:** 设 $f \in \mathscr{C}([a, \omega) \times [c, d])$, 而 $I : [c, d] \to \mathbb{R}$ 为函数, 其中 $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in [a, \omega)$ 使 $\forall A \in [M, \omega)$ 以及 $\forall y \in [c, d]$, 均有

$$\Big| \int_a^A f(x, y)\, \mathrm{d}x - I(y) \Big| < \varepsilon,$$

则称广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x, y)\, \mathrm{d}x$ 在区间 $[c, d]$ 上一致收敛到函数 $I(y)$.

(b) **Cauchy 准则:** 广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x, y)\, \mathrm{d}x$ 在 $[c, d]$ 上一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in [a, \omega)$ 使得$\forall A', A'' \in [M, \omega)$, $\forall y \in [c, d]$, 均有

$$\Big| \int_{A'}^{A''} f(x, y)\, \mathrm{d}x \Big| < \varepsilon.$$

(c) **Cauchy 准则否定形式:** 广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x, y)\, \mathrm{d}x$ 在 $[c, d]$ 上非一致收敛当且仅当$\exists \varepsilon_0 >$使$\forall M \in [a, \omega)$, $\exists A', A'' \in [M, \omega)$, $\exists y \in [c, d]$满足

$$\Big| \int_{A'}^{A''} f(x, y)\, \mathrm{d}x \Big| \geqslant \varepsilon_0.$$

而这等价于 $\exists A_n', A_n'' \in [a,\omega)$, $\exists y_n \in [c,d]$ 使得我们有

$$\lim_{n\to\infty} A_n' = \lim_{n\to\infty} A_n'' = \omega, \quad \Big|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x,y_n)\,\mathrm{d}x\Big| \geqslant \varepsilon_0.$$

(d) **Weierstrass 判别法 (也称比较判别法):** 设 $f \in \mathscr{C}([a,\omega)\times[c,d])$, 而函数 $F:[a,\omega)\to[0,+\infty)$ 使得 $\forall (x,y)\in[a,\omega)\times[c,d]$, 均有 $|f(x,y)| \leqslant F(x)$. 若广义积分 $\int_a^\omega F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

(e) **Abel-Dirichlet 判别法:** 设 $f,g:[a,\omega)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为函数使得 $\forall y\in[c,d]$, 关于第一个变量的函数 $f(\cdot,y), g(\cdot,y)$ 在 $[a,\omega)$ 的任意的闭子区间上均可积.

(i) (Abel) 若广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, g 有界且关于第一个变量单调, 则广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

(ii) (Dirichlet) $\forall y\in[c,d]$ 以及 $\forall A\in[a,\omega)$, 令 $F(A,y)=\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$. 若 F 有界, g 关于第一个变量单调且 $\lim\limits_{x\to\omega^-} g(x,y)=0$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致成立, 则广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

注: 上述区间 $[c,d]$ 均可以换成任意的非空集合.

(2) **极限与积分次序可交换性:** 被积函数连续, 广义含参变量积分一致收敛.

(3) **积分与积分次序可交换性:** 被积函数连续, 广义含参变量积分一致收敛.

(4) **求导与积分次序可交换性:** 被积函数连续, 广义含参变量积分收敛, **关于参数的偏导函数连续且其广义含参变量积分一致收敛**.

第 2 部分 习题课题目

1. 计算极限 $\lim\limits_{a\to0}\int_a^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$.

2. 设函数 $f(t,s)$ 连续, 而 $F(x)=\int_0^x\big(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\,\mathrm{d}s\big)\,\mathrm{d}t$. 求 $F'(x)$.

3. $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $f(x)=\int_0^x(\int_t^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t$, 求 f 的表达式.

4. $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$, 求 f'.

5. 能否交换极限 $\lim\limits_{y\to0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x$ 当中求积分与求极限的次序?

6. $\forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, 定义 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 请问两个二重积分 $\int_0^1\big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y$ 是否相等?

7. $\forall t\in[0,1]$, 定义 $f(t)=\int_0^1\log\sqrt{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x$, 求 $f'_+(0)$.

8. 若 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 可导且 $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$, 求证: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

9. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a,b>0$.

10. 计算 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, 其中 $|a|<1$.