第 3 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 极值

(1) **定义:** 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) **极小值点与极小值:** 若 $\exists r > 0$ 使 $\forall X \in B(X_0, r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的 (局部) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (局部) 极小值.

(b) **极大值点与极大值:** 若 $\exists r > 0$ 使 $\forall X \in B(X_0, r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的 (局部) 极大值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (局部) 极大值.

(c) **极小值点和极大值点合称极值点.**

(2) **极值点的必要条件:** 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) 若 X_0 为 f 的极值点, 则 $J_f(X_0) = \vec{0}$, 即 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

下面假设 f 为二阶连续可微函数.

(b) 若 X_0 为 f 的极小值点, 则 $H_f(X_0)$ 为正定或半正定.

(c) 若 X_0 为 f 的极大值点, 则 $H_f(X_0)$ 为负定或半负定.

(3) **极值点的充分条件:** 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数使得 $J_f(X_0) = \vec{0}$.

(a) 若 $H_f(X_0)$ 正定, 则 X_0 为 f 的极小值点;

(b) 若 $H_f(X_0)$ 负定, 则 X_0 为 f 的极大值点;

(c) 若 $H_f(X_0)$ 不定, 则 X_0 不为 f 的极值点.

(4) **极值点的必要条件:** 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 而 $f : B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数.

(a) 若 X_0 为 f 的极小值点, 则 $H_f(X_0)$ 正定或半正定;

(b) 若 X_0 为 f 的极大值点, 则 $H_f(X_0)$ 负定或半负定.

2. 条件极值

(1) **k-维曲面:** 设 n, k $(n > k \geqslant 1)$ 为整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(X)$ 的秩为 $n - k$. 令

$$S = \Big\{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n - k\Big\}.$$

若 $S \neq \emptyset$, 则称 S 为 k 维曲面.

注: $\forall X_0 \in S$, 由隐函数定理, 在 X_0 的某邻域内, S 中点可表成 k 个变量的函数.

(2) **条件极小值与条件极大值:** 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 k 维曲面, $X_0 \in S$, 而 $f : S \to \mathbb{R}$ 为函数.

(a) 若 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 称 X_0 为函数 f 在 S 上的 (条件) 极小值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极小值.

(b) 若 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0, r) \cap S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 称 X_0 为函数 f 在 S 上的 (条件) 极大值点, 而称 $f(X_0)$ 为 (条件) 极大值.

(c) 若 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \geqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为函数 f 在 S 上的最小值点, 而称 $f(X_0)$ 为最小值.

(d) 若 $\forall X \in S$, 均有 $f(X) \leqslant f(X_0)$, 则称 X_0 为函数 f 在 S 上的最大值点, 而称 $f(X_0)$ 为最大值.

注: 条件最值点必为条件极值点.

(3) **条件极值的必要条件 (Lagrange 乘数法):** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k}$ 为 Ω 上的 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数使得 $\forall X \in \Omega$, 矩阵 $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ 的秩为 $n-k$. 令

$$S = \Big\{ X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n-k \Big\} \neq \emptyset.$$

$\forall X \in \Omega$ 及 $\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$, 定义

$$\text{(拉氏函数)} \quad L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \varphi_j(X).$$

若 $X_0 \in S$ 为 f 在 S 上的条件极值点, 则 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$ 使得 (X_0, λ) 为 L 的驻点.

注: 点 (X_0, λ) 为 L 的驻点当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(X_0, \lambda) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(X_0, \lambda) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n-k). \end{cases}$$

等价地, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \sum\limits_{j=1}^{n-k} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X_0) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \varphi_i(X_0) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n-k). \end{cases}$$

(4) **求曲面上的条件极值的典型方法:**

(a) 由于 Lagrange 乘数法只给出条件极值点的必要条件, 为了确定条件极值点, 还需想办法将条件极值问题转化成最值问题, 比如将之转化成有界闭集上的连续函数的最值问题.

(b) 定义拉氏函数并求其驻点, 由此得到原来那个函数可能的条件极值点.

(c) 比较原来那个函数在上述驻点处值的大小, 由此确定极值点.

(5) **求有界闭区域上的最值的典型方法:**

(a) 极值或最值问题通常可被转化成有界闭区域上的连续函数的最值问题, 由此可知问题的解一定存在, 关键在于如何确定最值点.

(b) 求函数在区域内部的驻点并计算相应值.

(c) 将函数限制在闭区域的边界上, 求相应的拉氏函数的驻点, 并计算原来那个函数的相应值.

(d) 比较上述值的大小, 由此确定最值点.

第 2 部分 习题课题目

1. 求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有极值.

2. 求函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

3. 设 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微. $\forall r\geqslant 0$ 及 $\forall\theta\in[0,2\pi)$, 令 $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

(1) 求证: $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\frac{1}{r}\big(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\big)$, 其中 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r>0$.

(2) 若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\big(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\big)=a>0$, 求证 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值.

4. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, $f:D\to\mathbb{R}$ 在 D 上连续, 在其内部可导并且在边界上为零. 若存在严格单调函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $g(0)=0$ 且 $\forall(x,y)\in\mathrm{Int}D$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(f(x,y)),$$

求证: $\forall(x,y)\in D$, 均有 $f(x,y)=0$.

5. 求周长为 $2p$ 的三角形使得绕其一边旋转所形成的旋转体的体积最大.

6. 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线到原点的最长距离和最短距离.

7. 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在 $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\big\}$ 上的最大值和最小值.

8. 求椭球面 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=1$ 长半轴的长度与方阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$ 的特征值之间的关系.

9. 用 Lagrange 乘数法求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴和短半轴的长度.

10. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 中的一个内接等腰三角形使其底边平行于长轴且其面积最大.

11. 用 Lagrange 乘数法求曲线

$$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z=0\\x+y+2z=4\end{cases}$$

上的点到 xoy 平面的距离的最大值和最小值.

12. 设 Γ 是为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 所截的椭圆. 求上述椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.