期中考试样卷参考解答

一． **填空题**（每个空 3 分，共 9 题 10 空）（**请将答案直接填写在横线上!**）

1． 函 数 $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}$ 沿 任 意 射 线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha(0\le t<+\infty)$ 的 极 限

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=$____________；

当 $x\to\infty, y\to\infty$ 时，$f(x,y)$ 是否为无穷小？____________（填"是"或"否"）。

答案：0，不是（ $f(n,n^2)=n^2\mathrm{e}^{-(n^2-n^2)}\to+\infty, n\to+\infty$ ）

2． 设函数 $f(u,v)$ 连续可微， $z=f(xy,x-y)$，则 $\mathrm{d}z=$______________________。

答案：$\mathrm{d}z=(y\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v})\mathrm{d}x+(x\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})\mathrm{d}y$

3． 设 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $v=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 Jacobi 矩阵的行列式 $\dfrac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}=$____________。

答案：$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{y^2}{r^3} & \dfrac{-xy}{r^3}\\ \dfrac{-xy}{r^3} & \dfrac{x^2}{r^3}\end{vmatrix}=0$。

4． 已知映射 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^v+u^3,\\ y=\mathrm{e}^u-v^3\end{cases}$ 有逆映射 $\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{cases}$，当 $(u,v)=(0,1)$ 时，$(x,y)=(\mathrm{e},0)$，

则偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{e},0)=$__________。

答案：$\dfrac{3}{\mathrm{e}}$。

5． 记函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在 $(1,0,1)$ 处的梯度方向为 $\mathbf{v}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}\right|_{(1,0,1)}=$____________。

答案：$\sqrt{5}$。

6. 设可微函数$u(x,y)$满足$u(x,x^2)=1$且$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)=x$，则$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)=$____________。

答案：$-\dfrac{1}{2}$。

7. 曲线$x=t,\ y=2\cos t,\ z=3\sin t$ 在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的切线方程为____________________。

答案：$\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{0}$。

8. 曲面$z+\ln z=y+\ln x$在$(1,1,1)$点的切平面方程为__________________________。

答案：$x+y-2z=0$。

9. 设$F(x,y)=\int_0^1 \sin(xt)\mathrm{e}^{-4yt^2}\mathrm{d}t$，则$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0)=$ _____________________。

答案： -1。

二． 解答题（共 8 题）**（请写出详细的计算过程和必要的根据！）**

10.（8 分）设$z=f(x,\dfrac{x}{y})$，其中$f\in C^{(2)}(\mathbf{R}^2)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)$。

解：
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'(x,\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[f_{12}''(x,\frac{x}{y})+f_{22}''(x,\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}\right]\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_2'(x,\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right),$$

所以$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)=-\dfrac{f_2'(0,0)}{4}$。

11.（10 分）设函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 回答以下问题，并说明理由。

（Ⅰ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

（Ⅱ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否存在偏导数？若存在，求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$；

（Ⅲ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求在点 $(0,0)$ 处的全微分；

（Ⅳ）函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

解：（Ⅰ）因为 $|f(x,y)|\le|xy|$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，因此 f 在点 $(0,0)$ 处连续。

（Ⅱ）$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点存在偏导数。

（Ⅲ）$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

而 $\left|\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

（Ⅳ）$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

沿 $y=x$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$ 不存在，所以函数 $f(x,y)$ 的

偏导函数$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$在点$(0,0)$处不连续；同理函数$f(x,y)$的偏导函数$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$在点$(0,0)$处不连续。

12.（13 分）求$f(x,y)=xy^3-x$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$上的最大值和最小值。

解：连续函数$f(x,y)$在有界闭集$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$上存在最大值和最小值。

（1）在$\overset{\circ}{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$内，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^3-1=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3xy^2=0,\end{cases}$$

解得驻点$P_1(0,1)$。 但它不在$\overset{\circ}{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$内。

（2）在边界上，构造$L=xy^3-x+\lambda(x^2+y^2-1)$，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y^3-1+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=3xy^2+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

解得条件极值的驻点$P_2(1,0),P_3(-1,0),P_4(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1}{2}),P_5(\dfrac{-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1}{2}),P_6(0,1)$， f相应的值为 $-1,1,-\dfrac{9\sqrt{3}}{16},\dfrac{9\sqrt{3}}{16},0$。所以求$f(x,y)=xy^3-x$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$上的最大值和最小值分别为$f(-1,0)=1,f(1,0)=-1$。

13.（20 分）设$f(x,y)=\mathrm{e}^{3x}+y^3-3y\mathrm{e}^x$。

(Ⅰ) 求$f(x,y)$的所有驻点，并找出其中所有的极值点，并说明极值点的类型；

(Ⅱ) 求$f(x,y)$在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式；

(Ⅲ) 求隐函数形式曲线$f(x,y)=3$在点$(0,-1)$处的切线和法线方程；

（Ⅳ）证明方程 $f(x,y)=3$ 在 $(0,-1)$ 点附近确定了一个隐函数 $x=x(y)$，并求 $x=x(y)$ 在 $y=-1$ 处的二阶 Taylor 多项式。

解：（I）由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\mathrm{e}^{3x}-3y\mathrm{e}^{x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3\mathrm{e}^{x}=0,\end{cases}$ 得到 $x=0$，$y=1$，，　这是 $f(x,y)$ 的唯一驻点。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=9\mathrm{e}^{3x}-3y\mathrm{e}^{x}\Big|_{(0,1)}=6,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1)=-3\mathrm{e}^{x}\Big|_{(0,1)}=-3,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)=6y\Big|_{(0,1)}=6,\end{cases}$$

而 $\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，

所以 $(0,1)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点。

（II）$f(x,y)=f(0,1)+\dfrac{1}{2}(x,y-1)H(0,1)\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix}+o(x^2+(y-1)^2),\quad (x,y)\to(0,1)$

$$=-1+3x^2-3x(y-1)+3(y-1)^2+o(x^2+(y-1)^2),\quad (x,y)\to(0,1)$$

所以 $f(x,y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式为 $-1+3x^2-3x(y-1)+3(y-1)^2$。

（III）因为 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1)=6,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)=0,\end{cases}$，所以切线方程为 $6(x-0)+0(y-2)=0$，即 $x=0$。

法线方程为 $y=-1$。

（IV）记 $F(x,y)=f(x,y)-3$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,-1)=6\neq 0$，所以 $F(x,y)=0$ 在 $(0,-1)$ 点附近确定了一个隐函数 $x=x(y)$。

$$e^{3x(y)}+y^3-3ye^{x(y)}-3\equiv 0,\forall y,$$

所以$\dfrac{dx}{dy}(-1)=0$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}(-1)=1$，

$x=x(y)$在$y=-1$处的二阶 Taylor 多项式为$\dfrac{1}{2}(y+1)^2$。

14.（8 分）设$I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin(2xy)dx$，证明：$I(y)=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$。

解：因为

$$\int_0^{+\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-x^2}\sin(2xy)\right]\right\}dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cos(2xy)dx$$

关于$y\in R$一致收敛，所以

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cos(2xy)dx$$

$$=-e^{-x^2}\cos(2xy)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}2ye^{-x^2}\sin(2xy)dx=1-2yI(y)$$

求解一阶线性常微分方程 $I'(y)+2yI(y)=1$得

$I(y)=\left(C+\int_0^y e^{t^2}dt\right)e^{-y^2}$。由于$I(0)=0$，故$I(y)=\int_0^y e^{t^2-y^2}dt$。

15.（6 分）设$D\subset\mathbf{R}^2$是非空有界闭区域，f是D上的连续函数。证明：至多只有一个函数$u(x,y)$在D上连续，在D的内部$\overset{\circ}{D}$为$C^{(2)}$类，且满足

$$\begin{cases}u''_{xx}+u''_{yy}=e^u, & (x,y)\in\overset{\circ}{D}\\ u=f, & (x,y)\in\partial D\end{cases}$$

证明：假设上述边值问题存在两个不同的$C^{(2)}$解$u(x,y)$和$v(x,y)$，则在∂D上$u(x,y)=v(x,y)$. 若两个解$u(x,y)$和$v(x,y)$在D上不恒同，则函数$u(x,y)-v(x,y)$在有界闭集D上或者有正的最大值，或者有负的最小值。不妨设$u(x,y)-v(x,y)$在D上有正的最大值，则最大值点$(x_0,y_0)\in\overset{\circ}{D}$，于是它是 $u(x,y)-v(x,y)$的极大值点。在(x_0,y_0)处$u(x,y)-v(x,y)$的 Hesse 矩阵半负定，而其对角线上元素的和为$u''_{xx}-v''_{xx}+u''_{yy}-v''_{yy}=e^u-e^v>0$，但这与 Hesse 矩阵半负定矛盾。所以上述边值问题至多只有一个$C^{(2)}$解。证毕.

16. （5 分）设 K 是 $\mathbf{R}^k$ 的有界闭子集，函数 $f:\mathbf{R}^m\times K\to\mathbf{R}$ 连续，记 $g(\mathbf{x})=\min\limits_{\mathbf{y}\in K}f(\mathbf{x},\mathbf{y})$。证明 $g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 连续。

证法一：假设 g 在 x_0 处不连续，则存在 $x_n\in\mathbf{R}^m$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=g(x_0)$ 不成立。存在 $y_n\in K$ 使得 $g(x_n)=f(x_n,y_n)$。不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=y_0$。于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)=f(x_0,y_0)$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=f(x_0,y_0)\ge g(x_0)$。

设 $g(x_0)=f(x_0,y^*)$。由于 $f(x,y)$ 在点(x_0,y^*)处连续，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $|y-y^*|<\delta$ 时，$f(x,y)<f(x_0,y^*)+\varepsilon=g(x_0)+\varepsilon$，从而当 n 足够大时，$|x_n-x_0|<\delta$，于是 $g(x_n)\le f(x_n,y^*)<g(x_0)+\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)\le g(x_0)+\varepsilon$。从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)=g(x_0)$。这与假设矛盾。所以 g 是连续函数。

证法二：固定 $x_0\in R^m$，令 $E=\overline{B(x_0,1)}\times K$，则 E 为有界闭集。由于 f 连续，因此 f 在 E 上一致连续。从而 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,1)$ 使得 $\forall(x_1y_1),(x_2,y_2)\in E$，当 $\|(x_1y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta$ 时，均有 $|f(x_1y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$。特别地，$\forall x\in B(x_0,\delta),\forall y\in K$，均有 $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$，即 $f(x_0,y)-\varepsilon<f(x,y)<f(x_0,y)+\varepsilon$。对 $y\in K$ 取下确界，可得 $g(x_0)-\varepsilon\le g(x)\le g(x_0)+\varepsilon$，即 g 在 x_0 点连续。所以 $g:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$ 连续。证毕.