微积分 A (2)

姚家燕

第 1 讲

主讲老师联系方式与答疑时间

欢迎大家平时到办公室来咨询或讨论问题，
拒绝在考试后以各种名目来要分数!
不建议网上提问，因为无法保证时效和准确!

- 地点：理科楼数学系 A 216
- 电话：62794494
- 时间：每周三晚上 18:00-19:00
- 每次上课前时采用雨课堂签到并随机点名，请大家务必准时出席!

- 第一学期课程总结
- 如何申请基础习题课?

§1. n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$

设 $n \geqslant 1$ 为整数. 定义

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\}.$$

对于 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\|X\|_n := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2},$$

称为 X 的范数, 在不产生混淆时, 记作 $\|X\|$.

$\forall X=(x_1,\ldots,x_n), Y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义 $d(X,Y):=\|X-Y\|$, 称为 X,Y 之间的距离.

距离的基本性质:

正定性: $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$, 均有 $d(X,Y)\geqslant 0$, 并且

$$d(X,Y)=0 \text{ 当且仅当 } X=Y.$$

对称性: $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$, $d(X,Y)=d(Y,X)$.

三角不等式: $\forall X,Y,Z\in\mathbb{R}^n$, 均有

$$d(X,Y)\leqslant d(X,Z)+d(Z,Y).$$

我们称 $(\mathbb{R}^n,d)$ 为 n 维欧氏空间.

实平面 $\mathbb{R}^2$ 与复数集 $\mathbb{C}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 定义 $z := \varphi(x,y) = x + iy \in \mathbb{C}$, 则 φ 为双射, 且 $\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 我们均有 $\|X\| = \sqrt{x^2+y^2} = |\varphi(X)|$. 故 $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$, 若令 $z_1 = \varphi(X_1)$, $z_2 = \varphi(X_2)$, 则

$$\|X_1 - X_2\| = |z_1 - z_2|.$$

即 φ 为保距双射. 借助 φ, 我们可将 $\mathbb{R}^2$ 中的点 (x,y) 与复数 $x+iy$ 视为同一, 复数的指数表示则对应于极坐标.

n 维 Euclid 空间中的开集与闭集 (基本的拓扑概念)

固定 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. 定义:

- $B(X_0, \delta) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| < \delta\}$, 称为点 X_0 的 δ-邻域, 也称为以 X_0 为中心以 δ 为半径的开球.
- $\mathring{B}(X_0, \delta) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|X - X_0\| < \delta\}$, 称为 X_0 的去心 δ-邻域.

基本概念: 固定 $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

- **内点:** 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0, \delta) \subseteq S$, 则称点 X_0 为 S 的一个内点.
- **外点:** 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0, \delta) \cap S = \emptyset$, 则称点 X_0 为 S 的一个外点.

注: 由于 $B(X_0, \delta) \cap S = \emptyset$ 恰好就是等价于说 $B(X_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$, 因此 X_0 为 S 的外点当且仅当 X_0 为 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 的内点.

- 边界点: 若 X_0 既不为 S 的内点, 也不为其外点, 则称 X_0 为 S 的一个边界点. 等价地, 点 X_0 为 S 的边界点当且仅当 $\forall\delta>0$, 均有: $B(X_0,\delta)\cap(\mathbb{R}^n\setminus S)\neq\emptyset$, $B(X_0,\delta)\cap S\neq\emptyset$.
- 极限点: 若 $\forall\delta>0$, 均有 $\mathring{B}(X_0,\delta)\cap S\neq\emptyset$, 则称 X_0 为 S 的一个极限点.
- 开集: 若 S 的每点均为内点, 则称为开集.
- 闭集: 若 $\mathbb{R}^n\setminus S$ 为开集, 则称 S 为闭集.

- 内部: 由 S 的所有内点组成的集合称为它的内部, 记作 $\mathring{S}$, 也记作 $\operatorname{Int} S$. 这是一个开集.
- 外部: 由 S 的所有外点组成的集合称为它的外部, 记作 $\operatorname{Ext} S$. 这是一个开集.
- 边界: 由 S 的所有边界点组成的集合称为 S 的边界, 记作 ∂S, 这是一个闭集.

注: $\mathbb{R}^n$ 为 $\operatorname{Int} S$, ∂S 和 $\operatorname{Ext} S$ 的不交并.

- 闭包: $\overline{S} := \partial S \cup S$ 为 S 的闭包, 它为闭集.

典型例子与基本性质

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ 既为开集, 也为闭集.
- 任意开球均为开集.
- 任意闭球为闭集.
- 注: 拓扑概念与空间 $\mathbb{R}^n$ 有关, 若改变空间, 则原有性质可能不成立. 例如开区间 $(0,1)$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集为开集, 但不是 $\mathbb{R}^2$ 的开集.

命题 1. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集当且仅当它为开球并.

证明: 充分性. 假设 S 为开球的并, 则 $\forall X \in S$, 存在 $X_0 \in S$ 和 $\delta > 0$ 使得 $X \in B(X_0, \delta) \subseteq S$. 令 $\eta = \delta - d(X, X_0) > 0$. 则由三角不等式可得 $B(X, \eta) \subseteq S$. 故 S 为开集.

必要性. 若 S 为开集, 则 $\forall X \in S$, $\exists \delta_X > 0$ 使得 $B(X, \delta_X) \subseteq S$. 则 $S = \bigcup_{X \in S} B(X, \delta_X)$. 得证.

推论. 任意多个开集的并还是开集; 任意多个闭集的交还是闭集.

命题 2. 有限多个开集的交为开集.

证明: 设 $S=\bigcap_{j=1}^{k} S_j$, 其中 S_j 为开集. 对任意 $X\in S$ 以及任意 $1\leqslant j\leqslant k$, 因 $X\in S_j$ 且 S_j 为开集, 则 $\exists \delta_j>0$ 使得 $B(X,\delta_j)\subseteq S_j$. 令

$$\delta=\min_{1\leqslant j\leqslant k}\delta_j.$$

则 $B(X,\delta)=\bigcap_{j=1}^{k} B(X,\delta_j)\subseteq S$. 故所证成立.

推论. 有限多个闭集的并为闭集.

例 1. $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\forall \delta > 0$, 令 $B = B(X_0, \delta)$. 求 B 的内部, 外部, 边界和闭包.

解: 由于 B 为开集, 故 $\operatorname{Int} B = B$. 令

$$\begin{aligned} S &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| = \delta\}, \\ E &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| > \delta\}. \end{aligned}$$

$\forall X \in E$, 令 $\eta = \|X - X_0\| - \delta > 0$, 那么我们有 $B(X, \eta) \subseteq E$, 于是 $\operatorname{Int} E = E$, 故 $E \subseteq \operatorname{Ext} B$.

$\forall X \in S$ 以及 $\forall \eta > 0$, 由于 $B(X, \eta) \cap B \neq \emptyset$ 且 $B(X, \eta) \cap E \neq \emptyset$, 则 X 为 B 的边界点, 从而有 $S \subseteq \partial B$. 又 $\mathbb{R}^n \setminus S = B \cup E$, 则该集不含 B 的边界点, 因此 $\partial B = S$. 而 $\mathbb{R}^n \setminus E = B \cup S$, 于是此集不含 B 的外点, 因而 $\operatorname{Ext} B = E$. 最后

$$\overline{B} = B \cup S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| \leqslant \delta\}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中集合的 (折线) 连通性

- 称集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通集, 如果 $\forall X, Y \in D$, 均存在 D 中的折线将 X, Y 连接起来.
- 若集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 不连通, 则称为非连通集.
- 称 $\mathbb{R}^n$ 中非空的连通开集为开区域, 开区域的闭包称为闭区域. 比如说, $\mathbb{R}^n$ 中的任意开球为开区域, 而闭球为闭区域.

$\mathbb{R}^n$ 中的点列，点列的收敛性以及收敛点列的性质

定义 1. 设 $\{X_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点列，而 $A \in \mathbb{R}^n$.

- 称 $\{X_k\}$ 收敛到 A，若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k > N$，均有 $\|X_k - A\| < \varepsilon$. 此时记
$$\lim_{k\to\infty} X_k = A.$$

注: $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ 这等价于 $\lim\limits_{k\to\infty} \|X_k - A\| = 0$.

- 称 $\{X_k\}$ 为 Cauchy 序列，若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k, l > N$，均有 $\|X_k - X_l\| < \varepsilon$.

记 $X_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)})$, $A = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$.

定理 1. $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ 当且仅当对于任意的整数 $1 \leqslant j \leqslant n$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = a^{(j)}$.

证明: 必要性. 由题设知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k > N$, 我们有 $\|X_k - A\| < \varepsilon$, 因而对任意的 $1 \leqslant j \leqslant n$, 我们有 $|x_k^{(j)} - a^{(j)}| \leqslant \|X_k - A\| < \varepsilon$, 也即我们有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = a^{(j)}$.

充分性. 由题设可得知, $\forall \varepsilon > 0$ 以及 $1 \leqslant j \leqslant n$, $\exists N_j \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k > N_j$, 均有 $|x_k^{(j)} - a^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. 令 $N = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} N_j$. 则 $\forall k > N$, 我们有

$$\|X_k - A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_k^{(j)} - a^{(j)}|^2} < \varepsilon.$$

故我们有 $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = A$.

注: 借助上述结论, 我们可以将收敛数列与大小无关的性质推广到收敛的点列上.

同理可得

命题 3. $\{X_k\}$ 为 Cauchy 序列当且仅当对任意 $1 \leqslant j \leqslant n$, $\{x_k^{(j)}\}$ 均为 Cauchy 数列.

进而可知

定理 2. $\mathbb{R}^n$ 完备, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列必收敛.

证明: 该结论是 定理 1, 命题 3 以及空间 $\mathbb{R}$ 的完备性的直接推论.

定理 3. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭集, 而 $\{X_k\}$ 为 Ω 中点列. 若该点列收敛到 $A \in \mathbb{R}^n$, 则 $A \in \Omega$.

证明: 用反证法, 假设 $A \notin \Omega$, 那么 $A \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. 由于 Ω 为闭集, 则 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 为开集, 于是 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $B(A, \varepsilon_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, 也即 $B(A, \varepsilon_0) \cap \Omega = \emptyset$. 然而 $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$, 于是 $\exists N > 0$ 使得 $\forall k > N$, 均有 $X_k \in B(A, \varepsilon_0)$. 矛盾! 故所证结论成立.

注: 反过来, 若 Ω 中任意收敛点列的极限依然属于 Ω, 则 Ω 为闭集.

命题 4. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n$. 则 A 为 S 的极限点当且仅当 $S \backslash \{A\}$ 中有点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A.

证明: **必要性.** 若 A 为 S 的极限点, 则 $\forall k \geqslant 1$, $\exists X_k \in \mathring{B}(A, \frac{1}{k}) \cap S$, 即 $X_k \in S \backslash \{A\}$, $\|X_k - A\| < \frac{1}{k}$. 于是由夹逼原理可知点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A.

充分性. 若 $S\backslash\{A\}$ 中有点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$ 使得 $\forall k>N$, 我们均有

$$\|X_k-A\|<\varepsilon.$$

由于 $X_k\in S\backslash\{A\}$, 故 $X_k\in\mathring{B}(A,\varepsilon)\cap S$, 由此立刻可知 A 为 S 的极限点.

$\mathbb{R}^n$ 的其它性质

关于实数轴 $\mathbb{R}$, 我们有如下的结论: 确界定理, 单调有界定理, 区间套定理, 列紧性定理, 以及 Cauchy 准则. 由于 $\mathbb{R}^n$ 上没有序关系, 前面两个定理无法拓广到 $\mathbb{R}^n$ 上. 之前我们已经在 $\mathbb{R}^n$ 上建立了 Cauchy 准则, 下面将给出相应的区间套定理与列紧性定理.

定义 2. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集合.

- 令 $d(\Omega) = \sup\limits_{X,Y\in\Omega} \|X - Y\|$, 称为 Ω 的直径.
- 若 Ω 包含在某个 (有限) 球中, 则称 Ω 有界.
- 称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{X_k\}$ 有界, 若它们组成的集合有界, 即 $\exists r > 0$ 使 $\forall k \geqslant 1$, $\|X_k\| < r$.

注: 集合有界当且仅当它包含在某个以原点为中心的球中; 集合有界当且仅当其直径有限.

定理 4. (闭集套定理) 设 $\{F_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集组成的集列使得 $F_1 \supseteq F_2 \cdots \supseteq F_k \supseteq \cdots$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} d(F_k) = 0$, 则交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ 为单点集.

证明思想: 利用 $\mathbb{R}^n$ 的完备性 (Cauchy 准则).

定理 5. (Weierstrass 定理) $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子点列.

证明思想: 对点列的每个分量应用列紧性定理.

§2. n 元函数与 n 元向量值函数

回顾: 设 X, Y 为非空集合. 若其元素之间存在一个对应规则 f 使得对任意的 $x \in X$, 在 Y 中有唯一确定元素 y (记作 $y = f(x)$) 与之对应, 则称 f 为 X 到 Y 的一个映射 (或函数), 称 y 为 x 的像, x 为 y 的原像. 记作 $f : X \to Y$.

定义 1. 设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集. 称任意映射 $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为 Ω 上的 n 元向量值函数, 当 $m = 1$ 时, 简称为 n 元 (数量值) 函数.

向量值函数的运算与表示

- **线性组合**: 设 $\vec{f}, \vec{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, 而 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $\forall X \in \Omega$, 定义
$$(\lambda\vec{f} + \mu\vec{g})(X) = \lambda\vec{f}(X) + \mu\vec{g}(X).$$
- **乘、除法**: 假设 $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, 而 $g : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数. $\forall X \in \Omega$, 定义
$$(g\vec{f})(X) := g(X)\vec{f}(X),$$
$$\left(\frac{\vec{f}}{g}\right)(X) := \frac{\vec{f}(X)}{g(X)} \text{ (若 } g(X) \neq 0).$$

- 复合运算: 假设 $l, m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vec{f}:\Omega_1 \to \Omega_2$, $\vec{g}:\Omega_2 \to \mathbb{R}^l$ 为向量值函数. $\forall X \in \Omega_1$, 令 $(\vec{g} \circ \vec{f})(X) := \vec{g}(\vec{f}(X))$.
- 向量值函数的表示: 设 $\vec{f}:\Omega \to \mathbb{R}^m$ 为 n 元向量值函数. 则 $\forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, 均有 $\vec{f}(X) \in \mathbb{R}^m$, 记作 $Y = (y_1, \ldots, y_m)^T$, 每个 y_j 为 X 的函数: $y_j = f_j(X) = f_j(x_1, \ldots, x_n)$. 故 $\vec{f}:\Omega \to \mathbb{R}^m$ 与 m 个 n 元函数 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ 等价. 此时记作 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$.

§3. 极限与连续

定义 1. 设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为 Ω 的极限点, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, $A \in \mathbb{R}^m$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 当 $0 < \|X - X_0\|_n < \delta$ 时, $\|\vec{f}(X) - A\|_m < \varepsilon$, 则称 X 在 Ω 内趋于 X_0 时, $\vec{f}(X)$ 以 A 为极限 (或收敛到 A), 记作 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = A$.

评注

- $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)=A$ 当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall X\in\mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega$, 有 $\vec{f}(X)\in B(A,\varepsilon)$.
- 若记 $\vec{f}=(f_1,\ldots,f_m)^T$, $A=(a_1,\ldots,a_m)^T$, 则 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)=A$ 当且仅当对于任意的 $1\leqslant j\leqslant m$, 均有 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}f_j(X)=a_j$.
- 如果点 X_0 为 $\Omega\cup\{X_0\}$ 的内点, 我们通常将 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)$ 简记作 $\lim\limits_{X\to X_0}\vec{f}(X)$.

§3. 极限与连续

定义 1. 设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为 Ω 的极限点, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数, $A \in \mathbb{R}^m$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 当 $0 < \|X - X_0\|_n < \delta$ 时, $\|\vec{f}(X) - A\|_m < \varepsilon$, 则称 X 在 Ω 内趋于 X_0 时, $\vec{f}(X)$ 以 A 为极限 (或收敛到 A), 记作 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = A$.

评注

- $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)=A$ 当且仅当 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ 使 $\forall X\in\mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega$, 均有 $\vec{f}(X)\in B(A,\varepsilon)$.
- 若记 $\vec{f}=(f_1,\ldots,f_m)^T$, $A=(a_1,\ldots,a_m)^T$, 则 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)=A$ 当且仅当对于任意的 $1\leqslant j\leqslant m$, 均有 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}f_j(X)=a_j$.
- 如果点 X_0 为 $\Omega\cup\{X_0\}$ 的内点, 我们通常将 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)$ 简记作 $\lim\limits_{X\to X_0}\vec{f}(X)$.

(数量值函数) 极限的基本性质

- 唯一性: 极限若存在, 则唯一.
- 保序性, 保号性, 夹逼原理.
- 四则运算: 设 $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = A$, $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} g(X) = B$ 收敛.

  (a) $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} (\lambda f + \mu g)(X) = \lambda A + \mu B$.

  (b) $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} (fg)(X) = AB$.

  (c) $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \frac{f}{g}(X) = \frac{A}{B}$ (若 $B \neq 0$).

- 复合法则: 假设 $l, m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ 为非空, 而 $\vec{f}: \Omega_1 \to \Omega_2$, $\vec{g}: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$ 为向量值函数. 若 $\lim\limits_{\Omega_1 \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = Y_0$,

$$\lim_{\Omega_2 \ni Y \to Y_0} \vec{g}(Y) = A,$$

且 $\forall X \in \Omega_1 \setminus \{X_0\}$, 均有 $\vec{f}(x) \neq Y_0$, 则

$$\lim_{\Omega_1 \ni X \to X_0} (\vec{g} \circ \vec{f})(X) = \lim_{\Omega_1 \ni X \to X_0} \vec{g}(\vec{f}(X)) = A.$$

注: 复合函数极限法则实质是在做变量替换.

证明: 因 $\lim\limits_{\Omega_2 \ni Y \to Y_0} \vec{g}(Y) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ 使得 $\forall Y \in \mathring{B}(Y_0, \eta) \cap \Omega_2$, 均有 $\vec{g}(Y) \in B(A, \varepsilon)$.

又因为 $\lim\limits_{\Omega_1 \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = Y_0$, 因此 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \mathring{B}(X_0, \delta) \cap \Omega_1$, 我们有 $\vec{f}(X) \in B(Y_0, \eta)$.

注意到 $\vec{f}(X) \neq Y_0$, 因此 $\vec{f}(X) \in \mathring{B}(Y_0, \eta) \cap \Omega_2$, 于是 $\vec{g}(\vec{f}(X)) \in B(A, \varepsilon)$. 故所证结论成立.

评注: 条件 $\vec{f}(X) \neq Y_0$ 不能去掉.

- 点列与函数极限: 设 $m,n\geqslant 1$ 为整数, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空, $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 为向量值函数, 而 $X_0\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^m$. 那么 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)=A$ 当且仅当对 $\Omega\setminus\{X_0\}$ 中收敛到 X_0 的任意点列 $\{X_k\}$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty}\vec{f}(X_k)=A$.

- Cauchy 准则: $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\vec{f}(X)$ 收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall X',X''\in\mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega$, 均有 $\|\vec{f}(X')-\vec{f}(X'')\|_m<\varepsilon$.

二重极限

计算多变量函数的极限通常很复杂，目前唯一有效方法是将之转化成单变量函数极限. 出于简便记号，后面我们将只讨论两个变量的函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$，称为二重极限. 我们也可考虑极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$. 由此我们还可以考虑单侧极限以及 x_0 或 y_0 为无穷的情形，比如说，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)$ 等.

两种极限的差别

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ 使得当 $0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta$ 时, 我们均有 $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 我们均有 $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

典型例题 (转化为单变量的情形)

例 1. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \xlongequal{\rho=\sqrt{x^2+y^2}} \lim\limits_{\rho\to0^+} \frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2} = 1.$

例 2. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 均有 $0\leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

于是由夹逼原理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

例 3. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, 其中 $a\in\mathbb{R}$.

解: $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \log\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{x^2}{x+y}\log\left(1-\frac{1}{2x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{-1}{2x} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{y}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

于是 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

例 4. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

解: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 定义 $g(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

用反证法. 假设极限存在且等于 A. $\forall k, x \in \mathbb{R}$,

令 $f_k(x) = (x, kx)$. 则我们有 $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = (0,0)$,

并且 f_k 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上不等于 $(0,0)$. 于是由复合

函数极限法则得 $A = \lim\limits_{x\to 0} g(x, kx) = \frac{2k}{1+k^2}$, 由此

可知极限不唯一. 矛盾! 故所求极限不存在.

例 5. 试证明 $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2-x}$ 在 (x,y) 沿任何直线趋于 $(0,0)$ 时, 均会趋于 0, 但是当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时, 极限却不存在.

证明: 假设 $a,b\in\mathbb{R}$ 不全为零. 对于过 $(0,0)$ 的任意直线 $\begin{cases} x=at \\ y=bt \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(at,bt) &= \lim_{t\to 0}\frac{(at)^2}{(at)^2+(bt)^2-at} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{a^2}{a^2+b^2-\frac{a}{t}}=0.\end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, 定义 $g(t) = (t^2, t)$. 那么 $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = (0,0)$, 且 g 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上不等于 $(0,0)$. 注意到

$$\lim_{t\to 0} f\circ g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2)^2}{(t^2)^2 + t^2 - t^2} = 1 \neq 0,$$

于是由复合函数极限法则可知极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

不存在.

例 6. 计算 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+e^y)}{1+\log(1+x)}$.

解:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+e^y)}{1+\log(1+x)} = \frac{\sin\left(\lim\limits_{x\to 0} x^2 + \lim\limits_{y\to 0} e^y\right)}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\log(1+x))} = \sin 1.$$

二重极限与累次极限

二重极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

累次极限: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

注: 对于累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 先对 $x \neq x_0$ 计算 $\varphi(x) := \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 随后再求 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

问题: 二重极限与累次极限有什么关系?

回答: 没有任何关系!

谢谢大家!