微积分 A (2)

姚家燕

第 10 讲

第 9 讲回顾

1. 一致连续函数:

- 定义, 否定表述, 与连续函数的关系.
- 判别方法: 定义, 有界闭集上的连续函数.
- 否定性判别: 函数 f 在 Ω 上非一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 Ω 中点列 $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} \|X_k - Y_k\| = 0$, 但 $\forall k \geqslant 1$, 却有
$$|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0.$$
- 极限与极限次序可交换性.

2. 含参变量常义积分及其性质

- 极限与积分次序可交换性 (被积函数连续).
- 积分与积分次序可交换性 (被积函数连续).
- 求导与积分次序可交换性 (被积函数连续, 偏导函数连续).
- 变上、下限含参积分的导数 (被积函数连续, 偏导函数连续, 上、下限可导).

第 10 讲

例 2. 计算 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x \ (a, b > 0)$.

解: 方法 1. 由积分与积分次序可交换性可知

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \log(y+1)\Big|_a^b \\ &= \log\frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

方法 2. 固定 $a > 0$. $\forall b > 0$, 定义

$$I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} \, dx.$$

则 $I(a) = 0$ 且由求导与积分次序可交换性得

$$I'(b) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{x^b - x^a}{\log x}\right) dx = \int_0^1 x^b \, dx = \frac{1}{b+1}.$$

由此立刻可得

$$I(b) = \int_a^b I'(t) \, dt = \int_a^b \frac{dt}{t+1} = \log \frac{b+1}{a+1}.$$

例 3. $\forall y > 0$, 令 $I(y) = \int_y^{y^2} \frac{\sin(yx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 求 $I'(y)$.

解: 由求导与积分次序可交换性知

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_y^{y^2} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\sin(yx)}{x}\Big)\,\mathrm{d}x + \frac{\sin(y\cdot y^2)}{y^2}\cdot (y^2)' \\ &\quad - \frac{\sin(y\cdot y)}{y}\cdot (y)' = \int_y^{y^2} \cos(yx)\,\mathrm{d}x + \frac{2\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} \\ &= \frac{1}{y}\sin(yx)\Big|_y^{y^2} + \frac{2\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} = \frac{1}{y}(3\sin y^3 - 2\sin y^2). \end{aligned}$$

作业题: 第 2.2 节第 109 页第 2 题第 (1) 小题, 第 110 页第 3, 4 题, 其中将 $u(x)$ 改成 $u(x,t)$.

回顾: 广义积分的定义及其性质

定义 1. 设 $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, +\infty]$, $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ 使得 $\forall A \in (a, \omega)$, 函数 f 在 $[a, A]$ 上均为可积. 定义 f 在 $[a, \omega)$ 上的广义积分为

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若上述极限存在, 称广义积分 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 否则称之发散. 广义积分也称为反常积分.

评注

- 通常 $\omega = +\infty$, 或者 $\omega \in \mathbb{R}$ 但函数 f 在 ω 的邻域内无界, 此时称 ω 为 f 的奇点, 相应的广义积分被称为无穷限积分或瑕积分.
- $\forall c \in [a, \omega)$, 我们有

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性仅与函数 f 在 ω 的邻域内的性质有关.

- 如果 $\omega \in \mathbb{R}$ 且 $f \in \mathscr{R}[a,\omega]$, 则 f 在 $[a,\omega]$ 的任意闭子区间上均可积, 并且

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\omega^-}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时正常的定积分与广义积分一致.

- 若 $b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 使得 $\omega < b$, 而且 $f:(\omega,b]\to\mathbb{R}$ 在 $(\omega,b]$ 的任意的闭子区间上可积, 则我们可以类似地定义广义积分

$$\int_\omega^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\omega^+}\int_B^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 假设 ω_1, ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ 为 f 的奇点, 而函数 f 在 (ω_1, ω_2) 的任意的闭子区间上可积. 固定 $a \in (\omega_1, \omega_2)$, 并定义

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega_1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

可证明该定义不依赖点 a 的选择.

- 如果 $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, 而 $\omega \in (a, b)$ 使得 f 在 $[a, b] \setminus \{\omega\}$ 的任意闭子区间上可积, 定义:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\omega}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 更一般地, 若函数 f 有多个奇点, 此时将整个区间分割成若干个小的区间使得 f 在每一个小区间上只有一个奇点并且该点为小区间的端点, 随后在每一个小区间上定义广义积分, 再将如此定义的广义积分之和定义为函数 f 在原来那个大区间上的广义积分. 有鉴于此, 再通过坐标变换, 我们总可以将问题归结为研究形如 $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ 这样的广义积分.

回顾: 广义积分小结

- 各种形式的广义积分的定义, 奇点.
- 广义积分的性质: 与定积分的完全类似.
- 敛散性: Cauchy 准则, 比较法 (绝对收敛), Abel-Dirichlet 准则 (变号积分, 条件收敛).
- 重要的比较函数: $\frac{1}{x^p}$, $\log x$, $\frac{\log x}{x^p}$.
- 绝对收敛与条件收敛: 二者关系.
- Γ 函数与 Beta 函数: 递推, 余元, 二者关系.

§2. 广义含参变量积分

广义含参变量积分的收敛性与一致收敛性

定义 1. 假设 $f : [a, \omega) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 其中 $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 若 $y_0 \in [c, d]$ 使广义积分

$$\int_a^\omega f(x, y_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \omega^-} \int_a^A f(x, y_0)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 则称广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 在点 y_0 处收敛, 否则则称之在该点发散.

如果广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 的每点均收敛，我们则称之在 $[c,d]$ 上收敛，由此得到 $[c,d]$ 上的函数 $I(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

注: (1) 广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上收敛到函数 $I(y)$ 当且仅当 $\forall y\in[c,d]$ 以及 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall A\in[M,\omega)$, 我们均有

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x-I(y)\right|<\varepsilon.$$

(2) 由 Cauchy 判别准则知, 广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上收敛当且仅当 $\forall y \in [c,d]$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in [a,\omega)$ 使得 $\forall A', A'' \in [M,\omega)$,

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

典型例子:

Gamma 函数: $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Beta 函数: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$.

定义 2. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in [a, \omega)$ 使 $\forall A \in [M, \omega)$ 以及 $\forall y \in [c, d]$, 均有

$$\left| \int_a^A f(x, y)\,\mathrm{d}x - I(y) \right| < \varepsilon,$$

则我们称广义含参变量积分 $\int_a^\omega f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[c, d]$ 上一致收敛到函数 $I(y)$.

注: 一致收敛性蕴含收敛性, 但反之不成立.

定理 1. (Cauchy 准则) $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上为一致收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in [a,\omega)$ 使得 $\forall A', A'' \in [M,\omega)$, $\forall y \in [c,d]$, $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

否定形式: $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上非一致收敛当且仅当 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使 $\forall M \in [a,\omega)$, $\exists A', A'' \in [M,\omega)$, $\exists y \in [c,d]$ 使得 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0$; 这等价于 $\exists A_n', A_n'' \in [a,\omega)$, $\exists y_n \in [c,d]$ 使得我们有

$$\lim_{n\to\infty} A_n' = \lim_{n\to\infty} A_n'' = \omega, \quad \left|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x,y_n)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

例 1. 求证: $\int_a^{+\infty} ye^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[0,+\infty)$ 收敛但非一致收敛.

证明: 当 $y=0$ 时, 被积函数恒为零, 因此广义积分收敛. 当 $y>0$ 时, 我们则有

$$\int_a^{+\infty} ye^{-xy}\,\mathrm{d}x = -e^{-xy}\Big|_a^{+\infty} = e^{-ay}$$

也收敛. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$, 而 $\forall n\geqslant 1$, $\int_n^{2n} \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x = -e^{-\frac{x}{n}}\Big|_n^{2n} = \frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}>0$, 由此得证.

作业题: 第 2.1 节第 104 页第 8 题.

定理 2. (Weierstrass 判别法或比较法则)
假设 $f:[a,\omega)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 而函数 $F:[a,\omega)\to[0,+\infty)$ 使 $\forall(x,y)\in[a,\omega)\times[c,d]$, 我们均有 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$. 若 $\int_a^\omega F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

证明: 因 $\int_a^\omega F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则由 Cauchy 准则知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall A',A''\in[M,\omega)$, 均有 $|\int_{A'}^{A''}F(x)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$. 则 $\forall y\in[c,d]$, 我们有

$$\Big|\int_{A'}^{A''}f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big|\leqslant\Big|\int_{A'}^{A''}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\Big|\leqslant\Big|\int_{A'}^{A''}F(x)\,\mathrm{d}x\Big|<\varepsilon,$$

从而由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

例 2. 求证: 广义含参变量积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x \, \mathrm{d}x$$

关于 $y \in [c, +\infty)$ 一致收敛, 其中 $c > 0$.

证明: $\forall x \geqslant 0$ 及 $\forall y \geqslant c$, 均有 $|e^{-xy} \sin x| \leqslant e^{-cx}$.
又 $\int_0^{+\infty} e^{-cx} \, \mathrm{d}x = -\frac{e^{-cx}}{c}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{c}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法可知所证结论成立.

作业题: 第 2.1 节第 103 页第 4 题第 (2) 小题, 其中将 $\cos yx$ 改为 $\cos(yx)$.

定理 3. 设 $f, g : [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ 为函数使得 $\forall y \in [c,d]$, $f(\cdot,y), g(\cdot,y)$ 在 $[a,\omega)$ 的任意的闭子区间上均可积.

(1) (Abel) 如果 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 而 g 有界并且关于第一个变量单调, 那么 $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

(2) (Dirichlet) $\forall y \in [c,d]$ 以及 $\forall A \in [a,\omega)$, 定义 $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$. 若 F 有界, g 关于第一个变量单调且 $\lim\limits_{x\to\omega^-} g(x,y) = 0$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致成立, 则 $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

证明: (1) 由于函数 g 有界, 因此 $\exists K>0$ 使得 $\forall (x,y)\in[a,\omega)\times[c,d]$, 我们均有 $|g(x,y)|<K$. 又 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 于是由 Cauchy 准则, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使 $\forall y\in[c,d]$, $\forall A_1,A_2\in[M,\omega)$, 我们有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2K}$. 由积分第二中值定理, 存在 ξ 介于 A_1,A_2 使得

$$\begin{aligned}\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x &= g(A_1,y)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+g(A_2,y)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此立刻可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant\ & |g(A_1,y)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| + |g(A_2,y)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant\ & K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} + K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} \\
=\ & \varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

(2) 由题设, $\exists K>0$ 使得 $\forall (A,y)\in[a,\omega)\times[c,d]$, $|F(A,y)|<K$. 同时由于 $\lim\limits_{x\to\omega^-} g(x,y)=0$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致成立, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in[a,\omega)$ 使得 $\forall x\in[M,\omega)$ 以及 $\forall y\in[c,d]$, 均有 $|g(x,y)|<\frac{\varepsilon}{4K}$.
又 $\forall A_1,A_2\in[M,\omega)$, 由积分第二中值定理可知, 存在 ξ 介于 A_1,A_2 之间使得

$$\begin{aligned}\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x &= g(A_1,y)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+g(A_2,y)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant\ & |g(A_1,y)|\cdot|F(\xi,y)-F(A_1,y)| \\
& +|g(A_2,y)|\cdot|F(A_2,y)-F(\xi,y)| \\
\leqslant\ & \frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K)+\frac{\varepsilon}{4K}\cdot(2K)=\varepsilon.
\end{aligned}$$

于是由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立.

注: 在上述定理中可将 $[c,d]$ 换成任意集合.

例 3. 求证: 广义含参积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} \mathrm{d}x$ 关于 $t \in [c, +\infty)$ 一致收敛, 其中 $c > 0$.

证明: $\forall (x, t) \in [1, +\infty) \times [c, +\infty)$, 我们定义函数 $f(x, t) = \sin(tx)$, $g(x, t) = \frac{1}{x}$, 那么 g 关于 x 单调, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x, t) = 0$ 关于 $t \in [c, +\infty)$ 一致成立. $\forall A > 1$, $\left|\int_1^A \sin(tx)\, \mathrm{d}x\right| = \frac{1}{t}|\cos t - \cos(At)| \leqslant \frac{2}{c}$, 由 Dirichlet 判别准则可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\, \mathrm{d}x$ 关于 $t \in [c, +\infty)$ 一致收敛.

例 4. 求证: 广义含参变量积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

证明: $\forall (x,y) \in (0,+\infty) \times [0,+\infty)$, 我们定义函数 $f(x,y) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x,y) = e^{-xy}$. 则 $\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛, 而 g 关于 x 单调且 $|g| \leqslant 1$, 由 Abel 判别准则知 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

作业题: 第 2.1 节第 103 页第 4 题第 (7) 小题.

广义含参变量积分的分析性质

定理 4. 设 $f : [a, \omega) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ 为连续函数.

(1) 极限与积分可交换性:

若广义含参变量积分

$$I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 则 I 在 $[c, d]$ 上连续.

(2) 求导与积分可交换性:

若 $I(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,d]$ 上收敛, 偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,\omega)\times[c,d]$ 上连续并且使得广义含参积分 $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 为一致收敛, 则 I 在 $[c,d]$ 上连续可导且

$$I'(y)=\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

注: 在上述结论中, 均可将 $[c,d]$ 换成开区间.

(3) 积分与积分可交换性:

若 $I(y)=\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 则 I 在 $[c,d]$ 上可积且

$$\int_c^d \Big(\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y=\int_a^{\omega}\Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

注: 也可以考虑 $[a,\omega)\times[c,\eta)$ 上的函数而探讨二重的广义积分, 如 $\int_c^{+\infty}\big(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y$. 在一定条件下, 上述结论依然成立.

证明: (1) 任取 $y_0 \in [c,d]$. 因 $\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 均 $\exists M \in [a,\omega)$ 使得 $\forall A \in [M,\omega)$, $\forall y \in [c,d]$, 我们有

$$\Big|\int_A^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 f 在 $[a,A] \times [c,d]$ 上连续, 因此为一致连续, 于是 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall (x,y), (x',y') \in [a,A] \times [c,d]$, 当 $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} < \delta$ 时, 我们均有

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{3(A-a+1)},$$

于是 $\forall y \in [c,d]$, 当 $|y-y_0|<\delta$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
|I(y)-I(y_0)| &= \left|\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\omega} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_A^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \\
&+ \left|\int_A^{\omega} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{A} |f(x,y)-f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\varepsilon \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3(A-a+1)}\cdot(A-a)+\frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon,
\end{aligned}$$

因此 I 在点 y_0 处连续, 进而在 $[c,d]$ 上也连续.

(2) $\forall A \in (a,\omega)$ 以及 $\forall y \in [c,d]$, 定义

$$I_A(y) = \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x,\ \ J(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

则 $J \in \mathscr{C}[c,d]$ 并且 $\forall \varepsilon > 0$, 由题设条件及常义积分的求导与积分次序可交换性, $\exists M \in (a,\omega)$ 使得 $\forall A \in (M,\omega)$ 以及 $\forall y \in [c,d]$, 我们均会有 $|I'_A(y) - J(y)| < \frac{\varepsilon}{d-c+1}$, 由此可得

$$\left|\int_c^y I'_A(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^y J(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_c^y |I'_A(t) - J(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

而这正意味着, $\forall y \in [c, d]$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_c^y J(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{A\to\omega^-}\int_c^y I_A'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A\to\omega^-}\Big(I_A(y) - I_A(c)\Big) = I(y) - I(c).\end{aligned}$$

又 $J \in \mathscr{C}[c, d]$, 故 I 在 $[c, d]$ 上连续可导且

$$I'(y) = J(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

关于 (3), 其证明与正常含参积分的证明类似.

例 5. 求 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $b \geqslant a > 0$.

解: 由题设可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b e^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

又 $\forall x \geqslant 0$ 以及 $\forall y \in [a,b]$, 我们有 $|e^{-xy}| \leqslant e^{-ax}$, 另外 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$ 收敛, 于是由 Weierstrass 判别法知广义含参变量积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [a,b]$ 一致收敛.

从而由积分与积分次序可交换性可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_a^b e^{-xy} \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \Big(\frac{-e^{-xy}}{y} \Big|_0^{+\infty} \Big) \,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&= \log y \Big|_a^b \\
&= \log \frac{b}{a}.
\end{aligned}
$$

例 6. 设 $a>0$. $\forall y\in\mathbb{R}$, 计算

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(yx)\,\mathrm{d}x.$$

解: $\forall x\geqslant 0$, $\forall y\in\mathbb{R}$, 令 $f(x,y)=e^{-ax^2}\cos(yx)$.
则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-xe^{-ax^2}\sin(yx)$, $|f(x,y)|\leqslant e^{-ax^2}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant xe^{-ax^2}$. 但 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 均收敛, 则由 Weierstrass 判别法可知

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛, 从而由求导与积分次序

可交换性知 I 连续可导, 并且 $\forall y \in \mathbb{R}$, 均有

$$\begin{aligned} I'(y) &= -\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin(yx)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{2a}\, \mathrm{d}(e^{-ax^2}) \\ &= \frac{e^{-ax^2}}{2a} \sin(yx)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\, \mathrm{d}(\sin(yx)) \\ &= -\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(yx)\, \mathrm{d}x = -\frac{y}{2a} I(y), \end{aligned}$$

则 $I(y) = Ce^{\int (-\frac{y}{2a})\, \mathrm{d}y} = Ce^{-\frac{y^2}{4a}}$, 其中 C 为常数.

又由定义可知

$$
\begin{aligned}
C &= I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=ax^2} \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}\sqrt{\frac{u}{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},
\end{aligned}
$$

由此立刻可得 $I(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$.

作业题: 第 2.2 节第 110 页第 5 题, 第 2.3 节第 115 页第 1 题第 (1), (2) 小题 (不要用例 5 和例 6 的结论, 用其方法), 其中将 $\sin yx$ 换成 $\sin(yx)$, 第 2 题第 (2) 小题 (右边分母中缺 2).

第 2 章小结

1. 一致连续函数:

- 定义, 否定表述, 与连续函数的关系.
- 判别方法: 定义, 有界闭集上的连续函数.
- 否定性判别: 函数 f 在 Ω 上非一致连续当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 Ω 中点列 $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} \|X_k - Y_k\| = 0$, 但 $\forall k \geqslant 1$, 却有
$$|f(X_k) - f(Y_k)| \geqslant \varepsilon_0.$$
- 极限与极限次序可交换性.

2. 含参变量常义积分及其性质

- 极限与积分次序可交换性 (被积函数连续).
- 积分与积分次序可交换性 (被积函数连续).
- 求导与积分次序可交换性 (被积函数连续, 偏导函数连续).
- 变上、下限含参积分的导数 (被积函数连续, 偏导函数连续, 上、下限可导).

3. 广义含参变量积分及其性质

- 一致收敛的定义及准则: 定义, Cauchy 准则, Weierstrass 判别法, Abel-Dirichlet 判别法.
- 极限与积分可交换性: 被积函数连续, 广义含参变量积分一致收敛.
- 积分与积分可交换性: 被积函数连续, 广义含参变量积分一致收敛.
- 求导与积分可交换性: 被积函数连续, 广义含参变量积分收敛, 而关于参数的偏导函数连续且其广义含参变量积分一致收敛.

谢谢大家!