微积分 A (2)

姚家燕

第 2 讲

主讲老师联系方式与答疑时间

欢迎大家平时到办公室来咨询或讨论问题,

拒绝在考试后以各种名目来要分数!

不建议网上提问, 因为无法保证时效和准确!

- 地点: 理科楼数学系 A 216
- 电话: 62794494
- 时间: 每周三下午 18:00-19:00
- 每次上课前时采用雨课堂签到并随机点名, 请大家务必准时出席!

清华大学本科生学籍管理规定

第十条 学生应当参加学校教育计划规定的各项活动,自觉遵守课堂纪律,完成规定学业.因故不能参加学校教育计划规定的活动,应当事先请假并获得批准,未经批准而缺席的,学校视情节轻重根据有关规定给予相应的批评教育,纪律处分.未请假或者请假未获批准连续两周未参加教学计划规定的活动的,予以退学处理.

第十七条 含实验或者作业的课程,学生在按时完成课程实验(包括实验报告)和作业后,方可参加该课程考核.

选择适合自己的课程!

若选择本课程, 请大家遵守下列纪律:

- 线下上课期间严禁使用任何电子产品
- 严禁以任何形式外传课堂内容
- 务必按时上交作业 (允许三次不交作业)
- 无故缺交平时作业 4 次及 4 次以上或无故缺席期中考试, 取消参加期末考试的资格!
- 严禁以任何方式在考试后来要成绩

第 1 讲回顾: n 维 Euclid 空间

- $\mathbb{R}^n$ 及其上的范数 $\|\cdot\|_n$ 与距离.
- 点 X_0 的 δ-邻域 $B(X_0, \delta)$, 也称为以点 X_0 为中心、以 δ 为半径的开球.
- 点 X_0 的去心 δ-邻域 $\mathring{B}(X_0, \delta)$.
- 内点, 外点, 边界点, 极限点, 开集, 闭集, 内部, 外部, 边界, 闭包.

回顾：基本性质

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ 既为开集, 也为闭集.
- 任意开球均为开集, 任意闭球均为闭集.
- 拓扑概念与空间 $\mathbb{R}^n$ 有关.
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集当且仅当它为开球的并.
- 任意多个开集的并是开集, 任意多个闭集的交是闭集; 有限多个开集的交为开集, 有限多个闭集的并为闭集.
- 连通集, 非连通集, 开区域, 闭区域.

回顾：重要的例子

例 1. $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\forall \delta > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}\, B(X_0, \delta) &= B(X_0, \delta), \\
\mathrm{Ext}\, B(X_0, \delta) &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| > \delta\}, \\
\partial B(X_0, \delta) &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| = \delta\}, \\
\overline{B(X_0, \delta)} &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| \leqslant \delta\}.
\end{aligned}$$

回顾: $\mathbb{R}^n$ 中的点列与性质

- 概念: $\mathbb{R}^n$ 中的点列的极限, Cauchy 序列.
- $\mathbb{R}^n$ 中点列收敛当且仅当其坐标分量组成的数列均收敛.
- $\mathbb{R}^n$ 中点列为 Cauchy 序列当且仅当它的坐标分量组成的数列均为 Cauchy 数列.
- $\mathbb{R}^n$ 完备, 也即 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列必收敛.

- $\mathbb{R}^n$ 中子集为闭集当且仅当该集合中的任意收敛点列的极限依然属于该集合.
- 概念: 直径, 有界集, 有界点列.
- 闭集套定理: $\mathbb{R}^n$ 中的直径趋于零的递降的闭集列的交集为单点集.
- 列紧性定理: $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子列.

回顾: 多元向量值函数

- 概念: n 元向量值函数, n 元 (数量值) 函数.
- 向量值函数的运算: 线性组合; 向量值函数与数量值函数之间的乘、除; 向量值函数的复合运算.
- 向量值函数的表示: 在 $\mathbb{R}^m$ 中取值的 n 元向量值函数等同于 m 个 n 元数量值函数.

回顾：函数极限

- 函数极限 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X)$, $\lim\limits_{X \to X_0} \vec{f}(X)$.
- 向量值函数极限收敛当且仅当它的每一个坐标分量函数的函数极限收敛.
- 函数极限的唯一性, 数量值函数极限的保序性、保号性、夹逼原理、四则运算.
- 复合函数极限法则, 点列极限与函数极限之间的关系, Cauchy 准则.
- $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 的差别.

回顾: 多变量函数极限的计算

基本方法: 转化为单变量的情形.

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{-\frac{1}{2}}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.
- 极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在.
- 极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$ 不存在.

第 2 讲

二重极限与累次极限

二重极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

累次极限: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

注: 对于累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 先对 $x\neq x_0$ 计算 $\varphi(x):=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 随后再求 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

问题: 二重极限与累次极限有什么关系?

回答: 没有任何关系!

情形 1: 二重极限不存在, 但累次极限存在.

例 7. 前面已证二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在, 但当 $y \neq 0$ 时, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$, 于是

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$$

由对称性可得 $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$

情形 2: 二重极限存在, 但累次极限不存在.

例 8. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (其中 $xy\neq 0$), 定义

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{y}=0$, 但极限 $\lim\limits_{x\to 0}y\sin\frac{1}{x}$ 不存在, 故极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 不存在. 由对称性可知极限 $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 也不存在. 又 $|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|$, 由夹逼原理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

定理 1. 假设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 且在 x_0 的某去心邻域 U 内 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ 收敛, 则

$$A = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

证明: 由极限的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall (x,y) \in \mathring{B}((x_0,y_0),\delta)$, 均有 $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. 则 $\forall x \in U \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 对 y 取极限可得 $|\varphi(x) - A| \leqslant \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

注: 这里仅考虑了 $A \in \mathbb{R}$ 而省略了其它情形.

推论 1. 若二重极限与某一个累次极限均存在, 则二者必然相等: 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B$ 存在, 则 $A=B$.

推论 2. 若累次极限存在但不相等, 则二重极限不存在: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在但不相等, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

向量值函数的连续性

定义 2. 假设 $m, n \geqslant 1$ 为整数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$ 为 Ω 的极限点, $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 若

$$\lim_{\Omega \ni X \to X_0} \vec{f}(X) = \vec{f}(X_0),$$

则称 $\vec{f}$ 在点 X_0 处连续.

评注

- $\vec{f}$ 在点 X_0 连续当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall X \in \Omega$, 当 $\|X - X_0\|_n < \delta$ 时, 均有
$$\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon.$$
若点 X_0 不为 Ω 的极限点, 上述性质恒成立, 此时我们也称 $\vec{f}$ 在点 X_0 处连续.
- 若 $\vec{f}$ 在 Ω 的每点连续, 则称 $\vec{f}$ 在 Ω 上连续.
- 定义 $\mathscr{C}(\Omega; \mathbb{R}^m) = \{\vec{f} \mid \vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ 为连续}\}$. 当 $m = 1$ 时, 我们将之简记为 $\mathscr{C}(\Omega)$.

连续函数的性质

定理 2. 多元数量值连续函数经过加、减、乘、除 (分母不为零) 运算后仍为连续函数.

定理 3. 多元向量值连续函数经加、减、数乘与复合运算后仍为连续函数.

注: 我们可以类似地定义多个变元的初等函数, 由上述性质可知它们在 其定义区域内 连续.

定理 4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 则 $\vec{f}$ 连续当且仅当对 $\mathbb{R}^m$ 中任意开集 G, 原像集 $\vec{f}^{-1}(G) = \{X \in \Omega \mid \vec{f}(X) \in G\}$ 均为开集.

证明: 充分性. 假设对于 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 G, 其原像集 $\vec{f}^{-1}(G)$ 为开集. 取 $X_0 \in \Omega$. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $G = B(\vec{f}(X_0), \varepsilon)$. 由题设知 $\vec{f}^{-1}(G)$ 为包含点 X_0 的开集, 则 $\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0, \delta) \subseteq \vec{f}^{-1}(G)$, 即 $\forall X \in B(X_0, \delta)$, 均有 $\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$. 因此 $\vec{f}$ 在点 X_0 处连续, 从而 $\vec{f}$ 为连续映射.

必要性. 假设 $\vec{f}$ 为连续映射, 而 G 为 $\mathbb{R}^m$ 中的任意非空开集. $\forall X_0 \in \vec{f}^{-1}(G)$, 均有 $\vec{f}(X_0) \in G$. 又 G 为开集, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $B(\vec{f}(X_0), \varepsilon) \subseteq G$. $\vec{f}$ 在 X_0 连续, 则 $\exists \delta_1 > 0$ 使 $\forall X \in \Omega \cap B(X_0, \delta_1)$, 我们有 $\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$. 又 $\Omega \cap B(X_0, \delta_1)$ 为开集, 故 $\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0, \delta) \subseteq \Omega \cap B(X_0, \delta_1)$, 则 $\forall X \in B(X_0, \delta)$, 均有 $\|\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$, 也即有 $B(X_0, \delta) \subseteq \vec{f}^{-1}\big(B(\vec{f}(X_0), \varepsilon)\big) \subseteq \vec{f}^{-1}(G)$, 故 X_0 为 $\vec{f}^{-1}(G)$ 的内点, 进而 $\vec{f}^{-1}(G)$ 为开集.

定理 4'. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 而 $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 则 $\vec{f}$ 连续当且仅当对 $\mathbb{R}^m$ 中任意闭集 F, 原像集 $\vec{f}^{-1}(F) = \{X \in \Omega \mid \vec{f}(X) \in F\}$ 为 Ω 中的闭集. 注: 这里将 Ω 当作整个空间.

证明: 充分性. 假设对于 $\mathbb{R}^m$ 中的任意闭集 F, 原像集 $\vec{f}^{-1}(F)$ 为闭集. 则对于 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 G, 其原像集 $\vec{f}^{-1}(G) = \Omega \setminus (\vec{f}^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus G))$ 为开集, 从而由定理 4 可知 $\vec{f}$ 为连续映射.

必要性. 假设 $\vec{f}$ 为连续映射, 而 F 为 $\mathbb{R}^m$ 中的任意闭集. 则由定理 4 可知, 原像集

$$\vec{f}^{-1}(F) = \Omega \setminus (\vec{f}^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F))$$

为 Ω 中的闭集. 故所证成立.

注: 若 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\forall r \in \mathbb{R}$, 集合

$$f^{-1}(r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) = r\}$$

为闭集, 由此可知通常的曲面均为闭集.

定理 5. (最值定理) 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上有最大值和最小值.

证明: 首先证明 f 在 Ω 上有界. 否则, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists X_k \in \Omega$ 使得 $|f(X_k)| > k$. 由 Ω 的有界性可知 $\{X_k\}$ 有一个子列 $\{X_{\ell_k}\}$ 收敛, 设其极限为 A. 又 Ω 为闭集, 则 $A \in \Omega$, 再由 f 的连续性以及夹逼原理可得 $f(A) = \lim\limits_{k\to\infty} f(X_{\ell_k}) = \infty$. 矛盾! 故假设不成立, 从而 f 有界.

下证 f 在 Ω 上有最值. 用反证法, 假设 f 没有最大值或最小值. 不失一般性, 可假设 f 没有最大值, 否则可以考虑 $-f$. 令 $M = \sup f(\Omega)$. 则 $\forall X \in \Omega$, $f(X) < M$. 定义 $F(X) = \frac{1}{M - f(X)}$, 则 $F \in \mathscr{C}(\Omega)$. 又由 M 的定义可知, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists X_k \in \Omega$ 使得 $f(X_k) > M - \frac{1}{k}$, 故 $F(X_k) > k$, 从而 F 在 Ω 上没有上界. 矛盾! 故所证成立.

$\mathbb{R}^n$ 中集合的弧连通 (道路连通)

- 称集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通, 如果 $\forall X, Y \in D$, 均存在 D 中的连续曲线将 X, Y 连接起来, 即存在向量值连续函数 $\gamma : [0,1] \to D$ 使得我们有 $\gamma(0) = X$, $\gamma(1) = Y$.
- 折线连通集也为弧连通集. 可以证明弧连通开集为折线连通.
- 由连续函数介值定理立刻可知, $\mathbb{R}$ 的子集 D 为弧连通集当且仅当它为区间.

定理 6. (连通性) 若 $\vec{f} \in \mathscr{C}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 而 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通, 则 $\vec{f}(\Omega)$ 为弧连通集.

证明: $\forall A, B \in \vec{f}(\Omega)$, $\exists X, Y \in \Omega$ 使得 $A = \vec{f}(X)$, $B = \vec{f}(Y)$. 因 Ω 为弧连通, 则存在向量值连续函数 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ 使得 $\gamma(0) = X$, $\gamma(1) = Y$. 令 $\widetilde{\gamma} = \vec{f} \circ \gamma$. 则 $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \vec{f}(\Omega)$ 为向量值连续函数且 $\widetilde{\gamma}(0) = A$, $\widetilde{\gamma}(1) = B$. 故 $\vec{f}(\Omega)$ 为弧连通.

定理 7. (介值定理) 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通集, 而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, 则 $\forall X_1, X_2 \in \Omega$ 以及介于 $f(X_1)$, $f(X_2)$ 之间的实数 μ, $\exists X_0 \in \Omega$ 使得 $f(X_0) = \mu$.

证明: 由 定理 6 可知 $f(\Omega)$ 为 $\mathbb{R}$ 的弧连通子集, 从而为区间. $\forall X_1, X_2 \in \Omega$, $f(X_1), f(X_2) \in f(\Omega)$, 则以这两点为端点的区间包含于 $f(\Omega)$. 得证.

例 9. 证明: 存在正实数 m, M 使得对于任意的 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$m \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant \|X\| \leqslant M \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

分析: 当 X 为零向量时, 上式成立. 若 X 不为零向量, 则该不等式等价于 $\frac{1}{M} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\frac{x_j}{\|X\|}\right| \leqslant \frac{1}{m}$.

令 $y_j = \frac{x_j}{\|X\|}$, 则 $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ 满足 $\|Y\| = 1$.

而所证不等式则等价于

$$\frac{1}{M} \leqslant f(Y) := \sum_{j=1}^{n} |y_j| \leqslant \frac{1}{m}.$$

也即要证明 f 在单位球面上有正的上、下界.

证明: 定义 $S = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y\|_n = 1\}$, 则 S 为有界闭集. $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$, 令

$$f(Y) = \sum_{j=1}^{n} |y_j| > 0.$$

则 f 连续, 从而有最小值 $a > 0$, 最大值 b.

选取 $m=\frac{1}{b}$, $M=\frac{1}{a}$. $\forall X\in\mathbb{R}^n$ (X 不为零向量),

设 $Y=\frac{1}{\|X\|_n}(x_1,\ldots,x_n)\in S$, 则 $a\leqslant f(Y)\leqslant b$.

也即 $a\leqslant\frac{1}{\|X\|_n}\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\leqslant b$, 从而我们有

$$\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{n}|x_j|\leqslant\|X\|_n\leqslant\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}|x_j|,$$

也就是说我们有 $m\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\leqslant\|X\|_n\leqslant M\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|$.

而 X 为零向量时, 该式也成立, 故所证成立.

谢谢大家!