

# Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 8

1. Oblicz sumę  $\sum 2^{-k}$  brana po wszystkich takich  $k \in \mathbb{N}$ , że 2, 3, 5, 7 nie dzieli  $k$ .
2. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciąg  $a_n$ . Wylicz funkcje tworzące ciągów  $a_{2n}$  i  $a_{3n}$ .
3. Oblicz  $a_n = \sum_{i=1}^n F_i F_{n-i}$ .
4. Korzystając z wzoru Taylora pokaż, że dla  $a \in \mathbb{R}$  zachodzi:  $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$ .
5. Wylicz funkcje tworzące ciągów określonych rekurencyjnie:
  - (a)  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1$ ;
  - (b)  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + \frac{1}{n+1}$
  - (c)  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$ ;
6. *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element  $i$  nie znajduje się na pozycji  $i$ -tej. Niech  $d_n$  oznacza liczbę nieporządków utworzonych z  $n$  kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź zależność rekurencyjną  $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$ . Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności? Pokaż też przez indukcję, że  $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ . Jak z tego ostatniego wzoru wynika ogólny wzór na  $d_n$ ?
7. Zastosuj wykładniczą funkcję tworzącą do rozwiązania zależności  $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$ ,  $d_0 = 1, d_1 = 0$ .
8. Dana jest zależność rekurencyjna  $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$  z warunkami początkowymi  $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$ . Znajdź rozwiązanie tej zależności korzystając z faktu, że  $d_n$  i  $n!$  spełniają tę zależność (być może z innymi warunkami początkowymi).
9. Udowodnij, że liczba sposobów, w jaki  $n$ -kąąt wypukły na płaszczyźnie można podzielić na rozłączne trójkąty za pomocą  $n-3$  przekątnych nie przecinających się wewnątrz tego wielokąta jest równa liczbie Catalana  $c_{n-2}$ . Pokaż też, że liczba triangulacji, w których jest wybrana przekątna wynosi  $c_{i-1}c_{n-i-1}$ , gdzie  $i$  zależy od przekątnej. Suma tych wyrażeń po wszystkich przekątnych jest  $(n-3)$  razy większa od liczby wszystkich triangulacji, czyli

$$\frac{n}{2} \sum_{i=2}^{n-2} c_{i-1} c_{n-i-1} = (n-3) c_{n-2}.$$

- Jak z powyższego wzoru wynika, że  $nc_{n-1} = 2(2n-3)c_{n-2}$ ? Wyprowadź z tego zależność  $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .
10. Danych jest  $2n$  punktów na okręgu. Na ile sposobów można te punkty połączyć  $n$  nieprzecinającymi się odcinkami, takimi że każdy z punktów jest końcem dokładnie jednego odcinka.
  11. Wylicz funkcje tworzące dla liczby podziałów liczby  $n$  (rozkładów na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
    - (a) na składniki parzyste,
    - (b) na składniki mniejsze od  $m$ ,
    - (c) na różne składniki nieparzyste,
    - (d) na różne potęgi dwójki.
  12. Niech  $p_n$  i  $r_n$  będą odpowiednio liczbami wszystkich podziałów  $n$  i podziałów  $n$  na różne składniki. Niech  $P(x)$  i  $R(x)$  będą ich funkcjami tworzącymi. Pokaż, że

$$P(x) = R(x)P(x^2).$$

13. Permutację nazywamy involucją gdy złożenie jej ze sobą jest identycznością. Niech  $a_n$  będzie liczbą involucji  $n$ -elementowych. Pokaż, że wykładniczą funkcję tworzącą ciągu  $a_n$  jest  $e^{x+x^2/2}$ .  
Wsk.: Pokaż najpierw, że  $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$
14. *Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju*  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  definiujemy jako liczbę permutacji  $n$ -elementowych, które rozkładają się na  $k$  cykli. Pokaż, że  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]$ . Posługując się tą zależnością rekurencyjną udowodnij, że

$$x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k.$$

15. Pokaż, że wykładnicza funkcja tworząca  $G_e(z)$  dowolnego ciągu jest powiązana ze zwykłą funkcją tworzącą  $G(z)$  za pomocą równania

$$\int_0^{\infty} G_e(zt) e^{-t} dt = G(z)$$

jeśli tylko całka ta istnieje.