



哈爾濱工業大學
Harbin Institute of Technology

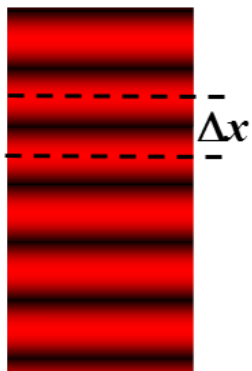
大学物理——光学

光栅衍射

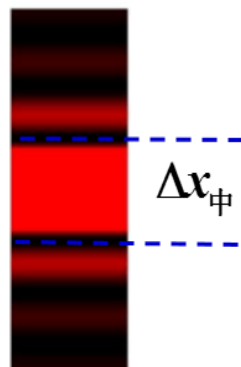
主讲教师：孟庆鑫



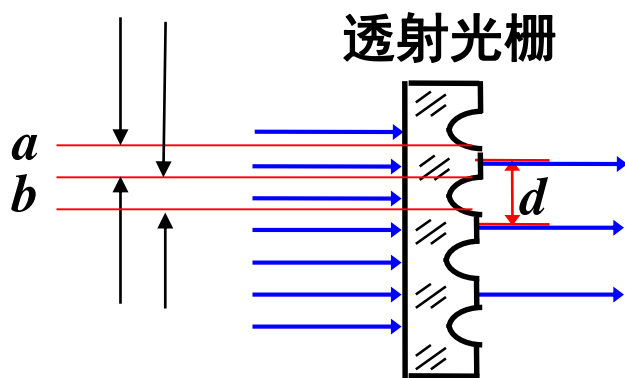
为了**提高波长的测量精度**，应让亮纹又窄又亮，
这个目标可以通过**光栅**衍射来实现。



$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$



$$\Delta x_{\text{中}} \approx \frac{2\lambda}{a} f_2$$



光栅常数： $d=a+b$

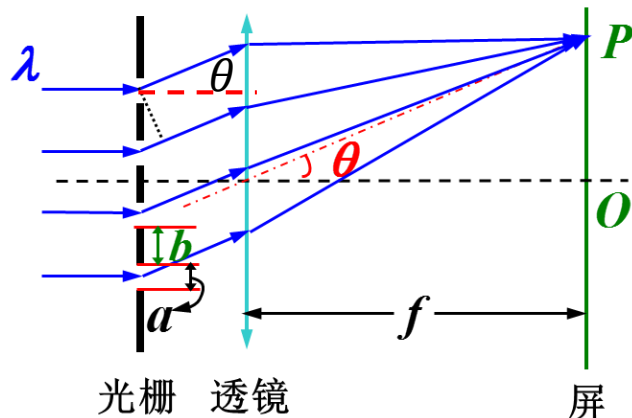
可见光光栅：

$$d \approx 10^{-5} \text{ m} \sim 10^{-7} \text{ m}$$

光栅缝的总数 N

光栅衍射是**多光束干涉**受**单缝衍射**调制的结果

狭缝极窄，只考虑 N 束光的干涉



由于光栅有周期性,只须考虑其中任意相邻两个缝到P点的光程差 $d \sin \theta$ 。

相位差: $\Delta \varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

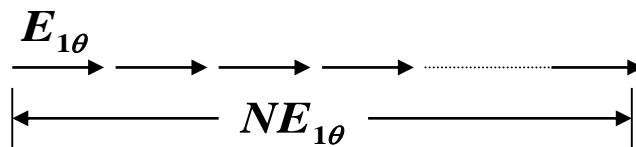
1. 主极大(亮纹)中心

$$d \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

正入射时的光栅方程

$$\Delta \varphi_p = \pm 2k \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

由振动合成可知:

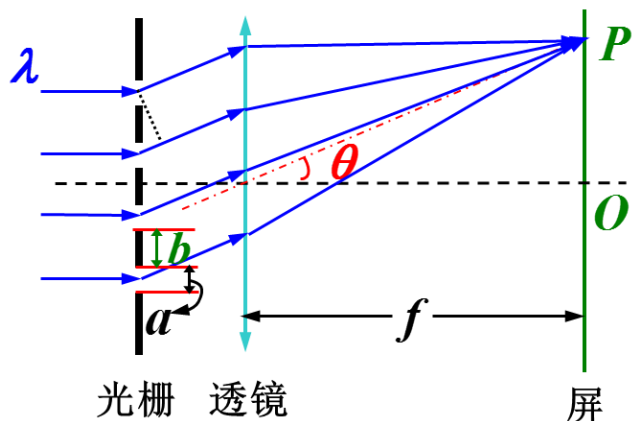


$I_\theta = N^2 I_{1\theta}$ P点光强是狭缝单独存在时光强的 N^2 倍。

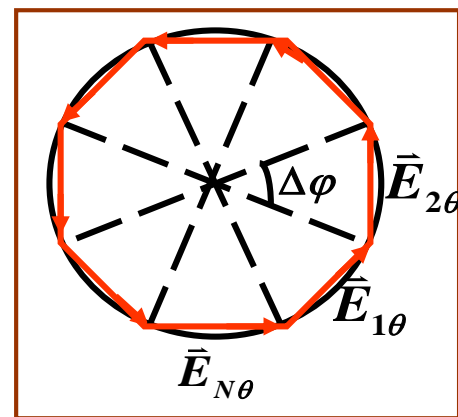
主极大中心位置只由 d 决定, 与 N 无关;

主极大中心位置处光强与 N^2 成正比。

2. 极小条件(暗纹)



$$\Delta\varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$



$$\vec{E} = 0$$

当 $N\Delta\varphi_p = 2k'\pi$ 时, $\vec{E}_\theta = \sum_i \vec{E}_{i\theta} = 0$, 光强 $I = E_\theta^2 = 0$, 出现暗纹。

即:

$$\Delta\varphi_p = \frac{\pm 2k'\pi}{N}$$

暗纹中心条件: $d \cdot \sin \theta = \frac{\pm k'}{N} \lambda$ $k' = 1, 2, 3, \dots \neq Nk$

(思考: 这里 k' 是否可以取任意整数?)

根据暗纹条件：

$$d \cdot \sin \theta = \frac{\pm k'}{N} \lambda \quad (k' \text{ 为不等于 } Nk \text{ 的整数})$$

主明纹级次 $k=0$

1

2

暗纹级次 $k' \neq 0, 1, 2, \dots, N-1, \neq N, N+1, N+2, \dots, 2N-1, \neq 2N, 2N+1, \dots$

在 k 级主极大后第一条暗纹是 $kN+1$ 级暗纹

在 $k+1$ 级主极大前最后一条暗纹是 $k(N+1)$ 级暗纹

相邻两个主极大之间有：

$$(k+1)N - 1 - (kN + 1) + 1 = N - 1 \text{ 条暗纹}$$

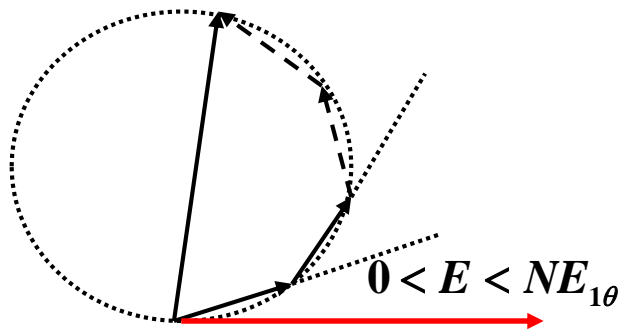
两个主极大之间的暗纹并不连续，那么，两条暗纹之间应该是什么呢？

3. 次极大

根据暗纹条件：
$$d \sin \theta = \frac{\pm k'}{N} \lambda$$

在每两个相邻极小之间， $\sin \theta$ 还可以有很多值。

$$\sin \theta \in \left(\frac{k'}{dN} \lambda, \frac{k'+1}{dN} \lambda \right)$$



在**两相邻极小之间**还有一些明纹。

次极大中心的位置可由光强的极值条件获得：

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[I_0 \left(\frac{\sin N \Delta \varphi_P}{\sin \Delta \varphi_P} \right)^2 \right] = 0 \quad \left(\text{其中: } \Delta \varphi_P = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \right)$$

次极大中心对应的光强最大值**不超过主极大的1/23**，
所以两主极大之间是宽大的弱暗背景。

在相邻两个主极大之间有 $N-1$ 个极小，有 $N-2$ 个次极大。

二、衍射对干涉图样的影响

根据双缝衍射理论，可知：

双缝干涉的光强要受到**单缝衍射**的**调制**。

双缝干涉的某个亮纹的光强 I 应是单缝衍射在该处光强的4倍。

将此结论推广至光栅

光栅衍射 = 多缝干涉 + 单缝衍射调制

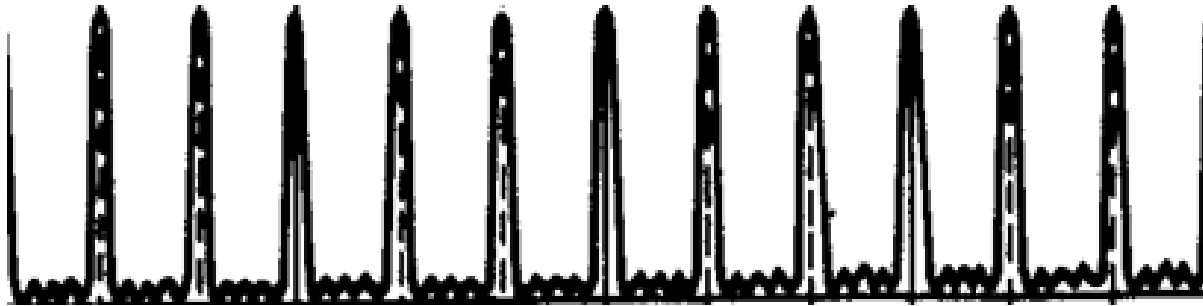
多缝干涉的某个亮纹强度 I 是单缝衍射在该处光强的 N^2 倍

多缝干涉光强分布（不考虑衍射）

干涉主极大：

$$d \sin \theta = \pm k \lambda$$

$$I = N^2 I_0$$



衍射影响：

干涉条纹主极大的位置虽没有变化，但强度受到衍射的调制而变化；出现了亮纹缺级现象。

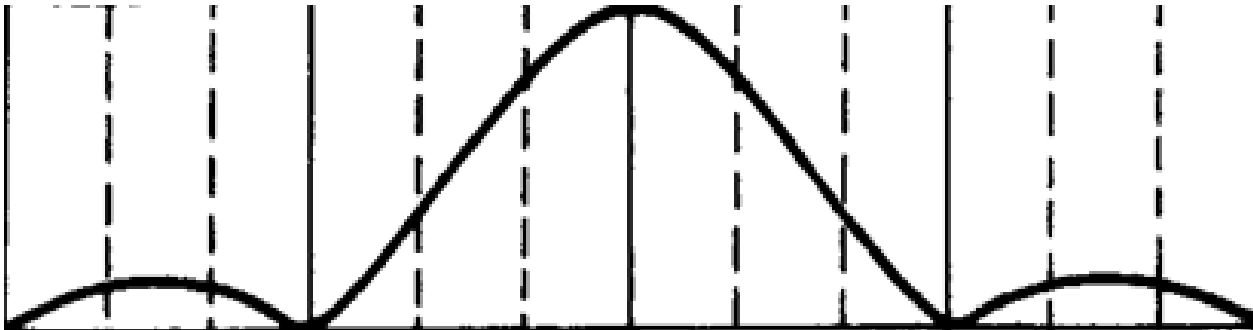
单缝衍射

衍射光强：

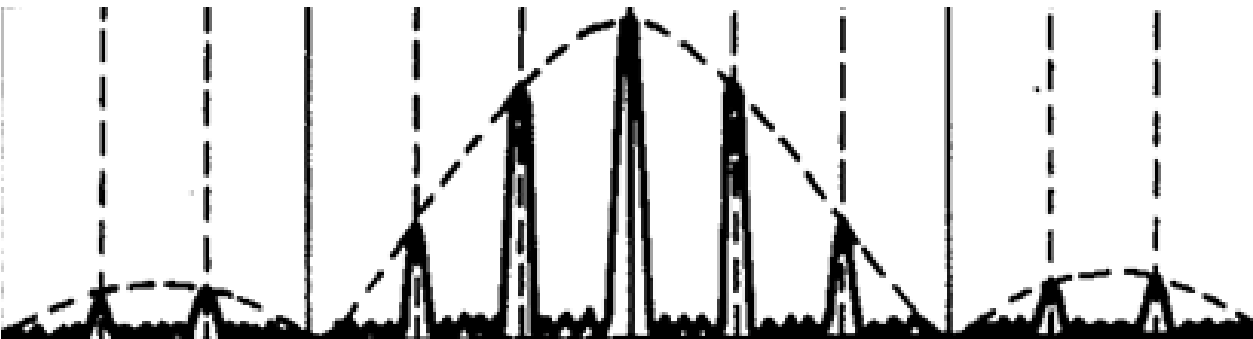
$$I_{\theta} = I_1 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta\right)^2}$$

暗纹中心：

$$a \sin \theta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$$



单缝衍射调制多缝干涉



$$I = N^2 I_{\theta}$$

缺级现象 缺级条件

单缝衍射调制多缝干涉

$$I = N^2 I_{\theta}$$



多缝干涉主极大中心: $d \sin \theta = k \lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$

单缝衍射暗纹中心: $a \sin \theta = k' \lambda \quad (k' = \pm 1, \pm 2 \dots)$

若同时满足, 则第 k 级主极大消失。

——缺级现象

即: 当 $\frac{d}{a} = \frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'}$ (为整数比) 缺级: $k = \frac{d}{a} \cdot k' \quad (k' = \pm 1, \pm 2 \dots)$

思考

平行光斜入射光栅时，衍射条纹将如何变化？

平行光斜入射光栅

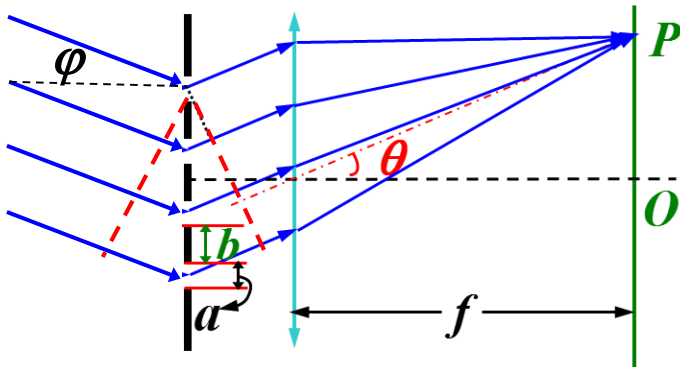
斜入射光栅方程：

$$d(\sin \theta + \sin \varphi) = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

斜入射单缝衍射零级主极大位置：

$$a(\sin \theta + \sin \varphi) = 0$$

中央亮纹下移，但强度无变化



与垂直入射相比，平行光斜入射时条纹**整体下(上)移**，
但条纹整体的**强度和形状不变**。

本节小结

本节研究了光栅衍射的条纹及光强分布特点。

1. 主极大(亮纹)

$$d \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

正入射时的 **光栅方程**

2. 极小条件(暗纹)

$$d \cdot \sin \theta = \frac{\pm k'}{N} \lambda \quad k' = 1, 2, 3, \dots \neq N k$$

3. 次极大

在相邻两个主极大之间有 $N-1$ 个极小，有 $N-2$ 个次极大。

4. 缺级

$$k = \frac{d}{a} \cdot k' \quad (k' = \pm 1, \pm 2, \dots)$$



哈爾濱工業大學
Harbin Institute of Technology

谢谢

