7-2,3

(2) 向量的坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 则

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

3. 向量关系

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \rightleftarrows \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \rightleftarrows a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

4、数量积在几何中的应用

(1) 求 **a** 在 **b** 上的投影.

$$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(2) 求两向量 **a**, **b** 的夹角

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

一、重要知识点

1、平面及其方程

已知平面Π 过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且有法向量$n=(A,B, C)$.

(1)平面基本方程

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y- y_0)+C(z- z_0)=0$

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \ (abc \neq 0)$

(2)平面与平面之间的关系

垂直: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

平行: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

2、空间直线及方程

已知直线L过定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,且有方向向量 $s=(m, n, p)$

(1)空间直线基本方程

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ $(m^2+n^2+p^2\neq 0)$

(2) 线与线的关系

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

3、 面与线间的关系

$$L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$L // \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

4、点$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面Π： $Ax+By+Cz+D=0$, 的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. 设平面过点(1,2,-1)，而在x轴和z轴上的截距都等于在y轴上的截距的两倍，求此平面方程.

解： 设平面在y轴上的截距为b

则平面方程可定为

$$\frac{x}{2b}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2b}=1$$

又(1,2,-1)在平面上，则有

$$\frac{1}{2b}+\frac{2}{b}+\frac{-1}{2b}=1$$ 解得$b=2$.

故所求平面方程为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$$

4. 求过(1,1,-1),(-2,-2,2)和(1,-1,2)三点的平面方程.

解： 由平面的三点式方程知

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

代入三已知点，有

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$$

化简得x-3y-2z=0 即为所求平面方程.

6. 通过两点(1,1,1)和(2,2,2)作垂直于平面$x+y-z=0$的平面.

解: 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

则其法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$

已知平面法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{1,1,-1\}$

过已知两点的向量$\boldsymbol{l}=\{1,1,1\}$

由题知$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}=0$

即 $\begin{cases} A+B-C=0 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow C=0,\ A=-B.$

所求平面方程变为$Ax-Ay+D=0$

又点（1，1，1）在平面上，所以有$D=0$

故平面方程为 $x-y=0.$

上一页 下一页 返 回

8. 求直线$\begin{cases} 2x+3x-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$的标准式方程和参数式方程.

解：所给直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-19\boldsymbol{k}$$

另取x_0=0代入直线一般方程可解得y_0=7,z_0=17

于是直线过点(0，7，17),因此直线的标准方程为:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-7}{-7}=\frac{z-17}{-19}$$

且直线的参数方程为：$\begin{cases} x=t \\ y=7-7t \\ z=17-19t \end{cases}$

上一页 下一页 返 回

14. 求下列直线与平面的交点：

$$(1)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6},\ 2x+3y+z-1=0$$

解(1)： 直线参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=6t \end{cases}$

代入平面方程得t=1

故交点为（2，-3，6）．

7-4

一、重要知识点

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x,y,z)=0$

- **球面:** 如,$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- **柱面:** 如,曲面$F(x,y)=0$,表示母线平行 z 轴的柱面.
- **旋转曲面:** 如, 曲线$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ , z)=0$$

2. 二次曲面 $\longrightarrow$ 三元二次方程, 截痕法.

- **椭球面:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- **双曲面:** 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

• **抛物面:** 椭圆抛物面 双曲抛物面

$(p, q$ 同号$)$

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \qquad -\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

3. 空间曲线方程 .

一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

空间曲线在坐标面上的投影 .

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

在 xoy 面上 在 yoz 面上 在 xoz 面上

8-2

一、重要知识点

1. 求多元函数极限的方法：（注意趋近方式的任意性）

一元函数求极限的方法适用多元函数

2、确定极限不存在的方法：

(1)令$P(x,y)$沿$y=y_0+k(x-x_0)$趋向于$P_0(x_0,y_0)$,若极限值与k有关，则可断言极限不存在.

(2)找两种不同趋近方式，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，但两者不相等，此时也可断言$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在。

3. 多元函数的连续性

(1) 函数$f(P)$在P_0连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$

(2) 闭域上的多元连续函数的性质:

最大值和最小值定理，介值定理

(3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

在定义区域内的连续点求极限可用“代入法”.

二、习题解答8—2

1.求下列各极限：

$$(1)\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

多元连续函数的复合函数也是连续函数。

解：(1) $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2.$

$$(2)\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}(1+\frac{1}{x^2+y^2})^{2(x^2+y^2)}$$

两个重要极限!

解：(2) $\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}(1+\frac{1}{x^2+y^2})^{2(x^2+y^2)}=\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}[(1+\frac{1}{x^2+y^2})^{(x^2+y^2)}]^2=e^2$

$$(3)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

解：(3) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{4-xy-4}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=-\frac{1}{4}.$

$$(4)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$

解：(4) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy+1-1}=2.$$

$$(5)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x}$$

无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量。（对的吗？？？？？）

解：(5) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\times 0=0.$$

$$(6)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}$$

$Sin(x)\sim x$

解：(6) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2\sin^2(\frac{x^2+y^2}{2})}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{2e^{(x^2+y^2)}}=0$$

上一页 下一页 返回

$$f_1(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}\neq\frac{\sin(xy)}{xy}y=f_2(x,y)$$

$$D(f_1(x,y))=\{(x,y)\mid x\neq 0\}$$

$$D(f_2(x,y))=\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$$

考虑等价无穷小量:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{1}=0$$

$$(3)z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

解：(3) **若$P(x,y)$ 沿直线$y=x$趋于(0，0)点，则**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} z=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2+0}=1$$

若点$P(x,y)$ 沿直线$y=-x$趋于(0，0)点，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x\to 0}} z=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(-x)^2}{x^2\cdot(-x)^2+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$ 不存在.

故函数z在O(0，0)处不连续.

上一页 下一页 返 回

8-4

一、重要知识点

1.多元函数的全微分

如果函数在点$P(x,y)$的**全增量**可表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + 0(\rho)$ $(\rho \to 0)$ 其中A,B与$\Delta x,\Delta y$无关，

则称函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微，

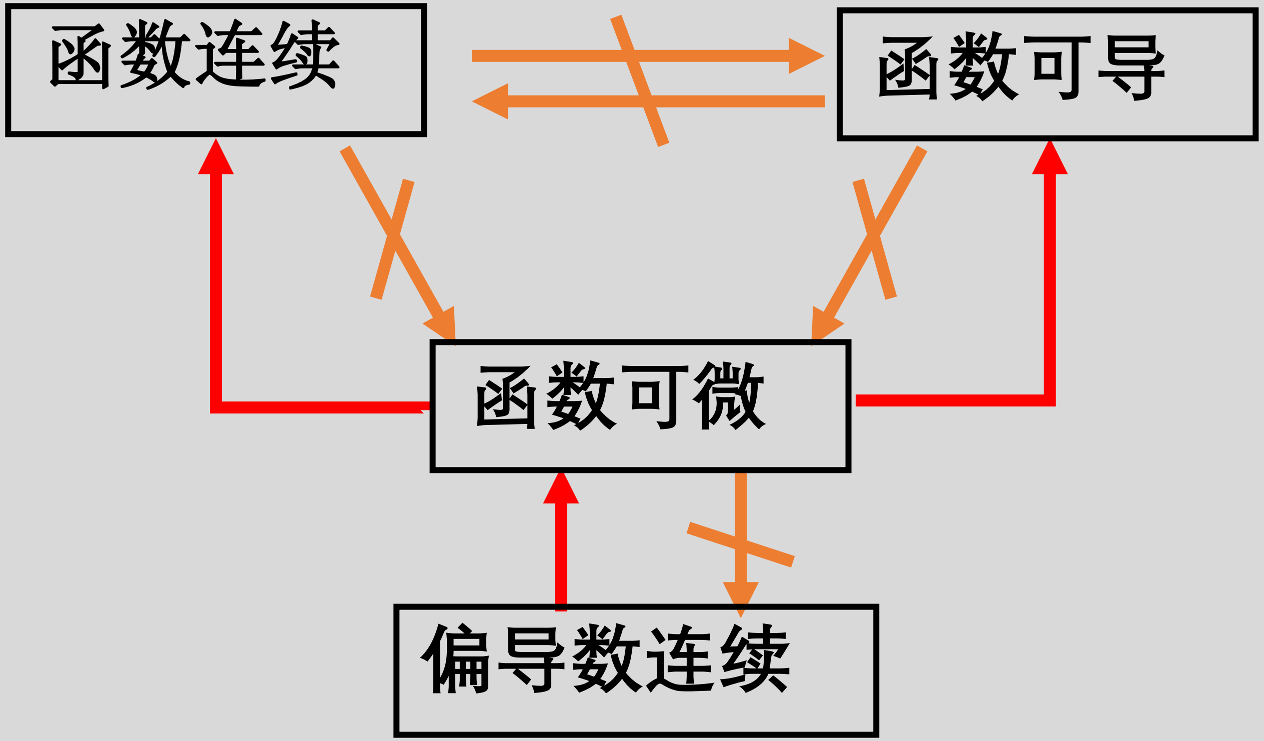
2.多元函数全微分的求法：

$$且\ dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

若 $u = f(x, y, z)$可微, 则

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

3.多元函数连续、偏导数存在、可微分的关系.



$$(3)u = xy^{z}$$

解(3)$\because \dfrac{\partial u}{\partial x} = y^{z}x^{y^{z}-1},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^{z}} \cdot \ln x \cdot zy^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \ln x \cdot x^{y^{2}} \cdot \ln y \cdot y^{z}$$

$$\therefore \mathrm{d}u = y^{2}x^{y^{z}-1}\mathrm{d}x + x^{y^{z}} \ln x \cdot zy^{z-1}\mathrm{d}y + \ln x \cdot x^{y^{z}} \cdot \ln y \cdot y^{z}\mathrm{d}z.$$

8-5

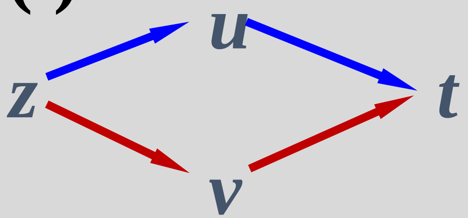
一、重要知识点

1、 复合函数的求导法则

(1) 复合函数只有一个自变量的情形的求导法则

如果函数$z=f(u,v),u=\varphi(t),v=\psi(t)$

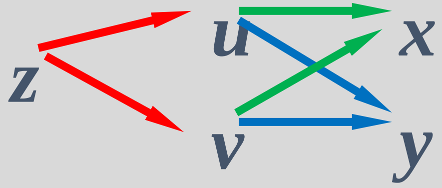
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt},$$



(2)复合函数有两个自变量的情形的求导法则

如果函数$z=f(u,v),\ u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y),$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

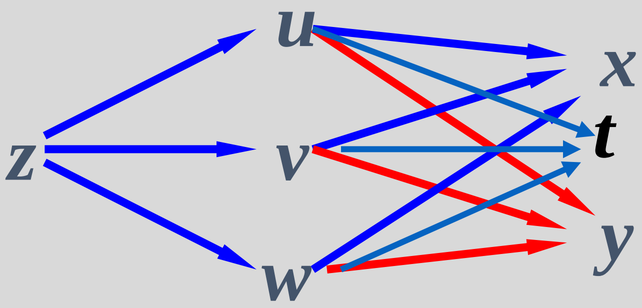


(3)复合函数有3个自变量的情形的求导法则

如果函数$z=f(u,v,w)$, $u=u(x,y,t)$, $v=v(x,y,t)$,
$w=w(x,y,t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

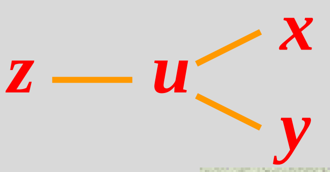
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}$$



(4)复合函数有1个中间变量，两个自变量的求导法则

如果函数$z=f(u)$, $u=u(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$



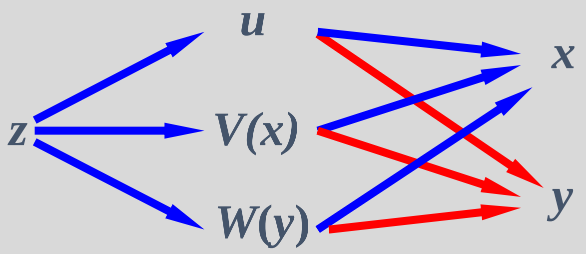
型

上一页 下一页 返回

(5)复合函数的中间变量既有一元函数又有多元函数

如果函数$z = f(u, x, y)$,其中$u = \varphi(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$



2、多元复合函数的高阶导数的求导法则

注意：多元抽象复合函数求导时，常用导数符号.

3、全微分形式不变性

如果函数$z=f(u,v)$,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

当$z=f(u,v),u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$时

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

无论z 是自变量u、v 的函数或中间变量u、v的函数，它的全微分形式是一样的.

二、习题解答8—5

1.求下列复合函数的偏导数或全导数:

(1) $z = x^2 y - xy^2,\quad x = u\cos v,\quad y = u\sin v$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

解(1) $$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= (2xy - y^2)\cdot\cos v + (x^2 - 2xy)\sin v$$

$$= 3u^2 \sin v\cos v(\cos v - \sin v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= -(2xy - y^2)\cdot u\sin v + (x^2 - 2xy)\cdot u\cos v$$

$$= -2u^3 \sin v\cos v(\sin v + \cos v) + u^3(\sin^3 v + \cos^3 v).$$

$$(3) z=f(\sin x, \cos y, \mathrm{e}^{x+y})$$

解(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1' \cdot \cos x+f_3' \cdot \mathrm{e}^{x+y}$$

$$=\cos x f_1'+\mathrm{e}^{x+y} f_3',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x f_1'+\cos x\left(f_{11}'' \cdot \cos x+f_{13}'' \cdot \mathrm{e}^{x+y}\right)$$

$$+\mathrm{e}^{x+y} f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{31}'' \cos x+f_{33}'' \cdot \mathrm{e}^{x+y}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{x+y} f_3'-\sin x f_1'+\cos^2 x f_{11}''+2\mathrm{e}^{x+y} \cos x f_{13}''+\mathrm{e}^{2(x+y)} f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\cos x\left[f_{12}'' \cdot(-\sin y)+f_{13}'' \cdot \mathrm{e}^{x+y}\right]$$

$$+\mathrm{e}^{x+y} f_3'+\mathrm{e}^{x+y} \cdot\left[f_{32}'' \cdot(-\sin y)+f_{33}'' \cdot \mathrm{e}^{x+y}\right]$$

$$=\mathrm{e}^{x+y} f_3'-\cos x \sin y f_{12}''+\mathrm{e}^{x+y} \cos x f_{13}''-\mathrm{e}^{x+y} \sin y f_{32}''+\mathrm{e}^{2(x+y)} f_{33}'',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'(-\sin y)+f_3'e^{x+y}$$

$$=-\sin y f_2'+e^{x+y}f_3',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y f_2'-\sin y\left[f_{22}''(-\sin y)+f_{23}''\cdot e^{x+y}\right]$$

$$+e^{x+y}f_3'+e^{x+y}\left[f_{32}''(-\sin y)+f_{33}''\cdot e^{x+y}\right]$$

$$=e^{x+y}f_3'-\cos y f_2'+\sin^2 y f_{22}''-2e^{x+y}\sin y f_{23}''+e^{2(x+y)}f_{33}''.$$

8-6

一、重要知识点

隐函数求导方法

(1). 利用复合函数求导法则直接计算；

(2). 利用微分形式不变性；

(3). 代公式

1)、一个方程的求导公式

方程 $F(x, y) = 0$ 确定了函数 $y = y(x)$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

2). 二元隐函数的求导公式

方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

二、习题解答8—6

1.求下列隐函数的导数或偏导数：

$$(1)\ \sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0,\ \text{求}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

解(1) 用隐函数求导公式，

设$F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$,

则 $F_x=\mathrm{e}^x-y^2,\qquad F_y=\cos y-2xy,$

故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{\mathrm{e}^x-y^2}{\cos y-2xy}$

$$=\frac{y^2-\mathrm{e}^x}{\cos y-2xy}$$

3. 设 $F\left(y+\frac{1}{x}, z+\frac{1}{y}\right)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，其中 F 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

解：

$$F_x = F_1' \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + F_2' \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} F_1'$$

$$F_y = F_1' \cdot 1 + F_2' \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$F_z = F_1' \cdot 0 + F_2' \cdot 1 = F_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{x^2} F_1'}{F_2'} = \frac{F_1'}{x^2 F_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_1' - \frac{1}{y^2} F_2'}{F_2'} = \frac{F_2' - y^2 F_1'}{y^2 F_2'}$$

$$(4)\ z^3\text{-}3xyz=a^3,\text{求}\ \frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

解(4) 设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$

$$F_x=-3yz,\quad F_y=-3xz,\quad F_z=3z^2-3xy,$$

则 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{z^2-xy}\right)=\frac{\left(z^2-xy\right)x\frac{\partial z}{\partial y}-xz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{\left(z^2-xy\right)^2}$$

$$=\frac{\left(z^2-xy\right)x\frac{xz}{z^2-xy}-xz\left(2z\cdot\frac{xz}{z^2-xy}-x\right)}{\left(z^2-xy\right)^2}=\frac{2x^3yz}{(xy-z^2)^3}$$

(4) $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

解(4) $u = u(x, y), v = v(x, y)$ **是已知函数的反函数，**

方程组两边对x求导，得

$$\begin{cases} 1 = e^u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v + u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = e^u \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v - u(-\sin v)\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} (e^u + \sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ (e^u - \cos v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$ $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$

方程组两边对y求导得

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{e}^{u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin v + u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = \mathrm{e}^{u}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v + u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

整理得
$$\begin{cases} (\mathrm{e}^{u} + \sin v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ (\mathrm{e}^{u} - \cos v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{\mathrm{e}^{u}(\sin v - \cos v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin v + e^{u}}{u[\mathrm{e}^{u}(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

9-1

一、重要知识点

空间曲线的切线与法平面方程

1、 曲线 Γ 的参数方称 Γ: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$

曲线在M_0处的切线方程 $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)},$

曲线在M_0处的法平面方程

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

二、习题解答9—1

1. 求下列曲线在给定点的切线和法平面方程：

(1) $x=a\sin^2 t,\ y=b\sin t\cos t,\ z=c\cos^2 t$，点 $t=\dfrac{\pi}{4}$

解： $x'=2a\sin t\cos t,\ y'=b\cos 2t,\ z'=-2c\cos t\sin t$

曲线在点 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的切向量为

$$T=\left\{x'\left(\frac{\pi}{4}\right),y'\left(\frac{\pi}{4}\right),z'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\{a,0,-c\}$$

当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$x=\dfrac{a}{2},y=\dfrac{b}{2},z=\dfrac{c}{2}$

切线方程为 $\dfrac{x-\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{y-\frac{b}{2}}{0}=\dfrac{z-\frac{c}{2}}{-c}$

法平面方程为 $a\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+0\left(y-\dfrac{b}{2}\right)+(-c)\left(z-\dfrac{c}{2}\right)=0.$

即 $ax-cz-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{c^2}{2}=0$

(2)$x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$，点$M_0(1, -2, 1)$

解：(2)联立方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

它确定了函数$y=y(x), z=z(x)$,方程组两边对x求导,得

$$\begin{cases} 2x+2y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z}$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$,

在点M_0 (1,-2,1) 处, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{M_0}=0$, $\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{M_0}=-1$

所以切向量为{1，0，-1}.

故切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程为 $1(x-1)+0(y+2)-1(z-1)=0$ 即 $x-z=0$.

3.在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点*M*使曲线在点*M*处的切线与平面*x*+2*y*+*z*=4平行.

解: 曲线的切向量 $\vec{T}=\{1, 2t, 3t^2\}$.

由题意知, $\vec{T} \perp \{1,2,1\}$.

于是有 $1+4t+3t^2=0$

解方程得 $t=-1$,或 $t=-\dfrac{1}{3}$.

从而解得点*M*为(-1,1,-1)或 $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}\right)$

9-2

一、重要知识点

空间曲面的切平面与法线方程

(1)空间曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

曲面Σ在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程为

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0$$

曲面Σ在点 M_0 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

(2) 空间曲面方程为 $z=f(x,y)$

则曲面在点 M_0处的切平面方程为

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

即 $z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0).$

曲面Σ 在点 M_0 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

9-4

一、重要知识点

1、求函数 f（x，y）无约束极值的方法：

(1) 先求偏导数 $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$；

(2) 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$ 求出驻点；

(3) 确定驻点处 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$,

$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ 的值及$\Delta=AC-B^2$的符号，

1)当$AC-B^2>0$ 时,具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2)当$AC-B^2<0$时,没有极值.

3)当$AC-B^2=0$ 时,可能有极值,也可能没有极值.

据此判断出极值点，并求出极值.

二、习题解答9—4

1、研究下列函数的极值：

(1) $z = x^3+y^3-3(x^2+y^2)$;

解(1) 解方程组 $\begin{cases} z_x = 3x^2-6x=0 \\ z_y = 3y^2-6y=0 \end{cases}$

得驻点为（0,0）,(0,2),(2,0),(2,2).

$z_{xx}=6x-6$, $z_{xy}=0$, $z_{yy}=6y-6$

在点 (0,0) 处, $A=-6$，$B=0$，$C=-6$，

$AC-B^2=36>0$，且$A<0$,

所以函数有极大值$z(0,0)=0$.

在点(0,2) 处, $A=-6$，$B=0$，$C=6$，

$AC-B^2=-36<0$

所以(0,2)点不是极值点.

上一页 下一页 返 回

2. 求函数 $f(x, y)$最大值、最小值的方法

将函数在 D 内的所有驻点处的函数值及在D的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

3. 最小二乘法（不考）

4、条件极值的求法:

在条件$\varphi(x,y)=0$ 下，求函数$z=f(x,y)$的极值

先构造函数$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$(其中λ为某一常数)

可由 $$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$ 解出x,y,λ,

其中x,y就是可能的极值点的坐标.

上一页 下一页 返 回

在点(2,0)处，$A=6$，$B=0$，$C=-6$，

$AC-B^2=-36<0$，

所以(2,0)点不是极值点.

在点(2,2)处，$A=6$，$B=0$，$C=6$，

$AC-B^2=36>0$，且$A>0$,

所以函数有极小值$z(2,2)=-8$.

(4) $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

解(4)解方程组 $\begin{cases} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0 \\ 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0 \end{cases}$

得驻点$P_0(0,0)$,及$P(x_0,y_0)$,其中$x_0^2+y_0^2=1$,

在点P_0处有$z=0$，而当（x,y）$\neq(0,0)$时，恒有$z>0$,

故函数z在点P_0处取得极小值$z=0$.

4. $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Step 1. $\begin{cases} z_x = 2x \cdot e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) \\ \quad = 0 \\ z_y = 2y e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2) e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) \\ \quad = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)} [2x + (-2x)(x^2+y^2) = 0. \\ e^{-(x^2+y^2)} [2y + (-2y)(x^2+y^2) = 0. \end{cases}$

令 $u = x^2+y^2$, $e^{-u} > 0$.

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2x(x^2+y^2) = 0 \\ 2y - 2y(x^2+y^2) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 0 \\ 或 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$.

Step 2.

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$ 或 $x^2+y^2 = 1$.

$\Rightarrow$ 若 $x^2+y^2=1$, $z = \frac{1}{e}$; 若 $(x,y)=0$. $z=0$ 极小值.

再讨论函数$z=ue^{-u}$

由 $\dfrac{dz}{du}=e^{-u}(1-u)$,令 $\dfrac{dz}{du}=0$ 得$u=1$,

当$u>1$时,$\dfrac{dz}{du}<0$

当$u<1$时,$\dfrac{dz}{du}>0$

由此可知，在满足$x_0^2+y_0^2=1$的点（x_0,y_0）的邻域内，

不论是$x^2+y^2>1$或$x^2+y^2<1$,均有

$$z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\le e^{-1}$$

故函数z在点（x_0,y_0）取得极大值$z=e^{-1}$

上一页 下一页 返 回

2、设$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$,确定函数$z=z(x,y)$,研究其极值.

解：由已知方程分别对x,y求导，解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{-4x-8z}{2z+8x-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{-4y}{2z+8x-1}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ 解得 $y=0,z=-\frac{x}{2}$

将它们代入原方程，解得 $x=-2,x=\frac{16}{7}$

从而得驻点$(-2,0),\left(\frac{16}{7},0\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2z+8x-1)\left(-4-8\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(4x+8z)\left(2\frac{\partial z}{\partial x}+8\right)}{(2z+8x-1)^2}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{4y\left(2\frac{\partial z}{\partial x}+8\right)}{(2z+8x+1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-4(2z+8x-1)-8\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(2z+8x-1)^2}.$$

在点(-2,1)处， $z=1, A=\dfrac{4}{15}, B=0, C=\dfrac{4}{15},$

B^2-AC<0,因此函数有极小值z=1.

在点$\left(\dfrac{16}{7},0\right)$**处，** $z=-\dfrac{8}{7}, A=-\dfrac{28}{105}, B=0, C=-\dfrac{28}{105},$

B^2-AC<0，函数有极大值 $z=-\dfrac{8}{7}$

5抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y-z=1$截成一椭圆，求原点到这一椭圆的最长与最短距离.

解：设椭圆上的点为P（x,y,z），则

$$|OP|^2=x^2+y^2+z^2.$$

因P点在抛物面及平面上，所以约束条件为

$$z=x^2+y^2,\quad x+y+z=1$$

设F（x,y,z）$= x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1)$

解方程组
$$\begin{cases} F_x = 2x-2\lambda_1 x+\lambda_2 = 0 \\ F_y = 2y-2\lambda_1 y+\lambda_2 = 0 \\ F_z = 2z+\lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ z = x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

得
$$x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\quad z=2\mp\sqrt{3}$$

上一页 下一页 返回

由题意知，距离$|OP|$有最大值和最小值，且

$$|OP|^2=x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)+\left(2\mp\sqrt{3}\right)^2=9\mp5\sqrt{3}$$

所以原点到椭圆的最长距离是$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$

最短距离是 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$

6.在第I卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小,求切点坐标.

解：令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

$\because F_x=\frac{2x}{a^2}, F_y=\frac{2y}{b^2}, F_z=\frac{2z}{c^2},$

$\therefore$椭球面上任一点$P_0(x_0, y_0, z_0)$的切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

即 $$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$

因此切平面与三个坐标面所围的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}\cdot\frac{c^2}{z_0}=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$$

即求$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6xyz}$在约束条件$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$下的最小值，

也即求xyz的最大值问题。

设 $$\Phi(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

解方程组
$$\begin{cases}\Phi_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ \Phi_y=xz+\dfrac{2\lambda x}{b^2}=0,\\ \Phi_z=xy+\dfrac{2\lambda x}{c^2}=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

得 $$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

故切点为$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$此时最小体积为 $V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{c}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc.$

10-1

3、二重积分的计算方法（将二重积分转化为二次积分）

(1). 在直角坐标下

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \quad [\text{X}-\text{型}]$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx. \quad [\text{Y}-\text{型}]$$

（在积分中要正确选择积分次序）

(2). 在极坐标下

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$\begin{cases} = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. & \text{(极点}O\text{在区域}D\text{外部)} \\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. & \text{(极点}O\text{在区域}D\text{内部)} \\ = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. & \text{(极点}O\text{在区域}D\text{的边界上)} \end{cases}$$

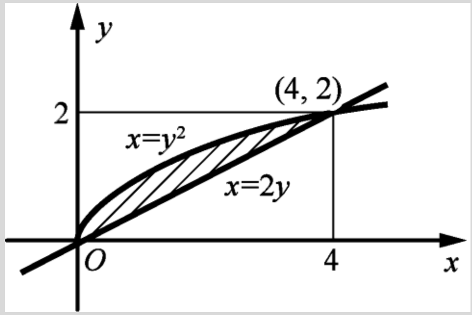
（在积分中注意使用对称性）

6.画出积分区域，改变累次积分的次序：

$$(1)\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$$

解(1) 相应二重保健的积分区域为***D***：$0\le y\le 2,\quad y^2\le x\le 2y.$

如图所示.



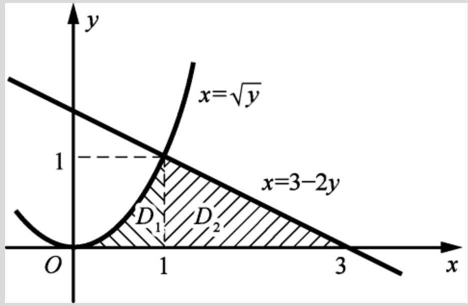
D亦可表示为：$0\le x\le 4,\quad \frac{x}{2}\le y\le \sqrt{x}.$

所以 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

$$(3)\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

解(3) 相应二重积分的积分区域D为：$0\le y\le 1,\quad \sqrt{y}\le x\le 3-2y,$

如图所示.



D亦可看成D_1与D_2的和，其中

$D_1: 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le x^2,$

$D_2: 1\le x\le 3,\quad 0\le y\le \dfrac{1}{2}(3-x).$

所以 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x$

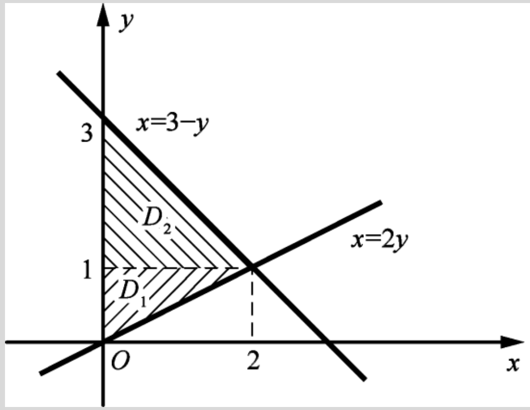
$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$(5)\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

解(5) 相应二重积分的积分区域D由D_1与D_2两部分组成，其中

$D_1: 0\le y\le 1,\quad 0\le x\le 2y,$

$D_2: 1\le y\le 3,\quad 0\le x\le 3-y.$



如图所示.

D亦可表示为：$0\le x\le 2,\quad \dfrac{x}{2}\le y\le 3-x;$

所以 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x$

$=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

上一页 下一页 返回

7.设$f(x,y)$连续,且 $f(x,y)=xy+\iint f(x,y)d\sigma$, 其中$D$是由直线$x=0, x=1$及曲线$y=x^2$所围成的区域，求$f(x,y)$. f在D上可积

解:因为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 为一常数,不妨设 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = C$

则有$f(x,y)=xy+C$

从而有$f(x,y)=xy+\iint\limits_D (uv+C)\,dudv$

而 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1.0\le y\le x^2\}$

$$\therefore f(x,y)=xy+\int_0^1\left[\int_0^{u^2}(uv+C)dv\right]du \qquad = xy+\int_0^1\left[\frac{1}{2}uv^2+Cv\right]_0^{u^2}du$$

$$=xy+\int_0^1\left[\frac{1}{2}u^5+Cu^2\right]du$$

$$=xy+\left[\frac{1}{12}u^6+\frac{1}{3}Cu^3\right]_0^1 \qquad =xy+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}C$$

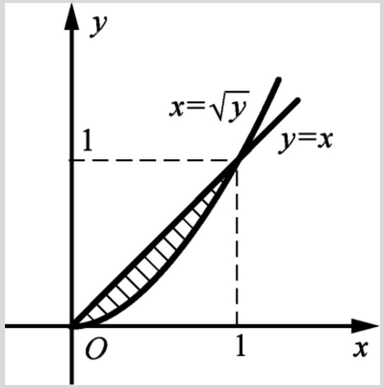
故$\therefore C=\frac{1}{8}$ $\therefore f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$

9.计算下列二次积分：

$$(1)\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

解(1) 因为 $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 求不出来，故应改变积分次序。

积分区域 D：$0\le y\le 1,\ y\le x\le\sqrt{y}$ 如图所示。



D 也可表示为：$0\le x\le 1, x^2\le y\le x$.

所以 $$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)\,\mathrm{d}x\quad=\int_0^1(\sin x-x\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x+[x\cos x]_0^1-\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x$$

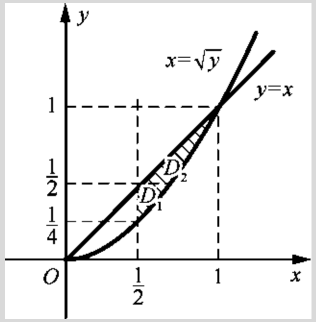
$$=\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\sin 1.$$

$$(2)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x$$

解(2)因为 $\int \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x$ 求不出来，故应改变积分次序。

积分区域*D*分为两部分，其中



$D_1:\frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2},\frac{1}{2}\le x\le\sqrt{y},\ D_2:\frac{1}{2}\le y\le 1, y\le x\le\sqrt{y}.$

如图所示：

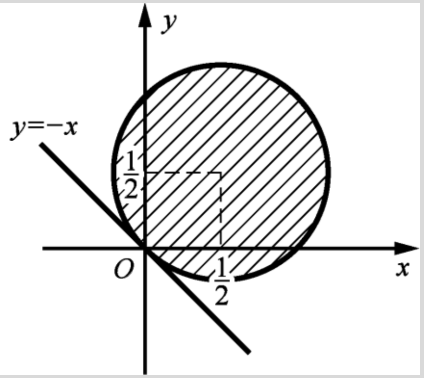
积分区域*D*亦可表示为：$\frac{1}{2}\le x\le 1,\quad x^2\le y\le x.$

于是：$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x \quad =\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}\,\mathrm{d}x \quad =\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\mathrm{e}x-x\mathrm{e}^{x})\,\mathrm{d}x \quad =\frac{\mathrm{e}}{2}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-[x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3\mathrm{e}}{8}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$$

(4) $\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, **$D$是由曲线$x^2+y^2=x+y$所包围的闭区域.**

积分区域D如图所示：



解(4) D亦可采用极坐标表示为：

$$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}, \qquad 0 \le r \le \cos\theta + \sin\theta$$

所以 $\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r^2(\cos\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

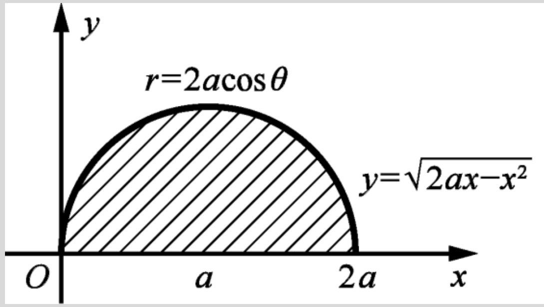
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{r^3}{3}(\cos\theta + \sin\theta)\Big|_0^{\cos\theta+\sin\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta)^4 \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta \quad = \frac{\pi}{2}$$

11. 将下列积分化为极坐标形式，并计算积分值：

(1) $\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}y$，



解(1)积分区域D如图所示.

D亦可用极坐标表示为：

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le r \le 2a\cos\theta$$

所以 $\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2a\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= 4a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi a^4.$$

10-3

一、重要知识点

1、三重积分的概念

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

2、三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 的计算方法

(1).利用直角坐标计算三重积分.

（将三重积分化为三次积分）

1) Ω向xoy面上投影，得到D.

2)D向x轴上投影，得到 $D:\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x). \end{cases}$

3)过点$(x,y) \in D$作平行于z轴直线，得到

$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y).$$

$$\Omega:\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y). \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

还可以用先求二重积分再求定积分的方法计算.

上一页 下一页 返回

(2)、 三重积分的换元法

对于三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 作变量替换：$\begin{cases} x = x(r,s,t) \\ y = y(r,s,t) \\ z = z(r,s,t) \end{cases}$

$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} \neq 0,\ dv = \left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}\right| drdsdt$ 得换元公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega^*} f\left[x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t)\right] \cdot \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}\right| d\ rdsdt$$

1). 柱面坐标变换

作变量替换：$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

柱面坐标的体积元素 $dv = dxdydz = rdrd\theta dz$

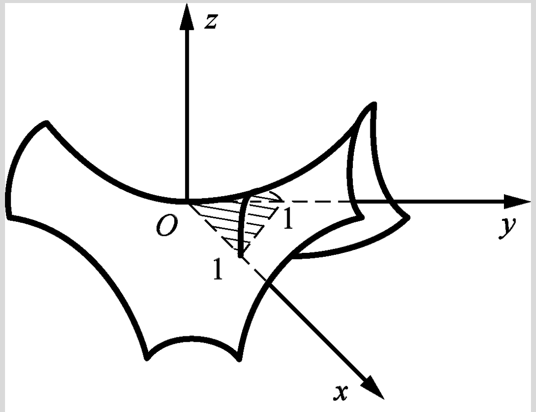
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta\ dz$$

二、习题解答10—3

1.化三重积分$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为三次积分，其中积分区域Ω分别是.

(1) 由双曲抛物面*xy*=*z*及平面*x*+*y*-1=0,*z*=0所围成闭区域；

解(1) 积分区域Ω如图所示，



$$\Omega\text{可表示为:}\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le xy\end{cases}$$

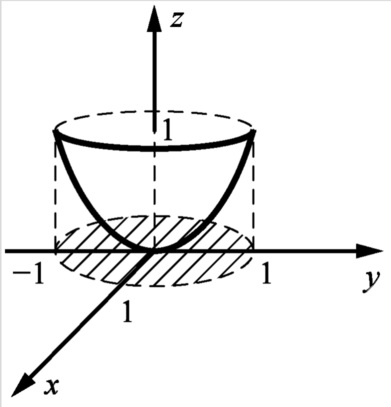
故 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

上一页 下一页 返回

(2) 由曲面$z=x^2+y^2$及平面$z=1$所围成的闭区域;

解(2) 积分区域Ω如图所示。



$$\Omega\text{可表示为:}\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ x^2+y^2\le z\le 1\end{cases}$$

$$\text{故 } I=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

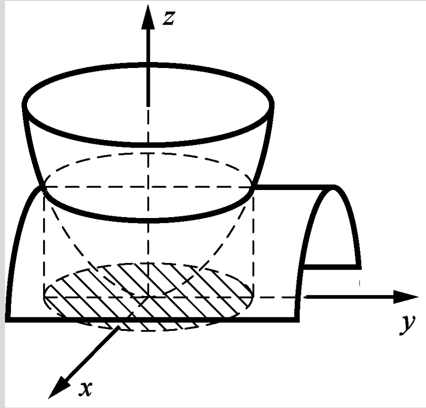
(3) 由曲面$z=x^2+2y^2$及$z=2-x^2$所围成的闭区域；

解(3) 由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$ 消去z得 $x^2 + 2y^2 = 2 - x^2$

即 $x^2 + y^2 = 1$

所以Ω在xOy面的投影区域为$x^2+y^2\le 1$，如图所示。

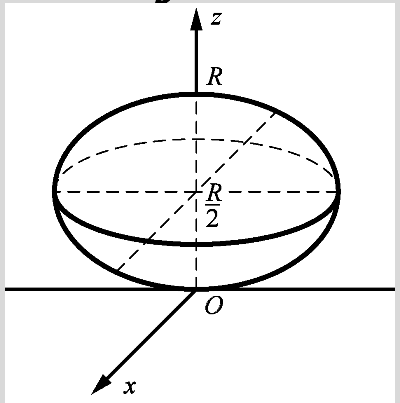
Ω可表示为：$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ x^2 + 2y^2 \le z \le 2 - x^2 \end{cases}$



故 $I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(3) $\iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, **$\Omega$是两个球: $x^2+y^2+z^2\le R^2$和$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$**



(R>0)的公共部分;

解(3) 积分区域Ω如图所示,

由方程$x^2+y^2+z^2=R$及$x^2+y^2+z^2=2Rz$得两球的交线为:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}R^2 \\ z=\dfrac{R}{2} \end{cases}$$ 且平面 $z=\dfrac{R}{2}$把积分区域Ω分为两部分,

且积分区域Ω在z轴上的投影区间为[0,R],

记过$\left[0,\dfrac{R}{2}\right]$上任意一点$z$的平行于$xOy$面的平面与$\Omega$相交的相交的平面区域为$D_1(z)$,

上一页 下一页 返回

过$\left[\frac{R}{2},R\right]$上任意一点$z$的平行于$xOy$面的平面与$\Omega$的相交的平面区域为$D_2(z)$，

则 $$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{R}{2}}\mathrm{d}z\iint_{D_1(z)}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\mathrm{d}z\iint_{D_2(z)}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_1(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_2(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

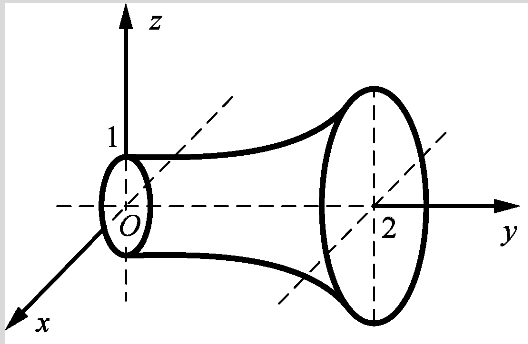
$$=\int_0^{\frac{R}{2}}\pi z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\pi z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{R}{2}}(2\pi Rz^3-\pi z^4)\mathrm{d}z+\int_{\frac{R}{2}}^{R}(\pi R^2z^2-\pi z^4)\mathrm{d}z$$

$$=\left[\frac{\pi R}{2}z^4-\frac{\pi}{5}z^5\right]_0^{\frac{R}{2}}+\left[\frac{\pi R^2}{3}z^3-\frac{\pi}{5}z^5\right]_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{59}{480}\pi R^5$$

单叶双曲面

(5) $\iiint_{\Omega} e^{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由$x^2+z^2-y^2=1, y=0, y=2$,所围成;



解(5) 积分区域Ω如图所示,

Ω在y轴上的投影区间为$[0,2]$,

故 $$\iiint_{\Omega} e^{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 e^{y}\mathrm{d}y\iint_{D(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^2 e^{y}\cdot\pi(1+y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^2 (e^{y}+y^2e^{y})\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^2 e^{y}\mathrm{d}x + \pi\int_0^2 y^2e^{y}\mathrm{d}y$$

$$= \pi e^2 - \pi + \pi\left[y^2e^{y}\right]_0^2 - 2\pi\int_0^2 ye^{y}\mathrm{d}y$$

$$= 3\pi(e^2-1)$$

上一页 下一页 返回

4.利用柱面坐标计算下列三重积分：

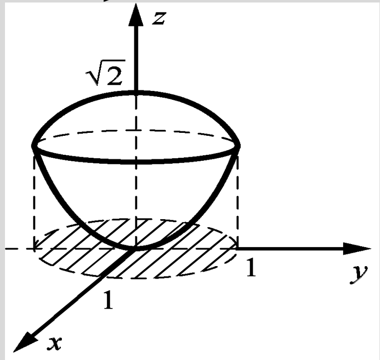
(1) $\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v$ 其中Ω是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$

及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域；

解(1) 由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 消去z得 $x^2+y^2=1$,

因而区域Ω在xOy面上的投影区域为$x^2+y^2\le 1$,

如图所示,在柱面坐标系下：Ω可表示为：



$$0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad r^2\le z\le\sqrt{2-r^2}$$

故 $$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}r(2-r^2-r^4)\mathrm{d}r$$

$$=\pi\left[\mathrm{r}^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right]_0^1=\frac{7}{12}\pi$$

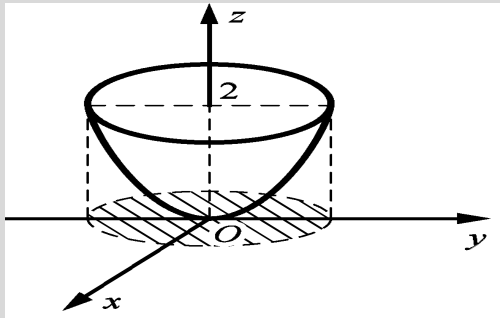
上一页 下一页 返回

(2) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$, 其中**Ω**是由曲面**$x^2+y^2=2z$**及**$z=2$**

所围成的闭区域.

解(2) 积分区域如图所示，在柱面坐标系下，**Ω**可表示为

$$0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r\le 2,\quad \frac{r^2}{2}\le z\le 2$$



故 $$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} r^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^2(2r^3-\frac{1}{2}r^5)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi[\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{12}r^6]_0^2=\frac{16}{3}\pi.$$

10-4

一、重要知识点

1、空间曲面的面积

当 $z=f(x,y)$ $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

2.求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$含在圆柱面$x^2+y^2=ax$内部那部分面积.

解: 如图所示:

上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

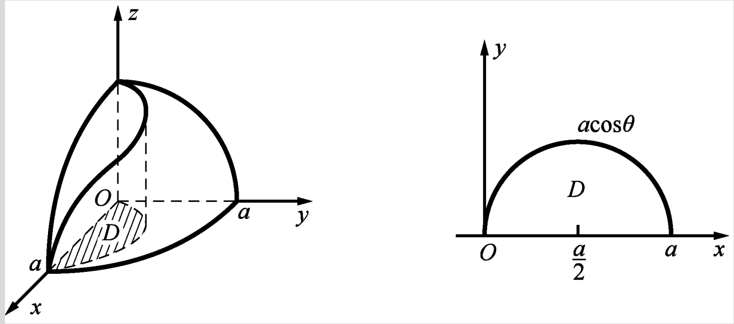
由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

得 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

由对称性知

$$A=4\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= 4a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r\mathrm{d}r$$

$$= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{(-1)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mathrm{d}(a^2 - r^2)$$

$$= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{a\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} a(1 - \sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 2a^2(\pi - a).$$

3.求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$所割下部分的曲面面积.

解： 由$z^2=x^2+y^2$, $z^2=2x$两式消去z得 $x^2+y^2=2x$，

则所求曲面在xOy面上的投影区域D为：$x^2+y^2\le 2x$

而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

故所求曲面的面积为.

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}r\mathrm{d}r=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\Big|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\pi$$

上一页 下一页 返回

10-5

一、重要知识点

1、对弧长曲线积分的概念

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

2、对弧长曲线积分的计算

设曲线 L 由参数方程 $x=x(t), y=y(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$表示，

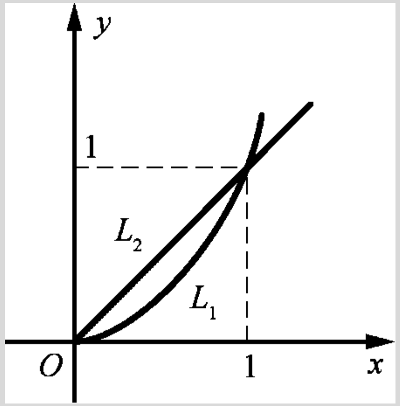
$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

若曲线 L 由方程L：$y=y(x), a\le x\le b$,表示，

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

(3) $\oint_L x\,ds$，其中L为由直线$y=x$及抛物线$y=x^2$所围成的区域的整个边界；

解(3) L由曲线L_1：$y=x^2(0\le x\le 1)$，及L_2：$y=x(0\le x\le 1)$组成。（如图所示）



故 $$\oint_L x\,ds=\int_{L_1} x\,ds+\int_{L_2} x\,ds$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+\left[(x^2)'\right]^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}\,dx$$

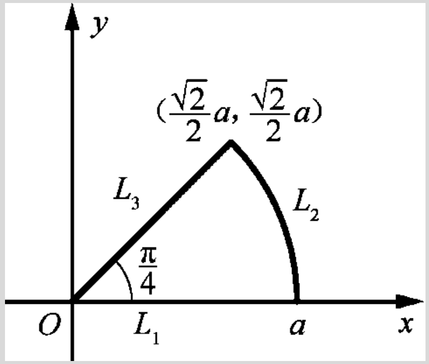
$$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx+\int_0^1 \sqrt{2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1\right)$$

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$直线$y=x$及$x$轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

解(4) 如图所示，$L=L_1+L_2+L_3$



其中L_1: $y=0 \quad (0\le x\le a)$,

从而 $\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^a e^x\sqrt{x'+y_x'}\,dx = \int_0^a e^x dx = e^a - 1$

L_2: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{4}$

故 $\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a\,dt = \frac{\pi}{4}ae^a$$

L_3: $y=x\ (0\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}a)$.

故 $\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}\,dx = e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = e^a - 1$

所以 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$

$$= (e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a + e^a - 1$$

$$= e^a\left(2 + \frac{\pi}{4} a\right) - 2$$

10-6

一、重要知识点

1.对面积的曲面积分的概念;

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

2.对面积的曲面积分的计算法

若曲面∑：$z=z(x,y)$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy;$$

若曲面∑：$y=y(x,z)$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}dxdz;$$

2.计算$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$, 其中Σ是:

(1)锥面z=$\sqrt{x^2+y^2}$及平面z=1所围成区域的整个边界曲面

解(1)$\because \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ ，**其中:**

$$\Sigma_1: z=1, (D_{xy}: x^2+y^2\le 1).$$

$$ds=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}, (D_{xy}: x^2+y^2\le 1)$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r \quad =2\pi\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

因此

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$$

(2) 锥面$z^2=3(x^2+y^2)$被平面$z=0$和$z=3$所截得的部分

解(2)所截得锥面为 $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}\ (D_{xy}: x^2+y^2\le 3)$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\sqrt{3}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=2\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^3\mathrm{d}r=9\pi$$

上一页 下一页 返回

(4) $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的有限部分；

解(4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

且 $$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}s=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\left[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\cos\theta+\sin\theta)\right]r\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta)\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta+\cos^5\theta+\sin\theta\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

11-2

一、重要知识点

对坐标曲线积分的计算

1. L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_\alpha^\beta \{P[f(t),\psi(t)]f'(t)+Q[f(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

这里下限α对应于L的起点,上限β对应于L的终点.

α不一定小于β。

2. 如果L由方程$y=y(x)$给出，

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_a^b \{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}dx.$$

3. 如果L由方程$x=x(y)$给出，

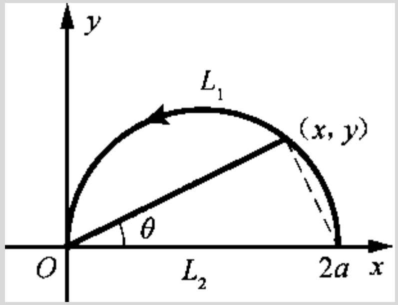
$$\int_L Pdx+Qdy=\int_c^d \{P[x(y),y]x'(y)+Q[x(y),y]\}dy.$$

(2) $\oint_L xy\mathrm{d}x$, 其中L为圆周$(x-a)^2+y^2=a^2$ $(a>0)$及x轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界（按逆时针方向绕行）

解(2) 如图所示, $L=L_1+L_2$.其中L_1的参数方程为

$$\begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

L_2的方程为 $y=0$ $(0\le x\le 2a)$



故 $\oint_L xy\mathrm{d}x = \int_{L_1} xy\mathrm{d}x + \int_{L_2} xy\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi} a(1+\cos t)a\sin t \cdot (a + a\cos t)'\,\mathrm{d}t + \int_0^{2a} 0\mathrm{d}x$$

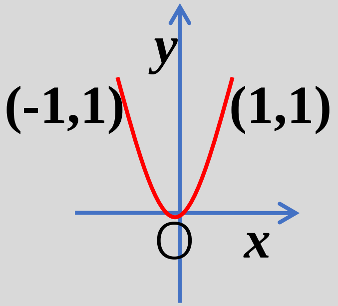
$$= \int_0^{\pi} a^3(-\sin^2 t)(1+\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= -a^3\left(\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}\sin t\right) = -\frac{\pi}{2}a^3$$

上一页 下一页

(8) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$, 其中$L$是抛物线 $y=x^2$上从点(-1,1)到点(1,1)的一段弧.

解(8) $L:\begin{cases} y=x^2 \\ x=x \end{cases}$ **x从-1变到1,**



$$\int_L \left(x^2-2xy\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-2xy\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2-2x\cdot x^2\right)+\left(x^4-2x\cdot x^2\right)\cdot 2x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{14}{15}$$

上一页 下一页 返回

（4）曲线$x=2t^2+t+1, y=t^2+1$上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧；

解(4) 起点(1,1)对应的参数$t_1=0$，

终点(4,2)对应的参数$t_2=1$，

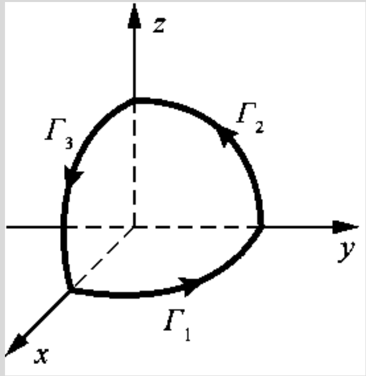
故 $\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\left[\left(3t^2+t+2\right)\left(4t+1\right)+\left(-t^2-t\right)\cdot 2t\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\left(10t^3+5t^2+9t+2\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left[\frac{10}{4}t^4+\frac{5}{3}t^3+\frac{9}{2}t^2+2t\right]_0^1=\frac{32}{3}$$

(2) $\int_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, Γ为$x^2+y^2+z^2=1$在第 I 卦限部分的边界曲线，方向按曲线依次经过xoy平面部分，yoz平面部分和zox平面部分.



解： 如图所示 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$.

$$\Gamma_1:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=0\end{cases}\quad t:\ 0\to\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\Gamma_1}\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2 t\left(-\sin t\right)-\cos^2 t\cdot\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=-2\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

又根据轮换对称性知

$$\int_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$$

$$=3\int_{\Gamma_1}\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$$

$$=3\times\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$=-4$$

上一页 下一页 返回

11-3

一、重要知识点

1、 格林(Green)公式

D是以 L为边界的平面有界闭区域, $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$

在D上具有一阶连续的偏导数，则

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}\sigma = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$(L 是D取正向的边界曲线)

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

(1) $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

(2) 对 D 内任意闭曲线 L, 有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$

(3) 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

(4) 在 D 内有 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

3、 全微分方程

$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$为全微分方程的通解为

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$$

或 $$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$$

说明：根据定理2，若在某区域内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,则

1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;

2) 求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算,

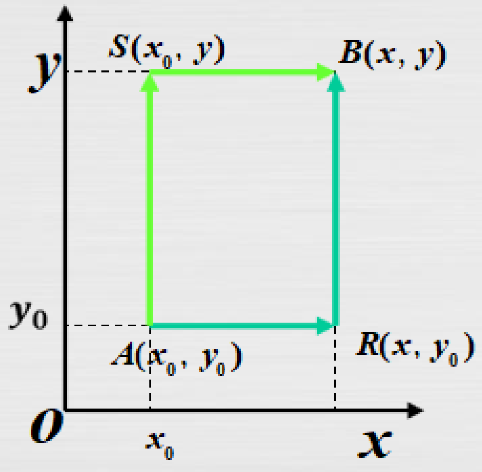
若积分路径不是闭曲线，可添加辅助线;

3) 可用积分法求 $d\,u = P\,dx + Q\,dy$ 在域 D 内的原函数:

取定点 $(x_0, y_0)\in D$ 及动点 $(x, y)\in D$,则原函数

取 ARB 为积分路径时，为

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$



取 ASB 为积分路径时，为

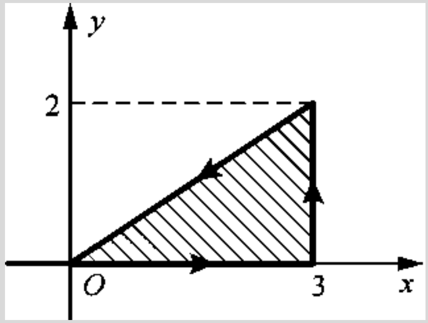
$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx$$

二、习题解答11—3

1. 应用格林公式计算下列积分：

(1) $\oint_L (2x-y+4)dx+(3x+5y-6)dy$, 其中$L$为三顶点分别为(0,0),(3,0)和(3,2)的三角形正向边界；

解(1) L所围区域D如图所示，



$P=2x-y+4$，$Q=3x+5y-6$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3,\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-1$$ 由格林公式得

$$\oint_L (2x-y+4)dx+(3x+5y-6)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 4dxdy$$

$$=4\iint_D dxdy=4\times\frac{1}{2}\times3\times2=12$$

,

(2) $\oint_L (x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2 e^x)dx + (x^2\sin x - 2ye^x)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$

解(2) $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x$，$Q=x^2\sin x-2ye^x$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2\cos x + 2x\sin x - 2ye^x$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x^2\cos x + 2x\sin x - 2ye^x$$

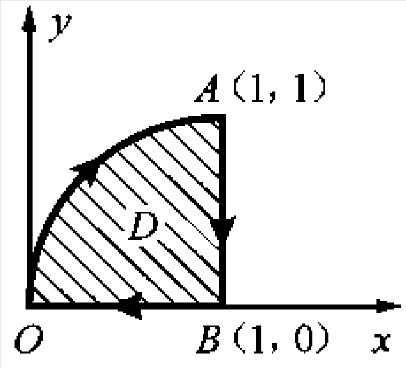
从而 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，由格林公式得.

$$\oint_L \left(x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2 e^x\right)dx + \left(x^2\sin x - 2ye^x\right)dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

上一页 下一页 返回

(4) $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中$L$是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点(0,0)到(1,1)的一段弧；



解(4) L、AB、BO及D如图所示．

由格林公式有

$$\int_{L+AB+BO} Pdx+Qdy=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

而$P=x^2-y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$．

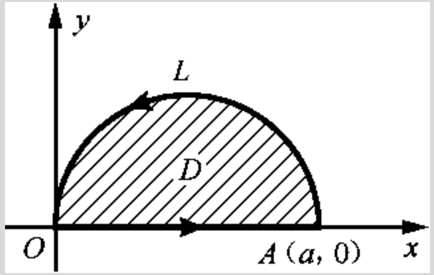
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

即，$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

于是，$$\int_{L+AB+BO} Pdx+Qdy=\left(\int_L+\int_{AB}+\int_{BO}\right)Pdx+Qdy=0$$

(5) $\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, **$L$为由点$(a,0)$到$(0,0)$经过圆$x^2+y^2=ax$上半部分的路线($a$为正数）.**

解(5) **L，OA如图所示．**



$P=e^x \sin y - my$， $Q=e^x \cos y - m$，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y$$

由格林公式得:

$$\int_{L+OA} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad = \iint_D m dxdy$$

$$= m \iint_D dxdy$$

$$= m \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \quad = \frac{m\pi a^2}{8}$$

于是：$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \frac{m\pi a^2}{8} - \int_{OA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

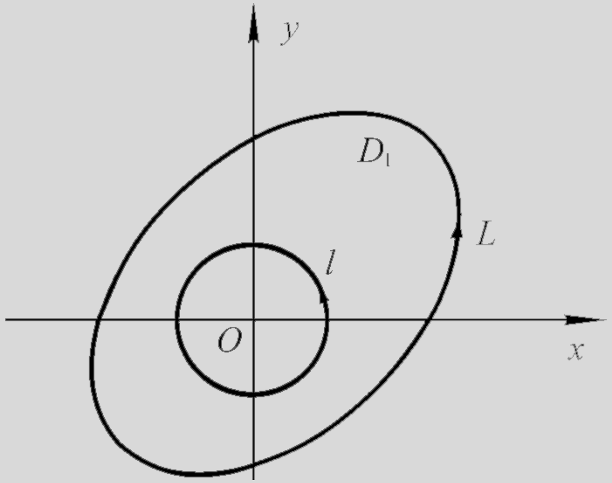
$$= \frac{m\pi a^2}{8} - \int_0^a \left[\left(\mathrm{e}^x \cdot \sin 0 - m \cdot 0\right) + \left(\mathrm{e}^x \cdot \cos 0 - m\right) \cdot 0\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{m\pi a^2}{8} - \int_0^a 0\mathrm{d}x$$

$$= \frac{m\pi a^2}{8}$$

例4.计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$其中$L$为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，$L$的方向为逆时针方向.

解: 令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$ $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$



则当 $x^2+y^2\neq 0$时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

记 L所围闭区域为D,

当$(0,0)\notin D$时，由格林公式得 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$

当$(0,0)\in D$时，选取适当小的$r>0$,作位于D内的圆周l: $x^2+y^2=r^2$

上一页 下一页 返回

记L和L所围成的闭区域为D_1，对于复连通区域D_1，应用公式得

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

其中L的方向为逆时针方向.于是

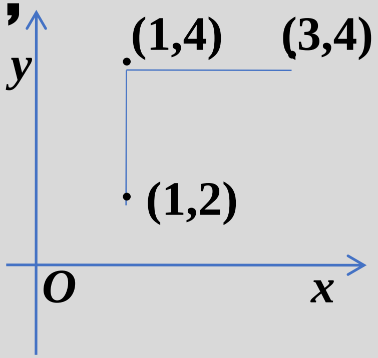
$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2} d\theta = 2\pi$$

$$(2)\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$$

证:(2) $P=6xy^2-y^3$，$Q=6x^2y-3xy^2$.

显然P，Q在xOy面内有连续偏导数,



且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2$

有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 所以积分与路径无关 .

则,取L为从$(1,2)\to(1,4)\to(3,4)$的折线,如图

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^2-y^3\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y-3xy^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_2^4\left(6y-3y^2\right)\mathrm{d}y+\int_1^3(96x-64)\mathrm{d}x$$

$$=\left[3y^2-y^3\right]_2^4+\left[48x^2-64x\right]_1^3=236$$

上一页 下一页 返 回

4．验证下列$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$在整个***xoy***平面内是某一函数***u*(*x*,*y*)**的全微分，并求这样的一个函数***u*(*x*,*y*)**;

$(1)(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y,$

解(1) $P=x+2y$，$Q=2x+y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2$$

所以$(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$是某个定义在整个$xOy$面内的函数$u(x,y)$的全微分 .

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x\mathrm{d}x+\int_0^y(2x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x^2}{2}+\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^y=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}$$

5.证明:$\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$在整个xoy平面内除y轴的负半轴及原点外的开区域G内是某个二元函数的全微分,并求出这样的一个二元函数。

证: $P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

显然G是单连通的,P和Q在G内具有一阶连续偏导数,

并且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $(x,y)\in G$

因此 $\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在开区域G内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分.

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

由 $\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=d\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right]$

(4) $(2x\cos y + y^2\cos x)\,dx + (2y\sin x - x^2\sin y)\,dy$;

解(4) $P=2x\cos y+y^2\cos x$，$Q=2y\sin x-x^2\sin y$，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y + 2y\cos x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x - 2x\sin y$$

有 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$是某一个定义在整个$xOy$面内的函数$u(x,y)$的全微分，

故 $$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x\cos y + y^2\cos x)\,dx + (2y\sin x - x^2\sin y)\,dy$$

$$= \int_0^x 2x\,dx + \int_0^y (2y\sin x - x^2\sin y)\,dy$$

$$= y^2\sin x + x^2\cos y$$

上一页 下一页 返 回

7.求下列方程的通解：

$$(1)(x^2-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0;$$

解： $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-6xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 所以，已知方程是全微分方程

则 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^2-3xy^2\cdots(1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-3x^2y\cdots(2)\end{cases}$

由(1)式得 $u(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\varphi(y)\cdots(3)$

由(2)、（3）式得 $-3x^2y+\varphi'(y)=y^2-3x^2y$

所以，$\varphi'(y)=y^3,\varphi(y)=\dfrac{1}{4}y^4+C_1,$

代入(3)式得 $u(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{1}{4}y^4+C_1$

因此，所给方程的通解为：$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{1}{4}y^4=C.$

$(2)(x+y)(dx-dy)=dx+dy;$

解： 所给方程可写成 $(x+y)d(x-y)=d(x+y)$

两边同乘以 $\dfrac{1}{x+y}$

得到 $d(x-y)=\dfrac{d(x+y)}{x+y}=d(In(x+y))$

故通解为 $x-y=\ln(x+y)+C.$

11-5

一、重要知识点

1、对坐标的曲面积分的概念

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

设Σ是有向曲面，$-\Sigma$表示与Σ取相反侧

$$\iint_{\Sigma\text{前侧}} = -\iint_{\Sigma\text{后侧}},\quad \iint_{\Sigma\text{右侧}} = -\iint_{\Sigma\text{左侧}},\quad \iint_{\Sigma\text{上侧}} = -\iint_{\Sigma\text{下侧}}$$

当积分曲面改变为相反侧时，

对坐标的曲面积分要改变符号.

2、对坐标的曲面积分的计算法

将对坐标的曲面积分化成在D_{xy}上的二重积分

设曲面 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 给出的上侧，

三定号

二代

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, \boxed{z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, \boxed{z(x, y)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

一投

上一页 下一页 返 回

2. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma}(x^2y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, **其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$**

的下半部分的下侧;

解(1) Σ: $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, **下侧,**

Σ在xOy面上的投影区域D_{xy}为: $x^2+y^2\le R^2$.

$$\iint_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\left(-\sqrt{R^2-r^2}\right)r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\left[(r^2-R^2)+R^2\right]^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}(R^2-r^2)$$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^R[R^4\sqrt{R^2-r^2}-2R^2\sqrt{(R^2-r^2)^3}$$

$$+\sqrt{(R^2-r^2)^5}]\mathrm{d}(R^2-r^2)$$

$$= -\frac{1}{16}\cdot 2\pi\left[\frac{2}{3}R^4(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}R^2(R^2-r^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}(R^2-r^2)^{\frac{7}{2}}\right]_0^R$$

$$= \frac{2}{105}\pi R^7$$

上一页 下一页 返 回

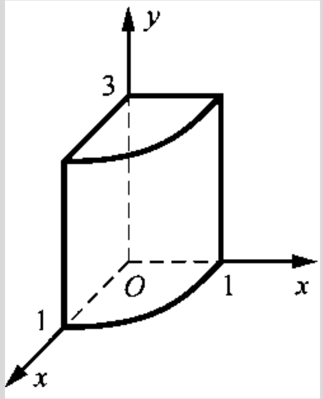
(2) $\iint_{\Sigma} z\,dxdy + x\,dydz + y\,dzdx$, 其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的在第I卦限内的部分的前侧;

解(2) Σ如图所示，Σ在xOy面的投影为一段弧，

故 $\iint_{\Sigma} z\,dxdy = 0$

Σ在yOz面上的投影

$D_{yz}=\{(y,z)|0\le y\le 1，0\le z\le 3\}$，



此时Σ可表示为：$x=\sqrt{1-y^2}$，$(y,z)\in D_{yz}$，

故 $\iint_{\Sigma} x\,dydz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}\,dydz$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 3\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$$

Σ在xOz面上的投影为$D_{xz}=\{(x,z)|0\le x\le 1，\ 0\le z\le 3\}$，

此时Σ可表示为：

$$y=\sqrt{1-x^2},\ (x,z)\in D_{xz},$$

故 $$\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

因此：$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\left[3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=6\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=6\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

11-6

一、重要知识点

1、高斯公式

空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ围成.

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

这里Σ是Ω整个边界曲面的外侧.

2. 利用高斯公式，计算下列曲面积分：

(1) $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$，**其中Σ为平面**

***x*=0,*y*=0,*z*=0,*x*=*a*,*y*=*a*,*z*=*a*所围成的立体的表面的外侧；**

解(1) 由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dv$$

$$= 2\iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$$

$$\underline{\underline{\text{对称性}}} 6\iiint_{\Omega} x dv$$

$$= 6\int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a dz$$

$$= 3a^4$$

上一页 下一页 返 回

$$(2)\iint_{\Sigma} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧；

解(2) 由高斯公式

$$\iint_{\Sigma} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$= 3\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} r^4 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^5$$

(3) $\oiint_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为上半球体$x^2+y^2\le a^2$, $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧;

解(3) 由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^2y-z^3\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(2xy+y^2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(z^2+x^2+y^2\right)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{2}{\pi}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^4\mathrm{d}r=\frac{2}{5}\pi a^5$$

(4) $\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是界于$z=0$和$z=3$之间的圆柱体$x^2+y^2=9$的整个表面的外侧.

解(4) 由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$= 3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$= 3\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3$$

$$= 81\pi$$

11-7

一、重要知识点

1、两类曲线积分之间的联系

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L \left(P\cos\alpha dx + Q\cos\beta\right) ds$$

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) ds$$

2、两类曲面积分之间的联系：

$$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

3*、高斯公式、斯托克斯公式的另一种表示

设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面所围成,

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \oint\!\!\!\oint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是$\sum$上点$(x,y,z)$处法向量的方向余弦.

3. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中：

（1）Σ是平面$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$在第一卦限部分的上侧；

解(1) 平面Σ:$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$上侧的法向量为 **n={3，2，**$2\sqrt{3}$ **}，**

单位向量为 $n^0=\{\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\}$

即方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{2}{5}$，$\cos\gamma=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

因此:$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}s$$

（2）Σ是抛物面$z=8-(x^2+y^2)$在xoy面上方的部分的上侧.

解(2) Σ：$F(x,y,z)=z+x^2+y^2-8=0$，

Σ上侧的法向量$n=\{F_x, F_y, F_z\}=\{2x, 2y, 1\}$

其方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ \cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

因此：$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}s$$

12-1

一、重要知识点

1、常数项级数的基本概念

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

2、基本审敛法

(1)若 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2)当 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3)按基本性质.

12-2

一、重要知识点

1、正项级数敛散性判别法

(1).正项级数收敛的充要条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \{S_n\}\text{有界}$$

(2).比较审敛法

当$u_n \le v_n$时，

$$\xleftarrow{}\text{发散}\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ \underset{\text{发散}}{\overset{\text{收敛}}{\rightleftarrows}}\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \xrightarrow{\text{收敛}}$$

(3).比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

(4).根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \rho < 1 & \text{收敛} \\ \rho = 1 & \text{不一定} \\ \rho > 1 & \text{发散} \end{cases}$$

(5).积分判别法

推论：比较审敛法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$,

则 (1)当 $0<k<+\infty$ 时, 二级数有相同的敛散性;

(2)当 $k=0$ 时， 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(3)当 $k=+\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

2、参考级数

(1). 等比级数

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \begin{cases} 收敛，且和为\dfrac{1}{1-r}, & |r|<1, \\ 发散, & |r|\geq 1. \end{cases}$$

(2). 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ **发散.**

(3). p **级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ **为** $\begin{cases} 收敛. & P>1 \\ 发散. & 0<P\leq 1 \end{cases}$

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (\alpha \in R).$$

二、习题解答12-2

1．用比较判别法法判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(n+3)(n+5)}+\cdots$$

解(1) $\because u_n=\dfrac{1}{(n+3)(n+5)}<\dfrac{1}{n^2}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

$$(2)\ 1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$$

解(2) $\because u_n=\dfrac{1+n}{1+n^2}\geq\dfrac{1+n}{n+n^2}=\dfrac{1}{n}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,

由比较审敛法知，原级数发散.

上一页 下一页 返回

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$$

解(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}}=\pi$$

此时用的是比较收敛法的极限形式，即P194页的定理2的推论。第（6）问页是同样方法。

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3^n}$ 收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$ 也收敛.

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2+n^3}}$$

解(4) $$\because u_n=\frac{1}{\sqrt{2+n^3}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛， 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2+n^3}}$ 也收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$

解(5) 当$a>1$时，$u_n=\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 也收敛.

当$a=1$时 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$,级数发散.

当$0<a<1$时 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$,级数发散.

综上所述，**当$a>1$时，原级数收敛，**

当$0<a\le 1$时，原级数发散 .

上一页 下一页 返回

$(6)\sum_{n=1}^{\infty}(2^{\frac{1}{n}}-1)$

解(6) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}=\ln 2$ 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 2<1$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$ 发散.

(3) $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{3^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{3^3}{3\cdot 2^2}+\cdots+\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$

解(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot\dfrac{n\cdot 2^n}{3^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2(n+1)}=\frac{3}{2}>1$$

所以原级数发散 .

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$

解(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{2^n\cdot n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$$

故原级数收敛.

上一页 下一页 返回

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

解(3) $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{9}<1$

故原级数收敛.

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^{n}$$ 其中 $a_n\to a(n\to\infty),\ a_n, b, a$ 均为正数.

解(4) $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$

当$b<a$时，$\frac{b}{a}<1$，原级数收敛；

当$b>a$时，$\frac{b}{a}>1$，原级数发散；

当$b=a$时，$\frac{b}{a}=1$，无法判定其敛散性.

12-3

一、重要知识点

1、交错级数收敛性判别法

若 $\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ 则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛

2、任意项级数审敛法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} \text{若} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛，称} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 为绝对收敛} \\ \text{若} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 发散，称} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 为条件收敛} \end{cases}$$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in R)$

解(5) 当$\alpha>1$时，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，得原级数绝对收敛.

当$0<\alpha\leq 1$时，

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 满足条件：

$$\frac{1}{n^{\alpha}}>\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$$

由莱布尼茨判别法知级数收敛，

但这时 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 发散，

所以原级数条件收敛.

当$\alpha\leq 0$时， $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$所以原级数发散.

3．若 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 u_n$ 存在，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证： $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 u_n$ 存在，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

理解为正项级数吧

4、证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\ 2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

证：$\because 0 < 2\left|\frac{u_n}{n}\right| = 2\frac{1}{n}|u_n|$

$$\le \frac{1}{n^2} + u_n^{\ 2}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\ 2}$ 都收敛.

由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left|\frac{u_n}{n}\right|$ 收敛.

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{u_n}{n}\right|$ 收敛.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

12-4

一、重要知识点

1、和函数

在收敛域上，函数项级数的和$S(x)$是x的函数，

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

2、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径R：

若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ （或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ ），

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

3、 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性 .

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比值法或根值法，也可通过换元化为标准型再求 .

二、习题解答12—4

1. 求下列函数项级数的收敛域：

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$

解： $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 相当于P级数中$P=x$

当$P>1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛，$P\leq 1$时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散.

从而当$x>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 收敛，$x\leq 1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$发散.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$的收敛域为$(1,+\infty)$

$(2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$

解： 当$x>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$收敛（绝对收敛必收敛），

当$x\le 0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$发散，$(\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0)$

当$0<x<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$收敛，（莱布尼兹型级数）

从而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$的收敛域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$$

解：级数缺少偶次幂项，不能直接应用定理2，故直接由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right|}{\left|\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot x^2$$

$$= x^2$$

当 $x^2 < 1$ 即 $|x|<1$ 时级数收敛

当 $x^2 > 1$ 即 $|x|>1$ 时级数发散

故收敛半径为 $R=1$

$$\left.\begin{aligned}&\text{当}x=1\text{时,级数为}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1},\ \text{发散}\\&\text{当}x=-1\text{时,级数为}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1},\ \text{发散}\end{aligned}\right\}\text{级数的收敛域为}(-1,1)$$

上一页 下一页 返 回

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2\cdot 2n}$

解(4) 令$t=x-1$，则级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2\cdot 2n}$

$$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2n}{(n+1)^2\cdot 2(n+1)}=1$$

所以收敛半径为$R=1$.

收敛区间为 $-1<x-1<1$ 即$0<x<2$.

当$t=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3}$收敛，

当$t=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2\cdot n^3}$为交错级数，

由莱布尼茨判别法知其收敛.

所以，**原级数收敛域为 $0\le x\le 2$，即$[0,2]$**

3．利用幂级数的性质，求下列级数的和函数:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

解(1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)x^{n+3}}{nx^{n+2}}\right|=|x|$ 知,当|x|=<1时，原级数收敛,

而当|x|=1时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}$的通项不趋于0,从而发散,

故级数的收敛域为(-1,1).

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}=x^3\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域为(-1,1)，记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

则 $\int_0^x S_1(t)dt=\int_0^x(\sum\limits_{n=1}^{\infty} nt^{n-1})dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n=\dfrac{x}{1-x}$

于是 $S_1(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

所以 $S(x)=\dfrac{x^3}{(1-x)^2}\quad(|x|<1)$

上一页 下一页 返 回

$(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$

解(2) 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+4}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+2}}\right|=x^2$ 知（缺奇次项，定理2无法应用，比值判别法），

原级数当|x|<1时收敛，

而当|x|=1时，原级数发散，

故原级数的收敛域为(-1,1)，

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

易知级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 收敛域为(-1,1)，见第二题（3）

记$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，则 $S_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

故 $\int_0^x S_1'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

即 $S_1(x) - S_1(0) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $S_1(0) = 0$

所以 $S(x) = xS_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)$

例8. 在区间(-1，1)内求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$ 的和函数.

解: 由于 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\Big/\frac{1}{n+1}\right)=1,$

所以,幂级数的收敛半径为1, 收敛区间为(-1，1).

设和函数为$S(x)$,　则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1},\qquad s(0)=\frac{1}{2}$$

对 $x^2s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 逐项求导得

$$\left(x^2s(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\quad(-1<x<1)$$

对上式从0到x积分得

$$x^2 s(x) = \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = -x - \ln(1-x)$$

于是当$x \neq 0$时，有 $s(x) = -\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$

从而 $$s(x) = \begin{cases} -\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}, & 0 < |x| < 1; \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

由幂级数的和函数的连续性可知，这个和函数$S(x)$

在$x=0$处是连续的.