1行列式

1.1二、三阶行列式

二元一次方程左侧未知数的系数得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

n阶同理

元素记为**det(a_{ij})**

计算方式红线+蓝线-

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

该方式适用于二三阶

1.2行列式性质

1.行列式转置后数值相等

2.某两行（列）交换后行列式数值为相反数

3.某**一行**有公因数k可以提出

4.两行（列）成比例时行列式为0

5.行列式可由加法拆开（限单行（列））

6.某一行加上另一行的n倍，行列式数值不变

1.3行列式展开

把(I,j)位置的元素所在的行与列拿掉剩下的行列式M_{ij}记为余子式

$A_{ij}=(-1)^{i+j}$记为代数余子式**（有正负）**

行列式的数值等于某一行(列)的每个元素和他对应的代数余子式乘积之和

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$$

推论：一行的元素和另一行的元素对应的代数余子式的乘积之和为0。列同理

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j.$$

Ex.逆序数

顺序反着的数排列

奇排列：逆序数为奇数的排列

偶排列：逆序数为偶数的排列

定理：调换两个元素，逆序数（个数）奇偶性改变

Note.

- **行列式必须是方的**
- 上、下三角行列式值为对角线元素之积

2矩阵的运算

2.1线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

右侧b不全是0时称方程组为n 元非齐次线性方程组

- 非齐次方程组可能有0,1,n个解

否则为n 元齐次线性方程组

2.2矩阵

2.2.1矩阵的基本定义

系数矩阵由线性方程组左侧的系数构成

若最又一列带等号右侧常量则叫增广矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

每个元素记为$(a_{ij})_{mxn}$

只有一行（列）的叫行（列）向量，可表示数

- **零矩阵**都是0的，不同大小的零矩阵不相等
- **对角阵**除了对角线都是0,记为**diag(a,b,c,...)**
- **单位阵**对角线为1，其他为0
  - 当行数不等于列数时矩阵为0，否则为1
- **对称阵**元素以对角线为轴对称
- **反对称阵**有一边全带负号

*同型矩阵**长宽相等**

2.2.2矩阵的运算

+/-	矩阵必须**同型**，对应元素加减
x	**每个元素**的公因数可以提出

前面矩阵的列数等于后面矩阵的行数才能相乘

- 乘积元素为行列逐个元素乘积之和

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

AB≠BA

AxB=1行1列 1行2列…

2行1列 2行2列…

与行列式的区别

	行列式	矩阵
+/-	限单行	整个加减
x	单行有系数可以提出	整个矩阵有系数可以提出
加法交换律	a+b=b+a	A+B=B+A
加法结合律	(a+b)+c=a+(b+c)	(A+B)+C=A+(B+C)
乘法结合律	(ab)c=a(bc)	(mn)A=m(nA)
乘法分配律	(a+b)c=ac+bc	(m+n)A=mA+nA

2.2.3矩阵的幂

$A^kA^l=A^{k+l}$，$(a^k)^l=a^{kl}$

2.2.4转置矩阵A^T

一行变为一列

性质：

(i). $(A^T)^T=A$;

(ii) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

(iii) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$;

(iv) $(AB)^T=B^TA^T$.

2.2.5矩阵行列式的性质

(i) $|A^T|=|A|$（行列式性质 1）

(ii) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$;

(iii) $|AB|=|A||B|$.

(iii)可得|AB|=|BA|

2.2.6伴随矩阵

伴随矩阵由每个元素对应的代数余子式构成

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- 只有方阵才有伴随矩阵

性质:

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

2.2.7逆矩阵

由伴随矩阵的性质得出:

$$B = \frac{1}{|A|}A^*$$

B即为A的逆矩阵

定理:

- 若|A|≠0，则方阵A可逆，反之也成立

性质:

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1},$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

常用公式

1. $AA^* = A^*A = |A|E$
2. $A^* = |A|A^{-1}$
3. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
4. 若$|A| \neq 0$，则

① $|A^*| = |A|^{n-1}$;

② $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;

③ $(A^*)^T = (A^T)^*$;

④ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;

⑤ $(kA)^* = k^{n-1}A^*$;

2.2.8对角矩阵

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$
$$\Lambda^n = diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_m^n)$$
$$\Lambda^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_m^{-1})$$

2.2.9矩阵多项式

$$\varphi(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0 \qquad (a_m\neq 0)$$

$$\varphi(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 E$$

$$(A\in C^{n\times n}, a_m\neq 0)$$

(1)若$A=P\Lambda P^{-1}$,则$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

(2)若$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s)$,则

$$\varphi(\Lambda)=diag(\varphi(\lambda_1),\varphi(\lambda_2),\cdots,\varphi(\lambda_s))$$

2.3克拉默法则

齐次线性方程组有非零解<->系数行列式等于零

克拉默法:

若行列式D≠0，线性方程组有解且唯一

$$x_n=\frac{D_n}{D}$$

- 其中D_n是把第n列替换为常数项b得到的行列式

逆矩阵法:

$$x=A^{-1}b$$

3.矩阵的初等变换

3.1交换方法(行、列同理)

1.交换两行的位置

2.某一行乘k

3.一行加上另一行的k倍

- 变换后使用~而非=
- 目标是化为行最简形矩阵

例如(阶梯所在列只有1个1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特殊地有

标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2相关矩阵定义

行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

- 每个阶梯只有一行

行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

- 阶梯所在列只有1个1

标准形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

- 左上为单位矩阵

行阶梯形矩阵>行最简形矩阵>标准形矩阵

3.3初等变换的应用

求逆矩阵

理论准备：

- □ A~B的充要条件是存在 可逆矩阵P，使得PA=B
- □ 方阵 A 可逆的充要条件是A~E

计算方法：

PA=B<-->PA=B,PE=P

$$P(A \vdots E) = (PA \vdots PE) = (B \vdots P)$$

$$P(A \vdots E) = (PA \vdots PE) = (E \vdots P)$$

3.4矩阵的秩

简要定义：矩阵化简后**不全为0**的行的个数

满秩矩阵：R(A)=n

降秩矩阵：R(A)<n

性质

- 若 A 为 m×n 矩阵，则 0≤R(A)≤min(m, n)
- **$R(A^T) = R(A)$**
- A ~ B的充分必要条件是 **R(A) = R(B)**
- 若 P、Q 可逆，则 R(PAQ) = R(A)
- max{R(A), R(B)}≤R(A, B)≤R(A) + R(B) ,

- 特别地，当 B = b 为非零列向量时，有R(A)≤R(A, b)≤R(A) + 1
- R(AB)≤min{R(A), R(B)}
- 若 Am×n Bn×l = O，则 R(A) + R(B)≤n

线性方程组的解(A:系数矩阵 B:增广矩阵)

非齐次线性方程组AX=b

R(A) < R(B)	无解
R(A) = R(B) = n	唯一解
R(A) = R(B) < n	无穷多解

齐次线性方程组AX = 0：

R(A) = n	只有0解
R(A) < n	有非0解

Note

- 矩阵的等价关系具有反身性、对称性、传递性
- **A能化成B则称AB等价**
- 设A是一个 m×n 矩阵，对 A 施行一次初等行(列)变换，
  相当于在 A 的左(右)边乘以相应的 m (n)阶初等矩阵
- 方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵P1, P2, ..., Pl，使 A = P1 P2 ,..., Pl

EX.

初等变换的表示方式

$E_m(i,j)A_{m\times n}$　**把矩阵A的第 i 行与第 j 行对调，即 $r_i \leftrightarrow r_j$.**

$A_{m\times n}E_n(i,j)$　**把矩阵A的第 i 列与第 j 列对调，即 $c_i \leftrightarrow c_j$.**

$E_m(i(k))A_{m\times n}$　**以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 行，即 $r_i \times k$.**

$A_{m\times n}E_n(i(k))$　**以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 列，即 $c_i \times k$.**

$E_m(ij(k))A_{m\times n}$　**把矩阵A第 j 行的 k 倍加到第 i 行，即 $r_i + kr_j$.**

$A_{m\times n}E_n(ij(k))$　**把矩阵A第 i 列的 k 倍加到第 j 列，即 $c_j + kc_i$.**

4向量组

4.1基本定义

例如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

*必须同型

- 若 C=AB,矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，

B为这一线性表示的系数矩阵（B 在右边）(行向量组同理，A在左边)

- 向量 b 能由向量组 A 线性表示<->线性方程组 Ax=b有解<->**R(A)=R(B)**
- 向量组 B 能由向量组 A线性表示<->矩阵方程组 AX=B有解<->**R(A)=R(A,B)**->R(A)≥R(B)

4.2向量组的线性相关性

给定向量组 A：a1, a2, ..., am ，如果存在不全为零的实数 k1, k2, ..., km，使得

k1a1 + k2a2 + ... + kmam =0

则称为A是**线性相关**的，否则是**线性无关**的

- A是线性相关的<->**R(A)<m**<->向量组 A 中至少有一个向量能由其余向量线性表示

相关定理：

  - 部分相关，整体相关
  - 整体无关，部分无关
  - m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时，一定线性相关
  - A线性无关，B=A+b线性相关，则b能由A线性表示且表达式唯一

4.3向量组的秩

Ax = b	矩阵 (A, b)	向量组 A: a1, a2, ...,an 及向量 b
是否存在解？	R(A) = R(A, b) 成立？	向量 b 能否由向量组 A线性表示？
无解	R(A) < R(A, b)	NO
有解	R(A) = R(A, b)	YES x 的分量是线性组合的系数
唯一解	R(A) = R(A, b) = 未知数个数	表达式唯一
无穷解	R(A) = R(A, b) < 未知数个数	表达式不唯一

最大无关组:能从n个向量里最多挑出n个使得这n个向量组成的组线性无关，R=n

做法：把n个向量组成矩阵化成最简型，阶梯首列对应的原向量组成的就是

- 因此，矩阵的秩等于向量组的秩
- 矩阵的最高阶非零子式一般不是唯一的，但矩阵的秩是唯一的
- 向量组 A 和它自己的最大无关组 A0 是等价的

4.4线性方程组的解

线性方程组有解的条件如上所示

一组解可以成为一个解向量

性质：

  - 齐次线性方程组Ax=0中两个解向量相加后还是解，乘以常数后也是解。
  - 因此需要**基础解系**来表达无穷个解，即把n-R(A)个自由向量写成单位矩阵
  - 非齐次线性方程组Ax=b中两个解向量相减后是Ax=0的解
  - Ax=0的解与Ax=b解相加后还是Ax=b的解
  - 故Ax=b通解为Ax=0的基础解系加上Ax=b的特解(一个成立解)

4.5向量空间

4.5.1基本定义

封闭：集合中任意两个元素运算后得到的结果还在集合内

若集合对加法、乘法封闭则称为**向量空间**

齐次线性方程组的解集称为齐次线性方程组的**解空间**

把集合L={l1a1+ l2a2+...+lmam}称为由向量a1 , a2 , ..., am 所生成的向量空间

- 等价的向量组所生成的空间相等

子空间：向量空间的子集且子集的运算封闭

关系：

向量空间 → **向量组**

向量空间的基 → **向量组的最大无关组**

向量空间的维数 → **向量组的秩**

4.5.2向量空间的基与维数

在向量空间 V 中能选出 r 个向量满足

- □ a1, a2, ..., ar 线性无关
- □ V 中任意一个向量都能由 a1, a2, ..., ar 线性表示

那么称向量组 a1, a2, ..., ar 是向量空间 V 的一个**基**

r 称为向量空间 V 的**维数**

V 为 r 维向量空间

- 如果在向量空间 V 中取定一个基，V中任意一个向量 x 可唯一表示为x=l1a1+l2a2+...+lrar

则(l1,l2..lr)称为向量x在该基中的坐标,故**同一个向量在不同基中的坐标是不同的**

- n 维单位坐标向量组称为 Rn 的自然基

4.5.3基变换与坐标变换

将向量组A转换成向量组B有AX=B，$X=A^{-1}B$，X称为**过渡矩阵**

5.相似矩阵相关

5.1向量的内积、长度及正交性

内积：两个向量相乘

性质：

- 对称性[x,y]=[y,x]
- 常数可提出[ax, y] = a[x, y]
- 分配律[x + y, z] = [x, z] + [y, z]
- $[x, y]^2 \le [x, x]\,[y, y]$

长度：|| x || =sqrt([x,x])

性质：

- 常数可提出$[ax,ax] = a^2[x, x]$
- 三角不等式|| x + y || ≤ || x || + || y ||

正交：两个向量"垂直",cosθ=0

夹角

$$\theta = \arccos\frac{[x,y]}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

- 当 [x, y] = 0，称向量 x 和 y 正交

零向量与所有向量正交

正交向量组：两两正交的向量构成的向量组，**线性无关**

当一个向量组满足：

- □ 向量空间V的基（最大无关组）
- □ 两两正交（线性无关）
- □ 单位向量

满足12则称为V的一个**正交基**

满足123则称为V的一个**规范正交基**

正交化：设a1,a2..an是V的一个基

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1 \\ b_3 &= a_3 - c_3 \\ &= a_3 - c_{31} - c_{32} \\ &= a_3 - \frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1 - \frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2 \end{aligned}$$

b1,b2..bn即是V的一个正交基

单位化：

$$e_1 = \frac{1}{\|b_1\|}b_1,\ e_2 = \frac{1}{\|b_2\|}b_2, \cdots,\ e_r = \frac{1}{\|b_r\|}b_r$$

e1,e2..en即是V的一个规范正交基

正交矩阵：矩阵A满足 $A^TA = E$，即 $A^{-1} = A^T$

A是正交矩阵<->A 的列(行)向量组构成规范正交基

性质：

- ◆ 若 A 是正交阵，则 A^{-1} 也是正交阵，且|A| = 1 或 - 1
- ◆ 若 A 和B是正交阵，则 A B 也是正交阵
- ◆ 若 P 是正交阵，则线性变换 y = Px 称为正交变换

5.2 方阵的特征值与特征向量

特征值：Ax=λx=λEx ->(A−λE) x = 0->| A−λE | = 0 解得的λ就是特征值

性质

- □ **在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值**
- □ 若λ是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组的基础解系就是对应于特征值为λ的全体

特征向量的最大无关组

- **若 λ 是 A 的一个特征值，则 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m$ 是矩阵多项式 $\varphi(A) = a_0 + a_1 A + \dots + a_m A^m$ 的特征值**
- $\boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}}$
- $\boldsymbol{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|}$
- $1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值
- **λ^k 是 A^k 的特征值，对应的特征向量也是 x**
- 如果$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$各不相同，则$p_1, p_2, \dots, p_m$线性无关

特征向量：代入特征值后解得x,kx即为特征向量

5.3相似矩阵

定义：可逆矩阵 P 满足$P^{-1}AP = B$,称 B 为矩阵 A 的**相似矩阵**,记为A~B，P为**相似变换矩阵**

性质：

- 对称性：A~B=B~A
- 传递性：A~B~C
- 反身性：A~A

- A ~ B->A与 B等价
- A ~ B,并且A 可逆-> $A^{-1} \sim B^{-1}$
- 特征多项式相同的矩阵不一定相似
- 若 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同, A 和 B 的特征值也相同,$\varphi(A)$ 和 $\varphi(B)$ 相似
- **若A 与对角阵相似，即$P^{-1}AP = \Lambda$，则矩阵 A 可以对角化**
- **$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$,λ就是特征值**

5.4对称矩阵的对角化

定理：设 λ_1 和 λ_2 是对称阵 A 的特征值， p_1, p_2 是对应的特征向量，如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 p_1, p_2 正交

利用正交矩阵将实对称矩阵对角化

1.求λ

2.$(A-\lambda E)x = 0$求基础解系

3.正交化

4.单位化

最终得到正交矩阵P使得$P^{-1}AP = P^TAP=\Lambda$

注：特征值和特征向量需要排序一致