概率论与数理统计习题

茆诗松版

作者：Mick Huang

目录

第一章 随机事件与概率

1.1 随机事件及其运算

定理 1.1 (事件运算性质)

1. 交换律：

$$A \cup B = B \cup A \tag{1.1}$$

$$AB = BA \tag{1.2}$$

2. 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1.3}$$

$$(AB)C = A(BC) \tag{1.4}$$

3. 分配律：

$$(A \cup B) \cap C = AC \cup BC \tag{1.5}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1.6}$$

4. 对偶律（德摩根公式）：

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \tag{1.7}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \tag{1.8}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i \tag{1.9}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \tag{1.10}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i \tag{1.11}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \tag{1.12}$$

5. 差公式：

$$A - B = A\bar{B} \tag{1.13}$$

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛三枚硬币；

(2) 抛三枚骰子；

(3) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止；

(4) 口袋中有黑、白、红球各一，从中任取 2 个球，先从中取 1，放回去后再取 1；

(5) 口袋中有黑、白、红球各一，从中任取 2 个球，先从中取 1，不放回再取 1。

解

(1) $\Omega = \{ZZZ, ZZF, ZFZ, ZFF, FZZ, FZF, FFZ, FFF\}$

(2) $\Omega = \{x, y, z \in (1, 2, 3, 4, 5, 6) \mid (x, y, z)\}$

(3) $\Omega = \{(Z), (F, Z), (F, F, Z), ..., (F, F, F, ..., F, Z)\}$

(4) $\Omega = \{(B, B), (B, W), (B, R), (W, B), (W, W), (W, R), (R, B), (R, W), (R, R)\}$

(5) $\Omega = \{(B, W), (B, R), (W, B), (W, R), (R, B), (R, W)\}$

2. 先抛一枚硬币，若出现正面（记为 Z），则再掷一枚骰子，试验停止；若出现反面（记为 F），则再抛一次硬币，试验停止。那么，该试验的样本空间 Ω 是什么？

解

$\Omega = \{X \in (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \mid (Z, X), (F, F), (F, Z)\}$

3. 设 A, B, C 为三事件，试表示下列事件：

(1) A, B, C 都发生或都不发生；

(2) A, B, C 中不多于一个发生：

(3) A, B, C 中不多于两个发生；

(4) A, B, C 中至少有两个发生。

解

(1) $ABC \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(2) $\bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(3) $\overline{ABC}$

(4) $ABC \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

4. 指出下列事件等式成立的条件。

1 $A \cup B = A$；

2 $AB = A$。

解

1 $B \subset A$

2 $A \subset B$

5. 设 X 为随机变量，其样本空间为 $\Omega = \{0 \le X \le 2\}$，记事件 $A = \{0.5 < X \le 1\}$，$B = \{0.25 \le X < 1.5\}$，写出下列各事件：

(1) $\bar{A}B$;

(2) $\bar{A} \cup B$;

(3) $\overline{AB}$;

(4) $\overline{A \cup B}$

解

(1) $\bar{A} = \{0 \le X \le 0.5\} \cup \{1 < X \le 2\} \Rightarrow \bar{A}B = \{0.25 \le X 0.5\} \cup \{1 < X < 1.5\}$

(2) $\bar{A} \cup B = \Omega$

(3) $AB = A \Rightarrow \overline{AB} = \bar{A} = \{0 \le X \le 0.5\} \cup \{1 < X \le 2\}$

(4) $\overline{A \cup B} = \bar{B} = \{0 \le X < 0.25\} \cup \{1.5 \le X \le 2\}$

6. 检查三件产品，只区分每件产品是合格品 (记为 0) 与不合格品 (记为 1)，设 X 为三件产品中的不合格品数，指出下列事件所含的样本点：

$A =$ “$X = 1$”, $B =$ “$X > 2$”, $C =$ “$X = 0$”, $D =$ “$X = 4$”.

解

$A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$B = \{(1,1,1)\}$

$C = \{(0,0,0)\}$

$D = \emptyset$

7. 试问下列命题是否成立？

(1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$

(2) 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subset A$，则 $BC = \emptyset$

(3) $(A \cup B) - B = A$

(4) $(A - B) \cup B = A$

解

(1) $A - (B - C) = A - B\bar{C} = A\overline{B\bar{C}} = A(\bar{B} \cup C) = A\bar{B} \cup AC = (A - B) \cup AC \ne (A - B) \cup C$　不成立

(2) 成立

(3) $(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} \ne A$　不成立

(4) $(A - B) \cup B = (A\bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = A \cup B \ne A$　不成立

8. 若事件 $ABC = \emptyset$，是否一定有 $AB = \emptyset$？

解

不一定，有可能 $AB \ne \emptyset$ 但 $AB \cap C = \emptyset$；或者 ABC 两两互不相交。

9. 请叙述下列事件的对立事件:

(1) $A =$“ 掷两枚硬币，皆为正面 ”;

(2) $B =$“ 射击三次，皆命中目标 ”;

(3) $A =$“ 加工四个零件，至少有一个合格品 ”。

解

(1) $\bar{A} =$“ 掷两枚硬币，最多只有一枚为正面 ”;

(2) $\bar{B} =$“ 射击三次，没有全部命中目标 ”;

(3) $\bar{C} =$“ 加工四个零件，全部是不合格品 ”。

10. 证明下列事件的运算公式:

(1) $A = AB \cup A\bar{B}$

(2) $A \cup B = A \cup \bar{A}B$

证明

(1) $AB \cup A\bar{B} = A(B \cup \bar{B}) = A$

(2) $A \cup B = A \cup BA \cup B\bar{A} = A \cup \bar{A}B$

11. 设 $\mathscr{F}$ 为一事件域，若 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \ldots$，试证:

(1) $\emptyset \in \mathscr{F}$;

(2) 有限并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}, n \geq 1$;

(3) 有限交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}, n \geq 1$;

(4) 可列交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$;

(5) 差运算 $A_1 - A_2 \in \mathscr{F}$。

证明

(1) 因为 $\mathscr{F}$ 为一事件域，所以 $\Omega \in \mathscr{F}$，故其对立事件 $\bar{\Omega} = \emptyset \in \mathscr{F}$

(2) 因为 $A_n \in \mathscr{F}$，所以任一事件满足 $X \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \in \mathscr{F}$

(3) 因为 $A_i \in \mathscr{F}$，所以 $\bar{A}_i \in \mathscr{F}$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i} \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$

(4) 因为 $A_i \in \mathscr{F}$，所以 $\bar{A}_i \in \mathscr{F}$，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

(5) 因为 $A_2 \in \mathscr{F}$，所以 $\bar{A}_2 \in \mathscr{F}$，由 (3)（有限交）得 $A_1 - A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2 \in \mathscr{F}$。

1.2 概率得定义及其确定方法

公理 1.1 (概率三公理)

设 Ω 为一个样本空间。$\mathscr{F}$ 为 Ω 得某些子集组成的一个事件域。如果对任一事件 $A \in \mathscr{F}$，定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足：

(1) 非负性公理　如果 $A \in \mathscr{F}$, 那么 $P(A) \geq 0$。

(2) 正则性公理　$P(\Omega) = 1$

(3) 可列可加性公理　如果 $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ 互不相容，那么：

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 得概率，称三元素（Ω, $\mathscr{F}$, P）为概率空间。

习题 1.2

1. 对于组合数 $\binom{n}{r}$，证明：

(1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$;

(2) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$;

(3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... \binom{n}{n} = 2^n$;

(4) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + ... + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$;

(5) $\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + ... + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$,　$n = min(a, b)$;

(6) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}^2$.

证明

(1) $$\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot [n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

(2) $$\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot [n-1-(r-1)]!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!}$$

$$\binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-1-r)!}$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \cdot \left[\frac{(n-1)! \cdot r}{r! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{r! \cdot (n-r)!}\right] = \frac{(n-1)! \cdot n}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

(3) 由 (1) 易得：$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}, \ldots$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots \binom{n}{n}$

(4)

(5)

(6)