



概率论与数理统计习题

茆诗松版

作者：Mick Huang

目录

第一章 随机事件与概率	1
1.1 随机事件及其运算	1
第一章 练习	2
1.2 概率得定义及其确定方法	5
第一章 练习	5

第一章 随机事件与概率

1.1 随机事件及其运算

定理 1.1 (事件运算性质)

1. 交换律:

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.1)$$

$$AB = BA \quad (1.2)$$

2. 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (1.3)$$

$$(AB)C = A(BC) \quad (1.4)$$

3. 分配律:

$$(A \cup B) \cap C = AC \cup BC \quad (1.5)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (1.6)$$

4. 对偶律 (德摩根公式):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (1.7)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (1.8)$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \quad (1.9)$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \quad (1.10)$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i \quad (1.11)$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \quad (1.12)$$

5. 差公式:

$$A - B = A\bar{B} \quad (1.13)$$



习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

- (1) 抛三枚硬币；
- (2) 抛三枚骰子；
- (3) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止；
- (4) 口袋中有黑、白、红球各一，从中任取 2 个球，先从中取 1，放回去后再取 1；
- (5) 口袋中有黑、白、红球各一，从中任取 2 个球，先从中取 1，不放回再取 1。

解

- (1) $\Omega = \{ZZZ, ZZF, ZFZ, ZFF, FZZ, FZF, FFZ, FFF\}$
- (2) $\Omega = \{x, y, z \in (1, 2, 3, 4, 5, 6) \mid (x, y, z)\}$
- (3) $\Omega = \{(Z), (F, Z), (F, F, Z), \dots, (F, F, F, \dots, F, Z)\}$
- (4) $\Omega = \{(B, B), (B, W), (B, R), (W, B), (W, W), (W, R), (R, B), (R, W), (R, R)\}$
- (5) $\Omega = \{(B, W), (B, R), (W, B), (W, R), (R, B), (R, W)\}$

2. 先抛一枚硬币，若出现正面（记为 Z ），则再掷一枚骰子，试验停止；若出现反面（记为 F ），则再抛一次硬币，试验停止。那么，该试验的样本空间 Ω 是什么？

解

$$\Omega = \{X \in (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \mid (Z, X), (F, F), (F, Z)\}$$

3. 设 A, B, C 为三事件，试表示下列事件：

- (1) A, B, C 都发生或都不发生；
- (2) A, B, C 中不多于一个发生；
- (3) A, B, C 中不多于两个发生；
- (4) A, B, C 中至少有两个发生。

解

- (1) $ABC \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
- (2) $\bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}\bar{C} \cup AB\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
- (3) \overline{ABC}
- (4) $ABC \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

4. 指出下列事件等式成立的条件。

- 1 $A \cup B = A$;
- 2 $AB = A$ 。

解

- 1 $B \subset A$
- 2 $A \subset B$

5. 设 X 为随机变量, 其样本空间为 $\Omega = \{0 \leq X \leq 2\}$, 记事件 $A = \{0.5 < X \leq 1\}$, $B = \{0.25 \leq X < 1.5\}$, 写出下列各事件:

- (1) $\bar{A}B$;
- (2) $\bar{A} \cup B$;
- (3) \overline{AB} ;
- (4) $\overline{A \cup B}$

解

- (1) $\bar{A} = \{0 \leq X \leq 0.5\} \cup \{1 < X \leq 2\} \Rightarrow \bar{A}B = \{0.25 \leq X \leq 0.5\} \cup \{1 < X < 1.5\}$
- (2) $\bar{A} \cup B = \Omega$
- (3) $AB = A \Rightarrow \overline{AB} = \bar{A} = \{0 \leq X \leq 0.5\} \cup \{1 < X \leq 2\}$
- (4) $\overline{A \cup B} = \bar{B} = \{0 \leq X < 0.25\} \cup \{1.5 \leq X \leq 2\}$

6. 检查三件产品, 只区分每件产品是合格品 (记为 0) 与不合格品 (记为 1), 设 X 为三件产品中的不合格品数, 指出下列事件所含的样本点:

$A = "X = 1"$, $B = "X > 2"$, $C = "X = 0"$, $D = "X = 4"$.

解

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \\ B &= \{(1, 1, 1)\} \\ C &= \{(0, 0, 0)\} \\ D &= \emptyset \end{aligned}$$

7. 试问下列命题是否成立?

- (1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$
- (2) 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subset A$, 则 $BC = \emptyset$
- (3) $(A \cup B) - B = A$
- (4) $(A - B) \cup B = A$

解

- (1) $A - (B - C) = A - B\bar{C} = \overline{AB\bar{C}} = A(\bar{B} \cup C) = A\bar{B} \cup AC = (A - B) \cup AC \neq (A - B) \cup C$ 不成立
- (2) 成立
- (3) $(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} \neq A$ 不成立
- (4) $(A - B) \cup B = (A\bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = A \cup B \neq A$ 不成立

8. 若事件 $ABC = \emptyset$, 是否一定有 $AB = \emptyset$?

解

不一定, 有可能 $AB \neq \emptyset$ 但 $AB \cap C = \emptyset$; 或者 ABC 两两互不相交。

9. 请叙述下列事件的对立事件：

- (1) A = “掷两枚硬币，皆为正面”；
- (2) B = “射击三次，皆命中目标”；
- (3) A = “加工四个零件，至少有一个合格品”。

解

- (1) \bar{A} = “掷两枚硬币，最多只有一枚为正面”；
- (2) \bar{B} = “射击三次，没有全部命中目标”；
- (3) \bar{C} = “加工四个零件，全部是不合格品”。

10. 证明下列事件的运算公式：

- (1) $A = AB \cup A\bar{B}$
- (2) $A \cup B = A \cup \bar{A}B$

证明

- (1) $AB \cup A\bar{B} = A(B \cup \bar{B}) = A$
- (2) $A \cup B = A \cup BA \cup B\bar{A} = A \cup \bar{A}B$

11. 设 \mathcal{F} 为一事件域，若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$ ，试证：

- (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ ；
- (2) 有限并 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}, n \geq 1$ ；
- (3) 有限交 $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}, n \geq 1$ ；
- (4) 可列交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ；
- (5) 差运算 $A_1 - A_2 \in \mathcal{F}$ 。

证明

- (1) 因为 \mathcal{F} 为一事件域，所以 $\Omega \in \mathcal{F}$ ，故其对立事件 $\bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
- (2) 因为 $A_n \in \mathcal{F}$ ，所以任一事件满足 $X \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}$
- (3) 因为 $A_i \in \mathcal{F}$ ，所以 $\bar{A}_i \in \mathcal{F}$ ， $\bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$
- (4) 因为 $A_i \in \mathcal{F}$ ，所以 $\bar{A}_i \in \mathcal{F}$ ， $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- (5) 因为 $A_2 \in \mathcal{F}$ ，所以 $\bar{A}_2 \in \mathcal{F}$ ，由 (3)（有限交）得 $A_1 - A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2 \in \mathcal{F}$ 。

1.2 概率得定义及其确定方法

公理 1.1 (概率三公理)

设 Ω 为一个样本空间。 \mathcal{F} 为 Ω 得某些子集组成的一个事件域。如果对任一事件 $A \in \mathcal{F}$ ，定义在 \mathcal{F} 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足：

- (1) 非负性公理 如果 $A \in \mathcal{F}$ ，那么 $P(A) \geq 0$ 。
- (2) 正则性公理 $P(\Omega) = 1$
- (3) 可列可加性公理 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 互不相容，那么：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 得概率，称三元素 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间。



习题 1.2

1. 对于组合数 $\binom{n}{r}$ ，证明：

- (1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$;
- (2) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$;
- (3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$;
- (4) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$;
- (5) $\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \dots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$, $n = \min(a, b)$;
- (6) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

证明

$$(1) \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot [n - (n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

$$(2) \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot [n-1 - (r-1)]!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!}$$

$$\binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-1-r)!}$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)! \cdot r}{r! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

$$(3) \text{ 由二项式定理 } (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\text{令 } a = 1, b = 1 \Rightarrow 2^n = (1 + 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$(4) \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{r \cdot (r-1)! \cdot [(n-1) - (r-1)]!} = \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot [(n-1) - (r-1)]!}$$

$$r \binom{n}{r} = r \cdot \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot [(n-1) - (r-1)]!} = n \binom{n-1}{r-1}$$

$$\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n 2^{n-1} = n \cdot \binom{n-1}{1-1} + n \cdot \binom{n-1}{2-1} + \dots + n \cdot \binom{n-1}{n-1} = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$$

$$\text{根据 (3), } n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1}$$

(5)

(6)

2. 抛三枚硬币，求至少出现一个正面的概率.

解

$A = \{ \text{抛三枚硬币至少出现一个正面} \}$

$$\bar{A} = \{ \text{抛三枚硬币全部都是反面} \} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

3. 任取两个正整数，求它们的和为偶数的概率.

解

因为奇数 + 奇数 = 偶数，偶数 + 偶数 = 偶数，只有奇数 + 偶数 = 奇数

两个正整数之和的事件空间为 $\Omega = \{(E, E), (E, O), (O, E), (O, O)\}$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4. 掷两颗骰子，求下列事件的概率：

- (1) 点数之和为 6；
- (2) 点数之和不超过 6；
- (3) 至少有一个 6 点。

解

两颗骰子掷出的可能性共有 $6^2 = 36$ 种。

- (1) 点数之和为 6 的分别为 $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ ，共 6 种。

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$(2) P(A) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$(3) P(A) = 1 - \frac{5^2}{36} = \frac{11}{36}$$

5. 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，求下列事件的概率：

- (1) 全是黑桃；
- (2) 同花；
- (3) 没有两张同一花色；
- (4) 同色.

解

$$(1) p = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{11}{4165} = 0.002641$$

$$(2) p = 4 \cdot \frac{11}{4165} = 0.01056$$

$$(3) p = \frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \frac{28561}{270725} = 0.105498$$

$$(4) p = \frac{2 \cdot \binom{26}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{29900}{270725} = 0.110444$$

6. 抛三枚硬币，求至少出现一个正面的概率.

解

7. 抛三枚硬币，求至少出现一个正面的概率.

解