



# 概率论与数理统计习题

茆诗松版

作者：Mick Huang

# 目录

第一章 随机事件与概率	1
1.1 随机事件及其运算	1
第一章 练习	2
1.2 概率得定义及其确定方法	5
第一章 练习	5

# 第一章 随机事件与概率

## 1.1 随机事件及其运算

### 定理 1.1 (事件运算性质)

1. 交换律:

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.1)$$

$$AB = BA \quad (1.2)$$

2. 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (1.3)$$

$$(AB)C = A(BC) \quad (1.4)$$

3. 分配律:

$$(A \cup B) \cap C = AC \cup BC \quad (1.5)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (1.6)$$

4. 对偶律 (德摩根公式):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (1.7)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (1.8)$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \quad (1.9)$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \quad (1.10)$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i \quad (1.11)$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \quad (1.12)$$

5. 差公式:

$$A - B = A\bar{B} \quad (1.13)$$



## 习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

- (1) 抛三枚硬币；
- (2) 抛三枚骰子；
- (3) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止；
- (4) 口袋中有黑、白、红球各一，从中任取 2 个球，先从中取 1，放回去后再取 1；
- (5) 口袋中有黑、白、红球各一，从中任取 2 个球，先从中取 1，不放回再取 1。

解

- (1)  $\Omega = \{ZZZ, ZZF, ZFZ, ZFF, FZZ, FZF, FFZ, FFF\}$
- (2)  $\Omega = \{x, y, z \in (1, 2, 3, 4, 5, 6) \mid (x, y, z)\}$
- (3)  $\Omega = \{(Z), (F, Z), (F, F, Z), \dots, (F, F, F, \dots, F, Z)\}$
- (4)  $\Omega = \{(B, B), (B, W), (B, R), (W, B), (W, W), (W, R), (R, B), (R, W), (R, R)\}$
- (5)  $\Omega = \{(B, W), (B, R), (W, B), (W, R), (R, B), (R, W)\}$

2. 先抛一枚硬币，若出现正面（记为  $Z$ ），则再掷一枚骰子，试验停止；若出现反面（记为  $F$ ），则再抛一次硬币，试验停止。那么，该试验的样本空间  $\Omega$  是什么？

解

$$\Omega = \{X \in (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \mid (Z, X), (F, F), (F, Z)\}$$

3. 设  $A, B, C$  为三事件，试表示下列事件：

- (1)  $A, B, C$  都发生或都不发生；
- (2)  $A, B, C$  中不多于一个发生；
- (3)  $A, B, C$  中不多于两个发生；
- (4)  $A, B, C$  中至少有两个发生。

解

- (1)  $ABC \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
- (2)  $\bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}\bar{C} \cup AB\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
- (3)  $\overline{ABC}$
- (4)  $ABC \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

4. 指出下列事件等式成立的条件。

- 1  $A \cup B = A$ ;
- 2  $AB = A$ 。

解

- 1  $B \subset A$
- 2  $A \subset B$

5. 设  $X$  为随机变量, 其样本空间为  $\Omega = \{0 \leq X \leq 2\}$ , 记事件  $A = \{0.5 < X \leq 1\}$ ,  $B = \{0.25 \leq X < 1.5\}$ , 写出下列各事件:

- (1)  $\bar{A}B$ ;
- (2)  $\bar{A} \cup B$ ;
- (3)  $\overline{AB}$ ;
- (4)  $\overline{A \cup B}$

解

- (1)  $\bar{A} = \{0 \leq X \leq 0.5\} \cup \{1 < X \leq 2\} \Rightarrow \bar{A}B = \{0.25 \leq X \leq 0.5\} \cup \{1 < X < 1.5\}$
- (2)  $\bar{A} \cup B = \Omega$
- (3)  $AB = A \Rightarrow \overline{AB} = \bar{A} = \{0 \leq X \leq 0.5\} \cup \{1 < X \leq 2\}$
- (4)  $\overline{A \cup B} = \bar{B} = \{0 \leq X < 0.25\} \cup \{1.5 \leq X \leq 2\}$

6. 检查三件产品, 只区分每件产品是合格品 (记为 0) 与不合格品 (记为 1), 设  $X$  为三件产品中的不合格品数, 指出下列事件所含的样本点:

$A = "X = 1"$ ,  $B = "X > 2"$ ,  $C = "X = 0"$ ,  $D = "X = 4"$ .

解

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \\ B &= \{(1, 1, 1)\} \\ C &= \{(0, 0, 0)\} \\ D &= \emptyset \end{aligned}$$

7. 试问下列命题是否成立?

- (1)  $A - (B - C) = (A - B) \cup C$
- (2) 若  $AB = \emptyset$  且  $C \subset A$ , 则  $BC = \emptyset$
- (3)  $(A \cup B) - B = A$
- (4)  $(A - B) \cup B = A$

解

- (1)  $A - (B - C) = A - B\bar{C} = \overline{AB\bar{C}} = A(\bar{B} \cup C) = A\bar{B} \cup AC = (A - B) \cup AC \neq (A - B) \cup C$  不成立
- (2) 成立
- (3)  $(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} \neq A$  不成立
- (4)  $(A - B) \cup B = (A\bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = A \cup B \neq A$  不成立

8. 若事件  $ABC = \emptyset$ , 是否一定有  $AB = \emptyset$ ?

解

不一定, 有可能  $AB \neq \emptyset$  但  $AB \cap C = \emptyset$ ; 或者  $ABC$  两两互不相交。

9. 请叙述下列事件的对立事件：

- (1)  $A$  = “掷两枚硬币，皆为正面”；
- (2)  $B$  = “射击三次，皆命中目标”；
- (3)  $A$  = “加工四个零件，至少有一个合格品”。

解

- (1)  $\bar{A}$  = “掷两枚硬币，最多只有一枚为正面”；
- (2)  $\bar{B}$  = “射击三次，没有全部命中目标”；
- (3)  $\bar{C}$  = “加工四个零件，全部是不合格品”。

10. 证明下列事件的运算公式：

- (1)  $A = AB \cup A\bar{B}$
- (2)  $A \cup B = A \cup \bar{A}B$

证明

- (1)  $AB \cup A\bar{B} = A(B \cup \bar{B}) = A$
- (2)  $A \cup B = A \cup BA \cup \bar{A}B = A \cup \bar{A}B$

11. 设  $\mathcal{F}$  为一事件域，若  $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$ ，试证：

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ；
- (2) 有限并  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}, n \geq 1$ ；
- (3) 有限交  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}, n \geq 1$ ；
- (4) 可列交  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ；
- (5) 差运算  $A_1 - A_2 \in \mathcal{F}$ 。

证明

- (1) 因为  $\mathcal{F}$  为一事件域，所以  $\Omega \in \mathcal{F}$ ，故其对立事件  $\bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
- (2) 因为  $A_n \in \mathcal{F}$ ，所以任一事件满足  $X \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}$
- (3) 因为  $A_i \in \mathcal{F}$ ，所以  $\bar{A}_i \in \mathcal{F}$ ， $\bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$
- (4) 因为  $A_i \in \mathcal{F}$ ，所以  $\bar{A}_i \in \mathcal{F}$ ， $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- (5) 因为  $A_2 \in \mathcal{F}$ ，所以  $\bar{A}_2 \in \mathcal{F}$ ，由 (3)（有限交）得  $A_1 - A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2 \in \mathcal{F}$ 。

## 1.2 概率得定义及其确定方法

### 公理 1.1 (概率三公理)

设  $\Omega$  为一个样本空间。 $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  得某些子集组成的一个事件域。如果对任一事件  $A \in \mathcal{F}$ ，定义在  $\mathcal{F}$  上的一个实值函数  $P(A)$  满足：

- (1) 非负性公理 如果  $A \in \mathcal{F}$ ，那么  $P(A) \geq 0$ 。
- (2) 正则性公理  $P(\Omega) = 1$
- (3) 可列可加性公理 如果  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  互不相容，那么：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称  $P(A)$  为事件  $A$  得概率，称三元素  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间。



### 习题 1.2

1. 对于组合数  $\binom{n}{r}$ ，证明：

- (1)  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ ;
- (2)  $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ ;
- (3)  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ ;
- (4)  $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$ ;
- (5)  $\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \dots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$ ,  $n = \min(a, b)$ ;
- (6)  $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ .

证明

$$(1) \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot [n - (n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

$$(2) \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot [n-1 - (r-1)]!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!}$$

$$\binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-1-r)!}$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)! \cdot r}{r! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

$$(3) \text{ 由二项式定理 } (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\text{令 } a = 1, b = 1 \Rightarrow 2^n = (1 + 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$(4) \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{r \cdot (r-1)! \cdot [(n-1) - (r-1)]!} = \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot [(n-1) - (r-1)]!}$$

$$r \binom{n}{r} = r \cdot \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot [(n-1) - (r-1)]!} = n \binom{n-1}{r-1}$$

$$\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n 2^{n-1} = n \cdot \binom{n-1}{1-1} + n \cdot \binom{n-1}{2-1} + \dots + n \cdot \binom{n-1}{n-1} = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$$

$$\text{根据 (3), } n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1}$$

(5)

(6)