GEOMETRÍA E INFORMACIÓN

OPTATIVO

Mariela Adelina Portesi

Pedro Walter Lamberti

Steeve Zozor

Facultad de Ciencias Exactas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp

Editorial de la Universidad de La Plata

Esto es una dedicatoria
del libro.

Agradecimientos

Este es el texto de agradecimiento, max una carilla. Este es el texto de agradecimiento, max una carilla. Este es el texto de agradecimiento, max una carilla. Este es el texto de agradecimiento, max una carilla. Este es el texto de agradecimiento, max una carilla. Este es el texto de agradecimiento, max una carilla.

Esto es un epígrafe con texto simulado.
Esto es un epǵrafe con texto simulado.
AUTOR DEL EPÍGRAFE, TÍTULO DE LA OBRA

PRÓLOGO

Este libro surge de la experiencia de los autores en el dictado del curso semestral ”Métodos de geometría diferencial en teoría de la información", que se imparte en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata y en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba. ...

Los autores

ADVERTENCIA

Este libro surge de la experiencia de los autores en el dictado del curso semestral ”Métodos de geometría diferencial en teoría de la información", que se imparte en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata y en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba. ...

Mariela A. Portesi
Grenoble, Junio de 2016

Índice

Referencias

CAPÍTULO 1
Elementos de teoría de probabilidades

Mariela A. Portesi

While writing my book I had an argument with Feller.
He asserted that everyone said "random variable"
and I asserted that everyone said "chance variable."
We obviously had to use the same name in our books,
so we decided the issue by a stochastic procedure.
That is, we tossed for it and he won.
J. L. DOOB, STATISTICAL SCIENCE (1953)

1.1 Introducción

1.2 Probabilidades

El concepto de *probabilidad* es importante en situaciones donde el resultado (o *outcome*) de un dado proceso o medición es incierto, cuando la salida de una experiencia no es totalmente previsible. La probabilidad de un evento es una medida que se asocia con cuán probable es el evento o resultado.

Una definición de probabilidad puede obtenerse en base a la enumeración exhaustiva de los resultados posibles de un experimento o proceso, suponiendo que el conjunto de posibilidades es completo en el sentido de que una de ellas debe ser verdad. Si el proceso tiene K resultados distinguibles, mutuamente excluyentes e igualmente probables (esto es, no se prefiere una posibilidad frente a otras), y si k de esos K tienen un dado atributo, la probabilidad asociada a dicho atributo en un dado procesos es $\frac{k}{K}$. Por ejemplo, sorteando un número entre los naturales del 1 al 10, la probabilidad de "obtener un número par" es $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Otra definición de probabilidad se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento. Si en una cantidad K muy grande de procesos independientes cierto atributo aparece k veces, se identifica a la probabilidad asociada a un proceso o ensayo con la frecuencia relativa de ocurrencia $\frac{k}{K}$ del atributo (van Brakel, 1976; Hald, 1990; Shafer & Vovk, 2006, & Ref.) [1].

Los axiomas de Kolmogorov [2] proveen requisitos suficientes para determinar completamente las propiedades de la medida de probabilidad $P(A)$ que se puede asociar a un evento A entre un conjunto de resultados o eventos de un proceso.

Llamemos Ω al *espacio muestral* o *espacio fundamental*, que es el espacio de *muestras (outcomes en inglés)* $\omega \in \Omega$. Se asocia $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos de Ω, donde los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados *eventos*. Por ejemplo, Ω puede ser las caras de un dado de 6 caras (los números naturales del 1 al 6, o las letras *a, b, c, d, e, f*, u otro etiquetado), $\mathcal{A}$ teniendo los eventos A "es un número natural par" y B indicando "es un número natural impar". En el caso de analizar el tiempo de vida de un aparato, $\Omega \equiv \mathbb{R}_+$. El conjunto de resultados posibles se supone conocido, aún cuando se desconozca de antemano el resultado de una prueba.

Entre los eventos se pueden considerar operaciones análogas a las de la teoría de conjuntos (ej. (Spiegel, 1976; Brémaud, 1988; Mandel & Wolf, 1995; Sierpiński, 1975, 1976; Borel, 1898, 1909)):

- Combinación o unión de eventos: $A \cup B$, implicando que se da A, ó B, o ambos (ej. por un dado, A eventos "cara par" y B evento "cara menor o igual a 3" tal que $A \cup B = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,6\}$); Según la literatura, se denota a veces $A + B$ o $A \wedge B$.

- Intersección de eventos: $A \cap B$, implicando que se dan ambos A y B (con el ejemplo precediente, $A \cap B = \{2\}$); Se denota a veces (A, B) o $A \vee B$.

- Complemento de un evento: $\bar{A}$ e indica que no se da A; Se denota a veces $-A$ o A^c (con el ejemplo precediente, $\bar{A} = \{1\,,\,3\,,\,5\}$).

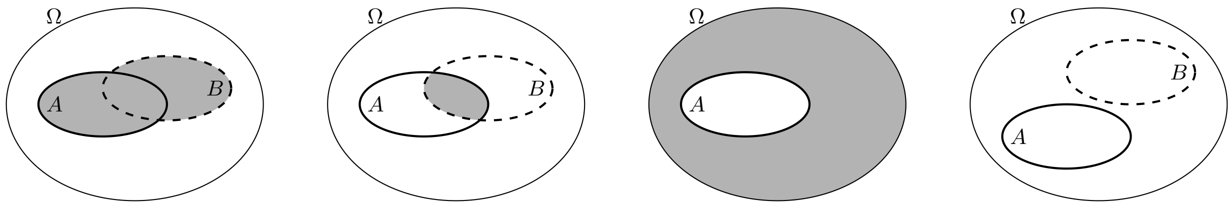
- Eventos *disjuntos* o *mutuamente excluyentes* o *o incompatibles*: son aquellos que no se superponen, se anota $A \cap B = \emptyset$ donde $\emptyset = \bar{\Omega}$ denota el evento nulo (evento que no puede ocurrir, es el complemento de Ω, por ejemplo A "cara par" y B "cara impar").

---

[1] A pesar de que la noción de azar (viniendo del arabe) o de alea (en latin) es muy antiguo, el italiano Gerolamo Cardano es "probablemente" un de los primeros tratando matematicamente del concepto de probabilidad en el siglo XVI, escribiendo un libro sobre los juegos de azar en 1564 (D.Bellhouse, 2005) o (Hald, 1990, Cap. 4). Entre los numerosos matematicos desarollando la teoria de las probabildades, (en particular los franceses Pierre de Fermat y Blaise Pascal (Hald, 1990, Cap. 5)) hay que mencionar el suizo Jacob Bernoulli y el francés Abraham de Moivre, quizas un de los primeros llevandos un aporte importante al desarollo de la teoria de las probabilidades en el siglo XVIII a través de este punto de vista "frequencista" y combinatorial (Bernoulli, 1713, en latin) o ((E. D. Sylla, Translator), 1713; DeMoivre, 1756) y (Hald, 1990, Cap. 13, 15 & 22).

[2] Un paso importante es debido a Kolmogorov en 1933 que se apoyó sobre trabajos de Richard von Mises (von Mises, 1932) y también sobre la teoria de la medida y de la integracíion debido entre otros a Emile Borel y Henri-Léon Lebesgues (Borel, 1898, 1909; Lebesgue, 1904, 1918; Halmos, 1950) para formalizar analíticamente la teoria de las probabilidades (Kolmogorov, 1956; Barone & Novikoff, 1978; Jacob & Protters, 2003).

Eso es ilustrado en la figura Fig. 1-1. La unión e intersección satisfacen a las mismas reglas que en la teoria ensemblista, es decir cada una es comutativa $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, asociativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, distributiva con respeto a la otra $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (ver ej. (Jeffrey, 1948, 1973; Halmos, 1950; Feller, 1971; Brémaud, 1988; Mandel & Wolf, 1995; Ibarrola, Pardo & Quesada, 1997; Lehmann & Casella, 1998; Athreya & Lahiri, 2006; Cohn, 2013; Hogg, McKean & Craig, 2013)).



(a) (b) (c) (d)

Figura 1-1: Ilustración de la operaciones de unión $A \cup B$ (a), intersección $A \cap B$ (b), complemento $\bar{A}$ (c), enventos excluyentes $A \cap B = \emptyset$ (d). A es representado en linea llena, B en linea discontinua; (a)-(c) el resultado de la operación es la zona en grise. A veces, esta representación ensemblista se denota *diagrama de Venn o de Euler*.

Formalmente, se define de manera abstracta un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ de la manera siguiente (Halmos, 1950; Feller, 1968, 1971; Brémaud, 1988; Ibarrola et al., 1997; Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007a; Cohn, 2013) (ver también (Barone & Novikoff, 1978; Borel, 1898; Sierpiński, 1918, 1975, 1976, & Ref.) para notas históricas):

Definición 1-1 (Espacio medible)**.** $(\Omega, \mathcal{A})$ *formado de un espacio muestral* Ω *y una colección* $\mathcal{A}$ *de conjuntos de* Ω *es llamado espacio medible si satisface a los requisitos*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. *si* $A \in \mathcal{A}$*, entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$,
3. *la unión numerable de conjuntos de* $\mathcal{A}$ *queda en* $\mathcal{A}$ *(*$\mathcal{A}$ *es cerrado por la uníon numerable).*

Con esta propiedades, $\mathcal{A}$ *es llamado* σ*-álgebra. Los elementos de* $\mathcal{A}$ *son dichos medibles.*

Es sencillo mostrar de que Ω también es en $\mathcal{A}$, y de que $\mathcal{A}$ est cerrado por la intersección numerable. Un ejemplo de σ-álgebra sobre $\Omega = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}$ puede ser $\big\{\emptyset\,,\,\Omega\,,\,\{1\,,\,2\,,\,3\}\,,\,\{4\,,\,5\,,\,6\}\big\}$.

Las propiedades de la probabilidad P de un dado evento quedan determinadas por los siguientes (ej. (Spiegel, 1976; Kolmogorov, 1956; Shafer & Vovk, 2006; von Plato, 2005)):

Axiomas de Kolmogorov

1. $P(A_i) \geq 0 \ \forall \ A_i \mathcal{A}$
2. Si $\{A_i\}_i$ son eventos mutuamente excluyentes de $\mathcal{A}$, entonces $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$

3. $P(\Omega) = 1$

Formalmente, se define un *espacio de probabilidad* o *espacio probabilístico* de la manera siguiente (Halmos, 1950; Feller, 1968, 1971; Brémaud, 1988; Ibarrola et al., 1997; Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007a; Jacob & Protters, 2003; Cohn, 2013):

Definición 1-2 (Espacio probabilístico). *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$, y*

2. *para cualquier conjunto numerable $\{A_i\}$ de elementos mutualmente excluyentes de $\mathcal{A}$ se tiene $\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$*

es llamada función medida o medida σ-aditiva y el espacio $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado espacio de medida.

Cuando μ es acotada por arriba, $\mu(\Omega) < +\infty$, la medida es dicha finita y el espacio tambiń es dicho finito. Además, si

$$P \equiv \mu, \quad P(\Omega) = 1,$$

la medida es dicha medida de probabilidad, $\mu \equiv P$. En este caso, el espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es llamado espacio probabilístico.

(ver también (Kolmogorov & Fomin, 1961, Cap. 5 & 6)).

A partir de los axiomas de Kolmogorov se pueden probar varios corolarios y propiedades:

- la probabilidad de un evento seguro o cierto es 1;
- la probabilidad de un evento que no puede ocurrir es 0: $P(\emptyset) = 0$;
- el rango de las probabilidades está acotado: $0 \leq P(A) \leq 1 \;\; \forall \, A \in \mathcal{A}$;
- condición de normalización: si $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$, con A_i mutuamente excluyentes, entonces $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$; el conjunto $\{A_i\}_{i=1}^n$ es dicho *conjunto completo de eventos posibles excluyentes entre sí* y es ilustrado figure 1-2;
- si A es subconjunto de B, lo que escribiremos $A \subset B$, es decir si B se realiza, A se realiza también (pero no necesariamente al revés), entonces $P(A) \leq P(B)$; Es ilustrado figure 1-2;

Nota: la probabilidad $P(A \cap B)$ del evento $A \cap B$ se llama también *probabilidad conjunta* de A y B. Se demuestra que

- $P(A \cap B)$ está acotada: $0 \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$; (viene de $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$).
- Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $p(A \cap B) = 0$; (viene de $A \cap B = \emptyset$).
- si $\{B_j\}_{j=1}^m$ es un conjunto completo de eventos posibles excluyentes entre sí, entonces $\sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A)$; (viene de $\{A \cap B_j\}$ mutualmente excluyentes y $\bigcup_j (A \cap B_j) = A \cap \left(\bigcup_j B_j\right) = A \cap \Omega = A$).

(a) (b)

Figura 1-2: Ilustración de conjunto completo de eventos posibles excluyentes entre sí (a), y de la inclusión (b) donde A es en grise (claro como oscuro) mientras de que B es en grise oscuro.

En el caso de eventos no necesariamente mutuamente excluyentes, se prueba que la *ley de composición* o *formula de inclusión-exclusión* es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B),$$

y que para n eventos resulta

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right).$$

La igualdad vale en el caso especial de eventos mutuamente excluyentes (recuperando el segundo axioma de Kolmogorov).

Se prueba también de que si $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}$ es una secuencia creciente de eventos, *i. e.,* $\forall\, i \geq 1, \quad A_i \subset A_{i+1}$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i \to +\infty} P(A_i)$$

Similarmente, si $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}$ es una secuencia decreciente de eventos, *i. e.,* $\forall\, i \geq 1, \quad A_{i+1} \subset A_i$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i \to +\infty} P(A_i)$$

Se puede preguntarse de cual es la probabilidad de un evento A, si sabemos que tenemos un evento B, dado. Por ejemplo, por un dado de 6 caras equilibriado, cual es la probabilidad de tener un número par sabiendo que tenemos un numero menor a igual a 3. La respuesta es en la noción de *probabilidad condicional* (Hausdorff, 1901; Jeffrey, 1948, 1973; Brémaud, 1988; Mandel & Wolf, 1995; Jacob & Protters, 2003; Shafer & Vovk, 2006):

Definición 1-3 (Probabilidad condicional)**.** *Por definición, la probabilidad condicional de A dado B es la razón entre la probabilidad del evento conjunto y la probabilidad de que se dé B (cuando éste es un evento no nulo):*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

En el ejemplo precediente, la probabilidad va a ser $P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$.

Es fácil demostrar que esta cantidad toma valores entre 0 y 1, con $P(\Omega|B) = 1$, y que es aditiva para una unión de eventos mutuamente excluyentes referidos al cumplimiento de B. Luego, $P(A|B)$ es una medida de probabilidad [3]; Por eso, a veces en la literatura se la denota $P_B(A)$. Diversas situaciones de probabilidades condicionales son ilustradas en la figura siguiente, Fig. 1-3.

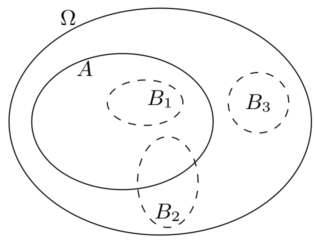


Figura 1-3: Ilustración de la probabilidad condicional con A interior del elipse en linea llena y unos B_i interiores de los elipses en lineas discontinuas. $\omega \in B_1 \Rightarrow \omega \in A$ así que $P(A|B_1) = 1$. Al revés, $\omega \in B_3 \Rightarrow \omega \notin A$ así que $P(A|B_3) = 0$. Entre estas situaciones extremas, si $P(\bar{A} \cap B_2) \neq 0$ y $P(A \cap B_2) \neq 0$ tenemos $0 < P(A|B_2) < 1$ (ej. con probabilidades iguales a las superficias relativas de los conjuntos).

Algunas propiedades interesantes son las siguientes:

- condición de normalización: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B) = 1$, siendo $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ un conjunto completo de resultados posibles mutuamente excluyentes;
- relación entre probabilidades condicionales inversas: $P(B|A) = \dfrac{P(B)}{P(A)} P(A|B)$, de donde $p(A|B)$ y $p(B|A)$ coinciden sólo cuando A y B tienen la misma probabilidad;
- *fórmula de probabilidades totales*: si $\{B_j\}$ es un conjunto completo de eventos no nulos mutuamente excluyentes, entonces
$$P(A) = \sum_j P(A|B_j) P(B_j)$$
Viene de $A = A \cap \left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_j (A \cap B_j)$ donde los $A \cap B_j$ son mutuamente excluyentes, y $P(A \cap B_j) = P(A|B_j)P(B_j)$.
- *fórmula de Bayes*: si $\{B_j\}$ es un conjunto completo de eventos no nulos mutuamente excluyentes, entonces
$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$
(ver (Brémaud, 1988; Jacob & Protters, 2003; Bayes, 1763; Barnard, 1958)).

Terminamos esta sección por la noción de independencia entre dos eventos. Por ejemplo, si dos dados son tirado sobre dos mesas diferentes, no hay ninguna razón de que la muestra de uno "influye" la del otro. Dicho de otra manera, dos eventos son independientes si conciendo uno no lleva ninguna "información" sobre el otro (Brémaud, 1988; Mandel & Wolf, 1995; Hausdorff, 1901; Jacob & Protters, 2003; Borel, 1909):

[3] Se puede definir un espacio de probabilidad $(\Omega_B, \mathcal{A}_B, P_B)$ donde $P_B(A) \equiv P(A|B)$.

Definición 1-4 (Independencia estadística)**.** *Dos eventos A y B se dicen estadísticamente independientes si la probabilidad condicional de A dado B es igual a la probabilidad incondicional de A:*

$$P(A|B) = P(A).$$

Es equivalente al hecho de que la probabilidad conjunta se factoriza,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Por inducción, la condición necesaria y suficiente para que n eventos $A_1, \ldots, A_n$ sean estadísticamente *mutuamente* independientes es que la probabilidad conjunta se factorice como

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Se deduce que los eventos mutuamente excluyentes no son estadísticamente independientes.

Es importante notar que la independencia mutua no es equivalente a la independencia por pares de eventos. Por ejemplo, tiramos 2 dados independientemente y consideramos los eventos A_i: el dado i es par y A_3 la suma es impar. Es claro de que A_1 y A_2 son independientes y ademas $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$ (es tener par y impar), mientras que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \frac{1}{8}$: los eventos son independientes pares, pero no son mutuamente independientes (Hogg et al., 2013).

1.3 Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

En un experimento o un dado proceso, los posibles resultados son típicamente números reales, siendo cada número un evento. Luego los resultados son mutuamente excluyentes. Se considera a esos números como valores de una variable aleatoria X *a valores reales, que puede ser discreta o continua.*

Formalmente, la noción de variable aleatoria se apoya sobre la noción de función medible (Kolmogorov & Fomin, 1961; Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007a; Cohn, 2013):

Definición 1-5 (Función medible)**.** *Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\Upsilon, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Una función $f : \Omega \mapsto \Upsilon$ es dicha $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-medible si*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \quad A \equiv f^{-1}(B) = \{\omega \in A : \, f(\omega) \in B\} \, \in \, \mathcal{A}$$

Dicho de otra manera, la pre-imagen de un elemento dada de $\mathcal{B}$ (elemento medible) partenece a $\mathcal{A}$ (elemento medible). A veces, se dice más simplemente de que $f : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\Upsilon, \mathcal{B})$ es medible por abuso de escritura.

Además, saliendo de un espacio de medida y una función f medible, se puede definir una medida imagen sobre el espacio de llegada (Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007a; Cohn, 2013):

Teorema 1-1 (Teorema de la medida imagen)**.** *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(\Upsilon, \mathcal{B})$ un espacio medible y una función $f : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\Upsilon, \mathcal{B})$ medible. Sea μ_f tal que*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \quad \mu_f(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$

Entonces, μ_f es una medida sobre el espacio medible $(\Upsilon, \mathcal{B})$ i. e., $(\Upsilon, \mathcal{B}, \mu_f)$ define un espacio de medida. Además, $\mu(\Omega) = \mu_f(\Upsilon)$ (posiblemente infinitas). μ_f es dicha medida imagen de μ por f.

Demostración. Por definición, claramente $\mu_f \geq 0$ y por definición de una función, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ dando $\mu_f(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Luego, si para un conjunto numerable $\{B_j\}$ de elementos de $\mathcal{B}$ disjuntos entre sí, las preimagenes de los B_j son disjuntos también entre sí (para $k \neq j$ no se puede tener $\omega \in f^{-1}(B_j) \cap f^{-1}(B_k)$ si no ω tendría dos imagenes distinctas por f). Entonces $f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_j f^{-1}(B_j)$. Eso implica de que $\mu_f\left(\bigcup_j B_j\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right)\right) = \bigcup_j \mu\left(f^{-1}(B_j)\right) = \sum_j \mu\left(f^{-1}(B_j)\right) = \sum_j \mu_f(B_j)$. Finalmente, necesariamente $f^{-1}(\Upsilon) = \Omega$ (es incluida y $f(\Omega)$ siendo en Υ son necesariamente iguales) lo que cierra la prueba [4]. □

Un espacio jugando un rol particular es $\mathbb{R}$, a lo cual se puede asociar $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ-álgebra más pequeña generada por los intervalos $(-\infty\,;\,b]$ (equivalentemente, por los abiertos de $\mathbb{R}$, o también por los intervalos $(a\,;\,b]$), *i. e.,* uniones numerables, intersecciones numerables, complementos de estos intervalos (Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007a, 2007b; Cohn, 2013). $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es llamada *Borelianos de* $\mathbb{R}$ o *σ-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}$.

Con estas definiciones, tenemos todo lo necesario para introducir la definición de una variable aleatoria real (Athreya & Lahiri, 2006; Cohn, 2013; Brémaud, 1988):

Definición 1-6 (Variable aleatoria real). *Una variable aleatoria real es una función medible*

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$$

donde la medida P_X sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la medida imagen de P. P_X es frecuentemente llamada distribución de probabilidad o ley de la variable aleatoria X. En lo que sigue, escribiremos los eventos

$$(X \in B) \equiv X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \in B\}$$

así que, por definición,

$$P_X(B) = P(X \in B)$$

Para ilustrar esta definición, tomando el ejemplo de un dado, Ω es discreto y representa las caras, mientras de que los numeros serán la imagen de Ω por X (ej. $X(\omega_j) = j, \quad j = 1, \ldots, 6$).

Fijense de que, por las propiedades de una medida sobre una σ-álgebra, para caracterizar completamente la distribución P_X es suficiente conocerla sobre los intervalos de la forma $(-\infty\,;\,b]$. Eso da lugar a la definición de la función de repartición (Athreya & Lahiri, 2006; Cohn, 2013; Brémaud, 1988; Hogg et al., 2013):

---

[4] De hecho, se puede sencillamente probar que la preimagen de una unión numerable (que sean disjuntos o no) es la unión de las preimagenes; lo mismo occure para la intersección y además la preimagen del complemento es el complemento de la preimagen. Eso es conocido como *leyes de de Morgan* (Athreya & Lahiri, 2006; Cohn, 2013; Hogg et al., 2013) (ver también (Kolmogorov & Fomin, 1957, Cap. 1) y (Kolmogorov & Fomin, 1961, Caps. 5 & 6)).

Definición 1-7 (Función de repartición)**.** *Por definición, la función de repartición F_X de una variable aleatoria es definida por*

$$F_X(x) = P_X((-\infty\,;\,x]) = P(X \leq x)$$

A veces, por abuso de terminologia, se denomina F_X como ley de la variable aleatoria. Se encuentra también el la literatura la terminologia de función cumulativa (cdf por cumulative density function en inglés).

Naturalmente, de las propiedades de una medida de probabilidad,

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ (viene de $P_X(\emptyset) = 0$ y $P_X(\mathbb{R}) = 1$);
- F_X es creciente (viene de que $x_1 \leq x_2 \Rightarrow (-\infty\,;\,x_1] \subseteq (-\infty\,;\,x_2]$);
- F_X no es necesariamente continua (lo vamos a ver más adelante), pero en cada punto x es continua a su derecha (ver punto anterior).

Cuando se trabaja con $d \geq 2$ variables aleatorias es conveniente definir un *vector aleatorio* de dimensión d, y apelar para su estudio a nociones del álgebra lineal y a notación matricial. Se tiene el vector aleatorio d-dimensional $X = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_d \end{bmatrix}^t$ donde $\cdot^t$ denota la transpuesta, caracterizado por d-uplas de variables aleatorias reales. Como en el caso univariado, se define este vector de la manera siguiente: (Athreya & Lahiri, 2006; Cohn, 2013; Brémaud, 1988)

Definición 1-8 (Vector aleatorio real)**.** *Un variable aleatorio real es una función medible*

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_X)$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ son los borelianos de $\mathbb{R}^d$, σ-álgebra generada por los productos cartesianos $(-\infty\,;\,b_1] \times \cdots \times (-\infty\,;\,b_d]$ y donde la medida P_X sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ es la medida imagen de P llamada distribución de probabilidad del vector aleatorio X. Como en el caso escalar,

$$(X \in B) \equiv X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \in B\} \qquad \text{y} \qquad P_X(B) = P(X \in B)$$

De las propiedades de una medida sobre una σ-álgebra, para caracterizar completamente la distribución P_X de nuevo es suficiente conocerla sobre los elementos de la forma $(-\infty\,;\,b_1] \times \cdots \times (-\infty\,;\,b_d]$, *i. e.,* la función de repartición multivariada (Athreya & Lahiri, 2006; Cohn, 2013; Brémaud, 1988; Hogg et al., 2013):

Definición 1-9 (Función de repartición multivariada)**.** *Por definición, la función de repartición F_X de un vector aleatorio es definida en $x = (x_1, \ldots, x_d)$ por*

$$F_X(x) = P_X((-\infty\,;\,x_1] \times \cdots \times (-\infty\,;\,x_d]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{d} (X_i \leq x_i)\right)$$

De nuevo, de las propiedades de una medida de probabilidad,

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$;

- $\lim_{\forall i, x_i \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{\forall i, x_\to +\infty} F_X(x) = 1$;
- F_X es creciente con respecto a cada variable x_i.

Al final, para un subconjunto $I_k = (i_1, \dots, i_k)$ de $1 \leq k \leq d$ elementos de $\{1, \dots, d\}^k$, $X_{I_k} = \begin{bmatrix} X_{i_1} & \cdots & X_{i_k} \end{bmatrix}^t$ es obviamente un vector aleatorio k-dimensional. Es entonces sencillo ver de que

$$F_{X_{I_k}}(x_{I_k}) = \lim_{\forall i \notin I_k, x_i \to +\infty} F_X(x)$$

(viene de que $\bigcap_{j=1}^k (X_{i_j} \leq x_{i_j}) = \left(\bigcap_{j=1}^k (X_{i_j} \leq x_{i_j})\right) \bigcap \left(\bigcap_{i \notin I_k} (X_i \in \mathbb{R})\right)$). Esta función es dicha *función de repartición marginale* de F_X.

Cerramos estas generalidades con el caso de variables independientes:

Definición 1-10 (Independencia). *Sean d variables aleatorias X_i y $X = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_d \end{bmatrix}^t$. Los X_i son mutualmente independientes si y solamente si, para cualiquier ensemble de conjuntos B_i, los eventos $(X_i \in \mathcal{B}_i)$ son mutualmente independientes, i. e.,*

$$P_X(\times_{i=1}^d B_i) = \prod_{i=1}^d P_{X_i}(B_i)$$

donde $\times$ denota el producto cartesiano entre elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es equivalente a

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^d F_{X_i}(x_i)$$

La ley del vector aleatorio se factoriza.

Es importante notar de que no es equivalente a tener la independencia por pares, como ilustrado en el fin de la seción precediente.

Más allá de este enfoque general, dos casos particulares de variables aleatorias son de interés: las variables discretas y las continuas. En el primer caso $X(\Omega)$ es discreto, finito o no. La meta de las susecciones siguientes es estudiar las particularidades de cada caso.

Par fijar unas notaciones, en todo lo que sigue, escribiremos

$$\mathcal{X} = X(\Omega)$$

conjunto de llegada de X, o conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria. A veces, por razones de simplificaciones, se considera $\mathcal{X}$ como siendo el espacio muestral y se olvida de que X sea una función medible entre espacios de probabilidades, *i. e.,* se trabaja en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_X)$ como en el espacio preimagen.

1.3.1 Variable aleatoria discreta

Definición 1-11 (Variable aleatoria discreta). *Una variable aleatoria es dicha discreta cuando $\mathcal{X} = X(\Omega)$ es discreto, finito o infinito numerable. En lo que sigue, denotaremos por $|\mathcal{X}|$ el cardinal de $\mathcal{X}$, posiblemente infinito.*

En otras palabras, los posibles valores de una variable aleatoria discreta X consisten en un conjunto contable (finito o infinito numerable) de números reales: $\mathcal{X} = \{x_j\}_j$ (Athreya & Lahiri, 2006; Hogg et al., 2013). Fijense de que Ω no es necesariamente discreto. Por ejemplo, si ω es la posición de un punto sobre una linea, y $X(\omega) = 0$ si ω es a la izquierda de un umbral, y $X(\omega) = 1$ si ω es a su derecha, $\mathcal{X} = \{0\,;\,1\}$ mientras de que Ω no es discreto.

En el caso de una variable aleatoria discreta X, las probabilidades $P_X(\{x_j\}) = P(X = x_j)$, $x_j \in \mathcal{X}$ caracterisan completamente esta variable aleatoria (Athreya & Lahiri, 2006; Hogg et al., 2013):

Definición 1-12 (Función de masa de probabilidad)**.** *Por definición, la función de masa de probabilidad de X, variable aleatoria discreta tomando sus valores sobre $\mathcal{X}$ es dada por*

$$p_X(x) \equiv P(X = x) = P_X(\{x\}) \quad x \in \mathcal{X}$$

Por abuso de denominación, llamaremos en este libro p_X distribución de probabilidad. Además, usaremos también la notación

$$p_X = \begin{bmatrix} \cdots & p_X(x_j) & \cdots \end{bmatrix}^t$$

dicho vector de probabilidad, de tamaño $|\mathcal{X}|$, posiblemente infinito.

Fijense de que, P_X siendo una medida de probabilidad, $p_X \geq 0$ y es obviamente normalizada en el sentido de que

$$\sum_{x_j \in \mathcal{X}} p_X(x_j) = 1$$

En la Fig. 1-4-(a) se muestra una representación gráfica de una distribución de probabilidad discreta. En particular,

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad P_X(B) = \sum_{x \in \mathcal{X} \cap B} p_X(x)$$

lo que da, tratando de la función de repartición,

$$F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} p_X(x_j)$$

De esta forma, se justifica la denominación *cumulativa* para F_X. También, se puede ver inmediato de que F_X es una función discontinua, con saltos finitos (en x_j, salto de altura $p_X(x_j)$). Eso es ilustrado figura Fig. 1-4-(b).

Un caso especial se tiene cuando un valor x_k es cierto o seguro, y no ocurre ninguno de los otros valores x_j $(j \neq k)$. La forma de la distribución es: $p_X(x) = \mathbb{1}_{\{x_k\}}(x)$ o $p_X = \mathbb{1}_k$, donde

$$\mathbb{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si no} \end{array} \right.$$

es la función indicator y $\mathbb{1}_k$ es el vector (posiblemente de dimensión infinita) de componentes k-esima $\delta_{jk} = \mathbb{1}_{\{k\}}(j)$ símbolo *delta de Kronecker*,

$$\delta_{jk} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si no} \end{array} \right.$$

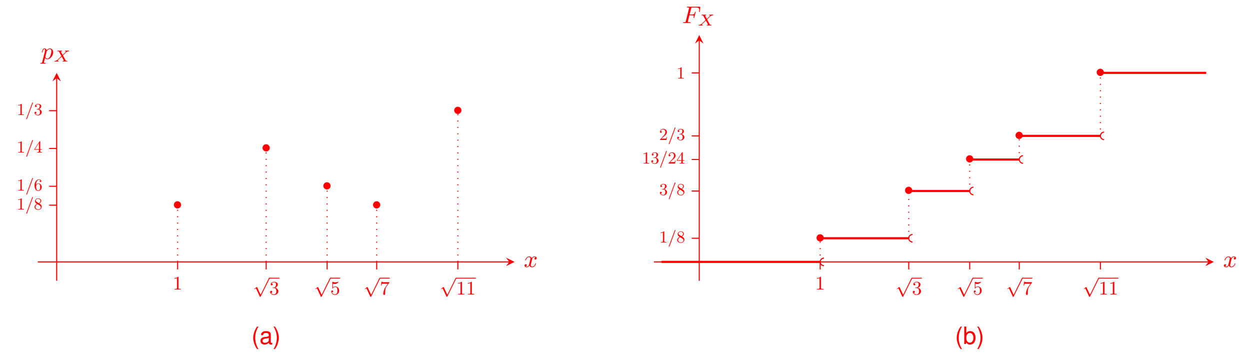


Figura 1-4: Ilustración de una distribución de probabilidad discreta (a), y la función de repartición asociada (b), con $\mathcal{X} = \left\{ 1\,, \sqrt{3}\,, \sqrt{5}\,, \sqrt{7}\,, \sqrt{11} \right\}$ y $p_X = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^t$.

Otra situación particular es la de *equiprobabilidad* o *distribución uniforme* cuando $|\mathcal{X}| = \alpha < +\infty$. La forma de la distribución es: $p_X(x_j) = \frac{1}{\alpha} \quad \forall\, j = 1, \ldots, \alpha$, *i. e.*, $p_X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \cdots & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}^t$. La función de repartición resulta una función escalonada, con saltos de altura $\frac{1}{\alpha}$ en cada $x_j, \quad 1 \leq j \leq \alpha$.

Reordenamiento y relación de mayorización : a ver como trasladar lo que ya estaba en en cap. 2 mas los ejemplos, pagina 51 (cf pagina 48). Todo tal cual por ahora, pero sería la parte azul a cambiar.

Para comparar dos distribuciones es útil reordenar el vector de probabilidad permutando sus elementos hasta listarlos de forma descendente. Se anota $p^\downarrow$, de modo que $p_1^\downarrow \geq p_2^\downarrow \geq \ldots \geq p_N^\downarrow$. En el ejemplo del caso con certeza se tiene $p^\downarrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t$, mientras que la distribución uniforme no varía.

Se define *mayorización* del siguiente modo, para distribuciones de dimensión N (con sus elementos acomodados en forma decreciente): una distribución p es mayorizada por otra q, y se denota $p \prec q$, si las primeras $N-1$ sumas parciales de $p^\downarrow$ y $q^\downarrow$ satisfacen $\sum_{i=1}^n p_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^n q_i^\downarrow$ para todo $n = 1, \ldots, N-1$, con $\sum_{i=1}^N p_i = 1 = \sum_{i=1}^N q_i$.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}^t \prec \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^t$. Es posible comparar por mayorización distribuciones de distinta dimensionalidad, completando con ceros el vector de probabilidad de menor dimensión. Es importante resaltar que la mayorización provee un *orden parcial* (no total) entre distribuciones, existiendo pares de distribuciones tales que ninguna mayoriza a la otra. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}40 & 0{,}10 \end{pmatrix}^t$ y $\begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}15 & 0{,}15 \end{pmatrix}^t$ no se comparan por mayorización.

Es interesante notar que la siguiente propiedad es válida para toda distribución p de tamaño N:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \end{pmatrix}^t \prec p \prec \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t.$$

En este sentido, los casos particulares de equiprobabilidad y de certeza, se dice que son distribuciones extremas. Notamos que uno implica ignorancia máxima en el resultado de la variable mientras que el otro corresponde a conocimiento completo.

Figura 1-5: Orden parcial por mayorización

1.3.2 Variable aleatoria continua

En varios contextos, puede tomar valores en un conjunto no numerable, por ejemplo cualesquiera de los números en un dado intervalo de la recta real. No son variables discretas más. En las variables que no son discretas, el caso particular de interés es el de variables continuas (Athreya & Lahiri, 2006; Hogg et al., 2013):

Definición 1-13 (Variable aleatoria continua)**.** *Una variable aleatoria* X *es dicha continua si su función de repartición* F_X *es continua sobre* $\mathbb{R}$ *(on respeto a la medida de Lebesgue).*

Cuando se puede, es conveniente asociar una *función densidad de probabilidad* (comúnmente anotada por su sigla en inglés: pdf por *probability density function*):

Definición 1-14 (Variable aleatoria continua admitiendo una densidad de probabilidad)**.** *Sea* X *variable aleatoria continua y* P_X *su medida de probabilidad y* F_X *su función de repartición. Si existe una función no negativa* p_X *sobre* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad P_X(B) = \int_B p_X(x)\, dx$$

(la integral debe ser entendido como en el sentido de Lebesgue [5]*), entonces* X *es dicha admitiendo una densidad y* p_X *es llamada densidad de probabilidad de* X*. Notando de que* $P_X(B) = P_X(B \cap \mathcal{X})$*, el soporte de* p_X *es necesariamente* $\mathcal{X} = X(\Omega)$ *(i. e.,* $p_X(\overline{\mathcal{X}}) = 0$ *y* $p_X(\mathcal{X}) \neq 0$*), y*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad P_X(B) = \int_{B\cap\mathcal{X}} p_X(x)\, dx$$

Tratando de la función de repartición, tenemos

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\, du$$

Dicho de otra manera, si F_X *es (continua y) derivable sobre* $\mathbb{R}$ *(con respeto a la medida de Lebesgue), por lo menos por partes,* X *admite una densidad de probabilidad y*

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Por abuso de terminologia, en lo que sigue llamaremos p_X *también distribución de probabilidad, a pesar de que no tiene el mismo sentido que la masa de probabilidad del caso discreto y denotaremos* $|\mathcal{X}|$ *el volumen (o medida de Lebesgue) de* $\mathcal{X}$*, posiblemente infinito.*

La escritura integral de F_X justifica de nuevo la denominación *cumulativa* para F_X. Además, se puede ver por ejemplo que en este caso $P(a < X \leq b) = \int_a^b p_X(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a)$ y que claramente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_X(\{x\}) = P(X = x) = 0$$

[5] **Decir un poquito sobre la medida de Lebesgue y ref. (Lebesgue, 1904, 1918; Kolmogorov & Fomin, 1961; Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007a; Cohn, 2013).**

$\{x\}$ es dicho de medida P_X nula (es el caso de todos conjuntos numerable de $\mathbb{R}$). Fijense de que si $0 \leq F_X \leq 1$, no p_X puede ser mayor que uno, por ejemplo, para $F_X(x) = 2\,x\,\mathbb{1}_{[0\,;\,\frac{1}{2})}(x) + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}\,;\,+\infty)}(x)$, que define correctamente una función de repartición, $p_X(x) = 2\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}\,;\,+\infty)}(x)$. No es contradictorio en el sentido de que p_X no es una probabilidad, sino que $p_X(x)\,dx$ es esquematicamente la probabilidad de hallar a la variable con valores en el "intervalo infinitesimal entre x y $x + dx$". Al final, la condición de normalización se escribe

$$\int_{\mathcal{X}} p_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} p_X(x)\,dx = 1.$$

En la figura Fig. 1-6-(a) se muestra una representación gráfica de una función densidad de probabilidad para una variable continua y en Fig. 1-6-(b) la función cumulativa correspondiente.

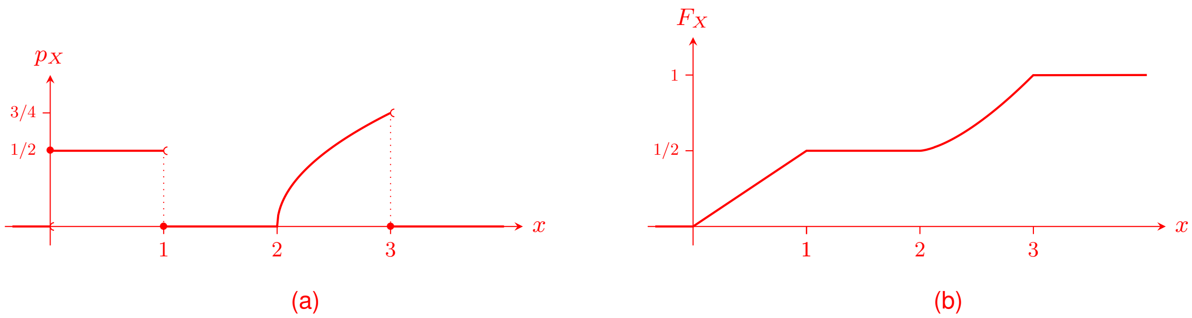


Figura 1-6: Ilustración de una distribución de probabilidad continua (a), y la función de repartición asociada (b), con $\mathcal{X} = [0\,;\,1) \cup [2\,;\,3)$ y $p_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0\,;\,1)}(x) + \frac{3\sqrt{x-2}}{4}\mathbb{1}_{[2\,;\,3)}(x)$, *i. e.*, $F_X(x) = \frac{x}{2}\,\mathbb{1}_{[0\,;\,1)}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1\,;\,2)}(x) + \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{2}\mathbb{1}_{[2\,;\,3)}(x) + \mathbb{1}_{[3\,;\,+\infty)}(x)$.

Fijense de que una variable aleatoria puede ser ni continua, ni discreta:

- Sean U y V variables continuas, independientes, de densidad de probabilidad $p_U = p_V = \mathbb{1}_{[0\,;\,1)}$ (U y V son dichas uniformes sobre $[0;1)$) y sea $X = V\mathbb{1}_{U<\frac{1}{2}}$, es decir $X(\omega) = V(\omega)$ si $U(\omega) < \frac{1}{2}$ y 0 si no. Entonces de la formula de probabilidades totales, $F_X(x) = P(X \leq x) = P\left((X \leq x)\,\middle|\,(U < \frac{1}{2})\right)\,P\left(U < \frac{1}{2}\right) + P\left((X \leq x)\,\middle|\,(U \geq \frac{1}{2})\right)\,P\left(U \geq \frac{1}{2}\right)$ *i. e.*, $F_X(x) = \frac{1}{2}P\left((V \leq x)\,\middle|\,(U < \frac{1}{2})\right) + P\left((0 \leq x)\,\middle|\,(U \geq \frac{1}{2})\right)$. Ahora, de la independencia de U y V, tenemos $F_X(x) = \frac{1}{2}F_V(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \frac{x+1}{2}\mathbb{1}_{[0\,;\,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1\,;\,+\infty)}(x)$. Esta función de repartición es representada figura Fig. 1-7: es ni discreta, ni continua. Entonces, a pesar de que $\mathcal{X} = [0\,;\,1)$ sea un intervalo, X no es continua (y tampoco no puede ser discreta).
- Sea U variable continua uniforme sobre $[0\,;\,1)$ y $X = \mathbb{1}_{U \notin \mathbb{Q}}$. Claramente X no es continua, pero $\mathcal{X} = [0\,;\,1)\backslash\mathbb{Q}$ siendo no numerable, X tampoco es discreta [6].

De hecho, en el caso continu, discreto, o cualquiera, se conserva la forma integral de la medida de probabilidad en una forma tipo $P_X(B) = \displaystyle\int_B dP_X(x)$ basado sobre la teoria de la medida y de la integración (Lebesgue,

[6] $X = 1$ **casi siempre...**

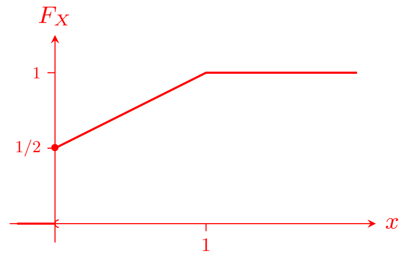


Figura 1-7: Función de repartición $F_X(x) = \frac{x}{2}\mathbb{1}_{[0\,;\,1)}(x) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ asociada a $X = V\mathbb{1}_{U<\frac{1}{2}}$ con U y V variables continuas uniformes sobre $\mathcal{X} = [0\,;\,1)$. No es tipo escalon, así que X no es discreta. A pesar de que $\mathcal{X} = [0\,;\,1)$ sea un intervalo, de la presencia del salto en $x = 0$, tampoco X no es continua.

1904; Kolmogorov & Fomin, 1961; Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007a, 2007b; Cohn, 2013). En el caso discreto cierto $X = x_0$, la distribución discreta es dada por $p_X(x) = \mathbb{1}_{\{x_0\}}(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x - x_0)$. En este caso, P_X es dicha *medida de Dirac* y $dP_X(x)$ es denotado $\delta_{x_0}(x)$ o $\delta(x - x_0)$ también llamado *delta de Dirac*. Se puede ver este Dirac como una densidad de probabilidad $p_X(x)$ pero no es una función "ordinaria" pero una función generalizada o distribución de Schwartz [7]. En particular, $F_X(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x - x_0)$ y en el sentido de las distribuciones, $\frac{dF_X}{dx} = \delta_{x_0}$. Además, se usan en general las propiedades, para cualquier function f,

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0) \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x - x_0)\, dx = f(x_0)$$

pero hay que entender la integración a través de la medida Dirac (esta notación es un abuso de escritura, ej. (Gel'fand & Shilov, 1964)).

Usando las medidas de Dirac, se puede unificar el tratamiento de las variables aleatorias discretas con las continuas (entre otros): si una variable aleatoria discreta toma los valores x_j con probabilidades $P(X = x_j)$ respectivamente, entonces formalmente se puede describir mediante una variable aleatoria continua X con "función densidad de probabilidad" $p_X(x) = \sum_j p_j\, \delta(x - x_j)$ donde $p_j = P(X = x_j)$.

1.3.3 Vector aleatorio discreto

Un ejemplo de vector aleatorio discreto puede verse a través de un conjunto de dados (que podrían ser dependientes si son ligados por un hilo por ejemplo).

Definición 1-15 (Vector aleatorio discreto)**.** *Un vector aleatorio d-dimensional* $X = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_d \end{bmatrix}^t$ *y* $\mathcal{X} =$

[7] La teoría de la distribuciones valió a Laurent Schwarz la meddala Field en 1950. Entre otros en el trabajo de Schwartz, se probó que el Dirac, visto como distribución de Schwartz, o función generalizada, tiene una "representación integral" $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath t x} dt$ o más rigurosamente transformada de Fourier de $x \mapsto 1$ en el sentido de las funciones generalizadas o distribuciones. Eso muestra claramente su caracter no ordinario (la integral siendo divergente en el sentido usual). Eso va más allá de la meta del capítulo y el lector se podrá referir a (Schwartz, 1966; Gel'fand & Shilov, 1964, 1968) por ejemplo.

$X(\Omega) = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$ donde $\mathcal{X}_i = X_i(\Omega)$. X es dicho discreto cuando $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}^d$, es discreto, finito o infinito numerable. En lo que sigue, denotaremos también por $|\mathcal{X}|$ el cardinal de $\mathcal{X}$, posiblemente infinito.

Obviamente, la medida de probabilidad en los $x = (x_1 \,, \,\ldots\,, \, x_d) \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$ caracterisa completamente este vector aleatorio:

Definición 1-16 (Función de masa de probabilidad conjunta)**.** *Por definición, la función de masa de probabilidad de X, vector aleatorio discreto tomando sus valores sobre $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$ es dada por*

$$p_X(x) \equiv P(X = x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{d} (X_i = x_i)\right) \quad \forall\, x_i \in \mathcal{X}_i,\ 1 \le i \le d$$

Se la llama también función de masa de probabilidad conjunta de los X_i, o, por abuso de denominación, la llamaremos todavía p_X distribución de probabilidad (conjunta). En el caso multivariado, la notación vectorial es más delicada a usar: p_X sería un "tensor" d-dimensional (una matriz para $d = 2, \ldots$). Pero queda posible unsar una notación vectorial, recordandose de que $\mathbb{N}^d$ puede ser en biyección con $\mathbb{N}$ y una biyección elegida, usar la para etiquetar los componentes de p_X puesto en vector. En el caso finito $\mathcal{X}_i = \{x_{j_i}\}_{j=1}^{\alpha_i}$ con $\alpha_i = |\mathcal{X}_i| < +\infty$, se puede organizar los componentes tales que $p_X(x_{j_1} \,, \,\ldots\,, \, x_{j_d})$ sea la $j = \sum_{i=1}^{d-1} (j_i - 1) \prod_{k=i+1}^{d} \alpha_k \, + \, j_d$-esima componente del vector p_X.

Como en el caso escalar, la función de repartición de un vector aleatorio discreto d-dimensional es echo de hyperplanos d-dimensionales constantes. Además, las componentes son mutualmente independientes si y solamente si la función de répartición se factoriza, o equivalentemente la función de masa se factoriza, *i. e.,*

$$X_i \text{ mutualmente independientes} \quad \Leftrightarrow \quad p_X = p_{X_1} \cdots p_{X_d}$$

En notaciones tensoriales, $p_X = p_{X_1} \otimes \cdots \otimes p_{X_d}$ donde $\otimes$ denota el producto tensorial o externo entre los vectores de probabilidades [8]. Cuando los α_i son finito y la notación vectorial de la definición es adoptada, esta expresión queda valide donde $\otimes$ representa el producto de Kronecker [9]

Al final, de la formula de calculo de función de repartición marginales visto pagina 24, para un subconjunto $I_k = (i_1, \ldots, i_k)$ de $1 \le k \le d$ elementos de $\{1, \ldots, d\}^k$, $X_{I_k} = \begin{bmatrix} X_{i_1} & \cdots & X_{i_k} \end{bmatrix}^t$ la probabilidad marginal o distribución marginale de X_{I_k} es dada por

$$p_{X_{I_k}}(x_{I_k}) = \sum_{\forall i \notin I_k, x_i \in \mathcal{X}_i} p_X(x)$$

[8] Tensor de componentes $(j_1, \ldots, j_d)$ el producto $\prod_i p_{X_i}(x_{j_i})$.

[9] Para $p = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix}^t$ y $q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_m \end{bmatrix}^t$ el producto de Kronecker es dado por $p \otimes q$ vector de tamaño nm de componente $(j-1)m + k$-esima el producto $p_j q_k$, $1 \le j \le n,\ 1 \le k \le m$. Fijense de que este producto es asociativo pero no es comutativo.

1.3.4 Vector aleatorio continuo

Definición 1-17 (Vector aleatorio continuo y densidad de probabilidad multivariada)**.** *Un vector aleatorio X es dicho continuo si su función de repartición F_X es continua sobre $\mathbb{R}^d$ (on respeto a la medida de Lebesgue). Si existe una función no negativa p_X sobre $\mathbb{R}^d$ tal que*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad P_X(B) = \int_B p_X(x)\, dx = \int_{B \cap \mathcal{X}} p_X(x)\, dx$$

con $\mathcal{X} = X(\Omega)$ soporte de p_X (la integral multiple debe ser entendido como en el sentido de Lebesgue[10] *y $dx = dx_1 \cdots dx_d$), entonces X es dicha admitiendo una densidad y p_X es llamada densidad de probabilidad de X, o también densidad de probabilidad conjunta de los X_i. En particular,*

$$F_X(x) = \int_{(-\infty\,;\,x_1] \times \cdots \times (-\infty\,;\,x_d]} p_X(u)\, du$$

o, equivalentemente, para F_X es (continua y) derivable sobre $\mathbb{R}^d$ (con respeto a la medida de Lebesgue), por lo menos por partes,

$$p_X(x) = \frac{\partial^d F_X(x)}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}$$

Usaremos todavía la terminología (por abuso) de distribución de probabilidad y denotaremos todavía $|\mathcal{X}|$ el volumen (o medida de Lebesgue) de $\mathcal{X}$, posiblemente infinito.

Como en el caso escalar, $p_X \geq 0$ no es necesario menor que 1 y satisface la condición de normalización

$$\int_{\mathcal{X}} p_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} p_X(x)\, dx = 1$$

Mencionamos de que las d variables aleatorias $X_1, \ldots, X_d$, componentes de un vector aleatorio X son independientes si y solamente si se factoriza la función de repartición, lo que da derivando esta,

$$X_i \text{ mutualmente independientes} \quad \Leftrightarrow \quad p_X(x) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_d}(x_d)$$

Terminamos esta sección mencionando que, de la formula de calculo de función de repartición marginales visto pagina 24, para un subconjunto $I_k = (i_1, \ldots, i_k)$ de $1 \leq k \leq d$ elementos de $\{1, \ldots, d\}^k$, $X_{I_k} = \begin{bmatrix} X_{i_1} & \cdots & X_{i_k} \end{bmatrix}^t$ la *densidad de probabilidad marginal* de X_{I_k} es dada por

$$p_{X_{I_k}}(x_{I_k}) = \int_{\times_{i \notin I_k} \mathcal{X}_i} p_X(x) \prod_{i \notin I_k} dx_i = \int_{\mathbb{R}^{d-k}} p_X(x) \prod_{i \notin I_k} dx_i$$

En particular, la función densidad de probabilidad marginal que caracteriza a la variable aleatoria X_i es la ley que se obtiene integrando la densidad de probabilidad conjunta sobre todas las variables excepto la i-ésima.

Reordenamiento y relación de mayorización : a ver como trasladar lo que ya estaba en en cap. 2 mas los ejemplos, paginas 55 y 57.

---

[10] Ver nota de pie 5, pagina 27.

1.3.5 Transformación de variables y vectores aleatorios

En esta sección nos interesamos al effect de una variable o un vector aleatorio. Por ejemplo,en un juego con dos dados, nos podemos interesar a la ley de la suma que daría el número de casilla de que debemos adelantar en un juego de la oca.

Teorema 1-2 (Transformación medible de un vector aleatorio)**.** *Sea* $X : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *una variable aleatoria, y* $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \mapsto (\mathbb{R}^{d'}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}))$ *una función medible. Entonces,* $Y = g(X)$ *es una variable aleatoria* $(\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}^{d'}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}))$*. Además, la medida imagen* P_Y *es vinculada a* P_X *por*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}), \quad P_Y(B) = P_X(g^{-1}(B))$$

Demostración. Este resultado es obvio. g siendo medible, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$, por definición $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Además, si P_X es la medida (de probabilidad) asociado al espacio de salida de g, el resultado es consecuencia del teorema 1-1. □

(Ver ej. (Jacob & Protters, 2003; Athreya & Lahiri, 2006; Bogachev, 2007b; Cohn, 2013)).

Es sencillo probar de que cualquier combinación de funciones medibles queda medible, cualquier producto (adecuado) de functiones medible queda medible, y que si $\{f_k\}_{k=1}^{d'}$ son $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible, entonces $f = (f_1, \ldots, f_{d'})$ es $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}))$-medible (Athreya & Lahiri, 2006).

No se todavía si será útil tratar del caso de limite de series de funciones medibles (quizas, tratando de los momentos/integración).

Mencionamos que si $\mathcal{X} = X(\Omega)$ es discreto, entonces $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}) = Y(\Omega)$ será discreto también, y:

Teorema 1-3 (Función de masa por transformación medible)**.** *Sean* X*, vector aleatorio* d*-dimensional discreto,* $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \mapsto (\mathbb{R}^{d'}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}))$ *una función medible, e* $Y = g(X)$ *necesariamente discreto* d'*-dimensional sobre* $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X})$*. La distribución de* Y *es relacionada a la de* X *por la relación*

$$\forall\, y \in \mathcal{Y}, \quad p_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x)$$

Demostración. El resultado es inmediato. □

En particular, si g es inyectiva (necesariamente biyectiva de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$), el vector de probabilidad queda invariante, $p_Y = p_X$; solamente cambian los estados.

Es importante mencionar de que con $\mathcal{Y}$ discreto, $\mathcal{X}$ no es necesariamente discreto (Athreya & Lahiri, 2006). Por ejemplo, $Y = \mathbb{1}_{X>0}$ es tal que $\mathcal{Y}\{0\,;\,1\}$ a pesar de que $\mathcal{X}$ pueder no discreto.

Tratar de las variables aleatorias continuas resuelta mas delicado. Vimos en el ejemplo precediente de que el caracter continuo puede perderse por transformación. De la misma manera, en un ejemplo de la sección precediente, vimos que $Y = X_1 \mathbb{1}_{X_2>0}$ con X_i independientes uniformes es ni continua, ni discreta. En el enfoque de variables continuas, una clase importante de funciones en la cual no vamos a interesar son las funciones continuas (y diferenciables):

Lema 1-1 (Continuidad y caracter medible)**.** *Sea* $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d'}$ *continua. Entonces,* g *es* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}))$*-medible.*

Demostración. Por continuidad, la pre-imagen de un abierto de $\mathbb{R}^{d'}$ por g es un abierto de $\mathbb{R}^d$ y entonces es en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. La prueba se cierra recordandose de la definición de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$, σ-álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}^{d'}$. □

En lo que sigue, nos interesamos más especialmente al caso de funciones $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \mapsto (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. De hecho, si $d' < d$, es sencillo llegar al caso considerado añandido $d - d'$ transformaciones. Por ejemplo, con $d = 2$ si nos interesamos a $X_1 + X_2$, se puede considerar $\begin{bmatrix} X_1 + X_2 & X_2 - X_1 \end{bmatrix}^t$ y llegar a la variable de interés por calculo de marginal. Si $d' > d$ la situación es más delicada, $g(Y)$ viviendo sobre una variedad d-dimensional de $\mathbb{R}^{d'}$.

En el caso de vectores aleatorios continuos X admitiendo una densidad de probabilidad, una pregunta natural es entonces de saber si se conserva la continuidad y la existencia de una densidad, así que su forma. La respuesta es dada por el teorema siguiente (Brémaud, 1988; Jacob & Protters, 2003; Athreya & Lahiri, 2006; Cohn, 2013; Hogg et al., 2013):

Teorema 1-4 (Densidad de probabilidad por transformación continua inyectiva diferenciable)**.** *Sean* X*, vector aleatorio* d*-dimensional continuo y admitiendo una densidad de probabilidad* p_X*,* $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ *una función continua, inyectiva y diferenciable tal que* $|\mathrm{J}_g| > 0$*, donde* J_g *denota la matriz de componentes* $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$*, matriz Jacobiana de la transformación* $g \equiv \begin{bmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_d) & \cdots & g_d(x_1, \ldots, x_d) \end{bmatrix}^t$*) y* $|\cdot|$ *representa el valor absoluto del determinante de la matriz. Sea* $Y = g(X)$*. Entonces* Y *es continua admitiendo una densidad de probabilidad* p_Y *de soporte* $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}) = Y(\Omega)$ *tal que*

$$\forall\, y \in \mathcal{Y}, \quad p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left| \mathrm{J}_{g^{-1}}(y) \right|$$

Demostración. Por definición, X admitiendo una densidad y g siendo medible,

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad P_Y(B) = P_X(g^{-1}(B)) = \int_{g^{-1}(B) \cap \mathcal{X}} p_X(x)\, dx$$

Por cambio de variable $x = g^{-1}(y)$ (g siendo inyectiva, el antecedante es único por definicón) y notando de que $g\left(g^{-1}(B) \cap \mathcal{X}\right) = B \cap \mathcal{Y}$,

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad P_Y(B) = \int_{B \cap \mathcal{Y}} p_X(g^{-1}(y)) \left| \mathrm{J}_{g^{-1}}(y) \right| \, dy$$

lo que cierra la prueba. □

El caso escalar puede ser visto como caso particular, dando:

Corolario 1-1. *Sean* X*, variable aleatoria continua y admitiendo una densidad de probabilidad* p_X*,* $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *una función continua, inyectiva y diferenciable e* $Y = g(X)$*. Entonces* Y *es continua admitiendo una densidad de probabilidad* p_Y *tal que*

$$\forall\, y \in \mathcal{Y}, \quad p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Una forma alternativa de derivar este resultado es partir de la función de repartición, notando de que g es necesariamente monotona [11]: si $y \notin \mathcal{Y}$, necesariamente $p_Y = 0$ ($F_Y(y) = 1$ si $y > \sup \mathcal{Y}$ y $F_Y(y) = 0$ si $y < \inf \mathcal{Y}$) y para cualquier $y \in \mathcal{Y}$,

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \begin{cases} P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \text{ es creciente} \\ P(X \ge g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \text{ es decreciente} \end{cases}$$

el resultado se obtiene calculando las derivadas del primer y último términos respecto de la variable transformada y.

Si g no es inyectiva, g^{-1} es multivaluada o multiforme. En este caso, se puede todavía tratar el problema, particionando $\mathbb{R}^d$ en conjuntos donde g es inyectiva, dando

Teorema 1-5. *Sean X, vector aleatorio d-dimensional continuo y admitiendo una densidad de probabilidad p_X, $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \mapsto (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ una función continua y diferenciable. Denotamos $\{\mathcal{X}_{[k]}\}_{k=0}^m$ la partición de $\mathcal{X}$ tal que $|\mathrm{J}_g(y)| = 0$ sobre $\mathcal{X}_{[0]}$ y para todos $k \ge 1$, $g : \mathcal{X}_{[k]} \mapsto \mathcal{Y}$ sea inyectiva y tal que $|\mathrm{J}_g(y)| > 0$. Suponemos de que $\mathcal{X}_{[0]}$ sea de medida de Lebesgue nula, notamos g_k^{-1} la función inversa de g sobre $g(\mathcal{X}_{[k]})$ (rama k-esima de la función multivaluada g^{-1}), $\mathrm{J}_{g_k^{-1}}$ su matriz Jacobiana y $I(y) = \{k,\, y \in g(\mathcal{X}_{[k]})\}$ los indices tales que y tiene un inverso por g_k. Eso es ilustrado figura Fig. 1-8 para $d = 1$. Entonces Y es continua admitiendo una densidad de probabilidad p_Y tal que*

$$\forall\, y \in \mathcal{Y}, \quad p_Y(y) = \sum_{k \in I(y)} p_X(g_k^{-1}(y)) \left| \mathrm{J}_{g_k^{-1}}(y) \right|$$

En el caso escalar $d = 1$ eso se formula

$$\forall\, y \in \mathcal{Y}, \quad p_Y(y) = \sum_{k \in I(y)} p_X(g_k^{-1}(y)) \left| \frac{dg_k^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Demostración. Sufice escribir $B = \bigcup_{k=0}^m (B \cap g(\mathcal{X}_k))$ unión de borelianos disjuntos, notar de que por consecuencia $g^{-1}(B) = \bigcup_{k=0}^m g^{-1}(B \cap g(\mathcal{X}_k))$ unión de borelianos disjuntos y por linearidad escribir la integración sobre $g^{-1}(B)$ como la suma de integrales sobre $g^{-1}(B \cap g(\mathcal{X}_k))$. Se cierra la prueba notando de que $g^{-1}(B \cap g(\mathcal{X}_0))$ es necesario de medida de Lebesgue nula, siendo la integral nula y de que $g^{-1}(B \cap g(\mathcal{X}_k)) = g_k^{-1}(B \cap g(\mathcal{X}_k))$. □

Por ejemplo, sea X definido sobre $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ y la transformación de variables $Y = X^2$. Se tiene $y = g(x) = x^2$, continua diferenciable de derivada nula sobre $\mathcal{X}_{[0]} = \{0\}$, de medida nula, cuyas inversas son $g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ sobre $\mathcal{X}_{[1]} = \mathbb{R}_-^*$ y $g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ sobre $\mathcal{X}_{[2]} = \mathbb{R}_+^*$; luego $p_Y(y) = \frac{p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$, sobre $\mathcal{Y} = \mathbb{R}_+^*$.

De nuevo, en el caso escalar, se puede salir de la función de repartición

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \sum_{k=1}^m P\left(X \in \mathcal{X}_{[k]} \cap g_k^{-1}(-\infty\,;\,y]\right)$$

[11] Fijense de que $P(X \ge x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \le x) + P(X = x)$, pero X siendo continua, $P(X = x) = 0$.

($\mathcal{X}_{[0]}$ siendo de medida nula, sobre este dominio la probabilidad es cero). Sea $\mathcal{Y}_{[k]} = g_k(\mathcal{X}_{[k]})$. Ahora, si $y \notin I(y)$,

$$P\left(X \in \mathcal{X}_k \cap g_k^{-1}(-\infty\,;\,y]\right) = \begin{cases} P(X \in \mathcal{X}_{[k]}) & \text{si} \quad y > \sup \mathcal{Y}_{[k]} \\ 0 & \text{si} \quad y < \inf \mathcal{Y}_{[k]} \end{cases}$$

dando una derivada nula. Si $y \in I(y)$,

$$P\left(X \in \mathcal{X}_k \cap g_k^{-1}(-\infty\,;\,y]\right) = \begin{cases} F_X(g_k^{-1}(y)) - F_X(\inf \mathcal{Y}_{[k]}) & \text{si} \quad g_k \quad \text{es creciente} \\ F_X(\sup \mathcal{Y}_{[k]}) - F_X(g_k^{-1}(y)) & \text{si} \quad g_k \quad \text{es decreciente} \end{cases}$$

El resultado sigue diferenciando este resultado. Eso es ilustrado figura Fig. 1-8.

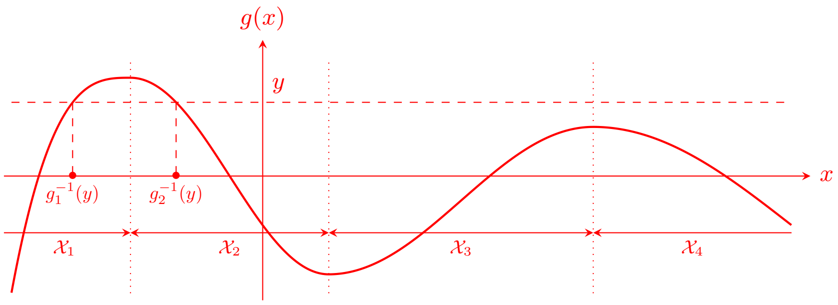


Figura 1-8: (a): Ilustración de una transformación g no inyectiva, tal que $\mathcal{X}_{[0]} = \{x,\ g'(x) = 0\}$, representado por las lineas punteadas (x correspondiente), es de medida de Lebesgue nula. Los $\mathcal{X}_{[k]}$ son descrito debajo de cada dominio. La linea discontinua da un nivel y y los puntos en el eje x representan $g_k^{-1}(y),\ k \in I(y)$; en el ejemplo, $I(y) = \{1\,;\,2\}$ y, suponiendo de que $\mathcal{X} = \mathbb{R},\ F_Y(y) = F_X(g_1^{-1}(y)) + 1 - F_X(g_2^{-1}(y))$.

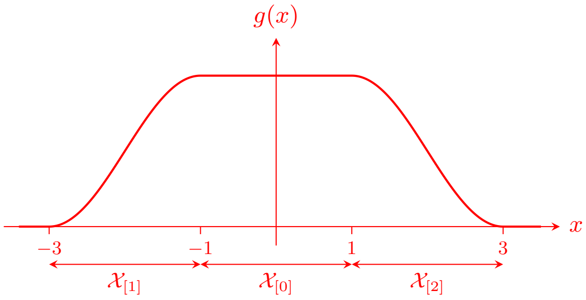
Una tercera alternativa, a pesar que sea delicado, es de apoyarse sobre la teoria de las distribuciones y expresar como $p_Y(y) = \displaystyle\int_{\mathcal{X}} p_X(x)\,\delta(y - g(x))\,dx$, donde se usa la expansión de la función delta en términos de sus ceros: $\delta(y - g(x)) = \sum_{k \in I(y)} \frac{1}{\left|g_k'\left(g_k^{-1}(y)\right)\right|} \delta(x - g_k^{-1}(y))$ (Mandel & Wolf, 1995).

Es importante notar de que la condición $\mathcal{X}_{[0]}$ de medida nula es importante. El el caso contrario, Y no queda continua. Por ejemplo, considera X uniforme sobre $\mathcal{X} = (3\,;\,3)$ y $Y = g(X)$ con $g(x) = \left(1 + \cos\left((|x| - 1)\frac{\pi}{2}\right)\right) \mathbb{1}_{(1\,;\,3)}(|x|) + 2\mathbb{1}_{[0\,;1]}(|x|)$. Esta función es representado figura Fig. 1-9-(a). Claramente, g es continua y diferenciable sobre $\mathcal{X}$, pero con $\mathcal{X}_{[0]} = [-2\,;\,1]$ que no es de medida nula. Saliendo de $F_Y(y) = P(g(X) \le y)$ se calcula sencillamente $F_Y(y) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos(y-1)\right) \mathbb{1}_{[0\,;\,2)} + \mathbb{1}_{[2\,;\,+\infty)}(y)$, ilustrada figura Fig. 1-9-(b). Claramente F_Y es discontinua en $y = 2$: Y no es continua.

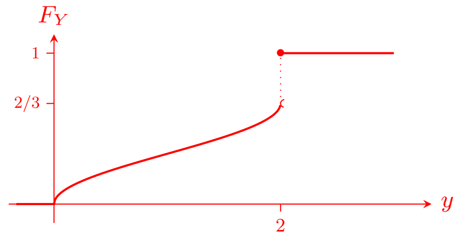
No toque todavía. Se puede hacerlo con vectores. Caso circular...

Una *variable aleatoria compleja* $Z = X + iY$ puede interpretarse en términos de las dos variables aleatorias reales X e Y. La pdf asociada $P(z) = p(x,y)$ está dada por la función densidad de probabilidad conjunta de las variables reales. La condición de normalización se escribe

$$\int P(z)\,d^2z = 1$$



(a)



(b)

Figura 1-9: En (a) se dibuja $g(x) = \big(1 + \cos\big((1 - |x|)\frac{\pi}{2}\big)\big)\, \mathbb{1}_{(1\,;\,3)}(|x|) + 2\mathbb{1}_{[0\,;1]}(|x|)$. Suponiendo de que $\mathcal{X} = (-3\,;\,3)$, claramente $\mathcal{X}_{[0]} = [-1\,;\,1]$ no es de medida nula, dando para X uniforme sobre $\mathcal{X}$ la variable $Y = g(X)$ no continua de función de repartición representenda en (b).

donde $d^2z = dx\,dy$.

Tratar el caso de leyes condicionales; hablar de simulación? Metoto inverso, mezcla, rejeccion, a traves de la condicional para el caso vectorial?

1.4 Esperanza, momentos y funciones generadoras

introducción...

1.4.1 Momentos de una distribución

Una variable aleatoria continua X tiene asociado un *promedio* o *media* (también llamado *valor esperado o de expectación*) que se obtiene pesando cada valor de x con la probabilidad asociada a ese valor, $p(x)\,dx$, e integrando sobre el rango permitido de x:

$$E[X] = \langle x \rangle = \int_\Omega x\; p(x)\, dx \equiv \mu$$

si la integral existe. La *esperanza* de la variable aleatoria X representa el valor medio que puede tomar entre todos los eventos de una prueba. Una variable aleatoria X se dice *integrable* cuando $E[|X|] < \infty$.

En general, si X es una variable aleatoria, cualquier función $f(X)$ también lo es, y su valor de expectación, si existe, está dado por

$$E[f(X)] = \langle f(x) \rangle = \int_\Omega f(x)\; p(x)\, dx$$

En particular, para el monomio $f(x) = x^r$ siendo $r \in \mathbb{N}$, se obtiene el r-*ésimo momento (ordinario)* de X:

$$\nu_r \equiv E[X^r] = \langle x^r \rangle = \int_\Omega x^r\; p(x)\, dx$$

que tiene unidades de X^r. Se puede incluir el caso $r = 0$, que corresponde a la condición de normalización: $\nu_0 = \int_\Omega p(x)\,dx = 1$. La media es el primer momento: $\nu_1 = \langle x \rangle = \mu$. Es fácil probar que $\langle x^2 \rangle \geq \langle x \rangle^2$. Típicamente, los primeros momentos son más relevantes que los de órdenes mayores, para la caracterización de una distribución.

Por ejemplo, para la distribución uniforme $p(x) = \frac{1}{b-a}$ en el intervalo $[a, b]$, resulta: $\nu_1 = \langle x \rangle = \frac{1}{2}(b + a)$, $\nu_2 = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{3}(b^2 + ab + b^2)$, ..., $\nu_r = \frac{b^{r+1} - a[r+1}{(r+1)(b-a)}$.

Cuando una pdf $p(x)$ tiene soporte (semi)infinito, necesariamente la función p debe tender a 0 cuando $|x| \to \infty$. Si $p(x)$ es *de largo alcance*, en el sentido de que no cae a 0 suficientemente rápido con x para x grandes, algunos momentos pueden no existir. Por ejemplo, la distribución de probabilidad de Cauchy–Lorentz (o función de Breit–Wigner), dada por $p(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + (x - x_0)^2}$ para $x \in (-\infty, \infty)$, con $\gamma > 0$ y x_0 fijos, no tiene momentos finitos de orden $r \geq 1$.

En el caso de una variable aleatoria discreta X que toma valores en $\Omega = \{x_1, \ldots, x_N\}$, la esperanza de la variable viene dada por $E[X] = \sum_{n=1}^{N} x_n\, p(x_n)$. Consideraremos que el espacio muestral es $\mathbb{N}$, luego resulta

$$E[X] = \langle n \rangle = \sum_{n \geq 1} n\, p_n,$$

que se puede obtener también como $E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X > j)$. Para una función f definida sobre el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ se tiene

$$E[f(X)] = \langle f(n) \rangle = \sum_{n \geq 0} f(n)\, p_n,$$

y se define el r-ésimo momento (ordinario) de n como

$$\nu_r \equiv E[X^r] = \langle n^r \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^r\, p_n.$$

En el caso de variables discretas sobre $\mathbb{N}$, resulta útil introducir el r-ésimo *momento factorial* de n mediante

$$\langle n^{(r)} \rangle \equiv \langle n(n-1) \cdots [n - (r-1)] \rangle = \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1) \cdots (n - r + 1)\, p_n.$$

Los *momentos centrales* se definen alrededor de $x = \langle x \rangle$, como el valor de expectación de potencias de la *desviación* $\Delta x \equiv x - \langle x \rangle$:

$$\mu_r \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^r \rangle = \int_\Omega (x - \langle x \rangle)^r\, p(x)\, dx.$$

Se deduce que si la densidad de probabilidad $p(x)$ es una función simétrica respecto a la media, entonces todos los momentos centrales impares son nulos. Los momentos centrales brindan medidas que caracterizan la distribución:

1. el primer momento central es idénticamente nulo para toda pdf:

$$\mu_1 = \langle x - \langle x \rangle \rangle = 0;$$

2. el segundo momento central se conoce como *varianza*, *dispersión* o también *desviación cuadrática media*:
$$\mu_2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mathrm{Var}(X) \equiv \sigma^2, \tag{1}$$
y es una medida del cuadrado del ancho efectivo de una pdf, es no negativo y se anula sólo cuando $p(x) = \delta(x)$, esto es, cuando no hay incerteza sobre el resultado. La varianza está bien definida si X es una variable aleatoria de cuadrado integrable, esto es, cuando $E[X^2] < \infty$. El *ancho* de una distribución está dado por la *desviación estándar* $\sigma = \sqrt{\mu_2}$, tiene las mismas unidades de X, y se usa para normalizar los momentos centrales de orden superior. El *ancho relativo* es otra medida que caracteriza la distribución, dado por $\frac{\sigma}{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \rangle^2} - 1}$ cuando $\langle x \rangle \neq 0$;

3. el tercer momento central permite definir el *coeficiente de asimetría*:
$$\alpha_3 \equiv \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$
que resulta adimensional y puede tener signo positivo o negativo, anulándose para distribuciones que son simétricas respecto del valor medio;

4. el cuarto momento central da lugar a la *curtosis*:
$$\alpha_4 \equiv \frac{\mu_4}{\sigma^4},$$
que posibilita diferenciar entre distribuciones altas y angostas (con $\alpha_4 < 3$), de otras bajas y anchas (con $\alpha_4 > 3$)

La relación entre los momentos centrales y los momentos ordinarios se obtiene directamente de las definiciones:
$$\mu_r = \int (x - \langle x \rangle)^r \, p(x) \, dx = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (-\langle x \rangle)^{r-s} \int x^s \, p(x) \, dx = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \nu_s (-\nu_1)^{r-s}$$
para cualquier $r = 1, 2, \ldots$, siendo $\nu_0 = 1$. Por ejemplo, $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$ como en la Ec. (1), mientras que $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$.

Dada una variable aleatoria X con una distribución de probabilidad $p(x)$, teniendo en cuenta que los dos primeros momentos dan las características más importantes de la pdf, puede resultar conveniente hacer una transformación de variable aleatoria a la llamada *forma estándar*: $Y \equiv \frac{X - \langle X \rangle}{\sigma}$, que entonces tiene media igual a 0 y desviación estándar igual a 1.

Mencionamos algunas propiedades de $E[X]$ y de $E[X^2]$.

Proposición: Sean X e Y dos variables aleatorias integrables, y sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces la variable aleatoria $Z = aX + bY$ es integrable, siendo $E[Z] = aE[X] + bE[Y]$.

Proposición: Sean X e Y dos variables aleatorias integrables. Si X e Y son independientes, entonces $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Teorema: Sean X e Y dos variables aleatorias reales Las variables X e Y son independientes si y sólo si $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$ para todo par de funciones f y g en $\mathbb{R}$, continuas y acotadas.

Proposición: Sea X una variable aleatoria de cuadrado integrable, y sea $\mathrm{Var}(X) = E[(X - \langle X \rangle)^2] \equiv \sigma^2$ su varianza. Luego:

1. $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
2. $\forall\, a \in \mathbb{R} :\ \mathrm{Var}(X + a) = \mathrm{Var}(X),\ \mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
3. Si Y es otra variable aleatoria de cuadrado integrable, e independiente de X, entonces: $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Desigualdades de Chebyshev y de Bienaymé–Chebyshev

Estas desigualdades dan una cota superior a la probabilidad de que una cantidad que fluctúa aleatoriamente exceda cierto valor umbral, aún sin conocer detalladamente la forma de la distribución de probabilidad.

Desigualdad de Chebyshev:

Sea X una variable aleatoria real con función densidad de probabilidad $p(x)$. Sea $g(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, con $g(x) \geq K\ \forall x \in D \subset \mathbb{R}$, para algún $K > 0$. Entonces por un lado

$$\mathrm{Pr}[g(X) \geq K] = \mathrm{Pr}[X \in D] = \int_D p(x)\,dx$$

y por otro lado

$$\langle g(X) \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\,dx \geq \int_D g(x)p(x)\,dx \geq K \int_D p(x)\,dx,$$

luego se tiene la desigualdad:

$$\mathrm{Pr}[g(X) \geq K] \leq \frac{\langle g(X) \rangle}{K}. \tag{2}$$

Desigualdad de Bienaymé–Chebyshev:

Sea X una variable aleatoria real de esperanza μ y varianza σ^2 finita. Entonces, $\forall\, \epsilon > 0$ se tiene la desigualdad:

$$\mathrm{Pr}[|X - \mu| > \epsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

En forma equivalente, se puede plantear la probabilidad de que X se aparte de su valor medio en más de cierto número η de desviaciones estándar: tomando $g(x) = (\Delta x)^2 = (x - \mu)^2$ en la Ec. (2), resulta la desigualdad :

$$\mathrm{Pr}[|\Delta X| \geq \eta\sigma] = \mathrm{Pr}[(\Delta X)^2 \geq \eta^2\sigma^2] \leq \frac{1}{\eta^2} \tag{3}$$

Estas relaciones afirman que cuanto más chica es la varianza, más se concentra la variable en torno a su media. Ambas cotas son en general débiles; por ejemplo, la desigualdad (3) indica que la probabilidad de encontrar una fluctuación superior a $\eta = 3$ desviaciones estándar alrededor de la media, está por debajo de $1/9$; el cálculo para una distribución típica como la Gaussiana ajusta dicha probabilidad por debajo de 0.003.

Momentos para varias variables aleatorias

En el caso de varias variables aleatorias $X, Y, Z, \ldots$ con pdf conjunta $p(x, y, z, \ldots)$ se define el *momento central de orden* $r, s, t, \ldots$ como (Mandel & Wolf, 1995; Cover & Thomas, 2006)

$$\mu_{r,s,t,\ldots} \equiv \langle (\Delta x)^r (\Delta y)^s (\Delta z)^t \ldots \rangle = \int (x - \langle x \rangle)^r (y - \langle y \rangle)^s (z - \langle z \rangle)^t \cdots\ p(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \cdots .$$

Por ejemplo, para $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim p(x, y)$ los momentos centrales de orden lineal resultan: $\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0$, y los momentos centrales de orden cuadrático están dados por las varianzas de cada variable y por la llamada covarianza: $\mu_{2,0} = {\sigma_X}^2$, $\mu_{0,2} = {\sigma_Y}^2$, y $\mu_{1,1} = \langle \Delta X \Delta Y \rangle$. Estos últimos se pueden acomodar en una matriz, con propiedades interesantes como veremos a continuación.

Sea $X^1, \ldots, X^d$ un conjunto de d variables aleatorias. La *covarianza* entre X^i y X^j se define como

$$\mu^{ij} \equiv \langle \Delta x^i \Delta x^j \rangle = \mu^{ji}$$

para $i, j = 1, \ldots, d$. Las $d(d+1)/2$ cantidades de este tipo se disponen en un arreglo (simétrico) de $d \times d$, la *matriz de covarianza* Σ, cuya diagonal son las varianzas $(\sigma^i)^2$. Por ejemplo, si $d = 2$ se tiene

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \sim p(x^1, x^2)\ : \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} (\sigma^1)^2 & \mu^{12} \\ \mu^{21} & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} .$$

Proposición:

$$|\mu^{ij}|^2 \leq \mu^{ii} \mu^{jj}$$

La demostración de esta proposición involucra la desigualadad de Cauchy–Schwarz ....

Se define el *coeficiente de correlación* que es adimensional y toma valores entre -1 (variables completamente anticorrelacionadas) y 1 (variables completamente correlacionadas) como: $\rho^{ij} = \rho^{ji} \equiv \frac{\mu^{ij}}{\sigma^i \sigma^j}$.
Como ejemplo, dadas X^1 y $X^2 = aX^1 + b$ que fluctúan en fase ($a > 0$) o al revés ($a < 0$), se tiene $\Delta x^2 = a \Delta x^1$, luego $\rho^{12} = \frac{a}{|a|} = \pm 1$.

....

1.4.2 Funciones generatrices

Se definen un conjunto de funciones que permiten hallar fácilmente los distintos momentos de una distribución de probabilidad. Se llaman *funciones generadoras* o *funciones generatrices*, y están dadas como valores de expectación de funciones de la variable aleatoria (discreta o continua), con un parámetro real o complejo.

La *función generadora de momentos* (MGF, *moment generating function*) se define como

$$M(\xi) \equiv \langle e^{\xi X} \rangle = \int e^{\xi x} p(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

en el caso de una variable aleatoria continua X con pdf $p(x)$. Se tiene $M(0) = \int p(x)\, dx = 1$ (que corresponde a la condición de normalización). Si la variable X es positiva y se toma $\xi = -s$ con $s > 0$, se interpreta en términos de la transformada de Laplace de la función p.
Si existe, la MGF posibilita obtener fácilmente los momentos (ordinarios) de X a distintos órdenes, mediante los coeficientes del desarrollo de M en serie de potencias de ξ:

$$M(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\xi^r}{r!} \int x^r p(x)\, dx = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\nu_r}{r!} \xi^r$$

o, alternativamente, mediante las sucesivas derivadas de M respecto de ξ en 0:

$$\nu_r = \left. \frac{d^r M(\xi)}{d\xi^r} \right|_{\xi=0}, \quad r = 1, 2, \ldots; \quad \nu_0 \equiv 1.$$

En el caso de una variable aleatoria discreta, suponiendo que el espacio muestral es $\mathbb{N}$, se definen dos funciones: la *función generadora de momentos (ordinarios)* (MGF) dada por

$$M(\xi) \equiv \langle e^{\xi N} \rangle = \sum_{n \geq 0} e^{\xi n} p_n,$$

y la *función generadora de momentos factoriales* (FMGF, *factorial moment generating function*) como

$$F(\xi) \equiv \langle (1+\xi)^N \rangle = \sum_{n \geq 0} (1+\xi)^n p_n$$

para $\xi \in \mathbb{R}$ en ambos casos. Se verifica $M(0) = F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. Se muestra simplemente que

$$M(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\langle n^r \rangle}{r!} \xi^r,$$

lo que permite obtener los momentos de la distribución para cualquier orden $r \geq 1$. Por otro lado, el desarrollo de la FMGF da

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \xi^r p_n = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \xi^r p_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\langle n^{(r)} \rangle}{r!} \xi^r$$

teniendo en cuenta en las dobles sumas que $0 \leq r \leq n$, con n hasta $n_{\text{máx}}$ ó ∞. Se ve entonces que F permite obtener los momentos factoriales de orden r arbitrario.

Dada una variable aleatoria a valores naturales, la función $G(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^n$, con $-1 \leq \xi \leq 1$, es también una función generatriz. Por ejemplo, si G admite derivadas primera y segunda en $\xi = 1$ se obtienen: $\langle N \rangle = G'(1)$, $\langle N(N-1) \rangle = G''(1)$, $\mathrm{Var}(N) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$; además, se obtiene la ley de distribución evaluando derivadas de G en $\xi = 0$: $p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$. (François, 2009)

La *función característica* (CF, *characteristic function*) tiene argumento complejo: (Lukacs, 1961)

$$C_X(\xi) \equiv \langle e^{i\xi X} \rangle = \int e^{i\xi x} p(x)\, dx.$$

La importancia de esta función reside en que siempre existe y está bien definida, dado que es la transformada de Fourier de una función absolutamente integrable (i.e. $\int |f(x)|\, dx < \infty$) (Golberg, 1961)

Si la pdf $p(x)$ es de cuadrado integrable, entonces

$$p(x) = \frac{1}{2pi} \int e^{-i\xi x} C_X(\xi)\, d\xi.$$

El requisito para esta importante relación es que $\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|^2\, dx < \infty$; sin embargo, aún es válida para distribuciones con una contribución tipo δ. Por otro lado los momentos, si existen, se obtienen derivando la función C tal como expresa la siguiente proposición:

Proposición: La variable aleatoria X admite momento de orden r si y sólo si la función característica C es r veces derivable en $\xi = 0$, siendo

$$\langle X^r \rangle = (-i)^r C_X^{(r)}(0).$$

Por ejemplo, en el caso de la distribución de Cauchy–Lorentz resulta

$$C(\xi) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\gamma^2 + (x - x_0)^2} dx = e^{-\gamma|\xi| e^{ix_0\xi}}$$

tomando $\gamma > 0$. Esta función está definida para todo ξ, pero no es derivable en $\xi = 0$, lo que coincide con el hecho de que no están definidos los momentos para esta pdf.

Para una variable aleatoria compleja $Z = X + iY$, usando la noción de transformada de Fourier bidimensional, se define:

$$C_Z(\mu) \equiv \int e^{\mu^* z - \mu z^*} p(z)\, d^2 z.$$

Resumimos algunas propiedades importantes de la función característica:

1. $C(0) = 1$
2. $|C(\xi)| \leq C(0)$
3. $C(\xi)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ (aún si la pdf $p(x)$ tiene discontinuidades)
4. $C(-\xi) = C(\xi)*$
5. $C(\xi)$ es definida no negativa, de tal forma que para un conjunto arbitrario de N números reales $\xi_1, \ldots, \xi_N$ y N números complejos $a_1, \ldots, a_N$, se cumple

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_i^* a_j C(\xi_j - \xi_i) \geq 0.$$

6. $C(\xi) = M(i\xi) = F(e^{i\xi} - 1)$, si M y F existen; $F(\xi) = M(\ln(1 + \xi))$

Teorema 1-6. *(Bochner, Goldberg)....*

Proposición: Sean X e Y dos variables aleatorias reales independientes, cuyas funciones características son C_X y C_Y. Entonces $C_{X+Y} = C_X C_Y$.

Cumulant generating function ....

Extendemos la definición de función característica para un vector aleatorio. ...

....

1.5 Algunos ejemplos de distribuciones de probabilidad

introducción...

1.5.1 Distribuciones de variable discreta

Variable con certeza

...

Ley de Bernoulli

...

Ley geométrica

...

Distribucińn binomial

...

Distribución de Poisson

...

Estadística de los números de ocupación de niveles energéticos: distribuciones de Maxwell–Boltzmann, de Fermi–Dirac, y de Bose–Einstein

...

Leyes de los grandes números

1.5.2 Distribuciones de variable continua

Distribución uniforme sobre un intervalo

...

Distribución exponencial

...

Distribución normal o Gaussiana

...

Distribución Gamma

...

Teorema del límite central

...

CAPÍTULO 2
Nociones de teoría de la información

Steeve Zozor

"Deberías llamarla 'entropía', por dos motivos.
En primer lugar su función de incerteza
ha sido usada en la mecánica estadística
bajo ese nombre, y por ello, ya tiene un nombre.
En segundo lugar, y lo que es más importante,
nadie sabe lo que es realmenta la entropía,
por ello, en un debate, siempre llevará la ventaja.
VON NEUMANN TO SHANNON (TRIBUS & MCIRVINE, 1971)

2.1 Introducción

La noción de información encuentra su origen con el desarrollo de la comunicación moderna, por ejemplo a través del telégrafo siguiendo la patente de Morse en 1840. La idea de asignar un código (punto o barra, más espacio entre letras y entre palabras) a las letras del alfabeto es la semilla de la codificación entrópica, la que se basa precisamente sobre la asignación de un código a símbolos de una fuente (codificación de fuente) según las frecuencias (o probabilidad de aparición) de cada símbolo en una cadena. De hecho, el principio de codificar un mensaje y mandar la versión codificada por un canal de transmisión es mucho más antiguo, a pesar de que no había ninguna formalización matemática ni siquiera explícitamente una noción de información. Entre otros, se puede mencionar el telégrafo óptico de Claude Chappe (1794), experimentos con luces por Guillaume Amontons (en los años 1690 en Paris), o aún más antiguamente la transmisión de mensaje con antorchas en la Grecia antigua, con humo por los indios o chiflando en la prehistoria (Montagné, 2008) o (Arndt, 2001, Cap. 3). Cada forma es una instancia práctica del esquema de comunicación de Shannon (Shannon, 1948; Shannon & Weaver, 1964), es decir la codificación de la información, potencialmente de la manera más económica que se puede, su transmisión a un "receptor" (por un canal ruidoso) que la interpreta/lee/decodifica. Implícitamente, la noción de información es al menos tan antigua como la humanidad.

A pesar de que la idea de codificar y transmitir “información” sea tremendamente antigua, la formalización matemática de la noción de incerteza o falta de información, íntimamente vinculada a la noción de información, nació bajo el impulso de Claude Shannon y la publicación de su papel seminal, “A mathematical theory of communication” en 1948 (Shannon, 1948), o un año después en su libro re-titulado “The mathematical theory of communication” reemplazando el “A” (Una) por un “The” (La). Desde estos años, las herramientas de dicha teoría de la información dieron lugar a muchas aplicaciones especialmente en comunicación (Cover & Thomas, 2006; Verdu, 1998; Gallager, 2001, y ref.), pero también en otros campos muy diversos tal como la estimación o la discriminación (Cover & Thomas, 2006; Kay, 1993; van den Bos, 2007; Lehmann & Casella, 1998, y ref.), la inferencia estadística (Robert, 2007; Pardo, 2006), el procesamiento de señal o de datos (Phillips & Rousseau, 1992; Ebeling, Molgedey, Kurths & Schwarz, 2000; Basseville, 2013, y Ref.), en ciencias de la ingeneria (Arndt, 2001; Kapur, 1989; Kapur & Kesavan, 1992; Phillips & Rousseau, 1992), física (Arndt, 2001; Ohya & Petz, 1993; Merhav, 2018, y Ref.) entre muchas otras (ver por ejemplo el esquema pagina 2 de (Cover & Thomas, 2006)).

La meta de este capítulo es describir las ideas y los pasos dando lugar a la definición de la entropía, como medida de incerteza o (falta de) información. En este capítulo, se empieza con la descripción intuitiva que subyace a la noción de información contenida en una cadena de símbolos, lo que condujo a la definición de la entropía. Esta definición puede ser deducida también de un conjunto de propiedades “razonables” que debería cumplir una medida de incerteza (enfoque axiomático). Se continuará con la descripción de tal noción de entropía, pasando del mundo discreto (símbolos, alfabeto) al mundo continuo, lo que no es trivial ni siquiera intuitivo. Se adelantará presentando el concepto de entropía condicional, lo que va a dar lugar a la noción de información compartida entre dos sistemas o variables aleatorias, concepto fundamental en el marco de la transmisión de información o de mensajes. A continuación, se presentará la noción de entropía relativa a una distribución de probabilidad de referencia, así que el concepto de distancia estadística o divergencia de una distribución con respecto a una referencia. En este capítulo veremos como estas medidas informacionales son entrelazadas a través varias identidades y desigualdades, así que varias relaciones con medidas del mundo de la estimación. Al final, se darán ejemplos y aplicaciones, así que varias generalizaciones de las medidades informacionales.

2.2 Entropía como medida de incerteza

2.2.1 Entropía de Shannon, propiedades

Uno de los primeros trabajos tratando de formalizar la noción de información de una cadena de símbolos es debido a Ralph Hartley (Hartley, 1928). En su papel, Hartley definió la información de una secuencia como siendo proporcional a su longitud. Más precisamente, para símbolos de un alfabeto de cardinal α, existen α^n cadenas distintas de longitud n. Se definió la información de tales cadenas como siendo Kn (K dependiente de α). Para ser consistente, dos conjuntos del mismo tamaño $\alpha_1^{n_1} = \alpha_2^{n_2}$ deben llegar a la misma información, así que la información de Hartley es definida como $H = \log(\alpha^n)$ donde la base del logaritmo es arbitraria. Dicho de otra manera, tomando un logaritmo de base 2, esta información es nada más que los números de bits (0-1) necesarios para codificar todas las cadenas de longitud n de símbolos de un alfabeto de cardinal α. La información de Hartley es el equivalente de la entropía de Boltzmann de la mecánica estadística la famosa fórmula $S = k_B \log W$ (Boltzmann, 1896, 1898; Jaynes, 1965; Merhav, 2010, 2018).

Una debilidad del enfoque de Hartley es que considera implícitamente que en un mensaje, cada cadena de longitud dada puede aparecer con la misma frecuencia, o probabilidad $1/\alpha^n$ (en Boltzmann, misma probabilidad de cada configuración), siendo la información menos el logaritmo de estas probabilidades. Al contrario, parece más lógico considerar que secuencias muy frecuentes no llevan mucha información (se sabe que aparecen), mientras que las que aparecen raramente llevan más información (hay más sorpresa, más incerteza en observarlas). Volviendo a los símbolos elementales x, vistos como aleatorios (o valores, o estados que puede tomar una variable aleatoria), la (falta de) información o incerteza va a estar íntimamente vinculada a la probabilidad de aparición de estos símbolos x. Siguiendo la idea de Hartley, la información elemental asociada al estado x va a ser $-\log p(x)$ donde $p(x)$ es la probabilidad de aparición de x. Se define la incerteza asociada a la variable aleatoria como el promedio estadístico sobre todos los estados posibles x (Shannon, 1948; Shannon & Weaver, 1964) [12].

Definición 2-18 (Entropía de Shannon)**.** *Sea X una variable aleatoria definida sobre una alfabeto o espacio muestral discreto $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_\alpha\}$ de cardinal $\alpha = |\mathcal{X}| < +\infty$ finito. Sea p_X la distribución de probabilidad de X, i. e., $\forall\, x \in \mathcal{X}, \quad p_X(x) = \Pr[X = x]$. La entropía de Shannon de la variable X está definida por*

$$H(p_X) = H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x)\, \log p_X(x)$$

con la convención $0 \log 0 = 0$ ($\lim_{t \to 0} t \log t = 0$).

La base del logaritmo es arbitraria; si es $\log_2$ el logaritmo de base 2, H está en unidades binarias o bits (se encuentra tambíen la denominación Shannons), si se usa el logaritmo natural $\ln$, H está en unidades naturales o nats, si es el de base 10, H se da en dígitos decimales o dits (se encuentra tambíen la denominación bans o Hartleys). *En este capítulo, se usará H sin especificar la base del logaritmo. Si es necesario que tenga una base a dada, se denotará la entropía correspondiente H_a y se especificará la base del logaritmo* $\log_a$. Notar que $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$, dando

$$H_a(X) = H_b(X) \log_a b$$

[12]En la misma época que Shannon, independientemente, medidades informacionales aparecieron en cálculos de capacidad de canal en varios trabajos como los de los ingenieros franceses André Clavier (Clavier, 1948) o Jacques Laplume (Laplume, 1948), o en el libro del estadounidense Norbert Wiener (Wiener, 1948, Cap. III) entre varios otros (ver (Verdu, 1998; Lundheim, 2002; Rioul & Magossi, 2014; Flandrin & Rioul, 2016; Rioul & Flandrin, 2017; Chenciner, 2017, y Ref.)).

En lo que sigue, aún que, rigurosamente, H sea una función de la distribución de probabilidad p_X y no de la variable X, se usará indistintamente tanto la notación $H(p_X)$ como $H(X)$ según lo más conveniente. Además, p_X podrá denotar indistintamente la distribución de probabilidad, o el vector de probabilidad $p_X \equiv \begin{bmatrix} p_X(x_1) & \cdots & p_X(x_\alpha) \end{bmatrix}^t$ donde $\cdot^t$ denota la transpuesta. En lo que sigue, de vez a cuando, usaremos $p_i \equiv p_X(x_i)$ por simplificación de escritura.

H es el equivalente de la entropía de Gibbs en mecánica estadística. La letra H viene del teorema-H debido a... Ludwig Boltzmann (Jaynes, 1965; Merhav, 2010, 2018).

H tiene propiedades notables que corresponden a las que se puede exigir a una medida de incerteza (Shannon, 1948; Shannon & Weaver, 1964; Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007; Dembo, Cover & Thomas, 1991; Johnson, 2004):

[P1] *Continuidad:* Vista como una función de α variables $p_i = p_X(x_i)$, H es continua con respeto a los p_i.

[P2] *Invariance bajo una permutación:* Obviamente, la entropía es invariante bajo una permutación de las probabilidades, *i. e.,*,

$$\text{para cualquiera permutación } \sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad H(p_{\sigma(X)}) = H(p_X) \quad \text{con} \quad p_{\sigma(X)}(x) = p_X(\sigma(x))$$

lo que se escribe también $H(\sigma(X)) = H(X)$. En particular, denotando $p_X^\downarrow$ el vector de probabilidades obtenido a partir de p_X, clasificando las probabilidades en orden decreciente, $p_1^\downarrow \ge p_2^\downarrow \ge \cdots \ge p_\alpha^\downarrow$ donde $p_i^\downarrow$ es la i-esima componente de $p_X^\downarrow$,

$$H(p_X^\downarrow) = H(p_X)$$

[P3] *Invariance bajo una transformación biyectiva:* La entropía es invariante bajo cualquiera transformación biyectiva, *i. e.,*

$$\text{para cualquiera función biyectiva } g : \mathcal{X} \to g(\mathcal{X}), \quad H(g(X)) = H(X)$$

A través tal transformación los estados cambian, pero no cambia la distribución de probabilidad vinculada al alfabeto transformado. Tomando el ejemplo de un dado, la incerteza vinculada al dado no debe depender de los símbolos escritos sobre las caras, sean enteras o cualesquiera letras.

[P4] *Positividad:* La entropía es acotada por debajo,

$$H(X) \ge 0$$

con igualdad si y solamente si existe un $x_j \in \mathcal{X}$ ($j \in \{1, \ldots, \alpha\}$) tal que $p_X(x_j) = 1$ y $p_X(x) = 0$ para $x \neq x_j$ ($p_X = \mathbb{1}_j$),

$$H(X) = 0 \quad \text{ssi} \quad X \text{ es determinista}$$

En otras palabras, cuando X no es aleatoria, *i. e.,* $X = x_j$, no hay incerteza, o la observación no lleva información (se sabe lo que va a salir, sin duda): $H = 0$. La positividad es consecuencia de $p_X(x) \le 1$, dando $-p_X(x) \log p_X(x) \ge 0$. Además, la suma de términos positivos vale cero si y solamente si cada término de la suma vale cero, dando $p_X(x) = 0$ o $p_X(x) = 1$. Se concluye p_X siendo una distribución de probabilidad, sumando a 1.

[P5] *Maximalidad:* La entropía es acotada por arriba,

$$H(X) \leq \log \alpha$$

con igualdad si y solamente si existe X es uniforme sobre $\mathcal{X}$, *i. e.,*

$$H(X) = \log \alpha \quad \text{ssi} \quad \forall\, x \in \mathcal{X},\; p_X(x) = \frac{1}{\alpha}$$

En otras palabras, la incerteza es máxima cuando cualquier estado x puede aparecer con la misma probabilidad; cada observación lleva una información importante sobre el sistema que genera X. La cota máxima resuelta de la maximización de H sujeto a $\sum_x p_X(x) = 1$, es decir, con la técnica del Lagrangiano para tomar en cuenta el vínculo (Miller, 2000; Cambini & Martein, 2009), notando $p_i = p_X(x_i)$, hay que minimizar $\sum_i (-p_i \log p_i + \mu p_i)$ donde el factor de Lagrange μ se determinará para satisfacer el vínculo. Se obtiene sencillamente que $\log p_i = -\mu$, dando la distribución uniforma.

La figura Fig. 2-10 representa la entropía de un sistema a dos estados, de probabilidades $p_X = \begin{bmatrix} r & 1-r \end{bmatrix}^t$ (ley de Bernoulli de parametro r), entropía a veces dicha *entropía binaria*, en función de r. Esta figura ilustra ambas cotas ($r = 1$ o 1, $r = \frac{1}{2}$) así que la invariancia bajo una permutación ($h(r) = H(r, 1-r) = H(1-r, r) = h(1-r)$).

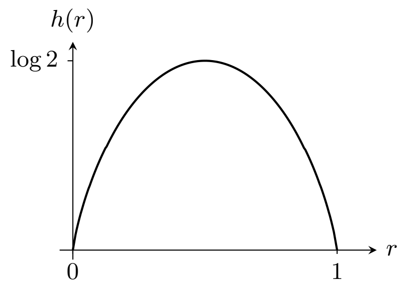


Figura 2-10: Entropía binaria (de una variable de Bernoulli) $h(r) = H(r, 1-r)$ en función de $r \in [0,1]$.

[P6] *Expansibilidad:* Añadir un estado de probabilidad 0 no cambia la entropía, *i. e.,* sean X definido sobre $\mathcal{X}$ y $\widetilde{X}$ sobre $\widetilde{X}$,

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{\widetilde{x}_0\} \quad \text{con} \quad p_{\widetilde{X}}(x) = p_X(x) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{X}, \quad p_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}_0) = 0, \qquad \text{entonces} \quad H(p_{\widetilde{X}}) = H(p_X)$$

Esta propiedad es obvia, consecuencia de $\lim\limits_{t \to 0} t \log t = 0$.

[P7] *Recursividad:* Juntar dos estados baja la entropía de una cantidad igual a la entropía interna de los dos estados por la probabilidad de ocurrencia de este conjunto de estados, y vice-versa. De la invarianza de la entropía por permutación, sin perdida de generalidad se puede considerar que los estados que se juntan son los dos últimos, *i. e.,* sean X definido sobre $\mathcal{X}$ y $\overline{X}$ sobre $\overline{\mathcal{X}}$,

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{X}} = \{x_1, \ldots, x_{\alpha-2}, \bar{x}_{\alpha-1}\} \quad \text{con el estado interno} \quad \bar{x}_{\alpha-1} = \{x_{\alpha-1}, x_\alpha\}, \\ p_{\overline{X}}(x_i) = p_X(x_i), \quad 1 \le i \le \alpha - 1 \quad \text{y} \quad p_{\overline{X}}(\bar{x}_{\alpha-1}) = p_X(x_{\alpha-1}) + p(x_\alpha) \quad \text{distribución sobre } \overline{\mathcal{X}} \\ \bar{q}(x_j) = \dfrac{p_X(x_j)}{p_X(x_{\alpha-1}) + p_X(x_\alpha)}, \quad j = \alpha - 1, \alpha \quad \text{distribución del estado interno} \end{cases}$$

$$H(p_X) = H(p_{\overline{X}}) + p_{\overline{X}}(\bar{x}_{\alpha-1})\, H(\bar{q})$$

lo que se escribe también

$$H(p_1, \ldots, p_\alpha) = H(p_1, \ldots, p_{\alpha-2}, p_{\alpha-1} + p_\alpha) + (p_{\alpha-1} + p_\alpha)\, H\left(\frac{p_{\alpha-1}}{p_{\alpha-1} + p_\alpha}, \frac{p_\alpha}{p_{\alpha-1} + p_\alpha}\right)$$

Esta relación viene de $a \log a + b \log b = (a+b)\left(\frac{a}{a+b} \log\left(\frac{a}{a+b}\right) + \frac{b}{a+b} \log\left(\frac{a}{a+b}\right) - \log(a+b)\right)$ es ilustrada en la figura Fig. 2-11.

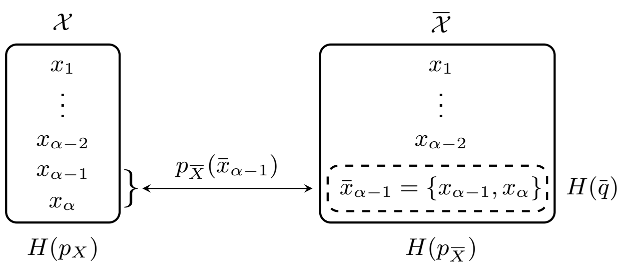


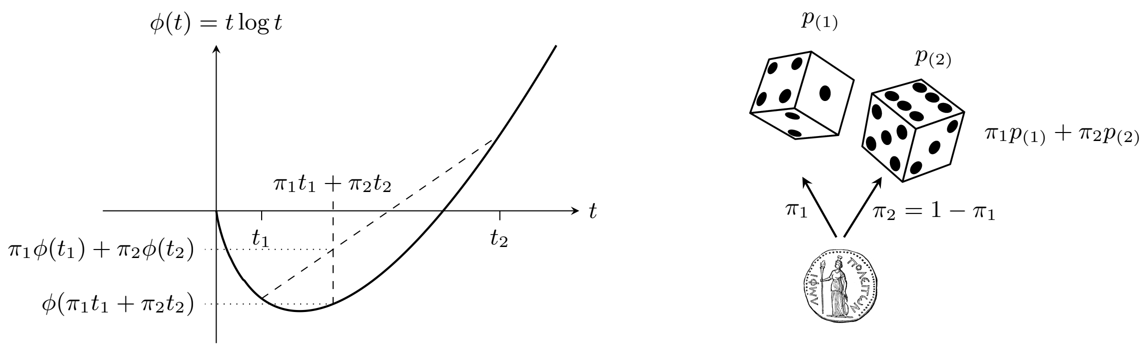
Figura 2-11: Ilustración de la propiedad de recursividad, que cuantifica como decrece la entropía en un conjunto cuando se juntan dos estados, relacionando la entropía total, la entropía después del la agrupación y la entropía interna a los dos estados juntados.

[P8] *Concavidad:* La entropía es cóncava, en el sentido de que la entropía de una combinación convexa de distribuciones (mezcla) de probabilidades es siempre mayor o igual a la combinación convexa de entropías:

$$\forall\, \{\pi_i\}_{i=1}^n, \quad 0 \le \pi_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^n \pi_i = 1 \quad \text{and cualquier conjunto de distribuciones} \quad \{p_{(i)}\}_{i=1}^n,$$

$$H\left(\sum_{i=1}^n \pi_i p_{(i)}\right) \ge \sum_{i=1}^n \pi_i H(p_{(i)})$$

Esta relación es conocida como desigualdad de Jensen (Jensen, 1906). Es una consecuencia directa de la convexidad de la función $\phi : t \mapsto t \log t$, como ilustrado en la figura Fig. 2-12-(a). La figura Fig. 2-12-(b) ilustra como se puede obtener una mezcla de distribuciones de dos probabilidad $p_{(1)}$ (dado izquierda) y $p_{(2)}$ (dado derecho) haciendo una elección aleatoria a partir de una moneda en este ejemplo (probabilidad $\pi_1 = 1 - \pi_2$ de elegir el dado izquierda).



(a) (b)

Figura 2-12: (a) $\phi(t) = t \log t$ es convexa: la curva es siempre debajo de sus cuerdas; entonces, cada promedio de $\phi(t_1)$ y $\phi(t_2)$ estando en la cuerda juntando estos puntos, queda arriba de la función tomada en el promedio de t_1 y t_2. Escribiendo eso para (más de dos puntos) sobre los $\sum_i \pi_i p_{(i)}(x)$ y sumando sobre los x da la desigualdad de Jensen. (b) Ilustración de una distribución de mezcla, acá mezclando $p_{(1)}$ y $p_{(2)}$ a partir de una tercera variable aleatoria (acá de Bernoulli).

[P9] *Schur-concavidad:* Como se lo puede querrer, lo más "concentrado" es una distribución de probabilidad, lo menos hay incerteza, y entonces lo más pequeño debe ser la entropía. Esta propiedad intuitiva se resuma a partir de la noción de mayorización:

Definición 2-19 (Mayorización). *Un vector de probabilidad (distribución) p mayorizado por un vector de probabilidad (distribución) q, notado $p \prec q$, se define como:*

$$p \prec q \quad \textit{ssi} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{k} q_i^{\downarrow}, \quad 1 \le k < \alpha \quad \textit{y} \quad \sum_{i=1}^{\alpha} p_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{\alpha} q_i^{\downarrow}$$

(las últimas sumas siendo igual a 1). Si los alfabetos de definición de p y q son de tamaños diferentes, α es el tamaño lo más grande y la distribución sobre el alfabeto lo más corto es completada por estados de probabilidad 0 (recordar que no va a cambiar la entropía).

La Schur-concavidad se traduce por la relación

$$p \prec q \quad \Rightarrow \quad H(p) \ge H(q)$$

Fijense de que las cotas sobre H pueden ser vistas como consecuencias de esta desigualdad: la distribución cierta mayoriza cualquiera distribución y cualquiera distribución mayoriza la distribución uniforme (Marshall, Olkin & Arnold, 2011, p. 9, (6)-(8)). Además, de la Schur-concavidad se obtiene que

$$H\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \cdots & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}^t\right) \quad \text{es una función creciente de } \alpha$$

La prueba de la Schur-concavidad se apoya sobre la desigualdad de Schur o Hardy-Littlewood-Pólya o Karamata (Schur, 1923; Hardy, Littlewood & Pólya, 1929; Karamata, 1932; Hardy, Littlewood & Pólya, 1952), (Marshall et al., 2011, Cap. 3, Prop. C.1) o (Bhatia, 1997, Teorema II.3.1): $t \prec t' \;\Rightarrow\; \sum_i \phi(t_i) \le \sum_i \phi(t'_i)$ para cualquiera función ϕ convexa. Basta considerar $\phi(t) = t \log t$ para concluir.

En muchos casos, uno tiene que trabajar con varias variables aleatorias. Para simplificar las notaciones, consideramos un par de variables X y Y definidas respectivamente sobre los alfabetos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ de cardinal $\alpha = |\mathcal{X}|$ y $\beta = |\mathcal{Y}|$. Tal par de variables puede ser vista como una variable (X, Y) definida sobre el alfabeto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de cardinal $\alpha\beta$ tal que se define naturalmente la entropía para esta variable; tal entropía es llamada *entropía conjunta* de X y Y:

Definición 2-20 (Entropía conjunta). *Sean X e Y dos variables aleatorias definidas sobre los alfabetos o espacios muestrales discretos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, de cardinal $\alpha = |\mathcal{X}| < +\infty$ y $\beta = |\mathcal{Y}| < +\infty$ respectivamente. Sea $p_{X,Y}$ la distribución de probabilidad conjunta de X e Y, i. e.,* $\forall\, (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad p_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x, Y = y]$*. La entropía conjunta de Shannon de las variables X e Y es definida por*

$$H(p_{X,Y}) = H(X, Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} p_{X,Y}(x, y)\, \log p_{X,Y}(x, y)$$

con la convención $0 \log 0 = 0$.

A partir de esta definición, aparecen otras propiedades importantes, sino que fundamentales, de la entropía de Shannon.

[P10] *Aditividad:* La entropía conjunta de dos variables aleatorias X e Y independientes se suma, y recíprocamente:

$$X \text{ e } Y \text{ independientes} \quad \Leftrightarrow \quad H(X, Y) = H(X) + H(Y)$$

Dicho de otra manera, para dos variables aleatorias, la incerteza global es la suma de las incertezas de cada variable individual. La propiedad "$\Rightarrow$" es consecuencia directa de $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$. Se va a probar en la sección siguiente la recíproca. Esta propiedad se escribe también

$$H\left(p_X \otimes p_Y\right) = H\left(p_X\right) + H\left(p_Y\right)$$

donde $\otimes$ es el producto de Kronecker [13] Se generaliza sencillamente a un conjunto de variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ (o, equivalmente a un producto de Kronecker de un conjunto de vectores de probabilidades).

[P11] *Sub-aditividad:* La entropía conjunta de dos variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ es siempre menor que la suma de cada entropía individual:

$$H(X_1, \ldots, X_n) \le \sum_{i=1}^n H(X_i) \qquad \textit{i. e.,} \qquad H\left(p_{X_1,,\ldots,X_n}\right) \le H\left(p_{X_1} \otimes \cdots \otimes p_{X_n}\right) = \sum_{i=1}^n H\left(p_{X_i}\right)$$

Dicho de otra manera, las variables aleatorias pueden compartir información, de tal manera que la entropía global sea menor que la suma de cada entropía. De la propiedad anterior, se obtiene la igualdad si y solamente si los X_i son independientes.

[13] Recuerdense de que $p_X \otimes p_Y$ es un vector de tamaño $\alpha\beta$ de componente $(i-1)\alpha+j$-esima $p_X(x_i)p_Y(y_j), \quad 1 \le i \le \alpha, 1 \le j \le \beta$. Se lo puedo ver también como un producto tensorial o externo de p_X definido sobre $\mathcal{X}$ y p_Y definido sobre $\mathcal{Y}$, el producto tensioral siendo definido sobre $\mathcal{X} \times Y$. Ver nota de pie 9 pagina 30.

[P12] *Super-aditividad:* La entropía conjunta de dos variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ es siempre mayor que cualesquiera de las entropías individuales

$$H(X_1, \ldots, X_n) \geq \max_{1 \leq i \leq n} H(X_i)$$

Es importante notar que existen varios enfoques basados sobre una serie de axiomas, dando lugar a la definición de la entropía tal como definida. Estos axiomas son conocidos como axiomas de Shannon-Khinchin y son la continuidad [P1], la maximalidad [P5], la expansabilidad [P6] y la aditividad [P10]. Existen varios otros conjuntos de axiomas, conduciendo también a la entropía de Shannon (ver (Shannon, 1948, Sec. 6) o (Shannon & Weaver, 1964; Fadeev, 1956, 1958; Khinchin, 1957; Rényi, 1961), entre otros).

Para una serie de variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots$, representando símbolos, se puede definir una entropía por símbolo como una entropía conjunta divido por el número de símbolos, $\frac{H(X_1,\ldots,x_n)}{n}$, así que una tasa de entropía cuando n va al infinito.

Definición 2-21 (Tasa de entropía)**.** *Sea $X \equiv \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ una serie de variables aleatorias, o proceso estocástico. La tasa de entropía del proceso es definida por*

$$\mathcal{H}(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{H(X_1, \ldots, X_n)}{n}$$

Esta cantidad siempre existe porque $H(X_1, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} H(X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log \alpha_i \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ donde los α_i son los cardinales de los alfabetos de definición de los X_i.

Se termina esta subsección con el caso de variables discretas definidas sobre un alfabeto $\mathcal{X}$ de cardinal infinito $|\mathcal{X}| = +\infty$, por ejemplo $\mathcal{X} = \mathbb{N}$. Por analogía, se puede siempre definir la entropía como en la definición Def. 2-18. Esta extensión resuelta delicada dando de que unas propiedades se perdien. Por ejemplo, la entropía no queda acotada por arriba como se lo puede probar para la distribución de probabilidad $p(x) \propto \frac{1}{(x+2)\left(\log(x+2)\right)^2}$, $x \in \mathbb{N}$, correctamente normalizada ($\propto$ significa "proporcional a"): $\frac{\log\log(x+2)}{(x+2)\left(\log(x+2)\right)^2} \geq 0$ y la serie $\sum_x \frac{1}{(x+2)\log(x+2)}$ es divergente, así que la serie $-\sum_x p(x) \log p(x)$ diverge.

2.2.2 Entropía diferencial

Volviendo a la definición Def. 2-18 de la entropía de Shannon, usando el operador E promedio estadístico o esperanza matemática, se puede reescribir la entropía de Shannon como $H(X) = \mathrm{E}\left[-\log p_X(X)\right]$. Con este punto de vista, es fácil extender la definición de la entropía para variables aleatorias continuas admitiendo una densidad de probabilidad. Eso da lugar a lo que es conocido como la *entropía diferencial*:

Definición 2-22 (Entropía diferencial)**.** *Sea X una variable aleatoria continua definida sobre $\mathbb{R}^d$ y $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^d :\, p_X(x) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^d$ el soporte de $p_X(x)$, su densidad (distribución) de probabilidad. La entropía diferencial* *de la variable X es definida por*

$$H(p_X) = H(X) = -\int_{\mathcal{X}} p_X(x)\, \log p_X(x)\, dx$$

(con la convención $0\log 0 = 0$, se puede escribir la integración en $\mathbb{R}^d$).

Como en el caso discreto, para $X = (X_1, \ldots, X_d)$, esta entropía de X es dicha entropía conjunta de los componentes X_i.

Como se lo va a ver, la entropía diferencial no tiene la misma significación de incerteza, siendo de que depende no solamente de la distribución de probabilidad, sino que de los estados también. Más allá, no se la puede ver como límite continua de un caso discreto: a través de tal límite, se va a ver que se llama diferencial, a causa del efecto de la diferencial dx. Para ilustrar este hecho, consideramos una variable aleatoria escalar X y p_X su densidad de probabilidad de soporte $\mathbb{R}$. Sea $\delta > 0$ y sea el alfabeto $\mathcal{X}^\delta = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ donde los x_k se definen tal que $p_X(x_k)\delta = \displaystyle\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} p_X(x)\, dx$, como ilustrado en la figura Fig. 2-13. Se define la variable aleatoria discreta X^δ sobre $\mathcal{X}^\delta$ tal que $\Pr[X^\delta = x_k] = p_{X^\delta}(x_k) = p_X(x_k)\delta$. Se puede ver X^δ como la versión cuantificada de X, con $X^\delta = x_k$ cuando $X \in [k\delta, (k+1)\delta)$. Al revés, aún que sea delicado, se puede interpretar X como el "límite" de X^δ cuando δ tiende a 0. Ahora, es claro de que

$$\begin{aligned} H(X^\delta) &= -\sum_k p_{X^\delta}(x_k) \log p_{X^\delta}(x_k) \\ &= -\log\delta - \sum_k \Big(p_X(x_k)\log p_X(x_k)\Big)\,\delta \end{aligned}$$

lo que se escribe también

$$H(X^\delta) + \log\delta = -\sum_k \Big(p_X(x_k)\log p_X(x_k)\Big)\,\delta$$

Entonces, de la integración de Riemann sale que

$$\lim_{\delta\to 0} \big(H(X^\delta) + \log\delta\big) = H(X)$$

Dicho de otra manera, la entropía diferencial de X no es el límite de la entropía de su versión cuantificada: aparece con la entropía el término "diferencial" $\log\delta$.

Más allá de esta notable diferencia entre la entropía y la entropía diferencial, la última depende de los estados, es decir que si $Y = g(X)$ con g biyectiva, no se conserva la entropía, *i. e.,* se pierde la propiedad [P3] del caso discreto:

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\int_{\mathbb{R}^d} p_Y(y)\log p_Y(y)\, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} p_Y(g(x))\log p_Y(g(x))\,|\,\mathrm{J}_g(x)|\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} p_Y(g(x))\Big(\log\big(p_Y(g(x))\,|\,\mathrm{J}_g(x)|\big) - \log|\nabla^t g(x)|\Big)\,|\,\mathrm{J}_g(x)|\, dx \end{aligned}$$

donde J_g es la matriz Jacobiana de la transformación $g: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ y $|\cdot|$ representa el valor absoluto del determinante de la matriz. Recordando que $p_X(x) = p_Y(g(x))|\,\mathrm{J}_g(x)|$, se obtiene

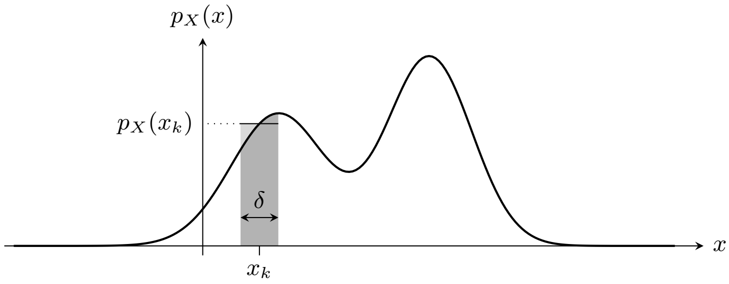


Figura 2-13: Densidad de probabilidad p_X de X, construcción del alfabeto $\mathcal{X}^\delta$ donde se define la versión cuantificada X^δ de X con su distribución discreta de probabilidad p_{X^δ}. La superficie en gris oscuro es igual a la superficie definida por el rectángulo en gris claro.

[P'3] Para cualquiera biyección $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$

$$H(g(X)) = H(X) + \int_{\mathbb{R}^d} p_X(x) \log |\operatorname{J}_g(x)|\, dx$$

donde el último término, $\operatorname{E}[\log |\operatorname{J}_g(X)|]$ no vale cero en general. En particular, si H es invariante bajo una translación,

$$H(X+\mu) = H(X) \quad \forall\, \mu \in \mathbb{R}^d$$

no es invariante por cambio de escala,

$$H(aX) = H(X) + \log |a| \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^*$$

Esta última relación queda válido para a matriz invertible. Por esta última relación, se puede ver que, dado X, cuando a tiende a 0, la entropía de aX tiende a $-\infty$. Es decir que, para a suficientemente pequeño, se puede tener $H(aX) < 0$, así que se pierde también la positividad [P4]. Por esta perdida, se quita definitivamente la interpretación de incerteza/información que hubiera podido tener la entropía diferencial.

A veces, se usa lo que es llamado potencia entrópica:

Definición 2-23 (Potencia entrópica). *Sea X una variable aleatoria d-dimensional. La potencia entrópica de X es definida por*

$$N(X) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{e}} \exp\left(\frac{2}{d} H(X)\right)$$

Por construcción, $N(X) \geq 0$. Además, en el caso continuo, $N(aX+b) = |a|^2 N(X)$ (queda válido para una matriz a invertible): esta propiedad puede justificar la idea de "potencia"; además $N(aX+b)$ tiende naturalmente a cero cuando a tiende a cero. Se recupera así la noción informacional a través de N en este contexto ($aX+b$ "tiende" a b, variable determinista).

Si se pierde la propiedad de invarianza bajo una biyección, sorprendentemente, se conserva la entropía bajo el equivalente continuo del rearreglo.

Definición 2-24 (Rearreglo simétrico). *Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ abierto de volumen finito $|\mathcal{P}| < +\infty$. El rearreglo simétrico $\mathcal{P}^\downarrow$ de $\mathcal{P}$ es la bola centrada en 0 de mismo volumen que $\mathcal{P}$, i. e.,*

$$\mathcal{P}^\downarrow = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ :\ \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} |x|^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \leq |\mathcal{P}| \right\}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma euclideana. Eso es ilustrado figura Fig. 2-14-a.
Sea p_X una densidad de probabilidad y sea $\mathcal{P}_t = \{y \, : \, p_X(y) > t\}$ para cualquier $t > 0$, sus conjuntos de niveles. La densidad de probabilidad [14] rearreglada simétrico $p_X^\downarrow$ de p_X es definida por

$$p_X^\downarrow(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{P}_u^\downarrow}(x)\, du$$

con $\mathbb{1}_A$ el indicator del conjunto A, i. e., $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ y cero sino.

Del hecho de que $\forall\, t < \tau \;\Leftrightarrow\; \mathcal{P}_\tau \subseteq \mathcal{P}_t \;\Leftrightarrow\; \mathcal{P}_\tau^\downarrow \subseteq \mathcal{P}_t^\downarrow$ es sencillo ver que si $x \in \mathcal{P}_\tau^\downarrow$, entonces $x \in \mathcal{P}_t^\downarrow$, lo que conduce a $p_X^\downarrow(x) > \tau$ y vice-versa. Más allá, sobre $\mathcal{P}_{\tau+d\tau} \backslash \mathcal{P}_\tau$ la función p_X "vale" τ y sobre $\mathcal{P}_{\tau+d\tau}^\downarrow \backslash \mathcal{P}_\tau^\downarrow$ la función $p_X^\downarrow$ "vale" tambien τ, lo que da $\displaystyle\int_{\mathcal{P}_\tau^\downarrow} p_X^\downarrow(x)\, dx = \int_{\mathcal{P}_\tau} p_X(x)\, dx$ (ver (Lieb & Loss, 2001; Wang & Madiman, 2004) para une prueba más rigorosa). La representación de la definición es conocida como representación en capas de pastel ("layer cake" en ingles). Eso es ilustrado en la figura Fig. 2-14-b

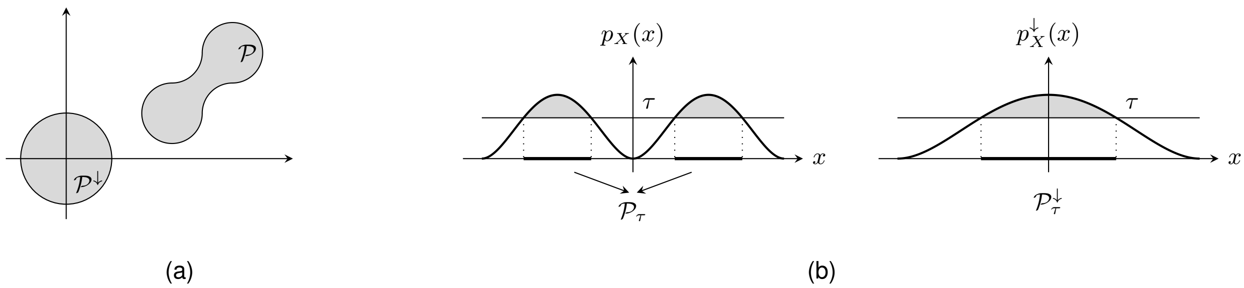


Figura 2-14: (a): Ilustración del rearreglo simétrico $\mathcal{P}^\downarrow$ de un conjunto $\mathcal{P}$, siendo la bola centrada en 0 de mismo volumen. (b) Construcción del rearreglo $p_X^\downarrow$: dado un τ, se busca $\mathcal{P}_\tau$ y se deduce $P_\tau^\downarrow$; dado un x, se busca el mayor t tal que $x \in P_t^\downarrow$, este t máximo siendo entonces $p_X^\downarrow(x)$; además, por construcción, las superficies en gris son iguales.

[P'2] *invarianza bajo un rearreglo:* Sea p_X densidad de probabilidad sobre un abierto de $\mathbb{R}^d$,

$$H\left(p_X^\downarrow\right) = H(p_X)$$

Esta propiedad es probada para funciones convexas de la densidad de probabilidad por ejemplo en (Lieb & Loss, 2001) o (Wang & Madiman, 2004, Lema 7.2) [15], y entonces para el caso particular $\phi(t) = t\log t$.

Una pregunta natural es de saber lo que pasa en término de mayorización en el contexto continuo d-dimensional. Por eso, se necesita primero de redefinir la noción de mayorización en este contexto:

[14]Se proba de que esta función, positiva por definición, suma a 1. Además, por construcción, depende únicamente de $|x|$ y decrece con $|x|$.

[15]En (Lieb & Loss, 2001, Sec. 3.3) lo muestran para $\phi(p_X)$ donde ϕ es la diferencia de dos funciones monotonas, siendo $\phi(t) = t\log t$ un caso particular.

Definición 2-25 (Mayorización en el contexto continuo)**.** *Una densidad de probabilidad p es dicha mayorizada por una distribución q si:*

$$p \prec q \qquad \textit{ssi} \qquad \int_{\mathcal{B}(0,r)} p^{\downarrow}(x)\, dx \le \int_{\mathcal{B}(0,r)} q^{\downarrow}(x)\, dx \quad \forall\, r > 0, \qquad \textit{y} \qquad \int_{\mathbb{R}^d} p^{\downarrow}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} q^{\downarrow}(x)\, dx$$

donde $\mathcal{B}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \, : \, \|x\| \ge r\}$ es la bola centrada en 0 y de rayo r (las últimas integrales son obviamente iguales a 1).

La Schur-concavidad [P9] se conserva en el caso continuo, *i. e.,*

$$p \prec q \quad \Rightarrow \quad H(p) \ge H(q)$$

La desigualdad inversa es probada para cualquier función ϕ convexa de la densidad (Chong, 1974) o (Wang & Madiman, 2004, Prop. 7.3), en particular para $\phi(t) = t \log t$.

Como se ha visto, la entropía diferencial no es siempre positiva, como consecuencia de la propiedad [P'3]. También, la propiedad de cota superior [P5] se pierde en general, salvo si se ponen vínculos:

[P'5] *a*) Si $\mathcal{X}$ es de volumen finito $|\mathcal{X}| < +\infty$, la entropía es acotada por arriba,

$$H(X) \le \log |\mathcal{X}|$$

con igualdad si y solamente si X es uniforme.

b) Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ y X tiene una matriz de covarianza dada $\Sigma_X = \mathrm{E}\left[X X^t\right]$, la entropía es también acotada por arriba,

$$H(X) \le \frac{d}{2} \log(2\pi\, \mathrm{e}) + \frac{1}{2} \log |\Sigma_X|$$

con igualdad si y solamente si X es gaussiana. En particular, la potencia entrópica de la gaussiana vale $N(X) = |\Sigma_X|^{\frac{1}{d}}$, dando de nuevo un “sabor” de potencia a N. Como se lo va a ver en este capítulo, la gaussiana juega un rol central en la teoría de la información.

En ambos casos, estas desigualdades con la distribución maximizante se obtienen resolviendo el problema de maximización de la entropía sujeto a vínculos. Se trata del caso más general en la sección Sec. 2.4.1.

Al final, se conservan las propiedades de concavidad [P8] [16], de aditividad [P10] y de sub-aditividad [P11]. Es interesante notar que de la desigualdad [P11], puramente entrópica, se puede deducir la desigualdad de Hadamard, desigualdad puramente matricial: $|R| \le \prod_i R_{i,i}$ para cualquiera matriz simétrica definida positiva (viene de la propiedad [P11] escrita para una gaussiana de covarianza R y tomando una exponencial de la desigualdad).

2.3 Entropía condicional, información mutua, entropía relativa

Tratando de un par de variables aleatorias X e Y, una cuestión natural que ocurre es de cuantificar la incerteza que queda sobre una de las variables cuando se observa la otra. Dicho de otra manera, si se mide $Y = y$, ¿que información lleva sobre X? La respuesta a esta interogación se encuentra en la noción de entropía condicional. Si uno mide $Y = y$, la descripción estadística de X conociendo este $Y = y$ se resuma a la distribución condicional de probabilidad $p_{X|Y} = \frac{p_{X,Y}}{p_Y}$. Con esta restricción, se puede evaluar una incerteza sobre X, sabiendo que $Y = y$,

$$H(X|Y = y) = H\left(p_{X|Y}(\cdot, y)\right)$$

Entonces, condicionalmente a la variable aleatoria Y, la incerteza va a ser el promedio estadístico sobre todos los estados Y es decir $H(X|Y) = \sum_y p_Y(y) H(X|Y = y)$:

Definición 2-26 (Entropía condicional)**.** *Sean X e Y dos variables aleatorias discretas, la entropía condicional de X sabiendo Y es definida por*

$$H(X|Y) = -\sum_{x,y} p_{X,Y}(x, y) \log p_{X|Y}(x, y)$$

Esta definición se transpone naturalmente a la entropía diferencial:

Definición 2-27 (Entropía diferencial condicional)**.** *Sean X e Y dos variables aleatorias continuas, la entropía condicional de X sabiendo Y es definida por*

$$H(X|Y) = -\int_{\mathbb{R}^d} p_{X,Y}(x, y) \log p_{X|Y}(x, y)\, dx\, dy$$

Si X e Y son indepedientes, $p_{X|Y}$ se reduce a p_X, así que vale cero la entropía condicional:

[P13]

$$X \text{ e } Y \text{ independientes} \quad \Leftrightarrow \quad H(X|Y) = H(X)$$

Esta propiedad vale en ambos casos, discreto como continuo. En el caso discreto, se interpreta como el hecho de que Y no lleva ninguna información sobre X, y entonces ninguna medición de Y va a cambiar la incerteza sobre X.

Siendo $H(X|Y = y)$ una entropía, va a heredar de todas las propiedades de la entropía (diferencial). Además, de $p_{X,Y} = p_{X|Y} p_Y$ se deduce la propiedad siguiente (válida para la entropía como para su extensión diferencial)

[P14] *Regla de cadena*

$$H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y)$$

Esta regla, válida en ambos casos, discreto como continuo, se generaliza sencillamente a

$$H(X_1, \ldots, X_n) = H(X_1) + \sum_{i=2}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \ldots, X_1)$$

De esta regla de cadena se recupera la propiedad [P13] a partir de la propiedad [P10].

Siendo $H(X|Y=y)$ una entropía, en el caso discreto esta cantidad es positiva. Entonces, en el caso discreto, $H(X|Y)$ es positiva, lo que prueba la super-aditividad [P12].

De la regla de cadena $H(X,Y) = H(X|Y) + H(Y) = H(Y|X) + H(X)$ aparece que las cantidades $H(X|Y) - H(X)$, $H(Y|X) - H(Y)$ y $H(X,Y) - H(X) - H(Y)$ son todas iguales. Estas cantidades definen lo que se llama la información mutua entre X e Y:

Definición 2-28 (Información mutua)**.** *Sean X e Y dos variables aleatorias, la información mutua entre X e Y es la cantidad simétrica*

$$I(X;Y) = H(X|Y) - H(X) = H(Y|X) - H(Y) = H(X,Y) - H(X) - H(Y)$$

En el caso discreto se expresa

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) \log\left(\frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}\right)$$

y su forma diferencial se escribe

$$I(X;Y) = \int_{\mathbb{R}^d} p_{X,Y}(x,y) \log\left(\frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}\right)\, dx\, dy$$

Las diferentes cantidades pueden ser vistas a través de una visión ensemblista, como descrita en la figura Fig. 2-15. Este diagrama es conocido como diagrama de Venn.

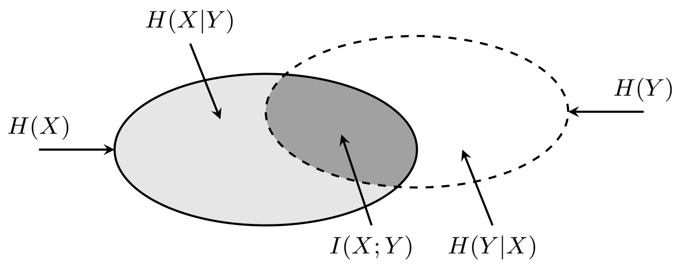


Figura 2-15: Diagrama de Venn: Ilustración de la definición de la entropía condicional, de la información mutua, y de las relaciones entre cada medida. La superficia del elipse en linea llena (parte grise) representa $H(X)$ y el interior de la en linea discontinua representa $H(Y)$. La parte grise clara representa $H(X|Y)$ superficia del "conjunto $H(X)$" quitando la parte que partenece a $H(Y)$. La parte blanca representa $H(Y|X)$ superficia del "conjunto $H(Y)$" quitando la parte que partenece a $H(X)$. La parte en grise oscuro es entonces lo que X e Y comparten, es decir $I(X;Y)$.

Como se lo va a probar, I es positiva; representa realmente una información, la compartida entre X e Y: Si de la incerteza de X se quita la incerteza de X una vez que Y es medida, lo que queda tiene la significación de la información que estas variables tienen en común. En particular, de $I(X;X) = H(X)$ se denoma a veces $H(X)$ *auto información* de X.

Para probar la positividad de I, se introduce de manera más general la noción de entropía relativa, conocida también como divergencia de Kullback-Leibler (Kullback & Leibler, 1951; Kullback, 1968; Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007):

Definición 2-29 (Entropía relativa). *La entropía relativa, o divergencia de una distribución de probabilidad q, con respeco a una distribución de referencia p, donde el soporte de p incluye lo de q ($p(x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0$), es definida como*

$$D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p\right) = \sum_x q(x) \log\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right)$$

o, en su forma diferencial

$$D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p\right) = \int_{\mathbb{R}^d} q(x) \log\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right) dx$$

(en este último caso, la condición de inclusión del soporte de q dentro del de p se formula como de que q es absolutamente continua con respeto a p) [17].

Inicialmente, esta medida fue introducida por Kullback y Leibler en la misma linea que Shannon, interpretando $\log\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right)$ como una información de discriminación entre dos hipótesis de distribuciones q y p a partir de la observación x, la divergencia siendo la información de discriminación promedia. Introdujeron también una versión simétrica, que veremos más adelante.

Esta medida puede ser vista también como una entropía de la distribución q, relativamente a una distribución de referencia p. Por ejemplo, en el caso discreto finito, si p es la distribución uniforme sobre un alfabeto de cardinal α, $D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p\right) = \log \alpha - H(q)$, lo que representa una desviación de la entropía de su valor máximo. La misma interpretación queda en el caso continuo con la ley uniforme (p y q definidas sobre el mismo espacio de volumen finito) o con la gaussiana (p y q teniendo la misma matriz de covarianza). *Como para la entropía, cuando se necesitará un logaritmo especificamente de base a, se notará la divergencia $D_{\mathrm{kl},a}$.*

Lema 2-2 (Positividad de la entropía relativa).

$$D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p\right) \geq 0 \quad \textit{con igualdad ssi} \quad p = q\ (c.s.)$$

donde $(c.s.)$ significa "casi siempre".

Demostración. Existen varias pruebas, pero la más linda puede ser la usando la desigualdad de Jensen [18] (Jensen, 1906): para ϕ convexa e Y variable aleatoria escalar, $\mathrm{E}[\phi(Y)] \geq \phi(\mathrm{E}[Y])$ con igualdad ssi Y es determinista (casi siempre) si ϕ es estrictamente convexa. Sea X de distribución o densidad de probabilidad p. En el caso discreto como diferencial, se escribe la entropía relativa $D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p\right) = \mathrm{E}\left[\frac{q(X)}{p(X)} \log\left(\frac{q(X)}{p(X)}\right)\right]$. Sea $Y = \frac{q(X)}{p(X)}$ y $\phi(u) = u \log u$, función estrictamente convexa. Entonces $D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p\right) = \mathrm{E}[\phi(Y)] \geq \phi(\mathrm{E}[Y])$. Pero $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}\left[\frac{q(X)}{p(X)}\right] = \sum_x q(x) = 1$ (y con una integral en el caso diferencial) y $\phi(1) = 0$, lo que cierra la

---

[17] Más rigorosamente, en el caso discreto, esta cantidad depende solamente de p y q y no de los estados. La condición necesaria es que p y q tienen los mismos números de componentes (se completa el vector lo más corto) y si la i-esima componente de q vale cero, entonces la de p vale cero también. Además, con p y q de mismo tamaño, se puede poner en biyección los alfabetos asociados a p y q, sin perdida de generalidad. En el caso continuo, esta razonamiento no vale más, esta cantidad dependiendo de los estados...

[18] Ver nota de pie de pagina **??** pagina **??**. En el caso discreto, se puede usar también la desigualdad $\sum t_i \log t_i \geq \sum t_i \log t_i'$ una instancia de la desigualdad conocida como desigualdad log-sum, o conocida también como desigualdad de Gibbs (debido a J. W. Gibbs mismo) (Gibbs, 1902; Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007; Merhav, 2010, 2018).

prueba. El caso de igualdad apareciendo si y solamente si Y es determinista, es decir $\frac{p(X)}{q(X)}$ determinista, es equivalente a $p(x) \propto q(x)$ $(c.s.)$, *i. e.,* $p = q$ $(c.s.)$ porque ambas suman a uno. $\square$

Esta propiedad, válida en el caso discreto como continuo, tiene consecuencias fijandose de que

$$I(X;Y) = D_{\mathrm{kl}}\left(p_{X,Y} \| p_X p_Y\right)$$

i. e., la información mutua es la divergencia de Kullback-Leibler de la distribución conjunta relativa al producto de las marginales.

[P15] I *es positiva, como medida de independencia:*

$$I(X;Y) \geq 0 \quad \text{con igualdad ssi } X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$

[P16] *Condicionar reduce la entropía*

$$H(X|Y) \leq H(X) \quad \text{con igualdad ssi } X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$

Esta desigualdad, con la regla de cadena, prueba la sub-aditividad [P11]. Esta reducción de incerteza vale en promedio, pero el conocimiento de un valor particular puede ser tal que $H(X|Y=y) > H(X)$, *i. e.,*¡ un conocimiento particular puede aumentar la entropía! (ver ejemplos en (Rioul, 2007, p. 59)).

Fijense que si D_{kl} es positiva, no es simétrica y tampoco satisface la desigualdad triangular. Por eso, no es una distancia y tiene el nombre de *divergencia*. La distribución de referencia p juega un rol fundamental.

Al final, se mencionará las propiedades adicionales siguientes:

1. A pesar de que la forma diferencial de D_{kl} depende de los estados, queda invariante bajo una misma transformación biyectiva sobre ambos p y q. Se prueba sencillamente por un cambio de variables en la integral.

2. D_{kl} es convexa con respecto al par (p,q) en el sentido de que, para $\mu_i \geq 0,\ \sum_i \mu_i = 1$,

$$D_{\mathrm{kl}}\left(\sum_i \mu_i q_{(i)} \middle\| \sum_i \mu_i p_{(i)}\right) \geq \sum_i \mu_i D_{\mathrm{kl}}\left(q_{(i)} \| p_{(i)}\right)$$

   La prueba de esta desigualdad es dada sección Sec. 2.6.2.3, pagina 114 en un contexto más general.

3. Para q fijo, $D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p\right)$ es convexa con respecto a p en el sentido de que, para $\mu_i \geq 0,\ \sum_i \mu_i = 1$,

$$D_{\mathrm{kl}}\left(q \| \sum_i \mu_i p_{(i)}\right) \geq \sum_i \mu_i D_{\mathrm{kl}}\left(q \| p_{(i)}\right)$$

   Eso es la consecuencia obvia de la concavidad de $u \mapsto \log u$. Es sencillo ver de que si D_{kl} siendo convexa con respecto a p (q dada) y al par (p,q), no puede ser convexa con respecto a q (con p dada).

2.4 Unas identidades y desigualdades

Desigualdades de Fano? Rioul p. 78, Cover P. 663, Sanov? Pythagorean? Gene: cf Zyc p60

2.4.1 El principio de entropía máxima

En la termodinámica, el estudio de las características macroscópicas (dinámica de las moléculas) es prohibitivo tan el número de moléculas es importante. Por ejemplo, un litro del gas que respiramos contiene $2{,}7 \times 10^{22}$ moléculas. De esta constatación se desarolló la física estadísticas bajo el impulso de Boltzmann (Boltzmann, 1896, 1898), Maxwell (Maxwell, 1867), Gibbs (Gibbs, 1902), Planck (Planck, 2015) entre otros (ver también (Jaynes, 1965; Merhav, 2010, 2018, y ref.)), considerando el sistema macroscópico a través de lo que llamaron ensembles estadísticos: el sistema global (macroscópico) es al equilibrio pero las configuraciones (micro-estados) son fluctuantes. De una forma, se puede asociar a una configuración su frecuencia de ocurrencia (imaginando tener une infinidad de copias del sistema en el mismo estado macroscópico), es decir su probabilidad de occurencia. En este marco, la entropía, describiendo la falta de información, juega un rol fundamental. Un sistema sujeto a vínculos, como por ejemplo teniendo una energía dada, debe estar en sus estado lo más desorganizado dados los vínculos. En su marco, se introdujo la noción de entropía termodinámica, pero la misma es tremendamente vinculada a la entropía de Shannon (claramente, identificando las frecuencias a probabilidades de ocurrencia) [19]. En otro terminos, la distribución describiendo los micro-estados debe ser de entropía máxima, dados los vínculos. Por ejemplo, en un gas perfecto, donde las partículas no interactuan (aparte chocandose), la energía es dada por las velocidades (suma de las energías cinéticas individuales). Dada una energía fija, la distribución de las velocidad debe ser de entropía máxima sujeto a la energía dada (nada más que la energía va a “organizar” las configuraciones posibles). Intuitivamente, en un sistema aislado de N partículas, las configuraciones van a ser equiprobables, precisamente la distribución maximizando la entropía. **En la sección Sec. 2.5.4 se va a desarollar un poco más este ejemplo.**

De manera general, el problema se formaliza como la búsqueda de la entropía máxima sujeto a vínculos. Si este principio nació en mecánica estadística (ver también (Jaynes, 1957a, 1957b, 1965; Merhav, 2010, 2018)), encontró un echo en varios campos: en inferencia bayesiana para elegir distribuciones del a priori [20] conociendo unos momentos de la ley (Robert, 2007; Jaynes, 1968, 1982; Csiszàr, 1991), hacer estimación

[19] Ver epígrafe del capítulo. . .

[20] A partir de una distribución parametrizada por un parámetro θ. El enfoque bayesiano consiste a modelizar θ aleatorio, digamos Θ, tal que la distribución de observaciones se escribe entonces $p_{X|\Theta}$. Inferir θ a partir de observaciones x consiste a determinar la distribución dicha *a posteriori* $p_{\Theta|X}$. Por eso, hace falta darse una distribución dicha *a priori* p_Θ. Si se conocen momentos por una razón o una otra, se puede elegir esta distribución como la “menos informativa” posible, *i. e.,* de entropía máxima dados los momentos.

espectral o de procesos estocasticos autoregresivos (Burg, 1967, 1975; Jaynes, 1982) o (Cover & Thomas, 2006, cap. 12), entre otros (Arndt, 2001; Kapur, 1989; Kapur & Kesavan, 1992, & ref.).

Sea X variable aleatoria viviendo sobre (de distribución de probabilidad de soporte) $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ con $K \geq 0$ momentos $\mathrm{E}\left[M_k(X)\right] = m_k$ fijos, con $M_x : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, el problema de entropía máxima se formula de la manera siguiente en el caso continuo (es el caso discreto, hay que re-emplazar integrales por sumas): sean $M(x) = \begin{bmatrix} 1 & M_1(x) & \cdots & M_K(x) \end{bmatrix}^t$ y $m = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & \cdots & m_K \end{bmatrix}^t$ (si $K = 0,\ M = m = 1$), se busca,

$$p^* = \operatorname*{argmáx}_p H(p) \qquad \text{sujeto a} \qquad p \geq 0, \quad \int_{\mathcal{X}} M(x)\, p(x)\, dx = m$$

donde los dos primeros vínculos (positividad, normalización) aseguran de que p^* sea una distribución de probabilidad. En el ejemplo del gas perfecto, $K = 1,\ M_1(x) = \sum_i x_i^2$ (los x_i son las velocidades). Introduciendo factores de Lagrange $\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_K \end{bmatrix}^t$ para tener en cuenta los vínculos, el problema variacional consiste a resolver (Gelfand & Fomin, 1963; van Brunt, 2004; Miller, 2000; Cambini & Martein, 2009; Cover & Thomas, 2006)

$$p^* = \operatorname*{argmáx}_p \int_{\mathcal{X}} \left(-p(x) \log p(x) + \mu^t M(x)\, p(x) \right) dx$$

donde μ será determinado para satisfacer a los vínculos. De la ecuación de Euler-Lagrange (Gelfand & Fomin, 1963; van Brunt, 2004), esquematicamente anulando la "derivada" del integrande con respeto a p (sera realmente un gradiente con respeto a los componentes de p en el caso discreto), reparametrizando los factores de Lagrange, se obtiene

$$p^*(x) = \mathrm{e}^{\mu^t M(x)}$$

con μ tal que se satisfacen los vínculos de normalización y momentos. Esta distribución cae en la familia conocida como *familia exponencial* donde los M_k son conocidos como *estadísticas suficientes* y los μ_k *parámetros naturales* (Darmois, 1935; Koopman, 1936; Andersen, 1970; Kay, 1993; Lehmann & Casella, 1998; Robert, 2007).

Un problema que puede aparecer es que no se puede determinar μ tal que se satisfacen todos los vínculos, en particular la de normalización. Por ejemplo, si $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ y $K = 0,\ \ p$ debería ser constante (ley uniforme) sobre... $\mathbb{R}$, lo que no es normalizable. De la misma manera, si $K = 3$ y $M_k(x) = x^k$, tampoco es normalizable la función obtenida [21]. En otros terminos, en este caso, el problema no tiene solución [22].

Existe una prueba informacional de este resultado, saliendo de la solución:

Lema 2-3. *Sea* $\mathcal{P}_m = \left\{ p \geq 0 : \int_{\mathcal{X}} M(x)\, p^*(x)\, dx = m \right\}$ *y* $p^* \in \mathcal{P}_m$ *que sea de la forma* $p^*(x) = \mathrm{e}^{\mu^t M(x)}$. *Entonces*

$$\forall\, p \in \mathcal{P}_m, \quad H(p) \leq H(p^*) \qquad \text{con igualdad ssi} \quad p = p^* \text{ (c. s.)}$$

[21] En el enfoque Bayesiano se puede que no sea problemático, si el a posteriori es normalizable (Robert, 2007), pero va más allá de la meta de esta sección.

[22] Más precisamente, existen casos en los cuales se puede acotar la entropía por arriba por un $H^{\sup}$, tal que $\sup_p H(p) \leq H^{\sup}$ pero no se puede alcanzar esta cota, *i. e.,* es un supremum, no un máximo (Cover & Thomas, 2006, sec. 12.3).

Demostración.

$$\begin{aligned} H(p) &= -\int_{\mathcal{X}} p(x)\, \log p(x)\, dx \\ &= -\int_{\mathcal{X}} p(x)\, \log\left(\frac{p(x)}{p^*(x)}\right) dx - \int_{\mathcal{X}} p(x)\, \log p^*(x)\, dx \end{aligned}$$

De $\log p^* = \mu^t M$ se obtiene

$$\begin{aligned} H(p) &= -D_{\mathrm{kl}}\left(p \| p^*\right) - \int_{\mathcal{X}} \mu^t M(x) p(x)\, dx \\ &= -D_{\mathrm{kl}}\left(p \| p^*\right) - \int_{\mathcal{X}} \mu^t M(x)\, p^*(x)\, dx \\ &= -D_{\mathrm{kl}}\left(p \| p^*\right) - \int_{\mathcal{X}} p^*(x) \log p^*(x)\, dx \\ &= -D_{\mathrm{kl}}\left(p \| p^*\right) + H(p^*) \end{aligned}$$

porque $p, p^* \in \mathcal{P}_m$ (segunda linea) y $\mu^t M = \log p^*$ (tercera linea). La prueba se cierra notando que $D_{\mathrm{kl}}\left(p \| p^*\right) \geq 0$ con igualdad si y solamente si $p = p^*$. $\square$

Este lema prueba que, dados vínculos “razonables”, la entropía es acotada por arriba, y que se alcanza la cota para una distribución de la familia exponencial. Por ejemplo,

- Con $K = 0$ y $\mathcal{X}$ de volumen finito $|\mathcal{X}| < +\infty$, la distribución de entropía máxima es la distribución uniforme de la propiedad [P'5]*a* de la sección Sec. 2.2.2 en el caso continuo, o propiedad [P5] de la sección Sec. 2.2.1 en el caso discreto.
- Con $K = 1,\ \mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ y $M(x) = xx^t$ (visto como $K = d^2$ momentos), la distribución de entropía máxima es la distribución gausiana de la propiedad [P'5]*b* de la sección Sec. 2.2.2.

2.4.2 Desigualdad de la potencia entrópica

Sean X e Y dos variables independientes. Si se conoce las relaciones vinculando $H(X,Y)$, $H(X)$, $H(Y)$, una pregunta natural concierna la relación que podría tener $X+Y$ con cada variable en término de entropía. La respuesta no es trivial, y el resultado general concierna el caso de variables continuas sobre $\mathbb{R}^d$. Es conocido como desigualdad de la potencia entrópica (EPI para entropy power inequality en inglés). No vincula las entropías, sino que las potencias entrópicas.

Teorema 2-7 (Desigualdad de la potencia entrópica)**.** *Sean X e Y dos variables d-dimensionales continuas independientes. Entonces*

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y)$$

con igualdad si y solamente si X e Y son gaussianas con matrices de covarianza proporcionales, $\Sigma_Y \propto \Sigma_X$.

Existen varias formulaciones alternativas a esta desiguladad (Shannon, 1948; Lieb, 1978; Cover & Thomas, 2006; Dembo et al., 1991; Rioul, 2007):

1. Sean $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ gaussianas independientes de matrices de covarianza proporcionales y tal que $H(\widetilde{X}) = H(X)$ y $H(\widetilde{Y}) = H(Y)$. Entonces
$$N(X+Y) \ge N\left(\widetilde{X}+\widetilde{Y}\right)$$
con igualdad si y solamente si X y Y son gaussianas. De hecho, la primera formulación es equivalente a $N(X+Y) \ge N\left(\widetilde{X}\right)+N\left(\widetilde{Y}\right) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{e}}\left(\left|\Sigma_{\widetilde{X}}\right|^{\frac{1}{d}}+\left|\Sigma_{\widetilde{Y}}\right|^{\frac{1}{d}}\right) \ge \frac{1}{2\pi\,\mathrm{e}}\left|\Sigma_{\widetilde{X}}+\Sigma_{\widetilde{Y}}\right|^{\frac{1}{d}} = N\left(\widetilde{X}+\widetilde{Y}\right)$ (la última desigualdad viniendo de la desigualdad matricial de Minkowski (Hardy et al., 1952; Minkowski, 1910)). Se notará que, de la relación uno-uno entre H y N la desigualdad se escribe también $H(X+Y) \ge H\left(\widetilde{X}+\widetilde{Y}\right)$.

2. *Desigualdad de preservación de covarianza:*
$$\forall\, 0 \le \mu \le 1, \quad H\left(\sqrt{\mu}X+\sqrt{1-\mu}Y\right) \ge \mu H(X)+(1-\mu)H(Y)$$
con igualdad si y solmente si X e Y son gaussianas con matrices de covarianza proporcionales (sufice considerar la primera versión reemplazando X por $\sqrt{\mu}X$ e Y por $\sqrt{1-\mu}Y$ y vice-versa).

La prueba de esta(s) desigualdad(es) no es trivial. Númeras versiones existen, dadas por ejemplo en las referencias (Blachman, 1965; Stam, 1959; Shannon & Weaver, 1964; Rioul, 2007, 2011, 2017; Cover & Thomas, 2006; Dembo et al., 1991; Lieb, 1978; Verdú & Guo, 2006) (ver tambien teorema 6 de (Lieb, 1975)). Como se lo puede ver, la gaussiana juega un rol particular en esta desigualdad, saturandola.

Una gracia de la desigualdad de la potencia entrópica es que puede dar lugar a pruebas informacionales de desigualdades matriciales, como por ejemplo la desigualdad de Minkowsky de los determinentes $|R_1+R_2|^{\frac{1}{d}} \ge |R_1|^{\frac{1}{d}}+|R_2|^{\frac{1}{d}}$ para cualquieras matrices R_1, R_2 simétricas definidas positivas, con igualdad si y solamente si $R_2 \propto R_1$ (viene de X e Y gaussianas de covarianza R_1 y R_2). Aparece también para acotar la información mutua entre variables y calcular la capacidad de un canal de comunicación como se lo va a ver más adelante (Cover & Thomas, 2006; Dembo et al., 1991; Rioul, 2007; Johnson, 2004).

Se mencionará que existe una versión de la desigualdad de la potencia entrópica con rearreglo (Wang & Madiman, 2004):

Teorema 2-8 (Desigualdad de la potencia entrópica con rearreglo)**.** *Sean X e Y dos variables d-dimensionales continuas independientes de densidades de probabilidades p_X y p_Y respectivamente. Sean $p_X^{\downarrow}$ y $p_Y^{\downarrow}$ los rearreglos de p_X y p_Y respectivamente y denotamos $X^{\downarrow}$ y $Y^{\downarrow}$ vectores independientes de distribución de probabilidad $p_X^{\downarrow}$ y $p_Y^{\downarrow}$ respectivamente. Enconces, Entonces*
$$N(X+Y) \ge N(X^{\downarrow}+Y^{\downarrow})$$

Se refierá a (?, ?, y Ref.) por ejemplo para varias generalizaciones de la desigualdad de la potencia entrópica..

Para cerrar esta secciíon, se mencionará de que en el caso discreto, no hay un resultado general y aún existen contra-ejemplos (Johnson & Yu, 2010, Sec. IV). Existen solamente resultados para variables particulares como para variables binarias (Shamai & Wyner, 1990), leyes binomiales (Harremoës & Vignat, 2003; Sharma, Das & Muthukrishnan, 2011) (ver también (Johnson & Yu, 2010; Haghighatshoar, Abbe & Telatar, 2014)).

2.4.3 Desigualdad de procesamiento de datos

Esta desigualdad traduce que procesando datos, no se puede aumentar la información disponible sobre una variable. Se basa sobre una desigualdad que satisface la información mutua aplicada a un proceso de Markov.

Definición 2-30 (Proceso de Markov)**.** *Una secuencia $X_1 \mapsto X_2 \mapsto \ldots \mapsto X_n$ es dicha de Markov si para cualquier $i > 1$,*

$$p_{X_{i-1},X_{i+1}|X_i} = p_{X_{i-1}|X_i}\, p_{x_{i+1}|X_i}$$

Dicho de otra manera, condicionalmente a X_i, las variables X_{i-1} y X_{i+1} son independientes. Eso es equivalente a

$$p_{X_{i+1}|X_i,X_{i-1},\ldots} = p_{X_{i+1}|X_i}$$

Si i representa un tiempo, significa que la estadística de X_{i+1} conociendo todo el pasado se reduce a esa conociendo el pasado inmediato (las probabilidades dichas de transición $p_{X_{i+1}|X_i}$ y la distribución inical p_{X_1} caracterizan completamente el proceso). Es sencillo fijarse de que $X_n \mapsto X_{n-1} \mapsto \ldots \mapsto X_1$ es tambien un proceso de Markov.

Teorema 2-9 (Desigualdad de procesamiento de datos)**.** *Sea $X \mapsto Y \mapsto Z$ un proceso de Markov. Entonces,*

$$I(X;Y) \geq I(X;Z)$$

con igualdad si y solamente si $X \mapsto Z \mapsto Y$ es también un proceso de Markov. En particular, es sencillo ver que para cualquiera función g, $X \mapsto Y \mapsto g(Y)$ es un proceso de Markov, lo que da

$$\forall\, g, \quad I(X;Y) \geq I(X;g(Y))$$

La última desigualdad se escribe también $H(X|g(Y)) \geq H(X|Y)$ y significa que procesar Y no aumenta la información que Y da sobre X (la incerteza condicional es más importante).

Demostración. Por definición de la información mutua, considerando X y la variable conjunta (Y,Z),

$$\begin{aligned} I(X;Y,Z) &= H(X) - H(X|Y,Z) \\ &= H(X) - H(X|Y) + H(X|Y) - H(X|Y,Z) \end{aligned}$$

Por la propiedad de que $Z \mapsto Y \mapsto X$ sea también un proceso de Markov, es sencillo probar que $H(X|Y,Z) = H(X|Y)$ (conciendo Y sufice para caracterizar completamente X), lo que da

$$I(X;Y,Z) = I(X;Y)$$

También,

$$\begin{aligned} I(X;Y,Z) &= H(X) - H(X|Z) + H(X|Z) - H(X|Y,Z) \\ &= I(X;Z) + H(X|Z) - H(X|Y,Z) \end{aligned}$$

Además, escribiendo $\frac{p_{X|Y,Z}}{p_{X|Z}} = \frac{p_{X|Y,Z}\, p_{Y|Z}}{p_{X|Z} p_{Y|Z}} = \frac{p_{X,Y|Z}}{p_{X|Z} p_{Y|Z}}$ se nota de que $H(X|Z) - H(X|Y,Z)$ es la divergencia de Kullback-Leibler de $p_{X,Y|Z}$ relativamente a $p_{X|Z} p_{Y|Z}$, o información mutua $I(X;Y|Z)$ entre X e Y, condicionalmente a Z. Entonces, de las dos formas de $H(X;Y,Z)$ viene

$$I(X;Y) = I(X;Z) + I(X;Y|Z)$$

La desigualdad del teorema viene de la positividad de $I(X;Y|Z)$. Además, se obtiene la igualdad si y solamente si $I(X;Y|Z) = 0$, es decir X e Y independientes condicionalmente a Z, lo que es la definición de que $X \mapsto Z \mapsto Y$ sea un proceso de Markov. $\square$

2.4.4 Segunda ley de la termodinámica

Tratando de procesos de Markov, aparece el equivalente de la segunda ley de la termodinámica: un sistema aislado evolua hasta llegar su estado lo más desorganizado (ver ej. (Cover & Thomas, 2006; Merhav, 2010, 2018, y ref.)).

Lema 2-4 (Versión informacional de la segunda ley de la termodinámica)**.** *Sea $X_1 \mapsto X_2 \mapsto \cdots \mapsto X_n \mapsto \cdots$ un proceso de Markov, con probabilidades de transición $p_{X_{n+1}|X_n}$ dadas. Estas últimas modelizan el sistema, independiente de las condiciones iniciales. Sean dos distribuciones (condiciones) iniciales diferentes $p_{(1)}$ y $q_{(1)}$, conduciendo a las distribuciones $p_{(n)}$ y $q_{(n)}$ para X_n. Entonces:*

- *Para cualquier $n \geq 1$,*

$$D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n+1)} \middle\| q_{(n+1)}\right) \leq D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n)} \middle\| q_{(n)}\right)$$

  las distribuciones $p_{(n)}$ y $q_{(n)}$ no se "alejan" (tiende a acercarse);

- *Si p^* es una distribución estacionaria,*

$$D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n+1)} \middle\| p^*\right) \leq D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n)} \middle\| p^*\right)$$

  la distribución no se aleja de la distribución estacionaria.

- *Además, si los X_n tienen K momentos fijos $m = \mathrm{E}[M(X_n)] \quad \forall\, n$ y si p^* es la distribución de entropía máxima tiendo los mismos momentos como descrito sección Sec. 2.4.1, (ej. $K = 0$, $\mathcal{X}$ de cardinal o volumen finito y ley uniforme, $K = 2$, $T_k(x) = x^k$ y ley gausiana),*

$$H(X_{n+1}) \geq H(X_n)$$

el sistema tiende a desorganizarse (dando los vinculos/momentos).

Demostración. Escribiendo $p_{(n+1),(n)}$ y $q_{(n+1),(n)}$ las distribuciones conjuntas de (X_{n+1}, X_n) para las dos condiciones iniciales, $p_{(n+1)|(n)}$ y $q_{(n+1)|(n)}$ las distribuciones condicionales de $X_{n+1}|X_n$ así que $p_{(n)|(n+1)}$ y $q_{(n)|(n+1)}$ las distribuciones condicionales de $X_n|X_{n+1}$, se muestra sencillamente que $D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n+1),(n)} \middle\| q_{(n+1),(n)}\right) = D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n+1)} \middle\| q_{(n+1)}\right) + \displaystyle\int D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n)|(n+1)}(\cdot, y) \middle\| q_{(n)|(n+1)}(\cdot, y)\right) dy = D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n)} \middle\| q_{(n)}\right) + \displaystyle\int D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n+1)|(n)}(\cdot, y) \middle\| q_{(n+1)|(n+1)}(\cdot, y)\right) dy$ (y con una suma en lugar de la integral en el caso discreto). Además, $p_{(n+1)|(n)} = p_{X_{n+1}|X_n} = q_{(n+1)|(n)}$, conduciendo a $D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n+1)|(n)}(\cdot, y) \middle\| q_{(n+1)|(n)}(\cdot, y)\right) = 0$ con consecuencia de que $D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n)} \middle\| q_{(n)}\right) = D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n+1)} \middle\| q_{(n+1)}\right) + \displaystyle\int D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n)|(n+1)}(\cdot, y) \middle\| q_{(n)|(n+1)}(\cdot, y)\right) dy$. $p_{(n)|(n+1)}$ no es necesariamente igual a $q_{(n)|(n+1)}$, pero la divergencia siendo no negativa, se obtiene la primera desigualdad. La segunda desigualdad se obtiene tomando $q_{(n)} = p^*$. Además, si p^* es le entropía máxima de mismos momentos $m = \mathrm{E}[M(X_n)]$ que los X_n, hemos visto de que $p^*(x) = \mathrm{e}\,\mu^t M(x)$ ley de la familia exponencial, dando $D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(n)} \middle\| p^*\right) = -H(X_n) - \mu^t m$, conduciendo a la última desigualdad. □

2.4.5 Principio de incerteza entrópico

Bourret 58, Leipnik 59, Stam59, entre otros que ya citamos un par de veces

2.4.6 Un foco sobre la información de Fisher

Si la entropía y las heramientas relacionadas son naturales como medidas de información, no se puede resumir una distribución a una medida escalar. En el marco de la teoría de la estimación, R. Fisher introdujo una noción de información intimamente relacionada al error cuadrático en la estimación de un parámetro a partir de una variable parametrizado por este parámetro (Fisher, 1922, 1925; Kay, 1993; van den Bos, 2007; Cover & Thomas, 2006; Frieden, 2004).

Antes de ir más adelante, mencionamos que en esta sección, se usará el logaritmo natural.

Definición 2-31 (Matriz información de Fisher parámetrica)**.** *Sea X una variable aleatoria parametrizada por un parámetro m-dimensional, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, de distribución de probabilidad $p_X(\cdot; \theta)$ continua sobre $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ su soporte. Suponga que p_X sea diferenciable en θ sobre Θ. La matriz de Fisher, de tamaño $m \times m$, es definida* *por*

$$J_\theta(X) = \mathrm{E}\left[\Big(\nabla_\theta \log p_X(X;\theta)\Big)\Big(\nabla_\theta \log p_X(X;\theta)\Big)^t\right]$$

donde $\nabla_\theta = \left[\cdots \frac{\partial}{\partial\theta_i} \cdots\right]^t$ *es el gradiente en* θ*. Es la matriz de covarianza del score paramétrico* $S(X) = \nabla_\theta \log p_X(X;\theta)$ *notando que su promedio es igual a cero (escribiando el promedio y intercambiando integral y gradiente), siendo* $\log p_X$ *la log-verosimilitud. Bajo condiciones de regularidad, se puede mostrar* [23] *que* $J_\theta(X)$ *vale también menos el promedio de la Hessiana* [24] $\mathcal{H}_\theta$ *de* $\log p_X(X;\theta)$*. Nota: a veces se define la información de Fisher como* $\mathrm{Tr}(J)$*, traza de la matriz información de Fisher.*

Como para la entropía, la matriz de Fisher se escribe generalmente $J_\theta(X)$, a pesar de que no sea función de X pero de la densidad de probabilidad. Se la notará también $J_\theta(p_X)$ según la escritura la más conveniente.

Tomando el gradiente en x en lugar de θ da la matriz de información de Fisher no paramétrica,

Definición 2-32 (Matriz información de Fisher no paramétrica)**.** *Sea* X *una variable aleatoria de distribución de probabilidad* p_X *definida sobre* $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ *su soporte. Suponga que* p_X *sea diferenciable (en* x*). La matriz de Fisher no paramétrica,* $d \times d$*, es definida por*

$$J(X) = \mathrm{E}\left[\Big(\nabla_x \log p_X(X)\Big)\Big(\nabla_x \log p_X(X)\Big)^t\right]$$

Es la matriz de covarianza de la función score $\nabla_x \log p_X(X)$ *(escribiendo el promedio y* p_X *siendo cero el los bordes de* $\mathcal{X}$*, se ve que el promedio de* $\nabla_x \log p_X(X)$ *también vale cero) o, bajo condiciones de regularidad, menos el promedio de la Hessiana en* x *de la log-verosimilitud.*

Es interesante notar que:

- Cuando θ es un parámetro de posición, $p_X(x;\theta) = p(x-\theta)$, $\nabla_\theta \log p_X = -\nabla_x \log p_X$ tal que la información paramétrica se reduce a la información no paramétrica.
- Si X es gaussiano de matriz de covarianza Σ_X, entonces se muestra sencillamente de que $J(X) = \Sigma_X^{-1}$ (o, de una forma, inversa de la dispersión o incerteza en término de estadísticas de orden 2).
- Es sencillo ver que, por definición $J_\theta(X)$ y $J(X)$ son simétricas y que $J_\theta(X) > 0$ y $J(X) > 0$ donde estas desiguladades significan que las matrices son definidas positivas (los autovalores son positivos). Además,

  $$\forall\, A \text{ matrix no singular}, \quad J(AX) = A^{-t} J(X) A^{-1}$$

  (Cover & Thomas, 2006; Dembo et al., 1991; Barron, 1986). Esta relación da a $J(X)$ un sabor de información en el sentido de que, cuando A es real y tiende al infinito, $J(AX)$ tiende a 0; AX tiende a ser muy dispersada así que no hay información sobre su posición.

---

[23] Es una consecuencia del teorema de la divergencia, suponiendo que los bordes del soporte $\mathcal{X}$ no dependen de θ y que la función score se cancela en estos bordes.

[24] Para $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_\theta f$ es la matriz de componentes $\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i \partial\theta_j}$.

- J_θ y J son convexas en el sentido de que para cualquier conjunto de $\pi_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \pi_k = 1$ y cualquier conjunto de distribuciones $p_{(k)},\ k = 1, \ldots, K$ (Cohen, 1968; Frieden, 2004),

$$J_\theta\left(\sum_{k=1}^K \pi_k p_{(k)}\right) < \sum_{k=1}^K \pi_k\, J_\theta\left(p_{(k)}\right) \qquad \text{y} \qquad J\left(\sum_{k=1}^K \pi_k p_{(k)}\right) < \sum_{k=1}^K \pi_k J\left(p_{(k)}\right)$$

donde $A < B$ significa que $B - A$ es definida positiva. La prueba es dada por Cohen en el caso escalar, pero se extiende sin costo adicional en el caso multivariado. Hace falta probarlo para $K = 2$ y, por recurrencia, se extiende para cualquier K. En este caso, observando que $\left(\nabla \log p\right)\left(\nabla \log p\right)^t p = \frac{\left(\nabla p\right)\left(\nabla p\right)^t}{p}$, considerando el gradiente con respeto a θ (resp. a x) tratando de J_θ (resp. J), se obtiene $\sum_k \pi_k \frac{\left(\nabla p_{(k)}\right)\left(\nabla p_{(k)}\right)^t}{p_{(k)}} - \frac{\left(\nabla \sum_k \pi_k p_{(k)}\right)\left(\nabla \sum_k \pi_k p_{(k)}\right)^t}{\sum_k \pi_k p_{(k)}} = \frac{1}{\sum_k \pi_k p_{(k)}} \sum_{k,l} \pi_k \pi_l \left(\frac{p_l}{p_{(k)}}\left(\nabla p_{(k)}\right)\left(\nabla p_{(k)}\right)^t - \left(\nabla p_{(k)}\right)\left(\nabla p_l\right)^t\right)$, lo que vale, tratando del caso $K = 2$, $\frac{\pi_1\pi_2}{p_{(2)}p_{(2)}(\pi_1 p_{(1)} + \pi_2 p_{(2)})}\left(p_{(2)}\nabla p_{(1)} - p_{(1)}\nabla p_{(2)}\right)\left(p_{(2)}\nabla p_{(1)} - p_{(1)}\nabla p_{(2)}\right)^t \geq 0$. No puede ser idénticamente cero (salvo si $\pi_1\pi_2 = 0$ o $p_{(1)} = p_{(2)} \ldots$) así que se obtiene la desigualdad sobre la matriz de Fisher integrando esta última desigualdad.

2.4.6.1. Desigualdad de Cramér-Rao

Una otra interpretación de J como información es debido a la desigualdad de Cramér-Rao que la relaciona a la covarianza de estimación [25] (Rao, 1945, 1992; Rao & Wishart, 1947; Cramér, 1946; Rioul, 2007; Cover & Thomas, 2006; Frieden, 2004; Kay, 1993; van den Bos, 2007). Sea X parametrizada por θ. La meta es estimar θ a partir de X. Tal estimador va a ser una función únicamente de X, lo que se escribe usualmente [26] $\widehat{\theta}(X)$ (la función no depende explícitamente de θ). Las características de la calidad de un estimator es naturalmente su sesgo $b(\theta) = \mathrm{E}\left[\widehat{\theta}(X)\right] - \theta$ y su matriz de covarianza $\Sigma_{\widehat{\theta}}$ (la varianza da la dispersión alrededor de su promedio). La desigualdad de Cramér-Rao acota por debajo esta covarianza.

Teorema 2-10 (Desigualdad de Cramér-Rao)**.** *Sea X parametrizada por θ, de densidad de soporte $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ indendiente de θ, y $\widehat{\theta}(X)$ un estimador de θ. Sea $b(\theta)$ su sesgo y $\Sigma_{\widehat{\theta}}$ su matriz de covarianza. Sea $\mathrm{J}_b(\theta)$ la matriz Jacobiana del sesgo b. Entonces,*

$$\Sigma_{\widehat{\theta}} - \left(I + \mathrm{J}_b(\theta)\right) J_\theta(X)^{-1} \left(I + \mathrm{J}_b(\theta)\right)^t \geq 0$$

donde $A \geq 0$ significa que A es definida no negativa. En particular, en el caso θ escalar,

$$\sigma_{\widehat{\theta}}^2 \geq \frac{(1 + b'(\theta))^2}{J_\theta(X)}$$

[25] De hecho, pareció esta formula también en los papeles de Fréchet y de Darmois (Fréchet, 1943; Darmois, 1945). Como citado por Fréchet, aparece que la primera versión de esta formula es mucho más vieja y debido a K. Pearson & L. N. G Filon (Pearson & Filon, 1898) en 1898; luego fue extendida por Edgeworth (Edgeworth, 1908), Fisher (Fisher, 1925) o Doob (Doob, 1936).

[26] Por ejemplo, si θ es un promedio común a los componentes de X, un estimador podría ser $\widehat{\theta} = \frac{1}{d}\sum_i X_i$.

donde b' es la derivada de b.

Tomando θ parámetro de posición y $\widehat{\theta} = X$, estimador sin sesgo ($b = 0$), da lo que es conocido como la desigualdad no paramétrica de Cramér-Rao y toma la expresión

$$\Sigma_X - J(X)^{-1} \geq 0$$

o, en el caso escalar,

$$\sigma_X^2 \geq \frac{1}{J(X)}$$

Además, en el caso no paramétrico, se alcanza la cota si y solamente si X es un vector gaussiano.

Esta desigualdad acota la varianza de cualquier estimador, *i. e.,* da la varianza o error mínimo(a) que se puede esperar. Esta cota es el inverso de la información de Fisher, *i. e.,* $J_\theta(X)$ caracteriza la información que X tiene sobre θ.

Demostración. Sea $S = \nabla_\theta \log p_X$ y $\theta_0 = \mathrm{E}\left[\widehat{\theta}(X)\right] = \theta + b(\theta)$. Fijandose que $\nabla_\theta \log p_X \, p_X = \nabla_\theta p_X$, que $\widehat{\theta}$ no es función de θ, y que el soporte $\mathcal{X}$ no depende de θ, se obtiene [27]

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[S(X)\left(\widehat{\theta}(X) - \theta_0\right)^t\right] &= \int_{\mathcal{X}} \nabla_\theta p_X(x;\theta)\widehat{\theta}(x)^t \, dx - \left(\int_{\mathcal{X}} \nabla_\theta p_X(x;\theta) \, dx\right)\theta_0^t \\
&= \nabla_\theta \int_{\mathbb{R}^d} p_X(x;\theta)\widehat{\theta}(x)^t \, dx - \left(\nabla_\theta \int_{\mathbb{R}^d} p_X(x;\theta) \, dx\right)\theta_0^t \\
&= \nabla_\theta \left(\theta + b(\theta)\right) - \left(\nabla_\theta 1\right)\theta_0^t \\
&= \left(I + \mathrm{J}_b(\theta)\right)^t
\end{aligned}$$

Además, fijandose que $\mathrm{E}\left[S(X)S(X)^t\right] = J_\theta(X)$ y $\mathrm{E}\left[\left(\widehat{\theta}(X) - \theta_0\right)\left(\widehat{\theta}(X) - \theta_0\right)^t\right] = \Sigma_{\widehat{\theta}}$, la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz [28] conduce a

$$\left(u^t \left(I + \mathrm{J}_b(\theta)\right)^t v\right)^2 = \mathrm{E}\left[u^t S(X)\left(\widehat{\theta}(X) - \theta_0\right)^t v\right]^2 \leq u^t J_\theta(X) u \, v^t \Sigma_{\widehat{\theta}} v$$

La prueba se termina tomando $u = J_\theta(X)^{-1}\left(I + \mathrm{J}_b(\theta)\right)^t v$ (recordandose que J es simétrica).

Con la elección de u, en la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, se obtiene la igualdad cuando $v^t J(X)^{-1} S(x) \propto v^t(x - \theta)$ para cualquier v y x, est decir $\nabla_x p_X(x) \propto J(X)(x-\theta)p_X(x)$, lo que es la ecuación diferencial que satisface (solamente) la gaussiana: en este caso, se verifica a posteriori que $J(X) = \Sigma_X^{-1}$, y entonces que se alcanza la cota de la desigualdad de Cramér-Rao no paramétrica. □

En el caso paramétrico, no se puede estudiar el caso de igualdad del hecho de que $\widehat{\theta}$ no es algo dado. Además, aún dado un estimador (explícitamente independiente de θ), no hay garantía de que existe una

[27] Se supone que los integrandes sean θ-localmente integrables, tal que se puede invertir derivada en θ e integración.

[28] De hecho, fue probada por Cauchy para sumas en 1821 (Cauchy, 1821), para integrales por Bunyakovsky en 1859 (Bouniakowsky, 1859) y más elegamente por Schwarz en 1888 (Schwarz, 1888). Ver también (Steele, 2004).

densidad parametrizada por θ que alcanza la cota, o al revés, dada una familia de densidades, tampoco hay garantía que existe un estimador que permite alcanzar la cota (Cover & Thomas, 2006; Kay, 1993; van den Bos, 2007).

Fijense de que, nuevamente, la gaussiana juega un rol particular en la desigualdad de Cramér-Rao no paramétrica, permitiendo de alcanzar la cota.

Nota: para dos matrices $A \geq 0$ y $B \geq 0$, si $A - B \geq 0$ entonces $|A| \geq |B|$, con igualdad si y solamente si $A = B$ (Magnus & Neudecker, 1999, cap. 1, teorema 25). Entonces, de las desigualdades de Cramér-Rao se deducen desigualdades de Cramér-Rao escalares

$$\left|\Sigma_{\widehat{\theta}}\right| \geq \frac{|I + \mathrm{J}_b(\theta)|^2}{|J_\theta(X)|} \qquad \text{y} \qquad |\Sigma_X| \geq \frac{1}{|J(X)|}$$

Obviamente, en la segunda, se alcanza la igualdad si y solamente si X es gaussiano. Además, para una matriz $A \geq 0$, existe la "relación determinente-traza" $|A|^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d}\operatorname{Tr}(A)$, con igualdad si y solamente si $A = I$ (Magnus & Neudecker, 1999, cap. 11, sec. 4), dando otras versiones escalares de la desigualdad de Cramér-Rao, por ejemplo

$$|\Sigma_X|^{\frac{1}{d}} \geq \frac{d}{\operatorname{Tr}(J(X))}, \qquad \operatorname{Tr}(\Sigma_X) \geq \frac{d}{|J(X)|^{\frac{1}{d}}} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{Tr}(\Sigma_X) \geq \frac{d^2}{\operatorname{Tr}(J(X))}$$

En estos casos, se obtiene la igualdad si y solamente si X es gaussiano (igualdad de la Cramér-Rao no paramétrica) y además de covarianza proporcional a la identidad (igualdad en la relación determinente-traza).

Se notará que, al imagen de las leyes de entropía máxima, la información de Fisher juega también un rol particular en la inferencia bayesiana a través del prior de Jeffrey (Jeffrey, 1946, 1948; Lehmann & Casella, 1998; Robert, 2007) [29].

2.4.6.2. Fisher como curvatura de la entropía relativa

Si la desigualdad de Cramér-Rao da a la matriz de Fisher un sabor de información, aparece que J es también relacionada a la entropía relativa (Cover & Thomas, 2006; Frieden, 2004):

Teorema 2-11 (Fisher como curvatura de la entropía relativa)**.** *Sea X parametrizado por $\theta_0 \in \mathring{\Theta}$ interior de Θ (Θ contiene un vecinaje de θ_0). Siendo $D_{\mathrm{kl}}\left(p_X(\cdot;\theta) \| p_X(\cdot;\theta_0)\right)$ función de $\theta \in \Theta$, aparece que*

$$D_{\mathrm{kl}}\left(p_X(\cdot;\theta) \| p_X(\cdot;\theta_0)\right) = \frac{1}{2}\left(\theta - \theta_0\right)^t J_{\theta_0}(X)\left(\theta - \theta_0\right) + o\left(\|\theta - \theta_0\|\right)$$

donde $o(\cdot)$ es un resto pequeño con respecto a su argumento. En otros términos, $J_{\theta_0}(X)$ es la curvatura de la entropía relativa en θ_0.

Demostración. La relación es consecuencia de un desarrollo de Taylor al orden 2 de la función $D_{\mathrm{kl}}\left(p_X(\cdot;\theta) \| p_X(\cdot;\theta_0)]\right)$ de θ, tomada en $\theta = \theta_0$. Por propiedad de D_{kl}, la divergencia es positiva y se

[29] Ver nota de pie 20 pagina 62. A veces, se toma como distribución a priori $p_\Theta(\theta) \propto |J_\theta(X)|^{\frac{1}{2}}$ por su invarianza por reparametrización $\eta = \eta(\theta)$, *i. e.,* el prior de Jeffrey en η es unívocamente obtenido con la Fisher en η o por cambio de variables saliendo de p_Θ.

cancela cuando $\theta = \theta_0$. Entonces, el primer término del desarrollo vale cero y el segundo también, D_{kl} siendo mínima en $\theta = \theta_0$. Además,

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta D_{\mathrm{kl}}\left(p_X(\cdot;\theta)\| \, p_X(\cdot;\theta_0)\right) &= \nabla_\theta \int_{\mathcal{X}} p_X(x;\theta) \log\left(\frac{p_X(x;\theta)}{p_X(x;\theta_0)}\right) dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} \nabla_\theta p_X(x;\theta) \log\left(\frac{p_X(x;\theta)}{p_X(x;\theta_0)}\right) dx + \int_{\mathcal{X}} \nabla_\theta p_X(x;\theta)\, dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} \nabla_\theta p_X(x;\theta) \log\left(\frac{p_X(x;\theta)}{p_X(x;\theta_0)}\right) dx + \nabla_\theta \int_{\mathcal{X}} p_X(x;\theta)\, dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} \nabla_\theta p_X(x;\theta) \log\left(\frac{p_X(x;\theta)}{p_X(x;\theta_0)}\right) dx
\end{aligned}$$

la último ecuación como consecuencia de que p_X suma a 1. Entonces,

$$\mathcal{H}_\theta D_{\mathrm{kl}}\left(p_X(\cdot;\theta)\| \, p_X(\cdot;\theta_0)\right) = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_\theta p_X(x;\theta) \log\left(\frac{p_X(x;\theta)}{p_X(x;\theta_0)}\right) dx + \int_{\mathcal{X}} \frac{\nabla_\theta p_X(x;\theta)\, \nabla_\theta^t p_X(x;\theta)}{p_X(x;\theta)}\, dx$$

Tomado en $\theta = \theta_0$ el primer término vale cero. En el segundo se reconoce $J_\theta(X)$, lo que termina la prueba. □

Este teorema, ilustrado en la figura Fig. 2-16, relaciona claramente dos objectos viniendo de la teoría de la estimación y de la teoría de la información, mundos a priori diferentes. Como se lo puede ver en la figura, cuando $J_\theta(X)$ tiene pequeños autovalores (figura (a)), p_θ se "aleja" lentamente de θ_0 cuando θ se aleja de θ_0: hay una alta incerteza o pequeña información sobre θ_0. Y vice-versa (figura (b)).

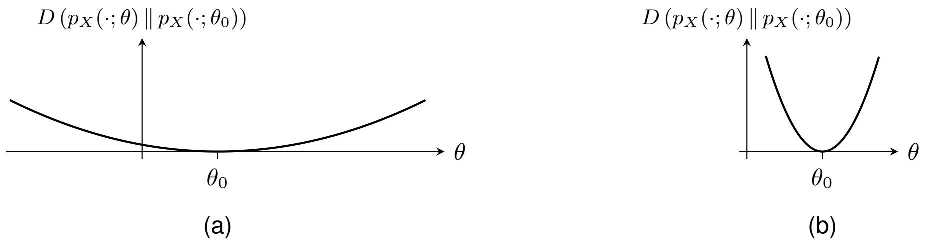


Figura 2-16: Ilustración del comportamiento local de $D_{\mathrm{kl}}\left(p_X(\cdot;\theta)\| \, p_X(\cdot;\theta_0)\right)$ en función de θ en θ_0 en el contexto escalar $\Theta \subseteq \mathbb{R}$. (a) Caso con $J_{\theta_0}(X)$ "pequeño" y (b) caso con $J_{\theta_0}(X)$ "grande". En el caso (b), la determinación de θ usando D_{kl} va a ser más "sencillo" que en el caso (a) porque el mínimo es más "picado".

2.4.6.3. Identidad de de Bruijn

Un otro vínculo entre el mundo de la información y el de la estimación aparece a través de la identidad de de Bruijn [30] (Stam, 1959; Cover & Thomas, 2006; Johnson, 2004; Barron, 1984, 1986; Palomar & Verdú, 2006; Toranzo, Zozor & Brossier, 2018). Esta identidad caracteriza lo que es conocido como canal gaussiano de la

[30] A pesar de que tomó este nombre, esta identidad en su primera versión fue publicada por Stam. En su papel (Stam, 1959), menciona que esta identidad fue comunicada al Profesor van Soest por el Profesor de Bruijn.

figura Fig 2-17-(a), *i. e.,* la salida Y es una versión ruidosa de la entrada. La identidad vincula las variaciones de entropía de salida con respeto al nivel de ruido, y la información de Fisher.

Teorema 2-12 (Identidad de de Bruijn)**.** *Sea X un vector aleatorio continuo sobre un abierto de $\mathbb{R}^d$ y admitiendo una matriz de covarianza, y sea $Y = X + T\mathcal{N}$ donde T es determinista, $d \times d'$ con $d \leq d'$, de rango máximo, y $\mathcal{N}$ un vector gaussiano centrado y de covarianza $\Sigma_{\mathcal{N}}$, independiente de X (ver figura Fig. 2-17-(a)). Entonces, la entropía de Shannon y la información de Fisher de Y satisfacen*

$$\nabla_T H(Y) = J(Y)\, T\, \Sigma_{\mathcal{N}}$$

donde $\nabla_T \cdot$ es la matriz de componentes $\frac{\partial \cdot}{\partial T_{i,j}}$. Si $T = T(\theta)$ depende de un parámetro escalar[31] θ,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} H(Y) = \operatorname{Tr}\left(J(Y)\, T\, \Sigma_{\mathcal{N}}\, \frac{\partial T^t}{\partial \theta} \right)$$

Demostración. La clave de este resultado viene del hecho de que la densidad p de $T\mathcal{N}$ satisface una ecuación diferencial particular. La distribución de $T\mathcal{N}$ se escribe $p(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left|T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} x\right)$ (el rango máximo de T asegura que $T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t$ sea invertible). Para una matriz invertible R, desarollando $|R|$ con respecto a su línea i, se obtiene que $\frac{\partial |R|}{\partial R_{i,j}} = R^*_{i,j}$ cofactor de $R_{i,j}$, dando por la regla de Cramér $\nabla_R |R| = |R| \left(R^{-1}\right)^t$ (ver también (Magnus & Neudecker, 1999, cap. 1 & 9)), es decir $\nabla_R |R|^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} |R|^{-\frac{1}{2}} \left(R^{-1}\right)^t$. De $\frac{\partial |R|^{-\frac{1}{2}}}{\partial T_{i,j}} = \sum_{k,l} \frac{\partial |R|^{-\frac{1}{2}}}{\partial R_{k,l}} \frac{\partial R_{k,l}}{\partial T_{i,j}} = -\frac{1}{2} |R|^{-\frac{1}{2}} \sum_{k,l} \left(R^{-1}\right)_{l,k} \frac{\partial R_{k,l}}{\partial T_{i,j}}$ con $R = T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t$ (simétrica) y cálculos básicos se obtiene finalmente

$$\nabla_T \left|T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right|^{-\frac{1}{2}} = -\left|T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right|^{-\frac{1}{2}} \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} T\Sigma_{\mathcal{N}}$$

Además, de $\left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)\left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} = I$ viene $\frac{\partial \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1}}{\partial T_{i,j}} = -\left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} \frac{\partial \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)}{\partial T_{i,j}} \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1}$. Denotando $\mathbb{1}_i$ el vector con 1 en su i-esima componente, y cero si no, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(x^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} x \right)}{\partial T_{i,j}} &= -x^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} \left(\mathbb{1}_i \mathbb{1}_j^t \Sigma_{\mathcal{N}} T^t + T\Sigma_{\mathcal{N}} \mathbb{1}_j \mathbb{1}_i^t\right) \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} x \\
&= -2\, \mathbb{1}_i^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} x x^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} T\Sigma_{\mathcal{N}} \mathbb{1}_j
\end{aligned}$$

usando $x^t A \mathbb{1}_k \mathbb{1}_l^t B x = \mathbb{1}_l^t B x x^t A \mathbb{1}_k = \mathbb{1}_k^t A^t x x^t B^t \mathbb{1}_l$ (escalares comutan y un escalar es igual a su transpuesta) y usando la simetría de $T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t$. Eso significa que

$$\nabla_T \left(x^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} x \right) = -2\, \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} x x^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} T\Sigma_{\mathcal{N}},$$

dando

$$\nabla_T p(x) = \left(-\left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} + \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} x x^t \left(T\Sigma_{\mathcal{N}}T^t\right)^{-1} \right) T\Sigma_{\mathcal{N}}\, p(x)$$

Tomando la Hessiana de p con respeto a x se obtiene sencillamente que p satisface la ecuación diferencial

$$\nabla_T p = \mathcal{H}_x p\, T\, \Sigma_{\mathcal{N}}$$

[31] Si el parámetro es multivariado, hace falta entender la desigualdad a través de derivas parciales con respeto a los componentes de θ.

Suponiende que se puede intervertir derivadas y integrales (ver (Barron, 1984, 1986) donde se dan condiciones rigorosas), $p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^d} p_X(x) p(y-x)\, dx$ satisface también esta ecuación diferencial, y además

$$\begin{aligned}
\nabla_T H(Y) &= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_T\, p_Y(y) \log p_Y(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_T\, p_Y(y)\, dy \\
&= -\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}_y\, p_Y(y) \log p_Y(y)\, dy \right) T\, \Sigma_{\mathcal{N}} - \nabla_T \int_{\mathbb{R}^d} p_Y(y)\, dy \\
&= -\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathcal{H}_y \Big(p_Y(y) \log p_Y(y) \Big) - \mathcal{H}_y\, p_Y(y) - \frac{\nabla_y\, p_Y(y)\, \nabla_y\, p_Y(y)^t}{p_Y(y)} \right) dy \right) T\, \Sigma_{\mathcal{N}} \\
&= -\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}_y \Big(p_Y(y) \log p_Y(y) \Big)\, dy - \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}_y p_Y(y)\, dy \right) T\, \Sigma_{\mathcal{N}} \, + \, J(Y)\, T\, \Sigma_{\mathcal{N}}
\end{aligned}$$

usando la ecuación diferencial en la segunda línea, el hecho de que p_Y suma a 1 en la tercera línea (su gradiente es cero entonces), y la definición de la matriz de Fisher en la última línea. Usando el teorema de la divergencia (intergración por partes) aplicada respectivamente a los componentes de $\nabla_y p_Y \log p_Y$ y $\nabla_y p_Y$, suponiendo que estos gradientes se cancelan en el borde del dominio de integración, los dos términos integrales valen cero, lo que cierra la prueba de la desigualdad general. Además, si $T = T(\theta)$, la segunda desigualdad sigue de $\frac{\partial \cdot}{\partial \theta} = \sum_{i,j} \frac{\partial \cdot}{\partial T_{i,j}} \frac{\partial T_{i,j}}{\partial \theta} = \operatorname{Tr}\left(\nabla_T \frac{\partial T^t}{\partial \theta} \right)$. $\square$

La versión inicial de la identidad de de Bruijn, con $\Sigma_{\mathcal{N}} = I$, que se escribe

$$\frac{d}{d\theta} H(X + \sqrt{\theta} \mathcal{N}) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(J(X + \sqrt{\theta} \mathcal{N}) \right)$$

se recupera en el caso particular $T = \sqrt{\theta} I$. En este caso, la ecuacíon diferencial satisfecha por la densidad de probabilidad p es la *ecuación del calor*. Esta desigualdad cuantifica las variaciones de entropías bajo variaciones de "niveles" del ruido del canal de comunicación. De una forma, caracteriza la robustez del canal con respeto al nivel de ruido gaussiano (la gaussiana juega de nuevo un rol central acá).

Existe una otra forma muy similar de esta desigualdad debido a Guo, Shamai, Verdú, Palomar (Guo, Shamai & Verdú, 2005; Palomar & Verdú, 2006; Toranzo et al., 2018). Esta versión vincula aún más el mundo de la información y el de la estimación. Del lado de la comunicación, consiste a caracterizar la información mutua entre la entrada X de un canal ruidoso y su salida, $Y = SX + \mathcal{N}$ donde S coresponde a un pre-tratamiento antes de la salida. Eso es ilustrado en la figura Fig. 2-17-(b). Del lado de la estimación, uno puede querer estimar X observando solamente Y. Es conocido que el estimador que minimiza el error cuadrático promedio $\mathrm{E}\left[\left\| \widehat{X}(Y) - X \right\|^2 \right]$ es la esperanza condicional $\widehat{X}(Y) = \mathrm{E}[X|Y]$ (Kay, 1993; Robert, 2007; Lehmann & Casella, 1998). Una característica de un estimador siendo su matriz de covarianza, se notará $\mathcal{E}(X|Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X|Y])\, (X - \mathrm{E}[X|Y])^t \right]$ esta matriz. Sorpredentemente, existe también una identidad entre $I(X;Y)$ y $\mathcal{E}(X|Y)$:

Teorema 2-13 (Identidad de Guo–Shamai–Verdú)**.** *Sea X un vector aleatorio continuo sobre un abierto de $\mathbb{R}^{d'}$ y admitiendo una matriz de covarianza, y sea $Y = SX + \mathcal{N}$ donde S es determinista, $d \times d'$, y $\mathcal{N}$ un vector gaussiano centrado y de covarianza $\Sigma_{\mathcal{N}}$, independiente de X (ver figura Fig. 2-17-(b)). Entonces,* *la información mutua entre X e Y y la matriz de covarianza del estimador de error cuadrático mínimo satisfacen*

$$\nabla_S\, I(X;Y) = \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} S\, \mathcal{E}(X|Y)$$

Si $S = S(\sigma)$ depende de un parámetro escalar σ,

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} I(X;Y) = \mathrm{Tr}\left(\Sigma_{\mathcal{N}}^{-1}\, S\, \mathcal{E}(X|Y)\, \frac{\partial S^t}{\partial\sigma} \right)$$

Demostración. Notando que $p_{Y|X}(y,x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left|\Sigma_{\mathcal{N}}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-Sx)^t \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1}(y-Sx)\right)$ viene $\nabla_S\, p_{Y|X}(x,y) = p_{Y|X}(x,y)\, \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1}(y-Sx)x^t$ (ver unos pasos de la prueba de la identidad de de Bruijn) así que $\nabla_y\, p_{Y|X}(y,x) = p_{Y|X}(y,x)\, \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1}(y-Sx)$, dando

$$\nabla_S\, p_{Y|X}(y,x) = \nabla_y\, p_{Y|X}(y,x) x^t \qquad \text{y} \qquad \nabla_S\, p_{X,Y}(x,y) = \nabla_y\, p_{X,Y}(x,y) x^t$$

(multiplicando ambos lados por p_X). Ahora, $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(\mathcal{N})$ (de la independencia, cuando $X = x$, $Y = Sx + \mathcal{N}$ gaussiana de misma convarianza que $\mathcal{N}$ y de promedio Sx), así que

$$\begin{aligned}
\nabla_S I(X;Y) &= \nabla_S H(Y) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}} \nabla_S \Big(p_{X,Y}(x,y)\, \log p_Y(y) \Big)\, dx\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}} \nabla_S\, p_{X,Y}(x,y)\, \log p_Y(y)\, dx\, dy - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} p_{X|Y}(x,y)\, \nabla_S\, p_Y(y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}} \nabla_y\, p_{X,Y}(x,y)\, x^t \log p_Y(y)\, dx\, dy - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_S\, p_Y(y)\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}} \nabla_y\, p_Y(y) x^t p_{X|Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_y\, p_Y(y)\ \mathrm{E}\left[X^t | Y = y\right]\ dy
\end{aligned}$$

La segunda línea viene de la escritura de $H(Y)$ usando p_Y como marginale de $p_{X,Y}$ en x y intercambiando gradiente e integral (ver pasos de la prueba de la desigualdad de de Bruijn); la tercera de $p_{X,Y}/p_Y = p_{X|Y}$; en la cuarta se usa la ecuación diferencial satisfecha por $p_{X,Y}$ en la primera integral y integrando en x en la segunda integral; la quinta línea se obtiene usando el teorema de la divergencia (intergración por partes) en la integración en y de la primera integral, e intercambiando gradiente e integral el la segunda (p_Y sumando a 1, el término se cancela). Además,

$$\begin{aligned}
\nabla_y p_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}^{d'}} \nabla_y\, p_{Y|X}(y,x)\, p_X(x)\, dx \\
&= -\Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} \int_{\mathbb{R}^{d'}} (y - Sx)\, p_{Y|X}(y,x)\, p_X(x)\, dx \\
&= -\Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} \left(y - S \int_{\mathbb{R}^{d'}} x\, p_{X|Y}(x,y)\, dx \right) p_Y(y) \\
&= -\Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} \Big(y - S\, \mathrm{E}\left[X | Y = y\right] \Big)\, p_Y(y)
\end{aligned}$$

escribiendo $p_{Y|X}(y,x)\,p_X(x) = p_{X|Y}(x,y)\,p_Y(y)$ en la tercera línea. Esta ecuación permite escribir

$$\begin{aligned}
\nabla_S I(X;Y) &= \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(y - S\,\mathrm{E}\,[X|Y=y]\Big)\,\mathrm{E}\left[X^t|Y=y\right]\,p_Y(y)\,dy\\
&= \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} \left(\mathrm{E}\left[Y\,\mathrm{E}\left[X^t|Y\right]\right] - S\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\,[X|Y]\,\mathrm{E}\,[X|Y]^t\right]\right)\\
&= \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} \left(\mathrm{E}\left[Y X^t\right] - S\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\,[X|Y]\,\mathrm{E}\,[X|Y]^t\right]\right)\\
&= \Sigma_{\mathcal{N}}^{-1} S \left(\mathrm{E}\left[X X^t\right] - \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\,[X|Y]\,\mathrm{E}\,[X|Y]^t\right]\right)
\end{aligned}$$

la última línea viniendo de $Y = SX + \mathcal{N}$ con $\mathcal{N}$ independiente de X y de promedio 0. La prueba se cierra notando que $\mathrm{E}\,[\mathrm{E}[X|Y]] = \mathrm{E}[X]$ y por la formula de König-Huyggens (ver capítulo. 1, sección **??**).

La segunda identidad viene de $\frac{\partial\cdot}{\partial\sigma} = \mathrm{Tr}\left(\nabla_S \frac{\partial S^t}{\partial \sigma}\right)$ (ver prueba de la identidad de de Bruijn). $\square$

La primera versión de esta identidad se recupera con $S = \sqrt{s}$, $\Sigma_{\mathcal{N}} = I$ y X de covarianza la identidad; s es conocido como relación señale/ruido en este caso.

Existen versiones aún más completas (con gradientes con respeto a la matriz $\Sigma_{\mathcal{N}}$ por ejemplo) que se pueden consultar en (Johnson, 2004; Palomar & Verdú, 2006; Payaró & Palomar, 2009).

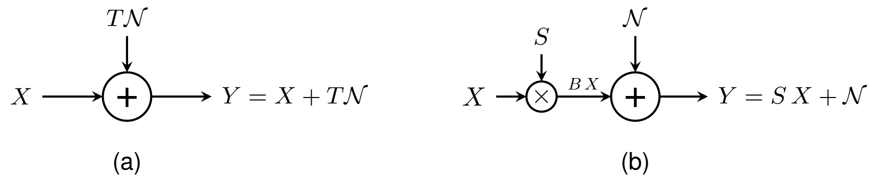


Figura 2-17: Canal de comunicación gaussiano de entrada X. (a) Canal gaussiano usual, donde T maneja los parámetros (nivel) del ruido. (b) canal gaussiano con un preprocesamiento S de la entrada.

2.4.6.4. Desigualdad de Stam

De la desigualdad de la potencia entrópica y de la identidad de de Bruijn surge una otra desigualdad implicando la potencia entrópica N y la información de Fisher J. Esta desigualdad es conocida como desigualdad de Stam [32] (Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007; Stam, 1959), o a veces "desigualdad isoperimetrica para la entropía" (Wang & Madiman, 2004).

Teorema 2-14 (Desigualdad de Stam)**.** *Sea X una variable aleatoria continua sobre $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces,*

$$N(X)\,\mathrm{Tr}\,(J(X)) \,\geq\, d$$

con igualdad si y solamente si X es gaussiano de covarianza proporcional a la identidad.

---

[32] Como para la identidad de de Bruijn, Stam mencionó que esta desigualdad fue comunicada al Profesor van Soest por el Profesor de Bruijn quien da una prueba variacional de la desigualdad.

Demostración. De la desigualdad de la potencia entrópica se obtiene $N(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N}) \geq N(X) + \theta \, |\Sigma_{\mathcal{N}}|^{\frac{1}{d}}$. Tomando $\Sigma_{\mathcal{N}} = I$, se obtiene $\forall\, \theta > 0, \; \frac{N(X+\sqrt{\theta}\mathcal{N})-N(X)}{\theta} \geq 1$. Entonces, tomando el límite $\theta \to 0$, aparece que $\frac{d}{d\theta} N(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N})\Big|_{\theta=0} \geq 1$. La prueba se cierra con $\frac{d}{d\theta} N(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N}) = \frac{1}{2\pi\, \mathrm{e}} \frac{d}{d\theta} \exp\left(\frac{2}{d} H(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N})\right) = \frac{2}{d} N(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N}) \frac{d}{d\theta} H(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N}) = d N(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N}) \operatorname{Tr}\left(J(X + \sqrt{\theta}\mathcal{N})\right)$ (por la identidad de de Bruijn). Además, la igualdad se obtiene cuando se alcanza la cota de la desigualdad de la potencia entrópica, es decir cuando X es gaussiano de varianza proporcional a la del ruido, que es la identidad en este caso. □

Se puede ver de nuevo el rol central que juega la gaussiana en esta desigualdad. Además, de la desigualdad de Stam se puede deducir tambíen las versiones escalares de la desigualdad de Cramér-Rao. Viene del hecho de que, dada una matriz de covarianza, la entropía $H(X)$ es máxima cuando X es gaussiano. Entonces, para cualquier X de covarianza Σ_X, $N(X) \leq |\Sigma_X|^{\frac{1}{d}}$, dando de la desiguldad de Stam, $|\Sigma_X|^{\frac{1}{d}} \operatorname{Tr}(J(X)) \geq d$ (y las otras versiones escalares de la relación determinente-traza). Como se lo puede esperar, se obtiene la igualdad si y solamente X es gaussiano (potencia entrópica alcanzando su cota superior) y de matriz la identidad (desiguladad de Stam se saturando).

Varias otras pruebas de la desigualdad de Stam pueden provenir de generalizaciones (Bercher, 2012, 2013; Lutwak, Yang & Zhang, 2005; Lutwak, Lv, Yang & Zhang, 2012; Zozor, Puertas-Centeno & Dehesa, 2017). **La sección ZZZ lo va a rapidamente evocar. Ver caso discreto Kagan (Kagan, 2001).**

2.4.6.5. Fisher aditividad, procesamiento de datos y convolución

Además del grán número de relaciones entre la información de Fisher y otras medidas informacionales, la información de Fisher satisface también desigualdades en si mismo, muy parecidas a las satisfechas por la entropía o información mutua.

Primero, al imagen de la entropía condicional, se puede definir una información condicional al imagen de la definición Def. 2-26,

Definición 2-33 (Matriz información de Fisher parámetrica condicional)**.** *Sean X e Y dos variables aleatoria parametrizada por el mismo parámetro m-dimensional, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, de distribución de probabilidad conjunta $p_{X,Y}(\cdot,\cdot;\theta)$ continua sobre $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ su soporte, $p_{X|Y}(\cdot,\cdot;\theta)$ la distribución condicional de X connociendo Y y p_Y la distribución marginal. Suponga que estas distribuciones sean diferenciable en θ sobre Θ. La matriz de Fisher de X condicionalmente a Y es el promedio estadístico sobre p_Y de la matriz de Fisher de $p_{X|Y}(\cdot,\cdot;\theta)$, es decir*

$$J_\theta(X|Y) = \mathrm{E}\left[\left(\nabla_\theta \log p_{X|Y}(X,Y;\theta)\right)\left(\nabla_\theta \log p_{X|Y}(X,Y;\theta)\right)^t\right]$$

De esta definición, es sencillo probar de que la matriz de Fisher paramétrica sigue una regla de cadena al imagen de la propiedad [P14],

$$J_\theta(X,Y) = J_\theta(X|Y) + J_\theta(Y)$$

Además, si X e Y son independientes, la información de Fisher es aditiva de la misma manera que H satisface las propiedades [P10] y [P13], *i. e.,*

$$J_\theta(X|Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_\theta(X,Y) = J_\theta(X) + J_\theta(Y) \quad \Leftrightarrow \quad X \,\&\, Y \text{ son independientes}$$

En particular, tratando de una secuencia $X = \{X_i\}_{i=1}^n$ de vectores aleatorias independientes parametrizados por θ, $J_\theta(X) = n J_\theta(X_i)$, lo que significa que estimando θ a partir de la secuencia se baja a la taza $1/n$ la cota de Cramér-Rao. Ver (Fisher, 1925; Stam, 1959; Kay, 1993; Kagan & Smith, 1999; Johnson, 2004; Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007) entre otros para estas propiedades.

De la regla de cadena, viene obviamente la desigualdad siguiente, parecida a la propiedad de super-aditividad [P12],

$$J_\theta(X_1, \ldots, X_n) \ \geq \ J_\theta(X_i) \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

y una desigualdad de procesamiento de datos via la información de Fisher (Zamir, 1998; Rioul, 2007; Cover & Thomas, 2006; Frieden, 2004; Kagan & Smith, 1999):

Teorema 2-15 (Desigualdad de procesamiento de datos tipo Fisher)**.** *Sea $\theta \mapsto X \mapsto Y$ un proceso de Markov con θ determinista y $p_{X,Y}$ parametrizado por θ, es decir en este contexto que, $p_{Y|X}$ no es parametrizado por θ. Entonces*

$$J_\theta(X) \geq J_\theta(Y)$$

con igualdad si y solamente si $\theta \mapsto Y \mapsto X$ es también de Markov. En particular,

$$\forall\, g, \quad J_\theta(X) \geq J_\theta(g(X))$$

Demostración. De la regla de cadena tenemos

$$J_\theta(Y|X) + J_\theta(Y) = J_\theta(X|Y) + J_\theta(X)$$

Del hecho de que $p_{Y|X}$ no es parametrizado por θ es sencillo ver que $J_\theta(Y|X)$, la prueba se cerrando de $J_\theta(X|Y) \geq 0$. Ademaás se obtiene la igualdad si y solamente si $J_\theta(X|Y) = 0$, es decir de la “positividad” del integrante dando la matrix de Fisher, si y solamente si $p_{X|Y}$ no es parametrizado por θ. □

Mencionamos de que existe también una desigualdad parecida a la de la potencia entrópica, teorema 2-7, dada en el caso escalar en (Johnson, 2004; Blachman, 1965; Zamir, 1998; Dembo et al., 1991; Kagan & Yu, 2008):

Teorema 2-16 (Desigualdad convolucional de Fisher)**.** *Sean X e Y dos variables d-dimensionales continuas independientes parametrizadas. Entonces*

$$\forall\, \mu \in [0\,,\,1], \quad J\left(\sqrt{\mu} X + \sqrt{1-\mu}\, Y\right) \ \leq \ \mu\, J(X) + (1-\mu)\, J(Y)$$

con igualdad si y solamente si X e Y son gaussianas con matrices de covarianza proporcionales, $\Sigma_Y \propto \Sigma_X$.

Demostración. X e Y siendo independientes, tenemos para $W = X + Y$, $p_W(w) = \displaystyle\int_{\mathcal{X}} p_X(x) p_Y(w-x)\, dx$ convolución de las distribuciones de X y de Y. Escribiendo $S_X = \nabla_x \log p_X(x)$ el score de X y lo mismo para Y y W,

$$\begin{aligned}
S_W(w) &= \int_{\mathcal{X}} \frac{p_X(x)}{p_W(w)} \nabla_w p_Y(w-x)\, dx \\
&= -\int_{\mathcal{X}} \frac{p_X(x)}{p_W(w)} \nabla_x p_Y(w-x)\, dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} \frac{p_Y(w-x)}{p_W(w)} \nabla_x p_X(x)\, dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} \frac{p_Y(w-x)p_X(x)}{p_W(w)} \nabla_x \log p_X(x)\, dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} p_{X|W}(x,w)\, \nabla_x \log p_X(x)\, dx \\
&= \mathrm{E}\left[S_X(X) \middle| W = w\right]
\end{aligned}$$

Intercambiando los roles de X e Y, tenemos también $S_W(w) = \mathrm{E}\left[S_Y(Y) \middle| W = w\right]$, así que, para cualquier $0 \le \mu \le 1$,

$$S_W(w) = \mathrm{E}\left[\mu S_X(X) + (1-\mu) S_Y(Y) \middle| W = w\right]$$

A continuación, de la formula de König-Huyggens (ver capítulo. 1, sección **??**),

$$S_W(w) S_W(w)^t \le \mathrm{E}\left[\left(\mu S_X(X) + (1-\mu) S_Y(Y)\right) \left(\mu S_X(X) + (1-\mu) S_Y(Y)\right)^t \middle| W = w\right]$$

es decir, tomando el promedio en W,

$$J(X+Y) \le \mu^2 J(X) + (1-\mu)^2 J(Y) + \mu(1-\mu) \left(\mathrm{E}\left[S_X(X) S_Y(Y)^t\right] + \mathrm{E}\left[S_Y(Y) S_X(X)^t\right]\right)$$

Luego, X e Y siendo independientes, $S_X(X)$ y $S_Y(Y)$ son también independientes. Además son centradas, probando que el término en $\mu(1-\mu)$ vale cero, dando una versión equivalente del teorema; La versión dada se recupera re-emplazando X por $\sqrt{\mu}\, X$ e Y por $\sqrt{1-\mu}\, Y$.

Escribiendo la desigualdad viniendo de la formula de König-Huyggens, se nota de que la igualdad es satisfecha si y solamente si $\mu S_X(w-x) + (1-\mu) S_Y(x) = S_W(w)$ para cualquier x, w. Integrando en x se obtiene $-\mu \log p_X(w-x) + (1-\mu) \log p_Y(x) = x S_W(w) + g(w)$. Derivando en w obtenemos $-\mu \nabla_w \log p_X(w-x) = S_W(w) + \nabla_w g(w)$, es decir, en $w = 0$, notando de que $\nabla_w \log p_X(w-x) = -\nabla_x \log p_X(w-x)$, se nota de que $\nabla_x \log p_X(x)$ es constante, *i. e.,* X es necesariamente gausiana. Similarmente, Y es necesariamebte gausiana también. Además, calculando las informaciones de Fisher en el caso gausiano, obtenemos $\left(\Sigma_X + \Sigma_Y\right)^{-1} = \Sigma_X^{-1} + \Sigma_Y^{-1}$ lo que es posible si y solamente si Σ_X y Σ_Y son proporcionales. $\square$

Este teorema tiene varias consecuencias. En particular, interviene en la prueba de la desigualdad de la potencia entrópica.

(2) ver MinFisher Frieden p. 235, Berchet Vignat 2009, Ernst 2017; cf. travaux rederivant MQ de Frieden-Plastino-Soffer (1999, 2002), Reginato 98, Bickel 81

2.5 Unos ejemplos y aplicaciones

2.5.1 Canal de transmisión y su capacidad

Siguiendo el esquema de comunicación de Shannon, un mensaje que se modeliza como un vector aleatorio [33] X pasa por un canal de comunicación y se recibe un mensaje Y, vector aleatorio. En el trabajo de Shannon, el canal es supuesto a ruido aditivo, es decir que se añade un ruido a X. De manera general, para conocer la información de X que se recibe, se calcula la información mutua $I(X;Y)$, es decir la cantidad de información que comparten la entrada y la salida del canal. Lo más I es grande, lo más de información se transmite. Dado el canal, se puede arreglar X (su distribución) de manera a maximizar $I(X;Y)$, es decir la cantidad máxima que se puede transmitir en este canal. Es lo que es conocido como capacidad del canal (Shannon, 1948, part. II & III) (ver también (Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007) entre otros):

Definición 2-34 (Capacidad de canal)**.** *Sea un canal de transmisión, X su entrada e Y su salida, como ilustrado figura Fig. 2-18. Sea p_X la distribución de probabilidad de X. La capacidad C del canal es definida por*

$$C = \max_{p_X} I(X;Y)$$

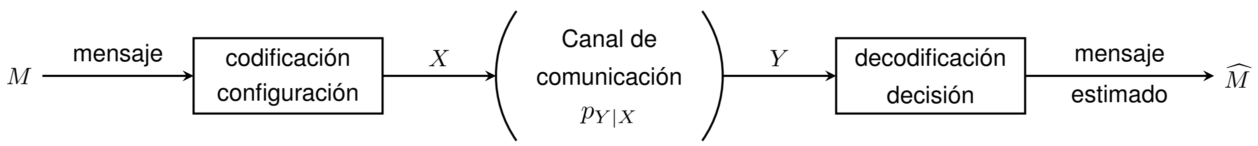


Figura 2-18: Esquema de comunicación de Shannon. En una primera etapa, un mensaje M a transmitir es códificado (ej. código binario) o puesto en forma (ej. símbolos modulando una función para que sea analógica y en una banda frecuencial dada). Sea X este mensaje codificado o puesto en forma. A la recepción, se mide Y (ej. versioón ruidosa de X), antes de ser decodificado o usado para tomar una decisión, $\widehat{M}$ siendo la estimación de M (ej. símbolos estimados a partir de Y). Una etapa importante es el vínculo entre la entrada X y la salida Y del canal, es decir la cantidad de información que tienen en común. La capacidad del canal es la información $I(X;Y)$ máxima con respeto a su entrada.

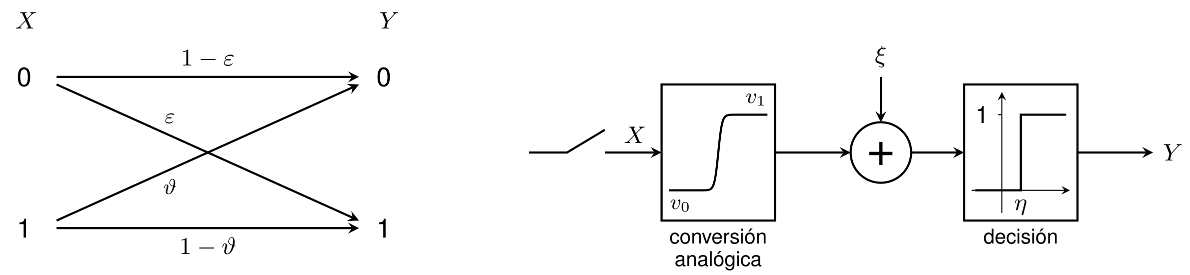
2.5.1.1. Canal binario

[33] De punto de vista de un receptor, este mensaje es desconocido. Además, se lo puede ver como una instancia de una clase importante de posibles mensajes, justificando la modelización aleatoria.

Suponiendo que el mensaje mandado en un canal es una cadena de símbolos, variables aleatorias independientes, se puede concentrarse sobre cada símbolo. En este marco, un canal de comunicación lo más simple es conocido como *canal binario* (Shannon, 1948, Sec. 15): X es una variable definida sobre $\mathcal{X} = \{0, 1\}$; tal tipo de entrada es natural, pensando a la codificación binaria. La salida Y es también definida sobre $\mathcal{X}$; se puede imaginar medir y tomar una decisión binaria usando la medida. Tal canal es definido por sus probabilidaded de transición $p_{Y|X}$, *i. e.,* las probabilidades que un 0 (resp. un 1) se transmite correctamente o cambia en un 1 (resp. 0), *i. e.,*

$$\varepsilon = \Pr[Y = 1|X = 0] = 1 - \Pr[Y = 0|X = 0] \qquad \text{y} \qquad \vartheta = \Pr[Y = 0|X = 1] = 1 - \Pr[Y = 1|X = 1]$$

ε y ϑ representan errores de comunicación. Tal canal es descrito figura Fig. 2-19-(a). La figura Fig. 2-19-(b) da un esquema "práctico" que podría ser al origen de un tal canal. Cuando $\varepsilon = \vartheta$, el canal es conocido como *canal binario simétrico*. Cuando $\varepsilon = 0$ y $\vartheta \in (0\,;\,1)$, el canal es conocido como *canal binario en Z*.



(a) (b)

Figura 2-19: (a): Canal binario. La entrada X definida sobre $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ pasa por este canal e Y definida sobre $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ es recibido. Este canal es caracterizado por las probabilidades de transición $p_{Y|X}$. (b): Esquema que puede conducir al canal binario; una variable puede ser la salida de una puerta lógica, con niveles v_0 (nivel bajo, codificando 0) y v_1 (nivel alto, codificando 1). Se puede imaginar que este voltaje es transmitido por un canal añandiendo un ruido ξ. En la recepción, se toma una decisión, por ejemplo 0 (resp. 1) si la medida es mayor (resp. menor) que $\eta = \frac{v_0+v_1}{2} + \mathrm{E}[\xi]$. En este ejemplo, ε y ϑ van a ser caracterizados completamente por la distribución del ruido (y de los dos niveles posibles de la entrada), pero no de la distribución p_X.

En este caso, trabajando con bits, aparece legítimo usar el logaritmo de base 2. Luego, sean

$$r = \Pr[X = 0]$$

dando la distribución de la entrada. La distribución de la salida va a ser dada a partir de $s = \Pr[Y = 0] = \Pr[Y = 0|X = 0] \Pr[X = 0] + \Pr[Y = 0|X = 1] \Pr[X = 1]$ es decir

$$s = \Pr[Y = 0] = \vartheta + r(1 - \varepsilon - \vartheta)$$

La información mutua se escribe $I_2(X;Y) = H_2(Y) - H_2(Y|X) = H_2(Y) - H_2(Y|X = 0) \Pr[X = 0] + H_2(Y|X = 1) \Pr[X = 1]$, lo que toma la expresión

$$I_2(X;Y) = h_2(s) - rh_2(\varepsilon) - (1 - r)h_2(\vartheta)$$

donde $h_2(\lambda) = -\lambda \log_2 \lambda - (1-\lambda)\log_2(1-\lambda)$ es la entropía binaria en bits. Para calcular la capacidad C_2 en bits, hace falta maximizar I_2 con respeto a r. Diferenciando I_2 en r, *i. e.,* $\frac{\partial I_2(X;Y)}{\partial r} = \frac{\partial h_2(s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial r} - h_2(\varepsilon) + h_2(\vartheta)$, es decir

$$\frac{\partial I_2(X;Y)}{\partial r} = (1-\varepsilon-\vartheta)\log_2\left(\frac{1-s}{s}\right) - h_2(\varepsilon) + h_2(\vartheta)$$

- Claramente,

  $$\vartheta = 1-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

  Viene del hecho de que para $\vartheta = 1-\varepsilon$, de $h_2(\varepsilon) = h_2(1-\varepsilon)$ se deduce que $I_2(X;Y) = 0$ constante. De hecho, en este caso, un 0 en la salida puede venir de un 0 o 1 con probabilidades iguales, y lo mismo para un 1 en la salida; en otros términos, la salida aparece ser independiente de la entrada. Eso se verifica formalmente con $s = \vartheta$, dando $p_{Y|X} = p_Y$, dando una información mutua nula, y entonces una capacidad nula.

- Si $\vartheta \neq 1-\varepsilon$, la derivada de I_2 con respeto a r se anula para $s = s^{\text{opt}}$ ($r = r^{\text{opt}}$),

  $$s^{\text{opt}} = \frac{1}{1 + 2^{\frac{h(\varepsilon)-h(\vartheta)}{1-\varepsilon-\vartheta}}} \qquad \text{siendo} \qquad r^{\text{opt}} = \frac{s^{\text{opt}} - \vartheta}{1-\varepsilon-\vartheta}$$

  y dando un extremo para I_2. A continuación, $\frac{\partial^2 I_2}{\partial r^2} = \frac{(1-\varepsilon-\vartheta)^2}{s(1-s)} > 0$ (en particular para el s "óptimo"), probando de que el extremo es un máximo. Poniendo el r^{opt} en la formula de $I_2(X;Y)$, luego de muchos cálculos (básicos), se obtiene

  $$C_2 = \log_2\left(1 + 2^{\frac{h_2(\varepsilon)-h_2(\vartheta)}{1-\varepsilon-\vartheta}}\right) - \frac{(1-\vartheta)\,h_2(\varepsilon) - \varepsilon\,h_2(\vartheta)}{1-\varepsilon-\vartheta}$$

  Cuando $\vartheta \to 1-\varepsilon$, notando que $h_2(\varepsilon) = h_2(1-\varepsilon)$ y tomando el límite de esta formula, se recupera que $C_2 \to 0$.

De $I_2(X;Y) = H_2(Y) - H_2(Y|X) \leq H_2(Y) \leq 1$ bit (Y es binario, de entropía máxima en el caso uniforme), aparece sin cálculos que

$$C_2 \leq 1 \text{ bit}$$

i. e., la capacidad es menor que 1 bit [34]: para transmitir información en este canal, hace falta introducir redundancia en el mensaje. Se alcanza $C_2 = 1$ bit si, (i) por un lado $H_2(Y|X) = 0$, es decir $rh_2(\varepsilon) + (1-r)h_2(\vartheta) = 0$ y además (ii) $h_2(s) = 1$. Estudiando cada caso (ej. con $r = 0$ y $\vartheta = 0$ se satisface (i) pero no (ii) porque $s = 0$), se obtiene que

$$C_2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{1}{2} \ \text{ y } \ \varepsilon = \vartheta = \frac{1 \pm 1}{2}$$

---

[34] De manera general, de la escritura de I con entropías condicionales, para X definido sobre $\mathcal{X}$ e Y sobre $\mathcal{Y}$, da $0 \leq C \leq \min(\log|\mathcal{X}|\,,\, \log|\mathcal{Y}|)$. Además, $p_{Y|X}$ depende solo del canal y no de la entrada, así que para $p_X = \pi_1 p_{(1)} + \pi_2 p_{(2)}$ ($\pi_2 = 1 - \pi_1$) se obtiene $p_Y = \pi_1 q_{(1)} + \pi_2 q_{(2)}$ con $q_{(i)}$ distribución de la salida corespondiente a una entrada de distribución $p_{(i)}$. Ahora, de $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$, el segundo término siendo dependiente solamente del canal, de la concavidad de H se obtiene de que I es cóncava con respeto a p_X. p_X parteneciendo a un convexo, I tiene un máximo que es único.

Para $\varepsilon = \vartheta = 0$ el canal es perfecto, mientras que para $\varepsilon = \vartheta = 1$ el canal es llamado *canal volteando*; en ambos casos, se recupera la entrada (o directamente, o tomando el opuesto) "sin perdida".

La figura Fig. 2-20 representa la información mutua $I(X;Y)$ para unos canales (ε y ϑ dados) en función de r. Se nota que la curva es cóncava y tiene un máximo, capacidad del canal. La figura Fig. 2-21 representa la capacidad del canal en función de ε y ϑ así que unos casos particulares/cortes.

En el caso particular $\varepsilon = \vartheta$, conocido como *canal simético*, la capacidad es

$$C_2 = 1 - h_2(\varepsilon)$$

(alcanzada con una entrada uniforme). Como visto en el caso general, la capacidad vale 1 bit si y solamente si $h_2(\varepsilon) = 0$, es decir $\varepsilon = 0$ o $\varepsilon = 1$. Al revés, la capacidad es mínima cuando H_2 est máximo, es decir para $\varepsilon = \vartheta = \frac{1}{2}$, y $C_2 = 0$ (instancia particular de $\vartheta = 1 - \varepsilon$). $h_2(\varepsilon)$ es la perdida en bit para cada bit transmitido. La capacidad C_2 en función de ε es dada figura Fig. 2-21-(b).

En el caso particular $\varepsilon = 0$, conocido como *canal en Z*, la capacidad es

$$C_2 = \log_2\left(1 + 2^{-\frac{h_2(\vartheta)}{1-\vartheta}}\right)$$

Se nota en este caso también que la capacidad alcanza 1, su máximo, si y solamente si $\vartheta = 0$ (canal perfecto). Al revés, cuando $\vartheta \to 1$, $C \to 0$, instancia particular de $\vartheta = 1 - \varepsilon$. La capacidad C_2 en función de ϑ es dada figura Fig. 2-21-(c).

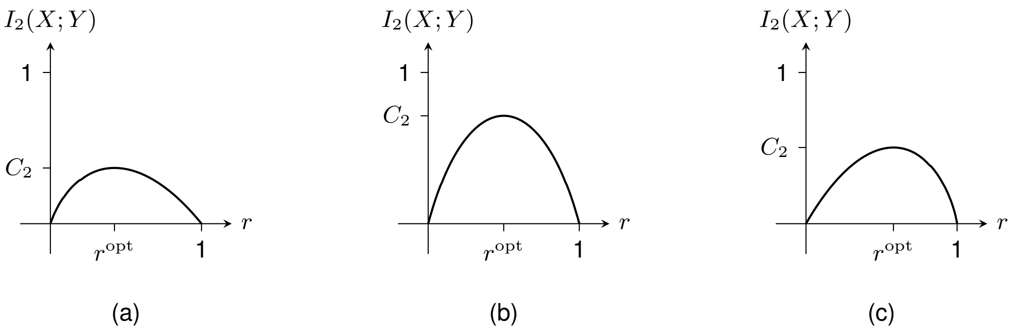


Figura 2-20: Información mutua (en bits) entrada-salida $I_2(X;Y)$ del canal binario en función de $r = \Pr[X = 0]$. (a): $\varepsilon = 0{,}4$ y $\vartheta = 0{,}01$; (b): $\varepsilon = \vartheta = 0{,}05$ (canal simético); (c): $\varepsilon = 0$ y $\vartheta = 0{,}05$ (canal en Z).

En (Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007) entre otros, se estudian diversos otros canales discretos, binarios o con más estados. Unos son representados en la figura Fig. 2-22 (ver también (Shannon, 1948; Elias, 1957) o (Arimoto, 1972) para el cálculo numérico de la capacidad en el caso general).

2.5.2 Canal de transmisión continuo gaussiano y su capacidad

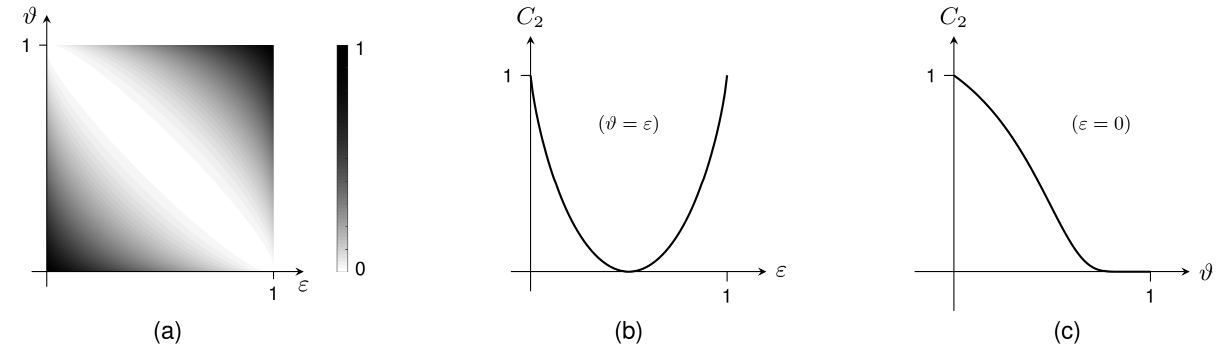


Figura 2-21: Capacidad C_2 del canal binario. (a): en función de ε y ϑ. (b): en función de ε para el canal simético ($\varepsilon = \vartheta$); (c): en función de ϑ para $\varepsilon = 0$ (canal en Z).

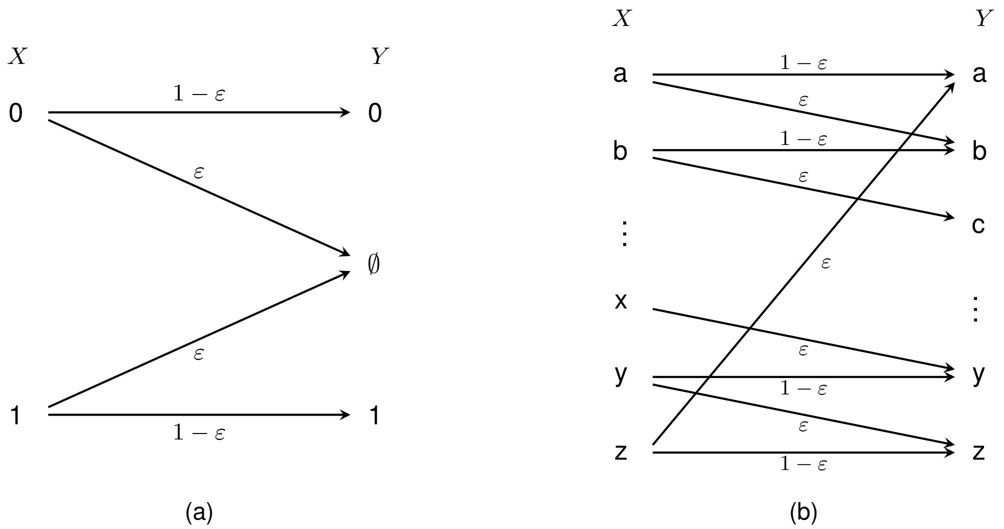


Figura 2-22: Ejemplos de canales discretos usuales. (a): canal borrador, donde un 0 (de probabilidad de ocurrencia r) o 1 (de probabilidad de occurrencia $1-r$) puede transmitirse correctamente or ser borado/perdido (estado $\emptyset$) con una probabilidad ε. Se calcula $I_2(X;Y) = (1-\varepsilon)h_2(r)$, dando la capacidad $C_2 = 1-\varepsilon$, alcanzada para una entrada uniforme. (b): canal tipo machina de escribir, donde cada letra de un ensemble de n letras (acá con $n = 26$) se transmite correctamente con una probabilidad $1-\varepsilon$ o a la letra siguiente (de manera cíclica) con una probabilidad ε. De $I_n(X;Y) = H_n(Y) - H_n(Y|X) = H_n(Y) - h_n(\varepsilon)$ se deduce que I_n es máxima si Y es uniforme, lo que es posible si X es uniforma, dando $C_n = 1 - h_n(\varepsilon)$.

Un canal de comunicación continuo relativamente simple es conocido como *canal gaussiano* (Shannon, 1948, Sec. 25), (Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007): X es una variable continua definida sobre $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ y la salida Y es una versión ruidosa de X, *i. e.,* $Y = X + \xi$ con el ruido ξ independiente de X. En el canal gaussiano, $\xi \equiv \mathcal{N}$ es un vector gaussiano. Este canal es también definido por su densidad de probabilidad “de transición” $p_{Y|X}$, *i. e.,* por la distribución del ruido. Tal canal es descrito figura Fig. 2-23. Se supone conocida la matriz de covarianza $\Sigma_{\mathcal{N}}$ del ruido, y se nota Σ_X la de la entrada. En práctica, no se puede mandar un mensaje a una potencia tan alta que se quiere, lo que se traduce por una limitación

$$\mathrm{Tr}\left(\Sigma_X\right) \leq P$$

potencia límite permitida por componente (sampleo).

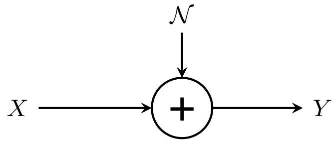


Figura 2-23: Canal gaussiano. La entrada X, modelizada por un vector aleatorio es corrupta aditivamente por un ruido gaussiano $\mathcal{N}$ independiente de X. La salida es entonces $Y = X + \mathcal{N}$ y el canal es completamente descrito por $p_{Y|X}(x, y) = p_{\mathcal{N}}(y - x)$ (obviamente independiente de la distribución de la entrada).

Por definición, la información mutua $I(X;Y)$ entrada-salida es dada por $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(\mathcal{N})$. Maximizar $I(X;Y)$ es equivalente a maximizar $H(Y) = H(X + \mathcal{N})$ sujeto a $\mathrm{Tr}\left(\Sigma_X\right) \leq P$. Fijando un Σ_X, la propiedad [P'5]*b* de la entropía diferencial implica que $H(Y)$ sea máxima si y solamente si Y es gaussiana, es decir si y solamente si X est gaussiana, dando $I(X;Y) = \frac{1}{2}\log|\Sigma_X + \Sigma_{\mathcal{N}}| - \frac{1}{2}\log|\Sigma_{\mathcal{N}}|$. Tomando en cuenta el límite de potencia, hace falta maximizar $|\Sigma_X + \Sigma_{\mathcal{N}}|$ sujeto a $\mathrm{Tr}\,\Sigma_X \leq P$ y $\Sigma_X \geq 0$ simética lo que no es trivial. Se encuentra el enfoque permitiendo solucionar el problema en (Cover & Thomas, 2006, Sec. 9.4). Sea U, matriz ortogonal ($UU^t = U^tU = I$) de los autovectores de la matriz $\Sigma_{\mathcal{N}} \geq 0$ simética [35], de columnas u_i ordenadas tal que los autovalores corespondientes $\lambda_i^{\mathcal{N}}$ sean en orden creciente, *i. e.,*

$$\Sigma_{\mathcal{N}} = U \,\mathrm{diag}\left(\lambda_1^{\mathcal{N}}, \ldots, \lambda_d^{\mathcal{N}}\right) U^t \qquad \text{con} \qquad 0 \leq \lambda_1^{\mathcal{N}} \leq \cdots \leq \lambda_d^{\mathcal{N}}$$

donde diag es la matriz diagonal teniendo los λ_i en su diagonal. Sea $R_X = U^t\Sigma_X U$. Es sencillo ver que $|\Sigma_X + \Sigma_{\mathcal{N}}| = |R_X + \Lambda_{\mathcal{N}}|$ (de $|AB| = |A|\,|B|$) y que $\mathrm{Tr}\,\Sigma_X = \mathrm{Tr}\,R_X$ (de $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$). Entonces, el problema se reduce a maximizar $|R_X + \Lambda_{\mathcal{N}}|$ sujeto a $\mathrm{Tr}\,R_X \leq P$ y $R_X \geq 0$ simética. La desigualdad de Hadamard ya evocada da $|R_X + \Lambda_{\mathcal{N}}| \leq \prod_i \left(R_X + \Lambda_{\mathcal{N}}\right)_{i,i} = \prod_i \left(\left(R_X\right)_{i,i} + \lambda_i^{\mathcal{N}}\right)$ con igualdad si y solamente si R_X es diagonal: para maximizar $|R_X + \Lambda_{\mathcal{N}}|$, R_X debe ser diagonal (dada una diagonal, se alcanza el máximo si los otros términos son nulos). Es decir que la base que diagonaliza $\Sigma_{\mathcal{N}}$ debe diagonalizar también Σ_X. Sean λ_i^X los términos diagonales de R_X: queda que maximizar $\prod_i \left(\lambda_i^X + \lambda_i^{\mathcal{N}}\right)$ sujeto a $\sum_i \lambda_i^X \leq P$ y $\lambda_i^X \geq 0$. Este problema de optimización sujeto a una desigualdad se resuelva con el enfoque de Karush-Kuhn-Tucker [36] (KKT) (Miller, 2000; Cambini & Martein, 2009), dando $\lambda_i^X = \left(\lambda - \lambda_i^{\mathcal{N}}\right)_+$ con $(\cdot)_+ = \max(\cdot, 0)$ y λ

---

[35] Se recordará de que $A \geq 0$ significa que A es definida no negativa.

[36] Se introduce el factor de Lagrange y se maximiza $\prod_i \left(\lambda_i^X + \lambda_i^{\mathcal{N}}\right) + \mu \sum_i \lambda_i^X$. Eso da $\lambda_i^X + \lambda_i^{\mathcal{N}} = \lambda$ constante si λ es tal que se satisfaga la positividad de λ_i^X, y $\lambda_i^X = 0$ sino. En otras palabras, $\lambda_i^X = \left(\lambda - \lambda_i^{\mathcal{N}}\right)_+$ con λ el factor de Lagrande después de una reescritura. Queda que maximizar los λ_i^X para maximizar $|R_X + \Lambda_{\mathcal{N}}|$, es decir tomar λ lo más grande que se puede, pero satisfaciendo $\sum_i \lambda_i^X \leq P$, *i. e.,* alcanzando la igualdad.

tal que $\sum_i \left(\lambda - \lambda_i^{\mathcal{N}}\right)_+ = P$. En conclusión, la capacidad es dada por

$$C = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|\Sigma_{\mathcal{N}} + \Sigma_X|}{|\Sigma_{\mathcal{N}}|} \right) \qquad \text{con} \qquad \Sigma_X = U \operatorname{diag}\left(\left(\lambda - \lambda_1^{\mathcal{N}}\right)_+, \ldots, \left(\lambda - \lambda_d^{\mathcal{N}}\right)_+ \right) U^t,$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum_i \left(\lambda - \lambda_i^{\mathcal{N}}\right)_+ = P$$

alcanzada por X gausiano de matriz de covarianza Σ_X así construida.

La última condición se resuelva a través de lo que es conocido como “llenado de agua” (water-filling en inglés), illustrado figura Fig. 2-24. El principio es parecido a tener niveles $\lambda_i^{\mathcal{N}}$ representando las potencias del ruido (en la base que diagonaliza la matriz de covarianza), y de “llenar con agua” hasta un nivel λ tal que el “volumen” añadido vale P; en cada $\lambda_i^{\mathcal{N}}$ se ha añadido el λ_i^X (Cover & Thomas, 2006, Sec. 9.4).

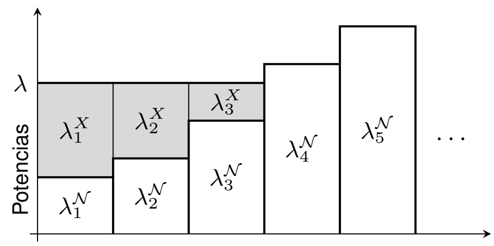


Figura 2-24: Principio del “water-filling” para obtener los λ_i^X satisfaciendo el vínculo de potencia límite y permitiendo de construir Σ_X a partir de la matriz diagonal de los λ_i^X y la base que diagonaliza la covarianza $\Sigma_{\mathcal{N}}$ del ruido. La zona en grise representa esquemáticamente P.

En el caso escalar, se obtiene

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{\sigma_{\mathcal{N}}^2} \right)$$

donde $\frac{P}{\sigma_{\mathcal{N}}^2}$ es conocido como relación señale-ruido [37]

En (Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007) por ejemplo, se dan otros ejemplos de canal de comunicación en el contexto continuo (entrada X_t siendo una señal/proceso, canal filtrando, canal con feedback, etc.).

2.5.3 Codificación entrópica sin perdida

[37]Esta formula es muy parecida a la de Shannon, Laplume, o Clavier (Shannon, 1948; Laplume, 1948; Clavier, 1948) (ver también (Cover & Thomas, 2006, Sec. 9.3) o (Rioul, 2007, Sec. 11.2)). De hecho, si se considera símbolos mandados durante T segundos cada uno (símbolos puestos en forma para dar una señal analógica) usando una banda de transmisión B, por el teorema de Nyquist $B = \frac{1}{2T}$ (caso límite). Si el ruido es blanco en la banda B, de densidad espectral de potencia por unidad de frecuencia igual a N_0, para un símbolo la relación señal-ruido se escribe $\frac{P}{N_0 B}$. Además, se calcula en general la capacidad por unidad de tiempo es decir la capacidad por símbolo divido por $T = \frac{1}{2B}$, *i. e.*, $C = B \log\left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right)$ por segundos, lo que es precisamente la capacidad calculdada por Shannon. Esta es a veces conocida como formula de Shannon-Hartley.

El problema de codificación de fuente puede presentarse de la manera siguiente (Cover & Thomas, 2006, cap. 5) o (Rioul, 2007, cap. 13). Sea un proceso aleatorio $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, supuesto estacionario, llamado *fuente*, donde los X_t toman sus valores sobre un alfabeto discreto finito

$$\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_\alpha\} \qquad \text{alfabeto fuente}$$

de distribución p_X. A cada posible secuencia [38] $s_1 \cdots s_n \in \mathcal{X}^n$ de letras de $\mathcal{X}$, se quiere asignar un código $c(s_1 \cdots s_n)$ de letras de un alfabeto discreto finito,

$$\mathcal{C} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\} \qquad \text{alfabeto código}$$

El código es dicho d*-ario*. Por ejemplo, se puede asignar un código $c(x_i) = \zeta_{i,1} \cdots \zeta_{i,l_i} \in \mathcal{C}^{l_i}$ a cada símbolo, código llamado *palabras códigos*, y a secuencias $s_1 \cdots s_n$ la concatenación de las palabras códigos correspondiente a cada símbolo, *i. e.,* el código $c(s_1) \cdots c(s_n)$. En el sistema Moorse por ejemplo, $\mathcal{C}$ consiste en un punto, una barra, una espacio entre letras, un espacio entre palabras. En una computadora en general todo se codifica en bits $\mathcal{C} = \{0\,,\,1\}$. Más formalmente, sean

$$F_{\mathcal{X}} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{X}^k \qquad \text{y} \qquad F_{\mathcal{C}} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k$$

unión de secuencias de k letras de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente. Una codificación de fuente consiste en una función de $F_{\mathcal{X}}$ dentro de $F_{\mathcal{C}}$. En lo que sigue, nos concentramos en códigos definidos para bloques de símbolos de tamaño $m \geq 1$:

$$\begin{array}{rccl} c_m: & \mathcal{X}^m & \to & F_{\mathcal{C}} \\ & x & \mapsto & c_m(x) \in \mathcal{C}^{l_{c_m}(x)} \end{array}$$

donde $l_{c_m}(x) \in \mathbb{N}^*$ es el *largo* de la palabra código $c_m(x)$, y

$$\forall\, n \geq 1, \quad \forall\, s_1 \cdots s_n \in \mathcal{X}^{nm}, \quad c_m(s_1 \cdots s_n) \equiv c_m(s_1) \cdots c_m(s_n)$$

lo que es llamado *extensión del código*. En lo que sigue, se escribirá $c \equiv c_1$.

Una manera ingenua de codificar consiste a apoyarse sobre la descomposición de base d de un entero, *i. e.,* para $1 \leq i \leq \alpha$, $i-1 = (i_0-1)+(i_1-1)d+\cdots+(i_K-1)d^K$ donde $K = \left\lceil \log_d |\mathcal{X}| \right\rceil$ y $1 \leq i_k \leq \alpha$, y de asignar la palabra código $\zeta_{i_0} \cdots \zeta_{i_k}$ al símbolo x_i. Haciendo eso, cada palabra código tieno el mismo largo. Pero, es más económico hacer una codificación dicha de largos variables, teniendo en cuenta las probabilidades de aparición de cada x_i. Implicitamente, es la idea del código de Moorse, que asigna un punto o series de puntos o código pequeño a las letras muy frecuentes (ej. un punto para el 'e', dos puntos para el 'i', etc.), y barras o combinaciones largas a las letras que son raras (ej. bara-bara-punto-bara para el 'q' o cinco baras para el '0'). Dicho de otra manera, el código ingenuo sería "eficaz" para x_i apareciendo con las mismas frecuencias/probabilidades.

---

[38] Por abuso de escritura una cadena de n símbolos puede ser vista como un n-uplet.

En los códigos de largos variables (incluyendo el código ingenuo), volviendo a c_m, existen varios tipos de códigos. Un código es dicho *no singular* si c_m es inyectiva: a cada $x \in \mathcal{X}^m$ corresponde una palabra código única. Esta propiedad es un requisito que parece obvio querer para un código. Pero no es suficiente para poder decodificar un mensaje, compuesta por una secuencia de palabras código. Lo importante en este caso es poder decodificar la secuencia sin ambigüedad: un código est dicho *descifrable* o *a decodificación única* (o sin perdida) si todas las extensiones son no singulares. Por ejemplo, sean $\mathcal{X} = \{\aleph\,, \beth\,, \gimel\,, \daleth\}$, $\mathcal{C} = \{0\,, 1\}$ y $c(\aleph) = 0$, $c(\beth) = 00$, $c(\gimel) = 1$, $c(\daleth) = 01$ ($m = 1$). El código es no singular, pero no descifrable. La secuencia 0010 puede provenir de אגאא, de אדא o de אגב. Obviamente, se requiere en general de un código que sea descifrable. Frecuentemente, se requiere también poder decodificar sobre la marcha, sin esperar de medir toda la secuencia codificada: es lo que se llama *código instantaneo*. Por ejemplo, el código $c(\aleph) = 00$, $c(\beth) = 10$, $c(\gimel) = 11$, $c(\daleth) = 110$ es descifrable, pero no instantaneo. Considera la secuencia 0011011 y marcha sobre ella. 0 no es una palabra código; 00 es y sin ambigüedad proviene de un $\aleph$ (no hay otras palabras empezando por 00); luego 1 no es una palabra, y 11 es una palabra código, pero se necesita adelantar para saber si viene de un $\gimel$ o de un $\daleth$; la letra siguiente siendo un 0, todavía no se puede concluir si 110 vino de $\gimel$ y algó o $\daleth$. Al final, con 1101, se sabe que se tuvimos un $\daleth$ porque ninguna palabra código empieza por 01. Al final, sin ambigüedad el antecedente de la secuencia binaria era גדא. Pero se necesitó marchar sobre toda la secuencia antes de decodificar. Obviamente, un código instantaneo es tal que ninguna palabra código es prefijo de una otra, *i. e.,* si $c_m(x)$ es una palabra código, las otras palabras código no pueden empezar con $c_m(x)$; el código es también dicho *libre de prefijo*. Estas distinciones estan ilustradas en la figura Fig. 2-25 (ver (Cover & Thomas, 2006, cap. 5)).

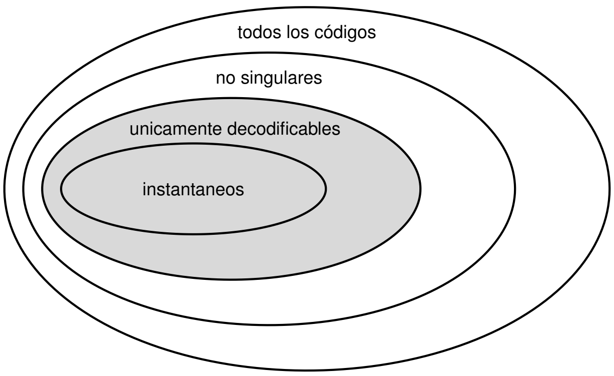


Figura 2-25: Clases de códigos. Los códigos contienen la clase de los no singular. La misma contiene la clase de los códigos descifrable. Ella contiene los códigos instantaneos. En grise se representan las clases de códigos sin perdida a lo cuales se dedica esta sección.

Además de la decodificación sin ambigüedad, una caracterización importante del código es la taza de codificación [39]

$$R_{c_m} = \frac{\log_d \left(\sum_{x \in \mathcal{X}^m} l(x) \Pr[X = x] \right)}{m}$$

donde X representa una secuencia de m variables X_t. El argumento del logaritmo (de base adecuada al cardinal de $\mathcal{C}$) es el *largo promedio* del código. Por ejemplo, para $d = 2$, R_{c_m} es el número de bits promedio del código por símbolo.

En general, se quiere minimizar R_{c_m} (compresar el mensaje a mandar), lo que puede ser contradictorio con la necesidad de añadir redundancia para no perder información durante una transmisión. En lo que sigue, nos concentramos en el problema de compresión, sin tener en cuenta el paso de transmisión de mensajes codificados en un canal. Minimizar la taza es equivalente a minimizar el largo promedio. Además, se puede focalisarse en $m = 1$; todo se extiende sencillamente a $m > 1$.

La meta de la compresión es entonces construir un código c, descifrable, que minimizar el largo promedio

$$L(c) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x)\, l(x)$$

Antes de ir más adelante, hace falta traducir en ecuación el vínculo de que c sea descifrable. Eso es dado por la desigualdad de Kraft-McMillan (Kraft Jr, 1949; McMillan, 1956; Karush, 1961) [40]

Teorema 2-17 (Desigualdad de Kraft-McMillan)**.** *Los largos $l_c(x)$ de las palabras código de un código c descifrable deben satisfacer la desigualdad*

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l_c(x)} \le 1$$

Recíprocamente, para cada conjunto de enteros $\{\ell_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ satisfaciendo esta desigualdad, es posible de construir un código descifrable con $l_c(x) = \ell_x$.

Demostración. Para cualquier $k \ge 1$ y cualquiera cadena $s = s_1 \cdots s_k \in \mathcal{X}^k$, la extensión del código, $c_k(s_1 \cdots s_k) = c(s_1) \cdots c(s_k)$ satisface $l_{c_k}(s) = \sum_i l_c(s_i)$. Entonces

$$\left(\sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l_c(x)} \right)^k = \sum_{\bar{x} \in \mathcal{X}^k} d^{-l_{c_k}(\bar{x})} = \sum_{m=1}^{k\, l_c^{\text{máx}}} \#(m)\, d^{-m}$$

re-escribiendo la segunda suma, agrupando los términos de mismo largos, donde $\#(m)$ es el número de códicos de $\mathcal{X}^k$ teniendo el largo m y $l_c^{\text{máx}} = \text{máx}_{x \in \mathcal{X}} l_c(x)$ es el largo mayor. c siendo descifrable, c_k debe ser inyectiva, imponiendo $\#(m) \le d^m$ (no hay más palabras de largo m que el cardinal de $\mathcal{C}^m$), dando inmediatemente que necesariamente

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l_c(x)} \le \left(k\, l_c^{\text{máx}} \right)^{\frac{1}{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l_c(x)} \le \min_{k \in \mathbb{N}^*} \left(k\, l_c^{\text{máx}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

[39] En (Rioul, 2007) por ejemplo, se define esta taza suponiendo que cada secuencia fuente es codificado por el mismo número de bits. La taza es entonces el número de bits por símbolo.

[40] Esta desigualdad fue probabada por L. G. Kraft para códigos instantaneos en su tesis de maestria (Kraft Jr, 1949). Luego, fue extendiad a los códigos descifrable por B. McMillan (McMillan, 1956) (en una nota de pie de pagina de su papel, atribua esta observación a J. L. Doob hecha oralemente durante una escuela de verano en Ann Arbor, MI en agosto 1955).

Un estudio rápido de $u \mapsto \left(u\, l_c^{\text{máx}}\right)^{\frac{1}{u}}$ para $u \ge 1$ y teniendo en cuenta de que $l_c^{\text{máx}} \le 1$ permite concluir que el mínimo es igual a 1, terminando la parte directa del teorema.

Recíprocamente, sea $\{\ell_x\}_{x\in\mathcal{X}}$ un conjunto de enteros satisfaciendo la desigualdad de Kraft-McMillan. Se puede agrupar los largos iguales y clasificarlos. Sea n_ℓ los números de largos igual a $\ell = 1, \ldots, \ell^{\text{máx}} \le \alpha$. Consideramos ahora un arbol empezando con una raíz, correspondiente a un largo 0, que se divide en d ramas, correspondiente a los largos iguales a 1; a cada nudo se asocian las letras $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$. Esto nudos se dividen cada uno en d otras ramas, y los nudos de "padre" ζ_i se va a asociar las palabras códigos $\zeta_i\zeta_1, \ldots, \zeta_i\zeta_\alpha$, etc. Este arbol, conocido como arbol de Kraft, es ilustrado en la figura Fig. 2-26 para $d = 2$ y $\mathcal{C} = \{0\,,\,1\}$. Claramente, $n_1 \le d$ si no $n_1\, d^{-1} > 1$ y los largos no podrían satisfacer la desigualdad de Kraft-McMillan. El principio es entonce de asociar a los n_1 (posiblemente igual a 0) largos iguales a 1 unos nudos con las palabras código asociadas de largo 1 (primera profundez de ramas) y de prohibir todos las ramas de padre los nudos seleccionados (lineas punteadas en la figura Fig. 2-26). Estos nudos son llamados *hojas* (no hay ramas). En la capa de "hijos" de profundez/largos 2, quedan $d^2 - n_1\, d$ nudos (accessibles) que se puede dividir en ramas. Nuevamente, $n_2 \le d^2 - n_1\, d$ sino tendríamos $n_1\, d^{-1} + n_2\, d^{-2} > 1$, incompatible con la desigualdad de Kraft-McMillan. Se puede asociar a los n_2 largos iguales a 2 unos nudos con las palabras código asociadas de largo 2 (segunda profundez), y de prohibir que salen de estos nudos nuevas ramas (son entonces hojas en la segunda profundez), etc. Haciendo así, se asocia un código c de largos $l_c(x) = \ell_x$ que aparece libre de prefijo, es decir instantaneo. Entonces, este código es también descifrable. $\square$

A este punto, se menciona los hechos siguientes

- Los largos de un código descifrable satisfacen la desigualdad de Kraft-McMillan, pero con el conjunto de largos correspondientes se puede siempre construir un código instantaneo. Claramente, se puede buscar un código de largo promedio mínimo en los códigos instantaneo, sin perdida de optimalidad (buscar en la clase más amplia de los descifrable no permite bajar el largo promedio).

- En los códigos libres de prefijo, si se fija los números de hojas (última profundez) borradas contruyendo un código, este vale $\sum_{i=1}^{\ell^{\text{máx}}} n_i\, d^{\ell^{\text{máx}}-i} = \sum_{x\in\mathcal{X}} d^{\ell^{\text{máx}}-l_c(x)}$. Es necesariamente menor que el número total $d^{\ell^{\text{máx}}}$ de hojas, lo que prueba el teorema para los códigos instantaneos (Kraft Jr, 1949; Karush, 1961).

- El teorema se generaliza obviamente para codificar una fuente (discreta) con un número infinito de estados, tomando el límite $\alpha \to \infty$.

- Si se conocen los largos óptimos, es suficiente para poder construir un código libre de prefijo.

El formalismo dado, se va a ver ahora reaparecer la entropía de Shannon como cota de la codificación de fuente sin perdida:

Teorema 2-18 (Cota inferior de códigos descifrable)**.** *Para cualquier código* c *descifrable de la fuente* X*, su*

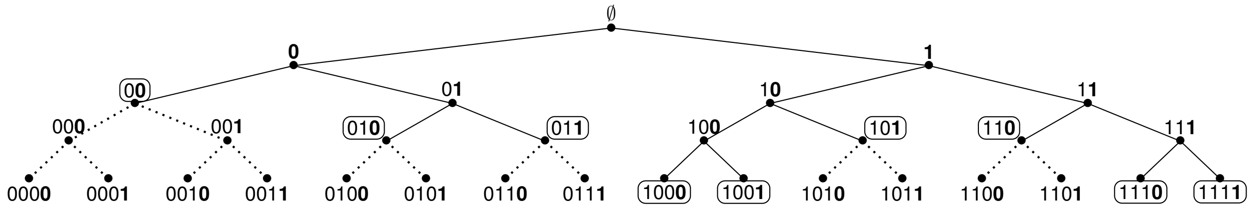


Figura 2-26: Arbol de Kraft en el caso binario ($d = 2$). La raíz, de código $\emptyset$ de largo 0, se divide en dos ramas, de códigos respectivamente 0 y 1 (profundez 1). Cada nudo de esta profundez se divide en dos ramas (profundez dos), dando cuatros nuevos nudos con los códigos 00 y 01 de padre 0, y 10 y 11 de padre 1. Etc. En cada nudo de esta figura, en el código, se marca en negrita la letra correspondiente al bit añadido al código padre. Para hacer un código libre de prefijo, una vez que un nudo es seleccionado para ser una palabra código (encuadrado en la figura), no puede tener nudos "hijos" siendo también una palabra código: se boran las ramas saliendo de un nudo-palabra código (ramas punteadas).

largo promedio es acotado por debajo por la entropía de Shannon de base d de X,

$$L(c) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \, l_c(x) \; \geq \; H_d(X)$$

Demostración. Sea $q(x) = \frac{d^{-l_c(x)}}{\sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l_c(x)}}$, siendo una distribución de probabilidad por construcción. Escribiendo $l_c(x) = \log_d d^{-l_c(x)}$, se puede expresar el largo promedio de la forma

$$L(c) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \, \log_d d^{-l_c(x)} = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \, \log_d q(x) - \log_d \sum_a d^{-l_c(x)}$$

Notando que $- \log_d q = \log_d \left(\frac{p_X}{q} \right) - \log_d p_X$ se obtiene

$$L(c) = H_d(X) + D_{\mathrm{kl},d} \left(p_X \| \, q \right) - \log_d \sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l_c(x)}$$

El resultado proviene de la positividad de la divergencia de Kullback-Leibler y de la desigualdad de Kraft-McMillan (el argumento del logaritmo siende menor que 1). $\square$

Este resultado significa que la taza de compresión sin perdida no puede ser más bajo que el contenido informacional de la fuente. En este sentido, H tiene realmente un sabor de información sobre la fuente X.

La entropía aparece también el la cota superior del código óptimo:

Teorema 2-19 (Cota superior del código descifrable óptimo)**.** *El largo promedio L^{opt} del código c^{opt} descifrable, de largo promedio mínimo es acotado por arriba por la entropía de Shannon de base d de X más un dit (1 símbolo de $\mathcal{C}$),*

$$L^{\mathrm{opt}} \; < \; H_d(X) + 1$$

Demostración. Por eso, empezamos por buscar los largos óptimos, solución de la optimización

$$\min \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \, l(x) \qquad \text{sujeto a} \qquad \sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l(x)} \; 1$$

Sea $q(x) = \frac{d^{-l_c(x)}}{\sum_{x\in\mathcal{X}} d^{-l_c(x)}}$, siendo una distribución de probabilidad por construcción. Escribiendo $l_c(a) = \log_d d^{-l_c(a)}$, se puede expresar el largo promedio de la forma

$$L(c) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\, \log_d d^{-l_c(x)} = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p_X(x)\, \log_d q(x) - \log_d \sum_{x\in\mathcal{X}} d^{-l_c(x)}$$

Olvidando que los $l_i \equiv l(x_i)$ son enteros, $L(c)$ es convexa con respecto a los l_i así que el vínculo, garantizando que el mínimo existe y es único. El problema se resuelva con el enfoque KKT [41], optimización con vínculos tipo desigualdades (Miller, 2000; Cambini & Martein, 2009), conduciendo a los "largos"

$$\widetilde{l}(x) = -\log_d p_X(x)$$

Una posibilidad puede ser de tomar la parte entera superior,

$$l(x) = \Big\lceil -\log_d p_X(x) \Big\rceil$$

Obviamente el conjunto de largos satisface la desigualdad de Kraft-McMillan, así que se puede construir un código c^{sh} descrifrable con estos largos. De $l(x) < -\log_d p_X(x) + 1$ se obtiene

$$L^{\mathrm{opt}} \le L\left(c^{\mathrm{sh}}\right) < H_d(X) + 1$$

$\square$

De

$$H_d(X) \le L^{\mathrm{opt}} < H_d(X) + 1$$

se revela el rol fundamental de la entropía en la codificación de fuente sin perdida. La codificación es a veces dicha *codificación entrópica* y da un rol operacional a la entropía de Shannon. Se notará de la demostración precedente de que aparece un código particular:

Definición 2-35 (Código de Shannon)**.** *Un código c^{sh} de una fuente X, de largos $l^{\mathrm{sh}}(x) = \Big\lceil -\log_d p_X(x) \Big\rceil$, libre de prefijo (construido sobre el arbol de Kraft) es llamado código de Shannon.*

Obviamente, también

$$H_d(X) \le L\left(c^{\mathrm{sh}}\right) < H_d(X) + 1$$

Al lo contrario de primer vista, un código de Shannon no es óptimo. Un ejemplo sencillo para verlo consiste a tomar $\mathcal{X} = \mathcal{C} = \{0\,,1\}$ y $p_x(0) = 0{,}999 = 1 - p_X(1)$. Los largos de Shannon van a ser $l^{\mathrm{sh}}(0) = 1$ y $l^{\mathrm{sh}}(1) = 10$, y el largo promedio vale $L\left(c^{\mathrm{sh}}\right) = 1{,}009$. Obviamente, un código óptimo es $c(x) = x$ de largos $l(x) = 1$ dando $L^{\mathrm{opt}} = 1$ bit. De hecho, volviendo al problema con largos virtualmente no enteros, el mínimo se alcanza para $\widetilde{l}(x) = -\log_d p_X(x)$, es decir que, los largos siendo enteros, se alcanza la cota mínima del código óptimo si y solamente si $-\log_d p_X(x)$. Una distribución satifaciendo esta condición es dicha d-ádica. Sin embargo, el código de Shannon es "competitivo" en el sentido de que:

[41] Ver nota de pie 36 pagina 86.

Teorema 2-20 (Competitividad del código de Shannon)**.** *Sea* X *fuente sobre* $\mathcal{X}$*, de distribución* p_X *y* c^{sh} *el código de Shannnon asociado sobre el alfabeto código* $\mathcal{C} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$*, de largos* $l^{\mathrm{sh}}(x) = \Big\lceil -\log_d p_X(x) \Big\rceil$*. Para cualquier código* c *descifrable y cualquier* $k \geq 1$*,*

$$\Pr\Big[l^{\mathrm{sh}}(X) \geq l_c(X) + k \Big] \leq \frac{1}{d^{k-1}}$$

Demostración. Por definición de un código de Shannon, de $a + 1 > \lceil a \rceil \geq b \Rightarrow a \geq b - 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Pr\Big[l^{\mathrm{sh}}(X) \geq l_c(X) + k \Big] &\leq \Pr\Big[-\log_d p_X(X) \geq l_c(X) + k - 1 \Big] \\ &= \Pr\Big[p_X(X) \leq d^{-l_c(X)-k+1} \Big] \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X} : p_X(x) \leq d^{-l_c(X)-k+1}} p_X(x) \end{aligned}$$

Pero, sumando sobre lo x tal que $p_X(x) \leq d^{-l_c(X)-k+1}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Pr\Big[l^{\mathrm{sh}}(X) \geq l_c(X) + k \Big] &\leq d^{1-k} \sum_{x \in \mathcal{X} : p_X(x) \leq d^{-l_c(X)-k+1}} d^{-l_c(X)} \\ \Pr\Big[l^{\mathrm{sh}}(X) \geq l_c(X) + k \Big] &\leq d^{1-k} \sum_{x \in \mathcal{X}} d^{-l_c(X)} \end{aligned}$$

(añadiendo términos positivos en la suma). La prueba se cierra notando que c siendo descifrable, l_c satisface la desigualdad de Kraft-McMillan. □

Este teorema traduce el hecho de que si c^{sh} no es óptimo, tomando cualquier otro código (incluyendo el óptimo), la probabilidad que $c^{\mathrm{sh}}(X)$ tenga un largo más grande que $c(X) + k$ decrece exponencialmente con k. En el ejemplo anterior, si se compara c^{sh} y el código óptimo, para $k = 9$ (caso del código de 1), $\Pr\Big[l^{\mathrm{sh}}(X) \geq l_c(X) + 9 \Big] \leq 0{,}391\,\%$. De hecho, una palabra código de largo 10 aparece con una probabilidad $0{,}1\,\%$...

En el problema de minimización, el hecho de que los largos deben ser enteros no permite solucionar explicitamente el problema de busqueda del código óptimo. Números investigadores contruyeron códigos, intentando probar de que eran óptimos (ver ej. (Shannon, 1948; Shannon & Weaver, 1964; Fano, 1949) por los primeros, y (Cover & Thomas, 2006, & ref.)). El código conocido como *código de Fano* [42] c^{fa} se basa sobre el hecho de que se alcanza la cota mínima para una distribución d-ádica. El principio es de clasificar los estados de $\mathcal{X}$ para obtener las probabilidades clasificadas en orden decreciences ($p_X^{\downarrow}$). Luego, se divide $\mathcal{X}$ en d ensembles a lo más equiprobables que se puede (*i. e.,* de probabilidad a lo más cerca de d^{-1}) y de asignar ζ_i al conjunto i. Luego, se repite el proceso a cada sub-conjunto (para tener sub-conjuntos de probabilidades a lo más cerca de d^{-2}) y al subconjunto j del conjunto i se va a asignar le código $\zeta_i\zeta_j$, etc. Eso es ilustrado en

---

[42] A pesar de que sea diferente del de Shannon y que cada uno fueron hechos independientemente, a veces es conocido como código de Fano-Shannon, o aun Shannon-Fano-Elias (Cover & Thomas, 2006; Krajči, Liu, Mikeš & Moser, 2015).

la figura Fig. 2-27-(a). **Probar/mencionar que también**

$$H(X) \leq L\left(c^{\mathrm{fa}}\right) < H(X) + 1$$

Fijense de que no hay un único código de Fano o de Shannon (tal como no hay un óptimo único). Por exemple, hacer una permutacion de los ζ_i da los mismos largos y el mismo largo promedio sin cambiar el aspecto libre de prefijo. De la misma manera, en el arbol de Kraft, en cada profundez se puede permutar los símbolos asociados a las hojas de esta profundez sin cambiar el aspecto libre de prefijo y sin que cambien los largos $l(x_i)$ (y entonces con el mismo largo promedio).

Una solución para construir un código óptima fue propuesta por Huffman en 1951-1952 (Huffman, 1952; Pigeon, 2003) [43]

Definición 2-36 (Código de Huffman)**.** *Suponemos que existe un $q \in \mathbb{N}$ tal que* [44] $\alpha = |\mathcal{X}| = d + q(d-1)$*. El algoritmo de Huffman consiste a construir un arbol donde cada nudo es asociado a un conjunto de símbolos fuente y una letra de $\mathcal{C}$ de la manera siguiente:*

1. *Clasificar las probabilidades en orden decrecientes: llamamos p_i las probabilidades rearregladas y, por cambio de escritura, x_i el símbolo fuente correspondiente.*
2. *A cada $x_i,\ n-d+1 \leq i \leq n,$ associar un nudo y la letra "hijo" ζ_i.*
3. *Crear d ramas saliendo de un nudo padre hasta los d nudos $x_i,\ n-d+1 \leq i \leq n$.*
4. *Crear un nuevo conjunto de símbolos fuente $\widetilde{x}_i = x_i,\ 1 \leq i \leq n-d$ de probabilidades respectivas $\widetilde{p}_i = p_i$ y $\widetilde{x}_{n-d+1} = \{x_j,\ n-d+1 \leq j \leq n$ de probabilidad $\widetilde{p}_{n-d+1} = p_{n-d+1} + \ldots + p_n$. El útimo "super-símbolo" fuente es asociado al nudo padre de la etapa 3.*
5. *Si quedan más de un (super-)símbolo fuente, volver a la etapa 1 con $p \equiv \widetilde{p}$ y $x \equiv \widetilde{x}$.*

Como descrito tratando del código usando el arbol de Kraft, $c^{\mathrm{huf}}(x_i)$ se construye saliendo de la raíz del arbol así construido, agregando las letras del camino que llega hasta la hoja x_i. Eso es ilustrado en la figura Fig. 2-27-(b) en el caso binario.

Se mencionara que a cada etapa, el nuevo conjunto de super-símbolos fuente contiene exactamente $d-1$ símbolos menos que a la etapa precediente. Así, con $n = d + q(d-1)$ el algoritmo tiene exactamente $q+1$ bucles y en cada profundez no hay ningún nudo vacio en el sentido que o es una hoja, o es un nudo padre/prefijo (quedarán exactamente d nudos a agregar a la raíz en la última etapa). Por exemplo, con $d = 3$

[43] De hecho, Huffman fue estudiantes de maestria de Fano, trabajando en el MIT. Su tesis era de probar que el código de Fano era óptimo: Huffman propusó su propio código, andando al revés del enfoque de Fano, y demostró que era óptimo (Stix, 1991).

[44] Si no, se puede elegir $q = \left\lceil \frac{n-d}{d-1} \right\rceil$, y completar $\mathcal{X}$ con $d + q(d-1) - \alpha$ símbolos fuente fictivos de probabilidades ceros, lo que no va a cambiar ni la entropía, ni el largo promedio del códico aferente.

si tuvieramos $n = 4$, en la segunda etapa tendriamos 2 estados a juntar, dando un código de largos $2, 2, 2, 1$. Empezando la primera etapa con la asociaciación de 2 estados, es decir 3 teniendo en cuenta un estado fictivo ($n = 5$, $q = 1$) van a quedar 3 estados en la segunda etapa, dando un código de largos $2, 2, 1, 1$, es decir de largo promedio más pequeño.

Teorema 2-21 (Óptimalidad del código de Huffman)**.** *El algoritmo de Huffman da un código c^{huf} de largo promedio mínimo en la clase de los códigos descrifrable y los libre de prefijo (se recordará que con los largos de códigos descifrable, siempre se puede construir un código libre de prefijo), es decir $L^{\mathrm{opt}} = L\left(c^{\mathrm{huf}}\right)$.*

Demostración. Una prueba es dada por ejemplo en (Cover & Thomas, 2006, Sec. 5.8) en el caso binario, pero la extensión para $d > 2$ es un poco más sutil. La prueba más general es dada por Huffman (Huffman, 1952) y se consigue también por parte en (Pigeon, 2003). Suponemos que $q \geq 1$ (sino, el resultado es obvio). Las etapas son

- Sean j, k dos indices. Si c^{opt} es un código óptimo, y c un código tal que $l(x_i) = l_i^{\mathrm{opt}}, \quad i \neq j, k, \quad l_j = l_k^{\mathrm{opt}} \quad \& \quad l_k = l_j^{\mathrm{opt}}$, se obtiene $0 \leq L(c) - L^{\mathrm{opt}} = \sum_i p_i \left(l_i - l_i^{\mathrm{opt}}\right) = (p_j - p_k)\left(l_k^{\mathrm{opt}} - l_j^{\mathrm{opt}}\right)$. Entonces $p_j > p_k \Rightarrow l_j^{\mathrm{opt}} \leq l_k^{\mathrm{opt}}$.

- Sea m el número de símbolos fuente con un código de largo máximo $l_{\text{máx}}$ y $m' = \text{mín}(m, d)$. Del punto anterior, los m símbolos con palabra código de largo máximo son los de probabilidades más pequeñas.

- Como descrito antes, se puede permutar las letras códigos de una profundez del arbol de Kraft sin cambiar ni el aspecto libre de prefijo, ni el largo promedio. Se puede entonces considerar el código óptimo tal que los m' símbolos de probabilidades las más pequeñas tienen el mismo nudo padre, *i. e.,* solamente la última letra código cambia entre ellos.

- Suponemos que $m' = m < d$. Sea una "super-fuente" $\mathcal{X}^{(2)} = \left\{x_i^{(2)}\right\}_{i=1}^{n-m'+1}$ con $x_i^{(2)} = x_i, \quad 1 \leq i \leq n - m'$ de probabilidades respectivas $p(x_i)$ y $x_{n-m'+1}^{(2)} \equiv \{x_i\}_{i=n-m'+1}^{n}$ de probabilidad $p_{n-m'+1} + \cdots + p_n$ (se "plegan" las m' hojas en un super-símbolo). La códificación óptima es entonces una codificación libre de prefijo de $\mathcal{X}^{(2)}$, "arbol raíz" del código óptimo, a la cual se añade una letra código ζ_k diferente a cada símbolo del super-símbolo $x_{n-m'+1}^{(2)}$. La profundez máxima del código arbol es $l_{\text{máx}} - 1$ y debe ser llena, en el sentido de que no debe tener un nudo que sea ni una hoja, ni un prefijo. En el caso contrario, se podría desplazar un símbolo de $x_{n-m'+1}^{(2)}$ al nudo "vacio" de la profundez $l_{\text{máx}} - 1$, sin cambiar el aspecto libre de prefijo, pero ganando una letra código sobre un símbolo, *i. e.,* hacer un código libre de prefijo con un largo promedio menor. Sería contradictorio con la optimalidad del código inicial.

- Para códificar $\mathcal{X}^{(2)}$, se necesita por lo menos $\lceil \log_d(n - m' + 1) \rceil$ profundez en el arbol raíz. En esta profundez (máxima en el caso optimista), hay $d^{\lceil \log_d(n-m'+1) \rceil} \geq n - m' + 1$ nudos. En la última profundez pueden ser todos ocupados si y solamente si $d^{\lceil \log_d(n-m'+1) \rceil} = n - m' + 1$. En otras palabras, es posible si y solamente si existe un entero k tal que $n - m' + 1 = d^k$, es decir, con $n = d + q(d-1)$, que teniamos el entero $q = \frac{d^k - d}{d-1} + \frac{m'-1}{d-1}$. La primera fracción $\frac{d^k - d}{d-1} = d^{k-1} + \cdots + 1$ siendo entera, q no puede ser entero con $m' < d$. En otros términos, necesariamente $m' = d$, *i. e.,* los d símbolos de probabilidad más debiles son el la última profundez y se puede elegir que compartent el mismo nudo padre.

- Sea $c^{\text{opt},(1)}$ el código óptimo correspondiente a $\mathcal{X}$ y $c^{(2)}$ el código "padre" sobre $\mathcal{X}^{(2)}$ ($c^{\text{opt},(1)}$ quitando la último letra código de los símbolos juntados, *i. e.,* con la raíz común de estos). De la misma manera, sea $c^{\text{opt},(2)}$ un código óptimo sobre $\mathcal{X}^{(2)}$ y $c^{(1)}$ el que se obtiene deplegando el super-símbolo $x_{n-d+1}^{(2)}$ en d hojas. De $L^{\text{opt},(1)} = L\left(c^{(2)}\right) + p_{n-d+1} + \cdots + p_n$ (pasar de $\mathcal{X}^{(2)}$ a $\mathcal{X}$ se añade solo una letra palabra a los símbolos del super-símbolo) y $L\left(c^{(1)}\right) = L^{\text{opt},(2)} + p_{n-d+1} + \cdots + p_n$ se obiene $\left(L^{\text{opt},(1)} - L\left(c^{(1)}\right)\right) + \left(L^{\text{opt},(2)} - L\left(c^{(2)}\right)\right) = 0$. Cada término entre parentesis siendo positivo, valen necesariamente cero (la suma de términos positivos vale cero si y solamente si todos son nulos). En conclusión, $c^{(2)}$ padre de $c^{\text{opt},(1)}$ queda óptimo, $c^{(2)} \equiv c^{\text{opt},(2)}$ (y $c^{(1)} \equiv c^{\text{opt},(1)}$).
- Notando que $|\mathcal{X}^{(2)}| = n-(q-1)(d-1)$, el razonamiento se propaga por inducción, pasando de $c^{\text{opt},(k)}$ a $c^{\text{opt},(k+1)}$ juntando los d super-símbolos de probabilidades más debiles, hasta tener un super-símbolo tendiendo todos los símbolos, $\left|\mathcal{X}^{(K)}\right| = 1$, raíz del arbol.

$\square$

De esta prueba, se puede ver que

- Cada profundez siendo llena, los largos obtenidos van a saturar la desigualdad de Kraft-McMillan.
- Si $\frac{n-d}{d-1}$ no es entero, en lugar de completar $\mathcal{X}$ con símbolos fictivos se puede empezar el algoritmo de Huffman juntando los $n - d - \left\lfloor \frac{n-d}{d-1} \right\rfloor (d-1) + 1$ símbolos fuentes de probabilidades más debiles en un super-símbolo, y luego hacer el bucle descrito (juntando por super-símbolos de d símbolos en cada bucle); en este caso, no se satura más la desigualdad de Kraft-McMillan.
- Obviamente, en el caso binario $d = 2$, no es necesario completar $\mathcal{X}$ por estados fuentes, o empezar con menos de d símbolos juntados (n es necesariamente de la forma $n = d + q(d-1) = 2 + q$).
- El algoritmo no permite conocer los largos de manera analítica en función de p_i, y tampoco el largo promedio. Se los pueden deducir solamente implementando el algoritmo (una vez que es construido). Era el caso también con el enfoque de Fano.

Volviendo al código ingenuo, sería óptimo (y equivalente a los de Fano y de Shannon) para una distribución uniforme. En este contexto, la entropía es $H_d(X) = \log_d |X|$, precisamente la incerteza del enfoque de Hartley que corresponde a los números de dits necesarios para codificar (ingenuosamente) la fuente.

Se notará de que, tratando de una fuente $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ de variables independientes, se puede codificar la fuente con un largo promedio arbitrariamente cerca de $H_d(X)$. El principio es de considerar vectores $\begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix}^t$ viviendo sobre $\mathcal{X}^n$, llamado *extensión de orden* n *de la fuente*, con un código descifrable (o libre de prefijo) de esta extensión; es llamado *codificación de la extensión de la fuente* pero no es necesariamente una extension de c. Así, $H_d(X_1,\ldots,X_n) \le L^{\text{opt},n} < H_d(X_1,\ldots,X_n) + 1$, es decir, de la independencia,

$$H_d(X) \;\le\; \frac{L^{\text{opt},n}}{n} \;<\; H_d(X) + \frac{1}{n} \quad \text{por símbolo}$$

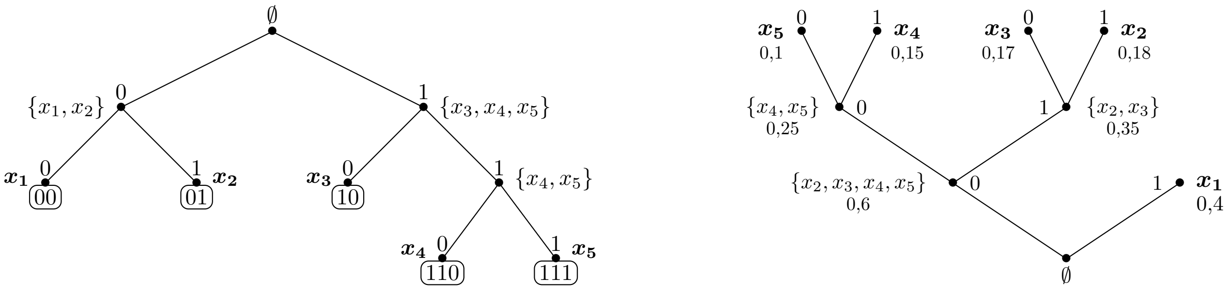


Figura 2-27: Construcción de un código binario sobre $\mathcal{C} = \{0\,,1\}$ asociado al vector de probabilidad $p_X = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}18 & 0{,}17 & 0{,}15 & 0{,}1 \end{bmatrix}^t$ sobre el arbol de Kraft. En este caso, $H_2(X) \approx 2{,}1514$ (a): Enfoque de Fano, saliendo de la raíz. En cada nudo, se menciona el conjunto de símbolos que va a tener el código correspondiente (en negro cuando es un solo símbolo). Se pasa de una profundez a la otra dividiendo los conjunto en sub-conjuntos a lo más equiprobables. Esta construcción da el código $c^{\text{fa}}(x_1) = 00,\ c^{\text{fa}}(x_2) = 01,\ c^{\text{fa}}(x_3) = 10,\ c^{\text{fa}}(x_4) = 110,\ c^{\text{fa}}(x_5) = 111$ de largo promedio $L\left(c^{\text{fa}}\right) = 2{,}25.$ (b): Enfoque de Huffman, saliendo de las hojas. En cada nudo, se menciona el correspondiente (i) conjunto de símbolos, (ii) ζ_i de esta profundez/posición, (iii) la probabilidad asociada al conjunto. Se pasa de una profundez a la otra juntando los conjuntos menos probables en sobre-conjuntos. En negro son indicados los símbolos simples: van a tener el código agregando los de los nudos yendo de la raíz hasta las hojas. Esta construcción da el código $c^{\text{huf}}(x_1) = 1,\ c^{\text{huf}}(x_2) = 011,\ c^{\text{huf}}(x_3) = 010,\ c^{\text{huf}}(x_4) = 001,\ c^{\text{huf}}(x_5) = 000$ de largo promedio $L^{\text{opt}} = 2{,}2.$

(ver también (Rioul, 2007, cap. 13, teorema de Shannon)). Fijense que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L^{\text{opt},n}}{n} \to H(X)$, $\frac{L^{\text{opt},n}}{n}$ no es necesariamente decreciente con respeto a n. Eso es descrito figura Fig. 2-28. Lo mismo puede ocurir con el código de Shannon **y lo de Fano**. Además, el cardinal del alfabeto extendido $\mathcal{X}^n$ crece exponencialmente con n, lo que no permite elegir un n muy grande.

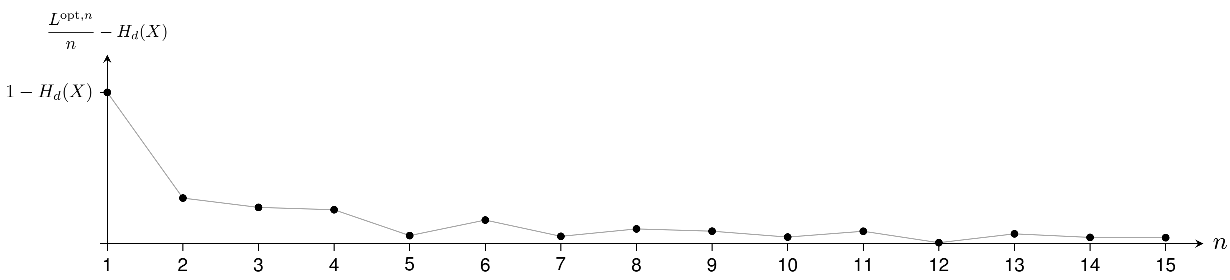


Figura 2-28: $\frac{L^{\text{opt},n}}{n} - H_d(X)$ (puntos), diferencia entre el largo promedio óptimo por símbolo de las extensiones $\mathcal{X}^n$ de orden n de la fuente $\mathcal{X}$ y la cota inferior en función de n. La linea llena en grise sirve como guía. En esta ilustración se usa el ejemplo lo más simple con $d = 2$ y $p = [0{,}33 \quad 0{,}67]^t$.

Para codificar una fuente, que se haga el código óptimo o de Shannon, hace falta usar la distribución de probabilidad de la fuente X. Prácticamente, es usual que no se la tiene. Frecuentemente, es estimada a partir de datos, o, dicho de otra manera, se códifica con una distribución que no es la distribución verdadera de la fuenta. Una pregunta que surge es de conocer lo que se pierde usando una distribución no adaptada (o “falsa”). La respuesta general no es obvia, pero tratando del c/’odigo de Shannon se puede contestar:

Teorema 2-22 (Código falso de Shannon)**.** *Sea* $c^{\mathrm{sh}}(p)$ *el código de Shannon sobre el alfabeto código* $\mathcal{C} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ *asociado a la distribución* p*. Sea* X *fuente sobre* $\mathcal{X}$*, de distribución* p_X *y* q *una distribución cualquiera (ej. estimada de* p_X *presupuesta. . .). Entonces el largo promedio* $L_{c^{\mathrm{sh}}(q)}$ *del código* $c^{\mathrm{sh}}(q)$ *aplicado a la fuente* X *satisface las desigualdades siguientes*

$$H_d(p_X) + D_{\mathrm{kl},d}\left(p_X \| \, q\right) \le L_{c^{\mathrm{sh}}(q)} < H_d(p_X) + D_{\mathrm{kl},d}\left(p_X \| \, q\right) + 1$$

Demostración. Por definición,

$$L_{c^{\mathrm{sh}}}(q) = \sum_{x \in X} p_X(x) \left\lceil - \log_d q(x) \right\rceil$$

La desigualdad viene de $a \le \lceil a \rceil < a + 1$ y escribiendo $-p_X \log_d q = -p_X \log_d p_X + p_X \log\left(\frac{p_X}{q}\right)$. □

Olvidando el posible extra dit (pensar a la códification por bloques), este teorema da una interpretación operacional a la entropía relativa, o divergencia de Kullback-Leibler. Esta cantidad cuantifica la perdida en término de largo promedio codificando con una distribución falsa. Dicho de otra manera, usando q en lugar de p_X, se usa la información de p_X porque se códifica la fuente X, pero suponiendo la distribucíon q, se piedre lo que representa la información relativa de p_X con respeto a la referencia (distribución supuesta) q.

Existen varios otros modos de codificar símbolos. En particular, con la meta de transmitir los símbolos codificados en un canal de comunicación, a veces no es oportuno de compresar drasticamente el mensaje. Existen por ejemplo codificaciones que permiten una corrección de error en la recepción. Pueden tomar en cuenta las caracteristicas del canal de transmisión. Estas consideraciones van más allá de la ilustración de esta sección. El lector puede referirse a (Berlekamp, 1974; Gallager, 1978; Sayood, 2003; Cover & Thomas, 2006; Rioul, 2007) entre otros para tener más detalles sobre varios esquemas de codificación/compresión.

2.5.4 Gas perfecto

En el marco del gas perfecto

Va donner un lien avec Boltzmann

Feder Merhav IT’94 et lien avec discrimination; Vacisek en test de Gaussianite et cf plus loin avec generalises Gok75 etc

2.6 Entropías y divergencias generalizadas

Partout, voir convexite stricte, en 1, idem pour h monotone, etc. vis a vis des cas d'egalite avec les divergences.

A pesar de que la entropía de Shannon y sus cantidades asociadas demostraron sus potencias tan de un punto de vista descriptivo que en término de aplicaciones en la transmisión de la información y la compresión, varias nociones informacionales, tipo entropías o divergencias, aparecieron luego. En esta sección no se desarollará todos los enfoques ni todas las aplicaciones tan la literatura es importante. La meta es dar los caminos conduciendo a las generalizaciones de la entropía de Shannon por un lado, y de la divergencia de Kullback-Leibler por el otro lado. No son siempre vinculados, a pesar de que sea deseable que a cada entropía sean asociados nociones de entropías condicionales y relativas.

2.6.1 Entropías y propiedades

Si la entropía de Shannon fue el punto de salida fundamental en todo el desarollo de la teoría de la información, un poco más de una decada después de su papel clave y muy completo, Rényi propuso una medida generalizada (Rényi, 1961). Su punto de vista fue más matemático que físico o ingeniero. Retomó los axiomas de Fadeev (Fadeev, 1956, 1958; Khinchin, 1957) para probabilidades incompletas [45] $p = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix}^t, \quad p_i \ge 0, \quad w_p = \sum_i p_i \le 1$: (i) la invarianza de $H(p)$ por permutación de os p_i, (ii) la continuidad de la incerteza elemental $H(p_i)$ (p_i visto como probabilidad incompleta), (iii) $H\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, (iv) la aditividad $H(p \otimes q) = H(p) + H(q)$ donde $p \otimes q$ es el producto de Kronecker o tensorial [46], *i. e.,* probabilidad conjunta de dos variables independientes, y consideró en lugar de la recursividad un axioma dicho de valor promedio, axioma muy parecido a la recursividad. Para p y q probabilidades incompletas tales que $p \cup q = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n & q_1 & \cdots & q_m \end{bmatrix}^t$ sea incompleta ($w_p + w_q \le 1$), el axioma (v) es $H(p \cup q) = \frac{w_p\, H(p) + w_q\, H(q)}{w_p + w_q}$. Demostró que con (v) en lugar de la recursividad, el conjunto de axiomas conduce de nuevo a la entropía de Shannon. La generalización propuesta por Rényi era de generalizar el axioma (v) reemplazando la media aritmética por una media generalizada (v') $H^{\mathrm{r}}(p \cup q) = g^{-1}\left(\frac{w_p\, g\big(H^{\mathrm{r}}(p)\big) + w_q\, g\big(H^{\mathrm{r}}(q)\big)}{w_p + w_q}\right)$ con g estrictamente monótona y continua, llamado media *cuasi-aritmética, o cuasi-lineal, o de Kolmogorov-Nagumo*. De las propiedades de la media cuasi-aritmética (Nagumo, 1930; Kolmogorov, 1930, 1991; Hardy et al., 1952), eso es equivalente a buscar una entropía elemental $H^{\mathrm{r}}(p_i)$ y reemplazar la media aritmética $\sum_i p_i H^{\mathrm{r}}(p_i)$ por una media de Kolmogorov-Nagumo, $g^{-1}\left(\sum_i p_i g\big(H^{\mathrm{r}}(p_i)\big)\right)$. Rényi propusó la función de Kolmogorov-Nagumo $g_\lambda(x) = 2^{(\lambda-1)x}, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \ne 1$, probando de que los axiomas (i)-(ii)-(iii)-(iv)-(v') se

[45]En esta sección, los p_i son componentes del vector p no necesariamente asociado a una variable aleatoria; Hay que entender de que $p_i = p_X(x_i)$ si son asociados a una variable aleatoria X.

[46]Ver nota de pie 9 pagina 30

cumplen, conduciendo a la entropía de Rényi de un vector de probabilidad p,

$$H^{\mathrm{r}}_\lambda(p) = \frac{1}{1-\lambda}\log_2\left(\sum_{i=1}^n p_i^\lambda\right)$$

Relaxando el axioma (iii), se puede elegir $g_\lambda(x) = a^{(\lambda-1)x}, \quad a>0, \quad a\neq 1$; el logaritmo será de la base a cualquiera. En lo que sigue, usaremos $\log$ sin precisar la elección de base. Rényi nombró esta medida de incerteza *entropía de orden* λ. Notablemente,

$$H^{\mathrm{r}}_1(p) \equiv \lim_{\lambda\to 1} H^{\mathrm{r}}_\lambda(p) = H(p) \quad \text{entropía de Shannon}$$

En otros términos, la clase de Rényi contiene como caso particular la entropía de Shannon. En su papel, Rényi introdujo una ganancia de información, parecida a una entropía relativa, probando que las solas entropías admisibles son la de Shannon y la que introdujo. Volveremos en la sección siguiente sobre esta entropía relativa, o divergencia de Rényi. Por axiomas, las propiedades [P1] (continuidad), [P2] (invarianza por permutación) y [P10] (additividad) de la entropía de Shannon se conservan entonces en el marco de Rényi y se pierde [P7] (recursividad), todavía por axiomas. Veremos luego la otras que se conservan o modifican en un marco más general.

Unos años después de Rényi, de la famosa escuela matemática checa, J. Havrda & F. Charvát en (Havrda & Charvát, 1967) (ver también (Vajda, 1968, en checo)) volvieron a los axiomas de Khintchin, para extender la entopia de Shannon, *i. e.,* considerando (i) la invarianza por permutación, (ii) la continuidad, (iii) la expansividad, (iv) $H^{\mathrm{hc}}(1) = 0$ y $H^{\mathrm{hc}}\left(\frac12,\frac12\right) = 1$, pero generalizando la recursividad por (v) $H^{\mathrm{hc}}(p_1,\ldots,p_n) = H^{\mathrm{hc}}(p_1,\ldots,p_{n-2},p_{n-1}+p_n) + \lambda(p_{n-1}+p_n)^\lambda H^{\mathrm{hc}}\left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}+p_p},\frac{p_n}{p_{n-1}+p_p}\right), \quad \lambda>0$ [47]. Con $\lambda=1$ se recupera la recursividad estandar, pero con $\lambda\neq 1$ eso permite dar un peso diferente a la incerteza del estado interno, *i. e.,* a las probabilidades que se juntan (la describen como clasificación refinada). Estos axiomas conducen necesariamente a la entropía (teorema 1 del papel)

$$H^{\mathrm{hc}}_\lambda(p) = \frac{1}{1-2^{1-\lambda}}\left(1-\sum_i p_i^\lambda\right)$$

que nombraron λ-*entropía structural.* De nuevo, relaxando el axioma (iv), se puede reemplazar en el coeficient $2^{1-\lambda}$ por $a^{1-\lambda}, \quad a>0, \quad a\neq 1$. De nuevo, aparece que la entropía de Shannon es un caso particular,

$$H^{\mathrm{hc}}_1(p) \equiv \lim_{\lambda\to 1} H^{\mathrm{hc}}_\lambda(p) = H(p) \quad \text{entropía de Shannon}$$

Por axioma, se conservan las propiedades [P1] (continuidad) y [P6] (expansabilidad) de Shannon en este marco. Se probó también que se conserva la propiedad de concavidad con respecto a los p_i [P8], la de maximalidad [P5] alcanzada para una distribución uniforma (teorema 2). Aun que no aparece así en el papel, satisface la propiedad de Schur-concavidad [P9] (teorema 3). A pesar de que mencionan que H^{hc}_λ sea diferente

[47] En sus papel, lo imponen para cualquier par (p_i,p_j) sin imponer la invarianza por permutación, pero es equivalente a la exposición de este párrafo.

de H^{r}_λ, es sencillo ver que hay un mapa uno-uno entre las dos entropías. Se mencionarán en un marco más general otras propiedades de esta entropía.

Independiente de Havrda & Charvát, de la escuela húgara de teoría de la información, Z. Daróczy en (Daróczy, 1970) definó la entropía H^f a partir de una *función información* f satifaciendo (i) $f(0) = f(1)$, (ii) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ y la ecuación funcional (ii) $f(x) + (1-x) f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y) f\left(\frac{x}{1-y}\right)$ sobre $\{(x,y) \in [0;1)^2, \quad x+y \le 1\}$, siendo $H^f(p) = \sum_{i=2}^n s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right), \quad s_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_j$. Daróczy mostró que si f es medible, o continua en 0, o no negativa y acotada, necesariamente $f(x) = h_2(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$, conduciendo a la entropía de Shannon (teorema 1; ver también (Lee, 1964; Tverberg, 1958; Kendall, 1964)). En otros términos, su axioma (v) es alternativa a la recursividad. Para extender la entropía de Shannon, propuso extender este axioma (v) por la ecuación funcional $f_\lambda(x) + (1-x)^\lambda f_\lambda\left(\frac{y}{1-x}\right) = f_\lambda(y) + (1-y)^\lambda f_\lambda\left(\frac{x}{1-y}\right)$, lo que condujo necesariamente a la entropía (teoremas 2 y 3)

$$H^{\mathrm{d}}_\lambda(p) = \frac{1}{1-2^{1-\lambda}} \left(1 - \sum_i p_i^\lambda\right)$$

es decir nada más que la entropía introducida por Havdra & Charvát. En lo que sigue, se la denotará H^{hcd}_λ. Sin embargo, el estudio de Daróczy fue más intensivo que el de Havdra & Charvát. Primero, notó el mapa entre su entropía y la de Rényi. Adicionalmente a Havdra-Charvát probó que se conserva la propiedad [P2] (invarianza por permutación, que no era un axioma en su enfoque), $H^{\mathrm{hcd}}_\lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$ (lo llama normalización), la expansividad [P6], una aditividad extendida, una recursividad extendida precisamente del modelo de Havrda-Charvát (teorema 4). Probó también [P4], positividad alcanzado en el caso determinista y la maximalidad [P5] en el caso uniforme (teorema 6), que incidentalmente $H^{\mathrm{hcd}}_\lambda\left(\frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}\right)$ crece con el cardinal $|\mathcal{X}| = \alpha$. Muy interesante también es se puede definir una entropía condicional en el mismo modelo que en el caso de Shannon $H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X|Y) = \sum_y \left[p_{X|Y}(x,y)\right]^\lambda H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(p_{X|Y}(\cdot,y))$, que existe una regla de cadena [P14], $H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X,Y) = H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(Y) + H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X|Y)$ y que condicionar reduce la entropía $H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X|Y) \le H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X)$ (teorema 8) [P16]. Mostró también que si se pierde la aditividad, se obiene para X e Y independientes $H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X,Y) = H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X) + H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(Y) + \left(2^{1-\lambda} - 1\right) H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(X) H^{\mathrm{hcd}}_\lambda(Y)$. La propiedades de regla de cadena le permitió revisitar la caracterisación de un canal de transmisión y redefinir una capacidad canal extendidas (capacidad tipo λ; basicamente se usa el mismo enfoque que Shannon, pero usando H^{hcd}_λ en lugar de H, ver sección 6 del papel).

Las entropías tipo Havdra-Charvát-Daróczy fueron (re)descubiertos varias otras veces y/o estudiadas más detenidamente en varios campos y varios extensiones fueron introducidas (Varma, 1966; Onicescu, 1966; Kapur, 1967; Vajda, 1968; Lindhard & Nielsen, 1971; Arimoto, 1971; Burg, 1972; Aczél & Daróczy, 1975; Sharma & Mittal, 1975, 1975; Sharma & Taneja, 1975; Mittal, 1975; Boekee & van der Lubbe, 1980; Ferreri, 1980; Tsallis, 1988; Rathie, 1991; Kaniadakis, 2001; Beck, 2009, entre otros). Un primer enfoque más general es debido a S. Arimoto en los primeros años de la decada 1970 (Arimoto, 1971). Fue rediscubierto y estudiado con más detalles una decada después por J. Burbea y C. R. Rao (Burbea & Rao, 1982) y luego por M. Salicrú (Salicrú, 1987) o M. Teboulle (Teboulle, 1992) entre otros. La medida propuesta, llamada ϕ-*entropía*, es definida por

$$H_\phi(p) = -\sum_i \phi(p_i) \qquad \text{con} \qquad \phi \text{ estrictamente convexa}$$

Burbea y Rao asociaron una medida de divegencia a esta entropía. Las ϕ-entropías contienen Shannon como caso particular ($\phi(x) = x \log x$), así que la clase de Havdra-Charvát-Daróczy ($\phi(x) = \frac{x - x^\lambda}{2^{1-\lambda}-1}$) como mencionado, pero no la clase de Rényi. De hecho, las ϕ-entropías se enmarcan en una clase un poco más amplia, llamada (h, ϕ)-*entropías* (Salicrú, Menéndez, Morales & Pardo, 1993; Menéndez, Morales, Pardo & Salicrú, 1997). Cambiamos acà substancialmente su escritura de la literatura por razones de homogeneidad con la ϕ-entropía (y las divergencias que se introducirán luego) [48]

Definición 2-37 ((h, ϕ)-entropía)**.** *La (h, ϕ)-entropía de una distribución de probabilidad p_X definida sobre $\mathcal{X}$ de cardinal finito $|\mathcal{X}| = \alpha$ es definida por*

$$H_{(h,\phi)}(X) = H_{(h,\phi)}(p_X) = h\left(-\sum_{x \in \mathcal{X}} \phi\left(p_X(x)\right)\right)$$

donde o

- ϕ *es estrictamente convexa y* h *creciente, o*
- ϕ *es estrictamente cóncava y* h *decreciente*

Frecuentemente, se supone adicionalmente que ϕ y h son de clase C^2, que $\phi(0) = 0$ (la incerteza elemental asociada a un estado de probabilidad nula vale cero) y, sin perdida de generalidad, que $h(-\phi(1)) = 0$.

(ver también (Esteban, 1997) para una generalización aun más amplia). Cuándo $h(x) = x$ se recupera la ϕ-entropía, incluyendo la de Shannon y las de Havdra-Charvát-Daróczy. Además, la familia de Rényi cae tambíen en esta familia ($\phi(x) = -x^\lambda$ y $h(x) = \frac{\log x}{1-\lambda}$) así que todas las entropías evocadas en el párrafo anterior.

Como en el caso de Shannon, para $X = (X_1, \ldots, X_d)$, la (h, ϕ)-entropía de X es una (h, ϕ)-entropía conjunta de los X_i.

Obviamente, de las propiedades de la entropía de Shannon, se conservan las propiedades [P1] (continuidad), [P2] (invariaza por permutación), [P3] (invarianza por transformación biyectiva de X), [P6] (expansabilidad, debido a $\phi(0) = 0$).

Además se conserva la Schur-concavidad con una reciproca:

[P$_\phi$9] Schur-convavidad:

$$p \prec q \quad \Longleftrightarrow \quad H_{(h,\phi)}(p) \ge H_{(h,\phi)}(q) \quad \forall\, (h, \phi)$$

En otros términos, se obtiene la relación de mayorisación si se cumple la relación de ordre entrópicas para <u>todos</u> los pares de funciones entrópicas (h, ϕ). La Schur-concavidad (y su reciproca) es consecuencia

[48] En la literatura, no hay el signo $-$, y hay que invertir cóncava y convexa.

de la desigualdad de Schur (Schur, 1923) o Hardy-Littlewood-Pólya (Hardy et al., 1929, 1952) o Karamata (Karamata, 1932) (ver también (Marshall et al., 2011, Cap. 3, Prop. C.1 & Cap. 4, Prop. B.1) o (Bhatia, 1997, Teorema II.3.1)): $p \prec q \;\Rightarrow\; \sum_i \phi(p_i) \le \sum_i \phi(q_i)$ para toda función ϕ convexa, y reciprocamente.

Como consecuencia, se conservan la positividad [P4] gracia a $\phi(0) = 0$ y $h(-\phi(1)) = 0$ (alcanzado en el caso determinista), la maximalidad [P5] (caso uniforme),

$$0 \le H_{(h,\phi)}\left(p_X\right) \le h\left(-\alpha\,\phi\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

así que

$$H_{(h,\phi)}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \cdots & \frac{1}{\alpha}\end{bmatrix}^t\right) \quad \text{función creciente de } \alpha$$

Con respecto a la concavidad [P8], no se conserva en general:

[P$_\phi$8] Si h es cóncava, entonces $H_{(h,\phi)}\left(p\right)$ es cóncava con respecto a p. Eso es una consecuencia de la concavidad de ϕ y decrecencia de h (resp. convexidad/crecencia) conjuntamente a la concavidad de h. La reciproca no es verdad. Por ejemplo, se puede ver que si $\lambda < 1$, la entropía de Rényi es cóncava, pero se proba que existe un $\lambda^*(\alpha) > 1$ tal que para cualquier $\lambda \le \lambda^*(\alpha)$ se conserva la concavidad, a pesar de que h no sea necesariamente cóncava (Bengtsson & Życzkowski, 2006, p. 57).

Se pierde la propiedad de recursividad [P7], pero se puede vincular la entropía total con la obtenida juntando dos estados por una desigualdad:

[P$_\phi$7] Sean X definido sobre $\mathcal{X}$ y $\overline{X}$ sobre $\overline{X}$,

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{X}} = \{x_1, \ldots, x_{\alpha-2}, \bar{x}_{\alpha-1}\} \quad \text{con el estado interno} \quad \bar{x}_{\alpha-1} = \{x_{\alpha-1}, x_\alpha\}, \\ p_{\overline{X}}(x_i) = p_X(x_i), \quad 1 \le i \le \alpha - 1 \quad \text{y} \quad p_{\overline{X}}(\bar{x}_{\alpha-1}) = p_X(x_{\alpha-1}) + p(x_\alpha) \quad \text{distribución sobre } \overline{\mathcal{X}} \\ \bar{q}(x_j) = \dfrac{p_X(x_j)}{p_X(x_{\alpha-1}) + p_X(x_\alpha)}, \quad j = \alpha - 1, \alpha \quad \text{distribución del estado interno} \end{cases}$$

$$H_{(h,\phi)}\left(p_X\right) \ge H_{(h,\phi)}\left(p_{\overline{X}}\right)$$

Esta desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Petrović (Kuczma, 2009, 43, Teorema 8.7.1), $\phi(a+b) \ge \phi(a) + \phi(b)$ para ϕ convexa y que se cancela en 0 (y la conversa en el caso cóncavo), conjuntamente con h creciente (resp. decreciente). Aparte en el caso de Shannon y el de Havdra-Charvát-Daróczy, no hay ningún vínculo explicito general entre $H_{(h,\phi)}\left(p_X\right)$ y $H_{(h,\phi)}\left(p_{\overline{X}}\right)$.

Se conserva la super-aditividad [P12]. De hecho, si ϕ es convexa (resp. cóncava) con $\phi(0) = 0$, $\forall\, 0 \le a \le 1$, $\phi(au) = \phi(au + (1-a)0) \le a\phi(u)$ (resp. desigualdad reversa). Entonces, $\phi\left(p_{X,Y}(x_i, y_j)\right) = \phi\left(p_{X|Y}(x_i, y_j) p_Y(y_j)\right) \le p_{X|Y}(x_i, y_j)\phi\left(p_Y(y_j)\right)$, *i. e.*, $\sum_{i,j} \phi\left(p_{X,Y}(x_i, y_j)\right) \le \sum_{i,j} p_{X|Y}(x_i, y_j)\phi\left(p_Y(y_j)\right) = \sum_i \phi\left(p_Y(y_j)\right)$ (resp. desigualdad reversa). Se cierra la prueba con la crecencia (resp. decrecencia) de h.

Sin embargo, en general, se pierden las propiedades [P10] (aditividad), y [P11] (sub-aditividad). En particular, se conserva solamente en el caso Shannon:

Teorema 2-23. *Sea $p_{X,Y}$ distribución conjunta de variables aleatorias discretas X y Y y p_X y p_Y las de X y de Y (marginales).*

$$H_{(h,\phi)}\left(p_{X,Y}\right) \le H_{(h,\phi)}\left(p_X \otimes p_Y\right) \quad \forall\, p_{X,Y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \phi(x) = x \log x$$

i. e., $H_{(h,\phi)}$ es una función creciente de la entropía de Shannon

Demostración. La reciproca de este teorema es nada más que la propidad [P11] con el hecho de que h es creciente en este caso.

A continuación, la parte directa se demuestra en dos etapas:

- Con un caso particular sobre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ de cardenal 3 cada unos se proba de que la desigualdad no se puede cumplir, salvo si la función entrópica ϕ' satisface a una ecuación funcional.
- la sola solución admisible de esta ecuación se reduce a $\phi(x) = -x \ln x$.

Etapa 1: Sea el vector de probabildad

$$p_{X,Y} = p_X \otimes p_Y - c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad p_X = \begin{bmatrix} a \\ \tilde{a} \\ 1-a-\tilde{a} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad p_Y = \begin{bmatrix} b \\ \tilde{b} \\ 1-b-\tilde{b} \end{bmatrix}$$

donde $(a, \tilde{a}, b, \tilde{b}) \in D_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$,

$$D_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}} = \{a, v, s, t : \quad 0 < a, s < 1 \quad \wedge \quad 0 < v \le 1 - a \quad \wedge \quad 0 < t \le 1 - s\}$$

y $c \in C_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$,

$$C_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}} = \left[-1 + \max\left\{ab, \tilde{a}\tilde{b}, 1 - a\tilde{b}, 1 - \tilde{a}b\right\}, \min\left\{ab, \tilde{a}\tilde{b}, 1 - a\tilde{b}, 1 - \tilde{a}b\right\}\right]$$

Ahora, si ϕ es convexa (resp. cóncava)

$$\forall\, u, v \quad \phi(v) - \phi(u) \ \ge\ (v - u)\, \phi'(u),$$

i. e., la variación (cuerda) es mayor que la derivada en s, como ilustrado figura Fig. 2-29 (desigualdad reversa para ϕ cóncava).

Aplicamos esta desigualdad a $u = p_{X,Y}(x, y)$ y $v = p_X(x) p_Y(y)$ y sumamos en x, y, para $(a, b) \in (0\,,\,1)^2$ (para que $C_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$ no sea reducido a $\{0\}$), y $c \in \mathring{C}_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$ donde $\mathring{\cdot}$ denota el interior de un conjunto, se obtiene para ϕ convexa,

$$H_\phi\left(p_X \otimes p_Y\right) - H_\phi\left(p_{X,Y}\right) \ \le\ c\, g(a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c),$$

(para ϕ cóncava se reemplaza H_ϕ por $-H_{-\phi}$ con la igualdad inversa), donde

$$g(a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c) = \phi'\big(ab + c\big) + \phi'\big(\tilde{a}\tilde{b} + c\big) - \phi'\big(a\tilde{b} - c\big) - \phi'\big(\tilde{a}b - c\big). \tag{4}$$

Supongamos que existe un $(s, \tilde{s}, t, \tilde{t}) \in \mathring{D}_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$ tal que $g(s, \tilde{s}, t, \tilde{t}, 0) \ne 0$. De la continuidad de ϕ', la función g es continua, y entonces existe un vecinaje $V_0 \subset \mathring{C}_{s,\tilde{s},t,\tilde{t}}$ de 0 tal que la función $c \mapsto g(s, \tilde{s}, t, \tilde{t}, c)$ tiene un

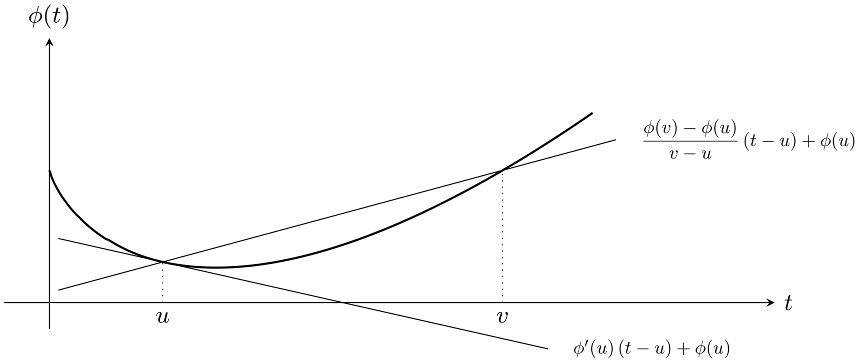


Figura 2-29: ϕ estrictamente convexa: la variación (cuerda) $\frac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}$ es mayor que la derivada $\phi'(u)$. Aplicado a dos distribuciones p y q, de componentes p_i y q_i, con $u = p_i$ y $v = q_i$ y sumando, se obtiene $H_\phi\,(q) - H_\phi\,(p) \geq \sum_i (p_i - q_i)\phi'(p_i)$ con $H_\phi \equiv H_{(\mathrm{id},\phi)}$, id siendo la identidad.

signo constante sobre V_0. Eso permite concluir que $c \mapsto c\, g(s, \tilde{s}, t, \tilde{t}, c)$ no tiene un signo constante sobre V_0, y entonces de concluire que, de la desigualdad dedibo a la concavidad de ϕ (resp. convexidad), $H_\phi\,(p_{X,Y})$ puede ser major (resp. menor) que $H_\phi\,(p_X \otimes p_Y)$, y entonces, con la crecencia (resp. decrecencia) de h que si $g(a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, 0)$ no es identicamente cero sobre $\mathring{D}_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$, $H_{(h,\phi)}$ no puede ser sub-aditiva (distribución conjunta vs producto de las marginales).

Etapa 2. De la etapa 1, se sabe que la sub-aditividad es potencialmente posible solamente si $g(a, v, s, t, 0) = 0$ sobre $\mathring{D}_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$. Eso significa que ϕ' debe necesariamente satisfacer la ecuación funcional

$$\phi'\big(ab\big) + \phi'\big(\tilde{a}\tilde{b}\big) - \phi'\big(a\tilde{b}\big) - \phi'\big(\tilde{a}b\big) = 0,$$

así que no se puede usar el argumento de la etapa 1 para concluir. Sin embargo, se puede solucionar esta ecuación funcional, siguiendo (Daróczy & Járai, 1979, § 6) donde una ecuación funcional muy similar es estudiada. Por eso, se fija $(a, b) \in (0\,,\,1)^2$, se deriva la identidad precediente con respecto a $\tilde{a}$ se multiplica el resultado por $\tilde{a}$ para obtener

$$\tilde{a}\tilde{b}\,\phi''(\tilde{a}\tilde{b}) = \tilde{a}b\,\phi''(\tilde{a}b) \qquad \text{para} \qquad (\tilde{a}, \tilde{b}) \in (0\,,\,1-a) \times (0\,,\,1-b).$$

Eso significa de que $x\,\phi''(x)$ es constante sobre $x \in (0\,,\,(1-a)\max\{s, 1-s\})$, y para cualquier par $(a, s) \in (0\,,\,1)^2$. Entonces, $x\,\phi''(x)$ es constante sobre $x \in (0\,,\,1)$, es decir que ϕ es necesariamente de la forma $\phi(x) = \mu\, x \ln x + \nu x + \vartheta$. Debido a la continuidad de ϕ, queda válido sobre el cerrado $[0\,,\,1]$. De que se aplica a un vector de probabilidad, sumando a uno, se puede reducir el problema a $\nu = 0$ (poniendo ν adentro de $vartheta$ sin cambiar el valor de entropía obtenida). Además, del requisito $\phi(0) = 0$ tenemos $\vartheta = 0$. Para que ϕ sea convexa (resp. cóncava) hace falta tener $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$) así que, sin perdida de generalidad, μ puede ser puesta también en h. Tomar $\phi(x) = x \ln x$ con h creciente o $\phi(x) = -x \ln x$ con h decreciente es completamente equivalente, así que se puede fijar $\phi(x) = x \ln x$ satisfaciendo la ecuación funcional, y h creciente.

En conclusión, $g = 0$ sobre $\mathring{D}_{a,\tilde{a},b,\tilde{b}}$ se reduce a necesitar tener $H_\phi = H$. Esta entropía siendo sub-aditiva (propidad [P11]), cualquiera función creciente de H va obviamente quedar sub-aditiva, lo que cierra la prueba. $\square$

Al revés, a partir de $p_{XY} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^t \otimes \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^t + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^t \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^t$ se obtiene $p_X = p_Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^t$ y entonces (i) $H_{(h,\phi)}\left(p_{XY}\right) = h\left(-2\,\phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $H_{(h,\phi)}\left(p_X \otimes p_Y\right) = h\left(-4\,\phi\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ y $H_{(h,\phi)}\left(p_X\right) + H_{(h,\phi)}\left(p_Y\right) = 2\,h\left(-2\,\phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, así que, en este ejemplo $H_{(h,\phi)}\left(p_{XY}\right) > H_{(h,\phi)}\left(p_X \otimes p_Y\right)$ (consecuencia de la Schur-concavidad) y $H_{(h,\phi)}\left(p_{XY}\right) > H_{(h,\phi)}\left(p_X\right) + H_{(h,\phi)}\left(p_Y\right)$: tampoco las (h,ϕ)-entropía son super-aditivas.

La definición de entropías generalizadas condicionales aparece mucho más problemático. Por ejemplo, si se define a la Shannon, es decir definiendo $H_{(h,\phi)}\left(X|Y\right)$ tomando $\sum_{y\in\mathcal{Y}} p_Y(y) H_{(h,\phi)}\left(p_{X|Y}(\cdot,y)\right)$ se pierde la regla de cadena [P14]. Como se lo ha visto, en el marco de la entropía de Havdra-Charvát-Daróczy se conserva la regla de cadena si se reemplaza p_Y por su potencia p_Y^λ. Sin embargo, generalizar este esquema en el caso general falla (la gracia en Havdra-Charvát-Daróczy viene de la propiedad de morfismo de la exponencial y del logaritmo). Como consecuencia, generalizar la noción se vuelve problemático también. Por ejemple se pierde el diagrama de Venn aparte si se define la entropía condicional a partir de la regla de cadena. Pero en este caso, si la super-aditividad garantiza la positividad de la entropía condicional, se pierde la propiedad [P13] por perdida de la aditividad, y por consecuencia la propiedad de positividad/independencia [P15] de una información mutua construida sobre un modelo diagrama de Venn. Veremos en la sección siguiente que un tercero camino puede ser usar divergencia.

Como en el caso de Shannon, se puede extender la generalización de la entropía al caso de vectores aleatorios discretos sobre de cardenal infinito, con las mismas debilidades que en el caso de Shannon. A continuación, se puede también extenderla a vectores aleatorios admitiendo una densidad de probabilidad, reemplazando la suma por una integración.

Definición 2-38 ((h,ϕ)-entropía diferencial)**.** *Sea X una variable aleatoria continua sobre $\mathbb{R}^d$ y sea $p_X(x)$ la densidad (distribución) de probabilidad de X de soporte $\mathcal{X}$. La (h,ϕ)-entropía diferencial de la variable X es definida por*

$$H_{(h,\phi)}\left(p_X\right) = H_{(h,\phi)}\left(X\right) = h\left(-\int_{\mathcal{X}} \phi\left(p_X(x)\right)\, dx\right)$$

con h y ϕ cumpliendo los requisitos de la definición discreta 2-37 (de $\phi(0)$, se puede escribir la integración sobre $\mathbb{R}^d$).

De nuevo para $X = (X_1, \ldots, X_d)$, la (h,ϕ)-entropía diferencial de X es una (h,ϕ)-entropía diferencial conjunta de los X_i.

La versión diferencial de la (h,ϕ)-entropía comparte obviamente las mismas debilidades del caso particular de Shannon: se pierden la propiedad de invarianza por transformación biyectiva [P3], *i. e.,* independencia con respecto a los estados, la positividad [P4], la de cota superior [P5] (salvo si se pone vínculos, ver más adelante), en adición de las que ya la versión discreta perdió.

Sin embargo, se conservan unas propidedades, y entre otros si h es cóncava, la (h,ϕ)-entropía diferencia es cóncava [P$_\phi$8]. Más sorprendentemente a primer vista, se conserva la (h,ϕ)-entropía diferencial bajo un rearreglo [P'2],

$$H_{(h,\phi)}\left(p_X^{\downarrow}\right) = H_{(h,\phi)}\left(p_X\right)$$

De hecho, como evocado en el caso de Shannon, eso fue probado entre otros en (Lieb & Loss, 2001) o (Wang & Madiman, 2004, Lema 7.2) [49].

Se probó en (Chong, 1974) o (Wang & Madiman, 2004, Prop. 7.3) que se conserva la Schur-concavidad [P9] para las ϕ-entropías. Entonces, de h creciente (para ϕ cóncava desigualdad reversa para la integral, pero h es decreciente), se generaliza a las (h,ϕ)-entropías,*i. e.,*

$$p \prec q \quad \Rightarrow \quad H_{(h,\phi)}\left(p\right) \geq H_{(h,\phi)}\left(q\right) \quad \forall\,(h,\phi)$$

Quide de la reciproca? Quid sub-aditividad ssi fct creciente de Shannon?

2.6.2 Divergencias y propiedades

En esta sub-sección vamos a ver que la literatura trató casi conjuntamente de tres enfoques dando lugar a generalizaciones de la divergencia de Kullback-Leibler. Lamentablemente, ninguna generalización contiene las otras, a pesar de que divergencias conocidas pueden partenecer a dos clases distinctas. Practicamente, cada clase tiene sus ventajas y justificación en termino de aplicaciones.

2.6.2.1. Clase de Jensen

Como se lo ha visto tratando de la entropía relativa, la divergencia de Kullback-Leibler no define una distancia entre distribuciones de probabilidades, siendo no simétrica entre otros. Un primer paso para recuperar la simetría sin perder la positividad de esta medida informacional fue simetrizarla, definiendo lo que es conocido como J*-divergencia* (Kullback & Leibler, 1951; Kullback, 1968; Lin, 1991) [50],

$$D_J(q\|p) = D_{\mathrm{kl}}\left(p\|\,q\right) + D_{\mathrm{kl}}\left(q\|\,p\right)$$

Esta versión simetrizada de la divergencia queda naturalmente positiva, pero sufre todavía de unas debilidades de D_{kl}. Esta bien definida siempre que el soporte de p es incluido en lo de q y vice-versa. Además, no cumple tampoco la desigualdad triangular. A pesar de sus debilidades, se usó bastante en problemas de discriminación, debido a su positividad con igualdad si y solamente si $p = q$ (propiedad herida del hecho de que la suma de términos positivos es nula si y solamente si cada uno vale cero).

---

[49] Recuerdense que en (Lieb & Loss, 2001, Sec. 3.3) lo muestran para ϕ diferencia de dos funciones monótonas, siendo una función convexa un caso particular.

[50] Esta expresión apareció en (Jeffrey, 1946, Ec. (1)) o en (Jeffrey, 1948), antes de la introduccíon de la divergencia de Kullback-Leibler en el campo de la estimación Bayesiana, Jeffrey siendo citado por Kullback y Leibler.

Unas decadas después, Lin introdujo lo que llamó K-divergencia directada, $K(p,q) = D_{\mathrm{kl}}\left(p \| \frac{p+q}{2}\right)$, su versión simetrizada, antes de generalizarla bajo la terminologia de *divergencia de Jensen* (Lin, 1991) [51].

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)}) &= \pi_1 D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(1)} \middle\| \pi_1 p_{(1)} + \pi_2 p_{(2)}\right) + \pi_2 D_{\mathrm{kl}}\left(p_{(2)} \middle\| \pi_1 p_{(1)} + \pi_2 p_{(2)}\right) \\ &= H(\pi_1 p_{(1)} + \pi_2 p_{(2)}) - \pi_1 H(p_{(1)}) - \pi_2 H(p_{(2)}) \qquad \pi = [\pi_1 \quad \pi_2], \quad 0 \le \pi_1 = 1 - \pi_2 \le 1 \end{aligned}$$

D_{js}^{π} heride obviamente de D_{kl} su positividad con igualdad si y solamente si $p_{(1)} = p_{(2)}$. La misma propiedad puede ser vista a través de la desigualdad de Jensen, dando este nombre a la medida. Además, se quita el problema de definición, siendo de que el soporte de $\pi_1 p_{(1)} + \pi_2 p_{(2)}$ siempre contiene el de $p_{(1)}$ y el de $p_{(2)}$. No es simétrica en general, pero se obtiene esta propiedad cuando $\pi = \pi_{\mathrm{u}} \equiv [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]^t$. Además, en este caso, a pesar de que la divergencia no cumpla la desigualdad triangular, aparece que $\left(J_{\mathrm{js}}^{\pi_{\mathrm{u}}}(p_{(1)}, p_{(2)})\right)^s, \quad 0 < s \le \frac{1}{2}$ es una metrica (Osán, Bussandri & Lamberti, 2018) o (Endres & Schindelin, 2003; Österreicher & Vajda, 2003; Kafka, Österreicher & Vincze, 1991, para $s = \frac{1}{2}$). Si puede parecer más lógico definir tal divergencia con a priori/proporciones π_i iguales, de hecho la versión no simétrica, con pesos π_i se vuelve natural en el marco de la discriminación donde apareció implicitamente esta cantidad. En particular, cuando estamos frente a dos hypotesis $i = 1, 2$ o clases, a las cuales la distribución de las observaciones es $p_{(i)}$, con probabilidad a priori π_i. A partir de observaciones x hay que elegir si eran sorteando de $p_{(1)}$ o $p_{(2)}$ (distribuciones de sampleos, *i. e.,* condicionalmente a la hypotesis). El enfoque Bayesiano más natural consiste maximizar la probabilidad a posteriori (probabilidad de estar en hypotesis i condicionalmente a la observación), y se prueba que la probabilidad de error es dada por $P_e = \sum_x \min(\pi_1 p_{(1)}(x)\,,\, \pi_2 p_{(2)}(x))$ (o con una integral en el caso continuo) (Kay, 1993). Probó Lin de que

$$\frac{1}{4}\left(H_2(\pi) - D_{\mathrm{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)})\right)^2 \le P_e \le \frac{1}{2}\left(H_2(\pi) - D_{\mathrm{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)})\right)$$

con el logaritmo de base 2 en la definición de D_{js}^{π}, lo que da naturalmente un rol operacional a esta divergencia. Incidentalmente, de esta desigualdad es inmediato ver de que $D_{\mathrm{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)}) \le H_2(\pi) - 2P_e$. P_e siendo positivo, da

$$0 \le D_{\mathrm{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)}) \le H(\pi) \le \log(2)$$

(cota igual a 1 usando el logaritmo de base 2). D_{js}^{π} es dicha *normalizada*.

Un otro vínculo natural entre la divergencia de Jensen-Shannon y las medidas informacionales a la Shannon viene todavía del campo de la clasificación. Si unos datos pueden provenir de una distribución $p_{(i)}$, $i = 1, 2$, con una probabilidad π_i, la variable aleatoria X dada por los datos tiene la distribución de mezcla $p = \sum_i \pi_i p_{(i)}$ como ilustrado figura Fig. 2-12-(b). Sea Z la variable aleatoria binaria sobre $\{1, 2\}$ tal que $\Pr[Z = i] = \pi_i$, variable de selección entre las distribuciones $p_{(i)}$ (ej. la moneda de la figura). Por definición de la entropía condicional, $H(X|Z) = \sum_i \pi_i H(X|Z = i) = \sum_i \pi_i H(p_{(i)})$. De $D_{\mathrm{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)}) = H(p) - \sum_i \pi_i H(p_{(i)})$ viene

[51] De hecho, apareció implicitamente en varios trabajos anteriores, por ejemplo en mecanica cuántica (Holevo, 1973, 2011) o en reconocimiento de patrones (Wong & You, 1985)

$D_{\text{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)}) = H(X) - H(X|Z)$, es decir

$$D_{\text{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)}) = I(X; Z)$$

La divergencia de Jensen-Shannon mide la información mutua entre la observación X y la variable de selección Z, justificando aun más su uso natural en problemas de clasificación o selección de modelos. Incidentalmente, de $I(X; Z) = H(Z) - H(Z|X) \leq H(Z) \leq \log(2)$ (Z siendo discreta) se recupera las cotas mayor de D_{js}^{π}.

Se encuentran otras desigualdades implicando D_{js}^{π} y D_J o D_{js}^{π} y la distancia L^1 entre distribuciones o divergencia de variación total en (Lin, 1991).

Más allá, en el campo de la clasificación, se puedre tratar de más de dos clases, dando lugar a la generalización de la divergencia de Jensen-Shannon a n distribucionese probabilidad y π un n-componentes vector de probabilidad,

$$D_{\text{js}}^{\pi}(p_{(1)}, \ldots, p_{(n)}) = H\left(\sum_i \pi_i p_{(i)}\right) - \sum_i \pi_i H(p_{(i)})$$

De la desigualdad de Jensen, esta cantitad queda positiva con igualdad si y solamente si todos los $p_{(i)}$ son iguales. Se conserva una cota superior

$$D_{\text{js}}^{\pi}(p_{(1)}, \ldots, p_{(n)}) \leq H(\pi) \leq \log(n)$$

así que $D_{\text{js}}^{\pi}(p_{(1)}, p_{(2)}) = I(X; Z)$ con X de distribución la mezcla $\sum_i \pi_i p_{(i)}$ y Z definida sobre $\{1, \ldots, n\}$ variable de selección de distribución π.

convexidad?

Un punto clave que dio lugar a la definición de la divergencia de Jensen-Shannon es la concavidad de la entropía de Shannon. Naturalmente, el mismo enfoque se generaliza a cualquier entropía cóncava de un vector de probabilidad. Tal generalización fue propuesta de maner formal por Burbea-Rao e (Burbea & Rao, 1982), y luego generalizado y estudiado más detenidamente por Nielsen et al. (Nielsen & Boltz, 2011; Nielsen & Nock, 2017). A pesar que que apareció ya en el papel de Burbea & Rao, Nielsen llamó tal generalización “divergencia de Burbea-Rao asimetrizada”. Más formalemente, se puede definir una divergencia de Jensen de la manera siguiente:

Definición 2-39 (Divergencias de Jensen)**.** *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ *convexa y de clase* C^1 *sobre* Ω*, un cerrado convexo de* $\mathbb{R}^d$ *y* $\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix}^t$ *con* $0 \leq \pi_1 = 1 - \pi_2 \leq 1$*. Las divergencias de Jensen entre dos puntos* $u_1, u_2 \in \Omega$ *son definidas por*

$$J_f^{\pi}(u_1, u_2) = \pi_1 f(u_1) + \pi_2 f(u_2) - f(\pi_1 u_1 + \pi_2 u_2)$$

Se ilustra a que corresponde esta cantidad con respecto a f *en la figura Fig. 2-30 más adelante.*

Esta definición se generalizada a densidad de probabilidad, donde f es a valor reales, actuando sobre el convexo de las densidades de probabilidades (Nielsen & Boltz, 2011; Nielsen & Nock, 2017).

Para (h,ϕ)-entropías cóncavas (ej. con h cóncava), siendo $-H_{(h,\phi)}$ convexa, se puede entonces asociar una divergencia de Jensen

$$D^{\mathrm{j},\pi}_{(h,\phi)}\left(p_{(1)},p_{(2)}\right) \equiv J^{\pi}_{-H_{(h,\phi)}}(p_{(1)},p_{(2)}) = H_{(h,\phi)}\left(\pi_1 p_{(1)} + \pi_2 p_{(2)}\right) - \pi_1 H_{(h,\phi)}\left(p_{(1)}\right) - \pi_2 H_{(h,\phi)}\left(p_{(2)}\right)$$

Cuando $h \equiv \mathrm{id}$, se notará $D^{\mathrm{j},\pi}_{\phi}$.

La definición se generaliza a cualquier conjunto $\{p_{(i)}\}_{i=1}^{n}$ de distribuciones de probabilidades y π vector de probabilidad n-dimensional,

$$D^{\mathrm{j},\pi}_{(h,\phi)}(\{p_{(i)}\}) = H_{(h,\phi)}\left(\sum_i \pi_i p_{(i)}\right) - \sum_i \pi_i H_{(h,\phi)}\left(p_{(i)}\right)$$

Por analogía a la información mutua, Burbea y Rao llamarón esta medida "información mutua generalizada". Eso viene de que si se define una información condicional en el mismo esquema que el de Shannon, *i. e.,* $H_{(h,\phi)}(X|Y) = \sum_y p_Y(y) H_{(h,\phi)}\left(p_{X|Y}(\cdot,y)\right)$, entonces, con $\pi \equiv p_Y$ y $\{p_{(i)}\}_i \equiv \{p_{X|Y}(\cdot,y)\}_y$ aparece de que $D^{\mathrm{j},p_Y}_{(h,\phi)}(\{p_{X|Y}(\cdot,y)\}_y) = H_{(h,\phi)}(X) - H_{(h,\phi)}(X|Y)$. Esta expresión es parecida a una de las formas de la información mutua de Shannon, justificando la terminilogía de Burbea-Rao. Sin embargo, hay que tener conciencia de que no todo se translata obviamente del mundo Shannon al mundo generalizado. Por ejemplo, con tal definicón de la entropía condicional, se pierde la regla de cadena, y por consecuencia la simetría de tal información mutua generalizada o la forma usando la entropía conjunta y las marginales.

Se notará de que Nielsen propusó generalizaciones mas avanzadas, usando generalizaciones de la noción de convexidad. Estas generalizaciones van más allá de la meta del capítulo y el lector so puede referir a (Nielsen & Nock, 2017).

Las divergencias de Jensen tiene las propiedades siguientes

1. Positividad:

   $$J_f(p,q) \geq 0 \quad \text{con igualdad si y solamente si} \quad p = q$$

   Esta propiedad es la consecuencia directa de la convexidad estricta de f, como ilustrado figura Fig. 2-30.

2. Pensando a J_f con respecto a f, es lineal en el sentido de que $J_{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2} = \mu_1 J_{f_1} + \mu_2 J_{f_2}$ (con f_i convexas y $\mu_i \geq 0$).

Desgraciamente, las divergencias de Jensen no cumplen la desigualdad triangular en general, y entonces no son métricas entre distribuciones de probabilidad.

Se refierá a (Burbea & Rao, 1982; Nielsen & Boltz, 2011; Nielsen & Nock, 2017) para tener más propiedades.

Se notará que la clase de las divergencias de Jensen contiene el cuadrado de la distancia de Mahalanobis (por un factor), *i. e.,* con $f(u) = u^t Q u$ con $Q > 0$ se obtiene $J_f(u,v) = \pi_1\pi_2 (v-u)^t Q (v-u)$ (siendo la distancia L^2 un caso particular). Se generaliza al caso continuo y distancias L^2 con un nucleo.

2.6.2.2. Clase de Bregman

Estas divergencias fueron intoducidos en el campo de la programación lineal convexa, para resolver problemas de minimización convexa [52] (Bregman, 1967), pero con aplicaciones en varios campos (Basseville, 1989, 2013, y ref.):

Definición 2-40 (Divergencias de Bregman)**.** *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ *convexa y de clase* C^1 *sobre* Ω*, un cerrado convexo de* $\mathbb{R}^d$*. Las divergencias de Bregman de un punto* $v \in \Omega$ *relativamente a un punto* $u \in \Omega$ *son definidas por*

$$B_f(v\|u) = f(v) - f(u) - (v-u)^t \nabla f(u)$$

Dicho de otra manera, B_f *corresponde al desarollo de Taylor al orden 1 de* f *en la referencia* u*. Se ilustra a que corresponde esta cantidad con respecto a* f *en la figura Fig. 2-30 más adelante.*

Esta definición fue generalizada a funciones actuando sobre espacios más generales (ej. actuando sobre matrices o operadores en espacios de Hilbert de dimensión infinita) (Petz, 2007). En lo que nos concierna en este capitulo, tratando posiblemente de densidad de probabilidades, nos interesa a funciones de funciones (Frigyik, Srivastava & Gupta, 2008; Nielsen & Nock, 2017):

Definición 2-41 (Divergencias de Bregman funcional)**.** *Sea* $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *convexa y de clase* C^1 *sobre* Ω*, un cerrado convexo de un espacio de Banach. Las divergencias de Bregman de un "punto" (una función)* $v \in \Omega$ *relativamente a un "punto"* $u \in \Omega$ *son definidas por*

$$B_f(v\|u) = f(v) - f(u) - \lim_{t\to 0} \frac{f(u+t(v-u)) - f(u)}{t}$$

El último término de esta formula es connocida como derivada de Gâteau (o derivada direccional) de f *en* u *en la dirección* $v-u$ *(siendo* u *una función)* [53]*.*

En el caso de que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ se recupera sencillamente la definición original.

Para (h,ϕ)-entropías discretas <u>cóncavas</u> (ej. con h cóncava), se puede entonces asociar una divergencia de Bregman

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{b}}_{(h,\phi)}(q\|p) \equiv B_{-H_{(h,\phi)}}(q\|p) &= H_{(h,\phi)}(p) - H_{(h,\phi)}(q) - (p-q)^t \nabla H_{(h,\phi)}(p) \\ &= H_{(h,\phi)}(p) - H_{(h,\phi)}(q) - h'\big(H_\phi(p)\big)(q-p)^t \phi'(p) \end{aligned}$$

Cuando $h \equiv \mathrm{id}$, se notará D^{b}_ϕ y es equivalente a salir de la definición inicial con $\Omega = [0\,;\,1]$, u y $v = q(y_i)$ i-esima componente de p y q respectivamente, y sumar la divergencia obtenida sobre i.

---

[52] Aún que aparece en una revista de matemática y física matemática, una gracia del papel de Bregman es que toma el ejemplo de maximización de la entropía de Shannon sujeto a momentos. . .

[53] De hecho, en la extensiíon de Frigyik et al. (Frigyik et al., 2008), se usa la derivada de Féchet, que es más general. Viene de un límite identica independientemente de la dirección. Entonces, si una función tiene una derivada de Fréchet, tiene necesariamente derivadas de Gâteau, pero no es reciproca. Esta subtileza va más allá de la meta de esta sección.

En el caso continuo, para las (h,ϕ)-entropías, se obtiene

$$D^{\mathrm{b}}_{(h,\phi)}\left(q\|\,p\right) = H_{(h,\phi)}\left(p\right) - H_{(h,\phi)}\left(q\right) - h'\big(H_\phi\left(p\right)\big)\int_{\mathcal{X}}(q(x)-p(x))\phi'(p(x))\,dx$$

De nuevo, cuando $h\equiv\mathrm{id}$, se notará D^{b}_ϕ y es equivalente a salir de la definición inicial $u=p(x),\;\; v=q(x)$ y sumar la divergencia obtenida sobre $\mathcal{X}$.

Aparece de que las divergencias de Jensen se escriben como combinaciones convexas de divergencias de Bregman,

$$J^\pi_f(p_{(1)},p_{(2)}) = \pi_1 B_f(p_{(1)}\|\pi_1 p_{(1)}+\pi_2 p_{(2)}) + \pi_2\mathcal{B}_f(p_{(1)}\|\pi_1 p_{(1)}+\pi_2 p_{(2)})$$

y vice-versa las divergencias de Bregman se escriben como limites de divergencias de Jensen,

$$B_f(p_{(2)}\|p_{(1)}) = \lim_{\pi_2\to 0}\frac{J^\pi_f(p_{(1)},p_{(2)})}{\pi_1\pi_2}$$

(Zhang, 2004; Nielsen & Boltz, 2011; Nielsen & Nock, 2017).

La figura Fig. 2-30 ilustra a que corresponden D_f y J_f con respecto a la función convexa f.

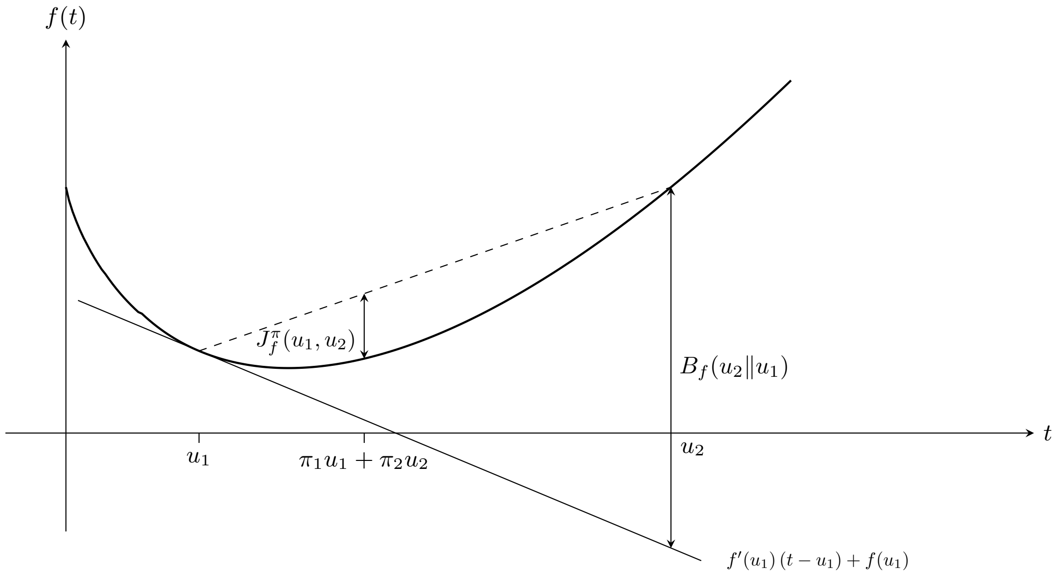


Figura 2-30: f estrictamente convexa. Las cantidad positiva marcada por la dupla-flecha representan respectivamente la divergencia de f-Jensen $J^\pi_f(u_1,u_2)$, diferencia entre la combinaci¨on convexa de los $f(u_i)$ y f de la combinación convexa de los u_i, y la divergencia de Bregman $B_f(u_2\|u_1)$ diferencia entre el valor en u_2 (punto de evaluación) y la tangente en u_1 (punto referencia). Para J^π_f, se toma como referencia $\pi_1 u_1+\pi_2 u_2$, se calcula D_f en los u_i y se toma la combinación convexa.

La divergencia de Bregman tiene las propiedades siguientes

1. Positividad:

$$B_f(q\|p)\geq 0 \quad \text{con igualdad si y solamente si} \quad p=q$$

Esta propiedad es la consecuencia directa de la convexidad estricta de f, como ilustrado figura Fig. 2-30.

2. $B_f(q\|p)$ es convexa con respecto a q, pero no necesariamente con respecto a p. Es también consecuencia directa de la convexidad de f.

3. Pensando a B_f con respecto a f, es lineal en el sentido de que $B_{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2} = \mu_1 B_{f_1} + \mu_2 B_{f_2}$ (con f_i convexas y $\mu_i \geq 0$).

Ver (Frigyik et al., 2008; Nielsen & Boltz, 2011; Nielsen & Nock, 2017) para tener más propiedades.

Se notará que la clase de las divergencias de Bregman contiene el cuadrado de la distancia de Mahalanobis con $f(u) = u^t Q u$ con $Q > 0$ (siendo la distancia L^2 un caso particular), el cuadrado de la distancia L^1 con $f(u) = \left(\sum_i u_i \right)^2$, la distancia de Itakura-Saito cuando $f(u) = -\log u$ (asociado a la entropía de Burg), entre otros. Unas se exteinden sencillamente al caso continuo (Frigyik et al., 2008).

Como en el caso de divergencias de Jensen, Nielsen propusó generalizaciones más avanzadas, usando las generalizaciones de la noción de convexidad usada para generalizar las divergencias de Jensen. Estas generalizaciones también van más allá de la meta del capítulo y el lector so puede referir a (Nielsen & Nock, 2017).

También, varias aplicaciones se encuentran en la literatura (Basseville, 1989; Csiszár, 1995; Csiszàr & Matúš, 2012; Basseville, 2013, y ref.) en adición de las referencias de esta sección, para dar unas.

2.6.2.3. Clase de Csiszár o Ali-Silvey

Un primer paso generalizando la noción de entropía relativa o divergencia, siguiendo el enfoque de Kullback y Leibler y sus versiones tipo J-divergencia o divergencia de Jensen-Shannon fue debido a Rényi. En su papel (Rényi, 1961), A. Rényi introdujo una noción de ganancia o perdida de información de una distribuciíon (incompleta) de probabilidad q relativa a una referencia p, $I^{\mathrm{r}}(q\|p)$, teniendo un enfoque axiomático similar al que uso para definir su entropía: (i) la medida sea invariante a una misma permutación de los componentes de p y de q, (ii) si $\forall\, i,\; p_i \leq q_i$ entonces $I^{\mathrm{r}}(q\|p) \geq 0$ y vice versa $I(p\|q) \leq 0$, (iii) $I([1]\|[1/2]) = 1$, (iv) $I(q_{(1)} \otimes q_{(2)} \| p_{(1)} \otimes p_{(2)}) = I(q_{(1)}\|p_{(1)}) + I(q_{(2)}\|p_{(2)})$ y (v) una propiedad de media generalizada $I(q_{(1)} \cup q_{(2)} \| p_{(1)} \cup p_{(2)}) = g^{-1}\left(\frac{w_{q_1} I^{\mathrm{r}}(q_{(1)}\|p_{(1)}) + w_{q_2} I^{\mathrm{r}}(q_{(2)}\|p_{(2)})}{w_{q_1} + w_{q_2}} \right)$ conduciendo a

$$I^{\mathrm{r}}_{\lambda}(q\|p) = \frac{1}{\lambda - 1} \log_2 \left(\sum_i p_i \left(\frac{q_i}{p_i} \right)^{\lambda} \right)$$

Unos años después, se introdujo una clase más general debido a I. Csiszár (Csiszár, 1963; Csiszàr, 1967; Csiszár & Shields, 2004), T. Morimoto (Morimoto, 1963) o S. M. Ali & S. D. Silvey (Ali & Silvey, 1966), clase que llamaremos *ϕ-divergencias de Csiszàr*. En el caso continuo toma la forma

$$D^{\mathrm{c}}_{\phi}\left(q \| \, p \right) = \int_{\mathcal{X}} p(x) \phi \left(\frac{q(x)}{p(x)} \right) \, dx$$

donde ϕ es una función convexa y donde el soporte $\mathcal{X}$ de p incluye lo de q, y en el caso discreto una suma reemplaza la integral. Estas divergencias o casos particulares fueron muy estudiadas las decadas que siguieron, dando también lugar a varias aplicaciones (Gupta & Sharma, 1976; Burbea & Rao, 1982; Cressie & Read, 1984; Ben-Tal, Charnes & Teboulle, 1989; Teboulle, 1992; Ben-Tal, Bornwein & Teboulle, 1992; Salicrú et al., 1993; Salicrú, 1994; Csiszár, 1995; Cressie & Pardo, 2000; Liese & Vajda, 2006).

Como para el caso de las ϕ-entropías, esta clase se enmarca dentro de una clase un poco más general (Ali & Silvey, 1966, Secs. 4.5 & 5) (ver también (Orsak & Paris, 1995, Sec. I)):

Definición 2-42 ((h,ϕ)-divergencia)**.** *La (h,ϕ)-divergencia de una distribución de probabilidad q con respeto a una distribución p de soporte $\mathcal{X}$ incluyendo el soporte de q es definida por*

$$D^{\mathrm{c}}_{(h,\phi)}\left(q\|\, p\right) = h\left(\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\phi\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right)\right)$$

en el caso discreto, y

$$D^{\mathrm{c}}_{(h,\phi)}\left(q\|\, p\right) = h\left(\int_{\mathcal{X}} p(x)\phi\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right)dx\right)$$

en su versión diferencial [54]*, donde o*

- *ϕ es estrictamente convexa y h creciente, o*
- *ϕ es estrictamente cóncava y h decreciente*

Frecuentemente, se supone adicionalmente que ϕ y h son de clase C^2 y sin perdida de generalidad, que $h(\phi(1)) = 0$.

Se notará de que, obviamente, $D^{\mathrm{c}}_{\phi} = D^{\mathrm{c}}_{(\mathrm{id},\phi)}$.

Notablemente, cuando $\phi(u) = u\log u$ y $h = \mathrm{id}$ se recupera de nuevo la divergencia de Kullback-Leibler: esta última partenece simultaneamente a la clase de Csiszàr y a la de Bregman y es la sola en este caso (Csiszàr, 1991). Cuando $\phi(u) = \pi_2 u\log u - (\pi_1+\pi_2 u)\log(\pi_1+\pi_2 u)$ y $h = \mathrm{id}$ se recupera la divergencia de Jensen-Shannon **sola de la clase de Jensen en este caso?**. Además de D_{kl}, la clase de Csiszár contiene la ganancia de información de Rényi para $\phi(u) = u^\lambda$ y $h(u) = \frac{\log u}{\lambda-1}$ apareciendo tambien en una forma muy parecida en (Hellinger, 1909; Chernoff, 1952; Cressie & Read, 1984; Liese & Vajda, 2006) y conocida como divergencia de Chernoff o de Hellinger. Contiene varias otra como la J-divergencia para $\phi(u) = u\log u - \log u$ y $h = \mathrm{id}$, la distancia de Bhattacharyya (Bhattacharyya, 1943, 1946) $-\log\int\sqrt{pq}$ para $\phi(u) = \sqrt{u}$ y $h(u) = -\log u$, instancia particular de la de Rényi ($\lambda = \frac{1}{2}$), la divergencia de variación total (o L^1 distancia) para $\phi(u) = |u-1|$ y $h = \mathrm{id}$, la divergencia de Pearson o divergencia χ^2 para $\phi(u) = (u-1)^2$ o u^2-1 y $h = \mathrm{id}$, para mencionar una.

Las divergencias de Csiszár tienen las propiedades siguientes

1. Positividad:

$$D^{\mathrm{c}}_{(h,\phi)}\left(q\|\, p\right) \geq 0 \quad \text{con igualdad si y solamente si} \quad p = q$$

   Esta propiedad es la consecuencia directa de la convexidad estricta de ϕ conjuntamente a $h(\phi(1)) = 0$. De hecho, de la desigualdad de Jensen con X de distribución p tenemos en el caso ϕ convexa y h

[54] En general, por convención, $0\,\phi\left(\frac{0}{0}\right) = 0$. Además, se requiere de que $0\,\phi\left(\frac{a}{0}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\,\phi\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = a\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u}$.

creciente $D^{c}_{(h,\phi)}\left(q\| p\right) = h\left(\mathrm{E}\left[\phi\left(\frac{q(X)}{p(X)}\right)\right]\right) \geq h\left(\phi\left(\mathrm{E}\left[\frac{q(X)}{p(X)}\right]\right)\right) = h(\phi(1))$ (y similarmente en el caso ϕ cóncava y h decreciente). Fijense de que la positividad no es en contradicción con el enfoque de Rényi en su caso, porque coniderό el caso discreto finito con probabilidades incompletas, *i. e.,* su axioma (ii) se cumpla potencialemente solamente para los vectores de probabilidades incompletos.

2. $D^{c}_{(h,\phi)}$ satisface un teorema de procesamiento de datos (o secunda ley de la termodinámica) en el sentido de que si dos distribuciones son consecuencias de la misma probabilidad de transición (condicional) $p_{(n+1)|(n)} = q_{(n+1)|(n)}$, entonces

$$D^{c}_{(h,\phi)}\left(q_{(n+1)}\middle\| p_{(n+1)}\right) \leq D^{c}_{(h,\phi)}\left(q_{(n)}\middle\| p_{(n)}\right)$$

Probar

3. $D^{c}_{(h,\phi)}$ es convexa con respecto al par (p,q), pero no necesariamente con respecto a p solamente y/o q. En el caso ϕ convexa, es consecuencia directa de la convexidad [55] (resp. cóncavidad) de $(u,v)\mapsto u\phi\left(\frac{v}{u}\right)$ sobre $\mathbb{R}^2_+$ conjuntamente a la crecencia (resp. decrecencia) de h.

4. Pensando a D^{c}_{ϕ} con respecto a ϕ, es lineal en el sentido de que $D^{c}_{\mu_1\phi_1+\mu_2\phi_2} = \mu_1 D^{c}_{\phi_1} + \mu_2 D^{c}_{\phi_2}$ (con ϕ_i convexas y $\mu_i \geq 0$).

5. Sea $\phi^*(u) = u\phi\left(\frac{1}{u}\right)$. Es sencillo ver de que si ϕ es convexa (resp. cóncava), ϕ^* es también convexa (resp. cóncava). ϕ^* es llamada **-conjugada convexa (resp. cóncava)* de ϕ. Luego,

$$D^{c}_{(h,\phi)}\left(q\| p\right) = D^{c}_{(h,\phi^*)}\left(p\| q\right)$$

6. $D^{c}_{(h,\phi)}$ es simétrica si y solamente si $\phi = \phi^* + c(\mathrm{id}-1)$; sin perdida de generalidad, consideramos $c = 0$. Sin embargo, en el caso general, se puede definir una versión simetrizada al imagen de la J-divergencia, considerando $D^{c}_{(h,\phi)} + D^{c}_{(h,\phi^*)}$. En particular, cuando $h = \mathrm{id}$, tenemos

$$D^{c}_{\phi}\left(q\| p\right) + D^{c}_{\phi^*}\left(q\| p\right) = D^{c}_{\phi+\phi^*}\left(q\| p\right)$$

que es simétrica ($(\phi^*)^* = \phi$).

7. Cota superior:

$$D^{c}_{(h,\phi)}\left(q\| p\right) \leq h\left(\phi(0) + \phi^*(0)\right)$$

posiblemente infinita [56].

---

[55] Con la hipotesis de que ϕ sea de clase C^2, es sencillo ver de que la Hessiana de la función $(u,v)\mapsto u\phi\left(\frac{v}{u}\right)$ con respeto a (u,v) es no negativa, implicando la convexidad de esta función bi-variada (Cambini & Martein, 2009).

[56] Por ejemplo, para la divergencia de Kullback-Leibler, $\phi(u) = u\log u$, dando $\phi^*(u) = -\frac{\log u}{u}$, tales que $\phi(0) = 0$ y $\phi^*(0) = +\infty$: no es acotada por arriba.

Estas propiedades con varias otras se encuentran por ejemplo en (Vajda, 1972; Csiszár, 1974; ?, ?; Kafka et al., 1991; Österreicher, 1996; Österreicher & Vajda, 2003; Vajda, 2009; Kumar & Chhina, 2005; Liese & Vajda, 2006). Como en el caso de las divegencias de Jensen, en general las divergencias simétricas ($\phi = \phi^*$) no satisfacen en general a la desigualdad triangular, y entonces no dan lugar a una distancia entre distribuciones de probabilidad, aparte en casos particulares (ej. divergencia de la variación total, divergencia de Hellinger o Rényi con $\lambda = \frac{1}{2}$). Sin embargo, se probó en (Kafka et al., 1991, Teoremas 1 & 2, Remark 6) y (Österreicher, 1996; Österreicher & Vajda, 2003; Vajda, 2009) el lema siguiente, condición suficiente para que una potencia de la divergencia satisfaga a la desigualdad triangular:

Lema 2-5. *Sea ϕ una función convexa tal que $\phi^* = \phi$, $\phi(0) \neq 0$ y D^{c}_{ϕ} su divergencia de Csiszár asociada ($h = \mathrm{id}$). Adicionalmente de supone de que $\phi(1) = 0$ (ver definición Def. 2-42) y de que ϕ es estrictamente convexa en 1. Si existe $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ tal que*

$$h(u) = \frac{(1-u^\kappa)^{\frac{1}{\kappa}}}{\phi(u)}, \quad u \in [0\,,\,1) \quad \textit{es no decreciente}$$

entonces

$$\left(D^{\mathrm{c}}_{\phi}\left(\cdot\|\cdot\right)\right)^s \quad s \in (0\,,\,\kappa] \quad \textit{satisface la desigualdad triangular}$$

y entonces es una métrica entre dos discribuciones de probabilidades.

Además, en (Kafka et al., 1991, Sec. 3) se dan condiciones necesarias que debe cumplir κ cuando ϕ tiene un comportamiento particular en $u \to 0$ y/o $u \to 0$; eso va más allá de la meta de esta sección y el lector se podrá referir a (Kafka et al., 1991; Österreicher, 1996; Österreicher & Vajda, 2003) para tener más detalles.

Este lema se usó para probar el caracter métrico de $\left(J_{\mathrm{js}}^{\pi_{\mathrm{u}}}(p_{(1)}, p_{(2)})\right)^s, \quad 0 < s \leq \frac{1}{2}$ (Österreicher & Vajda, 2003; Osán et al., 2018, y ref.), siendo J_{js} una divergencia de Csiszár particular. Se usó también para probar de que $\left(D^{\mathrm{c}}_{\phi}\right)^s$ con $\phi(u) = \frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\left(1+u^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} - 2^{\frac{1}{\lambda}-1}(1+u)\right)$ y $\kappa = \min\left(\lambda\,,\,\frac{1}{2}\right)$ es una métrica (Österreicher & Vajda, 2003).

Para cerrar esta sección, se mencionará de que varias aplicaciones se encuentran en la literatura que sea en estimación, discriminación, reconocimiento de patrones, pruebas de adecuación o inferencia estadística, entre otros (Kailath, 1967; Boekee & van der Lubbe, 1979; Poor, 1988; Basseville, 1989; Csiszár, 1995; Orsak & Paris, 1995; Menéndez, Morales, Pardo & Vajda, 1977; Pardo, 1999; Liese & Vajda, 2006; Pardo, 2006; Nielsen & Boltz, 2011; Csiszàr & Matúš, 2012; Basseville, 2013, y ref.) en adición de las referencias de esta sección, para dar unas.

cf Bha 43 egalement

2.6.3 ¿Como se generalizan las identidades y desigualdades?

Principio de entropía máxima Si este principio nació en el marco de la termodynamica o física, con la entropía de Shannon (Boltzman), tratando de las nociones generalizadas de incertas, vuelve natural preguntarse sobre la extensión de este problema en el marco general. **Tal estudio fue hecho en varios trabajos (?, ?; Ben-Tal et al., 1992) nous, Kesavan, Kagan 63**.

El problema se formaliza como en el caso Shannon, buscando la entropía máxima sujeto a vínculos: sea X variable aleatoria viviendo sobre $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ con K momentos $\mathrm{E}\left[M_k(X)\right] = m_k$ fijos, con $M_x : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, el problema de (h, phi)-entropía máxima se formula de la manera siguiente en el caso continuo (es el caso discreto, hay que re-emplazar integrales por sumas): sean $M(x) = \begin{bmatrix} 1 & M_1(x) & \cdots & M_K(x) \end{bmatrix}^t$ y $m = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & \cdots & m_K \end{bmatrix}^t$, se busca,

$$p^* = \operatorname*{argmáx}_p H_{(h,\phi)}(p) \qquad \text{sujeto a} \qquad p \geq 0, \quad \int_{\mathcal{X}} M(x)\, p(x)\, dx = m$$

donde los dos primeros vínculos aseguran de que p^* (positividad, normalización) sea una distribución de probabilidad. Si ϕ es convexa (resp. cóncava), h es creciente (resp. decreciente) así que maximizar $H_{(h,\phi)}$ es equivalente a maximizar H_ϕ (resp. $H_{-\phi}$). Sin perdida de generalidad, se puede considerar la situación ϕ convexa. Como en el caso de Shannon, introduciendo factores de Lagrange $\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_K \end{bmatrix}^t$ para tener en cuenta los vínculos, el problema variacional consiste a resolver (Gelfand & Fomin, 1963; van Brunt, 2004; Miller, 2000; Cambini & Martein, 2009; Cover & Thomas, 2006)

$$p^* = \operatorname*{argmáx}_p \int_{\mathcal{X}} \left(-\phi\left(p(x)\right) + \mu^t M(x)\, p(x) \right) dx$$

donde μ será determinado para satisfacer los vínculos. De nuevo, de la ecuación de Euler-Lagrange (Gelfand & Fomin, 1963; van Brunt, 2004) se obtiene la ecuación $-\phi'(p(x)) + \mu^t M(x) = 0$. La función entrópica ϕ es cóncava y de clase C^2, así que ϕ' es continua decreciente, y de la monotonicidad es invertible. Entonces,

$$p^*(x) = \phi'^{-1}\left(\mu^t M(x)\right)$$

con μ tal que se satisfacen los vínculos de normalización y momentos. Si el resultado no es positivo en $\mathcal{X}$, de las condiciones KKT, $p^*(x) = \left(\phi'^{-1}\left(\mu^t M(x)\right) \right)_+$. Estas distribuciónes no caen en general en la familia exponencial. De una forma, usando entropía generales permite escaparse de esta familia.

Como en el caso de Shannon, queda obviamente el hecho de que no se puede determinar μ tal que se satisfacen todos los vínculos (y en particular la de normalización).

Tal como en el caso Shannon, existe una prueba informacional:

Lema 2-6. *Sea* $\mathcal{P}_m = \left\{ p \geq 0 : \int_{\mathcal{X}} M_k(x)\, p^*(x)\, dx = m \right\}$ *y* $p^* \in \mathcal{P}_m$ *que satisfaga* $\phi'(p^*(x)) = \mu^t M(x)$. *Entonces*

$$\forall\, p \in \mathcal{P}_m, \quad H_{(h,\phi)}(p) \leq H_{(h,\phi)}(p^*) \qquad \textit{con igualdad ssi} \quad p = p^*$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, consideramos ϕ convexa. Calcuando la divergencia de Bregman asociado a ϕ de p relativamente a p^* da

$$\begin{aligned} D_\phi^{\mathrm{b}}(p \| p^*) &= H_\phi(p^*) - H_\phi(p) - \int_{\mathcal{X}} \left(p(x) - p^*(x) \right) \phi'\left(p^*(x)\right) dx \\ &= H_\phi(p^*) - H_\phi(p) - \mu^t \int_{\mathcal{X}} \left(p(x) - p^*(x) \right) M(x)\, dx \\ &= H_\phi(p^*) - H_\phi(p) \end{aligned}$$

siendo p y p^* en $\mathcal{P}_m$. El resulta proviene entonces de la positividad de la divergencia de Bregman, con igualdad si y solamente si $p = p^*$ conjuntamente a la crecencia de h. $\square$

Este lema prueba que, dando vínculos "razonables", la (h, ϕ)-entropía es acotada por arriba, y que se alcanza la cota. Por ejemplo,

- Con $K = 0$ y $\mathcal{X}$ de volumen finito $|\mathcal{X}| < +\infty$, la distribución de (h, ϕ)-entropía máxima es la distribución uniforme en el caso discreto tal como en el caso continuo.
- **Con $K = 1$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ y $M(x) = xx^t$ (visto con d^2 vínculos), y $\phi(u) = u^\lambda$ (Rényi o Havrda-Charvát-Daróczy), la distribución de entropía máxima es Student; Costa and son on. Gausiana se recupera caso límite.**

reapparition Fisher comme courbure, cf Varma, Jizba, MenMor97...

EPI variaciones Madiman Barron MadBar07

On the theory of Fisher's amount of information Sov. Math. Dokl., 4 (1963), pp. 991-993, etc, la codificación a la Renyi (Cambell, Hooda 2001, Bercher)

y la cuantificacion fina; EPI generalizada por Madiman, etc. Lutwak, Bercher etc., Kagan; Boeke 77 An extension of the Fisher information measure I. Csiszár, P. Elias (Eds.), Topics in Information Theory, North-Holland, Berlin/New York (1977), pp. 113-123 o Hammad o Vajda 73 o Ferentinos81 en el marco Fisher; Kesavan gene MaxEnt

Revisite capacite a la Daroczy? codage; parler de la quantification fine et HCD

2.7 Entropias cuanticas discretas

Mas alla caso de informaciones a partir de medida; caso infinito, continuo queda en discusiones

CAPÍTULO 3
Elementos de geometría diferencial

Pedro Walter Lamberti

$\acute{\alpha}\gamma\epsilon\omega\mu\acute{\epsilon}\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\eta\tau o\varsigma \quad \mu\eta\delta\epsilon\iota\varsigma \quad \epsilon\iota\sigma\iota\tau\omega$

Que no ingrese nadie que no sepa geometría.

FRASE GRABADA EN LA ENTRADA DE LA ACADEMIA DE PLATÓN

3.1 Estructuras

Una de las nociones más elementales de la matemática es la de *conjunto*. Un conjunto es una colección de elementos perfectamente caracterizados. Los elementos pueden ser de cualquier tipo: números, funciones, personas, autos, etc. El enfoque matemático moderno es ir montando estructuras de distinta naturaleza sobre un dado conjunto. En este capítulo comenzaremos con la noción de espacio topológico y llegaremos al concepto de variedad Riemanniana. Este procedimiento ha mostrado ser de utilidad en el marco de la física, que es nuestro principal ámbito de interés. El mapa de ruta de las distintas estructuras que veremos en este capítulo es el siguiente:

- Espacio topológico (continuidad)
- Espacio métrico (distancia)
- Variedad topológica (coordenadas)
- Variedad diferenciable (diferenciabilidad)
- Estructura afin (paralelismo)
- Estructura métrica (Finsler y Riemann)

Si bien existe una estructura intermedia entre la topológica y la diferenciable, que se conoce como *estructura lineal a trozos*, aquí prescindiremos de su estudio. A su vez, hay otras estructuras matemáticas que son usadas en el marco de las teorías físicas. Se destacan la estructura de producto interno sobre un espacio vectorial complejo, la cual conduce a la noción de espacio de Hilbert, de fundamental importancia en mecánica cuántica; la estructura simpléctica, útil en mecánica clásica y la estructura de Kähler, de relevancia en teoría de cuerdas.

3.2 Espacio Topológico

Un conjunto arbitrario X está desprovisto de toda estructura que permita definir nociones tales como la *convergencia* de una sucesión de elementos de X, la *proximidad* de dos elementos de X, etc. En principio se dispone sólo de las operaciones elementales de *unión* $\bigcup$ e *intersección* $\bigcap$ de subconjuntos. Estas operaciones también pueden realizarse entre distintos conjuntos. Denotaremos con $\emptyset$ al conjunto vacío. Surge entonces el desafío de construir alguna estructura matemática definida sobre X que permita definir, de manera precisa las nociones de proximidad, continuidad, convergencia, etc. Esto se logra a través de la idea de una **topología** sobre X.

Definición 3-43 (Topología)**.** *Una topología Υ sobre el conjunto X es una familia de subconjuntos de X que cumple con las siguientes condiciones:*

1. *X y $\emptyset$ están en Υ: $X, \emptyset \in \Upsilon$*

2. *La intersección de cualquier colección finita de elementos de Υ está en Υ:*

$$A_i \in \Upsilon, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Upsilon$$

3. *La unión de una colección arbitraria –finita o no– de elementos de Υ, pertenece a Υ:*

$$A_i \in \Upsilon \quad \Rightarrow \quad \bigcup_i A_i \in \Upsilon$$

Definición 3-44 (Espacio topológico y abiertos)**.** *Al par (X, Υ) lo llamaremos espacio topológico. Los conjuntos que están en Υ se llaman abiertos.*

Ejemplos:

- *Topología trivial.* Es la que consta de sólo dos elementos, el conjunto vacío y el conjunto total X : $\Upsilon = \{\emptyset, X\}$.

- *Topología discreta.* Es la que en todo subconjunto de X está en Υ, es decir $\Upsilon = \mathcal{P}(X)$ donde $\mathcal{P}(X)$ representa a las partes de X.

- En los cursos elementales de análisis matemático hemos estudiado en $\mathbb{R}^n$, es decir el conjunto de n-tuplas de números reales, la noción de bolas abiertas. Más precisamente, una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ centrada en el punto $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$ es el conjunto

$$\mathcal{B}_{r,p} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \, 0 \leq \sqrt{\sum_i (x_i - p_i)^2} < r \right\}$$

  La colección de todas las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ constituyen una topología para $\mathbb{R}^n$. Se conoce como la *topología usual* de $\mathbb{R}^n$.

  Obsérvese que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es abierto (en el sentido usual), cuando para todo $x \in A$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_{\varepsilon,x} \subset A$.

Definición 3-45 (Entorno)**.** *Un entorno de un punto $x \in X$ es un conjunto U que contiene a x y tal que existe un abierto V contenido en U: $x \in V \subseteq U$ con $V \in \Upsilon$.*

Definición 3-46 (Función continua)**.** *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos (X, Υ) e (Y, ω). f es una* **función continua** *en $x \in X$ sii dado cualquier entorno abierto $U \subset Y$ de $f(x)$, existe un entorno de x, $V \subset X$ tal que $f(V) \subset U$. Equivalentemente se puede definir una función continua de la siguiente manera: f es una función continua sii la imagen inversa de cada conjunto abierto es un abierto.*

Es fácil demostrar la equivalencia entre ambas definiciones, y hacerlo queda como ejercicio para el lector.

Definición 3-47 (Homomorfismo)**.** *Un homomorfismo Ψ entre dos espacios topológicos (X, Υ) e (Y, ω) es una función $\Psi : X \to V \subseteq Y$ biyectiva, continua y con inversa continua.*

Definición 3-48 (Sucesión)**.** *Una sucesión en un conjunto X es una aplicación $s : \mathbb{N} \to X$ donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Denotaremos a la sucesión por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

En un espacio topológico podemos introducir la noción de convergencia de una sucesión. Obsérvese que ésto es posible gracias a que disponemos de la noción de conjunto abierto.

Definición 3-49 (Límite)**.** *Sea (X, Υ) un espacio topológico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Diremos que x es el límite de x_n si para todo entorno V de x, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $x_n \in V$.*

Los límites de las sucesiones no tienen porque ser únicos. Una condición que debe cumplir el espacio topológico (X, Υ) para que las sucesiones tengan un único límite es que dados dos puntos distintos $x \neq y$,con $x, y \in X$ existen entornos disjuntos de x e y. A los espacios topológicos que cumplen con esta condición se los llama espacios de Hausdorff o espacios T_2.

3.3 Espacios métricos

En el tercer ejemplo de espacio topológico, usamos la noción de métrica euclídea para definir las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$. El disponer de una métrica no es algo que ocurre en todo conjunto. Eso motiva la siguiente definición:

Definición 3-50 (Espacio métrico)**.** *Un espacio métrico en un conjunto X munido de una función $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ tal que se cumplen las condiciones:*

1. $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$ *y la igualdad se cumple sii* $x = y$,

2. $d(x,y) = d(y,x)$ *simetría.*

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X.$

La última condición se conoce como *desigualdad triangular*. Mas adelante en este libro veremos funciones $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ que no satisfacen ni la condición 2 ni la condición 3, pero que sin embargo sirven para medir cuán separados están dos puntos de X. En ese caso diremos que d es una *distancia* definida sobre X.

3.4 Variedad Topológica

Nuestra experiencia cotidiana de percibir que estamos inmersos en un espacio de 3 dimensiones, en el cual podemos medir ángulos y determinar distancias entre dos puntos, ha hecho que usemos estas caracteristicas de nuestro habitat, como motivación de la defición de ciertas estructuras matemáticas en espacios abstractos.

En primer lugar, con la noción de una variedad topológica buscaremos simular en un conjunto cualquiera, la noción de cercanía y dimensionalidad que tenemos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3-51 (Variedad topológica n-dimensional)**.** *Una Variedad topológica n-dimensional es un espacio topológico $\mathcal{M}$ tal que es localmente euclídeo, es decir que para cada $x \in \mathcal{M}$ existe un entorno abierto U de x, homeomorfo a un abierto V de $\mathbb{R}^n$: $\phi : U \subseteq \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi : U \to V$ y ϕ es un homeomorfismo. También pediremos que $\mathcal{M}$, como espacio topológico, sea un espacio Hausdorff.*

A los pares (U,ϕ) se los denominan *cartas sobre* $\mathcal{M}$. Se supone que la colección de todas las cartas cubren completamente a $\mathcal{M}$. Las cartas permiten asignar *coordenadas* a $\mathcal{M}$:

$$\text{Si} \quad p \in U \subseteq \mathcal{M} \quad \text{entonces} \quad \phi : p \to (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$$

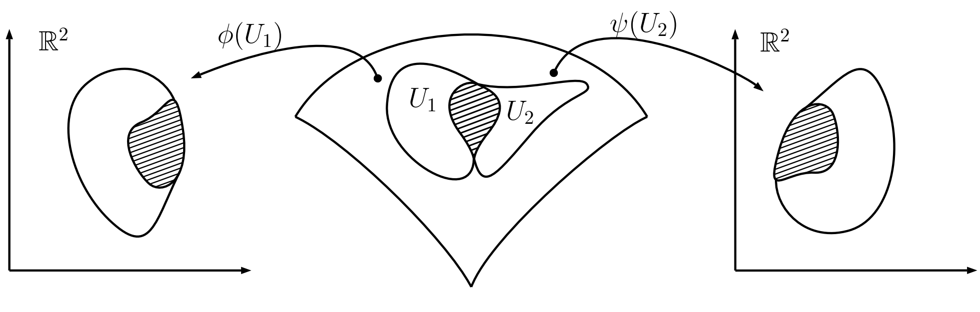


Figura 3-31: Cartas coordenadas usadas en la definición de una variedad topológica.

A la colección de números reales $(p_1, \ldots, p_n)$ se llaman las coordenadas de p de acuerdo a la carta (U,ϕ). La existencia de coordenadas, es el aspecto fundamental por el que el concepto de variedad es tan útil en física.

Podría suceder que un mismo punto p pertenezca a más de una carta, digamos (U_1, ϕ_1) y (U_2, ψ_2). En ese caso hablaremos de un cambio de coordenadas:

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U_1 \cap U_2) \to \psi(U_1 \cap U_2) \tag{5}$$

Si denotamos por $(p_1, \dots, p_n)$ a las coordenadas correspondientes a la carta (U_1, ϕ_1) y por $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ a las correspondientes a la carta (U_2, ψ_2), entonces las funciones $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(p_1, \dots, p_n)$ son funciones continuas, y dan el cambio de coordenadas. Estas funciones son invertibles con inversa continua.

Ejemplos de variedades topológicas son:

- $\mathbb{R}^n$. En este caso hay una carta coordenada global que cubre toda la variedad y donde el homeomorfismo es la identidad.
- $\mathbb{S}^n$, la esfera de dimensión n. Ella está definida como el conjunto:

$$\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, \dots, x_{n+1}),\ x_i \in \mathbb{R} : \quad x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

Se debe observar que al definir $\mathbb{S}^n$ no estamos pensando que está inmersa en $\mathbb{R}^n$. En este caso podemos usar las siguientes cartas: (U_N, ϕ_N) y (U_S, ϕ_S), donde $U_N = \mathbb{S}^n - \{(0, 0, \dots, 1)\}, \quad U_S = \mathbb{S}^n - (1, 0, \dots, 0)$ y los mapas

$$\phi_N : U_N \to \mathbb{R}^n / (\phi_N(x_1, \dots, n_{n+1}))_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}$$

y

$$\phi_S : U_S \to \mathbb{R}^n / (\phi_N(x_1, \dots, n_{n+1}))_i = \frac{x_i}{1 + x_{n+1}}$$

Ambos mapas son homeomorfismos. Observemos que $\phi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = (tx_1, \dots, tx_n)$ y $\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = (ux_1, \dots, ux_n)$ con $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$ y $u = \frac{1}{1 + x_{n+1}}$, respectivamente. Es directo verificar la inyectividad pues si $(tx_1, \dots, tx_n) = (ty_1, \dots, ty_n) \Rightarrow x_i = y_i \quad \forall i$. Entonces los puntos x e y son idénticos. Para ver la suryectividad consideremos el punto $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Si tomamos $x = \left(t^{-1}y_1, \dots, t^{-1}y_n, y_{n+1}\right)$ con $t \neq 0$ e $y_{n+1} = t\sqrt{1 - (t^{-1}y_1)^2 - \cdots - (t^{-1}y_n)^2}$ vemos que para cada $y \in \mathbb{R}^n$ existe un $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $\phi(x) = y$. Usando las expresiones explcítas de ϕ_N y ϕ_S es directo verificar que se trata de funciones continuas.

Nota: Hay propiedades de las variedades topológicas que no tienen que ver con sus características locales, las que hemos dicho son similares a las de $\mathbb{R}^n$, sino con sus propiedades globales. Por ejemplo una esfera 2-dimensional es homeomorfa a la superficie de una pelota de futbol, aún cuando pensemos en una pelota de futbol verdadera, la cual es una colección de parches hexagonales o pentagonales, unidos unos con otros. Ambos objetos, la esfera y la pelota de futbol, son objetos compactos, cerrados y simplemente conexos. Sin embargo un toro y una esfera no comparten todas estas características: un toro es cerrado, compacto pero no simplemente conexo, es decir no todo lazo sobre él puede contraerse continuamente a un punto. Por ello diremos que un toro y una esfera son localmente homeomorfos, pero no lo son globalmente. Este tipo de situaciones ha llevado a introducir cantidades que de alguna manera caractericen a las propiedades globales de una variedad topológicas. Un ejemplo muy conocido es la característica de Euler. Para un poliedro de tres dimensiones la caracteristica de Euler Ξ está definida por

$$\Xi = V - A + C$$

donde V, A y C son el número de vertices, de aristas y de caras del poliedro, respectivamente. Para un cubo, por ejemplo, $\Xi = 2$. Supongamos que el cubo está hecho en un material elástico, apoyado sobre un armazón (las aristas) de metal. Si inflamos ese cubo, obtenemos una esfera. Matemáticamente eso significa que el cubo y la efera son globalmente homeomorfos entre si, y por lo tanto topológicamente equivalentes. Es posible extender el concepto de característica de Euler a la superficie de una esfera, a través de la triangularización de la superficie esférica, es decir cubriendo la esfera por triángulos. En ese caso la característica de Euler se calcula como el número de triángulos menos el número de aristas más el número de vértices. Haciéndo ese cálculo para la esfera resulta el valor 2. Lo mismo sucede con cualquier otro poliedro que se pueda deformarse continuamente a una esfera. Hay maneras de definir la característica de Euler para una variedad topológica arbitraria y esa cantidad es un invariante topológico, es decir una cantidad que no cambia entre variedades homeomórficos. Para un toro la característica de Euler vale 0.

3.5 Variedad Diferenciable

Sobre una variedad topológica se puede "montar" una nueva estructura. Es posible hacer eso imponiendo condiciones de diferenciabilidad a los mapas coordenados de la definición de una variedad topológica. Sin embargo, no tenemos definida la noción de diferenciablidad sobre una variedad cualquiera. Por ello, para definir una estructura diferenciable sobre una variedad topológica arbitraria, recurrimos a $\mathbb{R}^n$ donde si está definida la noción de diferenciabilidad. Por ello hacemos la siguiente:

Definición 3-52 (C^r-compatibilidad)**.** *Diremos que dos cartas coordenadas (U, ϕ) y (V, ψ) sobre una variedad $\mathcal{M}$ son C^r-compatibles si cuando $U \bigcap V \neq \emptyset$ entonces $\phi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \phi^{-1}$ son de clase C^r sobre los subconjuntos $\phi(U \bigcap V)$ y $\psi(U \bigcap V)$ de $\mathbb{R}^n$, respectivamente.*

Con esto podemos avanzar en la siguiente:

Definición 3-53 (Variedad diferenciable)**.** *Una Variedad diferenciable n-dimensional de clase C^r, $\mathcal{M}$, es una variedad topológica y una familia de cartas coordenadas $\mathcal{B} = (U_\alpha, \phi_\alpha)$, tales que:*

1. *los U_α cubren $\mathcal{M}$,*

2. *para cualquier par α, β, los entornos (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son C^r- compatibles,*

3. *Cualquier entorno coordenado (V, ψ) C^r-compatible con cualquiera de los $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{B}$ está en $\mathcal{B}$.*

Cualquier superficie "suave" en $\mathbb{R}^3$ es un ejemplo de (sub) variedad diferenciable. Este ejemplo no debe conducir a la confusión de pensar que una variedad debe estar inmersa en $\mathbb{R}^n$. Otro ejemplo de variedad diferenciable de dimensión n es la esfera $\mathbb{S}^n$, definida previamente.

Definición 3-54 (Diferenciabilidad de clase C^k)**.** *Dadas dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ de clase C^r, una aplicación $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, se dice diferenciable de clase $C^k, \quad k \leq r$ si para toda carta (U_α, ϕ_α) de $\mathcal{M}$ y toda carta de*

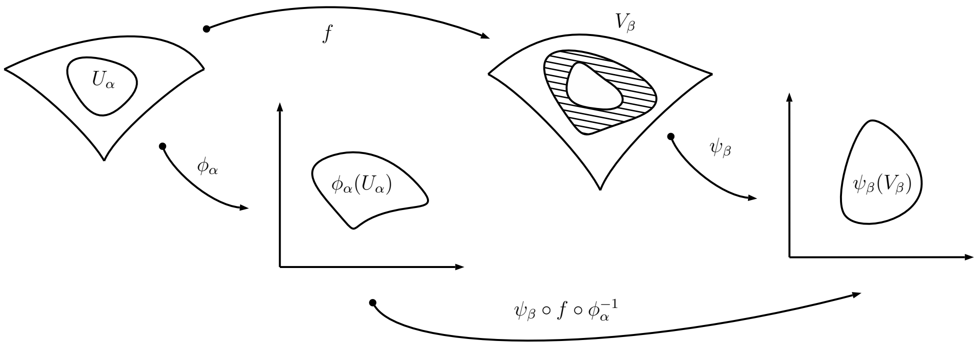


Figura 3-32: Cartas coordenadas usadas en la definición de una función diferenciable.

(V_β, ψ_β) *de* $\mathcal{M}'$ *tal que* $f\,(U_\alpha) \subset V_\beta$*, la aplicación* $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ *de* $\phi_\alpha\,(U_\alpha)$ *en* $\psi_\beta\,(V_\beta)$*, es diferenciable de clase* C^k*.*

El disponer de la noción de función diferenciable, permite asignar a cada punto de una variedad diferenciable, un espacio vectorial. Éste estará dado por operadores lineales que actúan sobre funciones diferenciables y dan por resultado un número. Antes de ir a la definición de ese espacio vectorial, introducimos el concepto de curva suave sobre una variedad.

Definición 3-55 (Curva de clase C^k sobre una variedad)**.** *Sea* $\mathcal{M}$ *una variedad de clase* C^r*. Una curva* λ *en* $\mathcal{M}$ *de clase* $C^k, \quad k \leq r$ *es una función del intervalo real* $[a\,,\,b]$ *en* $\mathcal{M}$ *tal que para toda carta* (U_α, ϕ_α) *en* $\mathcal{M}$ *la composición*

$$\phi_\alpha \circ \gamma : [a\,,\,b] \to \phi_\alpha\,(U_\alpha)$$

es de clase C^k*. En coordenadas*

$$\phi_\alpha \circ \gamma(t) = \{x^1(t), \ldots, x^n(t)\}$$

Con esto podemos ahora dar la noción de vector tangente a una variedad:

Definición 3-56 (Tangente a una variedad)**.** *Sea* $\mathcal{F}(p)$ *el conjunto de funciones diferenciables de clase* C^1 *definidas en un entorno del punto* p*. Sea* $\gamma(t)$ *una curva de clase* C^1*,* $a \leq t \leq b$ *tal que* $\gamma(t_0) = p$*. El vector tangente a la curva* $\gamma(t)$ *en el punto* p *es una aplicación* $\mathbb{X}_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$ *cuyo efecto es*

$$\mathbb{X}_p f = \frac{df(\gamma(t))}{dt}|_{t_0}$$

El vector $\mathbb{X}_p$ satisface las siguientes propiedades

- $\mathbb{X}_p$ es una aplicación lineal de $\mathcal{F}(p)$ en $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{X}_p(fg) = (\mathbb{X}_p f)\,g(p) + f(p)\,(\mathbb{X}_p g)$ para $f, g \in \mathcal{F}(p)$.

Dejamos para el lector demostrar estas propiedades.

Sean $(u^1, \ldots, u^n)$ coordenadas locales en un entorno U de p. Para cada j, $\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)|_p$ es una aplicación de $\mathcal{F}(p)$ en $\mathbb{R}$ la cual satisface las propiedades (i) e (ii). Veremos a continuación que el conjunto de todas las aplicaciones $\mathbb{X}$ de $\mathcal{F}(p)$ en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial n-dimensional, siendo n la dimensión de la variedad diferenciable $\mathcal{M}$.

Dada una curva $\gamma(t)$ con $\gamma(t_0) = p$, sean $u^j(t) = \gamma^j(t), \quad j = 1, \ldots, n$ las coordenadas locales de esa curva. Entonces $\frac{df(\gamma(t))}{dt}|_{t_0} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j}|_p\right)\left(\frac{d\gamma^j(t)}{dt}\right)|_{t_0}$. Extra expresión indica que todo vector en p es una combinación lineal de los vectores (operadores).

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}|_p\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}|_p\right) \tag{6}$$

Sea la combinación lineal $\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}|_p$ y sea la curva definida por

$$u^j(t) = u^j(p) + \xi^j t \quad j = 1, \ldots, n$$

El vector tangente a esta curva en $t = 0$ es $\sum \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}|_p$. Además si

$$\sum \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}|_p = 0,$$

entonces

$$0 = \sum \xi^j \left(\frac{\partial u^k}{\partial u^j}\right)|_p = \xi^k \quad k = 1, \ldots, n$$

Esto demuestra la independencia lineal de los vectores (6).

Definición 3-57 (Espacio tangente). *El conjunto de vectores tangentes en $p \in \mathcal{M}$, es llamado el espacio tangente de $\mathcal{M}$ en p, y lo denotaremos por $T_p(\mathcal{M})$.*

La colección de todos los espacios tangentes, $\bigcup_{p\in\mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})$ se llama *fibrado tangente*.

Al fibrado tangente se le puede dar la estructura de un álgebra (álgebra de Lie). Esta surge de calcular el conmutador $[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]$ entre dos campos vectoriales $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$:

$$[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]f \equiv (\mathbb{X}\mathbb{Y} - \mathbb{Y}\mathbb{X})\, f$$

Si los vectores se escriben en término de los vectores de la base coordenada $\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)$, el conmutador entre ellos resulta ser el vector:

$$\sum_{ab} X^a \frac{\partial Y^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b} - \sum_{ab} Y^a \frac{\partial X^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}$$

A cada espacio tangente $T_p(\mathcal{M})$ podemos asignar su dual, $T_p^*(\mathcal{M})$, es decir el conjunto de todos los operadores lineales y homogéneos que actúan sobre $T_p(\mathcal{M})$. A un elemento del espacio dual lo llamaremos 1-*forma*. Denotaremos a la acción de un elemento de $T_p^*(\mathcal{M})$, digamos ω_p, por:

$$\omega_p(\mathbb{X}_p) = \langle \omega_p, \mathbb{X}_p \rangle\,.$$

Para cada función $f \in \mathcal{F}(p)$, el *diferencial de* f, denotado por $(df)_p$, es el elemento de $T_p^*(\mathcal{M})$ que tiene por acción:

$$\langle (df)_p, \mathbb{X}_p \rangle = \mathbb{X}_p f, \quad \mathbb{X}_p \in T_p(\mathcal{M})$$

Cada función coordenada u^j es una función de $\mathcal{M}$ sobre $\mathbb{R}$. Entonces podemos calcular el diferencial de u^j, cuya acción sobre un vector $\mathbb{X}_p \in T_p(\mathcal{M})$ está dada por

$$\left\langle (du^j)_p, \mathbb{X}_p \right\rangle = \mathbb{X}_p^j$$

En particular, si $\mathbb{X}_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$ resulta

$$\left\langle (du^j)_p, \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) \right\rangle = \delta_k^j;$$

es decir $\left\{(du^j)_p\right\}_{j=1}^n$ es la base dual de $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p\right\}_{j=1}^n$. Toda 1-forma ω se puede escribir en término de esta base:

$$\omega = \sum_a \omega_a dx^a$$

Con los espacios $T_p(\mathcal{M})$ y $T_p^*(\mathcal{M})$ podemos construir el espacio producto cartesiano

$$(T_p(\mathcal{M}))_s^r = T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \ldots T_p(\mathcal{M}) \times T_p^*(\mathcal{M}) \times T_p^*(\mathcal{M}) \ldots \times T_p^*(\mathcal{M})$$

con r factores de $T_p(\mathcal{M})$ y s factores de $T_p^*(\mathcal{M})$.

Definición 3-58 (Tensor de tipo (r,s))**.** *Un tensor de tipo (r,s) es un operador S,*

$$S : (T_p(\mathcal{M}))_s^r \to \mathbb{R}$$

que es lineal y homogéneo en cada uno de sus argumentos.

Definición 3-59 (Campo tensorial)**.** *Un campo tensorial S de clase C^k de tipo (r,s) sobre $V \subseteq \mathcal{M}$ es un mapa C^k que asigna un tensor de tipo (r,s) a cada punto $p \in V$.*

En término de las bases $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^j}|_p\right)\right\}_{j=1}^n$ y $\left\{(du^j)_p\right\}_{j=1}^n$, el campo tensorial S se puede escribir:

$$S(p) = S_{b_1 \ldots b_s}^{a_1 \ldots a_r}(p) \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \bigotimes \ldots \bigotimes \frac{\partial}{\partial x^{a_r}} \bigotimes dx^{b_1} \bigotimes \ldots \bigotimes dx^{b_s}$$

donde las funciones $S_{b_1 \ldots b_s}^{a_1 \ldots a_r}$ son de clase C^k y $\bigotimes$ es el producto tensorial.

Entre los campos tensoriales que se pueden definir sobre una variedad $\mathcal{M}$, hay uno particularmente importante, y es conocido como el tensor métrico. Éste se define por medio de un producto escalar:

Definición 3-60 (Producto escalar)**.** *Un* **producto escalar** *sobre $T_p(\mathcal{M})$ es una función*

$$g : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

que satisface

1. $g(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = g(\mathbb{Y}, \mathbb{X}), \quad$ *para* $\quad \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in T_p(\mathcal{M})$

2. $g(\mathbb{X}, a\mathbb{Y} + b\mathbb{Z}) = ag(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + bg(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$

El producto escalar se dice *no degenerado* si $g(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0 \quad \forall\, \mathbb{Y} \in T_p(\mathcal{M})$ implica $\mathbb{X} = 0$. Obviamente el producto escalar es un tensor de tipo $(0,2)$. Como campo tensorial $g(\ ,\ )$ se puede expresar en términos de la base $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}|_p\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}|_p\right)$

$$g(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \sum_{ab} X^a Y^b g\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\right)$$

o, de manera equivalente

$$g(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \sum_{ab} g_{ab} X^a Y^b$$

donde $g_{ab} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\right)$. Si el producto escalar es no degenerado, entonces existe la matriz inversa de la matriz g_{ab}, a cuyos elementos los denotaremos por g^{ab}, de modo que

$$\sum_c g_{ac} g^{cb} = \delta^b_a$$

La existencia de un campo tensorial métrico (o producto escalar definido localmente), permite introducir la idea de *longitud de una curva*. En efecto, sea $\gamma(t), \quad t \in [a\,,\,b]$ una curva de clase C^1 sobre $\mathcal{M}$, que une los puntos p y q: $\gamma(a) = p, \quad \gamma(b) = q$. En el punto $\gamma(t)$ tenemos el vector tangente a la curva γ dado por

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\gamma = \sum_j \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Definición 3-61 (Longitud de una curva)**.** *La longitud de la curva γ entre los puntos p y q está dada por la cantidad*

$$L = \int_a^b |g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)|^{\frac{1}{2}} dt \tag{7}$$

O, equivalentemente

$$L = \int_a^b \left| \sum_{ij} g_{ij}(x) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \right|^{\frac{1}{2}} dt \tag{8}$$

3.6 Estructura Afin

En el espacio euclídeo n-dimensional (pensado aquí como una variedad diferenciable), cuando usamos coordenadas cartesianas, caracterizamos a dos vectors paralelos como aquellos que tienen iguales componentes. Si reemplazamos las coordenadas cartesianas por las polares, por ejemplo, esta caracterización deja de ser válida. Veamos cómo podemos introducir la noción de paralelismo de vectores, usando cualquier sistema de coordenadas. Sea $\{x^a\}$ el sistema de coordenadas cartesiano del espacio. En este sistema, hemos dicho que dos vectores paralelos, por ejemplo $\mathbb{V}$ y $\tilde{\mathbb{V}}$ tienen iguales componentes:

$$V^a = \tilde{V}^a$$

Si el vector $\mathbb{V}$ es tangente al espacio en el punto p con coordenadas $\{x^a\}$ y el vector paralelo $\tilde{\mathbb{V}}$ es tangente al punto q con coordenadas $x^a + \delta x^a$, vale

$$\tilde{V}^a(q) - V^a(p) = 0$$

Dado un vector $\mathbb{V}$ en p, podemos definir un campo de vectores paralelos a $\mathbb{V}$ en un entorno de p. Denotemos a este campo por $\tilde{\mathbb{V}}$. Este campo cumple que en el punto p coincide con $\mathbb{V}$ y con la condición:

$$\tilde{V}^a(x+\delta x) - V^a(x) = \frac{\partial \tilde{V}^a}{\partial x^b}(p)\delta x^b$$

Sea ξ^a otro sistema de coordenadas para el espacio euclídeo, vinculado con x^a mediante las relaciones

$$\xi^a = \xi^a(x^b), \quad x^b = x^b(\xi^a) \tag{9}$$

A partir de ellas, resulta

$$\delta\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^b}\delta x^b, \qquad \delta x^b = \frac{\partial x^b}{\partial \xi^a}\delta\xi^a \tag{10}$$

Las componentes de $\tilde{\mathbb{V}}$ se transforman de acuerdo con

$$\tilde{V}^a = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^b}\tilde{V'}^b$$

donde $\tilde{V'}^a$ son las componentes de $\tilde{\mathbb{V}}$ en las coordenadas $\{\xi^a\}$. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}^a}{\partial x^b} &= \frac{\partial}{\partial \xi^c}\left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^d}\tilde{V'}^d\right)\frac{\partial \xi^c}{\partial x^b} \\ &= \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^c \partial \xi^d}\tilde{V'}^d\frac{\partial \xi^c}{\partial x^a} + \frac{\partial x^a}{\partial \xi^d}\frac{\partial \tilde{V'}^d}{\partial \xi^c}\frac{\partial \xi^c}{\partial x^b} \end{aligned} \tag{11}$$

Si definimos la cantidad $\delta\tilde{V'}^d = \frac{\partial \tilde{V'}^d}{\partial x^e}\delta\xi^e$ y después de un poco de álgebra, llegamos a la relación

$$\delta\tilde{V'}^n = -\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^e \partial \xi^d}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^a}\tilde{V'}^d\delta\xi^e \tag{12}$$

Esta expresión puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\delta\tilde{V'}^n = -\Gamma'^n_{ed}\tilde{V'}^d\delta\xi^e \tag{13}$$

en donde los coeficientes Γ' están definidos en la expresión (12). De su definición resulta que las cantidades Γ' se anulan para cambios *lineales* de coordenadas (9).

Obsérvese que al haber arribado a la definición de los coeficientes Γ no hemos hecho uso de ninguna propiedad especial del espacio euclídeo. Es por ello que la expresión (12) es válida para cualquier variedad n-dimensional. Es fácil ver que frente a un cambio de coordenadas

$$x^a \to x'^a = x'^a\left(x^b\right) \tag{14}$$

las cantidades Γ cambian según la expresión

$$\Gamma^f_{de} = \Gamma'^a_{mn}\frac{\partial x^f}{\partial x'^a}\frac{\partial x'^m}{\partial x^d}\frac{\partial x'^n}{\partial x^e} + \frac{\partial x^f}{\partial x'^a}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^e \partial x^d} \tag{15}$$

Debemos remarcar que esta ley de transformación es lineal y homogénea (tensorial) sólo cuando el cambio de coordenadas (9) es lineal. Esta propiedad de los coeficientes Γ nos permite generalizar la idea de paralelismo en una variedad arbitraria:

Definición 3-62 (Conexión afín)**.** *Cuando en una variedad n-dimensional arbitraria $\mathcal{M}$ se introducen n^3 coeficientes Γ que se transforman de acuerdo con la ley* (15)*, diremos que sobre esa variedad se ha definido una conexión afín*

A partir de los coeficientes Γ es posible definir una nueva derivada para un campo vectorial arbitrario, digamos $V^a(x)$:

Definición 3-63 (Derivada covariante de campo)**.** *Sea un campo vectorial V definido en un entorno del punto x. La derivada covariante del campo V está dado por las componentes de un tensor de tipo* $(1,1)$

$$V^a_{;c} = V^a_{,c} + \Gamma^a_{bc} V^b$$

Definición 3-64 (Derivada covariante en una dirección)**.** *Dados dos campos vectoriales $U(x)$ y $V(x)$, la derivada covariante de V en la dirección de U es el campo vectorial definido por*

$$U(x) \cdot \nabla V(x) \equiv \sum_{ab} V^a_{;b}(x) U^b(x) \mathbb{E}_a \equiv \nabla_U V$$

donde $\mathbb{E}^a$ es el campo de vectores coordenados asociados con las coordenadas x^a. Esta última definición permite trasladar paralelamente a un vector a lo largo de una curva. Basta con tomar como $\mathbb{U}$ al campo tangente a la curva.

3.7 Variedad Riemmanniana

Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable n-dimensional. Si $\mathcal{M}$ tiene definida una métrica no singular sobre ella, recibe el nombre de *variedad Riemanniana*. La existencia de una métrica sobre $\mathcal{M}$ permite introducir una conexión afín particular, conocida como la conexión de Levi-Civita. Sean g_{ab} y g^{ab} los coeficientes de la métrica g y su inversa, en las coordenadas $\{x^a\}$, respectivamente.

Para dos puntos próximos, la separación entre ellos viene dada por la expresión:

$$ds^2 = \sum_{ab} g_{ab} dx^a dx^b \tag{16}$$

Además de definir una distancia entre puntos próximos, la existencia de una métrica permite definir una conexión particular sobre una variedad riemanniana:

Definición 3-65 (Conexión de Levi-Civita)**.** *La conexión de Levi-Civita en las coordenadas x^a está dada por:*

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} \sum_d g^{ad} \left(g_{bd,c} + g_{cd.b} - g_{bc.d} \right) \tag{17}$$

La existencia de esta particular conexión no imposibilita la existencia de otras conexiones definidas sobre $\mathcal{M}$.

Como hemos visto más arriba, el tener definida una métrica permite definir la longitud de una curva. Bajo ciertas condiciones, que supondremos que se satisfacen, podemos plantearnos el problema de determinar la curva que minimiza (en realidad extremiza) su longitud al unir dos puntos fijos sobre la variedad. Esto se puede tratar resolviendo el problema variacional asociado con el funcional (8). La ecuación de Euler-Lagrange conduce en este caso a:

$$\frac{d^2x^d}{dt^2} + \Gamma^d_{ca}\frac{dx^c}{dt}\frac{dx^a}{dt} = 0 \tag{18}$$

donde $x^a(t)$ son las coordenadas de la curva y t es un parámetro adecuadamente elegido. Una curva que satisface (18), se llama una *curva geodésica*. Es posible caracterizar a una curva geodésica de otro modo. Sea $\mathbb{U}(t)$ el vector tangente a una curva $\gamma(t)$ definida sobre $\mathcal{M}$. La curva γ se dice una geodésica si su vector tangente es trasladado paralelamente a lo largo de ella:

$$\mathbb{U}\cdot\nabla\mathbb{U} = f(t)\mathbb{U}$$

Siempre es posible elegir al parámetro t de forma tal que $f(t) = 0$, con lo cual reobtenemos la ecuación (18).

El disponer de geodésicas, permite dar a una variedad riemanniana el carácter de espacio métrico. En efecto, podemos definir la distancia entre dos puntos p y q de la variedad $\mathcal{M}$ a través de la expresión:

$$d(p,q) = \min_{\gamma} L(\gamma) \tag{19}$$

donde el mínimo se evalúa entre todas las curvas que unen los puntos p y q, y L es la longitud (8). Como siempre, todo esto es posible ser realizado localmente. Las geodésicas son las curvas que localmente minimizan la distancia entre dos puntos. La distancia definida por (19) verifica la desigualdad triangular, y por eso es una métrica.

Dada una conexión ∇ se define un tensor de tipo $(1,3)$, llamado *tensor de curvatura* asociado a la conexión ∇, cuya espresión es:

$$\mathcal{R}\left(\mathbb{X},\mathbb{Y}\right)\mathbb{Z} = \nabla_{\mathbb{X}}\left(\nabla_{\mathbb{Y}}\mathbb{Z}\right) - \nabla_{\mathbb{Y}}\left(\nabla_{\mathbb{X}}\mathbb{Z}\right) - \nabla_{[\mathbb{X},\mathbb{Y}]}\mathbb{Z}$$

Si los vectores $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ son reemplazados por los vectors coordenados $\frac{\partial}{\partial x^a}$, $\frac{\partial}{\partial x^b}$ y $\frac{\partial}{\partial x^c}$, respectivamente, resulta

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^a},\frac{\partial}{\partial x^b}\right)\frac{\partial}{\partial x^c} = R^d_{cab}\frac{\partial}{\partial x^d}$$

con

$$R^d_{cba} \equiv \left(\frac{\partial\Gamma^d_{cb}}{\partial x^a} + \Gamma^d_{ra}\Gamma^r_{cb} - \frac{\partial\Gamma^d_{ca}}{\partial x^b} - \Gamma^d_{rb}\Gamma^r_{ca}\right)\frac{\partial}{\partial x^d}$$

Nota: Si bien existe una motivación geométrica para introducir el tensor de curvatura, aquí no la hemos dado. Ella tiene que ver con la idea de cuánto cambia un vector al desplazarlo paralelamente a lo largo de una curva cerrada. En general diremos que una variedad es plana, si todas las componentes de su tensor de curvatura, se anulan.

Concluimos este capítulo con una breve nota histórica. En sus trabajos originales sobre geometría, B. Riemann introdujo el elemento de línea entre dos puntos vecinos p y q por medio de la expresión

$$ds = F(p,\mathbb{X})dt \tag{20}$$

con $F(p,\mathbb{X})$ una función homogénea de grado 2 en la segunda variable. Aquí estamos suponiendo que los puntos p y q tienen coordenadas x^a y $x^a + X^a dt$, respectivamente. La geometría basada sobre el elemento de línea se conoce como geometría de Finsler. Obsérvese que el elemento (16) (de Riemann) es un caso particular de la geometría de Finsler.

CF libro de Bullet et al. (Bullet, Fearn & Smith, 2017), Cencov (Cencov, 1982), Amari (Amari & Nagaoka, 2000).

EPÍLOGO

Este libro surge de la experiencia de los autores en el dictado del curso semestral ”Métodos de geometría diferencial en teoría de la información", que se imparte en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata y en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba. ...

Los autores

Referencias

Aczél, J. & Daróczy, Z. (1975). *On Measures of Information and Their Characterizations*. New-York: Academic Press.

Ali, S. M. & Silvey, S. D. (1966). A general class of coefficients of divergence of one distribution from another. *Journal of the Royal Statistical Society B*, *28*(1), 131–142.

Amari, S.-I. & Nagaoka, H. (2000). *Methods of Information Geometry*. Rhode Island: Oxford University Press.

Andersen, E. B. (1970). Sufficiency and exponential families for discrete sample spaces. *Journal of the American Statistical Association*, *65*(331), 1248–1255.

Arimoto, S. (1971). Information-theoretical considerations on estimation problems. *Information and control*, *19*(3), 181–194.

Arimoto, S. (1972). An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, *18*(1), 14–20.

Arndt (2001). *Information Measures: Information and its Description in Sciences and Ingineering*. Berlin: Springer Verlag.

Athreya, K. B. & Lahiri, S. N. (2006). *Measure Theory and Probability Theory*. New-York: Springer.

Barnard, G. A. (1958). Studies in the history of probability and statistics: IX. Tomas Bayes's essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Biometrika*, *45*(3-4), 293–295.

Barone, J. & Novikoff, A. (1978). A history of the axiomatic formulation of probability from Borel to Kolmogorov: Part I. *Archive for History of Exact Sciences*, *18*(2), 123–190.

Barron, A. R. (1984). Monotonic central limit theorem for densities. Technical report no. 50, Department of Statistics, Stanford University.

Barron, A. R. (1986). Entropy and the central limit theorem. *The Annals of Probability*, *14*(1), 336–342.

Basseville, M. (1989). Distance measures for signal processing and pattern recognition. *Signal Processing*, *18*(4), 349–369.

Basseville, M. (2013). Divergence measures for statistical data processing – an annotated bibliography. *Signal Processing*, *93*(4), 621–633.

Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, *53*, 370–418.

Beck, C. (2009). Generalised information and entropy measures in physics. *Contemporary Physics*, *50*(4), 495–510.

Ben-Tal, A., Bornwein, J. M., & Teboulle, M. (1992). Spectral estimation via convex programming. In F. Y. Phillips & J. J. Rousseau (Eds.), *Systems and Management Science by Extremal Methods* chapter 18, (pp. 275–290). Springer.

Ben-Tal, A., Charnes, A., & Teboulle, M. (1989). Entropic means. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *139*(2), 537–551.

Bengtsson, I. & Życzkowski, K. (2006). *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bercher, J.-F. (2012). On a (β, q)-generalized Fisher information and inequalities invoving q-Gaussian distributions. *Journal of Mathematical Physics*, *53*(6), 063303.

Bercher, J.-F. (2013). On multidimensional generalized Cramér-Rao inequalities, uncertainty relations and characterizations of generalized q-Gaussian distributions. *Journal of Physics A*, *46*(9), 095303.

Berlekamp, E. R. (Ed.). (1974). *Key Papers in the Development of Coding Theory*. IEEE Press.

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilæ reticularis*. Basel, Switzeland: Thurneysen Brothers.

Bhatia, R. (1997). *Matrix Analysis*. New-York: Springer Verlag.

Bhattacharyya, A. (1943). On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, *35*, 99–109.

Bhattacharyya, A. (1946). On a measure of divergence between two multinomial populations. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, *7*(4), 401–406.

Blachman, N. M. (1965). The convolution inequality for entropy powers. *IEEE Transactions on Information Theory*, *11*(2), 267–271.

Boekee, D. E. & van der Lubbe, J. C. A. (1979). Some aspects of error bounds in feature selection. *Pattern Recognition*, *11*(5-6), 353–360.

Boekee, D. E. & van der Lubbe, J. C. A. (1980). The R-norm information measure. *Information and Control*, *45*(2), 136–155.

Bogachev, V. I. (2007a). *Measure Theory*, volume I. Berlin: Springer.

Bogachev, V. I. (2007b). *Measure Theory*, volume II. Berlin: Springer.

Boltzmann, L. (1896). *vorlesungen über Gastheorie - I*. Leipzig, Germany: Verlag von Johann Ambrosius Barth.

Boltzmann, L. (1898). *vorlesungen über Gastheorie - II*. Leipzig, Germany: Verlag von Johann Ambrosius Barth.

Borel, E. (1898). *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villars et fils.

Borel, E. (1909). *Éléments de la théorie des probabilités*. Paris: A. Hermann & fils.

Bouniakowsky, V. (1859). Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, *I*(9).

Bregman, L. M. (1967). The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problem in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical*

Physics, *7*(3), 200–217.

Brémaud, P. (1988). *An Introduction to Probabilitic Modeling*. New-York: Springer.

Bullet, S., Fearn, T., & Smith, F. (2017). *Analysis and Mathematical Physics*. London: World Scientific.

Burbea, J. & Rao, C. R. (1982). On the convexity of some divergence measures based on entropy functions. *IEEE Transactions on Information Theory*, *28*(3), 489–495.

Burg, J. P. (1967). Maximum entropy spectral analysis. In *Proceedings of the 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, Oklahoma City, Oklahoma.

Burg, J. P. (1972). The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra. *Geophysics*, *37*(2), 375–376.

Burg, J. P. (1975). *Maximum entropy spectral analysis*. PhD thesis, Department of Geophysics, Stanford University, Stanford University, Stanford, CA.

Cambini, A. & Martein, L. (2009). *Generalized Convexity and Optimization: Theory and Applications*. Heidelberg: Springer Verlag.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique*, volume 1: analyse algébrique. Paris: Imprimerie royale (digital version, Cambrige, 2009).

Cencov, N. N. (1982). *Statistical Decision Rules and Optimal Inference*. Providence, Rhode Island, USA: American Mathematical Society.

Chenciner, A. (2017). La force d'une idée simple. *Gazette de la Société de Mathématiques Française*, *152*, 16–22.

Chernoff, H. (1952). A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *The Annals of Mathematical Statistics*, *23*(4), 493–507.

Chong, K. M. (1974). Some extensions of a theorem of Hardy, Littlewood and Pólya and their applications. *Journal canadien de mathématiques*, *26*, 1321–1340.

Clavier, A. G. (1948). Evaluation of transmission efficiency according to Hartley's expression of information content. *Technical Journal of the International Telephone and Telegraph Corporation and Associate Companies*, *25*(4), 414–420.

Cohen, M. (1968). The Fisher information and convexity. *IEEE Transactions on Information Theory*, *14*(4), 591–592.

Cohn, D. L. (2013). *Measure Theory* (2nd ed.). New-York: Springer.

Cover, T. M. & Thomas, J. A. (2006). *Elements of Information Theory* (2nd ed.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. New-York: Princeton University Press.

Cressie, N. & Pardo, L. (2000). Minimum ϕ-divergence estimator and hierarchical testing in loglinear models. *Statistica Sinica*, *10*(3), 867–884.

Cressie, N. & Read, L. (1984). Multinomial goodness-of-fit tests. *Journal of the Royal Statistical Society B*, *46*(3), 440–464.

Csiszár, I. (1963). Eine informationstheoretische ungleichung und ihre anwendung auf den beweis der ergodizitat von markoffschen ketten. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, *8*(1-2), 85–108.

Csiszàr, I. (1967). Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, *2*, 299–318.

Csiszár, I. (1974). Information measures: A critical survey. In *Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory*, volume B, (pp. 73–86)., Prague, 18-23 august.

Csiszàr, I. (1991). Why least squares and maximum entropy? an axiomatic approach to inference for linear inverse problems. *The Annals of Statistics*, *19*(4), 2031–2066.

Csiszár, I. (1995). Generalized projections for non-negative functions. *Acta Mathematica Hungarica*, *68*(1-2), 161–186.

Csiszàr, I. & Matúš, F. (2012). Generalized minimizers of convex integral functionals, Bregman distance, Pythgorean identities. *Kybernetica*, *48*(4), 637–689.

Csiszár, I. & Shields, P. C. (2004). Information theory and statistics: A tutorial. *Foundations and Trends^{TM} in Communications and Information Theory*, *1*(4), 417–528.

Darmois, G. (1935). Sur les lois de probabilités à estimation exhaustive. *Comptes rendus de l'Acadéie des Sciences*, *200*, 1265–1966.

Darmois, G. (1945). Sur les limites de la dispersion de certaines estimations. *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*, *13*(1/4), 9–15.

Daróczy, Z. (1970). Generalized information functions. *Information and Control*, *16*(1), 36–51.

Daróczy, Z. & Járai, A. (1979). On the measurable solution of a functional equation arising in information theory. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, *34*(1-2), 105–116.

D.Bellhouse (2005). Decoding cardano's liber de ludo aleae. *Historia Mathematica*, *32*(2), 180–202.

Dembo, A., Cover, T. M., & Thomas, J. A. (1991). Information theoretic inequalities. *IEEE Transactions on Information Theory*, *37*(6), 1501–1518.

DeMoivre, A. (1756). *The Doctrine of Chances : or, a method for calculating the probabilities of events in play* (3rd ed.). London: AMS Chelsea Publishing.

Doob, J. L. (1936). Statistical estimation. *Transactions of the American Mathematical Society*, *39*(3), 410–421.

(E. D. Sylla, Translator), J. B. (1713). *The Art of Conjecturing - Together with a "Letter to a Friend on Set in Court Tennis"*. Johns Hopkins University Press.

Ebeling, W., Molgedey, L., Kurths, J., & Schwarz, U. (2000). Entropy, complexity, predictability and data analysis of time series and letter sequences. In *Theory of Disaster* (A. Bundle and H.-J. Schellnhuber ed.). Berlin: Springer Verlag.

Edgeworth, F. Y. (1908). On the probable errors of frequency-constants. *Journal of the Royal Statistical Society*, *71*(3, 6 & 7), 381–397, 499–512 & 499–512.

Elias, P. (1957). List decoding for noisy channels. Technical Report 335, Research Laboratory of Electronics, MIT, MIT, Cambridge, MA.

Endres, D. & Schindelin, J. (2003). A new metric for probability distributions. *IEEE Transactions on Information*

Theory, *49*(7), 1858–1860.

Esteban, M. D. (1997). A general class of entropy statistics. *Applications of Mathematics*, *42*(3), 161–169.

Fadeev, D. K. (1956). On the concept of entropy of a finite probabilistic scheme (russian). *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, *11*(1(67)), 227–231.

Fadeev, D. K. (1958). *Fundations in Information Theory*, chapter On the concept of entropy of a finite probabilistic scheme (English traduction). New-York: McGraw-Hill.

Fano, R. M. (1949). The transmission of information. Technical Report 65, Research Laboratory of Electronics, MIT, MIT, Cambridge, MA.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (3 ed.)., volume 1. New-York: John Wiley & Sons, Inc.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 2. New-York: John Wiley & Sons, Inc.

Ferreri, C. (1980). Hypoentropy and related heterogeneity, divergence and information measures. *Statistica*, *2*, 155–167.

Fisher, R. A. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, *222*(594-604), 309–368.

Fisher, R. A. (1925). Theory of statistical estimation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *22*(5), 700–725.

Flandrin, P. & Rioul, O. (2016). Laplume, sous le masque.

François, O. (2009). Notes de cours de probabilités appliquées. Ensimag.

Fréchet, M. (1943). Sur l'extension de certaines evaluations statistiques au cas de petits echantillons. *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*, *11*(3/4), 182–205.

Frieden, B. R. (2004). *Science from Fisher Information: A Unification*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Frigyik, B. A., Srivastava, S., & Gupta, M. R. (2008). Functional Bregman divergence and Bayesian estimation of distributions. *IEEE Transactions on Infomation Theory*, *54*(11), 5130–5139.

Gallager, R. (1978). Variations on a theme by Huffman. *IEEE Transactions on Information Theory*, *24*(6), 668–674.

Gallager, R. (2001). Claude E. Shannon: a retrospective on his life, work, and impact. *IEEE Transactions on Information Theory*, *47*(7), 2681–2695.

Gelfand, I. M. & Fomin, S. V. (1963). *Calculus of Variations*. Englewood Cliff, NJ, USA: Prentice Hall.

Gel'fand, I. M. & Shilov, G. E. (1964). *Generalized Functions*, volume 1: Properties and Operations. New-York: Academic Press.

Gel'fand, I. M. & Shilov, G. E. (1968). *Generalized Functions*, volume 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions. New-York: Academic Press.

Gibbs, J. W. (1902). *Elementary Principle in Statistical Mechanics*. Cambridge, USA: University Press - John Wilson and son.

Golberg, R. R. (1961). *Fourier Transforms*. Cambridge University Press.

Guo, D., Shamai, S., & Verdú, S. (2005). Mutual information and minimum mean-square error in Gaussian channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, *51*(4), 1261–1282.

Gupta, H. C. & Sharma, B. D. (1976). On non-additive measures of inaccuracy. *Czechoslovak Mathematical Journal*, *26*(4), 584–595.

Hadamard, J. (1893). Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une function considérée par Riemann. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, *58*(9), 171–215.

Haghighatshoar, S., Abbe, E., & Telatar, I. E. (2014). A new entropy power inequality for integer-valued random variables. *IEEE Transactions on Information Theory*, *60*(7), 3787–3796.

Hald, A. (1990). *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. John Wiley & Sons, Inc.

Halmos, P. R. (1950). *Measure Theory*. New-York: Springer.

Hardy, G., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1952). *Inequalities* (2nd ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1929). Some simple inequalities satisfied by convex functions. *Messenger of Mathematics*, *58*, 145–152.

Harremoës, P. & Vignat, C. (2003). An entropy power inequality for the binomial family. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, *4*(5), 93.

Hartley, R. V. L. (1928). Transmission of informations. *The Bell System Technical Journal*, *7*(3), 535–563.

Hausdorff, F. (1901). Beiträge zur wahrscheinlichkeitsrechnung. *Berichte über die Verhandlungen der Köeniglich Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, *53*(1), 152–178.

Havrda, J. & Charvát, F. (1967). Quantification method of classification processes: Concept of structural α-entropy. *Kybernetika*, *3*(1), 30–35.

Hellinger, E. (1909). Neue bergründung der theorie quadratischer formen von unendlichvielen veränderlichen. *Journal für die riene und angewandte Mathematik*, 210–271.

Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. (2013). *Introduction to Mathematical Statistics* (7th ed.). Boston: Pearson.

Hölder, O. (1889). Ueber einen mittelwerthabsatz. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, *2*, 38–47.

Holevo, A. (2011). *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory* (2nd ed.)., volume 1 of *Quaderni Monographs*. Pisa: Edizioni Della Normale.

Holevo, A. S. (1973). Bounds for the quantity of information transmitted by a quantum communication channel. *Problems of Information Transmission*, *9*(3), 177–183.

Huffman, D. A. (1952). A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE*, *40*(9), 1098–1101.

Ibarrola, P., Pardo, L., & Quesada, V. (1997). *Teoría de la Probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Jacob, J. & Protters, P. (2003). *Probability Essentials* (2nd ed.). Berlin: Springer.

Jaynes, E. T. (1957a). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, *106*(4), 620–630.

Jaynes, E. T. (1957b). Information theory and statistical mechanics. II. *Physical Review*, *108*(2), 171–190.

Jaynes, E. T. (1965). Gibbs vs Boltzmann entropies. *American Journal of Physics*, *33*(5), 391–398.

Jaynes, E. T. (1968). Prior probabilities. *IEEE transactions on systems science and cybernetics*, *4*(3), 227–241.

Jaynes, E. T. (1982). On the rational of maximum-entropy methods. *Proceedings of the IEEE*, *70*(9), 939–952.

Jeffrey (1946). An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proceedings of the Royal Society A*, *186*(1007), 453–461.

Jeffrey, H. (1948). *Theory of Probability* (2nd ed.). Oxford: Clarendon.

Jeffrey, H. (1973). *Scientific Inference* (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Jensen, J. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, *30*(1), 175–193.

Jessen, B. (1931a). Bemærkninger om konvekse funktioner og uligheder imellem middelærdier. I. *Matematisk Tidsskrift. B*, 17–28.

Jessen, B. (1931b). Bemærkninger om konvekse funktioner og uligheder imellem middelærdier. II. *Matematisk Tidsskrift. B*, 84–95.

Johnson, O. (2004). *Information Theory and The Central Limit Theorem*. London: Imperial college Press.

Johnson, O. & Yu, Y. (2010). Monotonicity, thinning, and discrete versions of the entropy power inequality. *IEEE Transactions on Information Theory*, *56*(11), 5387–5395.

Kafka, P., Österreicher, F., & Vincze, I. (1991). On powers of f-divergences defining a distance. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, *24*(4), 415–422.

Kagan, A. (2001). A discrete version of the stam inequality and a characterization of the Poisson distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, *92*(1-2), 7–12.

Kagan, A. & Smith, P. J. (1999). A stronger version of matrix convexity as applied to functions of Hermitian matrices. *Journal of Inequalities and Applications*, *3*(2), 143–152.

Kagan, A. & Yu, T. (2008). Some inequalities related to the Stam inequality. *Applications of Mathematics*, *53*(3), 195–205.

Kailath, T. (1967). The divergence and Bhattacharyya distance measures in signal selection. *IEEE Transactions on Communications*, *15*(1), 52–60.

Kaniadakis, G. (2001). Non-linear kinetics underlying generalized statistics. *Physica A*, *296*(3-4), 405–425.

Kapur, J. N. (1967). Generalized entropy of order α and type β. *The Mathematical Seminar*, *4*, 78–94.

Kapur, J. N. (1989). *Maximum Entropy Model in Sciences and Engineering*. New-Dehli: Wiley Eastern Limited.

Kapur, J. N. & Kesavan, H. K. (1992). *Entropy Optimization Principle with Applications*. San Diego: Academic Press.

Karamata, J. (1932). Sur une inegalité relative aux fonctions convexes. *Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade*, *1*, 145–148.

Karush, J. (1961). A simple proof of an inequality of McMillan. *IEEE Transactions on Information Theory*, *7*(2), 118–118.

Kay, S. M. (1993). *Fundamentals for Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. vol. 1. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Kendall, D. G. (1964). Functional equations in information theory. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, *2*(3), 225–229.

Khinchin, A. I. (1957). *Mathematical foundations of information theory*. New-York: Dover Publications.

Kolmogorov, A. N. (1930). Sur la notion de la moyenne. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, *12*, 388–391.

Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability* (2nd ed.). New-York: Chelsea Publishing Company.

Kolmogorov, A. N. (1991). On the notion of mean. In V. M. Tikhomirov (Ed.), *Selected Works of A. N. Kolmogorov*, volume I: Mathematics and Mechanics (pp. 144–146). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V. (1957). *Elements of the Theory of Function and Functional Analysis*, volume 1: Metric and Normed Spaces. Rochester, NY, USA: Graylock Press.

Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V. (1961). *Elements of the Theory of Function and Functional Analysis*, volume 2: Measure. The Lebesgue Integral. Hilbert Space. Rochester, NY, USA: Graylock Press.

Koopman, B. O. (1936). On distributions admitting a sufficient statistic. *Transactions of the American Mathematical Society*, *39*(3), 399–399.

Kraft Jr, L. G. (1949). A device for quantizing, grouping, and coding amplitude-modulated pulses. Master's thesis, Department of Electrical Engineering, MIT, Massachusetts Institute of Technology.

Krajči, S., Liu, C.-F., Mikeš, L., & Moser, S. M. (2015). Performance analysis of Fano coding. In *2015 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, (pp. 1746–1750)., Hong-Kong, China.

Kuczma, M. (2009). *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality* (2nd ed.). Basel: Birkhäuser.

Kullback, S. (1968). *Information Theory and Statistics*. Dover Publications.

Kullback, S. & Leibler, R. (1951). On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, *22*(1), 79–86.

Kumar, P. & Chhina, S. (2005). A symmetric information divergence measure of the Csiszár's f-divergence class and its bounds. *Computers and Mathematics with Applications*, *49*(4), 575–588.

Laplume, J. (1948). Sur le nombre de signaux discernables en présence de bruit erratique dans un système de transmission à bande passance limitéee. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, *226*, 1348–1349. Séance du 26 avril.

Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'Intégration et la recherche des Fonctions Primitives*. Paris: Gauthier-Villars et fils.

Lebesgue, H. (1918). Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, *35*, 191–250.

Lee, P. M. (1964). On the axioms of information theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, *35*(1), 415–418.

Lehmann, E. L. & Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation* (2nd ed.). New-York: Springer-Verlag.

Lieb, E. H. (1975). Some convexity and subadditvity properties of entropy. *Bulletin of the American Mathematcal Society*, *81*(1), 1–13.

Lieb, E. H. (1978). Proof of an entropy conjecture of Wehrl. *Communications in Mathematical Physics*, *62*(1), 35–41.

Lieb, E. H. & Loss, M. (2001). *Analysis* (2nd ed.). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Liese, F. & Vajda, I. (2006). On divergence and informations in statistics and information theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, *52*(10), 4394–4412.

Lin, J. (1991). Divergence measures based on the Shannon entropy. *IEEE Transactions on Information Theory*, *37*(1), 145–151.

Lindhard, J. & Nielsen, V. (1971). Studies in statistical mechanics. *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Matematisk-fysiske Meddelelser*, *38*(9), 1–42.

Lukacs, E. (1961). Recent developments in the theory of characteristic functions. In *Proceeding of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 2: Contributions to Probability Theory, (pp. 307–335). University of California Press, Berkeley, CA.

Lundheim, L. (2002). On Shannon and “Shannon's formula”. *Telektronikk*, *98*(1), 20–29.

Lutwak, E., Lv, S., Yang, D., & Zhang, G. (2012). Extension of Fisher information and Stam's inequality. *IEEE Transactions on Information Theory*, *58*(3), 1319–1327.

Lutwak, E., Yang, D., & Zhang, G. (2005). Cramér-Rao and moment-entropy inequalities for Rényi entropy and generalized Fisher information. *IEEE Transactions on Information Theory*, *51*(2), 473–478.

Magnus, J. R. & Neudecker, H. (1999). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics* (3rd ed.). New-York: John Wiley & Sons.

Mandel, L. & Wolf, E. (1995). *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press.

Marshall, A. W., Olkin, I., & Arnold, B. C. (2011). *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications* (2nd ed.). New-York: Springer Verlag.

Maxwell, J. C. (1867). On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, *157*, 49–88.

McMillan, B. (1956). Two inequalities implied by unique decipherability. *IEEE Transactions on Information Theory*, *2*(4), 115–116.

Menéndez, M. L., Morales, D., Pardo, L., & Salicrú, M. (1997). (h, ϕ)-entropy differential metric. *Applications of Mathematics*, *42*(1-2), 81–98.

Menéndez, M. L., Morales, D., Pardo, L., & Vajda, I. (1977). Testing in stationary models based on divergences of observed and theoretical frequencies. *Kybernetica*, *33*(5), 465–475.

Merhav, N. (2010). Statistical physics and information theory. *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory*, *6*(1-2), 1–212.

Merhav, N. (2018). *Statistical Physics for Electrical Engineering*. Springer.

Miller, R. E. (2000). *Optimization: Foundations and Applications*. New-York: John Wiley & Sons, inc.

Minkowski, H. (1910). *Geometrie der Zahlen*. Leipzig, Germany: Teubner.

Mittal, D. P. (1975). On additive and non-additive entropies. *Kybernetica*, *11*(4), 271–276.

Montagné, J.-C. B. (2008). *Transmissions. L'histoire des moyens de communication à distance depuis l'Antiquité jusqu'au milieu du xxe siècle*. Bagneux, JCB Montagné.

Morimoto, T. (1963). Markov processes and the H-theorem. *Journal of the Physical Society of Japan*, *18*(3), 328–331.

Nagumo, M. (1930). Über eine klasse der mittelwerte. *Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts*, *7*, 71–79.

Nielsen, F. & Boltz, S. (2011). The Burbea-Rao and Bhattacharyya centroids. *IEEE Transactions on Information Theory*, *57*(8), 5455–5466.

Nielsen, F. & Nock, R. (2017). Generalizing skew Jensen divergences and Bregman divergences with comparative convexity. *IEEE Signal Processing Letters*, *24*(8), 1123–1127.

Ohya, M. & Petz, D. (1993). *Quantum Entropy and Its Use*. Berlin: Springer Verlag.

Onicescu, O. (1966). Energie informationnelle. *Comptes rendus de l'académie des Sciences. série 1, mathématiques*, *263*(3), 841–842.

Orsak, G. C. & Paris, B.-P. (1995). On the relationship between measures of discrimination and the performance of suboptimal detectors. *IEEE Transactions on Information Theory*, *41*(1), 188–203.

Osán, T. M., Bussandri, D. G., & Lamberti, P. W. (2018). Monoparametric family of metrics derived from classical Jensen-Shannon divergence. *Physica A*, *495*, 336–344.

Österreicher, F. (1996). On a class of perimeter-type distances of probability distributions. *Kybernetika*, *32*(4), 389–393.

Österreicher, F. & Vajda, I. (2003). A new class of metric divergences on probability spaces and its applicability in statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, *55*(3), 639–653.

Palomar, D. P. & Verdú, S. (2006). Gradient of mutual information in linear vector Gaussian channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, *52*(1), 141–154.

Pardo, L. (2006). *Statistical Inference Based on Divergence Measures*. Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall.

Pardo, M. C. (1999). On Burbea-Rao divergence based goodness-of-fit tests for multinomial models. *Journal of Multivariate Analysis*, *69*(1), 65–87.

Payaró, M. & Palomar, D. P. (2009). Hessian and concavity of mutual information differential entropy, and entropy power in linear vector gaussian channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, *55*(8), 3613–3628.

Pearson, K. & Filon, L. N. G. (1898). Mathematical contributions to the theory of evolution. IV. on the probable errors of frequency constants and on the influence of random selection on variation and correlation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, *191*, 229–311.

Perlman, M. D. (1974). Jensen's inequality for a convex vector-valued function on an infinite-dimensional space. *Journal of Multivariate Analysis*, *4*(1), 52–65.

Petz, D. (2007). Bregman divergence as relative operator entropy. *Acta Mathematica Hungarica*, *116*(1-2), 127–131.

Phillips, F. Y. & Rousseau, J. J. (Eds.). (1992). *Systems and Management Science by Extremal Methods*. Springer.

Pigeon, S. (2003). Huffman coding. In K. Sayood (Ed.), *Lossless Compression Handbook* chapter 4, (pp. 79–99). San Diego, CA: Academic Press.

Planck, M. (2015). *Eight Lectures on Theoretical Physics*. New-York: Columbia University Press.

Poor, H. V. (1988). Fine quantization in signal detection and estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, *34*(5), 960–972.

Rao, C. R. (1945). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, *37*(3), 81–91.

Rao, C. R. (1992). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. In S. Kotz & N. L. Johnson (Eds.), *Breakthroughs in Statistics: Foundations and Basic Theory*, volume I (pp. 235–247). New York: Springer.

Rao, C. R. & Wishart, J. (1947). Minimum variance and the estimation of several parameters. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *43*(2), 280–283.

Rathie, P. N. (1991). Unified (r, s)-entropy and its bivariate measures. *Information Sciences*, *54*(1-2), 23–39.

Rényi, A. (1961). On measures of entropy and information. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1: Contributions to the Theory of Statistics, (pp. 547–561). University of California Press, Berkeley, CA.

Rioul, O. (2007). *Théorie de l'information et du codage*. Paris: Lavoisier.

Rioul, O. (2011). Information theoretic proofs of entropy power inequalities. *IEEE Transactions on Information Theory*, *57*(1), 33–55.

Rioul, O. (2017). Yet another proof of the entropy power inequality. *IEEE Transactions on Information Theory*, *63*(6), 3595–3599.

Rioul, O. & Flandrin, P. (2017). Le dessein de laplume. In *Colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, France.

Rioul, O. & Magossi, J. (2014). On Shannon's formula and Hartley's rule: Beyond the mathematical coincidence. *Entropy*, *16*(12), 4892–4910.

Robert, C. P. (2007). *The Bayesian Choice. From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation* (2nd ed.). New-York: Springer.

Rudin, W. (1991). *Functional Analysis* (2nd ed.). New-York: McGraw-Hill.

Salicrú, M. (1987). Funciones de entropía asociada a medidas de Csiszár. *Qüestiió*, *11*(3), 3–12.

Salicrú, M. (1994). Measures of information associated with Csiszár's divergences. *Kybernetica*, *30*(5), 563–573.

Salicrú, M., Menéndez, M. L., Morales, D., & Pardo, L. (1993). Asymptotic distribution of (h, ϕ)-entropies. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, *22*(7), 2015–2031.

Sayood, K. (Ed.). (2003). *Lossless Compression Handbook*. San Diego, CA: Academic Press.

Schur, I. (1923). Über eine klasse von mittelbildungen mit anwendungen auf die determinantentheorie. *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, *22*, 9–20.

Schwartz, L. (1966). *Théorie des distributions*. Paris: Hermann.

Schwarz, H. A. (1888). Ueber ein die flächen kleinsten flächeninhalts betreffendes problem der variationsrechnung. *Acta societatis scientiarum Fennicæ*, *15*, 315–362.

Shafer, G. & Vovk, V. (2006). The sources of Kolmogorov's grundbegriffe. *Statistical Science*, *21*(1), 70–98.

Shamai, S. & Wyner, A. (1990). A binary analog to the entropy-power inequality. *IEEE Transactions on Information Theory*, *36*(6), 1428–1430.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, *27*(4), 623–656.

Shannon, C. E. & Weaver, W. (1964). *The Mathematical Theory of Communication*. Urbana, USA: The University of Illinois Press.

Sharma, B. D. & Mittal, D. P. (1975). New non-additive measures of entropy for discrete probability distributions. *Journal of Mathematical Sciences*, *10*, 28 –40.

Sharma, B. D. & Taneja, I. J. (1975). Entropy of type (α, β) and other generalized measures in information theory. *Metrika*, *22*(1), 205–215.

Sharma, N., Das, S., & Muthukrishnan, S. (2011). Entropy power inequality for a family of discrete random variables. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, (pp. 1945–1949)., Saint Petersburg, Russia.

Sierpiński, W. (1918). Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables. *Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie: Série A. Classe des sciences mathématiques et naturelles – Sciences mathématiques*, 29–34.

Sierpiński, W. (1975). *Oeuvres choisies, Tome II: Théorie des ensembles et ses applications*. Warszawa, Poland: PWM Éditions scientifiques de Pologne.

Sierpiński, W. (1976). *Oeuvres choisies, Tome III: Théorie des ensembles et ses applications*. Warszawa, Poland: PWM Éditions scientifiques de Pologne.

Spiegel, M. (1976). *Probabilidad y Estadística*. México: McGrew Hill.

Stam, A. J. (1959). Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon. *Information and Control*, *2*(2), 101–112.

Steele, J. M. (2004). *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.

Stix, G. (1991). Profile: Davis a. Huffman. *Scientific American*, *265*(3), 54–58.

Teboulle, M. (1992). On Φ-divrgence and its applications. In F. Y. Phillips & J. J. Rousseau (Eds.), *Systems and Management Science by Extremal Methods* chapter 17, (pp. 255–273). Springer.

Toranzo, I. V., Zozor, S., & Brossier, J.-M. (2018). Generalization of the de Bruijn identity to general ϕ-entropies and ϕ-fisher informations. *IEEE Transactions on Information Theory*, on press.

Tribus, M. & McIrvine, E. C. (1971). Energy and information. *Scientific American*, *225*(3), 179–188.

Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, *52*(1-2), 479–487.

Tverberg, H. (1958). A new derivation of the information function. *Mathematica Scandinavica*, *6*, 297–298.

Vajda, I. (1968). Axioms for a-entropy of a generalized probability scheme. *Kybernetika*, *4*(2), 105–112.

Vajda, I. (1972). On the f-divergence and singularity of probability measures. *Periodica Mathematica Hungarica*, *2*(1-4), 223–234.

Vajda, I. (2009). On metric divergences of probability measures. *Kybernetika*, *45*(6), 885–900.

van Brakel, J. (1976). Some remarks on the prehistory of the concept of statistical probability. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(2), 119–136.

van Brunt, B. (2004). *The Calculus of Variations*. New-York: Springer Verlag.

van den Bos, A. (2007). *Parameter Estimation for Scientists and Engineers*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Varma, R. S. (1966). Generalization of Rényi's entropy of order α. *Journal of Mathematical Sciences*, *1*, 34–48.

Verdu, S. (1998). Fifty years of Shannon theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, *44*(6), 2057–2078.

Verdú, S. & Guo, D. (2006). A simple proof of the entropy-power inequality. *IEEE Transactions on Information Theory*, *52*(5), 2165–2166.

von Mises, R. (1932). Théorie des probabilités. fondements et applications. *Annales de l'institut Henri Poincaré*, *3*(2), 137–190.

von Plato, J. (2005). A.N. Kolmogorov, Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung (1933). In *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* chapter 75, (pp. 960–969). Elsevier.

Wang, L. & Madiman, M. (2004). Beyond the entropy power inequality via rearrangements. *IEEE Transactions on Information Theory*, *60*(9), 5116–5137.

Wiener, N. (1948). *Cybernetics: or Control and Communication in the Animal end the Machine* (2nd ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Wong, A. K. C. & You, M. (1985). Entropy and distance of random graphs with application to structural pattern recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *7*(5), 599–609.

Zamir, R. (1998). A proof of the Fisher information inequality via a data processing argument. *IEEE Transactions on Information Theory*, *44*(3), 1246–1250.

Zhang, J. (2004). Divergence function, duality, and convex analysis. *Neural Computation*, *16*(1), 159–195.

Zozor, S., Puertas-Centeno, D., & Dehesa, J. S. (2017). On generalized Stam inequalities and Fisher–Rényi complexity measures. *Entropy*, *19*(9), 493.

Los autores

Lamberti, Pedro Walter

Este es un párrafo Normal con texto simulado, (Arial 10, interlineado de 1,5 líneas, sin sangría en la primera línea). Este es un párrafo Normal con texto simulado, (Arial 10, interlineado de 1,5 líneas, sin sangría en la primera línea). Este es un párrafo Normal con texto simulado, (Arial 10, interlineado de 1,5 líneas, sin sangría en la primera línea). Este es un párrafo Normal con texto simulado, (Arial 10, interlineado de 1,5 líneas, sin sangría en la primera línea).

Portesi, Mariela Adelina

Obtuvo el título de Licenciada en Física en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, y el grado de Doctora en Física en la misma casa de altos estudios. Es Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, con lugar de trabajo en el Instituto de Física La Plata. Su especialidad es la teoría y geometría de la información en mecánica cuántica. Posee cargo docente de Profesor Adjunto en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP, desempeñándose desde 2013 como integrante del Equipo Coordinador de la asignatura Análisis Matemático II (CiBEx). cursos de grado avanzados y de posgrado en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP y en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba. También ha participado en el dictado del curso de grado “Probabilidades” como Profesor Visitante de la Université Grenoble-Alpes en Francia.

Zozor, Steeve

Nació en 1972 en Colmar, Francia. Obtuvo el título de Ingeniero, de Licenciada, el grado de Doctor y la “Habilitation à diriger de Recherches”, respectivamente en 1995, 1999 y 2012, ambos del Instituto Nacional Politécnico de Grenoble (Grenoble INP), Francia. En 2001, paso varios meses en el Laboratorio de Procesamiento de Señales de la Escuela Politénica Federal de Lausanne (EPFL), Suiza como postdoctorante. Pasó un año en el Instituto de Física de La Plata (IFLP) de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina (2012-2013) así que varios estancias desde 2010 como profesor visitante. En 2001 ingresó al Centro National de la Investigación Cientifica (CNRS), equivalente Francés del CONICET, como “Chargé de Recherche” (cargado de investigación) y es “Directeur de Recherches” (director de investigación) desde 2017, ambos en el Laboratorio de Imagenes, Palabras, Señales y Automática de Grenoble (GIPSA-Lab), Francia. Desde 2015 es editor asociado de la revista IEEE Signal Processing Letters. Sus temas de investigación incluyen el procesamiento no lineal de señales, el estudio del efecto de resonancia estocástica, el estudio de procesamiento de datos en contextos α-estables y/o de distribuciones de probabilidad elípticas, la téoria de la información (medidades informacionales generalizadas clásicas y cúanticas) con aplicaciones en procesamientos de datos, mecanica cúantica o ingeniería biomédica. Es a cargo de docencia en varias escuelas de Grenoble-INP de matemática para el ingeniero, probabilidades aplicadas, procesamiento estadístico de señales, métodos bayesianos. Da regularmente un mini-curso sobre los básicos de la teoría de la información en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP.