

# Ryzyko inwestycji w akcje Alior Bank S.A. i PKO Bank Polski S.A.

Projekt - Teoria Ryzyka

Szymon Pawłowski

## 1 Wstęp

Głównym celem projektu jest pokazanie sposobów mierzenia ryzyka oraz portfela inwestycyjnego tak, aby podane ryzyko było minimalne. Przedmiotami inwestycji są dwie spółki akcyjne z sektora bankowego, który jest częścią całego systemu bankowego w Polsce. System ten składa się z instytucji stabilizujących (bank centralny - Narodowy Bank Polski, organ nadzorujący - Komisja Nadzoru Finansowego inaczej KNF oraz podmiot gwarantujący wypłatę depozytów - Bankowy Fundusz Gwarancyjny inaczej BFG), instytucji pomocniczych oraz instytucji tworzących rynek, czyli naszego sektora bankowego. W ramach tego rynku funkcjonują banki (m.in. banki komercyjne, spółdzielcze) oraz oddziały instytucji kredytowych. Przed przystąpieniem do analizy ryzyka inwestycji w dwie spółki z tego sektora (Alior Bank S.A. oraz PKO Bank Polski S.A.) dokonamy ich krótkiej charakterystyki.

## 1.1 Alior Bank S.A.

Alior Bank S.A. to średniej wielkości bank uniwersalny kierujący swoją ofertę do klientów indywidualnych oraz biznesowych. Założony w 2008 roku przez włoską Grupę Carlo Tassara z inicjatywy Wojciecha Sobieraja, który był jego prezesem przez długi okres czasu.



**Rys. 1:** Logo banku Alior Bank

Alior Bank z początku zdominował polski sektor bankowy dzięki wprowadzonym innowacjom i nowym modelom działalności. Jako pierwszy z polskich banków zaoferował m.in. konta osobiste z bezpłatnym dostępem do bankomatów oraz lokatami overnight (lokata, której czas trwania wynosi tylko jedną noc), zintegrowane rachunki (bieżący i maklerski) oraz rachunek zarabiający dla średnich firm. W latach 2009 - 2010 uzyskał wiele nagród przyznawanych przez prestiżowe magazyny jak Forbes czy Newsweek (m.in. "Najlepszy bank w internecie", "Najlepszy bank detaliczny", "Przyjazny Bank Newsweeka"). W ciągu czterech lat bank zbudował jedną z największych sieci dystrybucji w Polsce pod względem liczby placówek, a także rozwinął bankowość online, mobilną oraz wirtualną (w czerwcu 2012 roku uruchomiono wirtualny oddział pod marką Alior Sync, który był pierwszym takim w Polsce).

W 2012 roku Alior Bank zadebiutował także na GPW (Giełdzie Papierów Wartościowych). Grupa Carlo Tassara wyprzedziła swoje akcje do końca 2016 roku. Bank nawiązał także współpracę z T-Mobile Polska (2014 rok), w której T-Mobile świadczył usługi pośrednictwa finansowego. W 2015 roku Alior Bank przejęła grupa ubezpieczeń PZU zakupując ponad 25% akcji. W tym samym roku Alior Bank połączył się z bankiem Meritum. Otworzył również oddział w Rumunii.

W 2017 roku po odejściu ze stanowiska Wojciecha Sobieraja miała miejsce duża rotacja w zarządzie. Aktualnie powołana jest 6-osobowa kadencja składająca się z samych Wiceprezesów, którymi są Maciej Brzozowski, Seweryn Kowalczyk, Agnieszka Nogajczyk-Simeonow, Agata Strzelecka, Dariusz Szwed oraz Iwona Duda jako Wiceprezes kierująca pracami zarządu.

## 1.2 PKO Bank Polski S.A.

PKO Bank Polski S.A. to bank uniwersalny obsługujący zarówno osoby fizyczne, przedsiębiorstwa jak i korporacje. Jego historia powstania sięga początku XX. wieku, kiedy to została utworzona Pocztowa Kasa Oszczędności, którą zlikwidowano niecałe 20 lat później i w jej miejsce powołano Powszechną Kasę Oszczędności. W 1975 roku włączono PKO w struktury Narodowego Banku Polskiego, jednak w 1987 roku stał się on samodzielnym bankiem przyjmując nazwę PKO Bank Polski. Na podstawie rozporządzenia Rady Ministrów w 2000 roku przekształcono PKO BP w jednoosobową spółkę Skarbu Państwa, która zadebiutowała na GPW 4 lata później.

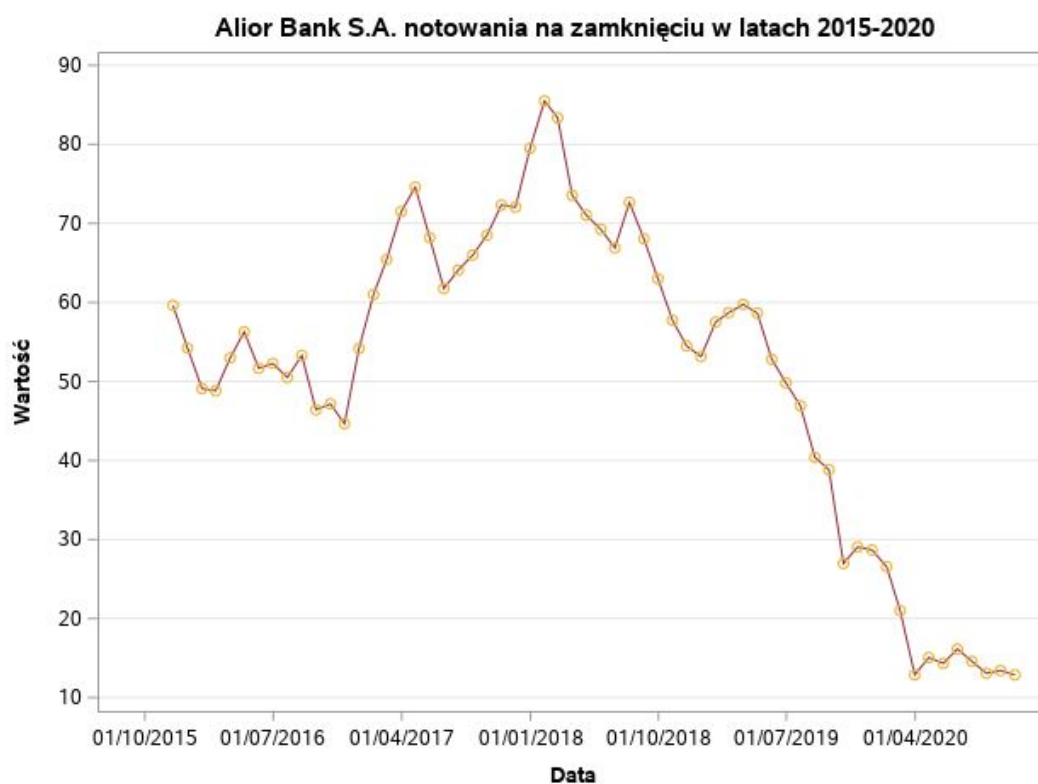


Rys. 2: Logo banku PKO BP

Bank ten łączy dominującą rolę w sektorze detalicznym wraz z sukcesywnym wzmacnianiem pozycji w obszarze segmentu korporacyjnego i inwestycyjnego. Jest liderem pod względem wartości udzielonych kredytów hipotecznych, wydanych kart płatniczych oraz prowadzonych rachunków bieżących. Nieprzerwanie rozwija zakres i jakość usług bankowości elektronicznej (iPKO prowadzone w ramach konta Inteligo) oraz bankowości mobilnej IKO. Co więcej, PKO BP jest liderem grupy kapitałowej, w której skład wchodzi spółki zależne, współzależne oraz stowarzyszone z bankiem, które uzupełniają oferty banku o produkty i usługi takie jak leasing, faktoring, fundusze inwestycyjne i emerytalne a nawet rynek nieruchomości. Bank prowadzi także działalność na terenie Ukrainy (m. in. Kredobank S.A., Inter-Risk Ukraina), a także Szwecji (PKO Finance AB i PKO Leasing Sverige AB).

PKO Bank Polski S.A. jest kontrolowany przez Skarb Państwa, który posiada 29,34% akcji. Ponadto znajdują się inwestorzy instytucjonalni i indywidualni (Nationale Nederlanden Otwarty Fundusz Emerytalny posiada 5,17% udziału w kapitale zakładowym, Aviva Otwarty Fundusz Emerytalny 6,72%, a pozostali 58,68%). W skład zarządu wchodzi 9 osób, w tym Rafał Antczak, Rafał Kozłowski, Maks Kraczkowski, Mieczysław Król, Adam Marciniak, Piotr Mazur, Jakub Papierski i Jan Emeryk Rościszewski pełniący funkcję Wiceprezesów Zarządu nadzorujących odpowiednie jednostki oraz Zbigniew Jagiełło pełniący funkcję Prezesa Zarządu Banku.

### 1.3 Analiza notowań Alior Bank



**Rys. 3:** Notowania (na zamknięciu) Alior Bank S.A. w latach 2015-2020

**Źródło:** [www.stooq.pl](http://www.stooq.pl)

Do roku 2017 można zaobserwować tendencję spadkową cen spowodowaną ogólnym spadkiem indeksu giełdowego, który nastąpił po zapowiedzi restrukturyzacji kredytów walutowych (wprowadzenie tzw. kursu sprawiedliwego), nastąpiły także podwyżki opłat oraz obniżyło się oprocentowanie lokat, a UOKiK nałożyło na bank karę ws. reklamy ("Gwarancja najniższej raty"), mimo to pojawiały się także momenty wzrostów na które przyczyniły się między innymi dobre wyniki banku.

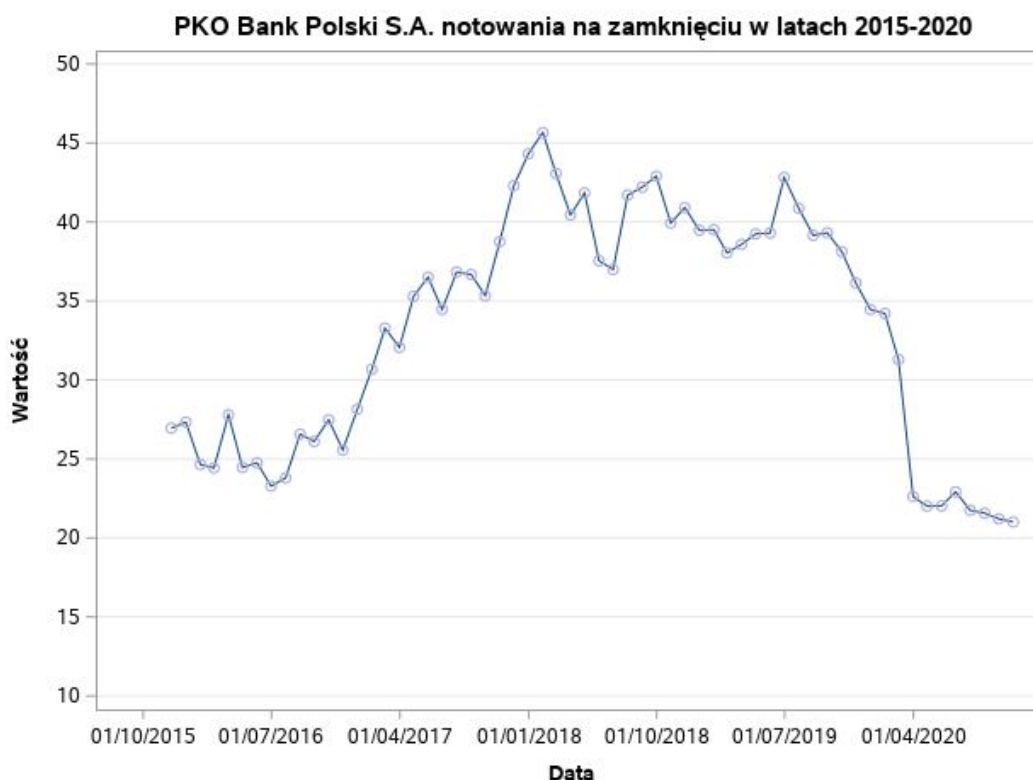
Rok 2017 był natomiast dobrym rokiem dla banku (oprócz chwilowego spadku gdy prezes banku Wojciech Sobieraj zrezygnował ze stanowiska). Grupa PZU wykupiła akcje banku Pekao, Alior Bank ponownie wykazał się świetnymi wynikami, wzrósł jego wskaźnik ROE, a także ogłosił planowane kolejne inwestycje w IT. Pojawiły się także przesłanki o fuzji banku z bankiem Pekao oraz powiadomiono o planach uruchomienia pośrednika finansowego Bancovo.

Rok 2018 przyniósł ze sobą olbrzymie spadki trwające aż po dziś dzień. W zarządzie rozpoczęła się rotacja. Zaniepokoiły również problemy finansowe klientów (nierzetel-

ność danych ZM Kania i RUCH, upadłość Onico), dodatkowo Alior Bank został obciążony kolejnymi karami nałożonymi przez KNF, co więcej, Trybunał Sprawiedliwości Unii Europejskiej ogłosił wyrok dot. kredytów konsumenckich co znacząco pomniejszyło zysk banku i musiały zostać na ten cel odłożone rezerwy. Epidemia koronawirusa w 2020 roku, którą odczuła cała gospodarka światowa przybiła ceny akcji do podłoża.

Źródło: [www.bankier.pl](http://www.bankier.pl)

#### 1.4 Analiza notowań PKO BP



**Rys. 4:** Notowania (na zamknięciu) PKO BP S.A. w latach 2015-2020

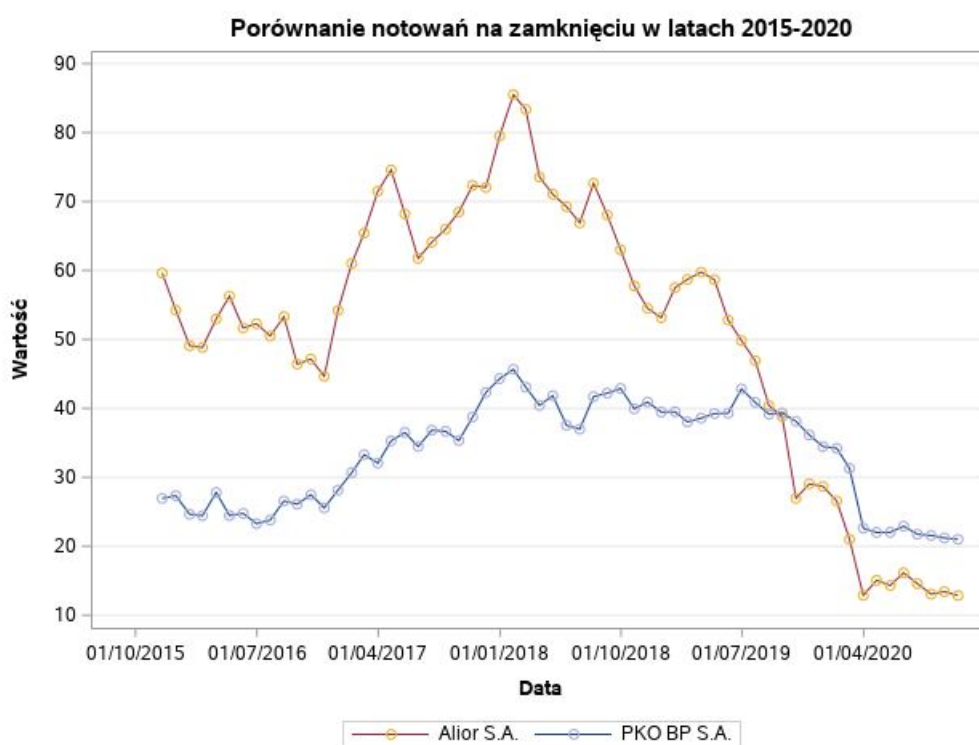
Źródło: [www.stooq.pl](http://www.stooq.pl)

W pierwszym okresie aż do maja 2016 roku możemy zaobserwować tendencję spadkową notowań. Przyczyniły się do tego m. in. częste zmiany w radzie nadzorczej oraz niepewność polityczna w Polsce. Dodatkowo ogólna sytuacja na rynku bankowym związana z przewalutowaniem kredytów oraz podwyższaniem opłat także sprzyjała temu zjawisku. Mimo to, informacja o bardzo dobrym wyniku za '15 rok potrafiła zmienić chwilowo kierunek krzywej.

Rok 2017 był dobrym rokiem. Pojawił się nowy projekt ws. rozwiązania frankowych problemów, PKO wprowadził nową strategię digitalizacji, a także nawiązał współpracę z PGNiG w obszarze bankowości transakcyjnej, zaczął obsługiwać budżety części miast Górnośląskich oraz województwa Pomorskiego i podpisał umowę Cash-Pool z PKN Orlen. Co więcej, przeprowadzone zostały przejęcia Raiffeisen - Leasing Polska.

Sytuacja odwróciła się jednak od roku 2018. Mimo pojedynczych epizodów wzrostowych (spowodowanych m. in. uruchomieniem sprzedaży ubezpieczeń komunikacyjnych, rozwojem technologii blockchain, a także podpisaniem umowy z firmą technologiczną na obsługę chmury obliczeniowej), widoczna jest ogólna tendencja spadkowa trwająca aż do dziś. W zarządzie była olbrzymia rotacja. Pojawiały się niepewności z wierzytelnościami Gino Rossi, próbowano ściągnąć wierzytelności od spółki Ursus, które zostały później wstrzymane, a ostatecznie ogłoszono upadłość firmy. Wyroki TSUE ws. kredytów konsumenckich oraz walutowych obciążyły wyniki a Rada Polityki Pieniężnej wydała decyzje o cięciu stóp procentowych w związku z epidemią.

Źródło: [www.bankier.pl](http://www.bankier.pl)



**Rys. 5:** Notowania (na zamknięciu) Alior Bank S.A oraz PKO BP S.A.

## 2 Analiza danych

Do analizy wykorzystano notowania spółek Alior Bank S.A. oraz PKO Bank Polski S.A. w latach 2015-2020. Dane pobrano z serwisu [www.stooq.pl](http://www.stooq.pl) i przygotowano w ujęciu miesięcznym.

### 2.1 Stopy strat

W celu obliczenia ryzyka inwestycji wyznaczono stopy strat za pomocą poniższego wzoru:

$$L = \frac{W_o - W_z}{W_o} * 100\%$$

gdzie:

$L$  - stopa strat w danym miesiącu wyrażona w %

$W_o$  - wartość notowania na otwarciu w danym miesiącu

$W_z$  - wartość notowania na zamknięciu w danym miesiącu

Dane przedstawiono w poniższej tabeli, gdzie wartość ujemna oznacza uzyskany procentowy zysk w danym miesiącu, natomiast wartość dodatnia określa stratę i została oznaczona czerwoną czcionką. W przypadku Alior Bank odnotowano 37 strat, natomiast w przypadku PKO BP było ich 30. W dalszej części pracy stopa strat dla Alior Bank zostanie oznaczona jako  $L_{alior}$ , a dla PKO BP jako  $L_{pko}$ .

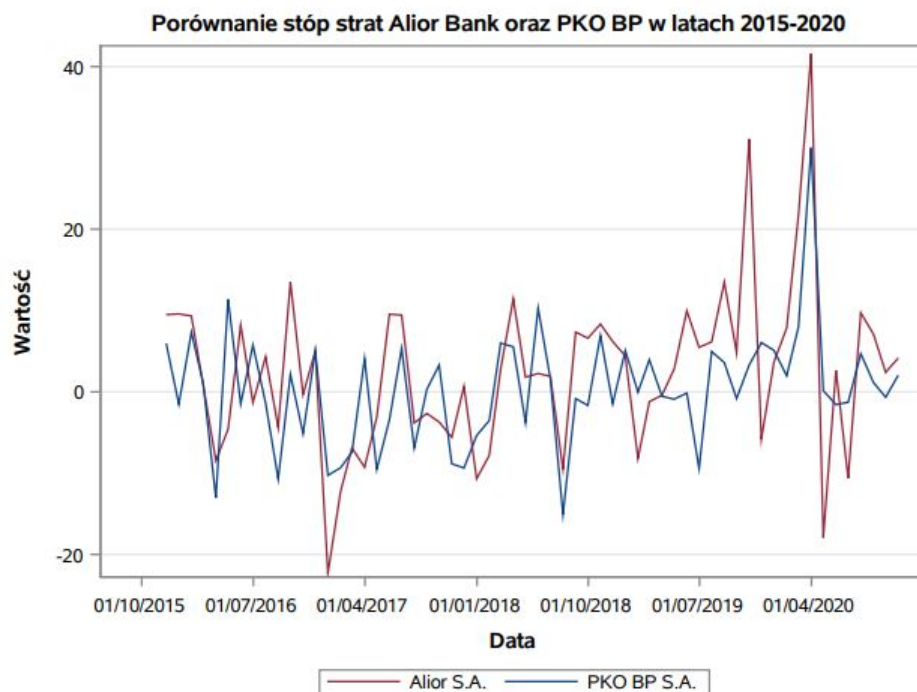
	Alior Bank S.A.			PKO Bank Polski S.A.		
Data	Otwarcie	Zamknięcie	Stopa straty	Otwarcie	Zamknięcie	Stopa straty
30/11/2015	65.89	59.63	9.5007	28.66	26.95	5.9665
31/12/2015	59.98	54.23	9.5865	26.92	27.33	-1.523
31/01/2016	54.14	49.09	9.3277	26.6	24.65	7.3308
29/02/2016	49.21	48.82	0.7925	24.68	24.43	1.013
31/03/2016	48.84	52.97	-8.4562	24.59	27.8	-13.0541
30/04/2016	53.81	56.28	-4.5902	27.6	24.46	11.3768
31/05/2016	56.27	51.66	8.1926	24.4	24.76	-1.4754
30/06/2016	51.6	52.28	-1.3178	24.7	23.28	5.749
31/07/2016	52.78	50.5	4.3198	23.48	23.8	-1.3629
31/08/2016	51.06	53.29	-4.3674	24	26.57	-10.7083
30/09/2016	53.65	46.41	13.4949	26.68	26.11	2.1364
31/10/2016	47	47.15	-0.3191	26.14	27.48	-5.1262
30/11/2016	47	44.65	5	26.92	25.56	5.052
31/12/2016	44.31	54.19	-22.2974	25.52	28.14	-10.2665
31/01/2017	54.32	61	-12.2975	28.05	30.67	-9.3405
28/02/2017	61.2	65.42	-6.8954	30.98	33.28	-7.4241
31/03/2017	65.42	71.48	-9.2632	33.42	32.06	4.0694
30/04/2017	72.34	74.59	-3.1103	32.22	35.29	-9.5282
31/05/2017	75.4	68.2	9.5491	35.3	36.51	-3.4278
30/06/2017	68.19	61.75	9.4442	36.41	34.46	5.3557
31/07/2017	61.74	64.1	-3.8225	34.46	36.83	-6.8775
31/08/2017	64.29	66	-2.6598	36.8	36.68	0.3261
30/09/2017	66.04	68.49	-3.7099	36.53	35.33	3.285
31/10/2017	68.5	72.33	-5.5912	35.6	38.75	-8.8483
30/11/2017	72.54	72.05	0.6755	38.68	42.3	-9.3588
31/12/2017	71.82	79.5	-10.6934	42.05	44.31	-5.3746
31/01/2018	79.3	85.5	-7.8184	44.1	45.66	-3.5374
28/02/2018	85.75	83.35	2.7988	45.82	43.07	6.0017
31/03/2018	83.05	73.55	11.4389	42.81	40.44	5.5361
30/04/2018	72.35	71.05	1.7968	40.32	41.84	-3.7698
31/05/2018	70.85	69.25	2.2583	41.84	37.54	10.2772
30/06/2018	68.2	66.9	1.9062	37.6	36.99	1.6223
31/07/2018	66.35	72.65	-9.4951	36.24	41.7	-15.0662
31/08/2018	73.45	68.05	7.3519	41.85	42.2	-0.8363
30/09/2018	67.45	63	6.5975	42.2	42.9	-1.6588
31/10/2018	63	57.75	8.3333	42.9	39.93	6.9231
30/11/2018	58.1	54.5	6.1962	40.32	40.91	-1.4633
31/12/2018	55.6	53.15	4.4065	41.58	39.47	5.0746
31/01/2019	53.15	57.5	-8.1844	39.5	39.51	-0.0253
28/02/2019	58	58.7	-1.2069	39.6	38.04	3.9394



	Alior Bank S.A.			PKO Bank Polski S.A.		
Data	Otwarcie	Zamknięcie	Stopa straty	Otwarcie	Zamknięcie	Stopa straty
31/03/2019	59.5	59.75	-0.4202	38.37	38.58	-0.5473
30/04/2019	60.35	58.65	2.8169	38.89	39.24	-0.9
31/05/2019	58.65	52.8	9.9744	39.24	39.3	-0.1529
30/06/2019	52.7	49.82	5.4649	39.13	42.82	-9.4301
31/07/2019	50	46.92	6.16	43	40.87	4.9535
31/08/2019	46.7	40.4	13.4904	40.61	39.15	3.5952
30/09/2019	40.8	38.82	4.8529	39	39.32	-0.8205
31/10/2019	39.14	26.96	31.1191	39.42	38.12	3.2978
30/11/2019	27.46	29.05	-5.7902	38.47	36.14	6.0567
31/12/2019	29.78	28.68	3.6938	36.31	34.46	5.095
31/01/2020	28.84	26.58	7.8363	34.9	34.21	1.9771
29/02/2020	26.82	21	21.7002	34	31.29	7.9706
31/03/2020	22.06	12.88	41.6138	32.33	22.62	30.034
30/04/2020	12.78	15.07	-17.9186	22.04	22.01	0.1361
31/05/2020	14.71	14.32	2.6513	21.69	22.03	-1.5675
30/06/2020	14.6	16.15	-10.6164	22.63	22.92	-1.2815
31/07/2020	16.16	14.59	9.7153	22.82	21.75	4.6889
31/08/2020	14.07	13.07	7.1073	21.82	21.57	1.1457
30/09/2020	13.75	13.42	2.4	21.07	21.21	-0.6645
31/10/2020	13.42	12.86	4.1729	21.45	21.01	2.0513

**Tab. 1:** Stopy strat Alior Bank S.A i PKO BP S.A w latach 2015-2020

Poniżej przedstawiono porównanie otrzymanych stóp strat dla Alior Bank S.A. oraz PKO BP S.A.



**Rys. 6:** Stopy strat Alior Bank S.A oraz PKO BP S.A.

Obydwie spółki generowały zarówno zyski jak i straty w podobnym okresie. Co więcej, można zauważyć, że Alior Bank notował większe pojedyncze zyski, jak również i większe straty, niżeli PKO BP, więc nasuwa się wniosek że inwestycja w tą spółkę jest mniej przewidywalna.

## 2.2 Statystyka opisowa

Poniżej przedstawiono wyestymowane momenty dla obu spółek.

Momenty	Alior Bank S.A.	PKO BP S.A.
N	60	60
Min	-22.2974	-15.0662
Max	41.6138	30.034
Średnia	2.448265	0.27699
Mediana	2.72505	0.0554
Wariancja	107.3642	50.359942
STD	10.36167	7.0964739
Skośność	0.8837995	0.8486898
Kurtoza	3.3236408	4.1719196

**Tab. 2:** Wyestymowane charakterystyki liczbowe analizowanych danych

Wartości średnie dla obu banków są dodatnie, zatem obydwie inwestycje mają tendencje do generowania strat. Mimo to, warto zauważyć, że wartość ta jest kilkukrotnie większa dla Alior Bank. Dodatkowo mediana dla tej spółki wskazuje na większą częstość występowania strat niż zysków co zostało wspomniane wcześniej, natomiast mediana dla banku PKO BP jest bliska zeru co świadczy o równomiernym rozłożeniu zysków i strat. Wartość odchylenia standardowego w obu przypadkach ukazuje odstępstwo części danych od średniej. Dodatnia skośność natomiast informuje o wydłużonym prawym ramieniu rozkładu zatem większość danych możemy zaobserwować z prawej strony średniej, a z kolei kurtoza mówi o stopniu "spłaszczenia" rozkładu i tutaj podobnie obserwujemy wartości dodatnie świadczące o rozkładzie bardziej wysmukłym.

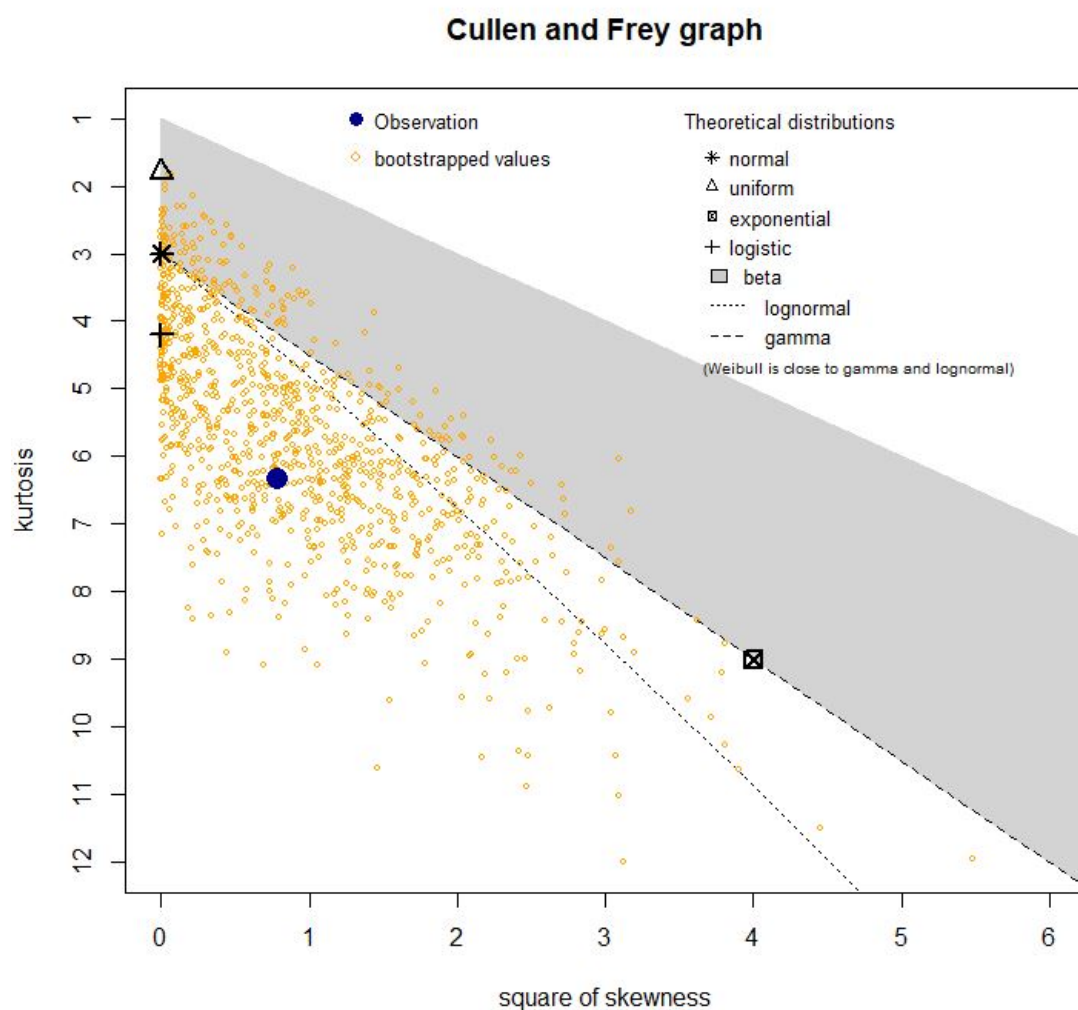
## 2.3 Dopasowanie rozkładu

W następnym kroku zajmiemy się dopasowaniem rozkładów jednowymiarowych do naszych zmiennych losowych  $L_{alior}$ ,  $L_{pko}$  co pozwoli nam na ich modelowanie. Wykonamy to za pomocą testów statystycznych badających rozkłady otrzymanych danych.

Hipoteza zerowa  $H_0$  świadczyć będzie o pochodzeniu danych z rozkładu normalnego, natomiast hipoteza alternatywna  $H_a$  będzie temu zaprzeczać na rzecz stwierdzenia, że dane pochodzą z innego rozkładu. Przyjmujemy poziom istotności równy 0.05, zatem jeżeli wartość  $p$  otrzymana przy teście będzie wyższa od poziomu istotności to nie odrzuca się hipotezy zerowej, w przeciwnym razie odrzucamy ją na rzecz hipotezy alternatywnej.

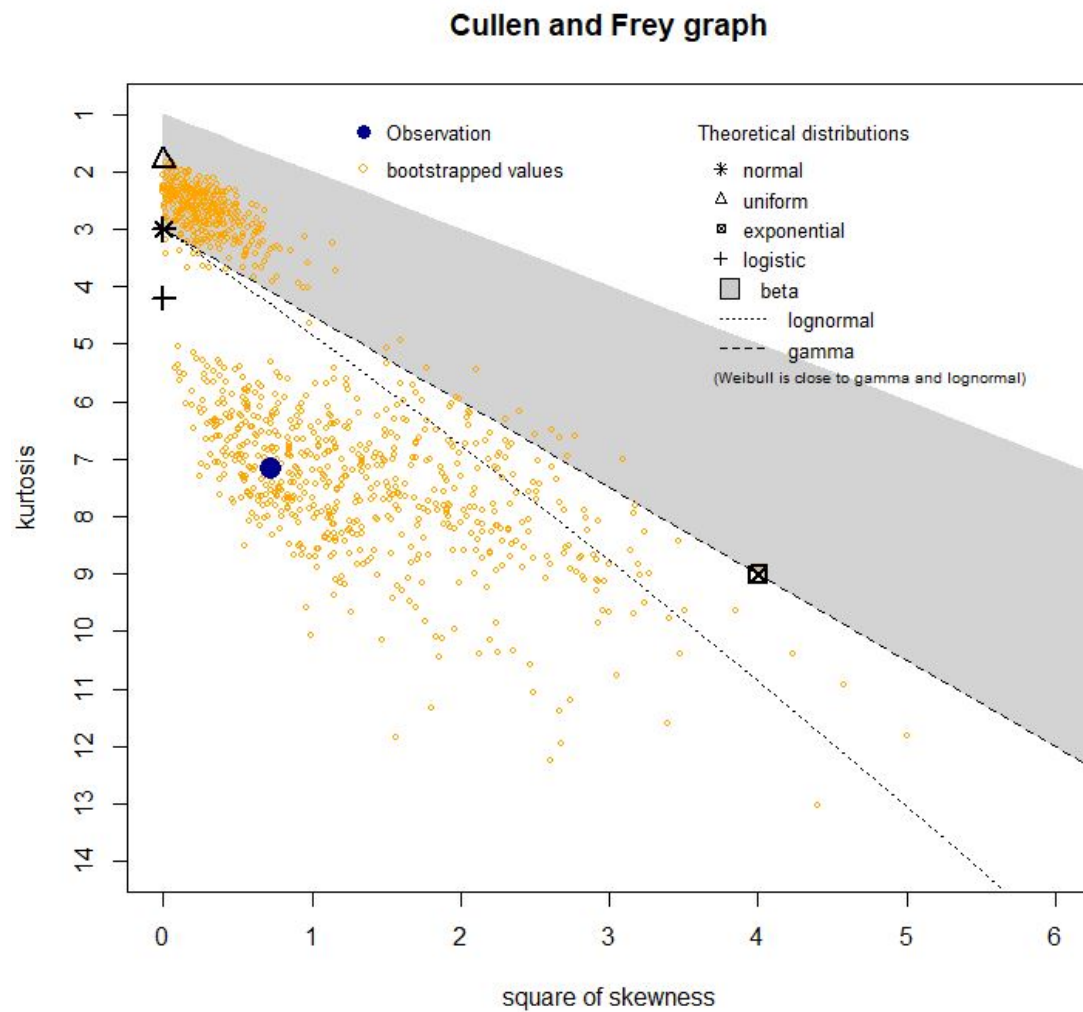
## 2.4 Analiza rozkładów

Na podstawie wyestymowanej wcześniej kurtozy oraz skośności otrzymanych danych dopasujemy do nich rozkład poprzez przyrównanie tych wielkości do ich teoretycznych wartości dla najbardziej powszechnych rozkładów. Posłużymy się dodatkowo wygenerowanymi próbkami bootstrapowymi, które zostały oznaczone jako kropki pomarańczowe. Kropka niebieska oznacza nasze dane empiryczne.



**Rys. 7:** Wykres skośności do kurtozy dla Alior Bank S.A.

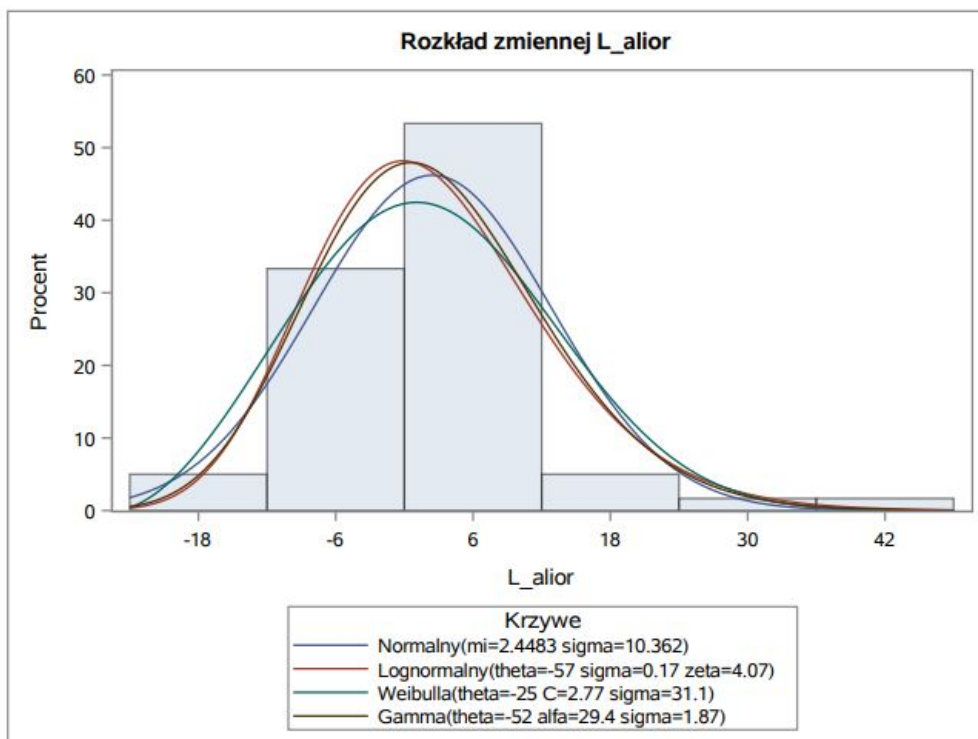
W przypadku Alior Bank próbki bootstrapowe są dość mocno rozrzucone. W dalszej analizie uwzględnimy rozkład normalny, lognormalny, beta oraz Weibulla.



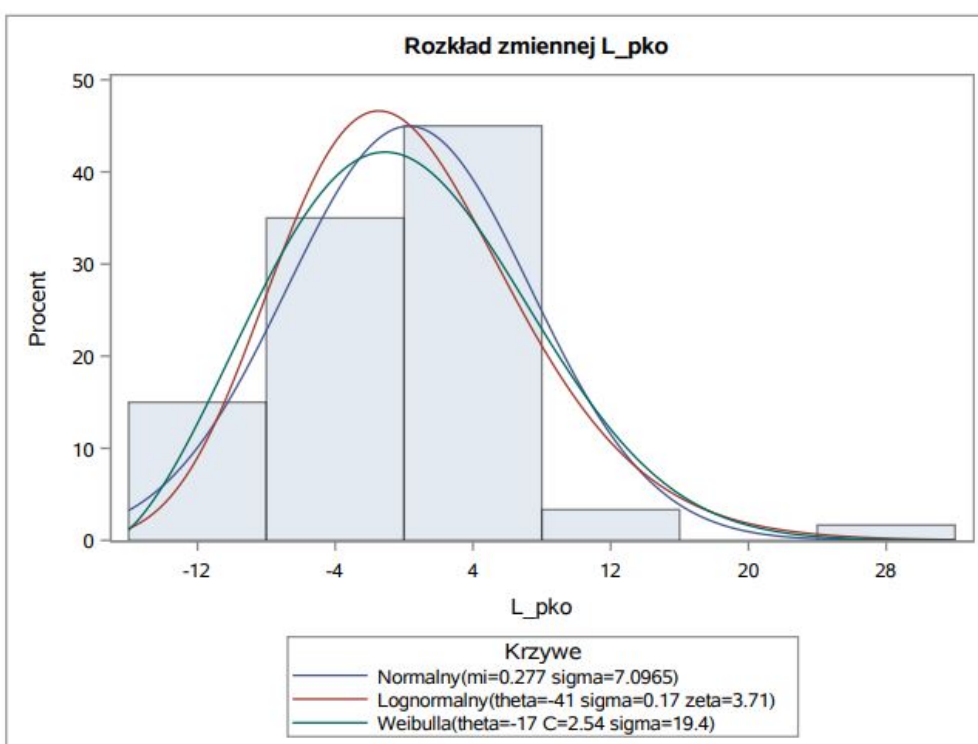
**Rys. 8:** Wykres skośności do kurtozy dla PKO BP S.A.

Z kolei dla PKO BP przeprowadzimy testy dopasowania dla rozkładu normalnego, lognormalnego, Weibulla oraz gamma.

Przedstawione zostanie poniżej graficzne dopasowanie rozkładów za pomocą histogramu.



**Rys. 9:** Histogramy i teoretyczne gęstości dla Alior Bank S.A.



**Rys. 10:** Histogramy i teoretyczne gęstości dla PKO BP S.A.

Przeprowadzone zostaną teraz testy dopasowania dla danych Alior Banku oraz PKO BP w programie SAS za pomocą procedury PROC SEVERITY. Statystyki dopasowania są następujące (źródło: The SEVERITY Procedure) :

- Loglikelihood - określone jako  $-2\log(L)$ , gdzie  $L$  jest wiarygodnością danych ("likelihood of the data"). Niższa wartość uważana jest za lepszą.
- AIC - określa kryterium informacyjne Akaikie'go. Niższa wartość uważana jest za lepszą.
- AICC - określa kryterium informacyjne Akaikie'go dla skończonej próbki. Niższa wartość uważana jest za lepszą.
- BIC - określa Bayesowskie kryterium informacyjne Schwarz. Niższa wartość uważana jest za lepszą.
- KS - określa statystykę Kołmogorova-Smirnova, która jest obliczana przy użyciu przybliżonej wartości empirycznej dystrybucyj. Niższa wartość uważana jest za lepszą.
- AD - określa statystykę Andersona-Darlinga, która jest obliczana przy użyciu przybliżonej wartości empirycznej dystrybucyj. Niższa wartość uważana jest za lepszą.

Wszystkie statystyki dopasowania											
Rozkład	-2 log wiarygodności		AIC		AICC		BIC		KS		AD
Weibull	228.44573		232.44573		232.79867		235.66756		0.98247		0.74755
Logn	224.94272	*	228.94272	*	229.29567	*	232.16456	*	0.67890	*	0.46752
Uwaga: Asterysk (*) oznacza model najlepszy wg właściwego dla kolumny kryterium.											

(a) dla Alior Bank S.A.

Wszystkie statystyki dopasowania											
Rozkład	-2 log wiarygodności		AIC		AICC		BIC		KS		AD
Weibull	159.74797	*	163.74797	*	164.19241	*	166.55036	*	0.82571	*	0.88532
Logn	164.13130		168.13130		168.57574		170.93369		1.08990		1.37400
Uwaga: Asterysk (*) oznacza model najlepszy wg właściwego dla kolumny kryterium.											

(b) dla PKO BP S.A.

**Tab. 3:** Statystyki dopasowania wykonane w programie SAS



W przypadku Alior Banku rozkład beta nie uzyskał zbieżności. Z pozostałych rozkładów lepsze wyniki w statystykach dopasowania osiągnął rozkład lognormalny i to on będzie rozpatrywany w dalszym ciągu.

Dla banku PKO BP z kolei rozkład gamma nie uzyskał zbieżności, natomiast wśród pozostałych rozkład Weibulla jest rozkładem bardziej dopasowanym, więc w tej sytuacji tylko on będzie brany pod uwagę w dalszych rozważaniach.

Następnie zostanie przeprowadzony test normalności, aby sprawdzić słuszność hipotezy zerowej o pochodzeniu danych z rozkładu normalnego. W tym celu skorzystano z procedury PROC UNIVARIATE w programie SAS. Rezultaty są następujące:

Testy normalności				
Testowanie	Statystyka		Wartość p	
Shapiro-Wilka	W	0.932246	Pr. < W	0.0025
Kolmogorowa-Smirnowa	D	0.133814	Pr. > D	<0.0100
Cramera-von Misesa	W-kwadr.	0.11771	Pr. > W-kwadr.	0.0666
Andersona-Darlinga	A-kwadr.	0.911561	Pr. > A-kwadr.	0.0203

(a) dla Alior Bank S.A.

Testy normalności				
Testowanie	Statystyka		Wartość p	
Shapiro-Wilka	W	0.92079	Pr. < W	0.0008
Kolmogorowa-Smirnowa	D	0.125844	Pr. > D	0.0189
Cramera-von Misesa	W-kwadr.	0.123896	Pr. > W-kwadr.	0.0524
Andersona-Darlinga	A-kwadr.	0.892613	Pr. > A-kwadr.	0.0221

(b) dla PKO BP S.A.

**Tab. 4:** Testy normalności wykonane w programie SAS

W teście Shapiro-Wilka w obydwu przypadkach otrzymaliśmy wartość  $p$  mniejszą niż zadany poziom istotności co daje podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej, która zakłada że dane pochodzą z innego rozkładu niż normalny. Podobna sytuacja ma miejsce dla testu Kolmogorowa-Smirnowa oraz Andersona-Darlinga.

Mimo to, otrzymujemy wartość  $p$  większą od zadanego poziomu istotności dla testu Cramera-von Misesa, na podstawie którego hipotezę zerową moglibyśmy przyjąć. Pamiętając o wcześniej branych pod uwagę rozkładach dla obu banków wybranych poprzez statystyki dopasowania, sprawdźmy ich wyniki w testach.

Testy dopasowania dla rozkładu Normalny					Testy dopasowania dla rozkładu Lognormalny				
Testowanie	Statystyka		Wartość p		Testowanie	Statystyka		Wartość p	
Kolmogorow-Smirnow	D	0.13381401	Pr. > D	<0.010	Kolmogorow-Smirnow	D	0.11861763	Pr. > D	0.010
Cramer-von Mises	W-kwadr.	0.11770965	Pr. > W-kwadr.	0.067	Cramer-von Mises	W-kwadr.	0.12115645	Pr. > W-kwadr.	0.021
Anderson-Darling	A-kwadr.	0.91156138	Pr. > A-kwadr.	0.020	Anderson-Darling	A-kwadr.	0.79916812	Pr. > A-kwadr.	0.010

**Tab. 5:** Testy dopasowane dla Alior Bank S.A.

Testy dopasowania dla rozkładu Normalny					Testy dopasowania dla rozkładu Weibulla				
Testowanie	Statystyka		Wartość p		Testowanie	Statystyka		Wartość p	
Kolmogorow-Smirnow	D	0.12584375	Pr. > D	0.019	Kolmogorow-Smirnow	D	0.15860507	Pr. > D	<0.001
Cramer-von Mises	W-kwadr.	0.12389578	Pr. > W-kwadr.	0.052	Cramer-von Mises	W-kwadr.	0.20295104	Pr. > W-kwadr.	0.002
Anderson-Darling	A-kwadr.	0.89261298	Pr. > A-kwadr.	0.022	Anderson-Darling	A-kwadr.	1.23582151	Pr. > A-kwadr.	0.001

**Tab. 6:** Testy dopasowane dla PKO BP S.A.

Rozkład lognormalny ma wartość  $p$  niższą od zadanego poziomu istotności dla każdego z testów w przypadku Alior Banku, podobnie jak rozkład Weibulla dla banku PKO BP. Mimo braku zadowalających wyników wszystkich testów dla rozkładu normalnego, nie odrzucamy hipotezy zerowej. Decyzję tą podejmujemy zgodnie z tzw. "Brzytwą Ockhama" czyli zasadą mówiącą, że najprostsze rozwiązania są przeważnie tymi odpowiednimi. Zatem przyjmujemy, że:

$$L_{alior} \sim \mathcal{N}(2.4483, 10.362)$$

$$L_{pko} \sim \mathcal{N}(0.277, 7.0965)$$

## 2.5 Rozkład wektora losowego

Wiadomo już, że brane pod uwagę zmienne losowe możemy modelować rozkładem gaussowskim. Sprawdźmy czy wektor losowy utworzony z tych zmiennych losowych

$$\mathbb{L} = (L_{alior}, L_{pko})$$

również pochodzi z rodziny rozkładów normalnych. W tym celu posłużymy się testem Mardia.

Test Mardia	Estymator	Wartość p
<i>na podstawie skośności</i>	13.7674	0.008
<i>na podstawie kurtozy</i>	5.21	1.8876E-7

**Tab. 7:** Przeprowadzony test Mardia dla wektora losowego.

Wartość  $p$  jest widocznie mniejsza od zadanego poziomu istotności  $= 0.05$ , skąd wnioskujemy, że wektor wielowymiarowy  $\mathbb{L} = (L_{alior}, L_{pko})$  nie jest wektorem o rozkładzie gaussowskim.

### 3 Miary ryzyka

#### 3.1 Value-at-Risk - inwestycje pojedyncze

Wartość  $VaR$  wskazuje maksymalną kwotę możliwą do stracenia podczas inwestowania w danym przedziale czasowym przy ustalonym poziomie ufności  $\alpha$ . Przypomnijmy formalną definicję:

Wartością zagrożoną (Value-at-Risk) zmiennej losowej  $X$  nazywamy

$$VaR_{\alpha}(X) = q_{\alpha}(X) = \inf \{x : F_X(x) \geq \alpha\} = \inf \{x : P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

gdzie  $F_X$  oznacza dystrybucję zmiennej losowej  $X$ .

Value-at-Risk	Alior Bank S.A.	PKO BP S.A.
<i>z kwantyla empirycznego</i>	17.5976	9.1239
<i>z metody analitycznej</i>	19.4917	11.9497

**Tab. 8:** Wartości  $VaR$  wyznaczone za pomocą wzoru analitycznego i kwantyla empirycznego dla obu banków.

Wartość  $VaR$  dla PKO BP jest widocznie niższa w stosunku do wartości dla Alior Banku. Płyne stąd wniosek, że portfel złożony wyłącznie z akcji banku PKO BP S.A. jest obciążony niższym ryzykiem związanym z niepowodzeniem inwestycji.

### 3.2 Expected Shortfall - inwestycje pojedyncze

Kolejną miarą ryzyka jest Expected Shortfall (uśredniona wartość zagrożona). Jest ona często wykorzystywana jako alternatywa dla  $VaR$ . Rozszerzmy ostatnią definicję:

Niech ponadto  $E|X| < \infty$ . Wówczas uśrednioną wartością zagrożoną (Expected shortfall) nazywamy

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(X) du .$$

Expected Sortfall	Alior Bank S.A.	PKO BP S.A.
z kwantyla empirycznego	31.4777	17.2293
z metody analitycznej	23.8214	14.9149

**Tab. 9:** Wartości  $ES$  wyznaczone za pomocą wzoru analitycznego dla obu banków.

Uwzględniając znaczące odchylenie standardowe zmiennych losowych  $L_{alior}$  oraz  $L_{pko}$ , możemy zauważyć, że miara Expected Shortfall jest wrażliwsza na "ogony" rozkładów. Warto także zwrócić uwagę na fakt, że różnica między wartościami otrzymanymi z kwantyla empirycznego oraz ze wzoru analitycznego mieści się w przedziale ufności co wskazuje na prawidłowy dobór rozkładu.

### 3.3 Inwestycja łączna

W następnych rozważaniach bierze się pod uwagę dwuskładnikowy portfel

$$P_{\alpha} = \alpha \cdot L_{alior} + (1 - \alpha) \cdot L_{pko} \quad (1)$$

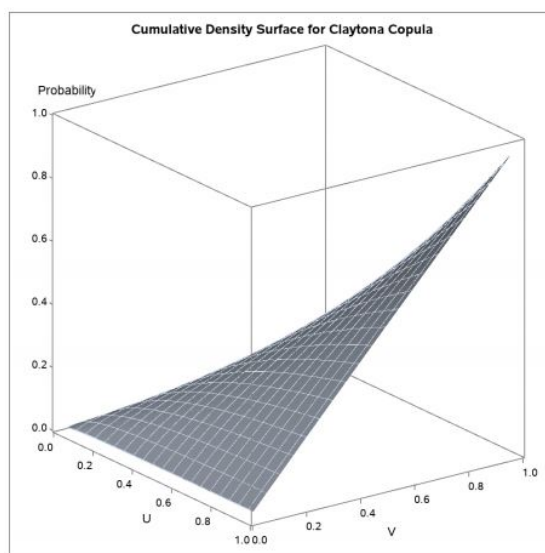
gdzie  $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ .

Miary ryzyka zostaną oszacowane na podstawie symulacji z użyciem kopuły Claytona, Franka, Gumbela oraz T-studenta. W pierwszej kolejności zostało przeprowadzone dopasowanie kopuł do danych empirycznych w programie SAS za pomocą procedury PROC COPULA. Zwraca ona parametr spasowania oraz wyniki kryteriów dopasowania takich jak Loglikelihood (LOG), kryterium informacyjne Akaike (AIC) oraz kryterium Schwarza (SBC). Najlepsze dopasowanie występuje przy największej wartości LOG oraz najmniejszych wartościach AIC i SBC. Z pomocą tej procedury przeprowadzono także wizualizację łącznej dystrybuanty określoną konkretną kopułą.

#### Kopuła Claytona

$\theta$	0.79445
LOG	7.353
AIC	-12.7062
SBC	-10.6118

Tab. 10: Parametr oraz kryteria dopasowania dla kopuły Claytona

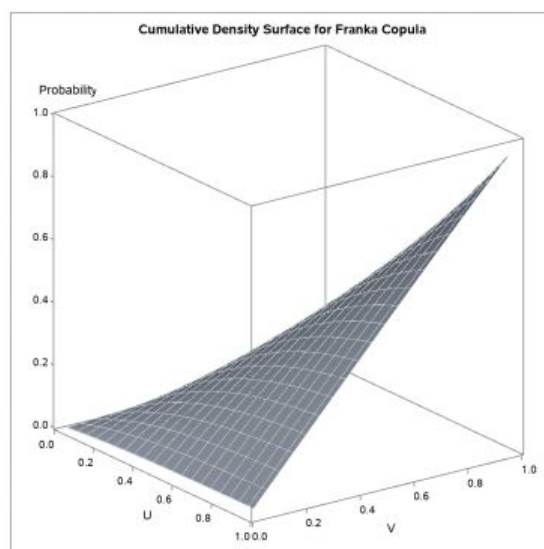


Rys. 11: Dystrybuanta łączna określona przez kopułę Claytona

### Kopuła Franka

$\theta$	3.138756
LOG	6.84837
AIC	-11.69674
SBC	-9.6024

**Tab. 11:** Parametr oraz kryteria dopasowania dla kopuły Franka

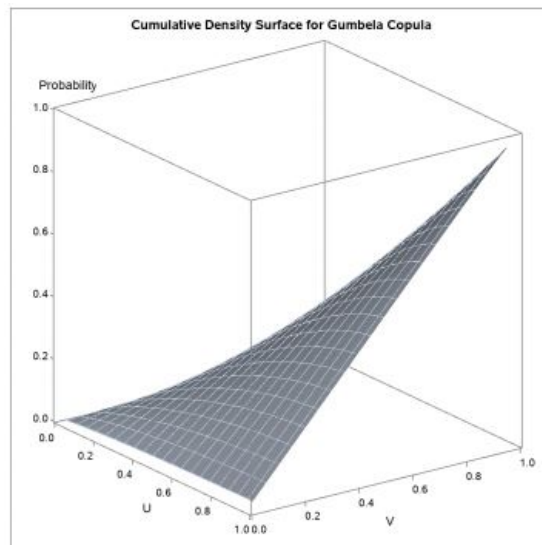


**Rys. 12:** Dystrybuanta łączna określona przez kopułę Franka

### Kopuła Gumbela

$\theta$	1.480122
LOG	7.81485
AIC	-13.62971
SBC	-11.53537

**Tab. 12:** Parametr oraz kryteria dopasowania dla kopuły Gumbela

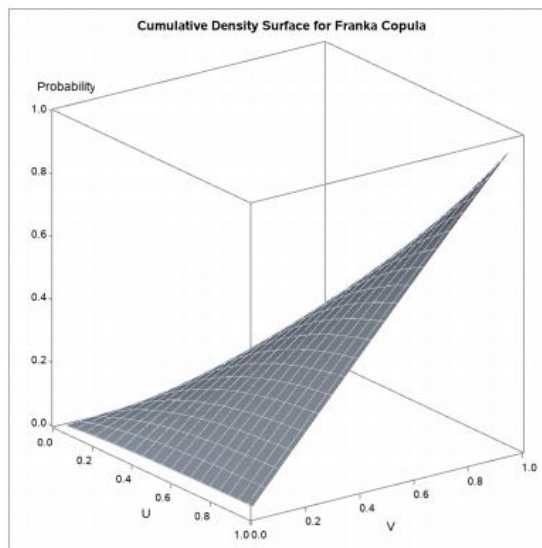


Rys. 13: Dystrybuanta łączna określona przez kopułę Gumbela

### Kopuła T-studenta

DF	14.627611
LOG	8.24208
AIC	-12.48417
SBC	-8.29548

Tab. 13: Parametr oraz kryteria dopasowania dla kopuły T-studenta



Rys. 14: Dystrybuanta łączna określona przez kopułę T-studenta

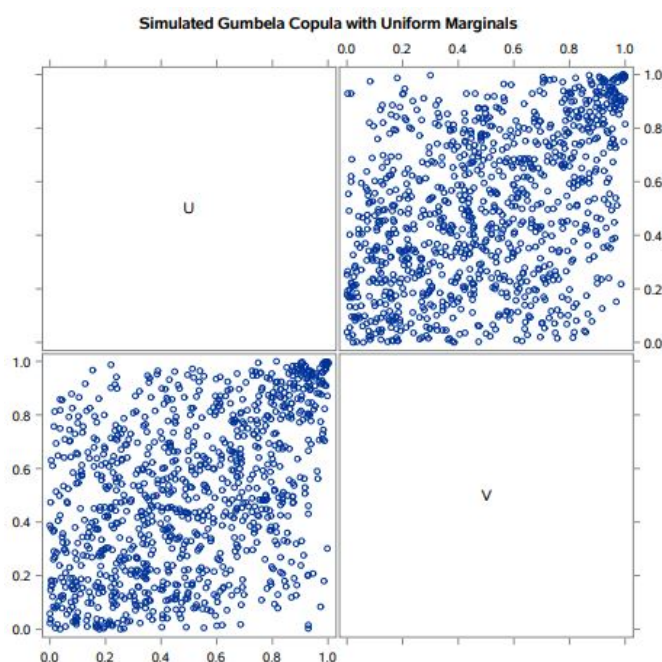
Poniżej znajduje się zbiorcze przedstawienie wyników parametrów oraz kryteriów dopasowania kopuł.

Kopuła	Claytona	Franka	Gumbela	T-studenta
Parametr	0.794450	3.138756	1.480122	14.627611
LOG	7.35307	6.84837	7.81485	8.24208
AIC	-12.70615	-11.69674	-13.62971	-12.48417
SBC	-10.61180	-9.6024	-11.53537	-8.29548

Tab. 14: Przyrównanie parametrów oraz kryteriów dopasowania kopuł

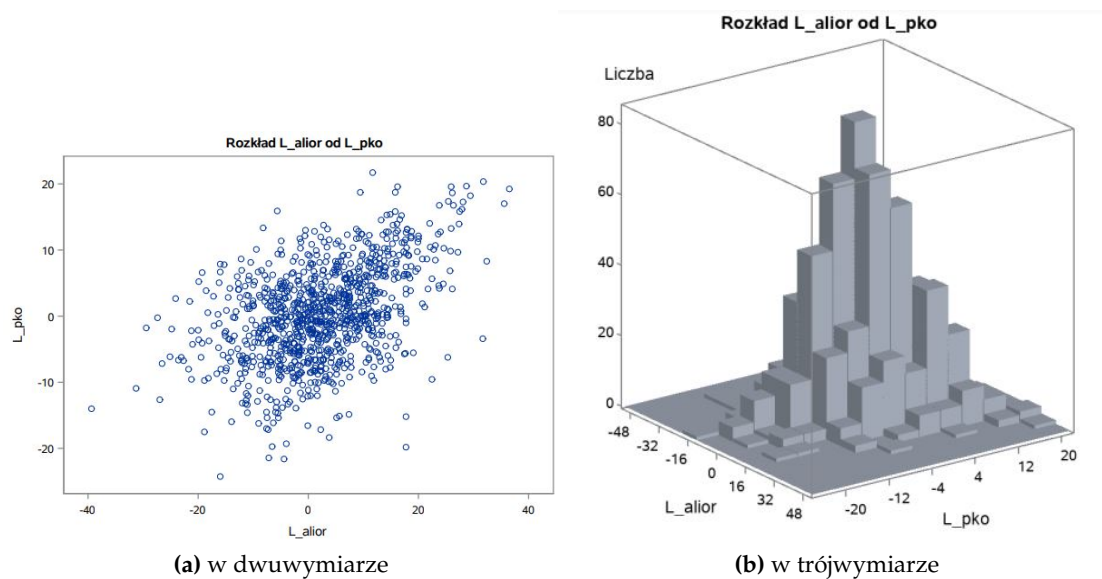
Największa wartość LOG występuje dla kopuły T-studenta, natomiast dla AIC oraz SBC dla kopuły Gumbela. Z racji niewielkiej różnicy wartości LOG pomiędzy kopułą T-studenta a Gumbela, to kopułę Gumbela przyjęto za najlepiej dopasowaną funkcją połączeń.

W następnej kolejności wygenerowano 1000 punktów z dobranej kopuły, które potem przetransformowano w celu uzyskania wartości stóp strat dla Alior Banku oraz PKO BP. Transformacje wykonano w programie SAS z wykorzystaniem polecenia QUANTILE. Poniżej przedstawiono wylosowane punkty z kopuły Gumbela, a także otrzymane stopy strat w dwu- oraz trójwymiarze.



Rys. 15: Wylosowane punkty  $(u, v)$  z kopuły Gumbela





**Rys. 16:** Otrzymany rozkład stóp strat

Kolejno przeprowadzono oszacowanie miar ryzyka portfeli (1) w zależności od dobranej wartości  $\alpha$ . Rezultaty przedstawiono poniżej.

$\alpha$	$Var_{0.95}(P_\alpha)$	$ES_{0.95}(P_\alpha)$
0	12.2910483	14.6039557
0.1	12.152621	14.8430398
0.2	12.703672	15.3556768
0.3	13.257281	16.0313401
0.4	13.940573	16.7775686
0.5	14.634441	17.5841248
0.6	15.715742	18.5563495
0.7	16.02641	19.6170950
0.8	16.90621	20.7960593
0.9	17.51468	22.0727033
1	18.62585	23.4187046

**Tab. 15:** Przyrównanie parametrów oraz kryteriów dopasowania kopuł