Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

| | | | |
|---|---|---|---|
| s. 4 | s. 5 | s. 103 | s. 104 |
| s. 105 | s. 139 | s. 140 | s. 141 |

# Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 17 listopada 2017
Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee \neg r,\ p \vee s,\ s \vee r,\ \neg s \vee p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

**Zadanie 2 (2 punkty).** Rozważmy funkcję boolowską *majority* : $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}^3 \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ zdefiniowaną w taki sposób, że $majority(x_1, x_2, x_3) = \mathsf{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy większość (tzn. 2 lub 3) z argumentów $x_1, x_2, x_3$ ma wartość $\mathsf{T}$.

Jeśli istnieje formuła rachunku zdań zbudowana ze zmiennych $p_1, p_2, p_3$ opisująca funkcję *majority* to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Jeśli istnieje formuła zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych, spójników $\Rightarrow$ i $\neg$ (oraz nawiasów) równoważna formule $p \lor q$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Powiemy, że formuła $\varphi$ jest *uproszczeniem* formuły $\psi$ jeśli obie formuły są równoważne oraz w $\varphi$ występuje mniej spójników logicznych niż w $\psi$. W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r)$ lub słowo „NIE”, jeśli taka formuła nie istnieje.

**Zadanie 5 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz trzy różne zupełne zbiory spójników.

Wersja: **A**

Numer indeksu:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

Grupa[1]:

| | | | |
|---|---|---|---|
| s. 4 | s. 5 | s. 103 | s. 104 |
| s. 105 | s. 139 | s. 140 | s. 141 |

**Zadanie 6 (5 punktów).** Dla dowolnego ciągu formuł $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ uogólniona alternatywa $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ jest zdefiniowana indukcyjnie w następujący sposób.

$$\bigvee_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1, \quad \bigvee_{i=1}^{n+1} \varphi_i = (\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i) \vee \varphi_{n+1}.$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnych formuł $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ i dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $n$ formuły $\bigvee_{i=1}^{n}(\psi \wedge \varphi_i)$ oraz $\psi \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i)$ są równoważne.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Zbiór $\mathcal{F}$ formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych, negacji i alternatywy jest zdefiniowany indukcyjnie jako najmniejszy zbiór spełniający warunki:

- dla dowolnej zmiennej zdaniowej $p$ formuła $p \in \mathcal{F}$,
- dla dowolnej formuły $\varphi \in \mathcal{F}$ formuła $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}$ oraz
- dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$ formuła $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \mathcal{F}$.

Niech $\uparrow$ będzie takim spójnikiem, że formuła $p \uparrow q$ jest równoważna $\neg(p \wedge q)$. Definiujemy operator $\tau$ przyporządkowujący formułom z $\mathcal{F}$ formuły zbudowane ze zmiennych zdaniowych i spójnika $\uparrow$ w następujący sposób:

- dla dowolnej zmiennej zdaniowej $p$ mamy $\tau(p) = p$,
- dla dowolnej formuły $\varphi \in \mathcal{F}$ mamy $\tau(\neg(\varphi)) = (\tau(\varphi) \uparrow \tau(\varphi))$ oraz
- dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$ mamy $\tau(\varphi_1 \vee \varphi_2) = (\tau(\neg\varphi_1) \uparrow \tau(\neg\varphi_2))$.

Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej formuły $\varphi \in \mathcal{F}$ formuła $\tau(\varphi)$ jest równoważna formule $\varphi$ oraz formuła $\tau(\neg\varphi)$ jest równoważna formule $\neg\varphi$.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Rozważmy dowolne formuły $\varphi$ i $\psi$ rachunku zdań. Podaj definicję logicznej konsekwencji zbioru formuł a następnie udowodnij, że formuła $\neg\varphi$ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{\varphi \Rightarrow \psi,\ \neg\psi\}$.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

Grupa[1]:

| | | | |
|---|---|---|---|
| s. 4 | s. 5 | s. 103 | s. 104 |
| s. 105 | s. 139 | s. 140 | s. 141 |

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 17 listopada 2017

Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Rozważmy funkcję boolowską *parity* : $\{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^3 \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ zdefiniowaną w taki sposób, że $\mathit{parity}(x_1, x_2, x_3) = \mathsf{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród argumentów $x_1, x_2, x_3$ parzyście wiele (tzn. 0 lub 2) ma wartość $\mathsf{T}$.

Jeśli istnieje formuła rachunku zdań zbudowana ze zmiennych $p_1, p_2, p_3$ opisująca funkcję *parity* to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

**Zadanie 2 (2 punkty).** Powiemy, że formuła $\varphi$ jest *uproszczeniem* formuły $\psi$ jeśli obie formuły są równoważne oraz w $\varphi$ występuje mniej spójników logicznych niż w $\psi$. W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \land q \land r) \lor (p \land q \land \neg r)$ lub słowo „NIE", jeśli taka formuła nie istnieje.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee r,\ \neg q \vee r,\ p \vee q,\ \neg s \vee \neg r,\ \neg r \vee s\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

**Zadanie 4 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz trzy różne zbiory spójników, które *nie* są zupełne.

**Zadanie 5 (2 punkty).** Jeśli istnieje formuła zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych, spójników $\Rightarrow$ i $\neg$ (oraz nawiasów) równoważna formule $p \wedge q$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Wersja: **D**

Numer indeksu:

| | |
|---|---|
| | |

Grupa[1]:

| | | | |
|---|---|---|---|
| s. 4 | s. 5 | s. 103 | s. 104 |
| s. 105 | s. 139 | s. 140 | s. 141 |

**Zadanie 6 (5 punktów).** Zbiór $\mathcal{F}$ formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych, negacji i koniunkcji jest zdefiniowany indukcyjnie jako najmniejszy zbiór spełniający warunki:

- dla dowolnej zmiennej zdaniowej $p$ formuła $p \in \mathcal{F}$,
- dla dowolnej formuły $\varphi \in \mathcal{F}$ formuła $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}$ oraz
- dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$ formuła $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in \mathcal{F}$.

Niech $\downarrow$ będzie takim spójnikiem, że formuła $p \downarrow q$ jest równoważna $\neg(p \vee q)$. Definiujemy operator $\tau$ przyporządkowujący formułom z $\mathcal{F}$ formuły zbudowane ze zmiennych zdaniowych i spójnika $\downarrow$ w następujący sposób:

- dla dowolnej zmiennej zdaniowej $p$ mamy $\tau(p) = p$,
- dla dowolnej formuły $\varphi \in \mathcal{F}$ mamy $\tau(\neg(\varphi)) = (\tau(\varphi) \downarrow \tau(\varphi))$ oraz
- dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$ mamy $\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (\tau(\neg\varphi_1) \downarrow \tau(\neg\varphi_2))$.

Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej formuły $\varphi \in \mathcal{F}$ formuła $\tau(\varphi)$ jest równoważna formule $\varphi$ oraz formuła $\tau(\neg\varphi)$ jest równoważna formule $\neg\varphi$.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Dla dowolnego ciągu formuł $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ uogólniona koniunkcja $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ jest zdefiniowana indukcyjnie w następujący sposób.

$$\bigwedge_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1, \quad \bigwedge_{i=1}^{n+1} \varphi_i = (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i) \wedge \varphi_{n+1}.$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnych formuł $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ i dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $n$ formuły $\bigwedge_{i=1}^{n}(\psi \vee \varphi_i)$ oraz $\psi \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)$ są równoważne.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Rozważmy dowolne formuły $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ rachunku zdań. Podaj definicję logicznej konsekwencji zbioru formuł a następnie udowodnij, że formuła $\alpha \Rightarrow \gamma$ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{\alpha \Rightarrow \beta,\ \beta \Rightarrow \gamma\}$.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.