Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 11 stycznia 2019

Czas pisania: $30 + 60$ minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieje taka surjekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz rodzina zbiorów $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, że $A_i \neq A_j$ oraz $f[A_i] = f[A_j]$ dla wszystkich takich $i, j \in \mathbb{N}$, że $i \neq j$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką surjekcję i rodzinę zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka surjekcja i rodzina nie istnieją.

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy relację binarną $\sim$ zdefiniowaną na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) \bmod 3 = g(n) \bmod 5.$$

Jeśli relacja $\sim$ jest przechodnia, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PRZECHODNIA”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności $\sim$ zdefiniowaną na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wzorem

$$X \sim Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ jest skończony.}$$

Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : \mathbb{N} \to [\emptyset]_\sim$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej funkcji. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Niech $h(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dla $n \in \mathbb{N}$. Na zbiorze $\mathcal{P}(\{0,1,2\})$ wprowadzamy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$X \simeq Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \{h(x) \mid x \in X\} = \{h(y) \mid y \in Y\}.$$

W prostokąt poniżej wpisz wszystkie klasy abstrakcji relacji $\simeq$.

Zadanie 5 (2 punkty). Niech $\underline{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oznacza zbiór $\{0, \ldots, n-1\}$ i niech $\mathcal{M}$ będzie rodziną zbiorów $\{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$. Dla każdego zbioru w poniższej tabelce wpisz w odpowiednie pole równoliczny z nim zbiór z rodziny $\mathcal{M}$ lub słowo „NIE", jeśli taki zbiór nie istnieje.

$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\{1,2,3\}$	$\mathbb{Z} \times \{0,1,2\}$	$\{1,2,3\}^{\{1,2\}}$	$\mathbb{N}^{\underline{0}}$	$\mathcal{P}(\{1,2\}) \setminus \{\underline{0}\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Z})$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$
$\mathbb{N}$	$\underline{3}$						

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:			
A		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że zbiory $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ oraz $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ są równoliczne.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech P_A oznacza zbiór wszystkich relacji przechodnich na zbiorze A. Na zbiorze P_A definiujemy relację $\simeq$ następująco:

$$R \simeq S \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{relacja } R \cup S \text{ jest przechodnia.}$$

Czy dla każdego zbioru A relacja $\simeq$ jest przechodnia? Podaj dowód albo kontrprzykład.

Zadanie 8 (5 punktów). Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *prawie okresowa*, jeśli

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}.\ k > 0 \wedge \forall n > n_0\ f(n+k) = f(n).$$

Czy dla dowolnych prawie okresowych funkcji f i g funkcja $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowana wzorem $h(n) = f(n) + g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest funkcją prawie okresową? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli usuniemy założenie, że $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest prawie okresowa? Podaj dowody albo kontrprzykłady.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 11 stycznia 2019

Czas pisania: $30 + 60$ minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy relację binarną $\sim$ zdefiniowaną na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) \bmod 3 = g(n) \bmod 5.$$

Jeśli relacja $\sim$ jest symetryczna, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „SYMETRYCZNA”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności $\sim$ zdefiniowaną na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\} \text{ jest skończony}$$

oraz funkcję $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $z(n) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : \mathbb{N} \to [z]_\sim$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej funkcji. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli istnieje taka injekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz rodzina zbiorów $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, że $A_i \neq A_j$ oraz $f^{-1}[A_i] = f^{-1}[A_j]$ dla wszystkich takich $i, j \in \mathbb{N}$, że $i \neq j$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką injekcję i rodzinę zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka injekcja i rodzina nie istnieją.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Niech $\underline{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oznacza zbiór $\{0, \ldots, n-1\}$ i niech $\mathcal{M}$ będzie rodziną zbiorów $\{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$. Dla każdego zbioru w poniższej tabelce wpisz w odpowiednie pole równoliczny z nim zbiór z rodziny $\mathcal{M}$ lub słowo „NIE”, jeśli taki zbiór nie istnieje.

$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\{1,2,3\}$	$\underline{0}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q})$	$\{\underline{0}\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\})$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\{1,2\}^{\{1,2,3\}}$
$\mathbb{N}$	$\underline{3}$						

Zadanie 5 (2 punkty). Niech $r(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oznacza resztę z dzielenia liczby n przez 2. Na zbiorze $\mathcal{P}(\{0,1,2\})$ wprowadzamy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$X \simeq Y \overset{\text{df}}{\iff} \{r(x) \mid x \in X\} = \{r(y) \mid y \in Y\}.$$

W prostokąt poniżej wpisz wszystkie klasy abstrakcji relacji $\simeq$.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:
D		

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Niech P_A oznacza zbiór wszystkich relacji przechodnich na zbiorze A. Na zbiorze P_A definiujemy relację $\simeq$ następująco:

$$R \simeq S \overset{\text{df}}{\iff} \text{relacja } R;S \text{ jest przechodnia.}$$

Czy dla każdego zbioru A relacja $\simeq$ jest przechodnia? Podaj dowód albo kontrprzykład.

Zadanie 7 (5 punktów). Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że zbiory $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\{0,1\}}$ oraz $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ są równoliczne.

Zadanie 8 (5 punktów). Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *prawie okresowa*, jeśli

$$\exists n_0 {\in} \mathbb{N}\ \exists k {\in} \mathbb{N}.\ k > 0 \land \forall n {>} n_0\ f(n+k) = f(n).$$

Czy dla dowolnych prawie okresowych funkcji f i g funkcja gf jest funkcją prawie okresową? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli usuniemy założenie, że $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest prawie okresowa? Podaj dowody albo kontrprzykłady.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.