Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część licencjacka)

15 lutego 2007

Za każde z dziesięciu poniższych zadań można otrzymać od -2 do 2 punktów. Za brak rozwiązania otrzymuje się 0 punktów, punkty ujemne otrzymuje się tylko za rozwiązania kompromitująco fałszywe. Aby zdać tę część egzaminu (być dopuszczonym do części zasadniczej) trzeba uzyskać co najmniej 10 punktów. Egzamin trwa 60 minut.

Zadanie 1. Podaj formułę równoważną formule $\neg((p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \Rightarrow r))$ i mającą:

(a) koniunkcyjną postać normalną

(b) dysjunkcyjną postać normalną

Zadanie 2. Wpisz w prostokąt obok formuły równoważną formułę nie zawierającą znaku negacji.

(a) $\neg((\forall x \geq 0)(\exists y < 0)\ (f(x) = g(y)))$

(b) $\neg(\exists n\ (n \in A \Rightarrow n \in B))$

Zadanie 3. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych równości, które zachodzą dla dowolnych zbiorów A, B i C. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie kontrprzykłady.

(a) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A$

(b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

Zadanie 4. Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq x \leq n+m\}$. Wylicz wartość poniższych zbiorów, tzn. wpisz w prostokąt obok wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup$.

(a) $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} A_{n,m}$

(b) $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m}$

Zadanie 5. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy porządek wzorem

$$f \preceq g \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N} \;\; f(n) \leq g(n).$$

Niech $f_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq i \\ n & \text{dla } n = i \end{cases}$ i niech $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej wzory definiujące funkcje będące odpowiednio kresem górnym i dolnym zbioru X lub słowo „NIE”, jeśli odpowiedni kres nie istnieje.

(a) $\sup X$

(b) $\inf X$

Zadanie 6. Niech $\leq_{lex}$ oznacza porządek leksykograficzny odpowiednio w zbiorach $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, natomiast $\sqsubseteq$ porządek „po osiach” (czyli $\langle x, y\rangle \sqsubseteq \langle x', y'\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq x'$ oraz $y \leq y'$). W prostokąty poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy podanymi porządkami lub uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

(a) $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \leq_{lex}\rangle$ i $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \leq_{lex}\rangle$

(b) $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \sqsubseteq\rangle$ i $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq\rangle$

Imię i nazwisko:

Zadanie 7. Niech $\Sigma = \{a, s\}$ gdzie a jest symbolem stałej a s unarnym symbolem funkcyjnym i rozważmy zbiór $\mathcal{T}_\Sigma$ termów stałych (tzn. nie zawierających zmiennych) nad sygnaturą Σ. Definiujemy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma) \to \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma)$ wzorem $f(X) = \{a\} \cup X \cup \{s(s(t)) \mid t \in X\}$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio najmniejszy (oznaczony μf) i największy (oznaczony νf) punkt stały funkcji f, lub słowo „NIE" jeśli odpowiedni punkt stały nie istnieje.

(a) μf

(b) νf

Zadanie 8. Wpisz słowo „TAK" w te kratki poniższej tabelki, które odpowiadają parom zbiorów równolicznych. Wpisz „NIE" w kratki odpowiadające parom zbiorów nierównolicznych.

	$\mathbb{R}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$	$\{0,1\} \times \mathbb{N}$	$\mathbb{Q} \times \{0, \frac{3}{7}\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{N}$
$\mathbb{Q}$							
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$							

Zadanie 9. W tym zadaniu u, v, w, x, y, z są zmiennymi, natomiast a, f, g, h, p symbolami funkcyjnymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

(a) $p(z, h(w), g(z)) \stackrel{?}{=} p(v, u, v)$

(b) $p(a, h(w), f(g(y))) \stackrel{?}{=} p(z, x, f(w))$

Zadanie 10. Wykaż indukcyjnie, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 2$ zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma dokładnie $\frac{n(n-1)}{2}$ podzbiorów dwuelementowych.

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część zasadnicza)

15 lutego 2007

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -20 do 20 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów. Mniej niż -4 punkty otrzymuje osoba, która umieszcza w swoim rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywe. Rozwiązania, w których nie ma odpowiedzi kompromitująco fałszywych, będą oceniane w skali od -4 do 20 punktów.

Zadanie 11. Rozważmy dowolny ciąg zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

(a) Udowodnij, że

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

(b) Załóżmy, że $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ i niech $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$. Udowodnij, że

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} (A_i \div A) = \emptyset$$

.

Zadanie 12. Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Rozważmy zbiór $B^{\subseteq A}$ funkcji częściowych z A w B.

(a) Niech $\{f_i \mid i \in I\}$ będzie indeksowaną rodziną funkcji częściowych z A w B spełniającą warunek $(f_i \cup f_j) \in B^{\subseteq A}$ dla wszystkich $i, j \in I$. Udowodnij, że $(\bigcup_{i \in I} f_i) \in B^{\subseteq A}$.

(b) Podaj przykład takiej rodziny funkcji częściowych $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0,1\}^{\subseteq \mathbb{N}}$, że $(f_i \cup f_{i+1}) \in \{0,1\}^{\subseteq \mathbb{N}}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \notin \{0,1\}^{\subseteq \mathbb{N}}$. Uzasadnij, że podana przez Ciebie rodzina spełnia wymagane warunki.

Zadanie 13. Niech A będzie dowolnym zbiorem mocy continuum, a B dowolnym zbiorem mocy $\aleph_0$. Udowodnij, że $A \setminus B$ jest zbiorem mocy continuum.

Zadanie 14. Praporządkiem w zbiorze A nazywamy dowolną relację zwrotną w zbiorze A i przechodnią. Niech $\prec$ będzie praporządkiem w zbiorze A. Rozważmy binarną relację $\sim$ w zbiorze A zdefiniowaną wzorem $x \sim y \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} x \prec y \land y \prec x$.

(a) Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności w A.

(b) W zbiorze ilorazowym $A/_\sim$ definiujemy relację $\leq$ wzorem $[x]_\sim \leq [y]_\sim \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} x \prec y$. Udowodnij, że jest to poprawna definicja oraz że $\leq$ jest relacją częściowego porządku w $A/_\sim$.