Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 24 stycznia 2020

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Dla $m, n \in \mathbb{N}$ niech $A_{m,n}$ oznacza zbiór relacji zawierających parę $\langle m, n\rangle$, czyli

$$A_{m,n} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \langle m, n\rangle \in R\}.$$

Jeśli w zbiorze $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,n}$ jest jakaś relacja niesymetryczna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takiej relacji w tym zbiorze nie ma.

$$R = \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 1, 2\rangle\}$$

Zadanie 2 (2 punkty). Na rodzinie zbiorów $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ definiujemy operację *rzutu na drugą oś* $\pi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \to \mathcal{P}(\{0, 1\})$ wzorem $\pi(X) = \{b\in\{0, 1\} \mid \exists n\in\mathbb{N}\ \langle n, b\rangle\in X\}$. Następnie definiujemy relację równoważności $\simeq$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ wzorem

$$X \simeq Y \overset{\text{df}}{\iff} \pi(X) = \pi(Y).$$

W tym zadaniu pytamy o istnienie takich zbiorów A, B, C, D, że $|[A]_{\simeq}| = 1$, $|[B]_{\simeq}| = 2$, $|[C]_{\simeq}| = \aleph_0$, $|[D]_{\simeq}| = \mathfrak{c}$. Jeśli takie zbiory istnieją, to w odpowiadające im prostokąty poniżej wpisz dowolne przykłady takich zbiorów; w przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE”.

A : $\emptyset$

B : NIE ISTNIEJE

C : NIE ISTNIEJE

D : $\{\langle 0, 0\rangle\}$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, która ma 5 klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

Załóżmy nie wprost, że taka relacja istnieje. Wtedy jej klasy abstrakcji są niepuste i rozłączne, więc zbiór $\{0, 1, 2, 3\}$ ma co najmniej 5 elementów. To daje sprzeczność, bo ten zbiór ma tylko 4 elementy.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy takie zbiory A i B, że zbiór wszystkich funkcji z A w B ma moc 2020. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbiorów wszystkich surjekcji z A w B oraz surjekcji z B w A. *Wskazówka:* $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$.

surjekcje z A w B:	0	surjekcje z B w A:	1

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : A \to B, \qquad g : B \to C, \qquad h : B^A \to C^B$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in A$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(a)$ jest B. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(a)$	B	$g \circ f$	C^A	$h(f)$	C^B
$f(b)$	NIE	$h \circ f$	NIE	$\big(h(f)\big)(b)$	C

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:
A		

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy funkcję $\varphi : \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})\cup\mathbb{R}} \to \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ zdefiniowaną dla argumentu $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ wzorem $\varphi(f) = \langle g_1, g_2 \rangle$ gdzie dla $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy $g_1(X) = f(X)$ i $g_2(y) = f(y)$. Udowodnij, że funkcja φ jest injekcją.

Zadanie 7 (5 punktów). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ określamy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$A \approx B \overset{\text{df}}{\iff} A \sim B \ \wedge\ (\mathbb{N} \backslash A) \sim (\mathbb{N} \setminus B)$$

Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że zbiór ilorazowy relacji $\approx$ ma moc $\aleph_0$. *Wskazówka:* Możesz (bez dowodu) skorzystać z faktu, że $(\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \sim \mathbb{N}$.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy relację równoważności $\approx$ zdefiniowaną na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wzorem

$$X \approx Y \overset{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ jest skończony.}$$

Podaj moc klasy abstrakcji zbioru pustego i udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:
D		

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 24 stycznia 2020

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Na rodzinie zbiorów $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ definiujemy operację *rzutu na pierwszą oś* $\pi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wzorem $\pi(X) = \{n{\in}\mathbb{N} \mid \exists b{\in}\{0,1\}\ \langle n,b\rangle{\in}X\}$. Następnie definiujemy relację równoważności $\simeq$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ wzorem

$$X \simeq Y \overset{\text{df}}{\iff} \pi(X) = \pi(Y).$$

W tym zadaniu pytamy o istnienie takich zbiorów A, B, C, D, że $|[A]_\simeq| = 3$, $|[B]_\simeq| = 5$, $|[C]_\simeq| = \aleph_0$, $|[D]_\simeq| = \mathfrak{c}$. Jeśli takie zbiory istnieją, to w odpowiadające im prostokąty poniżej wpisz dowolne przykłady takich zbiorów; w przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE".

A : $\{\langle 0,0\rangle\}$

B : NIE ISTNIEJE

C : NIE ISTNIEJE

D : $\mathbb{N} \times \{0\}$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy takie zbiory A i B, że zbiór wszystkich funkcji z A w B ma moc 2020. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbiorów wszystkich injekcji z A w B oraz injekcji z B w A. *Wskazówka:* $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$.

injekcje z A w B: 2020

injekcje z B w A: 0

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Dla $m, n \in \mathbb{N}$ niech $A_{m,n}$ oznacza zbiór relacji zawierających parę $\langle m, n\rangle$, czyli

$$A_{m,n} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \langle m, n\rangle \in R\}.$$

Jeśli w zbiorze $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} A_{m,n}$ jest jakaś relacja będąca funkcją różnowartościową, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takiej relacji w tym zbiorze nie ma.

$$R = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f \;:\; C \to B, \qquad g \;:\; B \to A, \qquad h \;:\; B^C \to A^B$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(c)$ jest B. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(c)$	B	$g \circ f$	A^C	$h(g)$	NIE
$f(b)$	NIE	$h \circ f$	NIE	$\big(h(f)\big)(b)$	A

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, w której każda klasa abstrakcji ma 2 elementy, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

Załóżmy nie wprost, że taka relacja istnieje.
Wtedy jej klasy abstrakcji są rozłączne i w sumie dają zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4\}$,
więc ten zbiór ma parzystą liczbę elementów.
To daje sprzeczność, bo 5 nie jest liczbą parzystą.

Wersja: **D**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ określamy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle A,B\rangle \approx \langle C,D\rangle \overset{\text{df}}{\iff} A\sim C \ \wedge\ B\sim D$$

Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że zbiór ilorazowy relacji $\approx$ ma moc $\aleph_0$. *Wskazówka:* Możesz (bez dowodu) skorzystać z faktu, że $(\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\})\times(\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\})\sim\mathbb{N}$.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy funkcję $\varphi : \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})\cup\mathbb{R}} \to \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}\times\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ zdefiniowaną dla argumentu $f : \mathcal{P}(\mathbb{N})\cup\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ wzorem $\varphi(f) = \langle g_1, g_2\rangle$ gdzie dla $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $y\in\mathbb{R}$ mamy $g_1(X) = f(X)$ i $g_2(y) = f(y)$. Udowodnij, że funkcja φ jest surjekcją.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy relację równoważności $\approx$ zdefiniowaną na zbiorze $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$f\approx g \overset{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } \{n\in\mathbb{N} \mid f(n)\neq g(n)\} \text{ jest skończony}$$

oraz funkcję $z:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ daną wzorem $z(n)=0$ dla $n\in\mathbb{N}$. Podaj moc klasy abstrakcji funkcji z i udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.