

Wersja:



Numer indeksu:

000000

Grupa<sup>1</sup>:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 20 listopada 2015

czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli dla dowolnych formuł  $\varphi$  i  $\psi$  logiki pierwszego rzędu formuła  $(\exists x \varphi) \Rightarrow (\exists x \psi) \Rightarrow \forall x (\varphi \Rightarrow \psi)$  jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Uniwersum:  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi : x = 5$ ,  $\psi : x = 7$

**Zadanie 2 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, mające następującą tabelkę zero-jedynkową.

$p$	$q$	$r$	$\varphi$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

CNF:  $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

DNF:  $p \vee (q \wedge r)$

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Jeśli zbiór klauzul  $\{\neg q \vee p, s \vee q, \neg r \vee \neg p, \neg s \vee q\}$  jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

$$\sigma(p) = \text{T}, \sigma(q) = \text{T}, \sigma(r) = \text{F}, \sigma(s) = \text{T}$$

**Zadanie 4 (2 punkty).** Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie  $W$  jest uproszczeniem wyrażenia  $W'$  jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole  $\cup, \cap, \setminus$  i nawiasy, oraz  $W$  zawiera mniej symboli niż  $W'$ . Np.  $A \cup B$  jest uproszczeniem  $(A \setminus B) \cup B$ . Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia  $A \cap ((C \cup B) \setminus B)$  to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$A \cap (C \setminus B)$$

**Zadanie 5 (2 punkty).** Jeśli formuły  $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$  oraz  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$  są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja:	<b>A</b>	Numer indeksu:	Grupa <sup>1</sup> :		
		000000	8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
			8–10 s.140		
			10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

**Zadanie 6 (5 punktów).** Które z poniższych zdań są prawdziwe dla wszystkich formuł  $\varphi$  i  $\psi$  rachunku zdań?

1. Jeśli  $\varphi \Rightarrow \psi$  jest spełnialna oraz  $\neg\psi$  jest tautologią, to  $\neg\varphi$  jest spełnialna.
2. Jeśli  $\varphi \Rightarrow \psi$  jest spełnialna oraz  $\neg\psi$  jest tautologią, to  $\varphi$  jest spełnialna.

Podaj dowody ich prawdziwości. W pozostałych przypadkach wskaż kontrprzykłady.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Udowodnij, że jeżeli dla pewnych zbiorów  $A$  i  $B$  zachodzi  $A \setminus B = B \setminus A$ , to  $A = B$ .

**Zadanie 8 (5 punktów).** Rozważmy odwzorowanie  $\mathcal{T}$  przyporządkowujące formułom zbudowanym ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) formuły zbudowane ze zmiennych, spójników  $\Rightarrow, \perp$  (i nawiasów) w następujący sposób.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(p) &= p, \quad \text{dla wszystkich zmiennych } p \\
 \mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2) \\
 \mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow (\mathcal{T}(\varphi_2) \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \\
 \mathcal{T}(\neg\varphi) &= \mathcal{T}(\varphi) \Rightarrow \perp
 \end{aligned}$$

Udowodnij, że dla wszystkich formuł  $\varphi$  zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) formuły  $\varphi$  i  $\mathcal{T}(\varphi)$  są równoważne.

**Rozwiązanie.** Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem struktury formuły  $\varphi$ . Niech  $\mathcal{F}$  oznacza zbiór wszystkich formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) i niech

$$X = \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)\}.$$

Musimy pokazać, że  $X$  zawiera zmienne zdaniowe (to jest podstawa indukcji) oraz że jest zamknięty na spójniki  $\vee, \wedge, \neg$  (krok indukcyjny).

**Podstawa indukcji:** Weźmy dowolną zmienną zdaniową  $p$ . Ponieważ  $\mathcal{T}(p) = p$ , formuły  $\mathcal{T}(p)$  oraz  $p$  są równoważne, a stąd  $p \in X$ .

**Krok indukcyjny:** Weźmy dowolne formuły  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  i załóżmy, że  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$  (to jest założenie indukcyjne). Pokażemy, że także  $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ,  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  oraz  $\neg\varphi_1$  należą do zbioru  $X$ . Z założenia indukcyjnego wiemy, że  $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$  oraz  $\varphi_2 \equiv \mathcal{T}(\varphi_2)$ .

- $\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2)$ , a zatem z założenia indukcyjnego jest to formuła równoważna  $(\varphi_1 \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi_2$ . Korzystając z równoważności  $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$  otrzymujemy równoważną formułę  $\neg(\neg\varphi_1 \vee \perp) \vee \varphi_2$ , która uprasza się do  $\varphi_1 \vee \varphi_2$ . Zatem  $\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$ , co pokazuje że  $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in X$ .

- Przypadek  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  jest podobny:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow (\mathcal{T}(\varphi_2) \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \equiv (\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \\
 &\equiv \neg(\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \perp)) \vee \perp \equiv \varphi_1 \wedge \neg(\varphi_2 \Rightarrow \perp) \equiv \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \neg\perp) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2.
 \end{aligned}$$

Zatem  $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , co pokazuje, że  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in X$ .

- $\mathcal{T}(\neg\varphi_1) = \mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \perp \equiv \varphi_1 \Rightarrow \perp \equiv \neg\varphi_1 \vee \perp \equiv \neg\varphi_1$ . Zatem  $\neg\varphi_1 \in X$ .

Na mocy zasady indukcji zbiór  $X$  zawiera wszystkie formuły z  $\mathcal{F}$ , a to oznacza, że dla wszystkich formuł  $\varphi$  zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) formuły  $\varphi$  i  $\mathcal{T}(\varphi)$  są równoważne.

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

**D**

Numer indeksu:

000000

Grupa<sup>1</sup>:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 20 listopada 2015

czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli dla dowolnych formuł  $\varphi$  i  $\psi$  logiki pierwszego rzędu formuła  $(\exists x \varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x \varphi) \Rightarrow \exists x \psi$  jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Uniwersum:  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi : x = 5$ ,  $\psi : \perp$

**Zadanie 2 (2 punkty).** Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie  $W$  jest uproszczeniem wyrażenia  $W'$  jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole  $\cup, \cap, \setminus$  i nawiasy, oraz  $W$  zawiera mniej symboli niż  $W'$ . Np.  $A \setminus B$  jest uproszczeniem  $(A \cup B) \setminus B$ . Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia  $(A \cap (C \setminus B)) \cup B$  to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$(A \cap C) \cup B$

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 3 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, mające następującą tabelkę zero-jedynkową.

$p$	$q$	$r$	$\varphi$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

CNF:  $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$

DNF:  $q \vee (p \wedge r)$

**Zadanie 4 (2 punkty).** Jeśli zbiór klauzul  $\{\neg p \vee q, \neg r \vee s, \neg q \vee \neg s, \neg p \vee r\}$  jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

**Zadanie 5 (2 punkty).** Jeśli formuły  $(p \Leftrightarrow q) \vee r$  oraz  $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$  są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja:	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px; font-size: 24px; font-weight: bold;">D</div>	Numer indeksu:	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px; font-size: 18px; color: blue;">000000</div>	Grupa <sup>1</sup> :		
				8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
				8–10 s.140		
				10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

**Zadanie 6 (5 punktów).** Rozważmy odwzorowanie  $\mathcal{T}$  przyporządkowujące formułom zbudowanym ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) formuły zbudowane ze zmiennych, spójników  $\Rightarrow, \neg$  (i nawiasów) w następujący sposób.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(p) &= p, \quad \text{dla wszystkich zmiennych } p \\ \mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= \neg(\mathcal{T}(\varphi_1)) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2) \\ \mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= \neg(\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \neg(\mathcal{T}(\varphi_2))) \\ \mathcal{T}(\neg\varphi) &= \neg(\mathcal{T}(\varphi))\end{aligned}$$

Udowodnij, że dla wszystkich formuł  $\varphi$  zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) formuły  $\varphi$  i  $\mathcal{T}(\varphi)$  są równoważne.

**Rozwiązanie.** Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem głębokości formuły  $\varphi$ . Indukcja względem struktury  $\varphi$  byłaby bardziej naturalna, ale chcemy pokazać, że można to zrobić inaczej niż w wersji A.

Niech  $\mathcal{F}$  oznacza zbiór wszystkich formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) i niech

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{dla każdej formuły } \varphi \in \mathcal{F} \text{ o głębokości } n, \varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)\}.$$

**Podstawa indukcji:** Weźmy dowolną formułę o głębokości 1. Jest to pewna zmienna zdaniowa  $p$ . Ponieważ  $\mathcal{T}(p) = p$ , formuły  $\mathcal{T}(p)$  oraz  $p$  są równoważne, a stąd  $1 \in X$ .

**Krok indukcyjny:** Weźmy dowolne  $n \geq 1$  i założmy, że wszystkie liczby nie większe niż  $n$  należą do  $X$ , czyli że dla wszystkich formuł  $\varphi$  o głębokości  $\leq n$  formuły  $\varphi$  oraz  $\mathcal{T}(\varphi)$  są równoważne (to jest założenie indukcyjne). Pokażemy, że także  $n+1 \in X$ , czyli że dla wszystkich formuł  $\varphi$  o głębokości  $n+1$  formuły  $\varphi$  oraz  $\mathcal{T}(\varphi)$  są równoważne. Weźmy zatem dowolną formułę  $\varphi \in \mathcal{F}$  o głębokości  $n+1$  i rozważmy następujące trzy przypadki.

$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ : Formuły  $\varphi_1$  oraz  $\varphi_2$  mają głębokość nie większą niż  $n$ , więc z założenia indukcyjnego  $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$  oraz  $\varphi_2 \equiv \mathcal{T}(\varphi_2)$ . Wtedy  $\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg(\mathcal{T}(\varphi_1)) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$ , a stąd  $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$ .

$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ : Formuły  $\varphi_1$  oraz  $\varphi_2$  mają głębokość nie większą niż  $n$ , więc z założenia indukcyjnego  $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$  oraz  $\varphi_2 \equiv \mathcal{T}(\varphi_2)$ . Wtedy  $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg(\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \neg(\mathcal{T}(\varphi_2))) \equiv \neg(\varphi_1 \Rightarrow \neg\varphi_2) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , a stąd  $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$ .

$\varphi = \neg\varphi_1$ : Formuła  $\varphi_1$  ma głębokość nie większą niż  $n$ , więc z założenia indukcyjnego  $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$ . Wtedy  $\mathcal{T}(\neg\varphi_1) = \neg(\mathcal{T}(\varphi_1)) \equiv \neg\varphi_1$ , a stąd  $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$ .

We wszystkich możliwych przypadkach pokazaliśmy, że  $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$ , a z tego wynika że dla wszystkich formuł  $\varphi$  o głębokości  $n+1$  formuły  $\varphi$  oraz  $\mathcal{T}(\varphi)$  są równoważne, czyli  $n+1 \in X$ .

Na mocy zasady indukcji zbiór  $X$  zawiera wszystkie liczby naturalne  $\geq 1$ , a to oznacza, że dla wszystkich formuł  $\varphi$  (o dowolnej głębokości) zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójników  $\vee, \wedge, \neg$  (i nawiasów) formuły  $\varphi$  i  $\mathcal{T}(\varphi)$  są równoważne.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Które z poniższych zdań są prawdziwe dla wszystkich formuł  $\varphi$  i  $\psi$  rachunku zdań?

1. Jeśli  $\varphi \Rightarrow \psi$  jest tautologią oraz  $\neg\psi$  jest spełnialna, to  $\neg\varphi$  jest spełnialna.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

2. Jeśli  $\varphi \Rightarrow \psi$  jest tautologią oraz  $\neg\psi$  jest spełnialna, to  $\varphi$  jest spełnialna.

Podaj dowody ich prawdziwości. W pozostałych przypadkach wskaż kontrprzykłady.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Udowodnij, że jeżeli dla pewnych zbiorów  $A, B$  i  $C$  zachodzi  $A \cap B = A \cap C$  oraz  $A \cup B = A \cup C$ , to  $B = C$ .