Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część licencjacka)

3 lutego 2009

Aby zdać tę część egzaminu (być dopuszczonym do części zasadniczej) trzeba uzyskać co najmniej 10 punktów. Egzamin trwa 60 minut.

Zadanie 1 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz równoważną z $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$ formułę w koniunkcyjnej postaci normalnej.

Zadanie 2 (1 punkt). Jeśli formuła $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q))$ jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAUTOLOGIA". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 3 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę, która (interpretowana w zbiorze liczb rzeczywistych) mówi, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nie jest* bijekcją. Formuła ta nie może zawierać negacji.

Zadanie 4 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz nie zawierającą symbolu negacji formułę równoważną formule $\neg(\forall(\varepsilon > 0)\exists(k \in \mathbb{N})\ \forall n\ \ ((n > k)\ \Rightarrow |f(n) - a| < \varepsilon))$.

Zadanie 5 (1 punkt). Jeśli inkluzja $A \cap (B \setminus C) \cap D \subseteq B \cap (A \setminus C) \cap D$ zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, C i D, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (1 punkt). Jeśli inkluzja $\bigcap_{t\in T}(A_t \cup B_t) \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ i $\{B_t\}_{t\in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 7 (1 punkt). Niech $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość zbioru $\bigcup_{m=5}^{\infty} \bigcap_{n\leq m} A_n$, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup$.

Zadanie 8 (1 punkt). Niech $R = \{\langle n, n+3\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle n, m\rangle \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Zadanie 9 (1 punkt). Jeśli równość $f(X \doteq Y) = f(X) \doteq f(Y)$ zachodzi dla dowolnych funkcji $f : A \to B$ i dowolnych zbiorów $X, Y \subseteq A$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 10 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład porządku w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, który nie jest izomorficzny z naturalnym porządkiem $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$.

Imię i nazwisko:

Zadanie 11 (1 punkt). Jeśli funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana wzorem $f(X) = \{0\} \cup \{x + 3 \mid x \in X\}$ ma najmniejszy punkt stały, to w prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość tego punktu stałego. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 12 (1 punkt). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N} \times \{0,1\}$	$\{1,2,3\} \times \{4,5\}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\{2009\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$	$\{0,1\}^{\{2,3,4\}}$

Zadanie 13 (1 punkt). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \to \{a,b\}^{\mathbb{Q} \cap [1,2]}$, gdzie $[x,y]$ oznacza przedział domknięty od x do y w zbiorze liczb rzeczywistych, to w prostokąt poniżej wpisz definicję dowolnej takiej bijekcji. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 14 (1 punkt). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $f \preceq g \overset{\text{df}}{\iff} \forall n{\in}\mathbb{N}\ f(n) \leq g(n)$.

Niech $f_i(n) = \begin{cases} n & \text{dla } n > i \\ 0 & \text{dla } n \leq i \end{cases}$ i niech $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej wzory definiujące funkcje będące odpowiednio kresem górnym i dolnym zbioru X lub słowo „NIE”, jeśli odpowiedni kres nie istnieje.

(a) $\sup X$

(b) $\inf X$

Zadanie 15 (1 punkt). Jeśli porządki $\langle \mathbb{N} \times \{0,1\}, \leq_{lex} \rangle$ i $\langle \{0,1\} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$, gdzie $\leq_{lex}$ jest leksykograficznym rozszerzeniem naturalnego porządku, są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 16 (1 punkt). Jeśli porządki $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \{0\}^*, \leq_{lex} \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 17 (1 punkt). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee r,\ \neg q \vee r,\ p \vee q,\ \neg r \vee \neg s,\ \neg r \vee s\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 18 (1 punkt). Jesli termy $f(x, g(x))$ i $f(f(y, z), z)$ są unifikowalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny unifikator tych termów. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 19 (1 punkt). Jesli termy $f(x, z)$ i $f(f(y, z), y)$ są unifikowalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny unifikator tych termów. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 20 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz sformułowanie (dowolnej wersji) zasady indukcji.

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

2 lutego 2009

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -10 do 10 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów. Mniej niż -2 punkty otrzymuje osoba, która umieszcza w swoim rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywe. Rozwiązania, w których nie ma odpowiedzi kompromitująco fałszywych, będą oceniane w skali od -2 do 10 punktów.

Zadanie 21. Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna monotoniczna bijekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Zadanie 22. Udowodnij, że zbiory $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ oraz $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ są równoliczne.

Zadanie 23. Rozważmy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

(a) Niech X będzie takim nieskończonym podzbiorem $\mathbb{Q}$, który nie ma elementu największego. Udowodnij, że istnieje nieskończony ściśle rosnący ciąg elementów zbioru X.

(b) Niech X będzie dowolnym nieskończonym podzbiorem $\mathbb{Q}$. Udowodnij, że istnieje nieskończony ściśle monotoniczny (rosnący lub malejący) ciąg elementów zbioru X.

Zadanie 24. Rozważmy dowolne izomorficzne zbiory częściowo uporządkowane $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ oraz izomorfizm porządkowy $f : A \to B$. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru $X \subseteq A$ jeśli $a = \sup X$ to $f(a) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$.

Student name:

Logic for Computer Science

Final exam (bachelor part)

February 3, 2009

This part lasts 60 minutes. To pass it one needs at least 10 points.

Task 1 (1 point). In the box below write a formula in conjunctive normal form equivalent to the formula $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$.

Task 2 (1 point). If the formula $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q))$ is a tautology then in the box below write the word "TAUTOLOGY". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 3 (1 point). In the box below write a formula that interpreted in the set of real numbers says that a function f *is not* a bijection. The formula must not contain negation symbols.

Task 4 (1 point). In the box below write a formula that contains no negation symbol and is equivalent to $\neg(\forall(\varepsilon > 0)\exists(k \in \mathbb{N})\, \forall n\ \ ((n > k)\ \Rightarrow |f(n) - a| < \varepsilon))$.

Task 5 (1 point). If the inclusion $A \cap (B \setminus C) \cap D \subseteq B \cap (A \setminus C) \cap D$ is true for all sets A, B, C and D, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 6 (1 point). If the inclusion $\bigcap_{t\in T}(A_t \cup B_t) \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t$ is true for all indexed families of sets $\{A_t\}_{t\in T}$ and $\{B_t\}_{t\in T}$, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 7 (1 point). Let $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$. In the box below write the value of the set $\bigcup_{m=5}^{\infty} \bigcap_{n\leq m} A_n$, that is, write an expression that denotes the same set and contains no symbols $\cap, \cup$.

Task 8 (1 point). Let $R = \{\langle n, n+3\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. In the box below write a formula φ such that $\{\langle n, m\rangle \mid \varphi\}$ is the transitive closure of the relation R.

Task 9 (1 point). If the equality $f(X \doteq Y) = f(X) \doteq f(Y)$ is true for all functions $f : A \to B$ and all sets $X, Y \subseteq A$, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 10 (1 point). In the box below write any example of an order relation on the set of natural numbers $\mathbb{N}$ that is not isomorphic with the natural order $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$.

Student name:

Task 11 (1 point). If the function $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ defined by $f(X) = \{0\} \cup \{x + 3 \mid x \in X\}$ has the least fixed point then in the box below write the value of this least fixed point. Otherwise write the word "NO".

Task 12 (1 point). Write in the empty fields of the table below the cardinalities of the respective sets.

$\mathbb{N} \times \{0,1\}$	$\{1,2,3\} \times \{4,5\}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\{2009\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$	$\{0,1\}^{\{2,3,4\}}$

Task 13 (1 point). If there exists a bijection $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \to \{a,b\}^{\mathbb{Q} \cap [1,2]}$, where $[x,y]$ denotes the closed interval from x to y in the set of real numbers, then in the box below write an expression defining any such bijection. Otherwise write the word "NO".

Task 14 (1 point). Consider the order $\preceq$ in the set $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ of all functions from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$ defined by $f \preceq g \overset{\text{df}}{\iff} \forall n{\in}\mathbb{N}\ f(n) \leq g(n)$.

Let $f_i(n) = \begin{cases} n & \text{for } n > i \\ 0 & \text{for } n \leq i \end{cases}$ and let $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. In the boxes below write the expressions defining functions that are respectively the least upper bound and the greatest lower bound of the set X, or the word "NO" if the respective bound does not exist.

(a) $\sup X$

(b) $\inf X$

Task 15 (1 point). If the ordered sets $\langle \mathbb{N} \times \{0,1\}, \leq_{lex} \rangle$ and $\langle \{0,1\} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$, where $\leq_{lex}$ is the lexicographic extension of the natural order, are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an order does not exist.

Task 16 (1 point). If the ordered sets $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ and $\langle \{0\}^*, \leq_{lex} \rangle$ are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an order does not exist.

Task 17 (1 point). If the set of clauses $\{\neg p \vee r,\ \neg q \vee r,\ p \vee q,\ \neg r \vee \neg s,\ \neg r \vee s\}$ is inconsistent then in the box below write a resolution proof of inconsistency of this set. Otherwise write a valuation satisfying this set.

Task 18 (1 point). If the terms $f(x, g(x))$ and $f(f(y, z), z)$ are unifiable, then in the box below write any unifier of these terms. Otherwise write the word "NO".

Task 19 (1 point). If the terms $f(x, z)$ i $f(f(y, z), y)$ are unifiable, then in the box below write any unifier of these terms. Otherwise write the word "NO".

Task 20 (1 point). In the box below write a formulation of (any version of) the induction principle.

Student name:

Solutions returned:

Logic for Computer Science

Final exam (main part)

February 3, 2009

Each of the task below is scored from -10 to 10 points. Empty solutions are scored with 0 points. Only solutions that contain discreditably false statements are scored with negative points.

Task 21. Prove that there exists exactly one monotone bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Task 22. Prove that the sets $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ and $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ are equinumerous.

Task 23. Consider the set of rational numbers $\mathbb{Q}$.

(a) Let X be an infinite subset of $\mathbb{Q}$ such that it has no greatest element. Prove that there exists an infinite strictly increasing sequence of elements of the set X.

(b) Let X be an arbitrary infinite subset of $\mathbb{Q}$. Prove that there exists an infinite strictly monotone (increasing or decreasing) sequence of elements of the set X.

Task 24. Consider two isomorphic partially ordered sets $\langle A, \leq_A \rangle$ and $\langle B, \leq_B \rangle$ and an order isomorphism $f : A \to B$. Prove that for all sets $X \subseteq A$, if $a = \sup X$ then $f(a) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$.