Wersja: **B**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 15 stycznia 2016

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\sim$ w taki sposób, że $X \sim Y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory X i Y są równoliczne. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji $[\{42, 17\}]_\sim$ oraz moc zbioru klas abstrakcji relacji $\sim$.

$|[\{42, 17\}]_\sim| = \boxed{\aleph_0}$ $\qquad$ $|\mathcal{P}(\mathbb{N})/_\sim| = \boxed{\aleph_0}$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje pięć różnych zbiorów równolicznych z $\mathbb{R}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich pięciu zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE".

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ daną wzorem

$$F(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (F(f))(n) = f(2n).$$

Jeśli F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do F. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

F nie jest injekcją, np. dla $f_0(n) = 0$ oraz $f_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ 1, & \text{wpp.} \end{cases}$ mamy $F(f_0) = F(f_1)$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy podział $\{\{0\}, \{1\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}\}$ zbioru liczb naturalnych. W prostokąt poniżej wpisz relację równoważności, której klasy abstrakcji tworzą ten podzial.

$$R(x, y) \overset{\text{df}}{\iff} (x = 0 \land y = 0) \lor (x = 1 \land y = 1) \lor (x \geq 2 \land y \geq 2)$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: (A \times B)^C \to (A \times C)^B, & \qquad g &: C \to A \times B, \\ h &: A \times B \to (A \times C)^B \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A \times B)^C$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(f(g))(b)$	TAK	$(h(g(c)))(b)$	TAK
$h(f(c))$	NIE	$(f(g))(a, b)$	NIE

Wersja: **B**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy dowolną funkcję $f : A \to B$ i dowolną relacją równoważności $R \subseteq B \times B$. Udowodnij, że relacja

$$\{\langle x, y\rangle \mid \langle f(x), f(y)\rangle \in R\}$$

jest relacją równoważności na zbiorze A.

Zadanie 7 (5 punktów). Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację binarną R wzorem

$$R(f, g) \stackrel{\text{df}}{\iff} f(15) = g(15) \wedge f(1) = g(1) \wedge f(2016) = g(2016).$$

Łatwo zauważyć, że R jest relacją równoważności; w rozwiązaniu tego zadania nie trzeba tego dowodzić. Niech $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bedą funkcjami zadanymi wzorami $f_0(n) = 0$ i $f_1(n) = n$. Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że klasy abstrakcji $[f_0]_R$ oraz $[f_1]_R$ są równoliczne.

Zadanie 8 (5 punktów). Mówimy, że funkcja $f : N \to \mathbb{N}$ jest *ściśle rosnąca* jeśli spełnia warunek $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f(n) < f(n + 1)$. Udowodnij, że zbiór

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ jest ściśle rosnąca}\}$$

ma moc continuum.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **C**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 15 stycznia 2016

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy podział $\{\{n \in \mathbb{N} \mid n < 2016\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2016\}\}$ zbioru liczb naturalnych. W prostokąt poniżej wpisz relację równoważności, której klasy abstrakcji tworzą ten podzial.

$$R(x,y) \stackrel{\text{df}}{\iff} (x < 2016 \land y < 2016) \lor (x \geq 2016 \land y \geq 2016)$$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje pięć różnych zbiorów równolicznych z $\mathbb{N}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich pięciu zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE”.

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : A^{B\times C} \to (A\times B)^C, \qquad g : B\times C \to A,$$
$$h : A\times B \to (A\times B)^C$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin A^{B\times C}$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(f(g))(c)$	TAK	$h(g(b,c),b)$	TAK
$h(f(g))$	NIE	$\big(h(g(b,c),b)\big)(c)$	TAK

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszyskich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\approx$ w taki sposób, że dwie funkcje uznajemy za równoważne gdy przeciwobraz zbioru $\{2016\}$ przez obie funkcje jest taki sam, czyli wzorem

$$f \approx g \stackrel{\mathrm{df}}{\iff} f^{-1}[\{2016\}] = g^{-1}[\{2016\}].$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji $[\chi_{\mathbb{P}}]_{\approx}$ oraz moc zbioru klas abstrakcji relacji $\approx$, gdzie $\chi_{\mathbb{P}}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru liczb parzystych zdefiniowaną wzorem $\chi_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$

$|[\chi_{\mathbb{P}}]_{\approx}| = \boxed{\mathfrak{c}}$ $\quad$ $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\approx}| = \boxed{\mathfrak{c}}$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ daną wzorem $f(X) = \{2n \mid n \in X\}$. Jeśli f ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do f. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

f nie jest surjekcją, np $\{1\}$ nie jest wartością funkcji f

Wersja: **C**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Udowodnij, że zbiór

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ jest bijekcją}\}$$

ma moc continuum.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech $f : A \to B$ będzie bijekcją i niech $R \subseteq A \times A$ będzie relacją równoważności. Udowodnij, że relacja

$$\{\langle f(x), f(y)\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

jest relacją równoważności na zbiorze B.

Zadanie 8 (5 punktów). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych wprowadzamy relację binarną R wzorem

$$R(X, Y) \stackrel{\text{df}}{\iff} (15 \in X \Leftrightarrow 15 \in Y) \wedge (1 \in X \Leftrightarrow 1 \in Y) \wedge (2016 \in X \Leftrightarrow 2016 \in Y).$$

Łatwo zauważyć, że R jest relacją równoważności; w rozwiązaniu tego zadania nie trzeba tego dowodzić. Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że klasy abstrakcji $[\emptyset]_R$ oraz $[\mathbb{N}]_R$ są równoliczne.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.