Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

2 lutego 2016
czas pisania: 80 min

Zadanie 1 (2 punkty). Podaj formułę równoważną formule $p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)$ i mającą:

(a) koniunkcyjną postać normalną

(b) dysjunkcyjną postać normalną

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje formuła równoważna z $p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)$ i zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych i spójników $\neg, \vee$ (i nawiasów) to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo "NIE".

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuły $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ i $(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej mówiąca że relacja R *nie jest* relacją równoważności to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 5 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$(A \dot{-} B) \dot{-} C = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$$

to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (2 punkty). Jesli formuła $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, przy którym ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee r,\ \neg q \vee r,\ p \vee q,\ \ \neg r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 8 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$. Jeśli zbiór $\bigcap_{m=17}^{42} \bigcup_{n=5}^{m+10} A_n$ ma najmniejszy element to w prostokąt poniżej wpisz najmniejszy element tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE MA”.

Zadanie 9 (2 punkty). Niech $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \leq 5\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Numer indeksu:

Zadanie 10 (2 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie symboli matematycznych) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ i $\{B_t\}_{t\in T}$ zachodzi inkluzja $\bigcup_{t\in T}(A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$.

Dowód. Weźmy dowolny element i załóżmy, że . Z definicji sumy indeksowanej rodziny zbiorów wiemy, że istnieje taki indeks t_o, że , czyli oraz . Ponownie korzystając z definicji sumy indeksowanej rodziny zbiorów otrzymujemy oraz , czyli $x \in \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$, co kończy dowód.

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy funkcję trygonometryczną $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Jeśli dla wszystkich podzbiorów X zbioru $\mathbb{R}$ zachodzi równość $\sin^{-1}[\sin[X]] = X$ to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : (A\times B)^C \to (A\times C)^B, \qquad g : C \to A\times B,$$
$$h : A\times B \to (A\times C)^B$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A\times B)^C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór, do którego należy elemant oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $h(a, b)$ jest $(A\times C)^B$. Wpisz odpowiedni typ wyrażenia w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(f(g))(b)$

$h(g(c))$

$(h(a, b))(b)$

$(f(g))(a, c)$

Zadanie 13 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz moc zbioru

$$\{R \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid R \text{ jest jednocześnie relacją częściowego porządku i równoważności}\}$$

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, które *nie są* „na”. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 15 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności, która ma continuum klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz słowo “NIE”.

Zadanie 16 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{R} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$	$\{1,2,3\} \times (\{4,5\}^{\{6,7\}})$	$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}^{\{0,1\}})$	$\mathbb{R}^{\{2016\}}$	$(\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$	$\{0,1,2\}^{\{2,3,4\}}$

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \leq \rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje ($\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych).

Zadanie 18 (2 punkty). Powiemy, że słowo w jest *podsłowem* słowa v jesli w można otrzymać z v przez wykreślenie niektórych liter. Np. słowo *prąd* jest podsłowem słowa *porządek*. Niech $\sqsubseteq$ będzie relacją częściowego porządku na zbiorze skończonych ciągów zero-jedynkowych $\{0,1\}^*$ taką, że $w \sqsubseteq v$ wtedy i tylko wtedy, gdy w jest podsłowem v. Jeśli porządek $\langle \{0,1\}^*, \sqsubseteq \rangle$ jest regularny to wpisz w prostokąt poniżej słowo „REGULARNY”. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie dlaczego nie jest on regularny.

Zadanie 19 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech parami nieizomorficznych porządków.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(g(x,y),a) \stackrel{?}{=} f(z,z)$		$f(g(x,y),z) \stackrel{?}{=} f(z,z)$	
$f(g(x,y),a) \stackrel{?}{=} f(g(z,y),x)$		$f(x,g(y,z)) \stackrel{?}{=} f(z,z)$	

Numer indeksu:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

2 lutego 2016

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów[1].

We wszystkich zadaniach poniżej V jest ustalonym zbiorem zmiennych zdaniowych zawierającym zmienne $p, q, X_0, \ldots, X_{63}, Y_0, \ldots, Y_{63}$.

Zadanie 21. Na zbiorze $W = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}^V$ wartościowań zmiennych ze zbioru V definiujemy relację binarną $\preceq$ wzorem

$$\sigma_1 \preceq \sigma_2 \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall v \in V\ \sigma_1(v) = \mathsf{T} \Rightarrow \sigma_2(v) = \mathsf{T}.$$

Udowodnij, że $\preceq$ jest relacją porządku częściowego na zbiorze W. Czy porządek $\langle W, \preceq\rangle$ jest izomorficzny z porządkiem $\langle \mathcal{P}(V), \subseteq\rangle$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 22. Na zbiorze wartości boolowskich $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ wprowadzamy porządek liniowy $\sqsubseteq$ w taki sposób, że $\mathsf{F} \sqsubseteq \mathsf{T}$. Powiemy, że formuła φ jest *monotoniczna* jeśli dla wszystkich wartościowań σ_1, σ_2 zachodzi warunek

$$\sigma_1 \preceq \sigma_2 \Rightarrow \hat{\sigma}_1(\varphi) \sqsubseteq \hat{\sigma}_2(\varphi)$$

gdzie $\preceq$ jest porządkiem z poprzedniego zadania.

(a) Czy formuła $p \Rightarrow q$ jest monotoniczna? Uzasadnij odpowiedź.

(b) Udowodnij indukcyjnie, że wszystkie formuły zbudowane ze zmiennych zdaniowych z V oraz spójników $\wedge, \vee$ są monotoniczne.

Zadanie 23. *Kontekst zadania.* Rozważmy sumator 64-bitowy, czyli układ elektroniczny, który dla zadanych ciągów bitów $\vec{x} = \langle x_0, \ldots, x_{63}\rangle$ i $\vec{y} = \langle y_0, \ldots, y_{63}\rangle$ oblicza ciąg bitów $\langle z_0, \ldots, z_{64}\rangle$ będący reprezentacją binarną sumy liczb reprezentowanych przez ciągi $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Ustalmy przy tym, że bit o numerze 0 jest najmniej znaczący, czyli że liczbą reprezentowaną przez ciąg $\vec{x}$ jest $\sum_{i=0}^{63} x_i \cdot 2^i$. Chcemy pokazać, że części sumatora obliczającej bit z_{17} nie da się zbudować tylko z bramek `and` i `or`.

Zadanie. Udowodnij, że nie istnieje formuła φ zbudowana ze zmiennych zdaniowych $X_0, \ldots, X_{63}$, $Y_0, \ldots, Y_{63}$ i spójników $\wedge, \vee$ o takiej własności, że jeśli wartościowanie σ spełnia warunek

$$\bigwedge_{i=0}^{63} bit(\sigma(X_i)) = x_i \wedge bit(\sigma(Y_i)) = y_i$$

to $bit(\hat{\sigma}(\varphi)) = z_{17}$. Tutaj $bit : \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \to \{0, 1\}$ jest funkcją konwertującą wartości boolowskie na bity zdefiniowaną wzorem $bit(v) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } v = \mathsf{T}, \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$.

Wskazówka: Możesz skorzystać z zadań poprzednich, nawet jeśli ich nie rozwiązałeś.

[1] Algorytm oceniania jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.