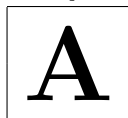


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 20 grudnia 2019

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). W tym zadaniu p jest unarnym, a q jest 0-arnym symbolem relacyjnym. Jeśli formuła $(\forall x (p(x) \Rightarrow q)) \Rightarrow ((\exists x p(x)) \Rightarrow q)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli dla wszystkich funkcji $f : A \rightarrow B$ oraz wszystkich zbiorów $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ zachodzi równość $f[X \cup f^{-1}[Y]] = f[X] \cup Y$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, X = \emptyset, Y = \{-1\}.$

Wtedy $f[X \cup f^{-1}[Y]] = \emptyset$, natomiast $f[X] \cup Y = \{-1\}.$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy taką funkcję $f : \mathbb{Z} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, że $f(n, x) = n + 2x$. Jeśli funkcja f ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do f . W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

f nie jest różnowartościowa, np. $f(1, 0) = f(0, 0.5)$

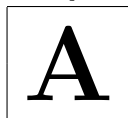
Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja antysymetryczna, której przechodnie domknięcie jest relacją zwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$A = \{1, 2, 3\}, R \subseteq A \times A, R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B i soków S oraz relacje binarne $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podają \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{\langle b, s \rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i soków o tej własności, że wszystkie osoby lubiące sok s bywają tylko w barze b .

$\forall o \in O. Lubi(o, s) \Rightarrow \forall b' \in B. (Bywa(o, b') \Rightarrow b = b')$

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Niech $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będą nieskończonymi rodzinami podzbiorów \mathbb{N} . Powiemy, że rodzina \mathcal{A} jest *spleciona* z rodziną \mathcal{B} , jeżeli dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ zachodzą warunki: $A_i \subseteq B_i$ oraz $B_i \subseteq A_{i+1}$.

- Podaj przykłady takich rodzin \mathcal{A}, \mathcal{B} podzbiorów \mathbb{N} , że \mathcal{A} jest spleciona z \mathcal{B} .
- Czy dla dowolnych takich rodzin \mathcal{A}, \mathcal{B} podzbiorów \mathbb{N} , że \mathcal{A} jest splecione z \mathcal{B} , zachodzi warunek $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$?
- Czy dla dowolnych takich rodzin \mathcal{A}, \mathcal{B} podzbiorów \mathbb{N} , że \mathcal{A} jest splecione z \mathcal{B} , zachodzi warunek $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

Zadanie 7 (5 punktów). Na zbiorze $P(\mathbb{N})$ określamy binarną relację *prawie-równości* zbiorów \approx w taki sposób, że $A \approx B$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $A = B$ lub istnieje taka liczba $x \in \mathbb{N}$, że $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\}$. Czy relacja \approx jest (a) zwrotna, (b) symetryczna, (c) przechodnia?

Zadanie 8 (5 punktów). Niech S będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad S nazywamy dowolną funkcję $A : S \rightarrow \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że $A(x)$ jest liczbą wystąpień elementu x w multizbiorze A). Jeśli A i B są multizbiorami, to ich przekrój $A \cap B$ i sumę $A \cup B$ definiujemy wzorami:

$$\begin{aligned}(A \cap B)(x) &= \min(A(x), B(x)) \\ (A \cup B)(x) &= A(x) + B(x)\end{aligned}$$

Czy dla dowolnych multizbiorów A, B, C zachodzą równości:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 20 grudnia 2019

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli dla wszystkich funkcji $f : A \rightarrow B$ oraz wszystkich zbiorów $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ zachodzi równość $f^{-1}[f[X] \cup Y] = X \cup f^{-1}[Y]$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, X = \{-1\}, Y = \emptyset.$$

$$\text{Wtedy } f^{-1}[f[X] \cup Y] = \{-1, 1\}, \text{ natomiast } X \cup f^{-1}[Y] = \{-1\}.$$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja symetryczna, której przechodnie domknięcie nie jest relacją zwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$$A = \{1, 2\}, R \subseteq A \times A, R = \{\langle 1, 1 \rangle\}$$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). W tym zadaniu p jest unarnym, a q jest 0-arnym symbolem relacyjnym. Jeśli formuła $((\exists x p(x)) \Rightarrow q) \Rightarrow (\forall x (p(x) \Rightarrow q))$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

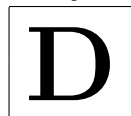
Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B i soków S oraz relacje binarne $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podają \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{\langle b, o \rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i osób o tej własności, że wszystkie soki lubiane przez osobę o są podawane tylko w barze b .

$$\forall s \in S. Lubi(o, s) \Rightarrow \forall b' \in B. (Podają(b', s) \Rightarrow b = b')$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy taką funkcję $f : \mathbb{Z} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, że $f(n, x) = 2n + 2$. Jeśli funkcja f ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do f . W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

f nie jest „na”, np. liczba 1 nie jest wartością f

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Na zbiorze $P(\mathbb{N})$ określamy binarną relację *prawie-zawierania* zbiorów \subsetneq w taki sposób, że $A \subsetneq B$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $A \subseteq B$ lub istnieje taka liczba $x \in \mathbb{N}$, że $A \setminus \{x\} \subseteq B \setminus \{x\}$. Czy relacja \subsetneq jest (a) zwrotna, (b) symetryczna, (c) przechodnia?

Zadanie 7 (5 punktów). Niech $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będą nieskończonymi rodzinami podzbiorów \mathbb{N} . Powiemy, że rodzina \mathcal{A} jest *wpleciona* w rodzinę \mathcal{B} , jeżeli dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ zachodzą warunki: $A_i \supseteq B_i$ oraz $B_i \supseteq A_{i+1}$.

- Podaj przykłady takich rodzin \mathcal{A}, \mathcal{B} podzbiorów \mathbb{N} , że \mathcal{A} jest wpleciona w \mathcal{B} .
- Czy dla dowolnych takich rodzin \mathcal{A}, \mathcal{B} podzbiorów \mathbb{N} , że \mathcal{A} jest wplecione w \mathcal{B} , zachodzi warunek $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$?
- Czy dla dowolnych takich rodzin \mathcal{A}, \mathcal{B} podzbiorów \mathbb{N} , że \mathcal{A} jest wplecione w \mathcal{B} , zachodzi warunek $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech S będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad S nazywamy dowolną funkcję $A : S \rightarrow \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że $A(x)$ jest liczbą wystąpień elementu x w multizbiorze A). Jeśli A i B są multizbiorami, to ich przekrój $A \cap B$, sumę $A \cup B$ i różnicę $A \setminus B$ definiujemy wzorami:

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x) &= \min(A(x), B(x)) \\ (A \cup B)(x) &= A(x) + B(x) \\ (A \setminus B)(x) &= \max(A(x) - B(x), 0). \end{aligned}$$

Czy dla dowolnych multizbiorów A, B, C zachodzą równości:

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.