Wersja: **A** Numer indeksu: 000000

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 1 grudnia 2011

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (4 punkty). Niech $R = \{\langle m, m+2\rangle \mid m \in \mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle m, n\rangle \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

$$m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N}\; k \geq 1 \wedge m + 2k = n$$

Zadanie 2 (4 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $\exists x\, \varphi \Rightarrow \exists x\, (\varphi \vee \psi)$ w systemie naturalnej dedukcji.

$\exists x\, \varphi$ założenie

x_0 świeża zmienna

$\varphi[x/x_0]$ założenie

$$\frac{\varphi[x/x_0]}{(\varphi \vee \psi)[x/x_0]}\ \vee i$$

$$\frac{(\varphi \vee \psi)[x/x_0]}{\exists x\, (\varphi \vee \psi)}\ \exists i$$

$$\frac{\exists x\, \varphi \qquad \exists x\, (\varphi \vee \psi)}{\exists x\, (\varphi \vee \psi)}\ \exists e$$

$$\frac{}{\exists x\, \varphi \Rightarrow \exists x\, (\varphi \vee \psi)}\ \Rightarrow i$$

Zadanie 3 (4 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t,s \in T} (A_t \cap B_s) \subseteq \bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t)$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ i $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$T = \{1, 2\},\ A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\},\ B_1 = \{2\}, B_2 = \{1\}$$

Zadanie 4 (4 punkty). Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi równość $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że zachodzi następujący lemat.

Lemat. Dla dowolnych zbiorów X, A i B mamy $X \subseteq A \cap B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \subseteq A$ oraz $X \subseteq B$.

Dowód lematu jest tak łatwy, że go pominiemy.

Z zasady ekstensjonalności wystarczy pokazać, że dla dowolnego x zachodzi $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Weźmy zatem dowolny x. Z definicji zbioru potęgowego mamy, że $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \subseteq A \cap B$. Z naszego lematu otrzymujemy, że ostatnia własność jest równoważna $x \subseteq A$ oraz $x \subseteq B$, co z definicji zbioru potęgowego oraz definicji przekroju zbiorów jest równoważne $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Zadanie 5 (4 punkty). Rozważmy relację binarną $R \subseteq A \times A$. Definiujemy $R^1 = R$ oraz $R^{n+1} = R^n R$ dla wszystkich $n \geq 1$.

Udowodnij, że dla wszystkich liczb naturalnych $i, j \geq 1$ zachodzi równość $R^i R^j = R^{i+j}$.

Wskazówka: indukcja względem j.

Rozwiązanie.
Podstawa indukcji: Dla $j = 1$ mamy pokazać, że $R^i R^1 = R^{i+1}$. W trywialny sposób wynika to z definicji R^{i+1} oraz R^1.
Krok indukcyjny: Weźmy dowolne $j \geq 1$ i załóżmy, że $R^i R^j = R^{i+j}$. Pokażemy, że $R^i R^{j+1} = R^{i+j+1}$. Z definicji R^{j+1} mamy $R^i R^{j+1} = R^i (R^j R)$. Z łączności składania relacji wiemy, że $R^i (R^j R) = (R^i R^j) R$. Z założenia indukcyjnego $(R^i R^j) R = R^{i+j} R$ a z definicji R^{i+j+1} dostajemy $R^{i+j} R = R^{i+j+1}$. Zatem $R^i R^{j+1} = R^{i+j+1}$, co kończy dowód.

Wersja: **C** Numer indeksu: 000000

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 1 grudnia 2011

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (4 punkty). Niech $R = \{\langle m, m+m\rangle \mid m \in \mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle m, n\rangle \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

$$m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N}\; k \geq 1 \wedge m \cdot 2^k = n$$

Zadanie 2 (4 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\,\varphi$ w systemie naturalnej dedukcji.

$\exists x\,(\varphi \wedge \psi)$ założenie

x_0 świeża zmienna

$(\varphi \wedge \psi)[x/x_0]$ założenie

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi \wedge \psi)[x/x_0]}{\varphi[x/x_0]}\,\wedge e}{\exists x\,\varphi}\,\exists i$$

$$\dfrac{\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \qquad \exists x\,\varphi}{\exists x\,\varphi}\,\exists e$$

$$\dfrac{}{\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\,\varphi}\,\Rightarrow i$$

Zadanie 3 (4 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcap_{t\in T}(A_t \cup B_t) \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ i $\{B_t\}_{t\in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$T = \{1,2\},\; A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\},\; B_1 = \{2\}, B_2 = \{1\}$$

Zadanie 4 (4 punkty). Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi inkluzja $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Czy dla wszystkich zbiorów A, B zachodzi także inkluzja odwrotna?

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że zachodzi następujący lemat.

Lemat. Dla dowolnych zbiorów X, A i B mamy jeśli $X \subseteq A$ to $X \subseteq A \cup B$.

Dowód lematu jest tak łatwy, że go pominiemy.

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego x jeśli $x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ to $x \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Weźmy zatem dowolny $x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Z definicji sumy zbioru mamy, że $x \in \mathcal{P}(A)$ lub $x \in \mathcal{P}(B)$. Rozważmy dwa przypadki. Jeśli $x \in \mathcal{P}(A)$ to z definicji zbioru potęgowego $x \subseteq A$. Z naszego lematu otrzymujemy, że $x \subseteq A \cup B$, czyli $x \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Podobnie, jeśli $x \in \mathcal{P}(B)$ to z definicji zbioru potęgowego mamy $x \subseteq B$; z lematu otrzymujemy, że $x \subseteq A \cup B$, czyli $x \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Inkluzja odwrotna nie zachodzi dla wszystkich zbiorów A i B. Aby pokazać kontrprzykład, wystarczy przyjąć $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Wtedy $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, ale $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Zadanie 5 (4 punkty). Rozważmy relację binarną $R \subseteq A \times A$. Definiujemy $R^1 = R$ oraz $R^{n+1} = R^n R$ dla wszystkich $n \geq 1$.

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość $R^n R = RR^n$.

Rozwiązanie. Pokażemy indukcyjnie, że $R^n R = RR^n$.
Podstawa indukcji: Dla $n = 1$ mamy pokazać, że $RR^1 = R^1 R$. W trywialny sposób wynika to z faktu, że $R^1 = R$.
Krok indukcyjny: Weźmy dowolne $n \geq 1$ i załóżmy, że $R^n R = RR^n$. Pokażemy, że $R^{n+1} R = RR^{n+1}$. Z definicji R^{n+1} mamy $R^{n+1} R = (R^n R)R$. Z założenia indukcyjnego $(R^n R)R = (RR^n)R$. Z łączności składania relacji wiemy, że $(RR^n)R = R(R^n R)$ i ponownie z definicji R^{n+1} otrzymujemy $R(R^n R) = RR^{n+1}$. Zatem $R^{n+1} R = RR^{n+1}$, co kończy dowód.