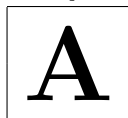


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

## Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 14 grudnia 2018

Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** *Różnicę symetryczną*  $\dot{\div}$  zbiorów  $A$  i  $B$  definiujemy następująco:

$$A \dot{\div} B = \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \notin B\}.$$

Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie  $W$  jest uproszczeniem wyrażenia  $W'$  jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne operatory  $\cup, \cap, \setminus, \dot{\div}$  i nawiasy, oraz  $W$  zawiera mniej operatorów niż  $W'$ . Np.  $A \cup B$  jest uproszczeniem  $(A \setminus B) \cup B$ . Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia  $A \setminus (A \dot{\div} B)$  to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 2 (2 punkty).** Jeśli istnieje taka rodzina  $\{X_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  zbiorów niepustych, że

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} X_{i,j} = \emptyset$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką rodzinę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Rozważmy funkcje

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}, \quad h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

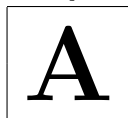
Rozważmy wyrażenia zbudowane z symboli  $(, , f, g, h, ;, \circ)$ , gdzie  $\circ$  oznacza operator składania funkcji. Wyrażenie uznajemy za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie  $f(g)$  nie jest poprawne, bo  $g \notin \mathbb{N}$ . Jeśli istnieje wyrażenie, którego wartością jest liczba naturalna i w którym każdy z symboli  $f, g$  i  $h$  występuje co najmniej raz, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego wyrażenia; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Jeśli formuła  $\left(\forall x (p(x) \Rightarrow \neg q(x))\right) \Rightarrow \left(\forall x (q(x) \Rightarrow \neg p(x))\right)$  jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

**Zadanie 5 (2 punkty).** Rozważmy zbiory osób  $O$ , barów  $B$  i soków  $S$  oraz relacje binarne  $Bywa \subseteq O \times B$ ,  $Lubi \subseteq O \times S$  i  $Podają \subseteq B \times S$  informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę  $\varphi$ , że  $\{\langle b, o \rangle \mid \varphi\}$  jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i osób o tej własności, że osoba  $o$  bywa w barze  $b$  ale nie lubi żadnego podawanego tam soku.

Wersja:



Numer indeksu:

--

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

**Zadanie 6 (5 punktów).** Rozważmy taką relację binarną  $R \subseteq A \times A$ , że  $R;R = I_A$ , gdzie  $I_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$  jest relacją identycznościową na zbiorze  $A$ . Udowodnij, że  $R$  jest funkcją.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów  $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ , gdzie  $A_i \subseteq \mathbb{N}$  dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$ . Uogólnionym produktem kartezjańskim tej rodziny nazywamy zbiór

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in A_i\}.$$

W szczególności dla ustalonego zbioru  $B \subseteq \mathbb{N}$  mamy

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} B = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in B\}.$$

Czy dla dowolnego zbioru  $B \subseteq \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B) = \left( \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cap \left( \prod_{i \in \mathbb{N}} B \right)?$$

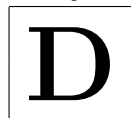
Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Czy dla dowolnych funkcji  $f : A \rightarrow B$  i  $g : B \rightarrow C$ , jeśli złożenie  $gf$  jest funkcją różnowartościową i  $f$  jest „na”, to  $g$  jest różnowartościowa? Uzasadnij odpowiedź.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

## Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 14 grudnia 2018

Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli istnieje taka rodzina  $\{A_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  zbiorów niepustych, że

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} A_{i,j} = \emptyset$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką rodzinę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 2 (2 punkty).** Rozważmy funkcje

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}, \quad h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Rozważmy wyrażenia zbudowane z symboli  $(, , f, g, h ; \circ)$ , gdzie  $\circ$  oznacza operator składania funkcji. Wyrażenie uznajemy za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie  $f(g)$  nie jest poprawne, bo  $g \notin \mathbb{N}$ . Jeśli istnieje wyrażenie, którego wartością jest liczba naturalna i w którym każdy z symboli  $f, g$  i  $h$  występuje co najmniej raz, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego wyrażenia; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Różnicę symetryczną  $\dot{\cup}$  zbiorów  $A$  i  $B$  definiujemy następująco:

$$A \dot{\cup} B = \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \notin B\}.$$

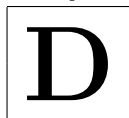
Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie  $W$  jest uproszczeniem wyrażenia  $W'$  jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne operatory  $\cup, \cap, \setminus, \dot{\cup}$  i nawiasy, oraz  $W$  zawiera mniej operatorów niż  $W'$ . Np.  $A \cup B$  jest uproszczeniem  $(A \setminus B) \cup B$ . Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia  $(A \cap B) \cup (A \dot{\cup} B)$  to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Rozważmy zbiory osób  $O$ , barów  $B$  i soków  $S$  oraz relacje binarne  $Bywa \subseteq O \times B$ ,  $Lubi \subseteq O \times S$  i  $Podaję \subseteq B \times S$  informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę  $\varphi$ , że  $\{\langle b, s \rangle \mid \varphi\}$  jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i soków o tej własności, że sok  $s$  jest podawany w barze  $b$  ale nie lubi go żadna osoba bywająca w tym barze.

**Zadanie 5 (2 punkty).** Jeśli formuła  $(\forall x (\neg p(x) \Rightarrow q(x))) \Rightarrow (\forall x (\neg q(x) \Rightarrow p(x)))$  jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

**Zadanie 6 (5 punktów).** Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów  $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ , gdzie  $A_i \subseteq \mathbb{N}$  dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$ . Uogólnionym produktem kartezjańskim tej rodziny nazywamy zbiór

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in A_i\}.$$

Czy prawdziwe jest stwierdzenie

$$\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \neq \emptyset \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall i \in \mathbb{N}. A_i \neq \emptyset?$$

Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Rozważmy taką relację binarną  $R \subseteq A \times A$ , że  $R;R = I_A$ , gdzie  $I_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$  jest relacją identycznościową na zbiorze  $A$ . Udowodnij, że  $R = R^{-1}$ .

**Zadanie 8 (5 punktów).** Czy dla dowolnych funkcji  $f : A \rightarrow B$  i  $g : B \rightarrow C$ , jeśli złożenie  $gf$  jest funkcją „na” i  $g$  jest różnowartościowa, to  $f$  jest „na”? Uzasadnij odpowiedź.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.