

Wersja:

A

Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 22 listopada 2013

czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli formuła  $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r$  jest sprzeczna to w prostokąt poniżej wpisz słowo „SPRZECZNA”. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające tę formułę.

**Zadanie 2 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule  $\neg(p \Rightarrow q) \wedge (r \vee s)$

**Zadanie 3 (2 punkty).** Niech  $\varphi$  i  $\psi$  oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów być może zawierające wolne wystąpienia zmiennej  $x$ . Jeśli dla dowolnych takich formuł formuły  $\forall x (\varphi \Rightarrow \psi)$  oraz  $(\forall x \varphi) \Rightarrow (\forall x \psi)$  są równoważne, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

---

<sup>1</sup>Proszę podać dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

**Zadanie 4 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii  $p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$  w systemie naturalnej dedukcji.

**Zadanie 5 (2 punkty).** Jeśli inkluzja  $\bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} B_t$  zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów  $\{A_t\}_{t \in T}$  i  $\{B_t\}_{t \in T}$ , to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja:

A

Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

**Zadanie 6 (5 punktów).** Które z poniższych zdań są prawdziwe dla dowolnych formuł  $\varphi$  i  $\psi$  rachunku zdań?

1. Jeśli  $\varphi$  oraz  $\psi$  są spełnialne, to  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  jest spełnialna.
2. Jeśli  $\varphi$  jest tautologią oraz  $\psi$  nie jest tautologią, to  $\varphi \Rightarrow \psi$  nie jest tautologią.

Podaj dowody ich prawdziwości. W pozostałych przypadkach wskaż kontrprzykłady.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Udowodnij, że każda formuła zbudowana wyłącznie ze zmiennej zdaniowej  $p$  i spójnika  $\Rightarrow$  (oraz nawiasów) jest równoważna jednej z dwóch formuł:  $p$  lub  $\top$ .

**Zadanie 8 (5 punktów).** Mówimy, że rodzina zbiorów  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest *wstępująca*, jeżeli inkluzja  $A_n \subseteq A_{n+1}$  zachodzi dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest wstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

---

<sup>1</sup>Proszę podać dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 22 listopada 2013

czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli formuła  $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge ((p \vee q) \Rightarrow \neg r)$  jest sprzeczna to w prostokąt poniżej wpisz słowo „SPRZECZNA”. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające tę formułę.

**Zadanie 2 (2 punkty).** Niech  $\varphi$  i  $\psi$  oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów, przy czym zmienna  $x$  nie ma wolnych wystąpień w formule  $\varphi$  (lecz może mieć w  $\psi$ ). Jeśli dla dowolnych takich formuł formuły  $\varphi \Rightarrow (\forall x \psi)$  oraz  $\forall x (\varphi \Rightarrow \psi)$  są równoważne, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

**Zadanie 3 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii

$$(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

w systemie naturalnej dedukcji.

<sup>1</sup>Proszę podać dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Jeśli inkluzja  $\bigcap_{t \in T} A_t \setminus \bigcap_{t \in T} B_t \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t \setminus B_t)$  zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów  $\{A_t\}_{t \in T}$  i  $\{B_t\}_{t \in T}$ , to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

**Zadanie 5 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule  $\neg((p \wedge q) \Rightarrow \neg r)$

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

**Zadanie 6 (5 punktów).** Mówimy, że rodzina zbiorów  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest *wstępująca*, jeżeli inkluzja  $A_n \subseteq A_{n+1}$  zachodzi dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Udowodnij, że jeśli  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest wstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

**Zadanie 7 (5 punktów).** Które z poniższych zdań są prawdziwe dla dowolnych formuł  $\varphi$  i  $\psi$  rachunku zdań?

1. Jeśli  $\varphi$  oraz  $\psi$  są spełnialne, to  $\varphi \Rightarrow \psi$  jest spełnialna.
2. Jeśli  $\varphi$  nie jest tautologią oraz  $\psi$  nie jest tautologią, to  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  nie jest tautologią.

Podaj dowody ich prawdziwości. W pozostałych przypadkach wskaż kontrprzykłady.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Udowodnij, że dla każdej formuły zbudowanej wyłącznie ze zmiennych zdaniowych i spójników  $\wedge, \neg$  (oraz nawiasów) istnieje równoważna jej formuła zbudowana wyłącznie ze zmiennych zdaniowych i spójników  $\vee, \neg$  (oraz nawiasów).

---

<sup>1</sup>Proszę podać dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.