Zadanie 1 Rozważmy zbiór $\mathcal{F}$ formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych p, q oraz spójnika $\Rightarrow$.

(a) Wskaż w zbiorze $\mathcal{F}$ formułę równoważną formule $p \vee q$.

(b) Udowodnij, że w zbiorze $\mathcal{F}$ nie ma formuły równoważnej formule $p \wedge q$.

(c) Mówimy, że formuła $\varphi \in \mathcal{F}$ opisuje funkcję boolowską $f : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$, jeśli dla każdego wartościowania $\sigma : \{p, q\} \to \mathcal{B}$ zachodzi równość $\hat{\sigma}(\varphi) = f(\sigma(p), \sigma(q))$. Ile funkcji boolowskich opisują formuły ze zbioru $\mathcal{F}$? Uzasadnij odpowiedź.

Szkic rozwiązania.

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ jest taką formułą. [Tu oczywiście należałoby podać uzasadnienie, np tabelkę zero-jedynkową]

(b) Tę część zadania można rozwiązać np rozwiązując najpierw punkt (c) i zauważając, że wśród sześciu funkcji opisywanych przez formuły z $\mathcal{F}$ nie ma funkcji opisywanej przez koniunkcję. Znacznie lepsze rozwiązanie opiera się jednak na następującym lemacie.

Lemat 1 *Każda formuła ze zbioru $\mathcal{F}$ przyjmuje wartość* F *dla nie więcej niż dwóch wartościowań.*

Dowód lematu przeprowadzimy przez indukcję po głębokości formuł.
Mamy dwie formuły głębokości 1, mianowicie p oraz q. Pierwsza z nich jest fałszywa tylko dla wartościowań $\sigma(p) = \mathsf{F}, \sigma(q) = \mathsf{F}$ oraz $\sigma(p) = \mathsf{F}, \sigma(q) = \mathsf{T}$, druga tylko dla $\sigma(p) = \mathsf{F}, \sigma(q) = \mathsf{F}$ oraz $\sigma(p) = \mathsf{T}, \sigma(q) = \mathsf{F}$. Zatem w zbiorze $\mathcal{F}$ każda formuła głębokości 1 przyjmuje wartość F dla nie więcej niż dwóch wartościowań.
Załóżmy teraz, że w zbiorze $\mathcal{F}$ każda formuła o głębokości nie większej niż n przyjmuje wartość F dla nie więcej niż dwóch wartościowań. Rozważmy dowolną formułę ϕ ze zbioru $\mathcal{F}$ o głębokości $n+1$. Formuła ta jest postaci $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$, gdzie ϕ_1, ϕ_2 są formułami ze zbioru $\mathcal{F}$ i mają głębokość nie większą niż n, zatem przyjmują wartość F dla nie więcej niż dwóch wartościowań. Zauważmy, że jeśli $\hat{\sigma}(\phi) = \mathsf{F}$ to $\hat{\sigma}(\phi_1) = \mathsf{T}$ oraz $\hat{\sigma}(\phi_2) = \mathsf{F}$. Ponieważ $\sigma(\phi_2) = \mathsf{F}$ dla co najwyżej dwóch wartościowań σ, więc również $\sigma(\phi) = \mathsf{F}$ dla co najwyżej dwóch wartościowań σ, co kończy dowód lematu.
Pozostaje tylko zauważyć, że koniunkcja $p \wedge q$ przyjmuje wartość F dla trzech wartościowań i dlatego nie może być równoważna żadnej formule ze zbioru $\mathcal{F}$.

(c) Jest 6 takich funkcji, opisywanych przez formuły p, q, $p \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ i $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.
[Tu należałoby dodać uzasadnienie, że tych sześć formuł opisuje sześć różnych funkcji boolowskich, np wypisując ich tabelki zero-jedynkowe.]
Prosty argument mówiący, że nie ma ich więcej, jest taki, że dla dowolnych dwóch formuł spośród tych sześciu ich implikacja niczego nowego nie wnosi; formalnie dla dowolnych dwóch formuł spośród tych sześciu ich implikacja opisuje funkcję opisywaną przez którąś z tych sześciu formuł. Formalny dowód tego stwierdzenia jest prosty, ale żmudny (wymaga rozpatrzenia 36 przypadków). Poniżej prezentuję lepsze rozwiązanie.
Zauważmy, że jest dokładnie 16 funkcji boolowskich dwóch zmiennych. Zauważmy również, że każda formuła ze zbioru $\mathcal{F}$ przyjmuje dla wartościowania $\sigma(p) = \mathsf{T}, \sigma(q) = \mathsf{T}$ wartość T. To zmniejsza nam przestrzeń poszukiwań do 8, bo jest tylko 8 funkcji $f : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$ o własności $f(\mathsf{T}, \mathsf{T}) = \mathsf{T}$. W punkcie (b) pokazaliśmy już, że w zbiorze $\mathcal{F}$ nie ma formuły równoważnej koniunkcji, co wykluczyło jedną funkcję. Pozostaje więc do rozpatrzenia tylko jeden przypadek.
Pokażemy, że w zbiorze $\mathcal{F}$ nie ma formuły równoważnej formule $p \Leftrightarrow q$. Załóżmy nie wprost, że ϕ jest formułą o najmniejszej głębokości równoważną $p \Leftrightarrow q$. Ponieważ ani p ani q nie jest równoważna $p \Leftrightarrow q$, więc ϕ musi być postaci $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$. Wiemy już, że dla wartościowania $\sigma(p) = \mathsf{T}, \sigma(q) = \mathsf{T}$ mamy $\hat{\sigma}(\phi_2) = \mathsf{T}$. Dla dwóch wartościowań σ, dla których zachodzi $\sigma(p) \neq \sigma(q)$ mamy $\hat{\sigma}(\phi) = \mathsf{F}$, a więc także $\hat{\sigma}(\phi_2) = \mathsf{F}$. Zatem ϕ_2 jest albo równoważna formule $p \wedge q$ (co jest niemożliwe, jak pokazaliśmy w punkcie (b)) albo formule $p \Leftrightarrow q$ (co też jest niemożliwe, bo ϕ_2 ma głębokość mniejszą niż ϕ).

Zadania 2, 3(a)-(b) i 4 są rutynowe, więc nie będę przedstawiać ich rozwiązań. W zadaniu 3(c) kontrprzykładem jest relacja $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$: pary $\langle 2, 1\rangle$ i $\langle 1, 3\rangle$ należą do $S(R)$ natomiast para $\langle 2, 3\rangle$ do niej nie należy, czyli $S(R)$ nie jest przechodnia.