Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 19 stycznia 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = x^2$. Jeśli istnieje taki zbiór $Y \subseteq \mathbb{R}$, że przeciwobraz $f^{-1}[Y]$ jest przedziałem domkniętym $[0, 4]$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

Przeciwobraz dowolnego zbioru przez funkcję f wraz z każdą liczbą zawiera liczbę do niej przeciwną; nie może zawierać liczb dodatnich i nie zawierać liczb ujemnych.

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności $\simeq$ na zbiorze wszystkich funkcji $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ daną wzorem $f \simeq g \overset{\text{df}}{\iff} f(42) = g(42)$ oraz funkcję $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $I(n) = n$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc zbioru klas abstrakcji relacji $\simeq$ oraz taką formułę φ, że $[I]_{\simeq} = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \varphi\}$.

$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\simeq}| = \boxed{\aleph_0}$

$[I]_{\simeq} = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \boxed{g(42) = 42}\}$

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli każda surjekcja (czyli funkcja „na”) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest bijekcją, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$f(X) = \{\lfloor n/2 \rfloor \mid n \in X\}$$

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieją takie zbiory A, B, funkcja $f : A \to B$ oraz dwie różne funkcje $g_1, g_2 : B \to A$, że $g_1 f = g_2 f = I_A$, gdzie I_A jest identycznością na zbiorze A, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie zbiory i funkcje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, że takie funkcje nie istnieją.

$$A = \{1, 2\},\ B = \{1, 2, 3\},\ f(x) = x,$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x = 1 \\ 2, & \text{gdy } x = 2 \text{ lub } x = 3 \end{cases},\quad g_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x = 1 \text{ lub } x = 3 \\ 2, & \text{gdy } x = 2 \end{cases}$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} F & : & (A^C \times B^C) \to (A \times B)^C, & g_A & : & C \to A, \\ h & : & A \times B \to (A \times C)^B, & g_B & : & C \to B \end{array}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $g_A(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $g_A(c)$ jest A. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$g_A(c)$	A	$F(g_A, g_B)$	$(A \times B)^C$	$(h(a,b))(b)$	$A \times C$
$g_A(b)$	NIE	$\big(h \cdot F(g_A, g_B)\big)(c)$	$(A \times C)^B$	$h(g_A(c), g_B(c))$	$(A \times C)^B$

	Numer indeksu:	Grupa[1]:
Wersja: **A**	000000	

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy relację $\simeq$ na parach liczb naturalnych zadaną wzorem

$$\langle m_1, n_1\rangle \simeq \langle m_2, n_2\rangle \overset{\mathrm{df}}{\iff} m_1 + n_2 = n_1 + m_2.$$

Nietrudno zauważyć, że $\simeq$ jest relacją równoważności; w tym zadaniu nie trzeba tego dowodzić. Jaka jest moc klasy abstrakcji $[\langle 0,0\rangle]_{\simeq}$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że zbiór tych nieskończonych ciągów zero-jedynkowych, które mają nieskończenie wiele jedynek

$$\mathcal{N} \quad = \quad \{\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \alpha^{-1}(\{1\}) \text{ jest nieskończony}\}$$

ma moc continuum.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (\{0,1\} \times \{0,1\})^{\mathbb{N}}$, która dla $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ jest zdefiniowana wzorem

$$F(X,Y) : \mathbb{N} \to \{0,1\} \times \{0,1\}$$

$$(F(X,Y))(n) \quad = \quad \begin{cases} \langle 0,0\rangle, & \text{gdy } n \notin X \text{ i } n \notin Y, \\ \langle 0,1\rangle, & \text{gdy } n \notin X \text{ i } n \in Y, \\ \langle 1,0\rangle, & \text{gdy } n \in X \text{ i } n \notin Y, \\ \langle 1,1\rangle, & \text{gdy } n \in X \text{ i } n \in Y. \end{cases}$$

Udowodnij, że F jest różnowartościowa.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 19 stycznia 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności $\simeq$ na zbiorze wszystkich funkcji $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ daną wzorem $f \simeq g \overset{\text{df}}{\iff} f(42) = g(42)$ oraz funkcję $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f_0(n) = 0$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji $[f_0]_{\simeq}$ oraz taką formułę φ, że $[f_0]_{\simeq} = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \varphi\}$.

$|[f_0]_{\simeq}| = \boxed{\mathfrak{c}}$ $\qquad [f_0]_{\simeq} = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \boxed{g(42) = 0}\}$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieją takie zbiory A, B, dwie różne funkcje $f_1, f_2 : A \to B$ oraz funkcja $g : B \to A$, że $gf_1 = gf_2 = I_A$, gdzie I_A jest identycznością na zbiorze A, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie zbiory i funkcje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, że takie funkcje nie istnieją.

$$\boxed{A = \{1\},\ B = \{1, 2\},\ f_1(x) = 1,\ f_2(x) = 2,\ g(x) = 1}$$

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = x^2$. Jeśli istnieje taki zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, że obraz $f[X]$ jest przedziałem domkniętym $[-4, 4]$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

Obraz dowolnego zbioru przez funkcję f zawiera wyłącznie liczby nieujemne

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{array}{rcl} F & : & (A^C \times B^C) \to (A \times B)^C, \\ h & : & A \times B \to (A \times C)^B, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g_A & : & C \to A, \\ g_B & : & C \to B \end{array}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $g_A(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $g_A(c)$ jest A. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$g_A(c)$	A	$(F(g_A, g_B))(c)$	$A \times B$	$(h(a, b))(g_B(c))$	$A \times C$
$g_A(b)$	NIE	$h\Big((F(g_A, g_B))(c)\Big)$	$(A \times C)^B$	$h(a, b) \cdot g_B$	$(A \times C)^C$

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli każda injekcja (czyli funkcja różnowartościowa) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest bijekcją, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$f(X) = \{2 * n \mid n \in X\}$

Wersja:	**D**

Numer indeksu:

000000

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że rodzina nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych

$$\mathcal{N} \quad = \quad \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ jest nieskończony}\}$$

ma moc continuum.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy relację $\simeq$ na parach liczb naturalnych zadaną wzorem

$$\langle m_1, n_1\rangle \simeq \langle m_2, n_2\rangle \overset{\text{df}}{\iff} m_1 + n_2 = n_1 + m_2.$$

Nietrudno zauważyć, że $\simeq$ jest relacją równoważności; w tym zadaniu nie trzeba tego dowodzić. Jaka jest moc zbioru klas abstrakcji tej relacji? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (\{0,1\} \times \{0,1\})^{\mathbb{N}}$, która dla $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ jest zdefiniowana wzorem

$$F(X,Y) : \mathbb{N} \to \{0,1\} \times \{0,1\}$$

$$(F(X,Y))(n) \quad = \quad \begin{cases} \langle 0,0\rangle, & \text{gdy } n \notin X \text{ i } n \notin Y, \\ \langle 0,1\rangle, & \text{gdy } n \notin X \text{ i } n \in Y, \\ \langle 1,0\rangle, & \text{gdy } n \in X \text{ i } n \notin Y, \\ \langle 1,1\rangle, & \text{gdy } n \in X \text{ i } n \in Y. \end{cases}$$

Udowodnij, że F jest „na”.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.