Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s. 5	8–10 s.103	8–10 s.104
8–10 s.105	8–10 s.140	12–14 zaaw
12–14 LPA	14–16 s.105	14–16 s.139

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 16 stycznia 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy zbiór trzyelementowy $A = \{a, b, c\}$. W prostokąt poniżej wpisz (jeśli wolisz, możesz je narysować) wszystkie podziały zbioru A odpowiadające relacjom o dokładnie dwóch klasach abstrakcji.

Zadanie 2 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}\times\{n\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0,1,2\})$	$\{0,1\}^{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{R}^{\{0,1\}}$	$(\{1\}\times\{2,3\})^{\{4,5\}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1))$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : A^C \times B^C \to (A \times B)^C, \qquad g_1 : C \to A,$$
$$g_2 : C \to B, \qquad h : A \times B \to C$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A^C \times B^C)$. Wpisz słowo „TAK" w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE".

$(f(g_1, g_2))(c)$		$f(g_1(c), g_2(c))$	
$\langle h(a), h(b)\rangle$		$g_1(h(a,b))$	

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Zadanie 4 (2 punkty). Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle m, n \rangle \approx \langle m', n' \rangle \overset{\text{df}}{\iff} \min(m, n) = \min(m', n').$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji $[\langle 42, 17 \rangle]_\approx$ oraz taką formułę φ, że $[\langle 42, 17 \rangle]_\approx = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$. W formule φ nie wolno użyć symbolu $\approx$.

$|[\langle 42, 17 \rangle]_\approx| =$ $\boxed{}$ $\quad \varphi =$ $\boxed{}$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(n, i) = 2n + i$. Jeśli f ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną f. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s. 5	8–10 s.103	8–10 s.104
8–10 s.105	8–10 s.140	12–14 zaaw
12–14 LPA	14–16 s.105	14–16 s.139

Zadanie 6 (5 punktów). W tym zadaniu div : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oznacza (pisaną infiksowo) operację dzielenia całkowitego w zbiorze liczb naturalnych, np. $5 \text{ div } 2 = 2$. Na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$m \simeq n \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} m \text{ div } 2 = n \text{ div } 2$$

a następnie definiujemy funkcję f i relację $\preceq$ działające na klasach abstrakcji relacji $\simeq$ wzorami

$$f([x]_\simeq) \quad = \quad [x+2]_\simeq \tag{1}$$

$$[x_1]_\simeq \preceq [x_2]_\simeq \quad \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \quad x_1 \leq x_2 \tag{2}$$

Które z tych dwóch definicji (mamy tu na myśli definicje (1) i (2)) są poprawne? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych wprowadzamy relację binarną R wzorem

$$R(X,Y) \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall n{\in}\mathbb{N}\ \exists m{>}n\ m \in X \Leftrightarrow m \in Y.$$

Czy R jest relacją równoważności? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Na zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację binarną R wzorem

$$R(f,g) \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall n{>}2015\ \ f(n) = g(n).$$

Łatwo zauważyć, że R jest relacją równoważności; w rozwiązaniu tego zadania nie trzeba tego dowodzić. Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji R są równoliczne.

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Wersja: **B**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s. 5	8–10 s.103	8–10 s.104
8–10 s.105	8–10 s.140	12–14 zaaw
12–14 LPA	14–16 s.105	14–16 s.139

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 16 stycznia 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy zbiór czteroelementowy $A = \{a, b, c, d\}$. W prostokąt poniżej wpisz (jeśli wolisz, możesz je narysować) wszystkie podziały zbioru A odpowiadające relacjom, których każda klasa abstrakcji ma parzystą liczbę elementów.

Zadanie 2 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$	$\mathbb{N}^{\{0,1,2\}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$	$\mathbb{R}^{\{0\}}$	$\{0,1,2\}^{\{3,4\}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N} \cup \{\pi\}}$	$\mathcal{P}(\{a,b\} \times \{c\})$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : A^C \times B^C \to C^{(A \times B)}, \qquad g_1 : C \to A,$$
$$g_2 : C \to B, \qquad h : A \times B \to C$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A^C \times B^C)$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(h(a,b))$ $\boxed{}$ $\qquad$ $h\Big(g_1(h(a,b)), g_2(h(a,b))\Big)$ $\boxed{}$

$(f(g_1, g_2))(a,b)$ $\boxed{}$ $\qquad$ $(f(h))(c)$ $\boxed{}$

[1]Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Zadanie 4 (2 punkty). Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle m, n\rangle \approx \langle m', n'\rangle \overset{\text{df}}{\iff} \max(m, n) = \max(m', n').$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji $[\langle 42, 17\rangle]_{\approx}$ oraz taką formułę φ, że $[\langle 42, 17\rangle]_{\approx} = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \varphi\}$. W formule φ nie wolno użyć symbolu $\approx$.

$|[\langle 42, 17\rangle]_{\approx}| =$ $\boxed{}$ $\varphi =$ $\boxed{}$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych, daną wzorem $f(k) = \begin{cases} \langle k-1, 0\rangle & \text{dla} \quad k > 0 \\ \langle -k, 1\rangle & \text{dla} \quad k \leq 0 \end{cases}$. Jeśli f ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną f. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Wersja: **B**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s. 5	8–10 s.103	8–10 s.104
8–10 s.105	8–10 s.140	12–14 zaaw
12–14 LPA	14–16 s.105	14–16 s.139

Zadanie 6 (5 punktów). W tym zadaniu div : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oznacza (pisaną infiksowo) operację dzielenia całkowitego w zbiorze liczb naturalnych, np. $5 \text{ div } 2 = 2$. Na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$m \simeq n \overset{\text{df}}{\iff} m \text{ div } 2 = n \text{ div } 2$$

a następnie definiujemy funkcje f i $\oplus$ działające na klasach abstrakcji relacji $\simeq$ wzorami

$$f([x]_\simeq) = [x \text{ div } 2]_\simeq \quad (1)$$

$$[x_1]_\simeq \oplus [x_2]_\simeq = [x_1 + x_2]_\simeq \quad (2)$$

Które z tych dwóch definicji (mamy tu na myśli definicje (1) i (2)) są poprawne? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Na zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację binarną R wzorem

$$R(f, g) \overset{\text{df}}{\iff} \forall n{\in}\mathbb{N}\ \exists m{>}n\ f(m) = g(m).$$

Czy R jest relacją równoważności? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych wprowadzamy relację binarną R wzorem

$$R(X, Y) \overset{\text{df}}{\iff} \forall n{>}2014\ \ n \in X \Leftrightarrow n \in Y.$$

Łatwo zauważyć, że R jest relacją równoważności; w rozwiązaniu tego zadania nie trzeba tego dowodzić. Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji R są równoliczne.

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.