Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część licencjacka)

17 lutego 2009

Aby zdać tę część egzaminu (być dopuszczonym do części zasadniczej) trzeba uzyskać co najmniej 10 punktów. Egzamin trwa 75 minut.

Zadanie 1 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz równoważną z $p \Leftrightarrow \neg(q \vee r)$ formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej.

Zadanie 2 (1 punkt). Jeśli istnieje formuła równoważna formule $p \Rightarrow q$ i zbudowana tylko ze zmiennych p, q oraz spójników logicznych $\wedge, \neg$ i nawiasow, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE".

Zadanie 3 (1 punkt). Jeśli formuły $p \wedge (q \Leftrightarrow r)$ oraz $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 4 (1 punkt). Rozważmy relacje $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times A$. W prostokąt poniżej wpisz formułę, która mówi, że relacja R *nie jest* relacją odwrotną do S. Formuła ta nie może zawierać negacji (ale może zawierać symbol $\notin$).

Zadanie 5 (1 punkt). Jeśli dla wszystkich formuł φ i ψ logiki pierwszego rzędu formuła $(\forall x\, (\varphi \vee \psi)) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi) \vee (\forall x\, \psi)$ jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAUTOLOGIA". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (1 punkt). Jeśli inkluzja $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cap B) \cup (C \setminus B) \cup (B \cap (C \setminus A))$ zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, i C, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 7 (1 punkt). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ i $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 8 (1 punkt). Dla $s, t \in \mathbb{R}$ niech $[s, t]$ oznacza przedział domknięty od s do t w zbiorze liczb rzeczywistych. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość zbioru $\bigcap_{s \in [0,1]} \bigcup_{t \in [2,3]} [s, t]$, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup, \wedge, \vee$.

Zadanie 9 (1 punkt). Niech $R = \{\langle n+1, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle n, m \rangle \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Zadanie 10 (1 punkt). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N}^{\{0,1\}}$	$\{a, b\} \times \{3, 4, 5\}$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$	$\{2009\}^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$\{0, 1\}^{\{a,b,c\}}$

Imię i nazwisko:

Zadanie 11 (1 punkt). Jeśli istnieje bijekcja $f : \{a, b\}^{\mathbb{Q}\cap[0,2]} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$, to w prostokąt poniżej wpisz definicję dowolnej takiej bijekcji. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE".

Zadanie 12 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład relacji równoważności na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, która ma dokładnie trzy klasy abstrakcji.

Zadanie 13 (1 punkt). Jeśli funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana wzorem $f(X) = \{2x \mid x \in X\}$ ma najmniejszy punkt stały, to w prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość tego punktu stałego. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 14 (1 punkt). W rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $X \preceq Y \overset{\text{df}}{\iff} X = Y \vee \min(X \dot{-} Y) \in Y$, gdzie $\dot{-}$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, a $\min(A)$ jest najmniejszą w sensie naturalnego porządku liczbą w zbiorze A. W prostokąt poniżej wpisz zbiory $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ w kolejności od najmniejszego do największego w porządku $\preceq$.

Zadanie 15 (1 punkt). Jeśli zbiory uporządkowane $\langle \mathbb{N} \times \{0, 1\}, \leq_{lex}\rangle$ i $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$, gdzie $\leq_{lex}$ jest leksykograficznym rozszerzeniem naturalnego porządku, są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 16 (1 punkt). Jeśli zbiory uporządkowane $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ i $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 17 (1 punkt). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee \neg q \vee r,\ \neg p \vee \neg q \vee s,\ \neg p \vee q,\ p,\ \neg r \vee \neg s\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 18 (1 punkt). Jeśli zbiór uporządkowany $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ jest dobrze ufundowany, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 19 (1 punkt). Jeśli termy $f(x, z)$ i $f(f(y, z), g(y))$ są unifikowalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny unifikator tych termów. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 20 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz sformułowanie (dowolnej wersji) zasady indukcji.

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część zasadnicza)

17 lutego 2009

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -20 do 20 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów. Mniej niż -2 punkty otrzymuje osoba, która umieszcza w swoim rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywe. Rozwiązania, w których nie ma odpowiedzi kompromitująco fałszywych, będą oceniane w skali od -2 do 20 punktów.

Zadanie 21. Rozważmy relację równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem

$$f \sim g \overset{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{Z}\ \ f(n) - g(n) = 2k.$$

(a) Podaj moc klasy abstrakcji takiej funkcji $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $z(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij odpowiedź.

(b) Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji $\sim$ są równoliczne.

(c) Podaj moc zbioru ilorazowego $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ (czyli zbioru klas abstrakcji relacji $\sim$). Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 22. Udowodnij, że funkcja $f : A \to B$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(f(X)) = X$ dla wszystkich podzbiorów X zbioru A.

Zadanie 23. Rozważmy następujący porządek $\preceq$ w rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Dla zbiorów $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zachodzi $X \preceq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$X = Y \text{ lub } \min(X \mathbin{\dot{-}} Y) \in Y,$$

gdzie $\dot{-}$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, a $\min(A)$ jest najmniejszą w sensie naturalnego porządku liczbą w zbiorze A. Niech $A_i = \{i\}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$.

(a) Czy rodzina zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ma w $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$ kres górny? Uzasadnij odpowiedź.

(b) Czy rodzina zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ma w $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$ kres dolny? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 24. Rozważmy kratę zupełną $\langle X, \leq \rangle$ i funkcję monotoniczną $f : X \to X$. Niech $a = \inf\{f^i(\top) \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $\top$ oznacza największy element zbioru X a f^i oznacza i-krotne złożenie funkcji f.

(a) Udowodnij, że dla każdego punktu stałego x funkcji f zachodzi nierówność $x \leq a$.

(b) Udowodnij, że jeśli X jest zbiorem skończonym, to a jest największym punktem stałym funkcji f.

Student name:

Logic for Computer Science

Make-up exam (bachelor part)

February 17, 2009

This part lasts 75 minutes. To pass it one needs at least 10 points.

Task 1 (1 point). In the box below write a formula in disjunctive normal form equivalent to the formula $p \Leftrightarrow \neg(q \vee r)$.

Task 2 (1 point). If there exists a formula equivalent to $p \Rightarrow q$ and built only from variables p, q and logical connectives $\wedge, \neg$ and brackets, then in the box below write any such formula. Otherwise write the word "NO".

Task 3 (1 point). If the formulas $p \wedge (q \Leftrightarrow r)$ and $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$ are equivalent then in the box below write the word "EQUIVALENT". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 4 (1 point). Consider relations $R \subseteq A \times B$ and $S \subseteq B \times A$. In the box below write a formula of first-order logic that says that the relation R *is not* the inverse of S. The formula must not contain negation symbols (but it may contain symbol $\notin$).

Task 5 (1 point). If the formula $(\forall x\,(\varphi \vee \psi)) \Leftrightarrow (\forall x\,\varphi) \vee (\forall x\,\psi)$ is a tautology for all formulas φ and ψ of first-order logic then in the box below write the word "TAUTOLOGY". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 6 (1 point). If the inclusion $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cap B) \cup (C \setminus B) \cup (B \cap (C \setminus A))$ is true for all sets A, B, and C, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 7 (1 point). If the inclusion $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$ is true for all indexed families of sets $\{A_t\}_{t \in T}$ and $\{B_t\}_{t \in T}$, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 8 (1 point). For $s, t \in \mathbb{R}$ let $[s, t]$ be the closed interval from s to t in the set of real numbers. In the box below write the value of the set $\bigcap_{s \in [0,1]} \bigcup_{t \in [2,3]} [s, t]$, that is, write an expression that denotes the same set and contains no symbols $\cap, \cup, \wedge, \vee$.

Task 9 (1 point). Let $R = \{\langle n+1, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. In the box below write a formula φ such that $\{\langle n, m \rangle \mid \varphi\}$ is the transitive closure of the relation R.

Task 10 (1 point). Write in the empty fields of the table below the cardinalities of the respective sets.

$\mathbb{N}^{\{0,1\}}$	$\{a, b\} \times \{3, 4, 5\}$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$	$\{2009\}^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$\{0, 1\}^{\{a,b,c\}}$

Student name:

Task 11 (1 point). If there exists a bijection $f : \{a,b\}^{\mathbb{Q}\cap[0,2]} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}\cap[0,1])$, then in the box below write an expression defining any such bijection. Otherwise write the word "NO".

Task 12 (1 point). In the box below write any example of an equivalence relation on the set of real numbers $\mathbb{R}$ with exactly three equivalence classes.

Task 13 (1 point). If the function $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ defined by $f(X) = \{2x \mid x \in X\}$ has the least fixed point then in the box below write the value of this least fixed point. Otherwise write the word "NO".

Task 14 (1 point). Consider the order $\preceq$ on the family $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ of all subsets of the set of natural numbers defined by $X \preceq Y \overset{\text{df}}{\iff} X = Y \vee \min(X \dot{-} Y) \in Y$, where $\dot{-}$ is the symmetric difference of sets and $\min(A)$ is the least number in the set A. In the box below write sets $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ in the order $\preceq$ starting from the least and ending with the greatest.

Task 15 (1 point). If the ordered sets $\langle \mathbb{N}\times\{0,1\}, \leq_{lex}\rangle$ and $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$, where $\leq_{lex}$ is the lexicographic extension of the natural order, are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an order does not exist.

Task 16 (1 point). If the ordered sets $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ and $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an order does not exist.

Task 17 (1 point). If the set of clauses $\{\neg p \vee \neg q \vee r,\ \neg p \vee \neg q \vee s,\ \neg p \vee q,\ p,\ \neg r \vee \neg s\}$ is inconsistent then in the box below write a resolution proof of inconsistency of this set. Otherwise write a valuation satisfying this set.

Task 18 (1 point). If the ordered set $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ is well-founded, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 19 (1 point). If the terms $f(x, z)$ i $f(f(y, z), g(y))$ are unifiable, then in the box below write any unifier of these terms. Otherwise write the word "NO".

Task 20 (1 point). In the box below write a formulation of (any version of) the induction principle.

Student name:

Solutions returned:

Logic for Computer Science

Make-up exam (main part)

February 17, 2009

Each of the task below is scored from -20 to 20 points. Empty solutions are scored with 0 points. Only solutions that contain discreditably false statements are scored with negative points .

Task 21. Consider the equivalence relation on the set $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ of all functions from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$ defined by

$$f \sim g \overset{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{Z} \;\; f(n) - g(n) = 2k.$$

(a) What is the cardinality of the equivalence class of the function $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, such that $z(n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. Justify your answer.

(b) Prove that all equivalence classes of the relation $\sim$ are equinumerous.

(c) What is the cardinality of the quotient set $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ (that is, of the set of all equivalence classes of the relation $\sim$). Justify your answer.

Task 22. Prove that a function $f : A \to B$ is an injection if and only if $f^{-1}(f(X)) = X$ for all subsets X of the set A.

Task 23. Consider the order $\preceq$ on the family $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ of all subsets of the set of natural numbers defined by $X \preceq Y \overset{\text{df}}{\iff} X = Y \vee \min(X \dot{-} Y) \in Y$, where $\dot{-}$ is the symmetric difference of sets and $\min(A)$ is the least number in the set A. Let $A_i = \{i\}$ for all $i \in \mathbb{N}$.

(a) Does the family $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ have a least upper bound in the ordered set $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$? Justify your answer.

(b) Does the family $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ have a greatest lower bound in the ordered set $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$? Justify your answer.

Task 24. Consider a complete lattice $\langle X, \leq \rangle$ and a monotone function $f : X \to X$. Let $a = \inf\{f^i(\top) \mid i \in \mathbb{N}\}$, where $\top$ is the greatest element of the set X and f^i denotes the function f composed i times with itself.

(a) Prove that for all fixed points x of the function f the inequality $x \leq a$ is true.

(b) Prove that if X is a finite set then a is the greatest fixed point of the function f.