Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 9 grudnia 2016

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli dla dowolnego zbioru indeksów I oraz dowolnej indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_{i,j} \mid \langle i,j\rangle \in I \times I\}$ zachodzi równość

$$\bigcup_{i,j\in I} A_{i,j} = \bigcup_{i\in I} A_{i,i}$$

to w prostokąt poniżej wpisz słowo "TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$I = \{1,2\}, \quad A_{1,2} = \{1\}, \quad A_{1,1} = A_{2,2} = A_{2,1} = \emptyset$

Zadanie 2 (2 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $A \setminus (A \cap B \cap C)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$A \setminus (B \cap C)$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadaną wzorem $F(f,n) = f(n) + n$. Jeśli funkcja F jest różnowartościowa to w prostokąt poniżej wpisz słowo "RÓŻNOWARTOŚCIOWA". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Niech $f_1(n) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $f_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n < 42, \\ 1, & \text{wpp.} \end{cases}$ Wtedy $F(f_1, 1) = F(f_2, 1)$.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Przykładowo, formuła $\forall x{>}0.\, \exists y.\, x = y$ nie jest w preneksowej postaci normalnej ze względu na podformułę $x > 0$ występującą przed kwantyfikatorem $\exists y$. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule

$$\forall o{\in}O.\, \exists b.\, \mathit{Bywa}(o,b) \wedge \forall s.\, \mathit{Podają}(b,s) \Rightarrow \mathit{Lubi}(o,s),$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$$\forall o.\, \exists b.\, \forall s.\, o{\in}O \Rightarrow (\mathit{Bywa}(o,b) \wedge (\mathit{Podają}(b,s) \Rightarrow \mathit{Lubi}(o,s)))$$

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja niezwrotna, nieantyzwrotna, słabo antysymetryczna i przechodnia, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje. Dla przypomnienia: relacja $R \subseteq A \times A$ jest antyzwrotna jeśli dla wszystkich $a \in A$ zachodzi $\langle a,a \rangle \notin R$.

$$R = \{\langle m,n \rangle {\in} \mathbb{N}{\times}\mathbb{N} \mid m \geq n \geq 42\}$$

Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Czy dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi implikacja *jeśli* $A \setminus B = B \setminus A$ *to* $A = B$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Mówimy, że relacja $R \subseteq A \times B$ jest *funkcją częściową* jeśli dla wszystkich $a \in A$ oraz wszystkich $b_1, b_2 \in B$ zachodzi implikacja $\langle a, b_1 \rangle \in R \wedge \langle a, b_2 \rangle \in R \Rightarrow b_1 = b_2$.

Udowodnij, że $R \subseteq A \times B$ jest funkcją częściową wtedy i tylko wtedy gdy $R^{-1}; R \subseteq I_B$. Tutaj $I_B = \{\langle b, b \rangle \mid b \in B\}$ jest relacją identycznościową na zbiorze B.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla relacji binarnej $S \subseteq A \times A$ definiujemy $S^1 = S$ oraz $S^{n+1} = S; S^n$ dla wszystkich $n \geq 1$. Niech $R = \{\langle m+3, m \rangle \mid m \in \mathbb{N}\}$. Udowodnij, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$ relacja R^n jest zawarta w relacji $\{\langle i, j \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}.\, i - j = 3k\}$.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 9 grudnia 2016
czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $(A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$$A \setminus (B \setminus C)$$

Zadanie 2 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Przykładowo, formuła $\forall x{>}0.\, \exists y.\, x = y$ nie jest w preneksowej postaci normalnej ze względu na podformułę $x > 0$ występującą przed kwantyfikatorem $\exists y$. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule

$$\forall \epsilon{>}0.\ \exists \delta{>}0.\ \forall x.\ \Big((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon\Big),$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$$\forall \epsilon.\ \exists \delta.\ \forall x.\ \Big(\epsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \land ((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon))\Big)$$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli dla dowolnego zbioru indeksów I oraz dowolnej indeksowanej rodziny zbiorów $\{X_{i,j} \mid \langle i,j\rangle \in I \times I\}$ zachodzi równość

$$\bigcap_{i,j\in I} X_{i,j} = \bigcap_{i\in I} X_{i,i}$$

to w prostokąt poniżej wpisz słowo "TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$I = \{1,2\}, \quad X_{1,2} = \emptyset, \quad X_{1,1} = X_{2,2} = X_{2,1} = \{1\}$$

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja niezwrotna, nieantyzwrotna, symetryczna i przechodnia, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje. Dla przypomnienia: relacja $R \subseteq A \times A$ jest antyzwrotna jeśli dla wszystkich $a \in A$ zachodzi $\langle a,a\rangle \notin R$.

$$R = \{\langle m,n\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m \geq 42 \land n \geq 42\}$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadaną wzorem

$$F(X,n) = \begin{cases} n, & \text{gdy } n \in X, \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$$

Jeśli funkcja F jest różnowartościowa to w prostokąt poniżej wpisz słowo "RÓŻNOWARTOŚCIOWA". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Dla $X_1 = \emptyset, n_1 = 0$ oraz $X_2 = \{1\}, n_2 = 0$ mamy $F(X_1,n_1) = F(X_2,n_2)$

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Mówimy, że relacja $R \subseteq A \times B$ jest *lewostronnie całkowita* jeśli dla wszystkich $a \in A$ istnieje takie $b \in B$, że $\langle a, b\rangle \in R$.

Udowodnij, że $R \subseteq A \times B$ jest lewostronnie całkowita wtedy i tylko wtedy gdy $I_A \subseteq R; R^{-1}$. Tutaj $I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$ jest relacją identycznościową na zbiorze A.

Zadanie 7 (5 punktów). Czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi implikacja *jeśli* $A \cap B = A \cap C$ *oraz* $A \cup B = A \cup C$ *to* $B = C$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla relacji binarnej $S \subseteq A \times A$ definiujemy $S^1 = S$ oraz $S^{n+1} = S; S^n$ dla wszystkich $n \geq 1$. Niech $R = \{\langle m, 2m\rangle \mid m \in \mathbb{N}\}$. Udowodnij, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$ relacja R^n jest zawarta w relacji $\{\langle i, j\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ j = i2^k\}$.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.