Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 13 stycznia 2017

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieją dwie różne relacje równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, które mają tyle samo klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne dwie takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

$R_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$, $R_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 2,0\rangle\}$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : (A \times B)^C \to (A \times C)^B, \qquad g : C \to A \times B,$$
$$h : A \times B \to (A \times C)^B$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A \times B)^C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $h(a, b)$ jest $(A \times C)^B$. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$h(a,b)$	$(A \times C)^B$	$g(c)$	$A \times B$	$h(g(c))$	$(A \times C)^B$
$f(a)$	NIE	$\big(h(g(c))\big)(b)$	$A \times C$	$(f(g))(h)$	NIE

Zadanie 3 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dana wzorem $f(n, m) = 3^n \cdot 4^m$. W prostokąt poniżej wpisz obliczony obraz zbioru $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ przez funkcję f.

$f[\{0, 1\} \times \{0, 1\}] = \{1, 3, 4, 12\}$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [2,3]^{\mathbb{N}}$, która dla argumentów $f \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ przyjmuje takie wartości $F(f) : \mathbb{N} \to [2,3]$, że $(F(f))(n) = f(n) + 2$. Jeśli funkcja F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do F. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

$G : [2,3]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$, dla $g : \mathbb{N} \to [2,3]$ definiujemy $G(g) : \mathbb{N} \to [0,1]$ wzorem

$$(G(g))(n) = g(n) - 2$$

Zadanie 5 (2 punkty). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiujemy relację binarną $\simeq$ w następujący sposób:

$X \simeq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X \cap Y$ jest skończony.

Jeśli $\simeq$ jest relacją równoważności, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego $\simeq$ nie jest relacją równoważności.

$\simeq$ nie jest zwrotna, np. zbiór $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}$ nie jest skończony

	Numer indeksu:	Grupa[1]:		
Wersja: **A**	000000	8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
			10–12 s. 5	10–12 s.104
		10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że dla dowolnego zbioru A zbiory $A^{\{0,1\}}$ i $A \times A$ są równoliczne.

Zadanie 7 (5 punktów). Udowodnij, że każda relacja równoważności, która jednocześnie jest funkcją, jest także bijekcją.

Rozwiązanie. Niech $f \subseteq A \times A$ będzie relacją równoważności i funkcją. Wtedy f jest zwrotna, a stąd dla każdego argumentu $a \in A$ mamy $\langle a, a\rangle \in f$, czyli $f(a) = a$. Zatem f jest funkcją identycznościową na zbiorze A, która oczywiście jest bijekcją.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech R_1 i R_2 będą takimi relacjami równoważności na zbiorze A, że $R_1 \cap R_2 = I_A$ (tutaj I_A jest relacją identyczności na zbiorze A). Dla $i \in \{1, 2\}$ niech $A/_{R_i}$ będzie rodziną klas abstrakcji relacji R_i, tzn. $A/_{R_i} = \{[a]_{R_i} \mid a \in A\}$. Udowodnij, że funkcja $f : A \to A/_{R_1} \times A/_{R_2}$ zdefiniowana wzorem $f(x) = \langle [x]_{R_1}, [x]_{R_2}\rangle$ jest różnowartościowa.

Rozwiązanie. Rozważmy takie $x_1, x_2 \in A$, że $f(x_1) = f(x_2)$. Wtedy $\langle [x_1]_{R_1}, [x_1]_{R_2}\rangle = \langle [x_2]_{R_1}, [x_2]_{R_2}\rangle$, a stąd $[x_1]_{R_1} = [x_2]_{R_1}$ oraz $[x_1]_{R_2} = [x_2]_{R_2}$, czyli $\langle x_1, x_2\rangle \in R_1$ oraz $\langle x_1, x_2\rangle \in R_2$. Ale $R_1 \cap R_2 = I_A$, więc $\langle x_1, x_2\rangle \in I_A$, czyli $x_1 = x_2$. Zatem f jest różnowartościowa.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 13 stycznia 2017

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : (A \times B)^C \to (A \times C)^B, \qquad g : C \to A \times B,$$
$$h : A \times B \to (A \times C)^B$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A \times B)^C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $h(a, b)$ jest $(A \times C)^B$. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE".

$h(a, b)$	$(A \times C)^B$	$f(g)$	$(A \times C)^B$	$h(g)$	NIE
$f(a)$	NIE	$(h(a, b))(b)$	$A \times C$	$(f(g))(b)$	$A \times C$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : \mathbb{N}^{[0,1]} \to \mathbb{N}^{[2,3]}$, która dla argumentów $f \in \mathbb{N}^{[0,1]}$ przyjmuje takie wartości $F(f) : [2, 3] \to \mathbb{N}$, że $(F(f))(x) = f(x - 2)$. Jeśli funkcja F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do F. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

$G : \mathbb{N}^{[2,3]} \to \mathbb{N}^{[0,1]}$, dla $g : [2, 3] \to \mathbb{N}$ definiujemy $G(g) : [0, 1] \to \mathbb{N}$ wzorem
$$(G(g))(x) = g(x + 2)$$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). W tym zadaniu relację równoważności nazwiemy *jednorodną*, jeśli wszystkie jej klasy abstrakcji są równoliczne. Jeśli istnieją dwie różne jednorodne relacje równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne dwie takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

$R_1 = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}, \qquad R_2 = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$

Zadanie 4 (2 punkty). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiujemy relację binarną $\simeq$ w następujący sposób:

$$X \simeq Y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór } X \setminus Y \text{ jest skończony.}$$

Jeśli $\simeq$ jest relacją równoważności, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego $\simeq$ nie jest relacją równoważności.

$\simeq$ nie jest symetryczna, np. zbiór $\emptyset \setminus \mathbb{N}$ jest, a $\mathbb{N} \setminus \emptyset$ nie jest skończony

Zadanie 5 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dana wzorem $f(n, m) = 3^n \cdot 4^m$. W prostokąt poniżej wpisz obliczony przeciwobraz zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ przez funkcję f.

$f^{-1}[\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}] = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *ściśle rosnąca*, jeśli spełnia warunek $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) < f(n+1)$. Udowodnij, że każda funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, która jednocześnie jest relacją równoważności, jest ściśle rosnąca.

Rozwiązanie. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją i jednocześnie relacją równoważności. Wtedy f jest zwrotna, a stąd dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $\langle n, n\rangle \in f$, czyli $f(n) = n$. Zatem f jest funkcją identycznościową na zbiorze $\mathbb{N}$, która oczywiście jest ściśle rosnąca, bo $f(n) = n < n + 1 = f(n + 1)$.

Zadanie 7 (5 punktów). Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że dla dowolnego zbioru A zbiory $A \times A^{\mathbb{N}}$ i $A^{\mathbb{N}}$ są równoliczne.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech R_1 i R_2 będą takimi relacjami równoważności na A, że $R_1; R_2 = A \times A$. Dla $i \in \{1, 2\}$ niech $A/_{R_i}$ będzie rodziną klas abstrakcji relacji R_i, tzn. $A/_{R_i} = \{[a]_{R_i} \mid a \in A\}$. Udowodnij, że funkcja $f : A \to A/_{R_1} \times A/_{R_2}$ zdefiniowana wzorem $f(x) = \langle [x]_{R_1}, [x]_{R_2}\rangle$ jest „na”.

Rozwiązanie. Rozważmy dowolną parę klas abstrakcji $\langle [y]_{R_1}, [z]_{R_2}\rangle \in A/_{R_1} \times A/_{R_2}$. Ponieważ $R_1; R_2 = A \times A$, więc istnieje taki $x \in A$, że $\langle y, x\rangle \in R_1$ i $\langle x, z\rangle \in R_2$. Weźmy ten x. Wtedy $[x]_{R_1} = [y]_{R_1}$ oraz $[x]_{R_2} = [z]_{R_2}$, czyli $f(x) = \langle [x]_{R_1}, [x]_{R_2}\rangle = \langle [y]_{R_1}, [z]_{R_2}\rangle$. Zatem f jest „na”.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.