Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

24 lutego 2020

czas pisania: 90 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieją takie *spełnialne* formuły φ i ψ, że formuła $\varphi \wedge \neg\psi$ jest sprzeczna a formuła $\psi \Leftrightarrow (\neg\varphi)$ jest spełnialna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich formuł. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takie formuły nie istnieją.

$\varphi = p$, $\psi = \top$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli dla formuły $p \Leftrightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$ istnieje równoważna jej formuła zbudowana wyłącznie ze zmiennych zdaniowych, nawiasów oraz spójników „$\neg$” oraz „$\wedge$”, to wpisz w prostokąt poniżej dowolną taką formułę. W przeciwnym razie wpisz słowo NIE.

$\neg q$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeżeli poniższe zbiory spójników są zupełne, to w odpowiedni prostokąt wpisz słowo TAK. W przeciwnym razie wpisz w prostokąt przykład formuły, która nie jest równoważna żadnej formule zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójników z tego zbioru.

$\{\neg\}$ $p \vee q$

$\{\vee, \wedge\}$ $\neg p$

Zadanie 4 (2 punkty). Czy formuła $p \vee q$ jest logiczną konsekwencją zbioru $A = \{r \vee p, \neg r \vee q\}$? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz dowód jej poprawności.

Tak. Weźmy dowolne wartościowanie σ spełniające A. Wtedy $\hat{\sigma}(r \vee p) = \mathsf{T}$ oraz $\hat{\sigma}(\neg r \vee q) = \mathsf{T}$. Rozpatrzmy dwa przypadki. Jeśli $\hat{\sigma}(r) = \mathsf{T}$, to wiedząc że $\hat{\sigma}(\neg r \vee q) = \mathsf{T}$ dostajemy $\sigma(q) = \mathsf{T}$, a zatem $\hat{\sigma}(r \vee q) = \mathsf{T}$. W przeciwnym przypadku $\hat{\sigma}(r) = \mathsf{F}$ i z faktu, że $\hat{\sigma}(r \vee p) = \mathsf{T}$ dostajemy $\hat{\sigma}(p) = \mathsf{T}$. Stąd ponownie $\hat{\sigma}(r \vee q) = \mathsf{T}$. Zatem $p \vee q$ jest logiczną konsekwencją zbioru A.

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły w, odpowiednio, dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, mające następującą tabelkę zero-jedynkową.

p	q	r	φ
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

CNF: $p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

DNF: $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli formuła $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła nie jest spełniona.

Nie jest tautologią. Kontrprzykład: $\sigma(p) = \mathsf{F}, \sigma(q) = \mathsf{T}$.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{r \vee p, \neg p \vee \neg q, \neg r \vee q, \neg r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zbiór nie jest sprzeczny. Jest spełniony dla wartościowania $\sigma(p) = \mathsf{T}$, $\sigma(q) = \sigma(r) = \mathsf{F}$.

Zadanie 8 (2 punkty). Czy równanie $\{2, 4\} \cap X = \{2, 4\}$ ma inne rozwiązanie niż $X = \{2, 4\}$? W prostokąt poniżej wpisz inne rozwiązanie powyższego równania lub dowód, że ono nie istnieje.

$X = \{2, 4, 42\}$

Zadanie 9 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B, soków S i książek K oraz binarne relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$, $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ i $\mathit{Czyta} \subseteq O \times K$ informujące, odpowiednio, o tym, jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki, jakie bary podają jakie soki oraz jakie książki czytają jakie osoby. Niech Lalka oznacza książkę. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{s \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz soków podawanych w jakimkolwiek barze, w którym bywają wszystkie osoby czytające $\mathsf{Lalkę}$.

$s \in S \wedge \exists b\, (b \in B \wedge \mathit{Podają}(b, s) \wedge \forall o((o \in O \wedge \mathit{Czyta}(o, \text{'}\mathsf{Lalka}\text{'}) \Rightarrow \mathit{Bywa}(o, b))))$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 10 (2 punkty). Niech $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie taką rodzina zbiorów, że $A_i = \{i, i+1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru X zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK”, jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

$$X = \bigcup_{m=21}^{42} \bigcap_{n=m}^{m+1} A_n$$

$\min X =$ 22 $\max X =$ 43

Zadanie 11 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz formułę logiki pierwszego rzędu, która interpretowana w zbiorze liczb naturalnych mówi, że każda liczba naturalna nieparzysta i większa od 7 jest sumą trzech liczb nieparzystych. W rozwiązaniu możesz korzystać z symboli mnożenia $\cdot$, dodawania $+$, równości $=$, większości $>$, zmiennych oraz stałych $0, 1, 2$ i 7. Powtarzającym się podwyrażeniom możesz przypisać nazwy i wykorzystać je w kolejnych wyrażeniach.

$$\forall x\ (np(x) \wedge x > 7) \rightarrow (\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ np(x_1) \wedge np(x_2) \wedge np(x_3) \wedge x = x_1 + x_2 + x_3),$$

gdzie $np(x) := \neg(\exists y\ x = 2 \cdot y)$.

Zadanie 12 (2 punkty). Przypomnijmy, że *symetryczne domknięcie* relacji R to najmniejsza relacja symetryczna zawierająca R. Czy prawdą jest, że symetryczne domknięcie relacji przechodniej jest relacją przechodnią? Odpowiedź na pytanie wraz z dowodem poprawności wpisz w prostokąt poniżej.

Nie. Rozpatrzmy relację $R = \{\langle 1, 2\rangle\}$ na zbiorze $X = \{1, 2\}$. Oczywiście R jest przechodnia. Natomiast symetryczne domknięcie relacji R, to relacja $S = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$, która przechodnia nie jest (bo np. zachodzi $1S2$ oraz $2S1$ ale nie zachodzi $1S1$).

Zadanie 13 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie zadana wzorem $f(n, m) = 2^n(2m + 1)$. W prostokąty poniżej wpisz obliczone wartości obrazów i przeciwobrazów:

$f[\mathbb{N}\times\mathbb{N}]$ $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ $f^{-1}[\mathbb{N}]$ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x, y) = \langle x + y, x^2 + y^2\rangle$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że funkcja odwrotna nie istnieje.

Funkcja f nie posiada funkcji odwrotnej, bo nie jest „na”. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ druga współrzędna $f(x, y)$ jest nieujemna, więc nie istnieje taka para $\langle x, y\rangle$, że $f(x, y) = \langle 0, -1\rangle$.

Zadanie 15 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce podanych zbiorów.

$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k$	$\mathcal{P}(\{21, 42\})\times\emptyset$	$(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{N}$	$\{\mathbb{N}, 0\} \cup \{0, 42\}$	$\{21, 42\}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{Q} \cap [21, 42]$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Q}$
$\aleph_0$	0	$\aleph_0$	3	$\mathfrak{c}$	$\aleph_0$	$\mathfrak{c}$

Zadanie 16 (2 punkty). Niech $P = [0, 1]$. Czy istnieje taki zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, że $|X| = |P \cap X| = |X \setminus P| = |\mathbb{R} \setminus X| = |X \times P| = \mathfrak{c}$? W prostokąt poniżej wpisz taki zbiór X, bądź dowód, że taki zbiór nie istnieje.

$$X = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right]$$

Zadanie 17 (2 punkty). Jeśli istnieje taka relacja równoważności $\approx$ na zbiorze mocy $\mathfrak{c}$, która ma $\mathfrak{c}$ klas abstrakcji i każda klasa abstrakcji ma moc $\aleph_0$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

$$\approx \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{N})^2,$$

$$\langle x, n\rangle \approx \langle y, m\rangle \text{ gdy } x = y$$

Zadanie 18 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : C \to B^A$ i $g : A \times B \to C$ oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(c)$ jest B^A. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”. Operator $\circ$ oznacza składanie funkcji.

$g(a,b)$	C	$(g(a,b))(c)$	NIE	$(f(c))(a)$	B
$f(b)$	NIE	$(f \circ g)(a,b)$	B^A	$\big((f \circ g)(a,b)\big)(b)$	NIE

Zadanie 19 (2 punkty). Powiemy, że zbiory $(P_1, \leq_1)$ oraz $(P_2, \leq_2)$ są *podobnie uporządkowane*, jeżeli istnieje taka bijekcja $f : P_1 \to P_2$, że dla wszystkich $x, y \in P_1$ jest $x \leq_1 y$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(x) \leq_2 f(y)$. Czy zbiory $(\mathbb{N}, \leq)$ oraz $(\mathbb{R}, \leq)$ z naturalnymi porządkami są podobnie uporządkowane? Jeśli tak, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że te zbiory nie są podobnie uporządkowane.

Zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ nie są nie są równoliczne, więc nie istnieje żadna bijekcja pomiędzy nimi. Zatem $(\mathbb{N}, \leq)$ oraz $(\mathbb{R}, \leq)$ nie są podobnie uporządkowane.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f, g są symbolami funkcyjnymi, a, b są symbolami stałych, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz *najogólniejsze* unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(f(x,x),z) \overset{?}{=} f(y,b)$	$[y/f(x,x),\ z/b]$	$g(y,f(y,x)) \overset{?}{=} g(g(y,a),x)$	NIE
$f(g(x,a),y) \overset{?}{=} f(y,g(x,b))$	NIE	$g(f(f(x,x),x),x) \overset{?}{=} g(y,a)$	$[x/a,\ y/f(f(a,a),a)]$

Numer indeksu: WZORCOWY

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część druga)

6 lutego 2020
czas pisania: 120 minut

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów.[1]

Zadanie 21. Powiemy, że funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest *rozszerzająca*, gdy dla dowolnego $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zachodzi $A \subseteq f(A)$. Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji rozszerzających jest mocy $2^{\mathfrak{c}}$ (czyli, że jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).

Wskazówka: Możesz skorzystać z faktu, że $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$ dla $\mathbb{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 22. Wykaż, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniająca dla wszelkich $n, m \in \mathbb{N}$ równania $f(1) = 1$ oraz $f(n + m) = f(m) + f(n) + 2nm$.

Zadanie 23. Pokaż, że istnieje taki zbiór uporządkowany $(P, \leq)$, że:

- P ma moc $\mathfrak{c}$,
- porządek $\leq$ jest liniowy,
- P ma element największy oraz element najmniejszy,
- każdy element poza największym ma następnik oraz
- każdy element poza najmniejszym ma poprzednik.

[1] Algorytm oceniania oddanych zadań jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów, a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.