Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

6 lutego 2020
czas pisania: 90 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieją takie formuły φ i ψ, że formuła $\varphi \wedge \neg\psi$ jest sprzeczna a formuła $\psi \Leftrightarrow (\neg\varphi)$ jest spełnialna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich formuł. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takie formuły nie istnieją.

$\varphi = \bot$, $\psi = p$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli dla formuły $\varphi = p \wedge (\neg q \vee r)$ istnieje równoważna jej formuła ψ zbudowana wyłącznie ze zmiennych zdaniowych i spójników „$\neg$" oraz „$\Rightarrow$", to wpisz w prostokąt poniżej dowolną taką formułę ψ. W przeciwnym razie wpisz słowo NIE.

$\psi = \neg(p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r))$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeżeli poniższe zbiory spójników są zupełne, to w odpowiedni prostokąt wpisz słowo TAK. W przeciwnym razie wpisz w prostokąt przykład formuły, która nie jest równoważna żadnej formule zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójników z tego zbioru.

$\{\Leftrightarrow\}$ $\neg p$

$\{\Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow\}$ TAK

Zadanie 4 (2 punkty). Czy formuła $\neg p$ jest logiczną konsekwencją zbioru $A = \{q \vee r, q \Rightarrow \neg p, r \Rightarrow p\}$? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz dowód jej poprawności.

Nie. Wartościowanie σ, takie że $\sigma(p) = \mathsf{T}, \sigma(q) = \mathsf{F}, \sigma(r) = \mathsf{T}$ spełnia A ale nie spełnia $\neg p$.

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły w, odpowiednio, dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, mające następującą tabelkę zero-jedynkową.

p	q	r	φ
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

CNF: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

DNF: $(\neg p) \vee (q \wedge r)$

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli formuła $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła nie jest spełniona.

Zbyt czasochłonne by złożyć w LaTeXu.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{r \vee p, \neg q, \neg p \vee q, \neg r \vee q, r \vee p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

$$\dfrac{\neg q \qquad \dfrac{\dfrac{r \vee p \quad \neg r \vee q}{p \vee q} \qquad \neg p \vee q}{q}}{\bot}$$

Zadanie 8 (2 punkty). Czy równanie $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$ ma inne rozwiązanie niż $X = \{3\}$? W prostokąt poniżej wpisz inne rozwiązanie powyższego równania lub dowód, że ono nie istnieje.

$X = \{2, 3\}$

Zadanie 9 (2 punkty). Niech $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie taką rodzina zbiorów, że $A_i = \{i, i+1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz, odpowiednio, najmniejszy i największy element zbioru X zdefiniowanego poniżej lub słowo „BRAK", jeśli odpowiedniego elementu nie ma.

$$X = \bigcap_{m=21}^{42} \bigcup_{n=m}^{2m-1} A_n$$

$\min X =$ 42

$\max X =$ 42

Zadanie 10 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz formułę logiki pierwszego rzędu, która interpretowana w zbiorze liczb naturalnych mówi, że każda liczba parzysta większa od 3 jest sumą dwóch liczb pierwszych. W rozwiązaniu możesz korzystać z symboli mnożenia $\cdot$, dodawania $+$, równości $=$, mniejszości $<$ i podzielności $|$, zmiennych oraz stałych $0, 1, 2$ i 3. Powtarzającym się podwyrażeniom możesz przypisać nazwy i wykorzystać je w kolejnych wyrażeniach.

$$\forall x ((2 \mid x) \land 3 < x) \to (\exists x_1 \exists x_2\ \mathit{pierw}(x_1) \land \mathit{pierw}(x_2) \land x = x_1 + x_2),$$

$$\text{gdzie} \quad \mathit{pierw}(x) \quad \text{to formuła} \quad 1 < x \land \forall n\ (n \mid x) \to (n = 1 \lor n = x).$$

Zadanie 11 (2 punkty). Czy istnieje taki zbiór A oraz takie *niepuste* relacje binarne Z i S określone na zbiorze A, że relacja Z jest zwrotna, relacja S jest symetryczna, a ich złożenie $Z;S$ jest antyzwrotne? W prostokąt poniżej wpisz, odpowiednio, przykład takich relacji lub dowód, że takich relacji nie ma.

$$A = \{1, 2\},\ Z = \{(1, 1), (2, 2)\},\ S = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. Niech Bartek oraz Jagódka oznaczają, odpowiednio, osobę i bar. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{o \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób bywających barze Jagódka, które lubią pewien podawany tam sok, którego nie lubi Bartek.

$$o \in O \land \exists s\, (s \in S \land \mathit{Lubi}(o, s) \land \mathit{Bywa}(o, \mathsf{Jagódka}) \land \neg \mathit{Lubi}(\mathsf{Bartek}, s) \land \mathit{Podają}(\mathsf{Jagódka}, s))$$

Zadanie 13 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie zadana wzorem $f(n, m) = 2^n(2m+1) - 1$ oraz niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych. W prostokąty poniżej wpisz obliczone wartości obrazów i przeciwobrazów:

- $f[\mathbb{N} \times \{0\}]$ $\{2^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $f^{-1}[\mathbb{P}]$ $\{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x, y) = \langle 2x, x + y \rangle$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że funkcja odwrotna nie istnieje.

$$f^{-1}(x, y) = \langle \tfrac{x}{2}, y - \tfrac{x}{2} \rangle$$

Zadanie 15 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce podanych zbiorów.

$(\mathbb{R}\times\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\{1,2\})\times(\{3,4\}^{\{5,6,7\}})$	$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$	$\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\}\setminus\mathbb{R}$	$\{2020\}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$	$\{\emptyset\}^{\emptyset}$	$\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathcal{P}(\mathbb{Q})$
$\mathfrak{c}$	32	$\aleph_0$	2	0	1	$\mathfrak{c}$

Zadanie 16 (2 punkty). Niech $P_4 = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Czy istnieje taki zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$, że $|X| = |P_4 \cap X| = |X \setminus P_4| = |\mathbb{N} \setminus X| = |X \times P_4| = \aleph_0$? W prostokąt poniżej wpisz taki zbiór X, bądź dowód, że taki zbiór nie istnieje.

$$X = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Zadanie 17 (2 punkty). Jeśli istnieje taka relacja równoważności $\approx$ na zbiorze mocy $\aleph_0$, która ma $\aleph_0$ klas abstrakcji i każda klasa abstrakcji ma moc $\aleph_0$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

$$\approx \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}),$$

$$(n,m) \approx (n',m') \text{ gdy } m = m'$$

Zadanie 18 (2 punkty). Niech $A = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$. W prostokąty obok tych formuł, które są prawdziwe, wpisz słowo „TAK”. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$1 \in A$	TAK	$\{1\} \in A$	TAK	$\{\{1\}\} \in A$	TAK	$\{\{\{1\}\}\} \in A$	NIE
$42 \in A$	NIE	$\{1\} \subseteq A$	TAK	$\{\{1\}\} \subseteq A$	TAK	$\{\{\{1\}\}\} \subseteq A$	TAK

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli istnieje taki nieprzeliczalny zbiór uporządkowany $\langle P, \leq\rangle$, że w zbiorze P istnieje podzbiór S zawierający dokładnie 2 elementy maksymalne oraz dokładnie 3 elementy minimalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru P, porządku $\leq$ i podzbioru S. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takie zbiory nie istnieją.

$$\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle \text{ i } S = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}$$

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f, g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(f(x,x),z) \overset{?}{=} f(a,a)$	NIE	$f(g(x,x),x) \overset{?}{=} f(y,a)$	$[x/a,\ y/g(a,a)]$
$f(f(x,a),z) \overset{?}{=} f(y,a)$	$[y/f(x,a),\ z/a]$	$f(x,g(x,y)) \overset{?}{=} f(f(x,x),y)$	NIE

Numer indeksu: WZORCOWY

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

6 lutego 2020
czas pisania: 120 minut

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów.[1]

Zadanie 21. Rozważmy zbiór X i relacje równoważności $R, S \subseteq X \times X$.

(a) Czy dla wszystkich takich zbiorów i relacji zachodzi równość

$$X/_{(R\cap S)} = X/_R \cap X/_S?$$

(b) Czy istnieje taki zbiór X i różne relacje R i S, dla których powyższa równość zachodzi?

Udowodnij poprawność swoich odpowiedzi.

Zadanie 22. Udowodnij, że istnieje co najwyżej jedna funkcja $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniająca dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$ równość

$$f(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i = 0 \text{ i } j = 0,\\ f(j-1,0)+1, & \text{gdy } i = 0 \text{ i } j > 0,\\ f(i-1,j+1)+1, & \text{gdy } i > 0 \text{ i } j > 0. \end{cases}$$

błąd: usunąć „i $j > 0$" w trzeciej linii

Zadanie 23. Rozważmy płaszczyznę z ustalonym układem współrzędnych. Przypomnijmy, że dla dowolnej prostej a i dowolnego punktu B istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do a i przechodząca przez B. Powiemy, że prosta jest *niewymierna*, jeśli nie przechodzi przez żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych. Np. prosta o równaniu $y = \sqrt{2}$ jest niewymierna, natomiast prosta o równaniu $y = x$ nie jest niewymierna, bo przechodzi przez punkt o współrzędnych $\langle 1, 1\rangle$.

Czy dla każdej prostej istnieje równoległa do niej prosta niewymierna? Udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

[1] Algorytm oceniania oddanych zadań jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów, a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.