Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

20 lutego 2015

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli formuły $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ i $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, w którym te formuły mają różne wartości.

Zadanie 2 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły równoważne formule $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, odpowiednio w koniunkcyjnej oraz dysjunkcyjnej postaci normalnej.

CNF

DNF

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$ jest tautologią rachunku zdań to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall n \Big((\exists d \;\; nd = x \wedge \exists d \;\; nd = y) \Rightarrow n \leq z \Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Wskazówka: ta formuła interpretowana w zbiorze liczb naturalnych mówi, że liczba z jest nie nie mniejsza od największego wspólnego dzielnika liczb x i y.

Zadanie 5 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco: $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość $A \dot{-} (B \cap C) = (A \dot{-} B) \cap (A \dot{-} C)$ to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \supseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$ zachodzi dla wszystkich zbiorów indeksów T oraz wszystkich indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q \vee \neg r,\ p \vee \neg r,\ q \vee r,\ \neg q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 8 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, kin K i filmów F oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times K$, $\mathit{Obejrzał} \subseteq O \times F$ i $\mathit{Wyświetla} \subseteq K \times F$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich kinach, jakie osoby obejrzały jakie filmy oraz jakie kina wyświetlają jakie filmy. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \in O \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które bywają tylko w kinach wyświetlających (niekoniecznie wszystkie) filmy, które te osoby już obejrzały.

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli istnieje najmniejsza (ze względu na inkluzję $\subseteq$) relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, która zawiera parę $\langle 1, 2 \rangle$, to w prostokąt poniżej wpisz tę relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Numer indeksu: | |

Zadanie 10 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$. W prostokąt poniżej wpisz formułę mówiącą, że złożenie funkcji f i g nie jest funkcją „na”.

Zadanie 11 (2 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie formuł) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $B \subseteq A$ to $(A \setminus B) \cup B \subseteq A$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy *wprost*. Rozważmy dowolne zbiory A i B i załóżmy, że ☐.

Weźmy dowolny element x ze zbioru ☐. Wtedy ☐ lub ☐. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

(i) ☐. Wtedy ☐ oraz ☐, zatem w szczególności ☐.

(ii) ☐. Wtedy z założenia ☐ dostajemy, że ☐.

W obu przypadkach otrzymaliśmy, że x należy do zbioru ☐, co kończy dowód inkluzji ☐.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0, 2]) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ daną wzorem $f(X, n) = \langle n, \{\frac{x}{2} \mid x \in X\}\rangle$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 13 (2 punkty). Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, które *nie są* „na”. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 14 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}}$	$\{1,2,3\}\times\mathbb{Q}$	$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\{1,2,3\})$	$(\{1,2,3\}\times\{1,2\})^{\{1,2\}}$	$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	$\mathcal{P}(\{1,2,3\})\cap\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Zadanie 15 (2 punkty). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $f \preceq g \stackrel{\text{df}}{\iff} f = g \vee \exists n\ (f(n) < g(n) \wedge \forall i < n\ \ f(i) = g(i))$.

Niech $f_i(n) = \begin{cases} n & \text{dla } n = i \\ 0 & \text{dla } n \neq i \end{cases}$ i niech $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej funkcje będące odpowiednio najmniejszym i największym elementem zbioru X w tym porządku lub słowo „NIE", jeśli odpowiedni element nie istnieje.

min$X$ | | max$X$ | |

Zadanie 16 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = x^2$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio obrazy i przeciwobrazy podanych zbiorów w odwzorowaniu f.

$f\,[[1, 2]] =$		$f\,[[-5, 4]] =$	
$f^{-1}\,[[1, 2]] =$		$f^{-1}\,[[-5, 4]] =$	

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokącie poniżej narysuj diagram Hassego dla porządku $\langle\{0, 1\} \times \{2, 3\}, \leq_{lex}\rangle$.

Zadanie 18 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech parami nieizomorficznych porządków.

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli porządek leksykograficzny na skończonych ciągach zero-jedynkowych $\langle\{0, 1\}^*, \leq_{lex}\rangle$ jest regularny, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „REGULARNY". W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego ten porządek nie jest regularny.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(g(y), a) \stackrel{?}{=} f(z, z)$		$f(g(y), g(x)) \stackrel{?}{=} f(z, z)$	
$f(x, g(y)) \stackrel{?}{=} f(z, z)$		$f(x, g(x)) \stackrel{?}{=} f(z, z)$	