

Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

19 lutego 2016

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli formuły $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ i $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, w którym te formuły mają różne wartości.

Zadanie 2 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły równoważne formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$, odpowiednio w koniunkcyjnej oraz dysjunkcyjnej postaci normalnej.

CNF

DNF

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$ jest tautologią rachunku zdań to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$, gdzie x_i są zmiennymi, Q_i są kwantyfikatorami (czyli $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \dots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w prenoksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall z((\forall x \ x \in X \Rightarrow x \leq z) \Rightarrow x_0 \leq z)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 5 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{\cup}$ zbiorów A i B definiujemy następująco: $A \dot{\cup} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość $A \dot{\cup} (B \cup C) = (A \dot{\cup} B) \cup (A \dot{\cup} C)$ to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \supseteq \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t$ zachodzi dla wszystkich zbiorów indeksów T oraz wszystkich indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q, \neg p \vee r, \neg q \vee \neg r, p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 8 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , kin K i filmów F oraz relacje $Bywa \subseteq O \times K$, $Obejrzał \subseteq O \times F$ i $Wyświetla \subseteq K \times F$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich kinach, jakie osoby obejrzały jakie filmy oraz jakie kina wyświetlają jakie filmy. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{k \in K \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz kin, które wyświetlają tylko takie (niekoniecznie wszystkie) filmy, które obejrzał Jan Kowalski.

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli istnieje najmniejsza (ze względu na inkluzję \subseteq) relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, która zawiera parę $\langle 0, 2 \rangle$, to w prostokąt poniżej wpisz tę relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Numer indeksu:

Zadanie 10 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow C$. W prostokąt poniżej wpisz formułę mówiącą, że złożenie funkcji f i g nie jest funkcją różnowartościową.

Zadanie 11 (2 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie formuł) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B , jeśli $(A \setminus B) \cup B = A$ to $B \subseteq A$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy *wprost*. Rozważmy dowolne zbiory A i B i załóżmy, że .

Weźmy dowolny element x ze zbioru . Z definicji sumy zbiorów otrzymujemy, że $x \in$

. Z założenia, że otrzymujemy, że x należy do zbioru .

co kończy dowód inkluzji .

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : [1, 2]^{\{0,1\} \times \mathbb{N}} \rightarrow [3, 4]^{\mathbb{N}}$ daną dla $f \in [1, 2]^{\{0,1\} \times \mathbb{N}}$ wzorem $F(f) : \mathbb{N} \rightarrow [3, 4]$, $(F(f))(n) = f(n \bmod 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do F to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 13 (2 punkty). Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow B$ jest *stała* jeśli dla wszystkich $a_1, a_2 \in A$ spełniona jest równość $f(a_1) = f(a_2)$. Niech \mathcal{F} oznacza zbiór wszystkich stałych funkcji z \mathbb{N} w \mathbb{N} . Jeśli zbiór \mathcal{F} ma moc nie większą niż \aleph_0 to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$. Jeśli zbiór \mathcal{F} ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 14 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz następujące zbiory w kolejności wg ich mocy (od zbioru o najmniejszej mocy do zbioru o największej mocy):

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n, \{1, 2, 3\}^{\{4,5\}}, \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}), \emptyset^{\mathbb{N}}, \mathbb{N}^{\emptyset}, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \{1, 2\}^{\{3,4,5\}}$$

Zadanie 15 (2 punkty). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z \mathbb{N} w \mathbb{N} definiujemy porządek \preceq wzorem $f \preceq g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \ f(n) \leq g(n)$.

Niech $f_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = i \\ 0 & \text{dla } n \neq i \end{cases}$ i niech $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej funkcje będące odpowiednio najmniejszym i największym elementem zbioru X w tym porządku lub słowo „NIE”, jeśli odpowiedni element nie istnieje.

minX

maxX

Zadanie 16 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = \sin(x)$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio obrazy i przeciwobrazy podanych zbiorów w odwzorowaniu f .

$$f[[1, 3]] =$$

$$f[[-5, 4]] =$$

$$f^{-1}[[1, 3]] =$$

$$f^{-1}[[[-5, 4]] =$$

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokącie poniżej narysuj wszystkie podziały zbioru $\{0, 1, 2\}$

Zadanie 18 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech parami nieizomorficznych porządków regularnych.

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli porządki $\langle \{0, 1\} \times \{2, 3, 4\}, \leq_{lex} \rangle$ i $\langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \leq \rangle$, gdzie \leq jest zwykłym porządkiem na liczbach naturalnych, są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$$f(g(y), a, z) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$$

$$f(a, g(y), g(x)) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$$

$$f(y, z, x) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$$

$$f(x, g(x), a) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$$