Numer indeksu: | |
|---|

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

6 lutego 2015

Zadanie 1 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK" w prostokąty obok tych spośród podanych niżej formuł, które są równoważne formule $p \Leftrightarrow (q \vee r)$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE".

$(p \wedge (q \vee r)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$		$(\neg p \vee q \vee r) \wedge ((q \vee r) \Rightarrow p)$	
$(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$		$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee (\neg q \wedge \neg r))$	

Zadanie 2 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK" w te pola poniższej tabelki, które odpowiadają zupełnym zbiorom spójników logicznych. W pozostałe pola wpisz słowo „NIE".

$\{\wedge, \vee, \neg, \Leftrightarrow\}$	$\{\vee, \neg, \Leftrightarrow\}$	$\{\wedge\}$	$\{\wedge, \neg, \Rightarrow\}$	$\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$	$\{\wedge, \Rightarrow\}$	$\{\wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$	$\{\wedge, \vee\}$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r))$ jest tautologią rachunku zdań to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall n \Big((\exists k \;\; kx = n \wedge \exists k \;\; ky = n) \Rightarrow z \leq n \Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Wskazówka: ta formuła interpretowana w zbiorze liczb naturalnych mówi, że liczba z jest nie większa od najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb x i y.

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$((A \cup B) \setminus C) \cup (A \;\cap C) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B)$$

to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{n\}$. Jeśli zbiór $\bigcap_{m=17}^{42} \bigcup_{n=5}^{m+10} A_n$ ma największy element to w prostokąt poniżej wpisz największy element tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE MA".

Zadanie 7 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $(\forall x\ \varphi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ w systemie naturalnej dedukcji.

Zadanie 8 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee \neg r,\ p \vee q,\ \ p \vee r,\ \ \neg p \vee \neg q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 9 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, kin K i filmów F oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times K$, $\mathit{Obejrzał} \subseteq O \times F$ i $\mathit{Wyświetla} \subseteq K \times F$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich kinach, jakie osoby obejrzały jakie filmy oraz jakie kina wyświetlają jakie filmy. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x{\in}O \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które obejrzały wszystkie filmy wyświetlane w jakimś kinie, w którym bywają.

Numer indeksu: [ ]

Zadanie 10 (4 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie formuł) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $A \times B = B \times A$ to $A{=}\emptyset \vee B{=}\emptyset \vee A{=}B$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że [ ] oraz że nieprawdą jest [ ], czyli zachodzi [ ].

Ponieważ $A \neq \emptyset$, możemy wybrać element [ ]. Podobnie, ponieważ $B \neq \emptyset$, możemy wybrać element [ ]. Wiemy, że $A \neq B$, a zatem istnieje element $x \in (A \setminus B)$ lub istnieje element [ ]. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

(i) Istnieje [ ]. Wtedy [ ] i [ ], co przeczy założeniu [ ].

(ii) Istnieje [ ]. Wtedy [ ] i [ ], co przeczy założeniu [ ].

W obu przypadkach otrzymaliśmy sprzeczność, co kończy dowód twierdzenia.

Zadanie 11 (2 punkty). Niech $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \leq 5\}$ i $S = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \varphi\}$ jest złożeniem SR relacji R i S.

[ ]

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times [0, 1)$ daną wzorem $f(x) = \langle x, x - \lfloor x\rfloor\rangle$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

[ ]

Zadanie 13 (2 punkty). Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, które *nie są* różnowartościowe. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE".

[ ]

Zadanie 14 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności R na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowaną wzorem $R(x, y) \stackrel{\text{df}}{\iff} x^2 = y^2$. Jeśli istnieją dwie klasy abstrakcji tej relacji mające różną moc, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwie klasy abstrakcji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie klasy abstrakcji nie istnieją.

Zadanie 15 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N} \times \{0,1\}$	$\{1,2,3\} \times \{4,5\}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\{2015\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$	$\{0,1\}^{\{2,3,4\}}$

Zadanie 16 (2 punkty). W prostokącie poniżej narysuj diagram Hassego dla porządku $\langle \{n \in \mathbb{N} \ : \ 2 \leq n \land n \leq 10\}, | \rangle$.

Zadanie 17 (2 punkty). Rozważmy naturalny porządek $\leq$ na zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz dualny do niego porządek $\geq$. Jeśli zbiory uporządkowane $\langle \mathbb{Q} \cap (0,1], \leq \rangle$ oraz $\langle \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}, \geq \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli istnieje taka relacja R, że $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ jest porządkiem regularnym, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 19 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(x, g(y), a) \stackrel{?}{=} f(z, g(y), x)$

$f(x, g(x), z) \stackrel{?}{=} f(z, z, z)$

$f(x, g(y), a) \stackrel{?}{=} f(z, z, z)$

$f(x, g(y), z) \stackrel{?}{=} f(z, z, z)$

Numer indeksu:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

6 lutego 2015

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów[1].

Zadanie 20. Niech $\mathbb{N}_+ = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$. Rozważmy funkcję $\mathsf{nwd} : \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ zdefiniowaną wzorem

$$\mathsf{nwd}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jeśli} \quad x = y \\ \mathsf{nwd}(x - y, y) & \text{jeśli} \quad x > y \\ \mathsf{nwd}(x, y - x) & \text{wpp} \end{cases}$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich liczb naturalnych $x, y \geq 1$ obliczanie funkcji $\mathsf{nwd}(x, y)$ się nie zapętla.

Zadanie 21. Czy istnieją takie dwie różne relacje równoważności R i S na zbiorze liczb naturalnych, że SR jest relacją porządku? Uzasadnij odpowiedź (tzn. skonstruuj takie dwie relacje lub udowodnij, że nie istnieją).

Zadanie 22. Rozważmy funkcję $f : X \to X$ dla pewnego niepustego zbioru X. Udowodnij, że f jest „na" wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dokładnie jedna taka funkcja $g : X \to X$, że $gf = f$.

[1] Algorytm oceniania jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.