Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 15 grudnia 2017

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli formuła $\Big(\exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x))\Big) \Rightarrow \Big((\forall x\, p(x)) \Rightarrow (\exists x\, q(x))\Big)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcap_{i=0}^{\infty}(A_i \cup B_i) \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \cup \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ i $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Atomowymi kombinacjami zbiorów A, B i C nazwiemy następujące siedem zbiorów: $K_1 = (A \setminus B) \setminus C$, $K_2 = (B \setminus C) \setminus A$, $K_3 = (A \cap B) \setminus C$, $K_4 = (C \setminus A) \setminus B$, $K_5 = (C \cap A) \setminus B$, $K_6 = (B \cap C) \setminus A$ oraz $K_7 = A \cap B \cap C$. Wtedy zbiór $A \cap B$ można przedstawić jako sumę atomowych kombinacji zbiorów A, B i C, mianowicie jako $K_3 \cup K_7$. Jeśli zbiór $(B \cup C) \setminus A$ można przedstawić jako sumę atomowych kombinacji zbiorów A, B i C, to w prostokąt poniżej wpisz taką sumę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$$K_2 \cup K_4 \cup K_6$$

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieje taki zbiór A i dwie silnie antysymetryczne relacje R i S na zbiorze A, że $R;S$ nie jest relacją silnie antysymetryczną, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru i takich relacji. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJĄ".

$$A = \{a, b\}, \quad R = \{\langle a, b\rangle\}, \quad S = \{\langle b, a\rangle\}$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Nie używając operatora składania funkcji (w szczególności, nie używając napisu „gf") wpisz w prostokąt poniżej formułę mówiącą, że złożenie gf funkcji f i g *nie jest* funkcją różnowartościową.

$$\exists a_1{\in}A\ \exists a_2{\in}A.\ a_1 \neq a_2 \wedge g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

Wersja: **A**	Numer indeksu: 000000	Grupa[1]:			
		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Mówimy, że rodzina zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *wstępująca*, jeżeli dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi inkluzja $A_n \subseteq A_{n+1}$. Udowodnij indukcyjnie (względem j), że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zbiorów, to dla wszystkich elementów x oraz dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $x \in A_i \Rightarrow x \in A_{i+j}$. Następnie udowodnij, że dla dowolnych wstępujących rodzin $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi inkluzja $\bigcap_{i=0}^{\infty}(A_i \cup B_i) \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \cup \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy dowolne zbiory A, B i C. Udowodnij, że $A \cap B = C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \subseteq A$, $C \subseteq B$ oraz $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$. Czy istnieją takie zbiory A, B i C, że $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$ i $A \cap B = C$? Uzasadnij odpowiedź.
Uwaga: intencją autora zadania było pytanie o takie zbiory A, B i C, że $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$ i $A \cap B \neq C$. W obecnej wersji zadanie się strywializowało, ale i tak zadziwiająco dużo osób nie umiało na nie odpowiedzieć.

Zadanie 8 (5 punktów). Powiemy, że binarna relacja $R \subseteq A \times A$ jest *euklidesowa*, jeśli dla wszystkich $a, b, c \in A$ zachodzi implikacja $aRb \wedge aRc \Rightarrow bRc$.

(a) Czy każda relacja symetryczna jest euklidesowa? Uzasadnij odpowiedź.

(b) Czy każda relacja symetryczna i przechodnia jest euklidesowa? Uzasadnij odpowiedź.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 15 grudnia 2017

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \ \subseteq \ \bigcup_{i=0}^{\infty}(A_i \cap B_i)$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ i $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje taki zbiór A i dwie relacje symetryczne R i S na zbiorze A, że $R;S$ nie jest relacją symetryczną, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru i takich relacji. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJĄ".

$$A = \{a, b, c\}, \quad R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}, \quad S = \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $(\exists x\, p(x)) \Rightarrow \Big((\forall x\, p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\exists x\, q(x))\Big)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Nie używając operatora składania funkcji (w szczególności, nie używając napisu „gf") wpisz w prostokąt poniżej formułę mówiącą, że złożenie gf funkcji f i g *nie jest* funkcją „na".

$$\exists c{\in}C\ \forall a{\in}A\ g(f(a)) \neq c$$

Zadanie 5 (2 punkty). Atomowymi kombinacjami zbiorów A, B i C nazwiemy następujące siedem zbiorów: $K_1 = (A \setminus B) \setminus C$, $K_2 = (B \setminus C) \setminus A$, $K_3 = (A \cap B) \setminus C$, $K_4 = (C \setminus A) \setminus B$, $K_5 = (C \cap A) \setminus B$, $K_6 = (B \cap C) \setminus A$ oraz $K_7 = A \cap B \cap C$. Wtedy zbiór $A \cap B$ można przedstawić jako sumę atomowych kombinacji zbiorów A, B i C, mianowicie jako $K_3 \cup K_7$. Jeśli zbiór $C \setminus (A \cap B \cap C)$ można przedstawić jako sumę atomowych kombinacji A, B i C, to w prostokąt poniżej wpisz taką sumę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$$K_4 \cup K_5 \cup K_6$$

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy dowolne zbiory A, B i C. Udowodnij, że $A \cup B = C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ oraz $(C \setminus A) \setminus B = \emptyset$. Czy istnieją takie zbiory A, B i C, że $(C \setminus A) \setminus B = \emptyset$ i $A \cup B = C$? Uzasadnij odpowiedź.
Uwaga: intencją autora zadania było pytanie o takie zbiory A, B i C, że $(C \setminus A) \setminus B = \emptyset$ i $A \cup B \neq C$. W obecnej wersji zadanie się strywializowało, ale i tak zadziwiająco dużo osób nie umiało na nie odpowiedzieć.

Zadanie 7 (5 punktów). Mówimy, że rodzina zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zstępująca*, jeżeli dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi inkluzja $A_n \supseteq A_{n+1}$. Udowodnij indukcyjnie, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zbiorów, to dla wszystkich elementów x oraz dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $x \notin A_0 \Rightarrow x \notin A_j$. Następnie udowodnij, że dla dowolnych zstępujących rodzin $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi inkluzja $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty}(A_i \cap B_i)$.

Zadanie 8 (5 punktów). Powiemy, że binarna relacja $R \subseteq A \times A$ jest *euklidesowa*, jeśli dla wszystkich $a, b, c \in A$ zachodzi implikacja $aRb \wedge aRc \Rightarrow bRc$.

(a) Czy każda relacja euklidesowa jest relacją równoważności? Uzasadnij odpowiedź.

(b) Czy każda relacja zwrotna i euklidesowa jest relacją równoważności? Uzasadnij odpowiedź.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.