Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część licencjacka)

31 stycznia 2008

Za każde z dziesięciu poniższych zadań można otrzymać od 0 do 2 punktów. Aby zdać tę część egzaminu (być dopuszczonym do części zasadniczej) trzeba uzyskać co najmniej 10 punktów. Egzamin trwa 60 minut.

Zadanie 1. Wpisz słowo „SPRZECZNA” w prostokąty obok tych formuł, które są sprzeczne. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie wartościowania spełniające.

(a) $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r$

(b) $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Zadanie 2.

(a) W prostokąt poniżej wpisz formułę z jedną zmienną wolną n, która (interpretowana w zbiorze liczb naturalnych) mówi, że n jest liczbą pierwszą.

(b) W prostokąt poniżej wpisz formułę, która (interpretowana w zbiorze liczb rzeczywistych) mówi, że funkcja f *nie jest* rosnąca. Formuła ta nie może zawierać negacji.

Zadanie 3. mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej binarnych symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. W prostokąty obok tych wyrażeń, które można uprościć, wpisz odpowiednie uproszczenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

(a) $(A \cap (A \setminus (B \cup C))) \cup (B \cup C)$

(b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Zadanie 4.

(a) Dla $s, t \in \mathbb{R}$ niech $A_{s,t} = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq x \wedge x \leq t\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość poniższego zbioru, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup$.

$\bigcup_{s<0} \bigcap_{t>0} A_{s,t}$

(b) Niech $\leq_{lex}$ będzie porządkiem leksykograficznym w zbiorze $\{0,1\}^*$ wszystkich słów nad alfabetem $\{0,1\}$, w którym $0 \leq_{lex} 1$. Niech X będzie zbiorem wszystkich słów w $\{0,1\}^*$ nie zawierających litery 1, czyli $X = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej odpowiednio kres górny i dolny zbioru X lub słowo „NIE", jeśli odpowiedni kres nie istnieje.

$\sup X$ $\qquad$ $\inf X$

Zadanie 5. Wpisz słowo „TAK" w prostokąty obok tych spośród podanych niżej równości, które zachodzą dla dowolnych funkcji $f : A \to B$ i dowolnych zbiorów $X, X' \subseteq A$ i $Y, Y' \subseteq B$. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie kontrprzykłady.

(a) $f(X \setminus X') = f(X) \setminus f(X')$

(b) $f^{-1}(Y \setminus Y') = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y')$

Zadanie 6. W zbiorze $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\{0,1\}$ wprowadzamy porządek $\preceq$ wzorem $f \preceq g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N} f(n) \leq g(n)$. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej par zbiorów uporządkowanych, które są izomorficzne, wpisz odpowiednie izomorfizmy. W pozostałe prostokąty wpisz uzasadnienie, dlaczego nie istnieje izomorfizm pomiędzy podanymi porządkami.

(a) $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$

(b) $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ i $\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$

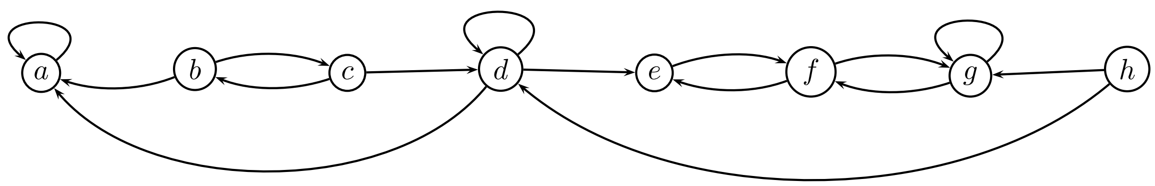
Imię i nazwisko:

Zadanie 7.

(a) Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee \neg q \vee r,\ \neg s \vee q,\ s,\ \neg r\}$jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

(b) Jeśli para termów $f(a, f(x, g(y)))$ i $f(z, f(h(w), w))$, gdzie a jest stałą, f, g i h są symbolami funkcyjnymi a w, x i y zmiennymi, jest unifikowalna, to w prostokąt poniżej wpisz jakikolwiek unifikator tej pary. W przeciwnym przypadku wpisz slowo „NIE".

Zadanie 8. Niech $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Rozważmy relację $R \subseteq A \times A$, której graf jest przedstawiony na rysunku niżej (strzałka od wierzchołka x do wierzchołka y oznacza, że $\langle x, y\rangle \in R$).



Niech f i g będą funkcjami z $\mathcal{P}(A)$ w $\mathcal{P}(A)$ danymi wzorami poniżej. Wpisz słowo „NIE" w prostokąty obok definicji tych funkcji, które nie mają najmniejszego punktu stałego. W pozostałe prostokąty wpisz najmniejsze punkty stałe tych funkcji.

(a) $f(X) = \{d\} \cup \{y \mid \exists x \in X \ \ \langle x, y\rangle \in R\}$

(b) $g(X) = \{d\} \cup \{x \mid \exists y \in X \ \ \langle x, y\rangle \in R\}$

Zadanie 9. Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$	$\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0,1\})$	$\{\pi\}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0,\frac{3}{7}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$	$\{0,1\}^{\{0,1\}}$
$\{0,1,2\}^{\{3,4,5\}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q})\times\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^{\{0,1\}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{R}\times\mathbb{N}$	$\mathbb{R}^{\{\pi\}}$	$\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$

Zadanie 10. Wykaż indukcyjnie, że jeśli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją rosnącą to dla wszystkich liczb naturalnych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $n \leq f(n)$.

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

31 stycznia 2008

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -10 do 10 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów. Mniej niż -2 punkty otrzymuje osoba, która umieszcza w swoim rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywe. Rozwiązania, w których nie ma odpowiedzi kompromitująco fałszywych, będą oceniane w skali od -2 do 10 punktów.

Zadanie 11. Rozważmy zbiór $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{Q}$. Definiujemy w tym zbiorze relację $\sim$ wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n{\in}\mathbb{N}\; f(n) = g(n).$$

(a) Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności.

(b) Podaj moc klasy abstrakcji funkcji stale równej zero.

(c) Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji $\sim$ są równoliczne.

(d) Podaj moc zbioru klas abstrakcji relacji $\sim$.

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadanie 12.

(a) Podaj przykład takiej bijekcji $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, że ciąg $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ściśle malejący i zbieżny do 2008.

(b) Udowodnij, że dla dowolnej bijekcji $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ istnieje taki ściśle monotoniczny (ściśle malejący lub ściśle rosnący) ciąg liczb wymiernych $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, że $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = +\infty$.

Wskazówka: Niech $S_n = \{i \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(i) \leq f^{-1}(n)\}$. Rozważ przypadki, kiedy zbiór $\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \text{ jest skończony}\}$ jest, odpowiednio, skończony i nieskończony.

Zadanie 13. Niech $\langle A, \preceq\rangle$ będzie skończonym liniowo uporządkowanym zbiorem. W zbiorze A^* wprowadzamy relację porządku $\sqsubseteq$ wzorem

$$w \sqsubseteq v \stackrel{\text{df}}{\iff} |w| < |v| \;\vee\; (|w| = |v| \wedge w \preceq_{lex} v),$$

gdzie $|w|$ oznacza długość słowa w i $\preceq_{lex}$ jest leksykograficznym rozszerzeniem porządku $\preceq$. Niech $f : A^* \to A^*$ będzie dowolną funkcją różnowartościową i niemalejącą. Udowodnij, że dla wszystkich $w \in A^*$ zachodzi $w \sqsubseteq f(w)$.

Zadanie 14.[1] Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami zupełnymi. Udowodnij, że $\langle A \times B, \leq_{lex}\rangle$ jest porządkiem zupełnym. Nie trzeba dowodzić, że relacja $\leq_{lex}$ jest porządkiem.

[1] Dla ułatwienia przypominamy w nieformalny sposób niektóre definicje. Zbiór X jest *skierowany* jeśli jest niepusty i każda para elementów zbioru X ma w tym zbiorze ograniczenie górne. Porządek jest *zupełny* jeśli ma element najmniejszy oraz każdy jego skierowany podzbiór posiada kres górny.