Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 4	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 18 listopada 2016

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $p \Leftrightarrow q \wedge r$

Zadanie 2 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz nie zawierającą symbolu negacji formułę równoważną formule $\neg\Big(\forall(\varepsilon{>}0)\exists(k{\in}\mathbb{N})\ \forall n{\in}\mathbb{N}\ \ ((n > k)\ \Rightarrow |f(n) - a| < \varepsilon)\Big)$.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuły $p \Leftrightarrow q \wedge r$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy formułę

$$\forall n\ (\mathsf{pierwsza}(n) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2\ \wedge\ \forall d\ ((\exists k\, d \times k = n) \Rightarrow d = 1 \vee d = n)). \tag{1}$$

Interpretowana w zbiorze liczb naturalnych koniunkcja formuły (1) oraz $\mathsf{pierwsza}(x)$ mówi, że x jest liczbą pierwszą. Formuła $\exists p \exists q\ (\mathsf{pierwsza}(p) \wedge \mathsf{pierwsza}(q)\ \wedge\ x{=}p \times q)$ w koniunkcji z (1) mówi, że x jest iloczynem dwóch liczb pierwszych.

Używając tylko zmiennych, symboli $=, \leq, +, \times, 0, 1, 2,$ $\mathsf{pierwsza}$, spójników logicznych, kwantyfikatorów i nawiasów wpisz w prostokąt poniżej formułę, która w koniunkcji z (1) mówi, że liczba x jest sumą dwóch kolejnych liczb pierwszych.

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód implikacji $\neg p \wedge \neg q\ \Rightarrow\ \neg(p \vee q)$ w systemie naturalnej dedukcji.

Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 4	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Dla dowolnego ciągu formuł $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ uogólniona alternatywa $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ oraz koniunkcja $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ są zdefiniowane indukcyjnie w następujący sposób.

$$\bigvee_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1, \ \bigvee_{i=1}^{n+1} \varphi_i = (\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i) \vee \varphi_{n+1}, \qquad \bigwedge_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1, \ \bigwedge_{i=1}^{n+1} \varphi_i = (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i) \wedge \varphi_{n+1}.$$

Udowodnij, że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formuły $\neg \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ oraz $\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i$ są równoważne.

Zadanie 7 (5 punktów). Udowodnij indukcyjnie, że każda formuła zbudowana ze zmienej p i spójników $\Leftrightarrow, \top$ (i nawiasów) jest równoważna jednej z dwóch formuł: p lub $\top$. Następnie uzasadnij, że zbiór spójników $\{\Leftrightarrow, \top\}$ nie jest zupełny.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy dowolne formuły rachunku zdań φ i ψ. Udowodnij, że formuła φ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{\varphi \vee \psi, \ \neg\psi\}$.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 4	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 18 listopada 2016
czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz nie zawierającą symbolu negacji formułę równoważną formule $\neg\Big(\forall (n \geq n_0)(\forall i\ (n_0 \leq i \leq n) \Rightarrow (i \in X)) \Rightarrow (n+1 \in X)\Big)$. Można używać symbolu $\notin$.

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy formułę

$$\forall n\ (\mathsf{pierwsza}(n) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2\ \wedge\ \forall d\ ((\exists k\, d \times k = n) \Rightarrow d = 1 \vee d = n)). \tag{1}$$

Interpretowana w zbiorze liczb naturalnych koniunkcja formuły (1) oraz $\mathsf{pierwsza}(x)$ mówi, że x jest liczbą pierwszą. Formuła $\exists p \exists q\ (\mathsf{pierwsza}(p) \wedge \mathsf{pierwsza}(q)\ \wedge\ x{=}p \times q)$ w koniunkcji z (1) mówi, że x jest iloczynem dwóch liczb pierwszych.

Używając tylko zmiennych, symboli $=, \leq, |, +, \times, 0, 1, 2, \mathsf{pierwsza}$, spójników logicznych, kwantyfikatorów i nawiasów wpisz w prostokąt poniżej formułę, która w koniunkcji z (1) mówi, że liczba x ma co najwyżej dwa dzielniki pierwsze.

Zadanie 3 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $p \Leftrightarrow q \vee r$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód implikacji $\neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$ w systemie naturalnej dedukcji.

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli formuły $p \Leftrightarrow q \vee r$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja: **D**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 4	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Udowodnij indukcyjnie, że każda formuła zbudowana ze zmiennej p i spójników $\wedge, \vee, \top$ (i nawiasów) jest równoważna jednej z dwóch formuł: p lub $\top$. Następnie uzasadnij, że zbiór spójników $\{\wedge, \vee, \top\}$ nie jest zupełny.

Zadanie 7 (5 punktów). Dla dowolnego ciągu formuł $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ uogólniona alternatywa $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ oraz koniunkcja $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ są zdefiniowane indukcyjnie w następujący sposób.

$$\bigvee_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1, \ \bigvee_{i=1}^{n+1} \varphi_i = (\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i) \vee \varphi_{n+1}, \qquad \bigwedge_{i=1}^{1} \varphi_i = \varphi_1, \ \bigwedge_{i=1}^{n+1} \varphi_i = (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i) \wedge \varphi_{n+1}.$$

Udowodnij, że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formuły $\neg \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ oraz $\bigvee_{i=1}^{n} \neg\varphi_i$ są równoważne.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy dowolne formuły rachunku zdań α, β i γ. Udowodnij, że formuła γ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{\alpha \vee \beta,\ \alpha \Rightarrow \gamma,\ \beta \Rightarrow \gamma\}$.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.