Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

19 lutego 2019

czas pisania: 90 min

Zadanie 1 (2 punkty). W prostokąty obok każdej z formuł poniżej wpisz liczbę wartościowań $\sigma : \{p, q, r, s\} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ spełniających daną formułę.

$\bot$	0	$p \wedge q \wedge r \wedge s$		$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$	
$\top$	16	$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$		$(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	

Zadanie 2 (2 punkty). Nie używając spójnika „$\Rightarrow$" wpisz w prostokąt poniżej formułę w negacyjnej postaci normalnej równoważną formule $\neg(p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow \neg r))$.

Zadanie 3 (2 punkty). Czy formuła $p \vee q$ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{p, q \Rightarrow \neg p, \neg p \vee \neg q\}$? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz dowód jej poprawności.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieją niepuste zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N}$ spełniające podany warunek, to w odpowiedni prostokąt wpisz dowolne takie zbiory. W przeciwnym razie wpisz słowo NIE. Symbol $\subsetneq$ oznacza ścisłe zawieranie: $X \subsetneq Y$ jest równoważne $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

(b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subsetneq \mathcal{P}(A \cap B)$

(c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supsetneq \mathcal{P}(A \cap B)$

Zadanie 5 (2 punkty). Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} \mid -n - \frac{1}{m} < x < n + \frac{1}{m}\}$. Wylicz wartość poniższych zbiorów, tzn. wpisz w prostokąt obok wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup, \exists, \forall$.

(a) $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n,m}$

(b) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,m}$

Zadanie 6 (2 punkty). W podany prostokąt wpisz liczbę takich relacji równoważności R na zbiorze $\{a, b, c, d, e\}$, że $\langle a, b\rangle \in R$ oraz $\langle c, d\rangle \in R$

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze liczb naturalnych, która ma skończenie wiele klas abstrakcji i każda z tych klas abstrakcji jest zbiorem skończonym, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 8 (2 punkty). Jeśli formuła $(\exists x\ p(x)) \Rightarrow \neg\forall x.\neg p(x)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 9 (2 punkty). Niech R będzie taką relacją binarną na zbiorze A, że $R \subseteq R;R$. Czy z tego wynika, że R jest zwrotna? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio dowód lub kontrprzykład.

Zadanie 10 (2 punkty). Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozważmy relację binarną $R \subseteq A \times A$ zdefiniowaną wzorem $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość przechodniego domknięcia relacji R.

Numer indeksu:

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy zbiór barów B i soków S oraz relację binarną $Podają \subseteq B \times S$ informującą o tym jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{b \in B \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów podających dokładnie te same soki, które są podawane w barze 'Przekręt'.

Zadanie 12 (2 punkty). Jeśli istnieje taki zbiór uporządkowany, w którym są dokładnie trzy elementy minimalne i dokładnie dwa maksymalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

Zadanie 13 (2 punkty). Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie dana wzorem $F(f) = \langle f_1, f_2 \rangle$, gdzie dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_1(n) = f(2n)$ oraz $f_2(n) = f(2n+1)$. Jeśli funkcja F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $f : A \to B$ i $g : B \to C$ będą takimi funkcjami, że złożenie gf jest funkcją różnowartościową. Załóżmy dodatkowo, że zbiory A, B i C są równoliczne. Czy z tego wynika, że funkcja g jest różnowartościowa? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio dowód lub kontrprzykład.

Zadanie 15 (2 punkty). Niech $F_f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $F_f(A) = f^{-1}[A]$.

(a) Podaj przykład funkcji „na” f, dla której F_f **jest** funkcją „na” lub wpisz słowo „NIE”, jeśli taki przykład nie istnieje.

(b) Podaj przykład funkcji „na” f, dla której F_f **nie jest** funkcją „na” lub wpisz słowo „NIE”, jeśli taki przykład nie istnieje.

Zadanie 16 (2 punkty). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definiujemy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$A \simeq B \overset{\text{df}}{\iff} \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x.\langle x, y\rangle \in A\} = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x.\langle x, y\rangle \in B\}.$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbioru klas abstrakcji relacji $\simeq$ oraz moce klas abstrakcji zbiorów $\{\langle 0, 0\rangle\}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})_{/\simeq}| =$ $\boxed{}$ $|[\{\langle 0, 0\rangle\}]_{\simeq}| =$ $\boxed{}$ $|[\mathbb{N} \times \mathbb{N}]_{\simeq}| =$ $\boxed{}$

Zadanie 17 (2 punkty). Czy istnieją takie funkcje f i g, że żadna z nich nie jest różnowartościowa, a ich złożenie gf jest funkcją różnowartościową? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio przykład takich funkcji lub dowód ich nieistnienia.

Zadanie 18 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$ oraz $\langle \mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}, \leq_{lex}\rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli istnieje taki nieskończony zbiór uporządkowany $\langle P, \preceq\rangle$, że $\preceq^{-1}$ jest porządkiem regularnym na zbiorze P, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru uporządkowanego. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f, g i h są symbolami funkcyjnymi, a, b są symbolami stałych, natomiast u, x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(g(x, y), z) \overset{?}{=} f(y, a)$		$f(g(x, x), g(y, y)) \overset{?}{=} f(y, a)$	
$g(z, f(z, u)) \overset{?}{=} g(a, x)$		$f(f(a, b), y) \overset{?}{=} f(x, f(z, b))$	