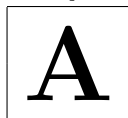


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 14 grudnia 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{\div}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$A \dot{\div} B = \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \notin B\}.$$

Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne operatory $\cup, \cap, \setminus, \dot{\div}$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej operatorów niż W' . Np. $A \cup B$ jest uproszczeniem $(A \setminus B) \cup B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $A \setminus (A \dot{\div} B)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$A \cap B$$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje taka rodzina $\{X_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ zbiorów niepustych, że

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} X_{i,j} = \emptyset$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką rodzinę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$X_{i,j} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > i + j\}$$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}, \quad h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Rozważmy wyrażenia zbudowane z symboli $(, , f, g, h, ; , \circ)$, gdzie \circ oznacza operator składania funkcji. Wyrażenie uznajemy za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(g)$ nie jest poprawne, bo $g \notin \mathbb{N}$. Jeśli istnieje wyrażenie, którego wartością jest liczba naturalna i w którym każdy z symboli f, g i h występuje co najmniej raz, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego wyrażenia; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$g(h(g(f, f), g(f, f)), f)$$

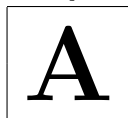
¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli formuła $\left(\forall x (p(x) \Rightarrow \neg q(x))\right) \Rightarrow \left(\forall x (q(x) \Rightarrow \neg p(x))\right)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B i soków S oraz relacje binarne $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podają \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{\langle b, o \rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i osób o tej własności, że osoba o bywa w barze b ale nie lubi żadnego podawanego tam soku.

$$Bywa(o, b) \wedge \forall s \in S. Podają(b, s) \Rightarrow \neg Lubi(o, s)$$

Wersja:



Numer indeksu:

--

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy taką relację binarną $R \subseteq A \times A$, że $R;R = I_A$, gdzie $I_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$ jest relacją identycznościową na zbiorze A . Udowodnij, że R jest funkcją.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A_i \subseteq \mathbb{N}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Uogólnionym produktem kartezjańskim tej rodziny nazywamy zbiór

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in A_i\}.$$

W szczególności dla ustalonego zbioru $B \subseteq \mathbb{N}$ mamy

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} B = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in B\}.$$

Czy dla dowolnego zbioru $B \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi równość

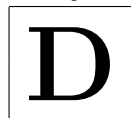
$$\prod_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B) = \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cap \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} B \right)?$$

Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Czy dla dowolnych funkcji $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$, jeśli złożenie gf jest funkcją różnowartościową i f jest „na”, to g jest różnowartościowa? Uzasadnij odpowiedź.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 14 grudnia 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieje taka rodzina $\{A_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ zbiorów niepustych, że

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} A_{i,j} = \emptyset$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką rodzinę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$A_{i,j} = \{j\}$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}, \quad h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Rozważmy wyrażenia zbudowane z symboli $(, , f, g, h ; \circ)$, gdzie \circ oznacza operator składania funkcji. Wyrażenie uznajemy za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(g)$ nie jest poprawne, bo $g \notin \mathbb{N}$. Jeśli istnieje wyrażenie, którego wartością jest liczba naturalna i w którym każdy z symboli f, g i h występuje co najmniej raz, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego wyrażenia; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$g(h \circ f)$

Zadanie 3 (2 punkty). Różnicę symetryczną $\dot{\cup}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$A \dot{\cup} B = \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \notin B\}.$$

Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne operatory $\cup, \cap, \setminus, \dot{\cup}$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej operatorów niż W' . Np. $A \cup B$ jest uproszczeniem $(A \setminus B) \cup B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $(A \cap B) \cup (A \dot{\cup} B)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$A \cup B$

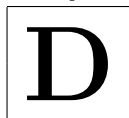
¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B i soków S oraz relacje binarne $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podajq \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{\langle b, s \rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i soków o tej własności, że sok s jest podawany w barze b ale nie lubi go żadna osoba bywająca w tym barze.

$$Podajq(b, s) \wedge \forall o \in O. Bywa(o, b) \Rightarrow \neg Lubi(o, s)$$

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli formuła $(\forall x (\neg p(x) \Rightarrow q(x))) \Rightarrow (\forall x (\neg q(x) \Rightarrow p(x)))$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A_i \subseteq \mathbb{N}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Uogólnionym produktem kartezjańskim tej rodziny nazywamy zbiór

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in A_i\}.$$

Czy prawdziwe jest stwierdzenie

$$\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \neq \emptyset \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall i \in \mathbb{N}. A_i \neq \emptyset?$$

Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy taką relację binarną $R \subseteq A \times A$, że $R;R = I_A$, gdzie $I_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$ jest relacją identycznościową na zbiorze A . Udowodnij, że $R = R^{-1}$.

Zadanie 8 (5 punktów). Czy dla dowolnych funkcji $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$, jeśli złożenie gf jest funkcją „na” i g jest różnowartościowa, to f jest „na”? Uzasadnij odpowiedź.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.