

Wersja:

A

Numer indeksu:

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 13 stycznia 2017

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieją dwie różne relacje równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, które mają tyle samo klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne dwie takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: (A \times B)^C \rightarrow (A \times C)^B, & g &: C \rightarrow A \times B, \\ h &: A \times B \rightarrow (A \times C)^B \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A \times B)^C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $h(a, b)$ jest $(A \times C)^B$. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

 $h(a, b)$

 $g(c)$

 $h(g(c))$

 $f(a)$

 $(h(g(c)))(b)$

 $(f(g))(h)$

Zadanie 3 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dana wzorem $f(n, m) = 3^n \cdot 4^m$. W prostokąt poniżej wpisz obliczony obraz zbioru $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ przez funkcję f .

 $f[\{0, 1\} \times \{0, 1\}] =$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [2, 3]^{\mathbb{N}}$, która dla argumentów $f \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ przyjmuje takie wartości $F(f) : \mathbb{N} \rightarrow [2, 3]$, że $(F(f))(n) = f(n) + 2$. Jeśli funkcja F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do F . W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 5 (2 punkty). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiujemy relację binarną \simeq w następujący sposób:

$X \simeq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X \cap Y$ jest skończony.

Jeśli \simeq jest relacją równoważności, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego \simeq nie jest relacją równoważności.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że dla dowolnego zbioru A zbiory $A^{\{0,1\}}$ i $A \times A$ są równoliczne.

Zadanie 7 (5 punktów). Udowodnij, że każda relacja równoważności, która jednocześnie jest funkcją, jest także bijekcją.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech R_1 i R_2 będą takimi relacjami równoważności na zbiorze A , że $R_1 \cap R_2 = I_A$ (tutaj I_A jest relacją identyczności na zbiorze A). Dla $i \in \{1, 2\}$ niech A/R_i będzie rodziną klas abstrakcji relacji R_i , tzn. $A/R_i = \{[a]_{R_i} \mid a \in A\}$. Udowodnij, że funkcja $f : A \rightarrow A/R_1 \times A/R_2$ zdefiniowana wzorem $f(x) = \langle [x]_{R_1}, [x]_{R_2} \rangle$ jest różnowartościowa.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 13 stycznia 2017

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: (A \times B)^C \rightarrow (A \times C)^B, & g &: C \rightarrow A \times B, \\ h &: A \times B \rightarrow (A \times C)^B \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A \times B)^C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $h(a, b)$ jest $(A \times C)^B$. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$h(a, b)$	<input data-bbox="363 958 515 1032" type="text" value="(A × C)<sup>B</sup>"/>	$f(g)$	<input data-bbox="762 958 914 1032" type="text"/>	$h(g)$	<input data-bbox="1137 958 1289 1032" type="text"/>
$f(a)$	<input data-bbox="363 1084 515 1158" type="text" value="NIE"/>	$(h(a, b))(b)$	<input data-bbox="762 1084 914 1158" type="text"/>	$(f(g))(b)$	<input data-bbox="1137 1084 1289 1158" type="text"/>

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : \mathbb{N}^{[0,1]} \rightarrow \mathbb{N}^{[2,3]}$, która dla argumentów $f \in \mathbb{N}^{[0,1]}$ przyjmuje takie wartości $F(f) : [2, 3] \rightarrow \mathbb{N}$, że $(F(f))(x) = f(x - 2)$. Jeśli funkcja F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do F . W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). W tym zadaniu relację równoważności nazwiemy *jednorodną*, jeśli wszystkie jej klasy abstrakcji są równoliczne. Jeśli istnieją dwie różne jednorodne relacje równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne dwie takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

Zadanie 4 (2 punkty). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiujemy relację binarną \simeq w następujący sposób:

$X \simeq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X \setminus Y$ jest skończony.

Jeśli \simeq jest relacją równoważności, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego \simeq nie jest relacją równoważności.

Zadanie 5 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dana wzorem $f(n, m) = 3^n \cdot 4^m$. W prostokąt poniżej wpisz obliczony przeciwobraz zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ przez funkcję f .

$f^{-1}[\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}] =$

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
	10–12 s. 5	10–12 s.104
10–12 s.105	10–12 s.140	10–12 s.141

Zadanie 6 (5 punktów). Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest *ściśle rosnąca*, jeśli spełnia warunek $\forall n \in \mathbb{N}. f(n) < f(n+1)$. Udowodnij, że każda funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, która jednocześnie jest relacją równoważności, jest ściśle rosnąca.

Zadanie 7 (5 punktów). Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że dla dowolnego zbioru A zbiory $A \times A^{\mathbb{N}}$ i $A^{\mathbb{N}}$ są równoliczne.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech R_1 i R_2 będą takimi relacjami równoważności na A , że $R_1; R_2 = A \times A$. Dla $i \in \{1, 2\}$ niech A/R_i będzie rodziną klas abstrakcji relacji R_i , tzn. $A/R_i = \{[a]_{R_i} \mid a \in A\}$. Udowodnij, że funkcja $f : A \rightarrow A/R_1 \times A/R_2$ zdefiniowana wzorem $f(x) = \langle [x]_{R_1}, [x]_{R_2} \rangle$ jest „na”.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.