Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 24 stycznia 2020

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Dla $m, n \in \mathbb{N}$ niech $A_{m,n}$ oznacza zbiór relacji zawierających parę $\langle m, n\rangle$, czyli

$$A_{m,n} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \langle m, n\rangle \in R\}.$$

Jeśli w zbiorze $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,n}$ jest jakaś relacja niesymetryczna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takiej relacji w tym zbiorze nie ma.

Zadanie 2 (2 punkty). Na rodzinie zbiorów $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ definiujemy operację *rzutu na drugą oś* $\pi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \to \mathcal{P}(\{0, 1\})$ wzorem $\pi(X) = \{b\in\{0, 1\} \mid \exists n\in\mathbb{N}\ \langle n, b\rangle\in X\}$. Następnie definiujemy relację równoważności $\simeq$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ wzorem

$$X \simeq Y \overset{\text{df}}{\iff} \pi(X) = \pi(Y).$$

W tym zadaniu pytamy o istnienie takich zbiorów A, B, C, D, że $|[A]_\simeq| = 1$, $|[B]_\simeq| = 2$, $|[C]_\simeq| = \aleph_0$, $|[D]_\simeq| = \mathfrak{c}$. Jeśli takie zbiory istnieją, to w odpowiadające im prostokąty poniżej wpisz dowolne przykłady takich zbiorów; w przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE".

A :

B :

C :

D :

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, która ma 5 klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy takie zbiory A i B, że zbiór wszystkich funkcji z A w B ma moc 2020. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbiorów wszystkich surjekcji z A w B oraz surjekcji z B w A. *Wskazówka:* $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$.

surjekcje z A w B: $\boxed{}$ surjekcje z B w A: $\boxed{}$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f \; : \; A \to B, \qquad g \; : \; B \to C, \qquad h \; : \; B^A \to C^B$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in A$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(a)$ jest B. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(a)$	B	$g \circ f$		$h(f)$	
$f(b)$	NIE	$h \circ f$		$\big(h(f)\big)(b)$	

Wersja:	Numer indeksu:
A	

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy funkcję $\varphi : \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})\cup\mathbb{R}} \to \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ zdefiniowaną dla argumentu $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ wzorem $\varphi(f) = \langle g_1, g_2 \rangle$ gdzie dla $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy $g_1(X) = f(X)$ i $g_2(y) = f(y)$. Udowodnij, że funkcja φ jest injekcją.

Zadanie 7 (5 punktów). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ określamy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$A \approx B \stackrel{\text{df}}{\iff} A \sim B \,\wedge\, (\mathbb{N}\backslash A) \sim (\mathbb{N} \setminus B)$$

Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że zbiór ilorazowy relacji $\approx$ ma moc $\aleph_0$. *Wskazówka:* Możesz (bez dowodu) skorzystać z faktu, że $(\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \sim \mathbb{N}$.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy relację równoważności $\approx$ zdefiniowaną na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wzorem

$$X \approx Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ jest skończony.}$$

Podaj moc klasy abstrakcji zbioru pustego i udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 24 stycznia 2020
Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Na rodzinie zbiorów $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ definiujemy operację *rzutu na pierwszą oś* $\pi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wzorem $\pi(X) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists b \in \{0,1\}\ \langle n, b\rangle \in X\}$. Następnie definiujemy relację równoważności $\simeq$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ wzorem

$$X \simeq Y \overset{\text{df}}{\iff} \pi(X) = \pi(Y).$$

W tym zadaniu pytamy o istnienie takich zbiorów A, B, C, D, że $|[A]_{\simeq}| = 3$, $|[B]_{\simeq}| = 5$, $|[C]_{\simeq}| = \aleph_0$, $|[D]_{\simeq}| = \mathfrak{c}$. Jeśli takie zbiory istnieją, to w odpowiadające im prostokąty poniżej wpisz dowolne przykłady takich zbiorów; w przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE".

A :

B :

C :

D :

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy takie zbiory A i B, że zbiór wszystkich funkcji z A w B ma moc 2020. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbiorów wszystkich injekcji z A w B oraz injekcji z B w A. *Wskazówka:* $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$.

injekcje z A w B:

injekcje z B w A:

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Dla $m, n \in \mathbb{N}$ niech $A_{m,n}$ oznacza zbiór relacji zawierających parę $\langle m, n \rangle$, czyli

$$A_{m,n} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \langle m, n \rangle \in R\}.$$

Jeśli w zbiorze $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > m} A_{m,n}$ jest jakaś relacja będąca funkcją różnowartościową, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takiej relacji w tym zbiorze nie ma.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f \;:\; C \to B, \qquad g \;:\; B \to A, \qquad h \;:\; B^C \to A^B$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f(c)$ jest B. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(c)$	B	$g \circ f$		$h(g)$	
$f(b)$	NIE	$h \circ f$		$\big(h(f)\big)(b)$	

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, w której każda klasa abstrakcji ma 2 elementy, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:			
D		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$ określamy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle A, B\rangle \approx \langle C, D\rangle \overset{\text{df}}{\iff} A \sim C \ \wedge\ B \sim D$$

Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że zbiór ilorazowy relacji $\approx$ ma moc $\aleph_0$. *Wskazówka:* Możesz (bez dowodu) skorzystać z faktu, że $(\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\})\times(\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\})\sim\mathbb{N}$.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy funkcję $\varphi : \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})\cup\mathbb{R}} \to \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ zdefiniowaną dla argumentu $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ wzorem $\varphi(f) = \langle g_1, g_2\rangle$ gdzie dla $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $y \in \mathbb{R}$ mamy $g_1(X) = f(X)$ i $g_2(y) = f(y)$. Udowodnij, że funkcja φ jest surjekcją.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy relację równoważności $\approx$ zdefiniowaną na zbiorze $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$f \approx g \overset{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\} \text{ jest skończony}$$

oraz funkcję $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $z(n) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Podaj moc klasy abstrakcji funkcji z i udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.