Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy

1 grudnia 2007

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -10 do 10 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania, otrzymuje za to zadanie 0 punktów. Mniej niż -2 punkty otrzymuje osoba, która umieszcza w swoim rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywe. Rozwiązania, w których nie ma odpowiedzi kompromitująco fałszywych, będą oceniane w skali od -2 do 10 punktów.

Zadanie 1 Rozważmy zbiór $\mathcal{F}$ formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych p, q oraz spójnika $\Rightarrow$.

(a) Wskaż w zbiorze $\mathcal{F}$ formułę równoważną formule $p \vee q$.

(b) Udowodnij, że w zbiorze $\mathcal{F}$ nie ma formuły równoważnej formule $p \wedge q$.

(c) Mówimy, że formuła $\varphi \in \mathcal{F}$ opisuje funkcję boolowską $f : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$, jeśli dla każdego wartościowania $\sigma : \{p, q\} \to \mathcal{B}$ zachodzi równość $\hat{\sigma}(\varphi) = f(\sigma(p), \sigma(q))$. Ile funkcji boolowskich opisują formuły ze zbioru $\mathcal{F}$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 2 Rozważmy rodzinę zbiorów $\{A_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ indeksowaną parami liczb naturalnych.

(a) Czy dla każdej takiej rodziny zachodzi równość

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{m,n} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{m,n}?$$

Uzasadnij odpowiedź.

(b) Udowodnij, że

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{m,n} = \bigcup_{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{m,f(m)},$$

gdzie $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$.

Zadanie 3 Rozważmy relację $R \subseteq A \times A$. Definiujemy $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} R^{n+1} &= R^n R, \\ R^{-(n+1)} &= R^{-n} R^{-1}. \end{aligned}$$

Niech

$$S(R) = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ \ \langle x, y\rangle \in R^k\},$$

gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.

(a) Niech $T = \{\langle n, n+3\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. Czy $S(T)$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$? Jeśli $S(T)$ jest relacją równoważności, to opisz w jawny sposób (czyli nie używając symboli T ani $S(T)$) wszystkie jej klasy abstrakcji. Uzasadnij odpowiedź.

(b) Udowodnij, że jeśli S jest relacją równoważności zawierającą R to $S(R) \subseteq S$.

(c) Czy dla każdej takiej relacji R relacja $S(R)$ jest relacją równoważności?

Zadanie 4 Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb parzystych, tzn. $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\ \ n = 2k\}$. Skonstruuj bijekcję $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ i udowodnij, że skonstruowana przez Ciebie funkcja rzeczywiście jest bijekcją.