Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

19 lutego 2016

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli formuły $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ i $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, w którym te formuły mają różne wartości.

RÓWNOWAŻNE

Zadanie 2 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły równoważne formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$, odpowiednio w koniunkcyjnej oraz dysjunkcyjnej postaci normalnej.

CNF: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

DNF: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$ jest tautologią rachunku zdań to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall z \Big((\forall x \;\; x \in X \Rightarrow x \leq z) \Rightarrow x_0 \leq z \Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$\forall z \exists x ((x \in X \wedge x > z) \vee x_0 \leq z)$

Zadanie 5 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco: $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość $A \dot{-} (B \cup C) = (A \dot{-} B) \cup (A \dot{-} C)$ to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$A = B = \{1\},\ C = \emptyset$$

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t \in T}(A_t \cap B_t) \supseteq \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t$ zachodzi dla wszystkich zbiorów indeksów T oraz wszystkich indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$T = \{1, 2\},\ A_1 = \{1\},\ A_2 = \{1\},\ B_1 = \{2\},\ B_2 = \{2\}$$

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ \neg p \vee r,\ \neg q \vee \neg r,\ p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 8 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, kin K i filmów F oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times K$, $\mathit{Obejrzał} \subseteq O \times F$ i $\mathit{Wyświetla} \subseteq K \times F$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich kinach, jakie osoby obejrzały jakie filmy oraz jakie kina wyświetlają jakie filmy. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{k \in K \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz kin, które wyświetlają tylko takie (niekoniecznie wszystkie) filmy, które obejrzał Jan Kowalski.

$$\forall f\ \mathit{Wyświetla}(k, f) \Rightarrow \mathit{Obejrzał}('\mathsf{Jan\ Kowalski}', f)$$

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli istnieje najmniejsza (ze względu na inkluzję $\subseteq$) relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, która zawiera parę $\langle 0, 2 \rangle$, to w prostokąt poniżej wpisz tę relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$$\{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 10 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$. W prostokąt poniżej wpisz formułę mówiącą, że złożenie funkcji f i g nie jest funkcją różnowartościową.

$$\exists a_1, a_2 \in A \;\; a_1 \neq a_2 \wedge g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

Zadanie 11 (2 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie formuł) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $(A \setminus B) \cup B = A$ to $B \subseteq A$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy *wprost*. Rozważmy dowolne zbiory A i B i załóżmy, że $\boxed{(A \setminus B) \cup B = A}$.

Weźmy dowolny element x ze zbioru $\boxed{B}$. Z definicji sumy zbiorów otrzymujemy, że $x \in \boxed{(A \setminus B) \cup B}$. Z założenia, że $\boxed{(A \setminus B) \cup B = A}$ otrzymujemy, że x należy do zbioru $\boxed{A}$, co kończy dowód inkluzji $\boxed{B \subseteq A}$.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : [1,2]^{\{0,1\}\times\mathbb{N}} \to [3,4]^{\mathbb{N}}$ daną dla $f \in [1,2]^{\{0,1\}\times\mathbb{N}}$ wzorem $F(f) : \mathbb{N} \to [3,4]$, $(F(f))(n) = f(n \bmod 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do F to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

$G : [3,4]^{\mathbb{N}} \to [1,2]^{\{0,1\}\times\mathbb{N}}$, dla $g \in [3,4]^{\mathbb{N}}$ $\quad G(g) : \{0,1\} \times \mathbb{N} \to [1,2]$, $\quad (G(g))(i,n) = g(2n+i) - 2$

Zadanie 13 (2 punkty). Mówimy, że funkcja $f : A \to B$ jest *stała* jeśli dla wszystkich $a_1, a_2 \in A$ spełniona jest równość $f(a_1) = f(a_2)$. Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich stałych funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE".

$$F(f) = f(0)$$

Zadanie 14 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz następujące zbiory w kolejności wg ich mocy (od zbioru o najmniejszej mocy do zbioru o największej mocy):

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n,\ \{1,2,3\}^{\{4,5\}},\ \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}),\ \emptyset^{\mathbb{N}},\ \mathbb{N}^{\emptyset},\ \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}),\ \{1,2\}^{\{3,4,5\}}$$

$$\emptyset^{\mathbb{N}},\ \mathbb{N}^{\emptyset},\ \{1,2,3\}^{\{4,5\}},\ \{1,2\}^{\{3,4,5\}},\ \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}),\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n,\ \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$$

Zadanie 15 (2 punkty). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $f \preceq g \overset{\text{df}}{\iff} \forall n \;\; f(n) \leq g(n)$.

Niech $f_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = i \\ 0 & \text{dla } n \neq i \end{cases}$ i niech $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej funkcje będące odpowiednio najmniejszym i największym elementem zbioru X w tym porządku lub słowo „NIE”, jeśli odpowiedni element nie istnieje.

min$X$	NIE	max$X$	NIE

Zadanie 16 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = sin(x)$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio obrazy i przeciwobrazy podanych zbiorów w odwzorowaniu f.

$f[[1,3]]=$	$[sin(3), 1]$	$f[[-5,4]]=$	$[-1, 1]$
$f^{-1}[[1,3]]=$	$\{\frac{(4k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$f^{-1}[[-5,4]]=$	$\mathbb{R}$

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokącie poniżej narysuj wszystkie podziały zbioru $\{0, 1, 2\}$

Zadanie 18 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech parami nieizomorficznych porządków regularnych.

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$, $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli porządki $\langle \{0,1\} \times \{2,3,4\}, \leq_{lex} \rangle$ i $\langle \{0,1,2,3,4,5\}, \leq \rangle$, gdzie $\leq$ jest zwykłym porządkiem na liczbach naturalnych, są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

$f(x, y) = 3x + (y - 2)$

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(g(y), a, z) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$	$[x/g(a), y/a]$	$f(a, g(y), g(x)) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$	NIE
$f(y, z, x) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$	$[x/y, z/y]$	$f(x, g(x), a) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$	$[y/g(x), z/a]$