

Wersja:

A

Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 3, 10 stycznia 2013

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach
lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) \times \{3, 4, 5\} \rightarrow \{0, 1, 2\} \times \mathcal{P}(\{3, 4, 5\})$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 2 (3 punkty). Rozważmy taką funkcję $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, że dla $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ funkcja $\varphi(f) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest zdefiniowana wzorem $(\varphi(f))(n) = f(n) + 1$. Jeśli funkcja φ ma funkcję odwrotną to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do φ . W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 3 (3 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\{0, 1\} \times \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q} \setminus [0, 1])$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$	$\{2013, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\{a, b, c\}}$	$\mathcal{P}(\{0, 1\})$

Zadanie 4 (3 punkty). Rozważmy relację równoważności \sim na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowaną przez

$$x \sim y \stackrel{\text{df}}{\iff} x^2 = y^2.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc klasy abstracji $[2013]_{\sim}$.

Zadanie 5 (7 punktów). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji ze zbioru \mathbb{N} w zbiór \mathbb{N} wprowadzamy relację \sim wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \exists m \forall n \geq m \ f(n) = g(n).$$

Udowodnij, że \sim jest relacją przechodnią.

Zadanie 6 (6 punktów). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ daną wzorem

$$f(X) = \{\langle n, 0 \rangle \mid n \in X \wedge n \geq 0\} \cup \{\langle -n, 1 \rangle \mid n \in X \wedge n < 0\}.$$

Udowodnij, że f jest różnowartościowa.

Wersja:

C

Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 3, 10 stycznia 2013

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach
lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\{0, 1\} \times \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 2 (3 punkty). Rozważmy funkcję $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowaną wzorem $\varphi(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > 0\}$. Jeśli funkcja φ ma funkcję odwrotną to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do φ . W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 3 (3 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N} \times \{0, 1, 7\}$	$\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$	$\{2013\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$	$\{0, 1\}^{\{2, 3, 4\}}$

Zadanie 4 (3 punkty). Rozważmy relację równoważności \sim na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowaną przez

$$x \sim y \stackrel{\text{df}}{\iff} x^2 = y^2.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc zbioru klas abstrakcji \mathbb{R}/\sim .

Zadanie 5 (7 punktów). W zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru \mathbb{N} wprowadzamy relację \sim wzorem

$$X \sim Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \exists n \forall m \geq n \ m \in X \iff m \in Y.$$

Udowodnij, że \sim jest relacją przechodnią.

Zadanie 6 (6 punktów). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ daną wzorem

$$f(X) = \{\langle n, 0 \rangle \mid n \in X \wedge n \geq 0\} \cup \{\langle -n, 1 \rangle \mid n \in X \wedge n < 0\}.$$

Udowodnij, że f jest „na”.

uwaga:
błąd