Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

16 lutego 2018
czas pisania: 90 min

Zadanie 1 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej formuł, które są równoważne formule $(p \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$	TAK	$p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	NIE
$p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p)$	TAK	$\top$	NIE

Zadanie 2 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ jest uproszczeniem formuły ψ, jeśli obie formuły są równoważne oraz φ zawiera mniej wystąpień spójników logicznych niż ψ. Jeśli istnieje uproszczenie formuły $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$p \Leftrightarrow (q \wedge r)$$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg a \vee \neg d,\ \neg c \vee d,\ \neg c \vee a,\ d \vee c,\ \neg d \vee c\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 4 (2 punkty). Przypomnijmy, że dowód implikacji $\alpha \Rightarrow \beta$ przez *kontrapozycję* polega na udowodnieniu implikacji $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$. Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie symboli matematycznych) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $A \subseteq B$ to $A \setminus B = \emptyset$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez kontrapozycję. Rozważmy dowolne zbiory A i B i załóżmy, że $\boxed{A \setminus B \neq \emptyset}$. Wtedy istnieje taki element x, że $\boxed{x \in A \setminus B}$. Z definicji różnicy zbiorów otrzymujemy $\boxed{x \in A}$ oraz $\boxed{x \notin B}$. Zatem $\boxed{A \not\subseteq B}$, co kończy dowód.

Zadanie 5 (2 punkty). Jesli formuła $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, przy którym ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli istnieją takie podzbiory A i B zbioru $\mathbb{N}$, że $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \times B)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie zbiory. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie zbiory nie istnieją.

Typy się nie zgadzają: elementami $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ są pary zbiorów liczb, a $\mathcal{P}(A \times B)$ zbiory par liczb

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli istnieje taka relacja R, że R nie jest zwrotna ale $R; R$ jest zwrotna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$$

Zadanie 8 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze $\underline{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ zadaną wzorem $m \sim n \overset{\mathrm{df}}{\iff} m \bmod 3 = n \bmod 3$. W prostokąt poniżej wpisz podział zbioru $\underline{10}$ na klasy abstrakcji relacji $\sim$.

$$\{\{0, 3, 6, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\}$$

Zadanie 9 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$. Jeśli zbiór $\bigcup_{m=2}^{2018} \bigcap_{n=0}^{m} A_n$ jest pusty, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PUSTY". W przeciwnym przypadku wpisz dowolny element tego zbioru.

PUSTY

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 10 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, kursów K i sal S oraz relacje $\mathsf{Prowadzi} \subseteq O \times K$, $\mathsf{OdbywaSię} \subseteq K \times S$ i $\mathsf{MaKlucz} \subseteq O \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby prowadzą jakie kursy, jakie kursy odbywają się w jakich salach oraz jakie osoby mają klucze do jakich sal. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{o \in O \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które prowadzą kursy tylko w tych salach, do których mają klucze.

$$\forall k, s.\ \mathsf{Prowadzi}(o, k) \land \mathsf{OdbywaSię}(k, s) \Rightarrow \mathsf{MaKlucz}(o, s)$$

Zadanie 11 (2 punkty). Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R})$, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące dowolną taką funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka funkcja nie istnieje.

$$f(n, x) = \{\langle x, n, x\rangle\}$$

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{array}{rcl} F & : & A^{B\times C} \to (A^B)^C, \\ g & : & C \to A^B, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} f & : & B \times C \to A, \\ h & : & A^B \to C \end{array}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $g(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $g(c)$ jest A^B. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE". Operator $\circ$ oznacza składanie funkcji.

$g(c)$	A^B	$(F(f))(c)$	A^B	$\big((F(f)) \circ h\big)(b)$	NIE
$g(b)$	NIE	$F(f(b, c))$	NIE	$(F(f)) \circ g$	NIE

Zadanie 13 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności R na zbiorze liczb całkowitych zdefiniowaną wzorem

$$R = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m^2 = n^2\}$$

Jeśli wszystkie klasy abstrakcji relacji R są równoliczne, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOLICZNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$|[0]_R| = 1,\ |[1]_R| = 2$$

Zadanie 14 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = \langle \lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor \rangle$. W prostokąt poniżej wpisz obliczoną wartość przeciwobrazu $f^{-1}[\{1,2,3\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$.

$$[1, \tfrac{3}{2}) \cup [2, \tfrac{5}{2}) \cup [3, \tfrac{7}{2})$$

Zadanie 15 (2 punkty). Niech $\underline{n} = \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$. Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\underline{2018}) \to \mathcal{P}(\underline{1024}\times\{0,1\})$ zadaną wzorem $f(X) = \{\langle \lfloor \frac{x}{2} \rfloor, x \bmod 2\rangle \mid x \in X\}$. Jeśli funkcja f jest bijekcją, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do f. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego f nie jest bijekcją.

f nie jest „na”, np. zbiór $\{\langle 1013, 0\rangle\}$ nie jest wartością funkcji f.

Zadanie 16 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\{0,1\}^{\mathbb{Q}}$	$\{42\}^{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0,1\}\times\mathbb{Q})$	$\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$	$\{\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\}\}$	$\mathcal{P}(\{\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\}\})$	$\{0,1,2\}^{\{2,3\}}$
$\mathfrak{c}$	1	$\aleph_0$	$\mathfrak{c}$	2	1	2	9

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle\mathbb{R}, \leq\rangle$ oraz $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje.

$\langle\mathbb{R}, \leq\rangle$ jest liniowy a $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ nie

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli istnieje porządek na zbiorze $\{0,1\} \times \mathbb{N}$, który jest izomorficzny ze zwykłym porządkiem na zbiorze liczb naturalnych, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego porządku. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie dlaczego taki porządek nie istnieje.

$$\langle i, n\rangle \preceq \langle i', n'\rangle \overset{\text{df}}{\iff} (n < n') \vee (n = n' \wedge i \leq i')$$

Zadanie 19 (2 punkty). Rozważmy zbiór uporządkowany $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq\rangle$, gdzie porządek jest zdefiniowany wzorem $f \preceq g \overset{\text{df}}{\iff} \forall n{\in}\mathbb{N}\ f(n){\leq}g(n)$. Jeśli ten porządek jest regularny to w prostokąt poniżej wpisz słowo „REGULARNY”. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie dlaczego nie jest on regularny.

Niech $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie zdefiniowana wzorem $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x > n, \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$

Wtedy zbiór $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast u, x i y są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

$f(u) \overset{?}{=} f(g(y,u))$	NIE	$f(g(a,y)) \overset{?}{=} f(g(y,a))$	$[y/a]$
$g(a, f(y)) \overset{?}{=} g(f(y), a)$	NIE	$g(u,u) \overset{?}{=} g(y, f(x))$	$[u/f(x),\ y/f(x)]$