Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

6 lutego 2018
czas pisania: 90 min

Zadanie 1 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej formuł, które są równoważne formule $p \Rightarrow ((q \wedge r) \vee p)$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(p \Rightarrow (q \wedge r)) \vee (p \Rightarrow p)$		$\neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \vee p$	
$(p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (p \Rightarrow p)$		$\top$	

Zadanie 2 (2 punkty). Podaj formułę równoważną formule $p \Rightarrow (q \wedge r)$ i mającą:

(a) koniunkcyjną postać normalną

(b) dysjunkcyjną postać normalną

Zadanie 3 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Niech $nww(x, y, w)$ oznacza formułę

$$(\exists d\ x \cdot d = w) \wedge (\exists d\ y \cdot d = w) \wedge \forall w' \Big((\exists d\ x \cdot d = w') \wedge (\exists d\ y \cdot d = w') \Rightarrow w \leq w'\Big).$$

Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $nww(x, y, w)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 4 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = n\}$. Jeśli zbiór $\bigcap_{m=6}^{2018} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ jest pusty, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PUSTY”. W przeciwnym przypadku wpisz dowolny element tego zbioru.

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli istnieją takie zbiory A i B, że $|\mathcal{P}(A) \times B| = 2018$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie zbiory. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie zbiory nie istnieją.

Zadanie 6 (2 punkty). Jesli formuła $p \Rightarrow ((q \wedge r) \vee p)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, przy którym ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 7 (2 punkty). Mówimy, że relacja binarna R na zbiorze A jest *silnie antysymetryczna*, jeśli dla wszystkich $a, b \in A$ spełniony jest warunek $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R$. W prostokąt poniżej wpisz wszystkie silnie antysymetryczne relacje na zbiorze $\{0, 1\}$.

Zadanie 8 (2 punkty). Jeśli istnieją dwie różne relacje równoważności na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, których klasy abstrakcji tworzą podział $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli istnieją dwie różne relacje binarne na zbiorze liczb naturalnych, które mają takie same przechodnie domknięcia, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

Zadanie 10 (2 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie symboli matematycznych) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Jeśli $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze A oraz $a, b \in A$ i $[a]_\sim = [b]_\sim$, to $a \sim b$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy wprost. Załóżmy, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze A oraz $\boxed{}$ i $\boxed{}$. Z założenia, że $\sim$ jest relacją równoważności wiemy, że jest ona zwrotna. Ze zwrotności $\sim$ mamy $b \sim \boxed{}$, a stąd i z definicji klasy abstrakcji $\boxed{}$ wynika $\boxed{}$. Z założenia $\boxed{}$ dostajemy $b \in \boxed{}$, co z definicji klasy abstrakcji $\boxed{}$ daje $\boxed{}$ i kończy dowód.

Numer indeksu:

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0,1\}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(n) = \begin{cases} \langle n/2, 0\rangle, & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste,} \\ \langle (n-1)/2, 1\rangle, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{array}{lcl} F & : & (A^C \times B^C) \to (A \times B)^C, \\ h & : & A \times B \to (A \times C)^B, \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} g_A & : & C \to A, \\ g_B & : & C \to B \end{array}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $g_A(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $g_A(c)$ jest A. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE". Operator $\circ$ oznacza składanie funkcji.

$g_A(c)$	A	$h(g_A(c), g_B(c))$		$\Big(h(g_A(c), g_B(c))\Big) \circ g_B$	
$g_A(b)$	NIE	$\Big(h(a, g_B(c))\Big)(b)$		$\Big(h(a,b) \circ g_B\Big)(c)$	

Zadanie 13 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowaną wzorem

$$F(f) = \{n \in X \mid f(n) = 0\}.$$

Jeśli przeciwobraz $F^{-1}[\{\emptyset\}]$ jest zbiorem pustym, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PUSTY". W przeciwnym przypadku wpisz dowolny element tego zbioru.

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f[\mathbb{N}] \subseteq \{1,2,3,4,5\}\}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE".

Zadanie 15 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności, która ma nieskończenie wiele klas abstrakcji i żadne dwie jej klasy abstrakcji nie są równoliczne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 16 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz te spośród liter $A, \ldots, M$, które oznaczają odpowiednio zbiory o mocy 0, 1, $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$.

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$	$\{1,2,3,4\}^{\emptyset}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{Q})$	$\emptyset^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}^{\emptyset}$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\emptyset)$	$\{1,2\}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{N}^{\{1,2,3,4\}}$	$\{0\}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\emptyset)$

0: 1: $\aleph_0$: $\mathfrak{c}$:

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{N} \times \{0,1,2\}, \leq_{lex} \rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli porządek leksykograficzny na zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ jest regularny to w prostokąt poniżej wpisz słowo „REGULARNY". W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie dlaczego nie jest on regularny.

Zadanie 19 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech porządków regularnych, z których żadne dwa nie są izomorficzne.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast u, x i y są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(u,u) \stackrel{?}{=} f(g(y), g(y))$

$f(u,u) \stackrel{?}{=} f(x, g(y))$

$f(u,u) \stackrel{?}{=} f(a, g(y))$

$f(u,u) \stackrel{?}{=} f(y, g(y))$

Numer indeksu:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

6 lutego 2018
czas pisania: 120 min

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów.[1]

Zadanie 21. Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *ite* (nazwa pochodzi od angielskich słów if-then-else), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych zachodzi

$$\hat{\sigma}(ite(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \begin{cases} \hat{\sigma}(\varphi_2), & \text{jeśli } \hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}, \\ \hat{\sigma}(\varphi_3), & \text{wpp.} \end{cases}$$

Udowodnij, że $\{ite, \top, \bot\}$ jest zupełnym zbiorem spójników.

Zadanie 22. Udowodnij, że zbiór

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 1\}$$

ma moc continuum.

Zadanie 23. Mówimy, że funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *zwiększa* zbiór S jeśli zachodzi inkluzja $S \subseteq f(S)$. Rozważmy następujące (fałszywe) twierdzenie i jego (niepoprawny) dowód.

Twierdzenie. Każda monotoniczna funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zwiększa wszystkie zbiory skończone.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem mocy zbioru. Niech

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid f \text{ zwiększa wszystkie zbiory mocy } n\}.$$

Podstawa indukcji. Zauważmy, że jedynym zbiorem o mocy 0 jest zbiór pusty. Ponieważ zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru, w szczególności mamy $\emptyset \subseteq f(\emptyset)$. Zatem $0 \in X$.

Krok indukcyjny. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. W celu pokazania, że $n + 1 \in X$, rozważmy dowolny zbiór S o mocy $n + 1$. Ponieważ S jest skończonym i niepustym podzbiorem zbioru liczb naturalnych, ma on najmniejszy element s_{min} oraz największy s_{max}. Zbiory $S \setminus \{s_{min}\}$ oraz $S \setminus \{s_{max}\}$ mają po n elementów, a zatem z założenia indukcyjnego mamy $S \setminus \{s_{min}\} \subseteq f(S \setminus \{s_{min}\})$ oraz $S \setminus \{s_{max}\} \subseteq f(S \setminus \{s_{max}\})$. Z monotoniczności funkcji f otrzymujemy $f(S \setminus \{s_{min}\}) \subseteq f(S)$ oraz $f(S \setminus \{s_{max}\}) \subseteq f(S)$. A zatem

$$S = (S \setminus \{s_{min}\}) \cup (S \setminus \{s_{max}\}) \subseteq f(S \setminus \{s_{min}\}) \cup f(S \setminus \{s_{max}\}) \subseteq f(S),$$

czyli f zwiększa zbiór S. Ponieważ S wybraliśmy jako dowolny zbiór mocy $n + 1$, funkcja f zwiększa wszystkie zbiory mocy $n + 1$. Zatem $n + 1 \in X$.

Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}$, a więc f zwiększa wszystkie zbiory o skończonej mocy.

Pokaż, że powyższe twierdzenie jest fałszywe, czyli wskaż odpowiedni kontrprzykład. Następnie wskaż błąd w powyższym „dowodzie”: podaj numer linii zawierającej fałszywe stwierdzenie i uzasadnij (np. wskazując odpowiedni kontrprzykład), że jest ono fałszywe.

[1] Algorytm oceniania oddanych zadań jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów, a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.