Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 16 listopada 2018
Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ p \vee \neg q,\ q \vee r,\ \neg r,\ \neg q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz dowolne wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *ite* (nazwa pochodzi od angielskich słów if-then-else), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych zachodzi

$$\hat{\sigma}(ite(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \begin{cases} \hat{\sigma}(\varphi_2), & \text{jeśli } \hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}, \\ \hat{\sigma}(\varphi_3), & \text{wpp.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje formuła zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych i spójników $ite, \top, \bot$ (i nawiasów), równoważna formule $q \Rightarrow (\neg q \vee p)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$ite(q, p, \top)$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$.

DNF: $\neg p \vee \neg q$

CNF: $\neg p \vee \neg q$

Zadanie 4 (2 punkty). Powiemy że formuła φ jest *uproszczeniem* formuły ψ jeśli obie formuły są równoważne oraz w φ występuje mniej spójników logicznych niż w ψ. W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ lub słowo „NIE", jeśli taka formuła nie istnieje.

$p \vee r$

Zadanie 5 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK" w te prostokąty, które odpowiadają formułom równoważnym formule $p \Rightarrow \neg q$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE".

$\neg p \vee \neg q$	TAK	$p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$	TAK
$q \Rightarrow \neg p$	TAK	$\neg(p \wedge q)$	TAK

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:			
A		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *maj* (nazwa pochodzi od angielskiego słowa *majority*), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych $\hat{\sigma}(maj(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \mathsf{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy większość (tzn. 2 lub 3) z argumentów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ma wartość T przy wartościowaniu σ.

(a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).

(b) Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójników $\neg, \wedge$ istnieje równoważna formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników $maj, \bot, \neg$. Oczywiście w zapisie wszystkich formuł można używać nawiasów.

Zadanie 7 (5 punktów).

(a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).

(b) Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją spełniającą następujące zależności rekurencyjne:

$$f(0) = 0, \tag{*}$$
$$f(n+1) = f(n) + 2 \cdot 3^n \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Udowodnij indukcyjnie, że $f(n) = 3^n - 1$ dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 8 (5 punktów). Które z następujących dwóch stwierdzeń są prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.

(a) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest spełnialna a ψ jest tautologią, to φ jest spełnialna.

(b) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuły $\varphi \Leftrightarrow \psi$ oraz ψ są spełnialne, to φ jest spełnialna.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:	Number indeksu:	Grupa[1]:			
D		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 16 listopada 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *ite* (nazwa pochodzi od angielskich słów if-then-else), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych zachodzi

$$\hat{\sigma}(ite(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \begin{cases} \hat{\sigma}(\varphi_2), & \text{jeśli } \hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}, \\ \hat{\sigma}(\varphi_3), & \text{wpp.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje formuła zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych i spójników $ite, \top, \bot$ (i nawiasów), równoważna formule $\neg(p \Rightarrow \neg q)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$ite(q, p, \bot)$

Zadanie 2 (2 punkty). Powiemy że formuła φ jest *uproszczeniem* formuły ψ jeśli obie formuły są równoważne oraz w φ występuje mniej spójników logicznych niż w ψ. W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$ lub słowo „NIE”, jeśli taka formuła nie istnieje.

$p \vee q$

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee \neg r,\ \neg p \vee q,\ q,\ \neg q \vee \neg r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz dowolne wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 4 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w te prostokąty, które odpowiadają formułom równoważnym formule $p \Leftrightarrow \neg q$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(\neg p) \Leftrightarrow q$	TAK	$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$	TAK
$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	TAK	$\neg((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	TAK

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow p$.

DNF: $p \wedge \neg q$

CNF: $p \wedge \neg q$

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:			
D		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów).

(a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).

(b) Niech $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją spełniającą następujące zależności rekurencyjne:

$$g(0) = 2, \tag{*}$$

$$g(n+1) = 2 \cdot g(n) + 3^n - 1 \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Udowodnij indukcyjnie, że $g(n) = 3^n + 1$ dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *min* (nazwa pochodzi od angielskiego słowa *minority*), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych $\hat{\sigma}(min(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \mathsf{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy mniejszość (tzn. 0 lub 1) z argumentów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ma wartość T przy wartościowaniu σ.

Na ćwiczeniach zdefiniowaliśmy taki binarny spójnik logiczny $\uparrow$ (znany również pod nazwą nand), że dla dowolnych formuł φ_1, φ_2 rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych $\hat{\sigma}(\varphi_1 \uparrow \varphi_2) = \mathsf{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}$ i $\hat{\sigma}(\varphi_2) = \mathsf{T}$.

(a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).

(b) Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójnika $\uparrow$ istnieje równoważna formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników $min, \bot$. Oczywiście w zapisie wszystkich formuł można używać nawiasów.

Zadanie 8 (5 punktów). Które z następujących dwóch stwierdzeń są prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.

(a) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest sprzeczna a ψ jest tautologią, to φ jest sprzeczna.

(b) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest sprzeczna a ψ jest spełnialna, to φ jest spełnialna.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.