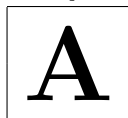


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

## Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 24 stycznia 2020

Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Dla  $m, n \in \mathbb{N}$  niech  $A_{m,n}$  oznacza zbiór relacji zawierających parę  $\langle m, n \rangle$ , czyli

$$A_{m,n} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \langle m, n \rangle \in R\}.$$

Jeśli w zbiorze  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,n}$  jest jakaś relacja niesymetryczna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takiej relacji w tym zbiorze nie ma.

$$R = \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 1, 2 \rangle\}$$

**Zadanie 2 (2 punkty).** Na rodzinie zbiorów  $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$  definiujemy operację rzutu na drugą oś  $\pi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{0, 1\})$  wzorem  $\pi(X) = \{b \in \{0, 1\} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, b \rangle \in X\}$ . Następnie definiujemy relację równoważności  $\simeq$  na  $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$  wzorem

$$X \simeq Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \pi(X) = \pi(Y).$$

W tym zadaniu pytamy o istnienie takich zbiorów  $A, B, C, D$ , że  $|[A]_{\simeq}| = 1$ ,  $|[B]_{\simeq}| = 2$ ,  $|[C]_{\simeq}| = \aleph_0$ ,  $|[D]_{\simeq}| = \mathfrak{c}$ . Jeśli takie zbiory istnieją, to w odpowiadające im prostokąty poniżej wpisz dowolne przykłady takich zbiorów; w przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE”.

A :	$\emptyset$
C :	NIE ISTNIEJE

B :	NIE ISTNIEJE
D :	$\{\langle 0, 0 \rangle\}$

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze  $\{0, 1, 2, 3\}$ , która ma 5 klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

Założmy nie wprost, że taka relacja istnieje. Wtedy jej klasy abstrakcji są niepuste i rozłączne, więc zbiór  $\{0, 1, 2, 3\}$  ma co najmniej 5 elementów. To daje sprzeczność, bo ten zbiór ma tylko 4 elementy.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Rozważmy takie zbiory  $A$  i  $B$ , że zbiór wszystkich funkcji z  $A$  w  $B$  ma moc 2020. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbiorów wszystkich surjekcji z  $A$  w  $B$  oraz surjekcji z  $B$  w  $A$ . *Wskazówka:*  $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$ .

surjekcje z  $A$  w  $B$ :

0

surjekcje z  $B$  w  $A$ :

1

**Zadanie 5 (2 punkty).** Rozważmy funkcje

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C, \quad h : B^A \rightarrow C^B$$

oraz elementy  $a \in A$ ,  $b \in B$  i  $c \in C$ . W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów  $A, B$  i  $C$ ) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie  $f(b)$  nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów  $A, B$  i  $C$  jest  $b \in A$ . Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia  $f(a)$  jest  $B$ . W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(a)$

$B$

$g \circ f$

$C^A$

$h(f)$

$C^B$

$f(b)$

NIE

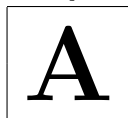
$h \circ f$

NIE

$(h(f))(b)$

$C$

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

**Zadanie 6 (5 punktów).** Rozważmy funkcję  $\varphi : \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$  zdefiniowaną dla argumentu  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  wzorem  $\varphi(f) = \langle g_1, g_2 \rangle$  gdzie dla  $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  i  $y \in \mathbb{R}$  mamy  $g_1(X) = f(X)$  i  $g_2(y) = f(y)$ . Udowodnij, że funkcja  $\varphi$  jest injekcją.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  określamy relację równoważności  $\approx$  wzorem

$$A \approx B \stackrel{\text{df}}{\iff} A \sim B \wedge (\mathbb{N} \setminus A) \sim (\mathbb{N} \setminus B)$$

Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że zbiór ilorazowy relacji  $\approx$  ma moc  $\aleph_0$ . *Wskazówka:* Możesz (bez dowodu) skorzystać z faktu, że  $(\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \sim \mathbb{N}$ .

**Zadanie 8 (5 punktów).** Rozważmy relację równoważności  $\approx$  zdefiniowaną na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  wzorem

$$X \approx Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ jest skończony.}$$

Podaj moc klasy abstrakcji zbioru pustego i udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

D

Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 24 stycznia 2020

Czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Na rodzinie zbiorów  $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$  definiujemy operację rzutu na pierwszą oś  $\pi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  wzorem  $\pi(X) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists b \in \{0, 1\} \langle n, b \rangle \in X\}$ . Następnie definiujemy relację równoważności  $\simeq$  na  $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$  wzorem

$$X \simeq Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \pi(X) = \pi(Y).$$

W tym zadaniu pytamy o istnienie takich zbiorów  $A, B, C, D$ , że  $|[A]_{\simeq}| = 3$ ,  $|[B]_{\simeq}| = 5$ ,  $|[C]_{\simeq}| = \aleph_0$ ,  $|[D]_{\simeq}| = \mathfrak{c}$ . Jeśli takie zbiory istnieją, to w odpowiadające im prostokąty poniżej wpisz dowolne przykłady takich zbiorów; w przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE”.

A : {⟨0, 0⟩}

C : NIE ISTNIEJE

B : NIE ISTNIEJE

D :  $\mathbb{N} \times \{0\}$

**Zadanie 2 (2 punkty).** Rozważmy takie zbiory  $A$  i  $B$ , że zbiór wszystkich funkcji z  $A$  w  $B$  ma moc 2020. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbiorów wszystkich iniekcji z  $A$  w  $B$  oraz iniekcji z  $B$  w  $A$ . *Wskazówka:*  $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$ .

iniekcje z  $A$  w  $B$ : 2020

iniekcje z  $B$  w  $A$ : 0

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Dla  $m, n \in \mathbb{N}$  niech  $A_{m,n}$  oznacza zbiór relacji zawierających parę  $\langle m, n \rangle$ , czyli

$$A_{m,n} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \langle m, n \rangle \in R\}.$$

Jeśli w zbiorze  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > m} A_{m,n}$  jest jakaś relacja będąca funkcją różnowartościową, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że takiej relacji w tym zbiorze nie ma.

$$R = \{\langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**Zadanie 4 (2 punkty).** Rozważmy funkcje

$$f : C \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow A, \quad h : B^C \rightarrow A^B$$

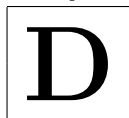
oraz elementy  $a \in A$ ,  $b \in B$  i  $c \in C$ . W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów  $A, B$  i  $C$ ) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie  $f(b)$  nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów  $A, B$  i  $C$  jest  $b \in C$ . Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia  $f(c)$  jest  $B$ . W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażen, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$f(c)$	$B$	$g \circ f$	$A^C$	$h(g)$	NIE
$f(b)$	NIE	$h \circ f$	NIE	$(h(f))(b)$	$A$

**Zadanie 5 (2 punkty).** Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , w której każda klasa abstrakcji ma 2 elementy, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz dowód, że taka relacja nie istnieje.

Załóżmy nie wprost, że taka relacja istnieje.  
 Wtedy jej klasy abstrakcji są rozłączne i w sumie dają zbiór  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  
 więc ten zbiór ma parzystą liczbę elementów.  
 To daje sprzeczność, bo 5 nie jest liczbą parzystą.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

**Zadanie 6 (5 punktów).** Na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$  określamy relację równoważności  $\approx$  wzorem

$$\langle A, B \rangle \approx \langle C, D \rangle \stackrel{\text{df}}{\iff} A \sim C \wedge B \sim D$$

Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnij, że zbiór ilorazowy relacji  $\approx$  ma moc  $\aleph_0$ . *Wskazówka:* Możesz (bez dowodu) skorzystać z faktu, że  $(\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \sim \mathbb{N}$ .

**Zadanie 7 (5 punktów).** Rozważmy funkcję  $\varphi : \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$  zdefiniowaną dla argumentu  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  wzorem  $\varphi(f) = \langle g_1, g_2 \rangle$  gdzie dla  $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  i  $y \in \mathbb{R}$  mamy  $g_1(X) = f(X)$  i  $g_2(y) = f(y)$ . Udowodnij, że funkcja  $\varphi$  jest surjekcją.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Rozważmy relację równoważności  $\approx$  zdefiniowaną na zbiorze  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  wzorem

$$f \approx g \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\} \text{ jest skończony}$$

oraz funkcję  $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  daną wzorem  $z(n) = 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Podaj moc klasy abstrakcji funkcji  $z$  i udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.