Wersja: **B**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 11 grudnia 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(\langle x, y\rangle) = \frac{x^2+y}{2}$. Łatwo zauważyć, że wtedy $f[(0,1) \times (0,1)] = (0,1)$. Jeśli istnieje inny niż $(0,1) \times (0,1)$ zbiór, którego obrazem przez funkcję f jest przedział otwarty $(0,1)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz słowa "NIE ISTNIEJE".

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $R = \{\langle n, n+42\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $S = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq 7n\}$. Nie używając symboli $\exists, \forall$ wpisz w prostokąt poniżej taką formułę φ, że $R;S = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$.

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób nie bywających w żadnym barze podającym sok *Malinowy*.

Zadanie 4 (2 punkty). Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m}$ oznacza zbiór wszystkich takich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f(n) = m$. Jeśli zbiór $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$ jest pusty, to w prostokąt poniżej wpisz słowo "PUSTY". W przeciwnym przypadku wpisz dowolną funkcję, która należy do tego zbioru.

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz wszystkie zwrotne i symetryczne relacje na dwuelementowym zbiorze $\{a, b\}$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **B**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Niech funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie zdefiniowana wzorem $f(X) = \{2x + y \mid \langle x, y\rangle \in X\}$. Udowodnij, że f jest bijekcją.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech R i S będą zwrotnymi relacjami na zbiorze A. Udowodnij, że jeśli $R \cup S$ jest relacją równoważności to relacja $R;S$ jest symetryczna.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla funkcji $f : A \to A$ definiujemy $f^0(x) = x$ oraz $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz wszystkich $x \in A$. Udowodnij, że dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$ i wszystkich $x \in A$ zachodzi równość $f^{i+j}(x) = f^i(f^j(x))$.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **C**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 11 grudnia 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m}$ oznacza zbiór wszystkich takich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f(n) = m$. Jeśli zbiór $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ jest pusty, to w prostokąt poniżej wpisz słowo "PUSTY". W przeciwnym przypadku wpisz dowolną funkcję, która należy do tego zbioru.

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $R = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $S = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m + n = 42\}$. Nie używając symboli $\exists, \forall$ wpisz w prostokąt poniżej taką formułę φ, że $R;S = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \varphi\}$.

Zadanie 3 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz wszystkie zwrotne i słabo antysymetryczne relacje na dwuelementowym zbiorze $\{a, b\}$

Zadanie 4 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(\langle x, y\rangle) = x \cdot y$. Łatwo zauważyć, że wtedy $f[(0,1)\times(0,1)] = (0,1)$. Jeśli istnieje inny niż $(0,1)\times(0,1)$ zbiór, którego obrazem przez funkcję f jest przedział otwarty $(0,1)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz słowa "NIE ISTNIEJE".

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $Bywa \subseteq O\times B$, $Lubi \subseteq O\times S$ i $Podają \subseteq B\times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które nie lubią żadnego soku podawanego w barze *Jagódka*.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **C**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Dla funkcji $f : A \to A$ definiujemy funkcję $F : A \times \mathbb{N} \to A$ w następujący sposób: $F(x, 0) = x$ oraz $F(x, n+1) = f(F(x, n))$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz wszystkich $x \in A$. Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $x \in A$ zachodzi równość $f(F(x, n)) = F(f(x), n)$.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech funkcja $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\{a,b\}}$ będzie zdefiniowana wzorem

$$F(m, n) : \{a, b\} \to \mathbb{N}, \quad (F(m, n))(x) = \begin{cases} m, & \text{gdy } x = a \\ n, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Udowodnij, że F jest bijekcją.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech R i S będą symetrycznymi relacjami na zbiorze A. Udowodnij, że jeśli relacja $R;S$ jest symetryczna to $R;S = S;R$.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.