Numer indeksu: WZORCOWY

# Logika dla informatyków

## Egzamin końcowy (pierwsza część)

6 lutego 2018
czas pisania: 90 min

**Zadanie 1 (2 punkty).** Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej formuł, które są równoważne formule $p \Rightarrow ((q \wedge r) \vee p)$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \vee (p \Rightarrow p)$ | TAK | $\neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \vee p$ | TAK |
| $(p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (p \Rightarrow p)$ | TAK | $\top$ | TAK |

**Zadanie 2 (2 punkty).** Podaj formułę równoważną formule $p \Rightarrow (q \wedge r)$ i mającą:

(a) koniunkcyjną postać normalną: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

(b) dysjunkcyjną postać normalną: $\neg p \vee (q \wedge r)$

**Zadanie 3 (2 punkty).** Mówimy, że formuła $\varphi$ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie $x_i$ są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła $\psi$ nie zawiera kwantyfikatorów. Niech $nww(x, y, w)$ oznacza formułę

$$(\exists d\ x \cdot d = w) \wedge (\exists d\ y \cdot d = w) \wedge \forall w' \Big((\exists d\ x \cdot d = w') \wedge (\exists d\ y \cdot d = w') \Rightarrow w \leq w'\Big).$$

Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $nww(x, y, w)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$\exists d_1 \exists d_2 \forall w' \forall d_1' \forall d_2'\ (x \cdot d_1 = w) \wedge (y \cdot d_2 = w) \wedge \Big((x \cdot d_1' = w') \wedge (y \cdot d_2' = w') \Rightarrow w \leq w'\Big)$$

**Zadanie 4 (2 punkty).** Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = n\}$. Jeśli zbiór $\bigcap_{m=6}^{2018} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ jest pusty, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PUSTY”. W przeciwnym przypadku wpisz dowolny element tego zbioru.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(x) = 2018$$

**Zadanie 5 (2 punkty).** Jeśli istnieją takie zbiory $A$ i $B$, że $|\mathcal{P}(A) \times B| = 2018$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie zbiory. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie zbiory nie istnieją.

$$A = \{0\},\ B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 1009\}$$

**Zadanie 6 (2 punkty).** Jesli formuła $p \Rightarrow ((q \wedge r) \vee p)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, przy którym ta formuła jest fałszywa.

**Zadanie 7 (2 punkty).** Mówimy, że relacja binarna $R$ na zbiorze $A$ jest *silnie antysymetryczna*, jeśli dla wszystkich $a, b \in A$ spełniony jest warunek $\langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \notin R$. W prostokąt poniżej wpisz wszystkie silnie antysymetryczne relacje na zbiorze $\{0, 1\}$.

$\{\langle 0, 1\rangle\}, \quad \{\langle 1, 0\rangle\}, \quad \emptyset$

**Zadanie 8 (2 punkty).** Jeśli istnieją dwie różne relacje równoważności na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, których klasy abstrakcji tworzą podział $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

Podział jednoznacznie wyznacza relację równoważności

**Zadanie 9 (2 punkty).** Jeśli istnieją dwie różne relacje binarne na zbiorze liczb naturalnych, które mają takie same przechodnie domknięcia, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

$R_1 = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \neq n\}, \qquad R_2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

**Zadanie 10 (2 punkty).** Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie symboli matematycznych) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Jeśli $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze $A$ oraz $a, b \in A$ i $[a]_\sim = [b]_\sim$, to $a \sim b$.

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy wprost. Załóżmy, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze $A$ oraz $\boxed{a, b \in A}$ i $\boxed{[a]_\sim = [b]_\sim}$. Z założenia, że $\sim$ jest relacją równoważności wiemy, że jest ona zwrotna. Ze zwrotności $\sim$ mamy $b \sim \boxed{b}$, a stąd i z definicji klasy abstrakcji $\boxed{[b]_\sim}$ wynika $\boxed{b \in [b]_\sim}$. Z założenia $\boxed{[a]_\sim = [b]_\sim}$ dostajemy $b \in \boxed{[a]_\sim}$, co z definicji klasy abstrakcji $\boxed{[a]_\sim}$ daje $\boxed{a \sim b}$ i kończy dowód.

Numer indeksu: WZORCOWY

**Zadanie 11 (2 punkty).** Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0,1\}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(n) = \begin{cases} \langle n/2, 0 \rangle, & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste,} \\ \langle (n-1)/2, 1 \rangle, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje funkcja odwrotna do $f$, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

$f : \mathbb{N} \times \{0,1\} \to \mathbb{N},\ f(n,b) = 2n + b$

**Zadanie 12 (2 punkty).** Rozważmy funkcje

$$\begin{array}{lcl} F & : & (A^C \times B^C) \to (A \times B)^C, \\ h & : & A \times B \to (A \times C)^B, \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} g_A & : & C \to A, \\ g_B & : & C \to B \end{array}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów $A, B$ i $C$) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $g_A(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów $A, B$ i $C$ jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $g_A(c)$ jest $A$. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”. Operator $\circ$ oznacza składanie funkcji.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_A(c)$ | $A$ | $h(g_A(c), g_B(c))$ | $(A \times C)^B$ | $\Big(h(g_A(c), g_B(c))\Big) \circ g_B$ | $(A \times C)^C$ |
| $g_A(b)$ | NIE | $\Big(h(a, g_B(c))\Big)(b)$ | $A \times C$ | $\Big(h(a,b) \circ g_B\Big)(c)$ | $A \times C$ |

**Zadanie 13 (2 punkty).** Rozważmy funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowaną wzorem

$$F(f) = \{n \in X \mid f(n) = 0\}.$$

Jeśli przeciwobraz $F^{-1}[\{\emptyset\}]$ jest zbiorem pustym, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PUSTY”. W przeciwnym przypadku wpisz dowolny element tego zbioru.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = 1$

**Zadanie 14 (2 punkty).** Niech $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f[\mathbb{N}] \subseteq \{1,2,3,4,5\}\}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE”.

Dla $X \subseteq \mathbb{N}$ definiujemy funkcję $G(X) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wzorem $(G(X))(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n \in X, \\ 2, & \text{wpp.} \end{cases}$

**Zadanie 15 (2 punkty).** Jeśli istnieje relacja równoważności, która ma nieskończenie wiele klas abstrakcji i żadne dwie jej klasy abstrakcji nie są równoliczne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$R \subseteq (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}), \qquad R = \{\langle m, n\rangle \mid \exists i \in \mathbb{N}.\ 2^i \leq m, n \leq 2^{i+1}\}$

**Zadanie 16 (2 punkty).** W prostokąty poniżej wpisz te spośród liter $A, \ldots, M$, które oznaczają odpowiednio zbiory o mocy 0, 1, $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$.

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | $J$ | $K$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ | $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ | $\{1,2,3,4\}^{\emptyset}$ | $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{Q})$ | $\emptyset^{\mathbb{N}}$ | $\mathbb{N}^{\emptyset}$ | $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ | $\mathcal{P}(\emptyset)$ | $\{1,2\}^{\mathbb{R}}$ | $\mathbb{N}^{\{1,2,3,4\}}$ | $\{0\}^{\mathbb{N}}$ | $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\emptyset)$ |

0: $E$ 1: $C, F, H, L, M$ $\aleph_0$: $B, K$ $\mathfrak{c}$: $D, G$

**Zadanie 17 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ oraz $\langle \mathbb{N} \times \{0,1,2\}, \leq_{lex}\rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje.

$f : \mathbb{N} \times \{0,1,2\} \to \mathbb{N}, \qquad f(m,i) = 3m + i$

**Zadanie 18 (2 punkty).** Jeśli porządek leksykograficzny na zbiorze $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ jest regularny to w prostokąt poniżej wpisz słowo „REGULARNY”. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie dlaczego nie jest on regularny.

zbiór $\{\langle -n, 0\rangle\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego

**Zadanie 19 (2 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech porządków regularnych, z których żadne dwa nie są izomorficzne.

$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle, \quad \langle \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{lex}\rangle, \quad \langle \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{lex}\rangle$

**Zadanie 20 (2 punkty).** W tym zadaniu $f$ i $g$ są symbolami funkcyjnymi, $a$ jest symbolem stałej, natomiast $u, x$ i $y$ są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(u,u) \stackrel{?}{=} f(g(y), g(y))$ | $[u/g(y)]$ | $f(u,u) \stackrel{?}{=} f(x, g(y))$ | $[u/g(y),\ x/g(y)]$ |
| $f(u,u) \stackrel{?}{=} f(a, g(y))$ | NIE | $f(u,u) \stackrel{?}{=} f(y, g(y))$ | NIE |

Numer indeksu: WZORCOWY

Oddane zadania:

# Logika dla informatyków

## Egzamin końcowy (część druga)

6 lutego 2018
czas pisania: 120 min

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od $-4$ do 20 punktów.[1]

**Zadanie 21.** Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *ite* (nazwa pochodzi od angielskich słów if-then-else), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania $\sigma$ zmiennych zdaniowych zachodzi

$$\hat{\sigma}(ite(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \begin{cases} \hat{\sigma}(\varphi_2), & \text{jeśli } \hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}, \\ \hat{\sigma}(\varphi_3), & \text{wpp.} \end{cases}$$

Udowodnij, że $\{ite, \top, \bot\}$ jest zupełnym zbiorem spójników.

**Zadanie 22.** Udowodnij, że zbiór

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 1\}$$

ma moc continuum.

**Zadanie 23.** Mówimy, że funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *zwiększa* zbiór $S$ jeśli zachodzi inkluzja $S \subseteq f(S)$. Rozważmy następujące (fałszywe) twierdzenie i jego (niepoprawny) dowód.

**Twierdzenie.** Każda monotoniczna funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zwiększa wszystkie zbiory skończone.

1 Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem mocy zbioru. Niech

2 $$X = \{n \in \mathbb{N} \mid f \text{ zwiększa wszystkie zbiory mocy } n\}.$$

3 *Podstawa indukcji.* Zauważmy, że jedynym zbiorem o mocy 0 jest zbiór pusty. Ponieważ zbiór pusty jest
4 podzbiorem każdego zbioru, w szczególności mamy $\emptyset \subseteq f(\emptyset)$. Zatem $0 \in X$.

5 *Krok indukcyjny.* Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. W celu pokazania, że $n+1 \in X$,
6 rozważmy dowolny zbiór $S$ o mocy $n+1$. Ponieważ $S$ jest skończonym i niepustym podzbiorem zbioru
7 liczb naturalnych, ma on najmniejszy element $s_{min}$ oraz największy $s_{max}$. Zbiory $S \setminus \{s_{min}\}$ oraz $S \setminus$
8 $\{s_{max}\}$ mają po $n$ elementów, a zatem z założenia indukcyjnego mamy $S \setminus \{s_{min}\} \subseteq f(S \setminus \{s_{min}\})$
9 oraz $S \setminus \{s_{max}\} \subseteq f(S \setminus \{s_{max}\})$. Z monotoniczności funkcji $f$ otrzymujemy $f(S \setminus \{s_{min}\}) \subseteq f(S)$ oraz
10 $f(S \setminus \{s_{max}\}) \subseteq f(S)$. A zatem

11 $$S = (S \setminus \{s_{min}\}) \cup (S \setminus \{s_{max}\}) \subseteq f(S \setminus \{s_{min}\}) \cup f(S \setminus \{s_{max}\}) \subseteq f(S),$$

12 czyli $f$ zwiększa zbiór $S$. Ponieważ $S$ wybraliśmy jako dowolny zbiór mocy $n+1$, funkcja $f$ zwiększa
13 wszystkie zbiory mocy $n+1$. Zatem $n+1 \in X$.

14 Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}$, a więc $f$ zwiększa wszystkie zbiory o skończonej mocy.

Pokaż, że powyższe twierdzenie jest fałszywe, czyli wskaż odpowiedni kontrprzykład. Następnie wskaż błąd w powyższym „dowodzie”: podaj numer linii zawierającej fałszywe stwierdzenie i uzasadnij (np. wskazując odpowiedni kontrprzykład), że jest ono fałszywe.

[1] Algorytm oceniania oddanych zadań jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów, a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.