Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

19 lutego 2019
czas pisania: 90 min

Zadanie 1 (2 punkty). W prostokąty obok każdej z formuł poniżej wpisz liczbę wartościowań $\sigma : \{p, q, r, s\} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ spełniających daną formułę.

$\bot$	0	$p \wedge q \wedge r \wedge s$	1	$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$	7
$\top$	16	$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$	9	$(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	0

Zadanie 2 (2 punkty). Nie używając spójnika „$\Rightarrow$” wpisz w prostokąt poniżej formułę w negacyjnej postaci normalnej równoważną formule $\neg(p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow \neg r))$.

$p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

Zadanie 3 (2 punkty). Czy formuła $p \vee q$ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{p, q \Rightarrow \neg p, \neg p \vee \neg q\}$? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz dowód jej poprawności.

Tak. Weźmy dowolne wartościowanie σ spełniające ten zbiór. Wtedy $\sigma(p) = \mathsf{T}$, więc $\hat{\sigma}(p \vee q) = \mathsf{T}$.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieją niepuste zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N}$ spełniające podany warunek, to w odpowiedni prostokąt wpisz dowolne takie zbiory. W przeciwnym razie wpisz słowo NIE. Symbol $\subsetneq$ oznacza ścisłe zawieranie: $X \subsetneq Y$ jest równoważne $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ — $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

(b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subsetneq \mathcal{P}(A \cap B)$ — NIE

(c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supsetneq \mathcal{P}(A \cap B)$ — NIE

Zadanie 5 (2 punkty). Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} \mid -n - \frac{1}{m} < x < n + \frac{1}{m}\}$. Wylicz wartość poniższych zbiorów, tzn. wpisz w prostokąt obok wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup, \exists, \forall$.

(a) $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n,m}$ — $(-1, 1)$

(b) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,m}$ — $\mathbb{R}$

Zadanie 6 (2 punkty). W podany prostokąt wpisz liczbę takich relacji równoważności R na zbiorze $\{a, b, c, d, e\}$, że $\langle a, b\rangle \in R$ oraz $\langle c, d\rangle \in R$ $\boxed{5}$

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze liczb naturalnych, która ma skończenie wiele klas abstrakcji i każda z tych klas abstrakcji jest zbiorem skończonym, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Suma wszystkich klas abstrakcji jest równa $\mathbb{N}$, czyli jest zbiorem nieskończonym.
Natomiast skończona suma zbiorów skończonych jest zbiorem skończonym.

Zadanie 8 (2 punkty). Jeśli formuła $(\exists x\ p(x)) \Rightarrow \neg\forall x.\neg p(x)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$
\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}
\exists x\ p(x) \quad \text{założenie} \\
\boxed{\begin{array}{c}
\forall x\ \neg p(x) \quad \text{założenie} \\
\dfrac{\exists x\ p(x) \qquad \boxed{\begin{array}{c}
x_0 \text{ świeża zmienna; } p(x_0) \text{ założenie} \\
\dfrac{\dfrac{\forall x\ \neg p(x)}{\neg p(x_0)}(\forall\text{e}) \qquad p(x_0)}{\bot}(\neg\text{e})
\end{array}}}{\bot}(\exists\text{e})
\end{array}} \\
\dfrac{}{\neg\forall x\ \neg p(x)}(\neg\text{i})
\end{array}}}{(\exists x\ p(x)) \Rightarrow \neg\forall x.\neg p(x)}(\Rightarrow\text{i})
$$

Zadanie 9 (2 punkty). Niech R będzie taką relacją binarną na zbiorze A, że $R \subseteq R;R$. Czy z tego wynika, że R jest zwrotna? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio dowód lub kontrprzykład.

Nie. Kontrprzykład: $A = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.
Wtedy $R;R = R$, ale R nie jest zwrotna, bo $\langle 1, 1\rangle \notin R$.

Zadanie 10 (2 punkty). Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozważmy relację binarną $R \subseteq A \times A$ zdefiniowaną wzorem $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość przechodniego domknięcia relacji R.

$A \times A$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy zbiór barów B i soków S oraz relację binarną $Podają \subseteq B \times S$ informującą o tym jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{b \in B \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów podających dokładnie te same soki, które są podawane w barze 'Przekręt'.

$$\forall s. Podają(b, s) \Leftrightarrow Podają(\text{'Przekręt'}, s)$$

Zadanie 12 (2 punkty). Jeśli istnieje taki zbiór uporządkowany, w którym są dokładnie trzy elementy minimalne i dokładnie dwa maksymalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

$$\langle \{2, 3, 5, 6, 10\}, | \rangle$$

Zadanie 13 (2 punkty). Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie dana wzorem $F(f) = \langle f_1, f_2 \rangle$, gdzie dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_1(n) = f(2n)$ oraz $f_2(n) = f(2n+1)$. Jeśli funkcja F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

$$G : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \qquad (G(f, g))(n) = \begin{cases} f(n/2), & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste} \\ g(\frac{n-1}{2}), & \text{wpp} \end{cases}.$$

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $f : A \to B$ i $g : B \to C$ będą takimi funkcjami, że złożenie gf jest funkcją różnowartościową. Załóżmy dodatkowo, że zbiory A, B i C są równoliczne. Czy z tego wynika, że funkcja g jest różnowartościowa? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio dowód lub kontrprzykład.

Nie. $A = B = C = \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, $g(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dla $n \in \mathbb{N}$

Zadanie 15 (2 punkty). Niech $F_f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $F_f(A) = f^{-1}[A]$.

(a) Podaj przykład funkcji „na” f, dla której F_f **jest** funkcją „na” lub wpisz słowo „NIE”, jeśli taki przykład nie istnieje.

$$f(x) = x$$

(b) Podaj przykład funkcji „na” f, dla której F_f **nie jest** funkcją „na” lub wpisz słowo „NIE”, jeśli taki przykład nie istnieje.

$$f(x) = \lfloor \tfrac{x}{2} \rfloor$$

Zadanie 16 (2 punkty). Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ definiujemy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$A \simeq B \overset{\text{df}}{\iff} \{y\in\mathbb{N} \mid \exists x.\langle x,y\rangle \in A\} = \{y\in\mathbb{N} \mid \exists x.\langle x,y\rangle \in B\}.$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbioru klas abstrakcji relacji $\simeq$ oraz moce klas abstrakcji zbiorów $\{\langle 0,0\rangle\}$ i $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$|\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})_{/\simeq}| = \boxed{\mathfrak{c}}$ $\quad |[\{\langle 0,0\rangle\}]_{\simeq}| = \boxed{\mathfrak{c}}$ $\quad |[\mathbb{N}\times\mathbb{N}]_{\simeq}| = \boxed{\mathfrak{c}}$

Zadanie 17 (2 punkty). Czy istnieją takie funkcje f i g, że żadna z nich nie jest różnowartościowa, a ich złożenie gf jest funkcją różnowartościową? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio przykład takich funkcji lub dowód ich nieistnienia.

Nie istnieją. Gdyby istniały, to istniałyby takie elementy x_1, x_2 w dziedzinie f, że $f(x_1) = f(x_2)$. Wtedy $gf(x_1) = gf(x_2)$, co przeczy różnowartościowości funkcji gf.

Zadanie 18 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$ oraz $\langle\mathbb{Z}\times\{0,1,2\},\leq_{lex}\rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje.

$$f:\mathbb{Z}\times\{0,1,2\}\to\mathbb{Z}, \qquad f(n,k) = 3n+k+42$$

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli istnieje taki nieskończony zbiór uporządkowany $\langle P,\preceq\rangle$, że $\preceq^{-1}$ jest porządkiem regularnym na zbiorze P, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego zbioru uporządkowanego. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

$$\langle\mathbb{N},\geq\rangle$$

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f, g i h są symbolami funkcyjnymi, a, b są symbolami stałych, natomiast u, x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(g(x,y),z) \overset{?}{=} f(y,a)$	NIE	$f(g(x,x),g(y,y)) \overset{?}{=} f(y,a)$	NIE
$g(z,f(z,u)) \overset{?}{=} g(a,x)$	$[x/f(a,u), z/a]$	$f(f(a,b),y) \overset{?}{=} f(x,f(z,b))$	$[x/f(a,b), y/f(z,b)]$