Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

9 lutego 2017
czas pisania: 90 min

Zadanie 1 (2 punkty). Podaj formułę równoważną formule $p \Rightarrow (q \wedge (r \vee \neg s))$ i mającą:

(a) koniunkcyjną postać normalną

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg s)$

(b) dysjunkcyjną postać normalną

$\neg p \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge \neg s)$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli formuły $(p \wedge q) \Rightarrow r$ i $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$\sigma(p) = \sigma(r) = \mathsf{F},\ \sigma(q) = \mathsf{T}$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy formułę $\neg\forall x\ \neg p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow \exists x\ p(x) \vee q(x)$. Jeśli istnieje formuła otrzymana z niej przez dopisanie nawiasów, która (niezależnie od wszelkich przyjmowanych konwencji o priorytetach operatorów) jest tautologią, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowa "NIE ISTNIEJE".

$$\Big(\neg\Big(\forall x\ \neg\big(p(x) \vee q(x)\big)\Big)\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists x\ \big(p(x) \vee q(x)\big)\Big)$$

Zadanie 4 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{n\}$. Jeśli zbiór $\bigcap_{m=2}^{2017} \bigcup_{n=m}^{m+9} A_n$ ma najmniejszy element to w prostokąt poniżej wpisz najmniejszy element tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE MA".

NIE MA

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C, D zachodzi inkluzja

$$((A \setminus B) \cup C) \cap D \subseteq (D \setminus (B \cap C)) \cap A$$

to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$A = B = C = D = \{1\}$

Zadanie 6 (2 punkty). Jesli formuła $(\neg a \wedge (b \Rightarrow a)) \Rightarrow \neg b$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, przy którym ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee r,\ \neg r \vee s,\ p \vee \neg s,\ \ \neg r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

$$\sigma(p) = \sigma(r) = \sigma(s) = \mathsf{F}$$

Zadanie 8 (2 punkty). Rozważmy relację identyczności $I_{\underline{4}} = \{\langle n, n\rangle \mid n \in \underline{4}\}$ na zbiorze $\underline{4} = \{0, 1, 2, 3\}$. Jeśli istnieją takie dwie różne od siebie i rożne od $I_{\underline{4}}$ relacje równoważności R_1 i R_2 na $\underline{4}$, że $R_1 \cap R_2 = I_{\underline{4}}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJĄ".

$$R_1 = \{\langle m, n\rangle \in \underline{4}\times\underline{4} : \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\}, \qquad R_2 = \{\langle m, n\rangle \in \underline{4}\times\underline{4} : 2|m-n\}$$

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli istnieje *największa* (w sensie inkluzji) relacja przechodnia na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ zawierająca zbiór $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x + 42\}$, to w prostokąt poniżej wpisz tę relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 10 (2 punkty). Przypomnijmy, że dowód implikacji $\alpha \Rightarrow \beta$ przez *kontrapozycję* polega na udowodnieniu implikacji $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$. Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie symboli matematycznych) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $A \cap B = A$ to $A \subseteq B$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez kontrapozycję. Załóżmy, że $\boxed{A \not\subseteq B}$. Wtedy istnieje taki element x, że $\boxed{x \in A}$ oraz $\boxed{x \notin B}$. Z definicji przekroju zbiorów otrzymujemy, że x nie należy do zbioru $\boxed{A \cap B}$. Zatem zbiory $\boxed{A}$ i $\boxed{A \cap B}$ są różne, co kończy dowód.

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste,} \\ (n+1)/2, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

f nie jest róznowartościowa, np. $f(1) = f(2)$

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{array}{lcl} F & : & A^B \times A^C \to A^{B\times C}, \\ G & : & A^{B\times C} \to B^A, \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} f_1 & : & B \to A, \\ f_2 & : & C \to A, \end{array}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $F(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A^B \times A^C)$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór, do którego należy elemant oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $f_1(b)$ jest A. Wpisz odpowiedni typ wyrażenia w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE".

$F(f_1, f_2)$	$A^{B\times C}$	$(F(f_1, f_2))(b, c)$	A
$G(F(f_1, f_2)(a))$	NIE	$G(F(f_1, f_2))(a)$	B

Zadanie 13 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(X, n) = |\{i \in X \mid i \leq n\}|.$$

Niech $P = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$ i $N = \{n \in \mathbb{N} : 2|n+1\}$ oznaczają odpowiednio zbiory liczb parzystych i nieparzystych. W prostokąt poniżej wpisz obliczoną wartość obrazu zbioru $\{P\} \times N$ przez funkcję f.

$f[\{P\}\times N] = \boxed{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 1\}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE".

Dla $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ definiujemy $G(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\quad G(g)(n) = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 0 \\ 1, & \text{dla } n = 1 \\ g(n-2), & \text{wpp} \end{cases}$

Zadanie 15 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności, której wszystkie klasy abstrakcji mają moc continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz słowo "NIE".

relacja $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ na zbiorze $\mathbb{R}$

Zadanie 16 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$(\mathbb{R} \times \{0,1\})^{\mathbb{N}}$	$\{1,2\} \times (\{3,4,5\}^{\{6,7\}})$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\mathbb{N}^{\{0,1\}}$	$\mathbb{R}^{\{2016\}}$	$\{2017\}^{\mathbb{N}}$	$\{2016, 2017\}^{\mathbb{N}}$
$\mathfrak{c}$	18	$\mathfrak{c}$	$\aleph_0$	$\mathfrak{c}$	1	$\mathfrak{c}$

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle \mathbb{Z} \times \{0,1\}, \leq_{lex} \rangle$ oraz $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje.

$f : \mathbb{Z} \times \{0,1\} \to \mathbb{Z}, \qquad f(m,i) = 2m + i$

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli porządek leksykograficzny na zbiorze skończonych ciągów zero-jedynkowych $\langle \{0,1\}^*, \leq_{lex} \rangle$ jest regularny to wpisz w prostokąt poniżej słowo „REGULARNY". W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie dlaczego nie jest on regularny.

zbiór $\{0^n 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego

Zadanie 19 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech parami nieizomorficznych porządków na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle, \quad \langle \mathbb{N}, | \rangle, \quad \langle \mathbb{N}, = \rangle$

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast u, v, x i y są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(x, g(y), a) \stackrel{?}{=} f(u, u, v)$	$[u/g(y), x/g(y), v/a]$	$f(x, g(x), a) \stackrel{?}{=} f(u, u, v)$	NIE
$f(x, g(y), a) \stackrel{?}{=} f(u, v, v)$	NIE	$f(x, g(y), a) \stackrel{?}{=} f(u, g(u), v)$	$[x/u, y/u, v/a]$

Numer indeksu: WZORCOWY

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

9 lutego 2017
czas pisania: 120 min

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów[1].

Zadanie 21. Rozważmy dowolne zbiory A i B. Ile jest funkcji z A w zbiór pusty? Ile jest funkcji ze zbioru pustego w A? Czy prawdziwa jest implikacja *jeśli* $A^B = B^A$ *to* $A = B$? Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadanie 22. Czy istnieje największa w sensie inkluzji relacja równoważności na zbiorze liczb naturalnych, która nie zawiera pary $\langle 0, 1\rangle$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 23. Udowodnij, że istnieje dokładnie continuum różnych przechodnich relacji na zbiorze liczb naturalnych, które są funkcjami.

[1] Algorytm oceniania oddaanych zadań jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.