Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:
A		

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 14 grudnia 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$A \dot{-} B \quad = \quad \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \notin B\}.$$

Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne operatory $\cup, \cap, \setminus, \dot{-}$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej operatorów niż W'. Np. $A \cup B$ jest uproszczeniem $(A \setminus B) \cup B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $A \setminus (A \dot{-} B)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$A \cap B$

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje taka rodzina $\{X_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ zbiorów niepustych, że

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} X_{i,j} = \emptyset$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką rodzinę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$X_{i,j} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > i + j\}$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f \;:\; \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad g \;:\; \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, \qquad h \;:\; \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Rozważmy wyrażenia zbudowane z symboli (, f g h ; $\circ$), gdzie $\circ$ oznacza operator składania funkcji. Wyrażenie uznajemy za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(g)$ nie jest poprawne, bo $g \notin \mathbb{N}$. Jeśli istnieje wyrażenie, którego wartością jest liczba naturalna i w którym każdy z symboli f, g i h występuje co najmniej raz, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego wyrażenia; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$g(h(g(f, f), g(f, f)), f)$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli formuła $\Big(\forall x\,(p(x) \Rightarrow \neg q(x))\Big) \Rightarrow \Big(\forall x\,(q(x) \Rightarrow \neg p(x))\Big)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje binarne $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle b, o\rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i osób o tej własności, że osoba o bywa w barze b ale nie lubi żadnego podawanego tam soku.

$$\mathit{Bywa}(o, b) \wedge \forall s \in S.\mathit{Podają}(b, s) \Rightarrow \neg \mathit{Lubi}(o, s)$$

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:			
A		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy taką relację binarną $R \subseteq A \times A$, że $R;R = I_A$, gdzie $I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$ jest relacją identycznościową na zbiorze A. Udowodnij, że R jest funkcją.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A_i \subseteq \mathbb{N}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Uogólnionym produktem kartezjańskim tej rodziny nazywamy zbiór

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in A_i\}.$$

W szczególności dla ustalonego zbioru $B \subseteq \mathbb{N}$ mamy

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in B\}.$$

Czy dla dowolnego zbioru $B \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cap B) = (\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cap (\prod_{i\in\mathbb{N}} B)?$$

Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 8 (5 punktów). Czy dla dowolnych funkcji $f : A \to B$ i $g : B \to C$, jeśli złożenie gf jest funkcją różnowartościową i f jest „na”, to g jest różnowartościowa? Uzasadnij odpowiedź.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:			
D		s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
		s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 14 grudnia 2018
Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieje taka rodzina $\{A_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ zbiorów niepustych, że

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} A_{i,j} = \emptyset$$

to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką rodzinę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$A_{i,j} = \{j\}$$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, \qquad h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Rozważmy wyrażenia zbudowane z symboli `(` `,` f g h `;` $\circ$ `)`, gdzie $\circ$ oznacza operator składania funkcji. Wyrażenie uznajemy za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(g)$ nie jest poprawne, bo $g \notin \mathbb{N}$. Jeśli istnieje wyrażenie, którego wartością jest liczba naturalna i w którym każdy z symboli f, g i h występuje co najmniej raz, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego wyrażenia; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$g(h \circ f)$$

Zadanie 3 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$A \dot{-} B \quad = \quad \{x \mid x \in A \Leftrightarrow x \notin B\}.$$

Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne operatory $\cup, \cap, \setminus, \dot{-}$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej operatorów niż W'. Np. $A \cup B$ jest uproszczeniem $(A \setminus B) \cup B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $(A \cap B) \cup (A \dot{-} B)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$A \cup B$$

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje binarne $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle b, s\rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i soków o tej własności, że sok s jest podawany w barze b ale nie lubi go żadna osoba bywająca w tym barze.

$$\mathit{Podają}(b, s) \wedge \forall o \in O.\mathit{Bywa}(o, b) \Rightarrow \neg \mathit{Lubi}(o, s)$$

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli formuła $\Big(\forall x\,(\neg p(x) \;\Rightarrow\; q(x))\Big) \;\Rightarrow\; \Big(\forall x\,(\neg q(x) \;\Rightarrow\; p(x))\Big)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:
D		

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A_i \subseteq \mathbb{N}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Uogólnionym produktem kartezjańskim tej rodziny nazywamy zbiór

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}. f(i) \in A_i\}.$$

Czy prawdziwe jest stwierdzenie

$$(\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i) \neq \emptyset \;\; \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall i \in \mathbb{N}. A_i \neq \emptyset?$$

Uzasadnij odowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy taką relację binarną $R \subseteq A \times A$, że $R;R = I_A$, gdzie $I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$ jest relacją identycznościową na zbiorze A. Udowodnij, że $R = R^{-1}$.

Zadanie 8 (5 punktów). Czy dla dowolnych funkcji $f : A \to B$ i $g : B \to C$, jeśli złożenie gf jest funkcją „na" i g jest różnowartościowa, to f jest „na"? Uzasadnij odpowiedź.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.