Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 20 listopada 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli dla dowolnych formuł φ i ψ logiki pierwszego rzędu formuła $(\exists x\ \varphi) \Rightarrow (\exists x\ \psi) \Rightarrow \forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Uniwersum: $\mathbb{N}$, $\varphi : x = 5$, $\psi : x = 7$

Zadanie 2 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, mające następującą tabelkę zero-jedynkową.

p	q	r	φ
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

CNF: $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ DNF: $p \vee (q \wedge r)$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg q \vee p,\ s \vee q,\ \neg r \vee \neg p,\ \neg s \vee q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

$\sigma(p) = \mathsf{T}$, $\sigma(q) = \mathsf{T}$, $\sigma(r) = \mathsf{F}$, $\sigma(s) = \mathsf{T}$

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \cup B$ jest uproszczeniem $(A \setminus B) \cup B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $A \cap ((C \cup B) \setminus B)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$A \cap (C \setminus B)$

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli formuły $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$ oraz $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Które z poniższych zdań są prawdziwe dla wszystkich formuł φ i ψ rachunku zdań?

1. Jeśli $\varphi \Rightarrow \psi$ jest spełnialna oraz $\neg\psi$ jest tautologią, to $\neg\varphi$ jest spełnialna.
2. Jeśli $\varphi \Rightarrow \psi$ jest spełnialna oraz $\neg\psi$ jest tautologią, to φ jest spełnialna.

Podaj dowody ich prawdziwości. W pozostałych przypadkach wskaż kontrprzykłady.

Zadanie 7 (5 punktów). Udowodnij, że jeżeli dla pewnych zbiorów A i B zachodzi $A \setminus B = B \setminus A$, to $A = B$.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy odwzorowanie $\mathcal{T}$ przyporządkowujące formułom zbudowanym ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) formuły zbudowane ze zmiennych, spójników $\Rightarrow, \perp$ (i nawiasów) w następujący sposób.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(p) &= p, \quad \text{dla wszystkich zmiennych } p \\
\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2) \\
\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow (\mathcal{T}(\varphi_2) \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \\
\mathcal{T}(\neg\varphi) &= \mathcal{T}(\varphi) \Rightarrow \perp
\end{aligned}$$

Udowodnij, że dla wszystkich formuł φ zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) formuły φ i $\mathcal{T}(\varphi)$ są równoważne.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem struktury formuły φ. Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) i niech

$$X = \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)\}.$$

Musimy pokazać, że X zawiera zmienne zdaniowe (to jest podstawa indukcji) oraz że jest zamknięty na spójniki $\vee, \wedge, \neg$ (krok indukcyjny).

Podstawa indukcji: Weźmy dowolną zmienną zdaniową p. Ponieważ $\mathcal{T}(p) = p$, formuły $\mathcal{T}(p)$ oraz p są równoważne, a stąd $p \in X$.

Krok indukcyjny: Weźmy dowolne formuły φ_1 i φ_2 i załóżmy, że $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ (to jest założenie indukcyjne). Pokażemy, że także $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ oraz $\neg\varphi_1$ należą do zbioru X. Z założenia indukcyjnego wiemy, że $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$ oraz $\varphi_2 \equiv \mathcal{T}(\varphi_2)$.

- $\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2)$, a zatem z założenia indukcyjnego jest to formuła równoważna $(\varphi_1 \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi_2)$. Korzystając z rownoważności $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ otrzymujemy równoważną formułę $\neg(\neg\varphi_1 \vee \perp) \vee \varphi_2$, która uprasza się do $\varphi_1 \vee \varphi_2$. Zatem $\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$, co pokazuje że $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in X$.
- Przypadek $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ jest podobny:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= (\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow (\mathcal{T}(\varphi_2) \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \equiv (\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \\
&\equiv \neg(\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \perp)) \vee \perp \equiv \varphi_1 \wedge \neg(\varphi_2 \Rightarrow \perp) \equiv \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \neg\perp) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2.
\end{aligned}$$

  Zatem $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$, co pokazuje, że $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in X$.
- $\mathcal{T}(\neg\varphi_1) = \mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \perp \equiv \varphi_1 \Rightarrow \perp \equiv \neg\varphi_1 \vee \perp \equiv \neg\varphi_1$. Zatem $\neg\varphi_1 \in X$.

Na mocy zasady indukcji zbiór X zawiera wszystkie formuły z $\mathcal{F}$, a to oznacza, że dla wszystkich formuł φ zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) formuły φ i $\mathcal{T}(\varphi)$ są równoważne.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **D**	Numer indeksu: 000000	Grupa[1]:	

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 20 listopada 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli dla dowolnych formuł φ i ψ logiki pierwszego rzędu formuła $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x\ \varphi) \Rightarrow \exists x\ \psi$ jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Uniwersum: $\mathbb{N}$, $\varphi : x = 5$, $\psi : \bot$

Zadanie 2 (2 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $(A \cap (C \setminus B)) \cup B$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$(A \cap C) \cup B$

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, mające następującą tabelkię zero-jedynkową.

p	q	r	φ
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

CNF: $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$ DNF: $q \vee (p \wedge r)$

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ \neg r \vee s,\ \neg q \vee \neg s,\ \neg p \vee r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli formuły $(p \Leftrightarrow q) \vee r$ oraz $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Wersja: **D**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy odwzorowanie $\mathcal{T}$ przyporządkowujące formułom zbudowanym ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) formuły zbudowane ze zmiennych, spójników $\Rightarrow, \neg$ (i nawiasów) w następujący sposób.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(p) &= p, \quad \text{dla wszystkich zmiennych } p \\
\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= \neg(\mathcal{T}(\varphi_1)) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2) \\
\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= \neg(\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \neg(\mathcal{T}(\varphi_2))) \\
\mathcal{T}(\neg\varphi) &= \neg(\mathcal{T}(\varphi))
\end{aligned}$$

Udowodnij, że dla wszystkich formuł φ zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) formuły φ i $\mathcal{T}(\varphi)$ są równoważne.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem głębokości formuły φ. Indukcja względem struktury φ byłaby bardziej naturalna, ale chcemy pokazać, że można to zrobić inaczej niż w wersji A.

Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) i niech

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{dla każdej formuly } \varphi \in \mathcal{F} \text{ o głębokości } n, \varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)\}.$$

Podstawa indukcji: Weźmy dowolną formułę o głębokości 1. Jest to pewna zmienna zdaniowa p. Ponieważ $\mathcal{T}(p) = p$, formuły $\mathcal{T}(p)$ oraz p są równoważne, a stąd $1 \in X$.

Krok indukcyjny: Weźmy dowolne $n \geq 1$ i załóżmy, że wszystkie liczby nie większe niż n należą do X, czyli że dla wszystkich formuł φ o głębokości $\leq n$ formuły φ oraz $\mathcal{T}(\varphi)$ są rownoważne (to jest założenie indukcyjne). Pokażemy, że także $n+1 \in X$, czyli że dla wszystkich formuł φ o głębokości $n+1$ formuły φ oraz $\mathcal{T}(\varphi)$ są rownoważne. Weźmy zatem dowolną formułę $\varphi \in \mathcal{F}$ o głębokości $n+1$ i rozważmy następujące trzy przypadki.

$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$**:** Formuły φ_1 oraz φ_2 mają głębokość nie większą niż n, więc z założenia indukcyjnego $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$ oraz $\varphi_2 \equiv \mathcal{T}(\varphi_2)$. Wtedy $\mathcal{T}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg(\mathcal{T}(\varphi_1)) \Rightarrow \mathcal{T}(\varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$, a stąd $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$.

$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$**:** Formuły φ_1 oraz φ_2 mają głębokość nie większą niż n, więc z założenia indukcyjnego $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$ oraz $\varphi_2 \equiv \mathcal{T}(\varphi_2)$. Wtedy $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \neg(\mathcal{T}(\varphi_1) \Rightarrow \neg(\mathcal{T}(\varphi_2))) \equiv \neg(\varphi_1 \Rightarrow \neg\varphi_2) \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$, a stąd $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$.

$\varphi = \neg\varphi_1$**:** Formuła φ_1 ma głębokość nie większą niż n, więc z założenia indukcyjnego $\varphi_1 \equiv \mathcal{T}(\varphi_1)$. Wtedy $\mathcal{T}(\neg\varphi_1) = \neg(\mathcal{T}(\varphi_1)) \equiv \neg\varphi_1$, a stąd $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$.

We wszystkich możliwych przypadkach pokazaliśmy, że $\varphi \equiv \mathcal{T}(\varphi)$, a z tego wynika że dla wszystkich formuł φ o głębokości $n+1$ formuły φ oraz $\mathcal{T}(\varphi)$ są rownoważne, czyli $n+1 \in X$.

Na mocy zasady indukcji zbiór X zawiera wszystkie liczby naturalne ≥ 1, a to oznacza, że dla wszystkich formuł φ (o dowolnej głębokości) zbudowanych ze zmiennych zdaniowych oraz spójnikow $\vee, \wedge, \neg$ (i nawiasów) formuły φ i $\mathcal{T}(\varphi)$ są równoważne.

Zadanie 7 (5 punktów). Które z poniższych zdań są prawdziwe dla wszystkich formuł φ i ψ rachunku zdań?

1. Jeśli $\varphi \Rightarrow \psi$ jest tautologią oraz $\neg\psi$ jest spełnialna, to $\neg\varphi$ jest spełnialna.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

2. Jeśli $\varphi \Rightarrow \psi$ jest tautologią oraz $\neg\psi$ jest spełnialna, to φ jest spełnialna.

Podaj dowody ich prawdziwości. W pozostałych przypadkach wskaż kontrprzykłady.

Zadanie 8 (5 punktów). Udowodnij, że jeżeli dla pewnych zbiorów A, B i C zachodzi $A \cap B = A \cap C$ oraz $A \cup B = A \cup C$, to $B = C$.