Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część licencjacka)

29 stycznia 2007

Za każde z dziesięciu poniższych zadań można otrzymać od -2 do 2 punktów. Za brak rozwiązania otrzymuje się 0 punktów, punkty ujemne otrzymuje się tylko za rozwiązania kompromitująco fałszywe. Aby zdać tę część egzaminu (być dopuszczonym do części zasadniczej) trzeba uzyskać co najmniej 10 punktów. Egzamin trwa 60 minut.

Zadanie 1. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych par formuł, które są równoważne. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie kontrprzykłady.

(a) $p \Rightarrow (q \vee r)$ i $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

(b) $(p \vee q) \Rightarrow r$ i $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

Zadanie 2. Wpisz w prostokąt obok formuły równoważną formułę postaci $\forall x\ \varphi$ lub $\exists x\ \varphi$, gdzie φ nie zawiera kwantyfikatorów.

(a) $(\forall x\ p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \bot$

(b) $\neg(\exists x\ (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow r(x))$

Zadanie 3. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych równości, które zachodzą dla dowolnych zbiorów A, B i C. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie kontrprzykłady.

(a) $A \doteq (B \cup C) = (A \doteq B) \cup (A \doteq C)$

(b) $(A \cup B) \doteq (A \cup C) = (B \doteq C) \setminus A$

Zadanie 4. Niech $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i > n\} \cup \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq 3 + (-1)^n\}$. Wylicz wartość poniższych zbiorów, tzn. wpisz w prostokąt obok wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup$.

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Zadanie 5. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych równości, które zachodzą dla dowolnych funkcji $f : A \to B$ i dowolnych zbiorów $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie kontrprzykłady.

(a) $f^{-1}(f(X)) = X$

(b) $f(f^{-1}(Y)) = Y$

Zadanie 6. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy porządek wzorem

$$f \preceq g \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} f = g \ \vee \ (\exists n \forall k < n \ \ f(k) = g(k) \wedge f(n) < g(n)).$$

Niech $f_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq i \\ n & \text{dla } n = i \end{cases}$ i niech $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej wzory definiujące funkcje będące odpowiednio kresem górnym i dolnym zbioru X lub słowo „NIE”, jeśli odpowiedni kres nie istnieje.

(a) $\sup X$

(b) $\inf X$

Imię i nazwisko:

Zadanie 7. Wpisz w prostokąty definicje jakichkolwiek bijekcji φ i ψ o podanej dziedzinie i przeciwdziedzinie. (a, b) oznacza przedział otwarty a $[a, b)$ przedział lewostronnie domknięty od a do b w $\mathbb{R}$.

(a)

$\varphi : ((0,1) \times (2,3))^{\mathbb{N}} \to (0,2)^{\mathbb{N}} \times (5,6)^{\mathbb{N}}$

(b) $\psi : (\mathbb{Z} \times [0,1))^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Zadanie 8. W prostokąty obok tych zbiorów klauzul, które są sprzeczne, wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności danego zbioru. W pozostałe prostokąty wpisz wartościowanie spełniające dany zbiór.

(a) $\{\neg q,\ \neg r \vee \neg s,\ q \vee s,\ r \vee q\}$

(b) $\{q,\ \neg r \vee \neg s,\ q \vee s,\ r \vee q\}$

Zadanie 9. Wpisz słowo „TAK” w te kratki poniższej tabelki, które odpowiadają parom zbiorów równolicznych. Wpisz „NIE” w kratki odpowiadające parom zbiorów nierównolicznych.

	$[0,1)\times\mathbb{R}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0,1\})$	$\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0,\frac{3}{7}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$	$\{0,1\}^{\{0,1\}}$	$\mathbb{R}\times\mathbb{N}$
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{R}$							

Zadanie 10. Wykaż indukcyjnie, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 5$ zachodzi nierówność $n^2 < 2^n$.

Imię i nazwisko:	
Oddane zadania:	

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

29 stycznia 2007

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -10 do 10 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów. Mniej niż -2 punkty otrzymuje osoba, która umieszcza w swoim rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywe. Rozwiązania, w których nie ma odpowiedzi kompromitująco fałszywych, będą oceniane w skali od -2 do 10 punktów.

Zadanie 11. Jeśli φ jest formułą rachunku zdań to przez $V(\varphi)$ oznaczamy zbiór zmiennych zdaniowych występujących w φ. Niech $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ będą formułami rachunku zdań.

(a) Udowodnij, że $(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i) \rightarrow \psi$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_i \rightarrow \psi$ są tautologiami dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Niech p będzie zmienną zdaniową nie występującą w φ ani w ψ. Udowodnij, że $\varphi \wedge p \rightarrow \psi$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \rightarrow \psi$ jest tautologią.

(c) Udowodnij, że jeśli $\varphi \rightarrow \psi$ jest tautologią, to istnieje taka formuła rachunku zdań ρ, że $V(\rho) = V(\varphi) \cap V(\psi)$ oraz $\varphi \rightarrow \rho$ i $\rho \rightarrow \psi$ są tautologiami.

Zadanie 12. Rozważmy zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. Dla danej funkcji f niech $R_f = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \;\; f(m) = n\}$ oznacza zbiór wartości przyjmowanych przez tę funkcję. W $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relację $\sim$ wzorem

$$f \sim g \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} R_f = R_g.$$

Oczywiście $\sim$ jest relacją równoważności.

(a) Udowodnij, że każda klasa abstrakcji relacji $\sim$ jest albo jednoelementowa, albo ma moc continuum.

(b) Udowodnij, że zbiór ilorazowy (czyli zbiór wszystkich klas abstrakcji) relacji $\sim$ ma moc continuum.

(c) Podaj przykład podziału zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ na continuum rozłącznych zbiorów mocy continuum.

Zadanie 13. Niech A będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad A nazywamy dowolną funkcję $S : A \to \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że $S(x)$ jest liczbą wystąpień elementu x w multizbiorze S). Rodzinę wszystkich multizbiorów nad A oznaczamy $\mathcal{M}(A)$. Jeśli S_1 i S_2 są multizbiorami, to ich przekrój $S_1 \cap S_2$, sumę $S_1 \cup S_2$ i różnicę $S_1 \setminus S_2$ definiujemy wzorami

$$\begin{aligned} (S_1 \cap S_2)(x) &= \min(S_1(x), S_2(x)) \\ (S_1 \cup S_2)(x) &= S_1(x) + S_2(x) \\ (S_1 \setminus S_2)(x) &= \max(S_1(x) - S_2(x), 0). \end{aligned}$$

Mówimy, że S_1 jest podzbiorem S_2 i piszemy $S_1 \subseteq S_2$, jeśli istnieje taki multizbiór X, że $S_1 \cup X = S_2$.

(a) Czy dla dowolnych multizbiorów X, Y, Z nad zbiorem A zachodzi równość

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \setminus Z\ ?$$

(b) Czy dla dowolnych multizbiorów X, Y, Z nad zbiorem A zachodzi równość

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)\ ?$$

(c) Czy $\langle \mathcal{M}(A), \subseteq \rangle$ jest porządkiem? Czy jest to porządek zupełny?

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadanie 14. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym (czyli zbiorem liniowo uporządkowanym, w którym każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy). W zbiorze $A \times A$ porządek leksykograficzny jest zdefiniowany wzorem

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leq_{lex} \langle y_1, y_2 \rangle \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} (x_1 \leq y_1 \land x_1 \neq y_1) \lor (x_1 = y_1 \land x_2 \leq y_2).$$

W zbiorze $X = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem

$$\langle x_1, x_2 \rangle \preceq \langle y_1, y_2 \rangle \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2} \lor \left(\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \land x_1 \leq y_1\right).$$

(a) Udowodnij, że $\langle A \times A, \leq_{lex} \rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym (nie trzeba dowodzić, że relacja $\leq_{lex}$ jest porządkiem, ani że jest to porządek liniowy).

(b) Czy $\langle X, \preceq \rangle$ jest izomorficzny z $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$?

(c) Czy $\langle X, \preceq \rangle$ jest izomorficzny z $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$?

Uzasadnij odpowiedzi.