Wersja: **A**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 20 grudnia 2019

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). W tym zadaniu p jest unarnym, a q jest 0-arnym symbolem relacyjnym. Jeśli formuła $\Big(\forall x\,(p(x) \Rightarrow q)\Big) \Rightarrow \Big((\exists x\, p(x)) \Rightarrow q\Big)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli dla wszystkich funkcji $f : A \to B$ oraz wszystkich zbiorów $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ zachodzi równość $f[X \cup f^{-1}[Y]] = f[X] \cup Y$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ X = \emptyset,\ Y = \{-1\}.$$

Wtedy $f[X \cup f^{-1}[Y]] = \emptyset$, natomiast $f[X] \cup Y = \{-1\}$.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy taką funkcję $f : \mathbb{Z} \times [0, 1) \to \mathbb{R}$, że $f(n, x) = n + 2x$. Jeśli funkcja f ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do f. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

f nie jest różnowartościowa, np. $f(1,\ 0) = f(0,\ 0.5)$

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja antysymetryczna, której przechodnie domknięcie jest relacją zwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$A = \{1, 2, 3\}, R \subseteq A \times A, R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje binarne $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle b, s\rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i soków o tej własności, że wszystkie osoby lubiące sok s bywają tylko w barze b.

$\forall o \in O.\mathit{Lubi}(o, s) \Rightarrow \forall b' \in B.(\mathit{Bywa}(o, b') \Rightarrow b = b')$

Wersja:	Numer indeksu:
A	

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Niech $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będą nieskończonymi rodzinami podzbiorów $\mathbb{N}$. Powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest *spleciona* z rodziną $\mathcal{B}$, jeżeli dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ zachodzą warunki: $A_i \subseteq B_i$ oraz $B_i \subseteq A_{i+1}$.

(a) Podaj przykłady takich rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, że $\mathcal{A}$ jest spleciona z $\mathcal{B}$.

(b) Czy dla dowolnych takich rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, że $\mathcal{A}$ jest splecione z $\mathcal{B}$, zachodzi warunek $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$?

(c) Czy dla dowolnych takich rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, że $\mathcal{A}$ jest splecione z $\mathcal{B}$, zachodzi warunek $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

Zadanie 7 (5 punktów). Na zbiorze $P(\mathbb{N})$ określamy binarną relację *prawie-równości* zbiorów $\approx$ w taki sposób, że $A \approx B$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $A = B$ lub istnieje taka liczba $x \in \mathbb{N}$, że $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\}$. Czy relacja $\approx$ jest (a) zwrotna, (b) symetryczna, (c) przechodnia?

Zadanie 8 (5 punktów). Niech S będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad S nazywamy dowolną funkcję $A : S \to \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że $A(x)$ jest liczbą wystąpień elementu x w multizbiorze A). Jeśli A i B są multizbiorami, to ich przekrój $A \cap B$ i sumę $A \cup B$ definiujemy wzorami:

$$\begin{aligned}(A \cap B)(x) &= \min(A(x), B(x))\\ (A \cup B)(x) &= A(x) + B(x)\end{aligned}$$

Czy dla dowolnych multizbiorów A, B, C zachodzą równości:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:	Numer indeksu:	Grupa[1]:
D		

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 20 grudnia 2019

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli dla wszystkich funkcji $f : A \to B$ oraz wszystkich zbiorów $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ zachodzi równość $f^{-1}[f[X] \cup Y] = X \cup f^{-1}[Y]$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ X = \{-1\},\ Y = \emptyset.$

Wtedy $f^{-1}[f[X] \cup Y] = \{-1, 1\}$, natomiast $X \cup f^{-1}[Y] = \{-1\}$.

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja symetryczna, której przechodnie domknięcie nie jest relacją zwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$A = \{1, 2\}, R \subseteq A \times A, R = \{\langle 1, 1\rangle\}$

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). W tym zadaniu p jest unarnym, a q jest 0-arnym symbolem relacyjnym. Jeśli formuła $\Big((\exists x\, p(x)) \Rightarrow q\Big) \Rightarrow \Big(\forall x\, (p(x) \Rightarrow q)\Big)$ jest tautologią rachunku predykatów, to w prostokąt poniżej wpisz jej dowód w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje binarne $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podają \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle b, o\rangle \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów i osób o tej własności, że wszystkie soki lubiane przez osobę o są podawane tylko w barze b.

$$\forall s \in S. Lubi(o, s) \Rightarrow \forall b' \in B.(Podają(b', s) \Rightarrow b = b')$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy taką funkcję $f : \mathbb{Z} \times [0, 1) \to \mathbb{R}$, że $f(n, x) = 2n + 2$. Jeśli funkcja f ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do f. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

f nie jest „na", np. liczba 1 nie jest wartością f

Wersja: **D**

Numer indeksu:

Grupa[1]:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	nie chodzę na ćwiczenia

Zadanie 6 (5 punktów). Na zbiorze $P(\mathbb{N})$ określamy binarną relację *prawie-zawierania* zbiorów $\underset{\sim}{\subset}$ w taki sposób, że $A \underset{\sim}{\subset} B$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $A \subseteq B$ lub istnieje taka liczba $x \in \mathbb{N}$, że $A \setminus \{x\} \subseteq B \setminus \{x\}$. Czy relacja $\underset{\sim}{\subset}$ jest (a) zwrotna, (b) symetryczna, (c) przechodnia?

Zadanie 7 (5 punktów). Niech $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będą nieskończonymi rodzinami podzbiorów $\mathbb{N}$. Powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest *wpleciona* w rodzinę $\mathcal{B}$, jeżeli dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ zachodzą warunki: $A_i \supsetneq B_i$ oraz $B_i \supsetneq A_{i+1}$.

(a) Podaj przykłady takich rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, że $\mathcal{A}$ jest wpleciona w $\mathcal{B}$.

(b) Czy dla dowolnych takich rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, że $\mathcal{A}$ jest wplecione w $\mathcal{B}$, zachodzi warunek $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$?

(c) Czy dla dowolnych takich rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, że $\mathcal{A}$ jest wplecione w $\mathcal{B}$, zachodzi warunek $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech S będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad S nazywamy dowolną funkcję $A : S \to \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że $A(x)$ jest liczbą wystąpień elementu x w multizbiorze A). Jeśli A i B są multizbiorami, to ich przekrój $A \cap B$, sumę $A \cup B$ i różnicę $A \setminus B$ definiujemy wzorami:

$$\begin{aligned}(A \cap B)(x) &= \min(A(x), B(x))\\ (A \cup B)(x) &= A(x) + B(x)\\ (A \setminus B)(x) &= \max(A(x) - B(x), 0).\end{aligned}$$

Czy dla dowolnych multizbiorów A, B, C zachodzą równości:

(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

(b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?

Podaj odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.