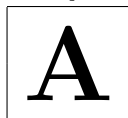


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 11 stycznia 2019

Czas pisania: 30 + 60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Jeśli istnieje taka surjekcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  oraz rodzina zbiorów  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , że  $A_i \neq A_j$  oraz  $f[A_i] = f[A_j]$  dla wszystkich takich  $i, j \in \mathbb{N}$ , że  $i \neq j$ , to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką surjekcję i rodzinę zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka surjekcja i rodzina nie istnieją.

**Zadanie 2 (2 punkty).** Rozważmy relację binarną  $\sim$  zdefiniowaną na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \bmod 3 = g(n) \bmod 5.$$

Jeśli relacja  $\sim$  jest przechodnia, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PRZECHODNIA”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Rozważmy relację równoważności  $\sim$  zdefiniowaną na zbiorze  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  wzorem

$$X \sim Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ jest skończony.}$$

Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa  $f : \mathbb{N} \rightarrow [\emptyset]_{\sim}$ , to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej funkcji. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Niech  $h(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Na zbiorze  $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$  wprowadzamy relację równoważności  $\simeq$  wzorem

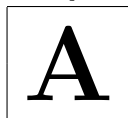
$$X \simeq Y \stackrel{\text{df}}{\iff} \{h(x) \mid x \in X\} = \{h(y) \mid y \in Y\}.$$

W prostokąt poniżej wpisz wszystkie klasy abstrakcji relacji  $\simeq$ .

**Zadanie 5 (2 punkty).** Niech  $\underline{n}$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oznacza zbiór  $\{0, \dots, n-1\}$  i niech  $\mathcal{M}$  będzie rodziną zbiorów  $\{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$ . Dla każdego zbioru w poniższej tabelce wpisz w odpowiednie pole równoliczny z nim zbiór z rodziny  $\mathcal{M}$  lub słowo „NIE”, jeśli taki zbiór nie istnieje.

$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}^{\{1, 2\}}$	$\mathbb{N}^0$	$\mathcal{P}(\{1, 2\}) \setminus \{0\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Z})$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$
$\mathbb{N}$	<u>3</u>						

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

**Zadanie 6 (5 punktów).** Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że zbiory  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  oraz  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  są równoliczne.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Niech  $P_A$  oznacza zbiór wszystkich relacji przechodnich na zbiorze  $A$ . Na zbiorze  $P_A$  definiujemy relację  $\simeq$  następująco:

$$R \simeq S \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{relacja } R \cup S \text{ jest przechodnia.}$$

Czy dla każdego zbioru  $A$  relacja  $\simeq$  jest przechodnia? Podaj dowód albo kontrprzykład.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest *prawie okresowa*, jeśli

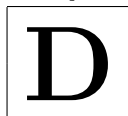
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}. k > 0 \wedge \forall n > n_0 f(n+k) = f(n).$$

Czy dla dowolnych prawie okresowych funkcji  $f$  i  $g$  funkcja  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zdefiniowana wzorem  $h(n) = f(n) + g(n)$  dla  $n \in \mathbb{N}$  jest funkcją prawie okresową? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli usuniemy założenie, że  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest prawie okresowa? Podaj dowody albo kontrprzykłady.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 11 stycznia 2019

Czas pisania: 30 + 60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Rozważmy relację binarną  $\sim$  zdefiniowaną na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \bmod 3 = g(n) \bmod 5.$$

Jeśli relacja  $\sim$  jest symetryczna, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „SYMETRYCZNA”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

**Zadanie 2 (2 punkty).** Rozważmy relację równoważności  $\sim$  zdefiniowaną na zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{zbiór } \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\} \text{ jest skończony}$$

oraz funkcję  $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  daną wzorem  $z(n) = 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa  $f : \mathbb{N} \rightarrow [z]_{\sim}$ , to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej funkcji. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 3 (2 punkty).** Jeśli istnieje taka iniekcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  oraz rodzina zbiorów  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , że  $A_i \neq A_j$  oraz  $f^{-1}[A_i] = f^{-1}[A_j]$  dla wszystkich takich  $i, j \in \mathbb{N}$ , że  $i \neq j$ , to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką iniekcję i rodzinę zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka iniekcja i rodzina nie istnieją.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Niech  $\underline{n}$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oznacza zbiór  $\{0, \dots, n-1\}$  i niech  $\mathcal{M}$  będzie rodziną zbiorów  $\{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$ . Dla każdego zbioru w poniższej tabelce wpisz w odpowiednie pole równoliczny z nim zbiór z rodziny  $\mathcal{M}$  lub słowo „NIE”, jeśli taki zbiór nie istnieje.

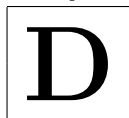
$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\{1,2,3\}$	$\underline{0}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q})$	$\{\underline{0}\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\})$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\{1,2\}^{\{1,2,3\}}$
$\mathbb{N}$	$\underline{3}$						

**Zadanie 5 (2 punkty).** Niech  $r(n)$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oznacza resztę z dzielenia liczby  $n$  przez 2. Na zbiorze  $\mathcal{P}(\{0,1,2\})$  wprowadzamy relację równoważności  $\simeq$  wzorem

$$X \simeq Y \iff \{r(x) \mid x \in X\} = \{r(y) \mid y \in Y\}.$$

W prostokąt poniżej wpisz wszystkie klasy abstrakcji relacji  $\simeq$ .

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa<sup>1</sup>:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

**Zadanie 6 (5 punktów).** Niech  $P_A$  oznacza zbiór wszystkich relacji przechodnich na zbiorze  $A$ . Na zbiorze  $P_A$  definiujemy relację  $\simeq$  następująco:

$$R \simeq S \stackrel{\text{df}}{\iff} \text{relacja } R;S \text{ jest przechodnia.}$$

Czy dla każdego zbioru  $A$  relacja  $\simeq$  jest przechodnia? Podaj dowód albo kontrprzykład.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że zbiory  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\{0,1\}}$  oraz  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  są równoliczne.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest *prawie okresowa*, jeśli

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}. k > 0 \wedge \forall n > n_0 \ f(n+k) = f(n).$$

Czy dla dowolnych prawie okresowych funkcji  $f$  i  $g$  funkcja  $gf$  jest funkcją prawie okresową? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli usuniemy założenie, że  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest prawie okresowa? Podaj dowody albo kontrprzykłady.

---

<sup>1</sup>Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.