Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część licencjacka)

2 lutego 2011

Zadanie 1 (1 punkt). Jeśli istnieje taki zbiór X, że $\mathbb{Q} \subseteq X$ oraz $|X| \leq |\mathbb{N}|$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 2 (1 punkt). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ zdefiniowaną wzorem $f(X) = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \{0, 1\} \mid 2m+n \in X\}$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 3 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz liczbę różnych relacji częściowego porządku na (dwuelementowym) zbiorze $\{a, b\}$.

Zadanie 4 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz liczbę elementów minimalnych w porządku $\langle \mathcal{P}(\{0,1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq \rangle$.

Zadanie 5 (1 punkt). Jeśli istnieją takie relacje porządku R i S na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, że $R \cup S$ nie jest relacją porządku, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 6 (1 punkt). Jeśli porządki $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z} \times [0,1), \leq_{lex} \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 7 (1 punkt). Rozważmy rodzinę zbiorów $S = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\}\}$. Jeśli w zbiorze uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ rodzina S ma kres górny, to w prostokąt oznaczony $\sup S$ poniżej wpisz wyliczoną wartość tego kresu; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE". Jeśli rodzina S ma kres dolny, to w prostokąt oznaczony $\inf S$ poniżej wpisz wyliczoną wartość tego kresu; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$\sup S$

$\inf S$

Zadanie 8 (1 punkt). Jeśli istnieje taka relacja $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, że $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ jest regularnym porządkiem, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 9 (1 punkt). Niech $R = \{\langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ zdefiniowaną wzorem $f(X) = R \cup XX$. Jeśli funkcja f ma najmniejszy punkt stały, to w prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość tego punktu stałego. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Imię i nazwisko:

Zadanie 10 (1 punkt). W tym zadaniu f, g i h są symbolami funkcyjnymi, natomiast x, y i z są zmiennymi. Jeśli isnieje inny niż $\{y/h(z),\ x/g(h(z))\}$ unifikator termów $f(h(z), x)$ i $f(y, g(y))$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki unifikator. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 11 (1 punkt). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg s \vee r,\ \neg q \vee s,\ p \vee q,\ \neg r \vee \neg s,\ \neg p \vee q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 12 (1 punkt). Powiemy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są pewnymi zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall n (\forall k\ k < n \Rightarrow k \in X) \Rightarrow n \in X$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

2 lutego 2011

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -2 do 16 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 13. Rozważmy następujący porządek $\preceq$ w rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Dla zbiorów $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zachodzi $X \preceq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$X = Y \text{ lub } \min(X \dot{-} Y) \in Y,$$

gdzie $\dot{-}$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, a $\min(A)$ jest najmniejszą w sensie naturalnego porządku liczbą w zbiorze A. Niech $A_i = \{i\}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$.

(a) Czy rodzina zbiorów $\{A_i \mid i \geq 2010\}$ ma w $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$ kres górny? Uzasadnij odpowiedź.

(b) Czy rodzina zbiorów $\{A_i \mid i \geq 2010\}$ ma w $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$ kres dolny? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 14. Rozważmy dowolną funkcję $f : X \to X$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne.

- f jest różnowartościowa,
- istnieje dokładnie jedna taka funkcja $g : X \to X$, że $fg = f$.

Zadanie 15. Rozważmy dwa izomorficzne porządki $\mathcal{A} = \langle A, \leq_A \rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, \leq_B \rangle$. Traktujemy te porządki jak struktury nad sygnaturą bez symboli funkcyjnych i z jednym symbolem relacyjnym $\leq$, w których relacje $\leq_A$ i $\leq_B$ są interpretacjami symbolu $\leq$.

(a) Udowodnij, że formuła $\forall x \exists y\ x \leq y$ jest prawdziwa w strukturze $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w strukturze $\mathcal{B}$.

(b) Udowodnij, że dla każdej formuły φ logiki I rzędu, w której nie występują symbole funkcyjne i $\leq$ jest jedynym symbolem relacyjnym zachodzi równoważność

$$\mathcal{A} \models \varphi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{B} \models \varphi$$