

Wersja:

B

Numer indeksu:

000000

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 11 grudnia 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(\langle x, y \rangle) = \frac{x^2+y}{2}$. Łatwo zauważyć, że wtedy $f[(0, 1) \times (0, 1)] = (0, 1)$. Jeśli istnieje inny niż $(0, 1) \times (0, 1)$ zbiór, którego obrazem przez funkcję f jest przedział otwarty $(0, 1)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz słowa “NIE ISTNIEJE”.

$$[0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{7}{4})$$

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $R = \{\langle n, n + 42 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $S = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq 7n\}$. Nie używając symboli \exists, \forall wpisz w prostokąt poniżej taką formułę φ , że $R;S = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$.

$$m + 42 \leq 7n$$

Zadanie 3 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B i soków S oraz relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podajq \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób nie bywających w żadnym barze podającym sok *Malinowy*.

$$x \in O \wedge \forall b \in B (Podajq(b, 'Malinowy') \Rightarrow \neg Bywa(x, b))$$

Zadanie 4 (2 punkty). Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m}$ oznacza zbiór wszystkich takich funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że $f(n) = m$. Jeśli zbiór $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$ jest pusty, to w prostokąt poniżej wpisz słowo “PUSTY”. W przeciwnym przypadku wpisz dowolną funkcję, która należy do tego zbioru.

PUSTY

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz wszystkie zwrotne i symetryczne relacje na dwuelementowym zbiorze $\{a, b\}$

$$R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}, R_2 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

B

Numer indeksu:

000000

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Niech funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie zdefiniowana wzorem $f(X) = \{2x + y \mid \langle x, y \rangle \in X\}$. Udowodnij, że f jest bijekcją.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech R i S będą zwrotnymi relacjami na zbiorze A . Udowodnij, że jeśli $R \cup S$ jest relacją równoważności to relacja $R;S$ jest symetryczna.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla funkcji $f : A \rightarrow A$ definiujemy $f^0(x) = x$ oraz $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz wszystkich $x \in A$. Udowodnij, że dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$ i wszystkich $x \in A$ zachodzi równość $f^{i+j}(x) = f^i(f^j(x))$.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

C

Numer indeksu:

000000

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 2, 11 grudnia 2015

czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m}$ oznacza zbiór wszystkich takich funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że $f(n) = m$. Jeśli zbiór $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,m}$ jest pusty, to w prostokąt poniżej wpisz słowo “PUSTY”. W przeciwnym przypadku wpisz dowolną funkcję, która należy do tego zbioru.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = 42$$

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $R = \{\langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $S = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m+n=42\}$. Nie używając symboli \exists, \forall wpisz w prostokąt poniżej taką formułę φ , że $R;S = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$.

$$m+n=41$$

Zadanie 3 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz wszystkie zwrotne i słabo antysymetryczne relacje na dwuelementowym zbiorze $\{a, b\}$

$$R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}, \quad R_2 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle\}, \quad R_3 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$$

Zadanie 4 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(\langle x, y \rangle) = x \cdot y$. Łatwo zauważyć, że wtedy $f[(0, 1) \times (0, 1)] = (0, 1)$. Jeśli istnieje inny niż $(0, 1) \times (0, 1)$ zbiór, którego obrazem przez funkcję f jest przedział otwarty $(0, 1)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz słowa “NIE ISTNIEJE”.

$$\{2\} \times (0, \frac{1}{2})$$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O , barów B i soków S oraz relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podaja \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ , że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które nie lubią żadnego soku podawanego w barze *Jagódka*.

$$x \in O \wedge \forall s \in S \ (Podaja('Jagodka', s) \Rightarrow \neg Lubi(o, s))$$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:

C

Numer indeksu:

000000

Grupa¹:

8–10 s.104	8–10 s.105	8–10 s.139
8–10 s.140		
10–12 s.104	10–12 s.139	10–12 s.140

Zadanie 6 (5 punktów). Dla funkcji $f : A \rightarrow A$ definiujemy funkcję $F : A \times \mathbb{N} \rightarrow A$ w następujący sposób: $F(x, 0) = x$ oraz $F(x, n + 1) = f(F(x, n))$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz wszystkich $x \in A$. Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $x \in A$ zachodzi równość $f(F(x, n)) = F(f(x), n)$.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech funkcja $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\{a,b\}}$ będzie zdefiniowana wzorem

$$F(m, n) : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (F(m, n))(x) = \begin{cases} m, & \text{gdy } x = a \\ n, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Udowodnij, że F jest bijekcją.

Zadanie 8 (5 punktów). Niech R i S będą symetrycznymi relacjami na zbiorze A . Udowodnij, że jeśli relacja $R;S$ jest symetryczna to $R;S = S;R$.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.