Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

1 lutego 2019
czas pisania: 90 min

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieją takie spełnialne formuły φ i ψ, że formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest spełnialna a formuła $(\neg\varphi) \Leftrightarrow \psi$ jest sprzeczna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich formuł. w przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie formuły nie istnieją.

$\varphi = p$, $\psi = p$

Zadanie 2 (2 punkty). Nie używając spójnika „$\Rightarrow$” wpisz w prostokąt poniżej formułę w negacyjnej postaci normalnej równoważną formule $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow \neg r)$.

$\neg p \vee (q \wedge r)$

Zadanie 3 (2 punkty). Czy formuła $p \vee q$ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{q \Rightarrow \neg p, \neg p \Rightarrow \neg q\}$? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz dowód jej poprawności.

Nie. Wartościowanie σ t.że $\sigma(p) = \mathsf{F}, \sigma(q) = \mathsf{F}$ spełnia ten zbiór a nie spełnia $p \vee q$.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieją niepuste i rozłączne zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N}$ spełniające podany warunek, to w odpowiedni prostokąt wpisz dowolne takie zbiory. W przeciwnym razie wpisz słowo NIE. Symbol $\subsetneq$ oznacza ścisłe zawieranie: $X \subsetneq Y$ jest równoważne $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.

(a) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ NIE

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subsetneq \mathcal{P}(A \cup B)$ $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

(c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \supsetneq \mathcal{P}(A \cup B)$ NIE

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli istnieje taka rodzina $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ podzbiorów $\mathbb{N}$, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zbiór A_i jest nieskończony, $\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j = \emptyset$ oraz $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$, to w prostokąt niżej wpisz przykład dowolnej takiej rodziny. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka rodzina nie istnieje.

$A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq i\}$

Zadanie 6 (2 punkty). W podany prostokąt wpisz liczbę takich relacji równoważności R na zbiorze $\{a, b, c, d, e\}$, że $\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \notin R \wedge \langle c, d\rangle \notin R \wedge \langle b, d\rangle \notin R$. $\boxed{4}$

Zadanie 7 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$A \dot{-} B \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie symboli matematycznych) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów X, Y, Z zachodzi inkluzja $X \dot{-} Z \subseteq (X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy wprost. Weźmy dowolne zbiory X, Y, Z oraz element $\boxed{x \in X \dot{-} Z}$. Z definicji różnicy symetrycznej mamy $\boxed{x \in X \setminus Z}$ lub $\boxed{x \in Z \setminus X}$. Rozważmy dwa przypadki:

(1) $\boxed{x \in X \setminus Z}$. Z definicji różnicy zbiorów mamy $\boxed{x \in X}$ oraz $\boxed{x \notin Z}$. Rozważmy dwa przypadki. Przypadek (1a): $\boxed{x \in Y}$. Z definicji różnicy zbiorów mamy $\boxed{x \in Y \setminus Z}$, a stąd i z definicji różnicy symetrycznej $\boxed{x \in Y \dot{-} Z}$. Zatem $\boxed{x \in (X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)}$. Przypadek (1b): $\boxed{x \notin Y}$. Z definicji różnicy zbiorów mamy $\boxed{x \in X \setminus Y}$, a stąd i z definicji różnicy symetrycznej $\boxed{x \in X \dot{-} Y}$. Zatem $\boxed{x \in (X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)}$.

(2) $\boxed{x \in Z \setminus X}$. Tutaj dowód jest symetryczny do przypadku (1): wystarczy zamienić miejscami wszystkie wystąpienia $\boxed{X}$ i $\boxed{Z}$.

Zadanie 8 (2 punkty). Dla zbiorów A, B i $C \subseteq A \times B$ definiujemy $A_C = \{a \in A \mid \exists b{\in}B\ \langle a, b\rangle \in C\}$ oraz $B_C = \{b \in B \mid \exists a{\in}A\ \langle a, b\rangle \in C\}$. Czy dla dowolnych takich zbiorów zachodzi równość $A_C \times B_C = C$? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio dowód lub kontrprzykład.

$$\boxed{A = B = \mathbb{N},\ C = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}}$$

Zadanie 9 (2 punkty). Niech R będzie taką relacją binarną na zbiorze A, że $R;R = R$. Czy z tego wynika, że R jest przechodnia? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio dowód lub kontrprzykład.

> Tak. Załóżmy, że $R;R = R$, weźmy dowolne $x, y, z \in A$ i załóżmy, że xRy oraz yRz. Wtedy z definicji złożenia relacji $xR;Rz$ a stąd i z równości $R;R = R$ dostajemy xRz.

Zadanie 10 (2 punkty). Rozważmy relację $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość przechodniego domknięcia relacji R.

$$\boxed{\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}}$$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy zbiór M miast i relację $P \subseteq M \times M$ informującą o bezpośrednich połączeniach kolejowych pomiędzy miastami. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ w negacyjnej postaci normalnej, że $\{\langle m_1, m_2\rangle \in M \times M \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz par miast, między którymi nie istnieje połączenie z mniej niż dwiema przesiadkami.

$$\neg P(m_1, m_2) \wedge \forall m. \neg P(m1, m) \vee \neg P(m, m_2)$$

Zadanie 12 (2 punkty). Niech V będzie niepustym zbiorem zmiennych zdaniowych, a φ spełnialną formułą rachunku zdań zawierającą wyłącznie zmienne ze zbioru V. Niech ψ będzie formułą otrzymaną z φ przez zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej p literałem $\neg p$, dla wszystkich zmiennych $p \in V$. Niech $\mathcal{V}_\varphi$ będzie zbiorem wszystkich wartościowań $\sigma : V \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ spełniających formułę φ, a $\mathcal{V}_\psi$ zbiorem wszystkich wartościowań spełniających formułę ψ.

Jeśli dla wszystkich formuł φ istnieje bijekcja pomiędzy zbiorami $\mathcal{V}_\varphi$ i $\mathcal{V}_\psi$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$F : \mathcal{V}_\varphi \to \mathcal{V}_\psi, \qquad F(\sigma) : V \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}, \qquad (F(\sigma))(p) = \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{jeśli } \sigma(p) = \mathsf{F} \\ \mathsf{F}, & \text{wpp} \end{cases}$$

Zadanie 13 (2 punkty). Niech $F : \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ będzie dana wzorem $(F(f, g))(n) = f(n) + g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli funkcja F ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

F nie jest różnowartościowa. Np dla f i g zdefiniowanych wzorami $f(n) = 0$ i $g(n) = 1$ mamy $\langle f, g\rangle \neq \langle g, f\rangle$ oraz $F(f, g) = F(g, f)$.

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $f : A \to B$ i $g : B \to C$ będą takimi funkcjami, że złożenie gf jest „na". Załóżmy dodatkowo, że zbiory A, B i C są równoliczne. Czy z tego wynika, że funkcja f jest „na"? W prostokąt poniżej wpisz odpowiedź oraz odpowiednio dowód lub kontrprzykład.

Nie. $A = B = C = \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, $g(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dla $n \in \mathbb{N}$

Zadanie 15 (2 punkty). Niech $F_f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $F_f(A) = f^{-1}[A]$.

(a) Podaj przykład różnowartościowej funkcji f, dla której F_f **jest** funkcją różnowartościową lub wpisz słowo „NIE", jeśli taki przykład nie istnieje.

$$f(x) = x$$

(b) Podaj przykład różnowartościowej funkcji f, dla której F_f **nie jest** funkcją różnowartościową lub wpisz słowo „NIE", jeśli taki przykład nie istnieje.

$$f(x) = x + 1$$

Zadanie 16 (2 punkty). Na zbiorach $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relacje równoważności $\simeq_1$ i $\simeq_2$ wzorami $f \simeq_1 g \stackrel{\text{df}}{\iff} \lim_{n\to\infty}(f(n)-g(n)) = 0$ oraz $f \simeq_2 g \stackrel{\text{df}}{\iff} \exists n_0 \forall n{>}n_0.\ f(n) = g(n)$. Niech $z_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $z_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ będą takimi funkcjami, że $z_{\mathbb{N}}(n) = 0$ i $z_{\mathbb{Q}}(n) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moce zbiorów klas abstrakcji relacji $\simeq_1$ i $\simeq_2$ oraz moce klas abstrakcji funkcji $z_{\mathbb{N}}$ i $z_{\mathbb{Q}}$.

$\lvert\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{/\simeq_1}\rvert = \boxed{\mathfrak{c}}$	$\lvert\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{/\simeq_2}\rvert = \boxed{\mathfrak{c}}$	$\lvert[z_{\mathbb{N}}]_{\simeq_1}\rvert = \boxed{\aleph_0}$	$\lvert[z_{\mathbb{N}}]_{\simeq_2}\rvert = \boxed{\aleph_0}$
$\lvert\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{/\simeq_1}\rvert = \boxed{\mathfrak{c}}$	$\lvert\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{/\simeq_2}\rvert = \boxed{\mathfrak{c}}$	$\lvert[z_{\mathbb{Q}}]_{\simeq_1}\rvert = \boxed{\mathfrak{c}}$	$\lvert[z_{\mathbb{Q}}]_{\simeq_2}\rvert = \boxed{\aleph_0}$

Zadanie 17 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : A \times B \to C$ i $g : C \to B^A$ oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne, jeśli dla każdej użytej w nim funkcji (i dla dowolnych zbiorów A, B i C) jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $g(b)$ nie jest poprawne, bo nie dla wszystkich zbiorów A, B i C jest $b \in C$. Jeśli wyrażenie jest poprawne, to przez jego *typ* rozumiemy zbiór do którego należy element oznaczany przez to wyrażenie. Np. typem wyrażenia $g(c)$ jest B^A. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne, wpisz odpowiedni typ wyrażenia. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE". Operator $\circ$ oznacza składanie funkcji.

$f(a,b)$	C	$g(f(a,b))(c)$	NIE	$(g(c))(b)$	NIE
$g(b)$	NIE	$(g\circ f)(a,b)$	B^A	$\big((g\circ f)(a,b)\big)(a)$	B

Zadanie 18 (2 punkty). Na zbiorze $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $f \preceq g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n\ f(n) {\leq} g(n)$. W prostokąt poniżej wpisz izomorfizm pomiędzy porządkami $\langle\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \preceq\rangle$ oraz $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ lub uzasadnienie, że taki izomorfizm nie istnieje.

$$F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad F(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 1\}$$

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli istnieje niepusty porządek regularny $\langle P, \leq\rangle$, w którym każdy element ma następnik i każdy element ma poprzednik, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego porządku. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, że taki porządek nie istnieje.

Weźmy dowolny element $x_0 \in P$ i dla $n \in \mathbb{N}$ niech x_{n+1} będzie poprzednikiem x_n.
Wtedy zbiór $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f, g i h są symbolami funkcyjnymi, a, b są symbolami stałych, natomiast u, x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(g(x,y),z) \stackrel{?}{=} f(u,a)$	$[u/g(x,y), z/a]$	$f(g(x,x),x) \stackrel{?}{=} f(y,a)$	$[x/a,\ y/g(a,a)]$
$g(x,f(z,u)) \stackrel{?}{=} g(y,a)$	NIE	$f(f(x,b),y) \stackrel{?}{=} f(x,f(z,b))$	NIE

Numer indeksu: WZORCOWY

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

1 lutego 2019
czas pisania: 120 min

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów.[1]

Funkcja $f : A \to B$ jest *quasi-bijekcją*, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- istnieje co najwyżej jeden taki element $b \in B$, że dla żadnego $a \in A$ nie zachodzi $f(a) = b$, oraz
- istnieje co najwyżej jeden taki dwuelementowy zbiór $\{a_1, a_2\} \subseteq A$, że $f(a_1) = f(a_2)$.

Dla ustalonego zbioru X definiujemy relację binarną $\sim_q$ na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ w następujący sposób:

$$A \sim_q B \overset{\text{df}}{\iff} \text{istnieje quasi-bijekcja } f : A \to B.$$

Ponadto zwrotne, symetryczne i przechodnie domknięcie relacji $\sim_q$ oznaczamy $\sim_q^{\#}$.

Zadanie 21. Czy relacja $\sim_q$ jest

(a) zwrotna?
(b) symetryczna?
(c) przechodnia?

Czy którakolwiek z odpowiedzi zmieni się, jeśli relację $\sim_q$ ograniczymy do zbioru $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$? Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić, tzn. podać odpowiednie dowody lub kontrprzykłady.

Zadanie 22. Udowodnij, że jeśli A i B są skończonymi podzbiorami zbioru X, to $A \sim_q^{\#} B$.

Zadanie 23. Udowodnij, że jeśli A jest skończonym, a B nieskończonym podzbiorem X, to $A \not\sim_q^{\#} B$.
Wskazówka: Przydatny może się okazać lemat z zadania 7, mówiący że dla dowolnych zbiorów X, Y, Z zachodzi inkluzja $X \doteq Z \subseteq (X \doteq Y) \cup (Y \doteq Z)$. Jeśli zdecydujesz się z niego skorzystać, nie musisz go dowodzić.

[1] Algorytm oceniania oddanych zadań jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów, a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Logika dla informatyków 2018

Rozwiązanie zadania 22 z egzaminu zasadniczego

1 lutego 2019

Twierdzenie 1. *Niech X będzie dowolnym zbiorem. Dla dowolnych skończonych podzbiorów $A, B \subseteq X$ zachodzi $A \sim_q^{\#} B$.*

Przypomnijmy definicje: $\underline{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oznacza zbiór $\{i \in \mathbb{N} : i < n\}$. Zbiór A jest skończony, jeśli istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $A \sim \underline{n}$. Relacja $\sim_q^{\#}$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację $\sim_q$. Mamy:

Lemat 1. *Niech X będzie dowolnym zbiorem, a $n, m \in \mathbb{N}$ takimi liczbami naturalnymi, że $n \leq m$. Dla dowolnych takich podzbiorów $A, B \subseteq X$, że $A \sim \underline{n}$ i $B \sim \underline{m}$ zachodzi $A \sim_q^{\#} B$.*

Dowód. Niech zbiór X i $n \in \mathbb{N}$ będą dowolne. Dowód przeprowadzimy przez indukcję[1] względem $m \geq n$.

Podstawa indukcji: $m = n$. Niech $A, B \subseteq X$ będą takie, że $A \sim \underline{n}$ i $B \sim \underline{m} = \underline{n}$. Relacja równoliczności jest przechodnia, zatem $A \sim B$, a więc istnieje bijekcja $f : A \to B$. Wprost z definicji każda bijekcja jest quasi-bijekcją, zatem istnieje quasi-bijekcja $f : A \to B$ i $A \sim_q B$. Stąd $A \sim_q^{\#} B$.

Niech $m \geq n$ będzie dowolne. Założenie indukcyjne: dla dowolnych takich podzbiorów $A, B \subseteq X$, że $A \sim \underline{n}$ i $B \sim \underline{m}$ zachodzi $A \sim_q^{\#} B$. Teza indukcji: dla dowolnych takich podzbiorów $A, B \subseteq X$, że $A \sim \underline{n}$ i $B \sim \underline{m+1}$ zachodzi $A \sim_q^{\#} B$. Dowód tezy indukcji: skoro $B \sim \underline{m+1}$, to istnieje bijekcja $f : \underline{m+1} \to B$. Niech $B' = f[\underline{m}] = B \setminus \{f(m)\}$. Funkcja $f\restriction_{\underline{m}} : \underline{m} \to B'$ jest bijekcją, więc $B' \sim \underline{m}$. Stąd i z założenia indukcyjnego $A \sim_q^{\#} B'$. Funkcja $g : B' \to B$ dana wzorem $g(b) = b$ dla $b \in B'$ jest różnowartościowa, a jedynym elementem zbioru B, który nie należy do jej obrazu, jest $f(m)$. Zatem funkcja g jest quasi-bijekcją i $B' \sim_q B$. Zatem $B' \sim_q^{\#} B$. Relacja $\sim_q^{\#}$ jest przechodnia, więc skoro $A \sim_q^{\#} B'$ i $B' \sim_q^{\#} B$, to $A \sim_q^{\#} B$.

Dowód twierdzenia. Niech X będzie dowolny i niech $A, B \subseteq X$ będą dowolnymi skończonymi zbiorami. Istnieją więc takie liczby naturalne $n, m \in \mathbb{N}$, że $A \sim \underline{n}$ i $B \sim \underline{m}$. Jeśli $n \leq m$, to teza twierdzenia wynika wprost z lematu 1. W przeciwnym przypadku z lematu 1 mamy $B \sim_q^{\#} A$. Ponieważ relacja $\sim_q^{\#}$ jest symetryczna, to $A \sim_q^{\#} B$.

[1] Korzystamy tu z następującej wersji zasady indukcji: Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $W \subseteq \mathbb{N}$ jest takim zbiorem, że $n \in W$ oraz $\forall m \geq n\ (m \in W \Rightarrow m+1 \in W)$, to $\forall m \geq n\ (m \in W)$.