Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część licencjacka)

20 lutego 2008

Za każde z dziesięciu poniższych zadań można otrzymać od 0 do 2 punktów. Aby zdać tę część egzaminu (być dopuszczonym do części zasadniczej) trzeba uzyskać co najmniej 10 punktów. Egzamin trwa 60 minut.

Zadanie 1. Podaj formułę równoważną formule $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ i mającą:

(a) koniunkcyjną postać normalną

(b) dysjunkcyjną postać normalną

Zadanie 2. Mówimy, że formuła jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są pewnymi zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami ($\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. W prostokąty poniżej wpisz formuły w preneksowej postaci normalnej równoważne podanym formułom.

(a) $(\neg \exists x \exists y \ \ (n = x \cdot y \wedge x \neq 1 \wedge y \neq 1)) \wedge \exists z \ \ n = z + 2$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Zadanie 3. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych równości, które zachodzą dla dowolnych zbiorów A, B i C. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie kontrprzykłady.

(a) $A \dot{-} (B \setminus C) = (A \dot{-} B) \setminus (A \dot{-} C)$

(b) $(B \dot{-} C) \setminus A = ((B \setminus A) \setminus C) \cup ((C \setminus A) \setminus B)$

Zadanie 4.

(a) Dla $s, t \in \mathbb{R}$ niech $A_{s,t} = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq x \wedge x \leq t\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość poniższego zbioru, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup$.

$\bigcap_{s<0} \bigcup_{t>0} A_{s,t}$

(b) Niech $\leq_{lex}$ będzie porządkiem leksykograficznym w zbiorze $[0,1] \times [0,1]$, gdzie $[0,1]$ oznacza przedział domknięty od 0 do 1 w zbiorze liczb rzeczywistych, czyli $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \wedge x \leq 1\}$. Niech $X = \{\langle x, x\rangle \mid 0 < x \wedge x < 1\}$. Wpisz w prostokąty poniżej odpowiednio kres górny i dolny zbioru X lub słowo „NIE”, jeśli odpowiedni kres nie istnieje.

$\sup X$ $\qquad$ $\inf X$

Zadanie 5. W tym zadaniu x, y są zmiennymi, natomiast a, b, f, g, p symbolami funkcyjnymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

(a) $p(x, y) \stackrel{?}{=} p(g(y), f(x))$

(b) $g(f(g(x, a)), b) \stackrel{?}{=} g(f(y), x)$

Zadanie 6. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb parzystych a $\preceq$ porządek w zbiorze $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\{0,1\}$zadany wzorem $f \preceq g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n{\in}\mathbb{N} f(n) \leq g(n)$. W prostokąty obok tych spośród podanych niżej par zbiorów uporządkowanych, które są izomorficzne, wpisz odpowiednie izomorfizmy. W pozostałe prostokąty wpisz uzasadnienie, dlaczego nie istnieje izomorfizm pomiędzy podanymi porządkami.

(a) $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ i $\langle \mathcal{P}(\mathbb{P}), \subseteq\rangle$

(b) $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$ i $\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \preceq\rangle$

Imię i nazwisko:

Zadanie 7.

(a) Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee \neg q \vee r,\ \neg s \vee q,\ s,\ \neg r,\ p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

(b) W prostokąt poniżej wpisz definicję dowolnej funkcji różnowartościowej $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{0,1\}^N \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ lub słowo „NIE", jeśli taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 8. Rozważmy alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definiujemy funkcję $f : \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ wzorem $f(X) = \{\varepsilon\} \cup X \cup \{abw \mid w \in X\}$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio najmniejszy (oznaczony μf) i największy (oznaczony νf) punkt stały funkcji f, lub słowo „NIE" jeśli odpowiedni punkt stały nie istnieje.

(a) μf

(b) νf

Zadanie 9. Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$	$\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$	$\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$	$\{\pi\}^{\mathbb{R}}$	$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$	$\mathbb{N}^{2008}$
$\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\{3,4,5\}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$	$\mathbb{N}^{\{0,1\}} \times \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\mathbb{R}^{\{2008\}}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{N}$

Zadanie 10. Rozważmy dowolny zbiór X i dowolną rodzinę zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wykaż indukcyjnie, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi inkluzja

$$X \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} (X \setminus A_i)$$