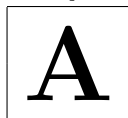


Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 16 listopada 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q, p \vee \neg q, q \vee r, \neg r, \neg q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz dowolne wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *ite* (nazwa pochodzi od angielskich słów if-then-else), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych zachodzi

$$\hat{\sigma}(ite(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \begin{cases} \hat{\sigma}(\varphi_2), & \text{jeśli } \hat{\sigma}(\varphi_1) = \top, \\ \hat{\sigma}(\varphi_3), & \text{wpp.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje formuła zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych i spójników *ite*, \top , \perp (i nawiasów), równoważna formule $q \Rightarrow (\neg q \vee p)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$ite(q, p, \top)$$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunktcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$.

DNF:

$$\neg p \vee \neg q$$

CNF:

$$\neg p \vee \neg q$$

Zadanie 4 (2 punkty). Powiemy że formuła φ jest *uproszczeniem* formuły ψ jeśli obie formuły są równoważne oraz w φ występuje mniej spójników logicznych niż w ψ . W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ lub słowo „NIE”, jeśli taka formuła nie istnieje.

$$p \vee r$$

Zadanie 5 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w te prostokąty, które odpowiadają formułom równoważnym formule $p \Rightarrow \neg q$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$$\neg p \vee \neg q$$

TAK

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$$

TAK

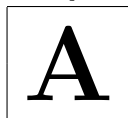
$$q \Rightarrow \neg p$$

TAK

$$\neg(p \wedge q)$$

TAK

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *maj* (nazwa pochodzi od angielskiego słowa *majority*), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych $\hat{\sigma}(\text{maj}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \mathbf{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy większość (tzn. 2 lub 3) z argumentów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ma wartość \mathbf{T} przy wartościowaniu σ .

- (a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).
- (b) Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójników \neg, \wedge istnieje równoważna formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników *maj*, \perp, \neg . Oczywiście w zapisie wszystkich formuł można używać nawiasów.

Zadanie 7 (5 punktów).

- (a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).
- (b) Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie funkcją spełniającą następujące zależności rekurencyjne:

$$f(0) = 0, \tag{*}$$

$$f(n+1) = f(n) + 2 \cdot 3^n \text{ dla wszystkich } n \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

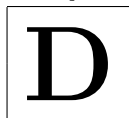
Udowodnij indukcyjnie, że $f(n) = 3^n - 1$ dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 8 (5 punktów). Które z następujących dwóch stwierdzeń są prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.

- (a) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest spełnialna a ψ jest tautologią, to φ jest spełnialna.
- (b) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuły $\varphi \Leftrightarrow \psi$ oraz ψ są spełnialne, to φ jest spełnialna.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 16 listopada 2018

Czas pisania: 30+60 minut

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny *ite* (nazwa pochodzi od angielskich słów if-then-else), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych zachodzi

$$\hat{\sigma}(ite(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \begin{cases} \hat{\sigma}(\varphi_2), & \text{jeśli } \hat{\sigma}(\varphi_1) = \top, \\ \hat{\sigma}(\varphi_3), & \text{wpp.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje formuła zbudowana tylko ze zmiennych zdaniowych i spójników *ite*, \top , \perp (i nawiasów), równoważna formule $\neg(p \Rightarrow \neg q)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$ite(q, p, \perp)$$

Zadanie 2 (2 punkty). Powiemy że formuła φ jest *uproszczeniem* formuły ψ jeśli obie formuły są równoważne oraz w φ występuje mniej spójników logicznych niż w ψ . W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$ lub słowo „NIE”, jeśli taka formuła nie istnieje.

$$p \vee q$$

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee \neg r, \neg p \vee q, q, \neg q \vee \neg r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz dowolne wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 4 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w te prostokąty, które odpowiadają formułom równoważnym formule $p \Leftrightarrow \neg q$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$$(\neg p) \Leftrightarrow q$$

TAK

$$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$$

TAK

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

TAK

$$\neg((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

TAK

Zadanie 5 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunktcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow p$.

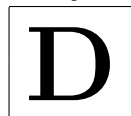
DNF:

$$p \wedge \neg q$$

CNF:

$$p \wedge \neg q$$

Wersja:



Numer indeksu:

Grupa¹:

s. 4	s. 5	s. 103	s. 104
s. 105	s. 139	s. 140	s. 141

Zadanie 6 (5 punktów).

- (a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).
(b) Niech $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie funkcją spełniającą następujące zależności rekurencyjne:

$$g(0) = 2, \quad (*)$$

$$g(n+1) = 2 \cdot g(n) + 3^n - 1 \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}. \quad (**)$$

Udowodnij indukcyjnie, że $g(n) = 3^n + 1$ dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 7 (5 punktów). Rozważmy taki trójargumentowy spójnik logiczny \min (nazwa pochodzi od angielskiego słowa *minority*), że dla dowolnych formuł $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych $\hat{\sigma}(\min(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \mathbf{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy mniejszość (tzn. 0 lub 1) z argumentów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ma wartość \mathbf{T} przy wartościowaniu σ .

Na ćwiczeniach zdefiniowaliśmy taki binarny spójnik logiczny \uparrow (znany również pod nazwą *nand*), że dla dowolnych formuł φ_1, φ_2 rachunku zdań oraz dowolnego wartościowania σ zmiennych zdaniowych $\hat{\sigma}(\varphi_1 \uparrow \varphi_2) = \mathbf{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathbf{T}$ i $\hat{\sigma}(\varphi_2) = \mathbf{T}$.

- (a) Sformułuj zasadę indukcji w takiej wersji, żeby można było z niej skorzystać w punkcie (b).
(b) Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych i spójnika \uparrow istnieje równoważna formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych i spójników \min, \perp . Oczywiście w zapisie wszystkich formuł można używać nawiasów.

Zadanie 8 (5 punktów). Które z następujących dwóch stwierdzeń są prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.

- (a) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest sprzeczna a ψ jest tautologią, to φ jest sprzeczna.
(b) Dla dowolnych formuł φ, ψ rachunku zdań, jeśli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest sprzeczna a ψ jest spełnialna, to φ jest spełnialna.

¹Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.