Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy

9 grudnia 2006

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -10 do 10 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów. Mniej niż -2 punkty otrzymuje osoba, która umieszcza w swoim rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywe. Rozwiązania, w których nie ma odpowiedzi kompromitująco fałszywych, będą oceniane w skali od -2 do 10 punktów.

Zadanie 1 Klauzula rachunku zdań $\bigvee_{j=1}^{m} l_j$ jest *klauzulą hornowską*, jeżeli co najwyżej jeden spośród literałów $l_1, \ldots, l_m$ jest zmienną zdaniową bez negacji. Formuła ma *postać hornowską*, jeżeli jest koniunkcją klauzul hornowskich. Dla wartościowań zmiennych zdaniowych $\sigma_1, \sigma_2 : \mathsf{Var} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ definiujemy wartościowanie $\sigma_1 \circ \sigma_2$ wzorem

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(p) \quad = \quad \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{gdy } \sigma_1(p) = \mathsf{T} \text{ i } \sigma_2(p) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F}, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

(a) Udowodnij, że jeśli φ jest formułą w postaci hornowskiej oraz $\hat{\sigma}_1(\varphi) = \mathsf{T}$ i $\hat{\sigma}_2(\varphi) = \mathsf{T}$ to $\widehat{\sigma_1 \circ \sigma_2}(\varphi) = \mathsf{T}$.
(b) Wskaż formułę, która nie jest równoważna z żadną formułą w postaci hornowskiej.
(c) Udowodnij, że wskazana przez Ciebie formuła nie jest równoważna z żadną formułą w postaci hornowskiej.

Zadanie 2 Rozważmy dowolną funkcję $f : A \to B$. Udowodnij, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich pozdbiorów X, Y zbioru A zachodzi równość

$$f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y).$$

Zadanie 3 Niech R i S będą relacjami równoważności na zbiorze A. Udowodnij, że $R \cup S$ jest relacją równoważności na A wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cup S = RS$.

Zadanie 4 W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji ze zbioru $\mathbb{N}$ w zbiór $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację $\sim$ wzorem

$$f \sim g \quad \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \quad \forall n \in \mathbb{N} \, \lfloor \frac{f(n)}{2} \rfloor = \lfloor \frac{g(n)}{2} \rfloor$$

(a) Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności.
(b) Opisz klasę abstrakcji takiej funkcji f, że $f(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.
(c) Udowodnij, że każda klasa abstrakcji relacji $\sim$ jest równoliczna ze zbiorem $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
(d) Udowodnij, że zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.