Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

21 lutego 2017

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli formuła $\neg(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge \neg(s \vee t)$ jest spełnialna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne wartościowanie spełniające tę formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo "SPRZECZNA".

$\sigma(p) = \sigma(q) = \mathsf{T}, \quad \sigma(r) = \sigma(s) = \sigma(t) = \mathsf{F}$

Zadanie 2 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły równoważne formule $(p \Leftrightarrow q) \vee r$, odpowiednio w koniunkcyjnej oraz dysjunkcyjnej postaci normalnej.

CNF $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

DNF $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$ jest tautologią rachunku zdań, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\Big(\forall n \exists x (f(x) > n)\Big) \wedge \neg\Big(\exists n \forall x f(x) > n\Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$$\forall n \exists x_1 \exists x_2.\ f(x_1) > n \wedge \neg(f(x_2) > n)$$

Zadanie 5 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy w sposób następujący: $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Nie używając symbolu $\dot{-}$ wpisz w prostokąt poniżej wyrażenie równoważne z $(A \dot{-} B) \dot{-} C$.

$$\Big(((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C\Big) \cup \Big(C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))\Big)$$

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli równość $\bigcap_{t \in T} (A_t \setminus B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \setminus \bigcap_{t \in T} B_t$ zachodzi dla wszystkich zbiorów indeksów T oraz wszystkich indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$$T = \{1, 2\},\ A_1 = \{1\},\ A_2 = \{1\},\ B_1 = \{1\},\ B_2 = \emptyset$$

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee r,\ p \vee q,\ \neg q \vee \neg r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 8 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(n) = 42\}$. Jeśli zbiór $\bigcap_{m=2}^{2017} \bigcup_{n=m}^{m+9} A_n$ jest niepusty, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny element tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „PUSTY”.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 42$$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 9 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, kin K i filmów F oraz relacje $Bywa \subseteq O \times K$, $Obejrzał \subseteq O \times F$ i $Wyświetla \subseteq K \times F$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich kinach, jakie osoby obejrzały jakie filmy oraz jakie kina wyświetlają jakie filmy. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{k \in K \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz kin, które wyświetlają wszystkie filmy, które obejrzał Jan Kowalski.

$\forall f\ Obejrzał('\mathsf{Jan\ Kowalski}', f) \Rightarrow Wyświetla(k, f)$

Zadanie 10 (2 punkty). Jeśli istnieje najmniejsza (ze względu na inkluzję $\subseteq$) relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$, która zawiera pary $\langle 0, 2\rangle$ i $\langle 1, 2\rangle$, to w prostokąt poniżej wpisz tę relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$

Zadanie 11 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na $\mathbb{N}$, która ma 2016 klas abstrakcji, z których każda ma 2017 elementów, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Każdy zbiór, na którym istnieje taka relacja, jest skończony i ma dokładnie 4066272 elementy, natomiast zbiór $\mathbb{N}$ nie ma tej własności.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną $sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{dla } x < 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0, \\ 1, & \text{wpp.} \end{cases}$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio obrazy i przeciwobrazy podanych zbiorów w odwzorowaniu sgn.

$sgn[[1, 3]] =$	$\{1\}$	$sgn[[-5, 4]] =$	$\{-1, 0, 1\}$
$sgn^{-1}[[1, 3]] =$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	$sgn^{-1}[[-5, 4]] =$	$\mathbb{R}$

Zadanie 13 (2 punkty). Rozważmy funkcję $F : [1, 2]^{\{0,1\}\times\mathbb{N}} \to [3, 4]^{\mathbb{N}}$ daną dla $f \in [1, 2]^{\{0,1\}\times\mathbb{N}}$ wzorem $(F(f))(n) = f(n \bmod 2, 2 * n) + 2$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do F, to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

F nie jest różnowartościowa, np. dla $f_1(x, y) = 1$ oraz $f_2(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{dla } y = 1 \\ 1, & \text{wpp} \end{cases}$
mamy $F(f_1) = F(f_2)$

Zadanie 14 (2 punkty). Niech $R = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m = n + 2\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

$\exists k > 0.\ \ m = n + 2k$

Zadanie 15 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz te spośród liter $A, \ldots, K$, które oznaczają odpowiednio zbiory o mocy 16, $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$.

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$	$\{1,2,3,4\}^{\{5,6\}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$	$\emptyset^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}^{\emptyset}$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$	$\{1,2\}^{\{3,4,5,6\}}$	$\mathbb{N}^{\{1,2,3,4\}}$	$\{0\}^{\mathbb{N}}$

16: B, G, H $\aleph_0$: A, J $\mathfrak{c}$: C, F

Zadanie 16 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : A \to B$. Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie formuł) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód twierdzenia: Dla dowolnego podzbioru Y zbioru B zachodzi inkluzja $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy *wprost*. Weźmy dowolny podzbiór Y zbioru B i dowolny element y zbioru $f[f^{-1}[Y]]$. Wtedy istnieje taki element x w zbiorze $f^{-1}[Y]$, że $f(x) = y$.

Z definicji przeciwobrazu zbioru otrzymujemy, że $f(x) \in Y$. Zatem $y \in Y$, co kończy dowód.

Zadanie 17 (2 punkty). Rozważmy zbiór $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2 \land n \leq 20\}$ uporządkowany relacją podzielności $|$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio wszystkie elementy minimalne i maksymalne w tym porządku lub słowo "BRAK" gdy takich elementów nie ma.

min: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 max: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

Zadanie 18 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech parami nieizomorficznych porządków na zbiorach nieprzeliczalnych.

$\langle \mathbb{R}, \leq \rangle, \quad \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle, \quad \langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, = \rangle$

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli porządki $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \geq \rangle$, gdzie $\leq$ jest zwykłym porządkiem na liczbach całkowitych, są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

$f(x) = -x$

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(y, g(z), x) \stackrel{?}{=} f(a, x, z)$	NIE	$f(x, g(x), a) \stackrel{?}{=} f(x, y, z)$	$[y/g(x), z/a]$
$f(g(y), a, g(z)) \stackrel{?}{=} f(x, y, g(z))$	$[x/g(a), y/a]$	$f(x, g(y), x) \stackrel{?}{=} f(a, x, x)$	NIE