

<div>DEFINICJA</div> <div>Rozkład gamma (parametry, gęstość, MGF)</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>	<div>DEFINICJA</div> <div>Rozkład chi kwadrat (parametry, gęstość, MGF)</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>
<div>DEFINICJA</div> <div>Rozkład beta (parametry, gęstość)</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>	<div>TWIERDZENIE</div> <div>Zależności między rozkładami beta, gamma, chi kwadrat</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>
<div>DEFINICJA</div> <div>Rozkład normalny (parametry, gęstość, MGF)</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>	<div>DEFINICJA</div> <div>Wielowymiarowy rozkład normalny (parametry, gęstość, MGF)</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>
<div>TWIERDZENIE</div> <div>Przekształcenie liniowe wielowymiarowego rozkładu normalnego</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>	<div>TWIERDZENIE</div> <div>Rozkłady brzegowe w wielowymiarowym rozkładzie normalnym</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>
<div>DEFINICJA</div> <div>Rozkład <math>t</math>-Studenta (parametry, i otrzymywanie z innych rozkładów)</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>	<div>TWIERDZENIE</div> <div>Twierdzenie Studenta</div> <div>TEORIA STATYSTYKI</div>

<p>Parametry: <math>r &gt; 0</math></p> $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ $M_X(t) = (1 - 2t)^{-r/2}, t < \frac{1}{2}$	<p>Parametry: <math>\alpha &gt; 0, \beta &gt; 0</math></p> $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ $M_X(t) = \left( \frac{1}{1 - \beta t} \right)^\alpha, t < \frac{1}{\beta}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Gamma(r/2, 2) \stackrel{d}{=} \chi^2(r)</math></li> <li>• <math>\Gamma(1, \frac{1}{\lambda}) \stackrel{d}{=} \mathcal{E}(\lambda)</math></li> <li>• <math>\sum_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i, \beta) \stackrel{d}{=} \Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)</math></li> <li>• <math>\sum_{i=1}^n \chi^2(r_i) \stackrel{d}{=} \chi^2(\sum_{i=1}^n r_i)</math></li> </ul>	<p>Parametry: <math>\alpha &gt; 0, \beta &gt; 0</math></p> $f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$
<p>Parametry: <math>\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\Sigma} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})</math> symetryczna, dodatnio określona</p> $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}  \boldsymbol{\Sigma} ^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$ $M_x(\mathbf{t}) = \exp \left\{ \mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right\}$	<p>Parametry: <math>\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 &gt; 0</math></p> $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2}$
<p>Niech <math>\mathbf{X}</math> ma rozkład <math>\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})</math>, gdzie</p> $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$ <p>Wtedy <math>\mathbf{X}_1</math> ma rozkład <math>\mathcal{N}_m(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})</math>. Ponadto <math>\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2</math> są niezależne wtw., gdy <math>\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}</math>.</p>	<p>Niech <math>\mathbf{X}</math> ma rozkład <math>\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})</math>. Niech <math>\mathbf{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m</math>. Wtedy <math>\mathbf{AX} + \mathbf{b}</math> ma rozkład <math>\mathcal{N}_m(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)</math>.</p>
<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będą i.i.d. zmiennymi z rozkładu <math>\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)</math>. Oznaczmy <math>\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i</math>, <math>S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2</math>. Wtedy:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\bar{X}</math> ma rozkład <math>\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})</math>.</li> <li>• <math>\bar{X}</math> i <math>S^2</math> są niezależne.</li> <li>• <math>(n-1)S^2/\sigma^2</math> ma rozkład <math>\chi^2(n-1)</math>.</li> <li>• Zmienna <math>T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}</math> ma rozkład Studenta z <math>n-1</math> stopniami swobody.</li> </ul>	<p>Parametr: <math>r &gt; 0</math></p> <p>Niech <math>W \sim \mathcal{N}(0, 1), V \sim \chi^2(r)</math>. Wtedy</p> $T = \frac{W}{\sqrt{V/r}}$ <p>ma rozkład Studenta z <math>r</math> stopniami swobody.</p>

<p>DEFINICJA</p> <p><b>Rozkład <math>F</math>-Snedecora (parametry i otrzymywanie z innych rozkładów)</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>DEFINICJA</p> <p><b>Zbieżność wg prawdopodobieństwa</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Słabe prawo wielkich liczb</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>DEFINICJA</p> <p><b>Estymator zgodny</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>DEFINICJA</p> <p><b>Zbieżność wg rozkładu</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>DEFINICJA</p> <p><b>Ograniczenie w prawdopodobieństwie</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Twierdzenia o <math>\Delta</math>-metodzie</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Zbieżność MGF a zbieżność wg rozkładu</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Centralne twierdzenie graniczne</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Rozkład łączny i brzegowy statystyk porządkowych</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>

<p>Mówimy, że ciąg zmiennych losowych <math>\{X_n\}</math> zbiega wg prawdopodobieństwa do <math>X</math>, jeżeli dla każdego <math>\epsilon &gt; 0</math></p> $\lim_{n \rightarrow \infty} P( X_n - X  \geq \epsilon) = 0.$	<p>Parametry: <math>r_1, r_2 &gt; 0</math>  Niech <math>U \sim \chi^2(r_1), V \sim \chi^2(r_2)</math>. Wtedy zmienna</p> $W = \frac{U/r_1}{V/r_2}$ <p>ma rozkład Snedecora z <math>r_1</math> stopniami swobody w liczniku i <math>r_2</math> w mianowniku.</p>
<p>Niech zmienna <math>X</math> ma gęstość <math>f(x, \theta), \theta \in \Omega</math>. Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbką z rozkładu <math>X</math> i niech <math>T_n</math> oznacza statystykę. <math>T_n</math> nazywamy zgodnym estymatorem <math>\theta</math>, jeżeli</p> $T_n \xrightarrow{P} \theta.$	<p>Niech <math>\{X_n\}</math> będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych o średniej <math>\mu</math> i wariancji <math>\sigma^2 &lt; \infty</math>. Wtedy</p> $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu.$
<p>Mówimy, że ciąg zmiennych losowych <math>\{X_n\}</math> jest ograniczony w prawdopodobieństwie, jeżeli dla każdego <math>\epsilon &gt; 0</math> istnieją <math>B_\epsilon &gt; 0</math> i indeks <math>N_\epsilon</math> takie, że</p> $n \geq N_\epsilon \Rightarrow P( X_n  \leq B_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$	<p>Mówimy, że ciąg zmiennych losowych <math>\{X_n\}</math> zbiega wg rozkładu do <math>X</math>, jeżeli dla każdego punktu ciągłości <math>x</math> dystrybucyj <math>F_X</math> mamy</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$
<p>Niech <math>\{X_n\}</math> będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że <math>M_{X_n}(t)</math> istnieją dla <math>t \in (-h, h)</math>. Niech <math>X</math> będzie zmienną losową taką, że <math>M_X(t)</math> istnieje dla <math>t \in [-h_1, h_1] \subseteq [-h, h]</math>. Jeżeli dla <math>t \in [-h_1, h_1]</math> mamy <math>\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)</math>, to <math>X_n \xrightarrow{D} X</math>.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Niech <math>\{Y_n\}</math> będzie ciągiem zmiennych losowych ograniczonych w prawdopodobieństwie. Załóżmy, że <math>X_n = o_p(Y_n)</math>. Wtedy <math>X_n \xrightarrow{P} 0</math>.</li> <li>Niech <math>\{X_n\}</math> będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że <math>\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2)</math>. Załóżmy, że <math>g(x)</math> jest różniczkowalna w <math>\theta</math> i <math>g'(\theta) \neq 0</math>. Wtedy <math>\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2(g'(\theta))^2)</math>.</li> </ul>
$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f(y_i), & y_i \text{ rosnąco} \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ $g_k(y_k) = \int_a^{y_2} \cdots \int_a^{y_k} \int_{y_k}^b \cdots \int_{y_{n-1}}^b n! \prod f(y_i) dy_n \cdots dy_{k+1} dy_{k-1} \cdots dy_1.$	<p>Niech <math>\{X_n\}</math> będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych z rozkładu o średniej <math>\mu</math> i wariancji <math>0 &lt; \sigma^2 &lt; \infty</math>. Wtedy</p> $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1).$

<p>DEFINICJA</p> <p><b>Estymator największej wiarygodności (MLE)</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>MLE funkcji parametru</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Warunki na zgodność MLE</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>DEFINICJA</p> <p><b>Warunki regularności rodziny <math>f(x; \theta)</math></b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>DEFINICJA</p> <p><b>Informacja Fishera (dodatkowe założenia)</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>DEFINICJA</p> <p><b>Estymator wydajny</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Nierówność Craméra-Rao</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Asymptotyczny rozkład różnicy estymatorów</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>DEFINICJA</p> <p><b>Wydajność asymptotyczna</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>DEFINICJA</p> <p><b>Estymator nieobciążony o minimalnej wariancji</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>

<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu o gęstości <math>f(x; \theta)</math>, <math>\theta \in \Omega</math>. Załóżmy że <math>\hat{\theta}</math> jest MLE parametru <math>\theta</math>. Wtedy <math>g(\hat{\theta})</math> jest MLE parametru <math>\eta = g(\theta)</math>.</p>	<p>Mówimy, że <math>\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})</math> jest estymatorem największej wiarygodności <math>\theta</math>, jeżeli</p> $\hat{\theta} = \operatorname{Argmax} L(\theta; \mathbf{X}),$ <p>gdzie <math>L(\theta; \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)</math>, <math>\theta \in \Omega</math> (funkcja wiarygodności).</p>
<ol style="list-style-type: none"> <li>0. Funkcje gęstości są rozróżnialne, tzn. <math>\theta \neq \theta' \Rightarrow f(x_i; \theta) \neq f(x_i, \theta')</math>.</li> <li>1. Funkcje gęstości mają ten sam nośnik dla wszystkich <math>\theta</math>.</li> <li>2. <math>\theta_0</math> (faktyczna wartość <math>\theta</math>) leży wewnątrz <math>\Omega</math>.</li> <li>3. <math>f(x; \theta)</math> jest dwukrotnie różniczkowalna po <math>\theta</math>.</li> <li>4. <math>\int f(x; \theta) dx</math> jest dwukrotnie różniczkowalna pod całką.</li> <li>5. <math>f(x; \theta)</math> jest trzykrotnie różniczkowalna po <math>\theta</math>. Dla każdej <math>\theta \in \Omega</math> istnieje stała <math>c</math> i funkcja <math>M(x)</math> taka, że <math>\left  \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \log f(x; \theta) \right  \leq M(x)</math>, <math>E_{\theta_0}[M(x)] &lt; \infty</math> dla <math>\theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c)</math>.</li> </ol>	<p>Załóżmy, że rodzina <math>f(x; \theta)</math> jest różna dla różnych <math>\theta</math>, ma wspólny nośnik i faktyczny parametr <math>\theta_0</math> jest we wnętrzu <math>\Omega</math>. Wtedy <math>\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = 0</math> ma rozwiązanie <math>\theta_n</math> będące zgodnym estymatorem <math>\theta</math>.</p>
<p>Mówimy, że <math>Y</math> - zgodny estymator <math>\theta</math> jest wydajny, jeżeli wariancja <math>Y</math> osiąga dolne ograniczenie w nierówności Craméra-Rao.</p>	<p>Założenia: warunki regularności (R0)-(R4) Dla rozkładu <math>f(x; \theta)</math> określamy</p> $I(\theta) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] =$ $= \operatorname{Var} \left( \frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx$
<p>Niech zachodzą warunki regularności (R0)-(R5). Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu <math>f(x; \theta_0)</math> o niezerowej i skończonej informacji Fishera. Jeżeli <math>g(x)</math> jest funkcją ciągłą i różniczkowalną w <math>\theta_0</math>, to ciąg zgodnych MLE spełnia</p> $\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta_0)) \xrightarrow{D} \mathcal{N} \left( 0, \frac{g'(\theta_0)^2}{I(\theta_0)} \right).$	<p>Niech zachodzą warunki regularności (R0)-(R4). Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu o gęstości <math>f(x; \theta)</math>, <math>\theta \in \Omega</math>. Niech <math>Y = u(X_1, X_2, \dots, X_n)</math> będzie statystyką o średniej <math>\mathbb{E}[Y] = k(\theta)</math>. Wtedy</p> $\operatorname{Var}(Y) \geq \frac{[k'(\theta)]^2}{nI(\theta)}.$ <p>W szczególności, dla <math>Y</math> - zgodnego estymatora <math>\theta</math> mamy</p> $\operatorname{Var}(Y) \geq \frac{1}{nI(\theta)}.$
<p>Estymator nieobciążony o wariancji mniejszej niż dowolny inny estymator nieobciążony.</p>	<p>Niech <math>\hat{\theta}_{1n}</math> będzie zgodnym estymatorem <math>\theta_0</math> takim, że <math>\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1n} - \theta_0) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma_{\hat{\theta}_{1n}}^2)</math>. Wydajnością asymptotyczną nazywamy stosunek <math>e(\hat{\theta}_n) = \frac{1/I(\theta_0)}{\sigma_{\hat{\theta}_{1n}}^2}</math>. Estymator jest asymptotycznie wydajny, jeżeli ten stosunek wynosi 1. Asymptotyczna wydajność względna <math>\hat{\theta}_{1n}</math> względem <math>\hat{\theta}_{2n}</math> to stosunek tych wartości.</p>

<p>DEFINICJA</p> <p><b>Statystyka dostateczna</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Twierdzenie Neymana</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Twierdzenie Rao-Blackwella</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Zależność MLE od statystyki dostatecznej</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>DEFINICJA</p> <p><b>Zupełna rodzina rozkładów</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Twierdzenie Lehmana-Scheffégo</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>DEFINICJA</p> <p><b>Dostateczna statystyka zupełna</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>DEFINICJA</p> <p><b>Regularna klasa wykładnicza</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>
<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Własności statystyki z regularnej klasy wykładniczej</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>	<p>TWIERDZENIE</p> <p><b>Zupełna statystyka z regularnej klasy wykładniczej</b></p> <p>TEORIA STATYSTYKI</p>

<p>Statystyka <math>Y_1 = u_1(X_1, X_2, \dots, X_n)</math> z próby o rozkładzie (dyskretnym lub ciągłym) <math>f(x; \theta)</math> jest dostateczna wtw., gdy istnieją dwie nieujemne funkcje <math>k_1, k_2</math> takie, że</p> $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = k_1[u_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta] k_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$ <p>gdzie <math>k_2</math> nie zależy od <math>\theta</math>.</p>	<p>Statystyka <math>Y_1 = u_1(X_1, X_2, \dots, X_n)</math> z próby o rozkładzie (dyskretnym lub ciągłym) <math>f(x; \theta)</math> jest dostateczna wtw., gdy</p> $\frac{f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta)}{f_{Y_1}[u_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta]} = H(x_1, x_2, \dots, x_n),$ <p>gdzie funkcja <math>H</math> nie zależy od <math>\theta</math>.</p>
<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu o gęstości (dyskretniej lub ciągłej) <math>f(x; \theta), \theta \in \Omega</math>. Jeżeli dla <math>\theta</math> istnieją statystyka dostateczna <math>Y_1</math> oraz jedyny estymator największej wiarygodności <math>\hat{\theta}</math>, to <math>\hat{\theta}</math> jest funkcją <math>Y_1</math>.</p>	<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu o gęstości (dyskretniej lub ciągłej) <math>f(x; \theta), \theta \in \Omega</math>. Niech <math>Y_1</math> będzie statystyką dostateczną dla <math>\theta</math> i niech <math>Y_2</math> będzie nieobciążonym estymatorem <math>\theta</math>, który nie jest funkcją samego <math>Y_1</math>.</p> <p>Wtedy statystyka <math>\varphi(Y_1)</math> dana przez funkcję <math>\varphi(y_1) = \mathbb{E}[Y_2   Y_1 = y_1]</math> jest statystyką dostateczną, nieobciążonym estymatorem <math>\theta</math> i ma wariancję mniejszą niż <math>Var(Y_2)</math>.</p>
<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu o gęstości (dyskretniej lub ciągłej) <math>f(x, \theta)</math>. Niech <math>Y_1</math> będzie statystyką dostateczną dla <math>\theta</math> i niech rodzina <math>\{f_{Y_1}(y_1, \theta) : \theta \in \Omega\}</math> będzie zupełna. Jeżeli istnieje funkcja od <math>Y_1</math>, która jest nieobciążonym estymatorem <math>\theta</math>, to jest też jedynym ENMW.</p>	<p>Niech zmienna losowa <math>Z</math> będzie ciągła lub dyskretna o rozkładzie z rodziny <math>\{h(z; \theta) : \theta \in \Omega\}</math>. Jeżeli z faktu, że dla każdej <math>\theta \in \Omega, \mathbb{E}[u(Z)] = 0</math> można wnioskować, że <math>u(z) = 0</math> wszędzie poza punktami o prawdopodobieństwie zerowym dla każdego <math>h(z; \theta)</math> z tej rodziny, to rodzinę <math>h(z; \theta)</math> nazywamy zupełną rodziną rozkładów.</p>
<p>Mówimy, że rozkład jest w regularnej klasie wykładniczej, jeżeli jest postaci</p> $f(x; \theta) = \begin{cases} \exp[p(\theta)K(x) + S(x) + q(\theta)], & x \in \mathcal{S} \\ 0, & \text{w p.p.,} \end{cases}$ <p>Jeżeli <math>\mathcal{S}</math> nie zależy od <math>\theta</math>, <math>p(\theta)</math> jest ciągłą, nietrywialną funkcją <math>\theta</math>, <math>S</math> jest ciągłą funkcją <math>x</math> oraz <math>K'(x) \neq 0</math>.</p>	<p>Statystyka <math>Y_1 = u_1(X_1, X_2, \dots, X_n)</math> z próby o rozkładzie (dyskretnym lub ciągłym) <math>f(x; \theta), \theta \in \Omega</math> jest dostateczna i zupełna wtw., gdy jest dostateczna i rodzina <math>\{f_{Y_1}(y_1, \theta) : \theta \in \Omega\}</math> jest zupełna.</p>
<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu o gęstości <math>f(x; \theta), \theta \in (\gamma, \delta)</math> z regularnej klasy wykładniczej. Wtedy statystyka <math>Y_1 = \sum_{i=1}^n K(X_i)</math> jest dostateczną statystyką zupełną.</p>	<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu z regularnej klasy wykładniczej. Wtedy statystyka <math>Y_1 = \sum_{i=1}^n K(X_i)</math> ma własności:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>f_{Y_1}(y_1; \theta) = R(y_1) \exp[p(\theta)y_1 + nq(\theta)]</math>, gdzie <math>R(y_1)</math> i <math>q(\theta)</math> nie zależą od <math>\theta</math>,</li> <li><math>\mathbb{E}[Y_1] = -n \frac{q'(\theta)}{p'(\theta)}</math>,</li> <li><math>Var(Y_1) = n \frac{1}{p'(\theta)^3} \{p''(\theta)q'(\theta) - q''(\theta)p'(\theta)\}</math>.</li> </ol>



<p>Twierdzenie</p> <p><b>Dostateczny warunek na niezależność statystyki</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>	<p>Definicja</p> <p><b>Błąd I i II rodzaju</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>
<p>Definicja</p> <p><b>Poziom istotności (i jego interpretacja)</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>	<p>Definicja</p> <p><b>Moc testu statystycznego</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>
<p>Definicja</p> <p><b>Obszar krytyczny</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>	<p>Definicja</p> <p><b>Wielkość obszaru krytycznego</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>
<p>Definicja</p> <p><b>Najlepszy obszar krytyczny (rozmiaru <math>\alpha</math>)</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>	<p>Twierdzenie</p> <p><b>Twierdzenie Neymana-Pearsona</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>
<p>Definicja</p> <p><b>Test jednostajnie najmocniejszy</b></p> <p>Teoria Statystyki</p>	

<p>Błąd I rodzaju: odrzucenie hipotezy zerowej, gdy jest poprawna.</p> <p>Błąd II rodzaju: przyjęcie hipotezy zerowej, gdy jest błędna.</p>	<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie próbą z rozkładu <math>f(x; \theta), \theta \in \Omega</math>, gdzie <math>\Omega</math> jest przedziałem. Niech <math>Y_1</math> będzie zupełną statystyką dostateczną dla <math>\theta</math> i niech <math>Z</math> będzie inną statystyką, która nie jest funkcją samego <math>Y_1</math>. Jeżeli rozkład <math>Z</math> nie zależy od <math>\theta</math>, to <math>Z</math> jest niezależne od <math>Y_1</math>.</p>
<p>Mocą testu nazywamy prawdopodobieństwo niepopelnienia błędu II rodzaju.</p>	<p>Poziom istotności <math>\alpha</math> to liczba z przedziału <math>[0, 1]</math>. Interpretujemy to jako akceptowalne ryzyko popelnienia błędu I rodzaju.</p>
<p>Obszar krytyczny <math>C</math> ma wielkość <math>\alpha</math>, jeżeli</p> $\alpha = \max_{\theta \in \omega_0} P_{\theta}[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in C].$ <p>Zatem jest to też prawdopodobieństwo popelnienia błędu I rodzaju.</p>	<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> będzie testowaną próbą. Obszarem krytycznym <math>C</math> nazywamy taki podzbiór przestrzeni próbek <math>\mathcal{D}</math>, że hipotezę zerową odrzucamy wtedy i tylko wtedy, gdy <math>(X_1, X_2, \dots, X_n) \in C</math>.</p>
<p>Niech <math>X_1, X_2, \dots, X_2</math> będzie próbą z rozkładu <math>f(x; \theta)</math>. Niech <math>\Omega = \{\theta', \theta''\}</math> i niech <math>C</math> będzie takim podzbiorem przestrzeni próbek, że:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{L(\theta'; x)}{L(\theta''; x)} \leq k</math>, dla wszystkich <math>x \in C</math>,</li> <li>• <math>\frac{L(\theta'; x)}{L(\theta''; x)} \geq k</math>, dla wszystkich <math>x \in C^C</math>,</li> <li>• <math>\alpha = P_{H_0}[X \in C]</math>.</li> </ul> <p>Wtedy <math>C</math> jest najlepszym obszarem krytycznym wielkości <math>\alpha</math> dla testowania hipotezy <math>H_0 : \theta = \theta'</math> przeciw hipotezie <math>H_1 : \theta = \theta''</math>.</p>	<p>Mówimy, że <math>C</math> jest najlepszym obszarem krytycznym rozmiaru <math>\alpha</math> dla prostej hipotezy <math>H_0 : \theta = \theta'</math> przeciw prostej hipotezie <math>H_1 : \theta = \theta''</math>, jeżeli</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>P_{\theta'}[X \in C] = \alpha</math>,</li> <li>• <math>P_{\theta''}[X \in C] \geq P_{\theta''}[X \in A]</math> dla każdego innego pozbioru <math>A</math> wielkości <math>\alpha</math> z przestrzeni próbek.</li> </ul>
	<p>Obszar krytyczny <math>C</math> jest obszarem jednostajnie najmocniejszym wielkości <math>\alpha</math> do testowania prostej hipotezy <math>H_0</math> przeciw złożonej hipotezie <math>H_1</math>, jeżeli <math>C</math> jest najlepszym obszarem do testowania hipotezy <math>H_0</math> przeciw każdej pojedynczej hipotezie spośród <math>H_1</math>. Test zdefiniowany takim obszarem nazywamy testem jednostajnie najmocniejszym o poziomie istotności <math>\alpha</math>.</p>