Practicum 1

Sofia Zubrilina

November 10, 2020

Даны α, буква x и натуральное число k. Вывести, есть ли в языке L слова, содержащие кратное k число букв x.

Пройдемся по всем символам слева направо. Будем имитировать построение НКА по регулярке, поддерживая для каждой вершины массив remainders - все возможные остатки, которые можно получить в этом состоянии. Более строго:
$remainders(v) = \{n, 0 \leq n \leq k-1 | \exists \omega : |\omega|_x = n\}$, для $n = 0$ считаем, что $|\omega|_x \geq k$
Тогда после обработки всей регулярки, если в remainders от терминальной вершине находится 0, то ответ на задачу true, в противном случае - false

Научимся поддерживать массивы remainders. Также для каждого состояния будем поддерживать влаг canSkip - если состояние сверху обёрнуто в звезду Клини (у автомата есть возможность по этому состоянию не проходить), то true, иначе - false.

В каждый момент времени мы можем встретить:

- $a \in \Sigma$
  Тогда в НКА появляются две новые вытшины st, fn.
  remainders(st) = {}, remainders(fn) = $(a == x ? \{1\} : \{\})$.
  canSkip(st) = 0, canSkip(fn) = 0
  Дбавляем на stack вершину fn.
  Заметим, что сейчас remainders и canSkip корректны.

- +
  Достаём из стека две верхние вершины v_1 and v_2. Тогда в НКА появятся две новые вершины st, fn, remainders(st) = { }, remainders(fn) = remainders(v_1) ∪ remainders(v_2)
  canSkip(st) = 0, canSkip(fn)= 1, если canSkip(v_1) = 1 или canSkip(v_2) = 1, иначе 0.
  Заметим, что сейчас remainders и canSkip корректны.

- .
  Достаём из стека две верхние вершины v_l and v_h (l - lower, h - higher). Тогда в НКА появятся две новые вершины st, fn
  remainders(st) = { }
  remainders(fn) = $\{c : \exists a \in remainders(v_l), \exists b \in remainders(v_h) : a + b = c(mod k)\} \cup$ $\{remainders(v_l), if canSkip(v_h) = true\} \cup \{remainders(v_h), if canSkip(v_l) = true\}$
  canSkip(st) = 0
  canSkip(fn) = canSkip(v_l) $\cdot$ canSkip(v_h)

  Заметим, что сейчас remainders и canSkip корректны.

- *

  Достаём из стека верхную вершину v. В НКА появятся две новые вершины st, fn.
  Пусть вершине v соответствовало какое-то регулярное выражение α, тогда вершине fn будет соответстввать регулярное выражение вида $1 + \alpha + \alpha\alpha + \alpha\alpha\alpha + \ldots$
  Тогда canSkip(fn) = 1 - очевидно
  А вот как посчитать remainders(fn)?
  Видно, что $remainders(fn) = remainders(\alpha) \cup remainders(\alpha\alpha) \cup \ldots.$
  При этом, $remainders(\alpha) \subseteq remainders(\alpha\alpha) \subseteq \ldots$
  Тогда в последовательности $\{remainders(\alpha), remainders(\alpha\alpha), \ldots\}$ может быть не более k раздичных множеств. Тогда все множества, где α перемножается бльше k раз, одинаковые.
  Тогда $remainders(fn) = remainders(\alpha) \cup remainders(\alpha\alpha) \cup \ldots \cup remainders(\alpha^k)$
  В коде суммируется до α в степени k^2
  После этого добавили в stack вершину fn.
  Сейчас remainders и canSkip корректны.

Таким образом, разобрали все возможные варианты, в каждом их них корректно поддерживаем remainders, значит, после обработки всего регулярного выражения для терминальной вершины remainders тоже посчитаны корректно. Значит, получаемый ответ корректен.