

14 grudnia 2022 r.

Marta Szuwarska
Grupa 1 (środa 14:15)

Obliczanie całek funkcji dwóch zmiennych z zastosowaniem złożonych kwadratur prostokątów (z punktem środkowym)

Projekt nr 1

1 Opis metody

Celem zadania jest obliczanie całek $\iint_D \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$, gdzie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną oraz $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$; przez transformację na prostokąt $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ (współrzędne biegunowe) i zastosowanie złożonych kwadratur prostokątów (z punktem środkowym) ze względu na każdą zmienną).

Zacznijmy od zmiany zmiennych na współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \text{ gdzie } r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Jakobian tego przekształcenia wynosi:

$$J(r, \phi) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

Zatem po przekształceniu całka wynosi:

$$\iint_D \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr d\varphi = \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) dr d\varphi \quad (1)$$

gdzie $g : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(r, \varphi) = rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

Dla dowolnej funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ złożona kwadratura prostokątów (z punktem środkowym) ma postać:

$$S(f) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right), \text{ gdzie } x_k = a + kH \text{ dla } k = 0, \dots, N \text{ oraz } H = \frac{b-a}{N}.$$

Po przekształceniach:

$$S(f) = H \sum_{k=1}^N f((k - 0.5)H) \quad (2)$$

Niech S_1 i S_2 będą złożonymi kwadraturami prostokątów (z punktem środkowym) funkcji $g_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$S_1(g_1) = H_1 \sum_{i=1}^N g_1((i - 0.5)H_1), \quad H_1 = \frac{1-0}{N}$$

$$S_2(g_2) = H_2 \sum_{j=1}^N g_2((j - 0.5)H_2), \quad H_2 = \frac{2\pi-0}{N}$$

$$S(g) = S_2(S_1(g)) = H_1 \sum_{j=1}^N (H_2 \sum_{i=1}^N g((i - 0.5)H_1, (j - 0.5)H_2)) =$$

$$= H_1 H_2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N g((i - 0.5)H, (j - 0.5)H)$$

Otrzymaliśmy kwadraturę, którą się posłużymy do obliczenia przybliżonej wartości całki.

$$S(g) = H_1 H_2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N g((i - 0.5)H, (j - 0.5)H) \quad (3)$$

2 Opis programu obliczeniowego

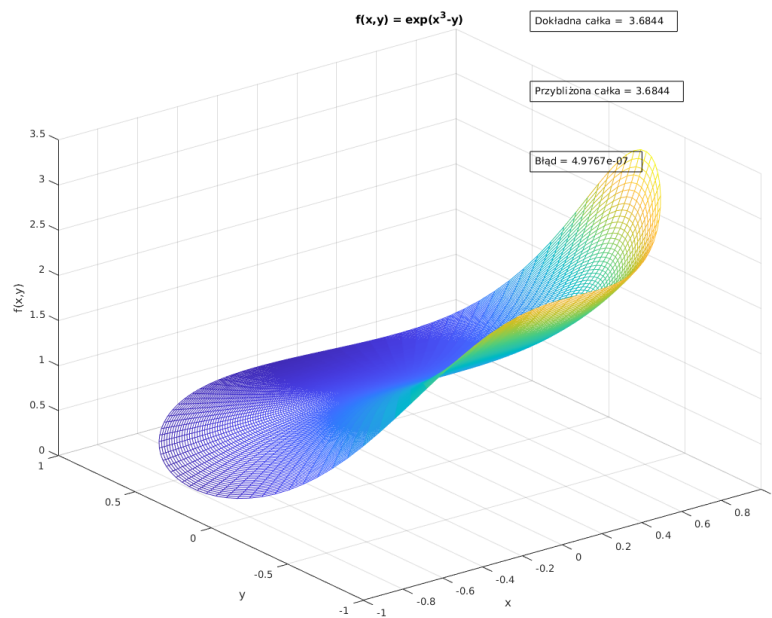
Program składa się z kilku funkcji:

1. **main.m** - funkcja główna, którą uruchamiamy program. Funkcja tworzy wykres 3D funkcji f , oblicza dokładną wartość całki f i przybliżoną za pomocą złożonej kwadratury prostokątów z punktem środkowym oraz błąd między tymi wartościami. Nie przyjmuje żadnych parametrów i nic nie zwraca.
2. **f.m** - funkcja, którą całkujemy. Przyjmuje parametry x i y będące współrzędnymi. Zwraca wartość funkcji.
3. **f_bieg.m** - funkcja przekształca funkcję f na współrzędne biegunowe. Przyjmuje parametry r (promień) i ϕ (kąt). Zwraca wartość przekształconej funkcji. Został tutaj zastosowany wzór użyty w (1).
4. **S_x.m** - funkcja stosuje złożoną kwadraturę prostokątów z punktem środkowym na danej funkcji ze względu na zmienną x . Poza funkcją pozostałe przyjmowane parametry to współrzędna y , granice całkowania a i b oraz liczba kroków N . Zwraca wyliczoną wartość za pomocą kwadratury. Wartość ta jest liczona poprzez zastosowanie wzoru (2). Sumę liczymy za pomocą pętli `for`.

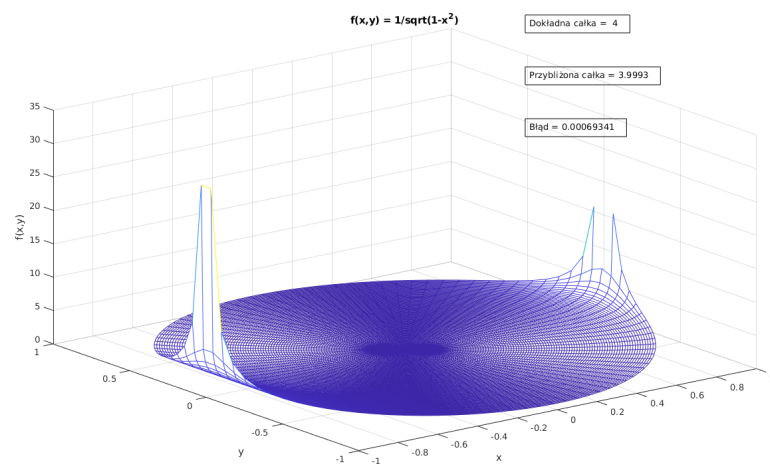
5. **S.m** - funkcja stosuje złożoną kwadraturę prostokątów z punktem środkowym na danej funkcji. Poza funkcją przyjmowane parametry granice całkowania a, b, c, d i liczba kroków N . Zwraca wyliczoną wartość za pomocą kwadratury. Wartość ta jest liczona poprzez zastosowanie wzoru (3). Liczymy sumę za pomocą pętli `for` po z ze względu na zmiennej y , korzystając z funkcji `S_x` do policzenia wartości kwadratury ze względu na x .

3 Przykłady obliczeniowe

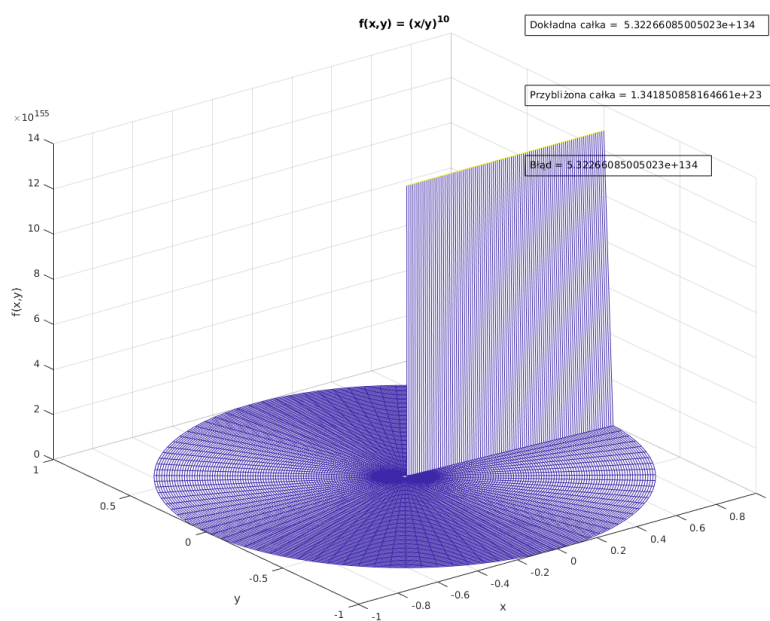
Do wszystkich przykładów użyto liczbę podprzedziałów dla kwadratury $N = 1000$.



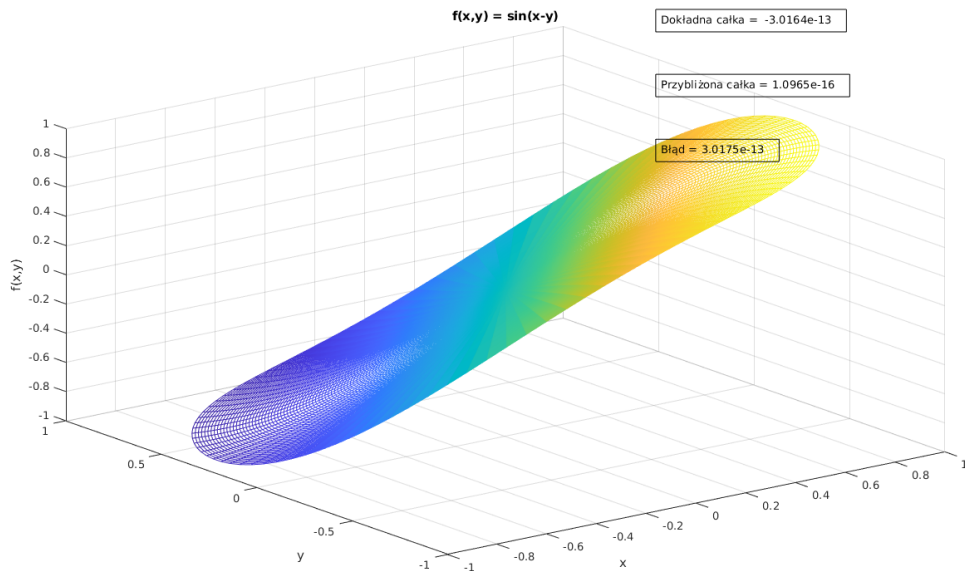
Rysunek 1: Wynik dla funkcji $f(x, y) = e^{x^3 - y}$. Błąd jest bardzo mały, zatem program działa.



Rysunek 2: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Błąd jest już trochę większy.



Rysunek 3: Wynik dla funkcji $f(x, y) = (\frac{x}{y})^{10}$. Program nie radzi sobie z dzieleniem bardzo małych liczb. Błąd jest bardzo duży.



Rysunek 4: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \sin(x - y)$. Program liczy całkę bez problemu. Wartość dokładna i przybliżona różnią się znakiem.

```

Command Window

>> main

przyblizona_wartosc =

    0.9585 + 0.9585i

Warning: Reached the maximum number of function evaluations (10000). The result fails the global error test.
> In integral2Calc>integral2t (line 129)
In integral2Calc (line 9)
In integral2 (line 105)
In main (line 19)

dokladna_wartosc =

    0.9585 + 0.9585i

blad =

    3.2497e-05

Error using mesh
X, Y, Z, and C cannot be complex.

Error in main (line 30)
mesh(X,Y,Z);

f3 >> |

```

Rysunek 5: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \sqrt{x} + y$. Program daje radę, mimo przejścia na zespolone. Jest już jednak problem z wykresem.

```

Command Window

>> main

przyblizona_wartosc =

    -7.4881 + 4.9348i

Warning: Reached the maximum number of function evaluations (10000). The result fails the global error test.
> In integral2Calc>integral2t (line 129)
In integral2Calc (line 9)
In integral2 (line 105)
In main (line 19)

dokladna_wartosc =

    -7.4956 + 4.9348i

blad =

    0.0075

Error using mesh
X, Y, Z, and C cannot be complex.

Error in main (line 30)
mesh(X,Y,Z);

f >>

```

Rysunek 6: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \log(xy)$. Ponownie zespolone. Tutaj już błąd jest znacznie większy.

4 Analiza wyników

Tabela 1: Wyniki

L.p.	funkcja	wartość dokładna	wartość przybliżona	błąd
1	$f(x, y) = e^{x^3-y}$	3.6844	3.6844	$4.9767e-07$
2	$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	4.0000	3.9993	$6.9341e-04$
3	$f(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{10}$	$5.3227e+134$	$1.3419e+23$	$5.3227e+134$
4	$f(x, y) = \sin(x - y)$	$-3.0164e-13$	$1.0965e-16$	$3.0175e-13$
5	$f(x, y) = \sqrt{x} + y$	$0.9585 + 0.9585i$	$0.9585 + 0.9585i$	$3.2497e-05$
6	$f(x, y) = \log(xy)$	$-7.4956 + 4.9348i$	$-7.4881 + 4.9348i$	0.0075

W większości przypadków błąd zaimplementowanej kwadratury prostokątów jest mały (rzędu 10^{-4} lub mniejszy). Program radzi sobie gorzej z dzieleniem przez bardzo małe liczby (przykład 3). Liczby zespolone nie są jednak aż takim problemem.