14 grudnia 2022 r.

Marta Szuwarska
Grupa 1 (środa 14:15)

Obliczanie całek funkcji dwóch zmiennych z zastosowaniem złożonych kwadratur prostokątów (z punktem środkowym)

Projekt nr 1

1 Opis metody

Celem zadania jest obliczanie całek $\iint_D \mathbf{f(x,y)}d\mathbf{x}d\mathbf{y}$, gdzie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną oraz $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$; przez transformację na prostokąt $[0,1] \times [0,2\pi]$ (współrzędne biegunowe) i zastosowanie złożonych kwadratur prostokątów (z punktem środkowym) ze względu na każdą zmienną).

Zacznijmy od zmiany zmiennych na współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \text{ gdzie } r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi].$$

Jakobian tego przekształcenia wynosi:

$$J(r,\phi) = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r$$

Zatem po przekształceniu całka wynosi:

$$\iint_D \mathbf{f(x,y)}d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\mathbf{r}d\varphi = \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(r,\varphi)d\mathbf{r}d\varphi \qquad (1)$$

gdzie $g : [0,1] \times [0, 2\varphi] \to \mathbb{R}$, $g(r,\varphi) = rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

Dla dowolnej funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ złożona kwadratura prostokątów (z punktem środkowym) ma postać:

$S(f) = \Sigma_{k=1}^{N}(x_k - x_{k-1})f(\frac{x_k+x_{k-1}}{2})$, gdzie $x_k = a + kH$ dla $k = 0, ..., N$ oraz $H = \frac{b-a}{N}$.

Po przekształceniach:

$$S(f) = H\Sigma_{k=1}^{N} f((k-0.5)H) \quad (2)$$

Niech S_1 i S_2 będą złożonymi kwadraturami prostokątów (z punktem środkowym) funkcji $g_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ i $g_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

$S_1(g_1) = H_1\Sigma_{i=1}^{N} g_1((i-0.5)H_1)$, $H_1 = \frac{1-0}{N}$
$S_2(g_2) = H_2\Sigma_{j=1}^{M} g_2((j-0.5)H_2)$, $H_2 = \frac{2\pi-0}{M}$

$S(g) = S_2(S_1(g)) = H_1\Sigma_{j=1}^{M}(H_2\Sigma_{i=1}^{N} g((i-0.5)H_1, (j-0.5)H_2)) =$
$= H_1H_2\Sigma_{j=1}^{M}\Sigma_{i=1}^{N} g((i-0.5)H_1, (j-0.5)H_2)$

Otrzymaliśmy kwadraturę, którą się posłużymy do obliczenia przybliżonej wartości całki.

$$S(g) = H_1H_2\Sigma_{j=1}^{M}\Sigma_{i=1}^{N} g((i-0.5)H_1, (j-0.5)H_2) \quad (3)$$

2 Opis programu obliczeniowego

Program składa się z kilku funkcji:

1. **main.m** - funkcja główna, którą uruchamiamy program. Funkcja tworzy wykres 3D funkcji f, oblicza dokładną wartość całki f i przybliżoną za pomocą złożonej kwadratury prostokątów z punktem środkowym oraz błąd między tymi wartościami. Nie przyjmuje żadnych parametrów i nic nie zwraca.

2. **f.m** - funkcja, którą całkujemy. Przyjmuje parametry x i y będące współrzędnymi. Zwraca wartość funkcji.

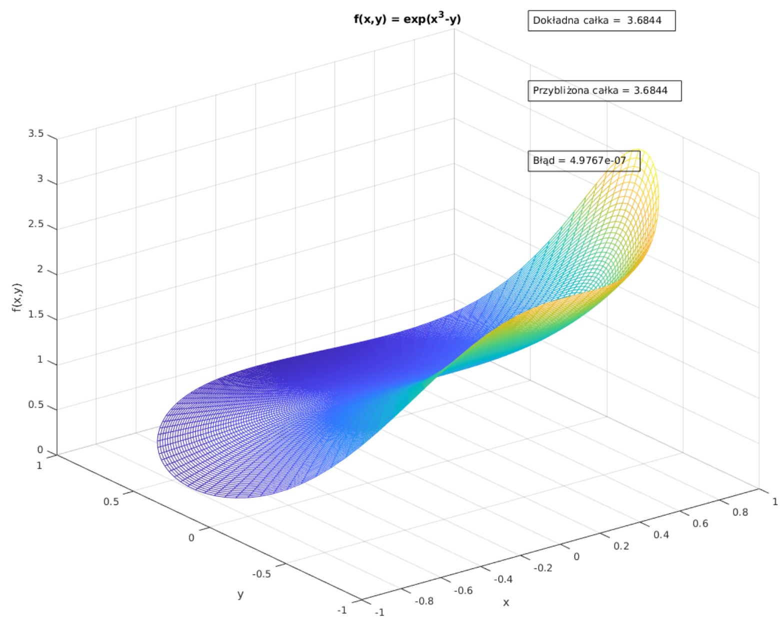
3. **f_bieg.m** - funkcja przekształca funkcję f na współrzędne biegunowe. Przyjmuje parametry r (promień) i phi (kąt). Zwraca wartość przekształconej funkcji. Został tutaj zastosowany wzór użyty w (1).

4. **S.m** - funkcja stosuje złożoną kwadraturę prostokątów z punktem środkowym na danej funkcji. Poza funkcją przyjmowane parametry granice całkowania a,b,c,d i liczba kroków N, M. Zwraca wyliczoną wartość za pomocą kwadratury. Wartość ta jest liczona poprzez zastosowanie wzoru (3). Tworzymy macierz wartości

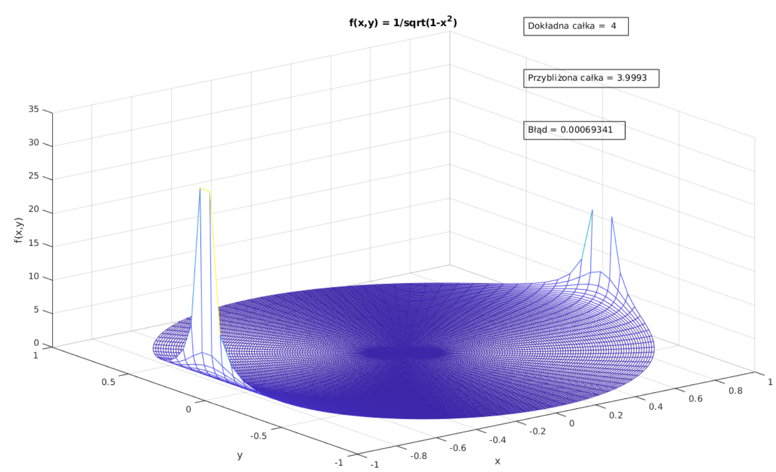
funkcji f za pomocą zagnieżdżonej pętli for. Sumujemy wszystkie wartości za pomocą wektoryzacji i mnożymy przez współczynnik.

3 Przykłady obliczeniowe

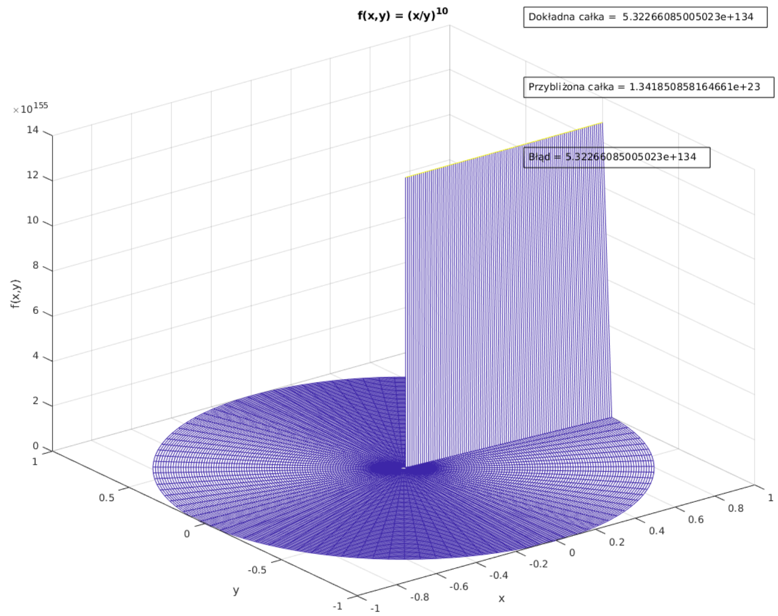
Do wszystkich przykładów użyto liczbę podprzedziałów dla kwadratury $N = 1000$.



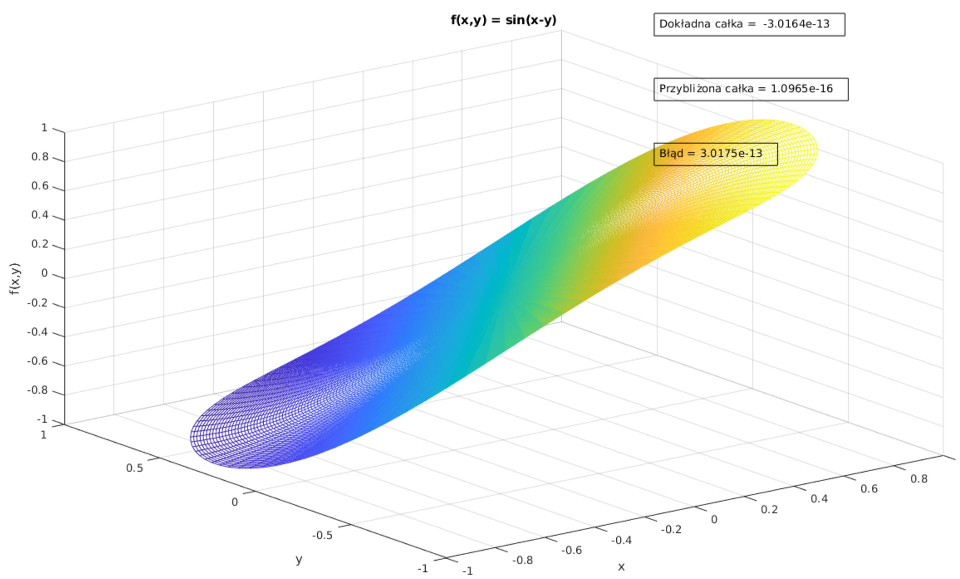
Rysunek 1: Wynik dla funkcji $f(x, y) = e^{x^3-y}$. Błąd jest bardzo mały, zatem program działa.



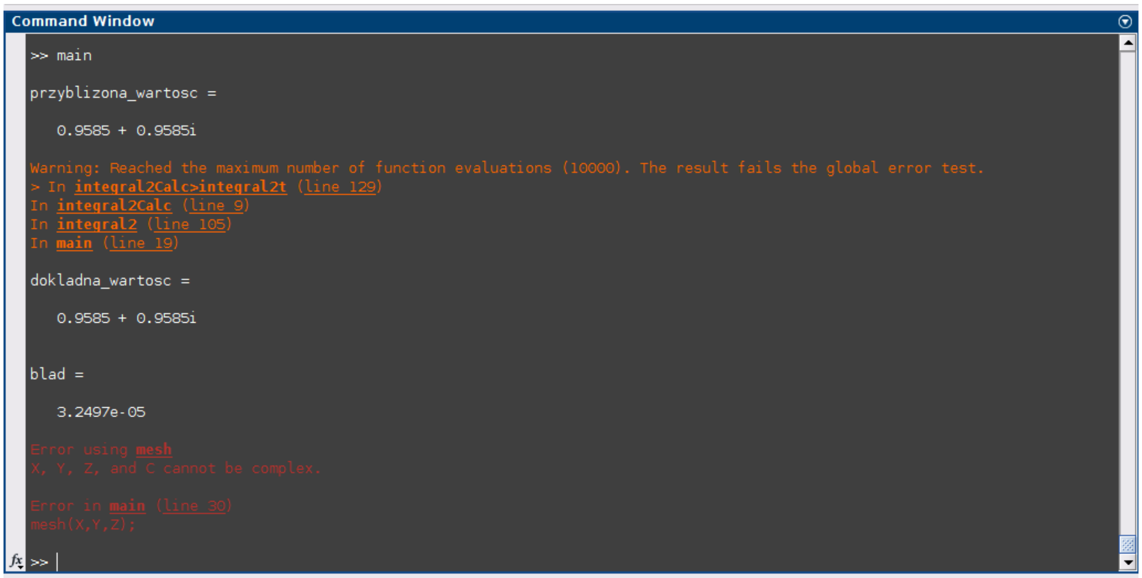
Rysunek 2: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Błąd jest już trochę większy.



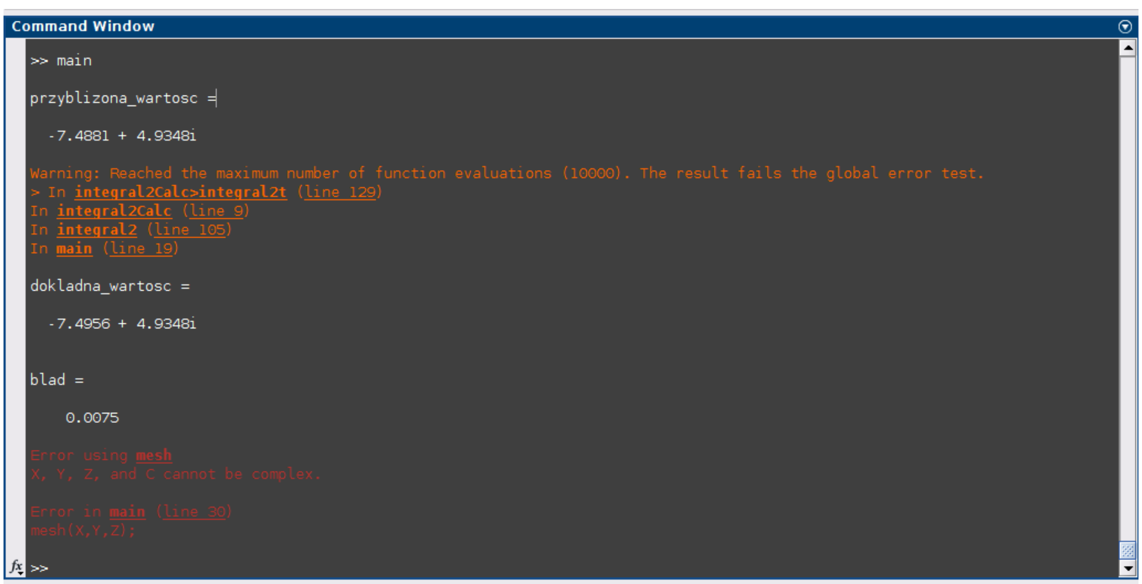
Rysunek 3: Wynik dla funkcji $f(x, y) = (\frac{x}{y})^{10}$. Program nie radzi sobie z dzieleniem bardzo małych liczb. Błąd jest bardzo duży.



Rysunek 4: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \sin(x-y)$. Program liczy całkę bez problemu. Wartość dokładna i przybliżona różnią się znakiem.



Rysunek 5: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \sqrt{x} + y$. Program daje radę, mimo przejścia na zespolone. Jest już jednak problem z wykresem.



Rysunek 6: Wynik dla funkcji $f(x, y) = \log(xy)$. Ponownie zespolone. Tutaj już błąd jest znacznie większy.

4 Analiza wyników

W większości przypadków błąd zaimplementowanej kwadratury prostokątów jest mały (rzędu 10^{-4} lub mniejszy). Program radzi sobie gorzej z dzieleniem przez bardzo małe liczby (przykład 3). Liczby zespolone nie są jednak aż takim problemem.

Tabela 1: Wyniki

L.p.	funkcja	wartość dokładna	wartość przybliżona	błąd
1	$f(x,y) = e^{x^3-y}$	3.6844	3.6844	$4.9767e{-}07$
2	$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	4.0000	3.9993	$6.9341e{-}04$
3	$f(x,y) = (\frac{x}{y})^{10}$	$5.3227e{+}134$	$1.3419e{+}23$	$5.3227e{+}134$
4	$f(x,y) = \sin(x-y)$	$-3.0164e{-}13$	$1.0965e{-}16$	$3.0175e{-}13$
5	$f(x,y) = \sqrt{x} + y$	0.9585 + 0.9585i	0.9585 + 0.9585i	$3.2497e{-}05$
6	$f(x,y) = \log(xy)$	-7.4956 + 4.9348i	-7.4881 + 4.9348i	0.0075