Определенный Интеграл

07.04.2021

] $[p:q]$ – множество целых чисел

$[p,q]$ – невырожденный отрезок $\Leftrightarrow [p:q] \equiv \mathbb{Z} \cap [p,q]$

] $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$

Дробление / разбиение отрезка $[a,b]$:

$[a,b]$ – невырожд.

+ набор (.) τ : $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$; $a = x_0 < x_1 .. < x_n = b$

+ отрезки дробления : $[x_k, x_{k+1}]$ $k = [0 : n-1]$

+ Длина отрезка : $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина k-того отрезка

Ранг дробления / мелкость дробления τ:

$$\lambda_\tau = \lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$$

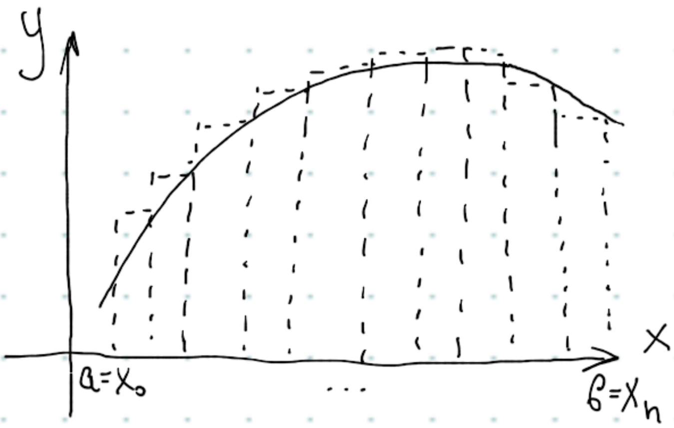
Оснащение дробления: набор (.) ξ : $\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$: $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$

(τ, ξ) – оснащение дробление на $[a,b]$ функции f.

Сумма Римана (интегральная сумма Римана)

] $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = \sigma_\tau(f, \xi_\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta X_k \cdot f(\xi_k)$, отвечает дроблению (τ, ξ)



1) „$X_{\text{хорошая}}$" $f \to \Delta X_k \cdot f(\xi_k) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \int$ подграфика

2) Площадь ?

def **Предел интегральных сумм**

] $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$; $I \in \mathbb{R}$ - предел интегральных сумм
при ранге дробления стремящемуся к 0:
$I = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi_\tau) \Leftrightarrow I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, если:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \quad \forall \xi : |\sigma_\tau(f, \xi_\tau) - I| < \varepsilon$

Замечание 1.

последовательность осн. дроблений: $\{\tau^{(j)}, \xi^{(j)}\}$
последовательность рангов дроблений: $\{\lambda^{(j)}\} \to 0$

$\forall \{(\tau^{(j)}, \xi_\tau^{(j)}\} : \lambda^{(j)} \to 0 : \sigma_{\tau^{(j)}}(f, \xi_\tau^{(j)}) \to I$

Замечание 2.

определение предела <=> определение предела интегральных сумм.

Интеграл Римана

$] f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$; $\exists\ I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma \Rightarrow f$ - инт. по Риману на $[a,b]$

I - определенный интеграл (интеграл Римана)

$R[a,b]$ - множество всех функций интегрируемых на $[a,b]$ по Риману

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

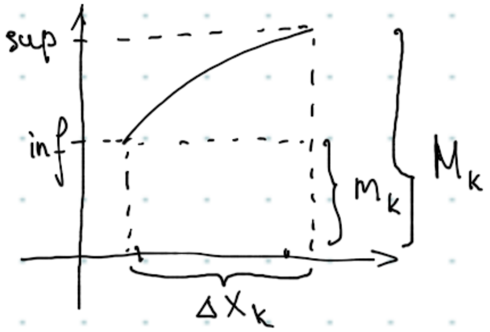
Суммы Дарбу.

$] f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$; $\tau = \{X_k\}_{k=0}$ - дробление $[a,b]$

$M_k = \sup f(x) \quad x \in [X_k, X_{k+1}] \qquad m_k = \inf f(x) \quad x \in [X_k, X_{k+1}]$

Суммы:
$$\left.\begin{aligned} S &= S_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta X_k \\ s &= s_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta X_k \end{aligned}\right\}$$
- верхние и нижние интегральные суммы или суммы Дарбу.

f непрерывна $\xleftrightarrow{\text{т. Вейерштрасс}}$ M_k и m_k - max и min $f(x)$ на $[X_k, X_{k+1}]$



если f – ограничена, то M и m – конечные значения => сумма будет существовать

Свойства сумм Дарбу:

1° $S_\tau(f) = \sup \sigma_\tau(f, \xi_\tau)$ $\quad s_\tau = \inf \sigma_\tau(f, \xi_\tau)$

2° При добавлении новых (.) ($\tau \dots s_\tau$) не увеличится, S_τ – не уменьшится

3° $\forall s_\tau \leq \forall S_\tau$ (не зависит от τ)

Лемма: интегрируемая на отрезке f – ограничена

Верхний и нижний интеграл Дарбу:

$I^* = \inf\limits_\tau S_\tau \qquad I_* = \sup\limits_\tau s_\tau$

Критерий интегрируемости

$] f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$f \in \mathbb{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда: $S_\tau - s_\tau \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

Замечание: $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \tau : s_\tau \leq \int\limits_a^b f \leq S_\tau$

Следствие: $f \in R[a, b] \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{\lambda \to 0} S_\tau}_{= I^*} = \underbrace{\lim\limits_{\lambda \to 0} s_\tau}_{= I_*} = \int\limits_a^b f$

Критерий Дарбу:

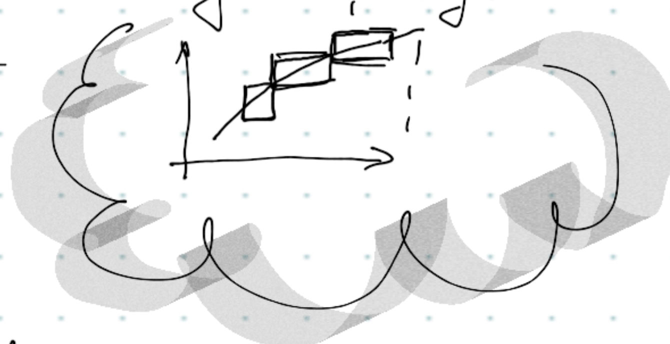
$f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда:

$$\begin{cases} f \text{ - ограничена на } [a,b] \\ I^* = I_* \end{cases}$$

Критерий Римана ($\forall \tau$):

$f \in R[a,b]$ в том и только том случае, когда:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$



- Непрерывная на $[a,b]$ функция f - интегрируема
- Монотонная на $[a,b]$ функция f - интегрируема.

Замечание: если значение интегрируемой ф-ии изменить на конечном множестве $(\cdot) \Rightarrow$ инт. не изменится

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ - кусочно-непрерывная на $[a,b]$ значит то, что множество разрывов I рода $\varnothing$ или конечное

Следствие: К.П.Ф $\in R[a,b]$

Инт функции и её сужение

1) $f \in R[a,b]$; $[\alpha, \beta] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[\alpha, \beta]$

2) $a < c < b$

...

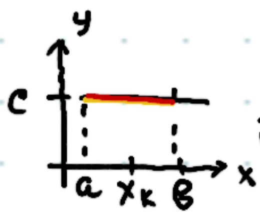
$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \mapsto \mathbb{R} \\ f \in R[a,c] \\ f \in R[c,b] \end{array}\right\} \Rightarrow f \in R[a,b]$$

Ариф. действия над подинт. функ. $(\exists\, f, g \in R[a,b])$

1) $f+g \in R[a,b]$
2) $f \cdot g \in R[a,b]$
3) $\alpha \cdot f \in R[a,b]$
4) $|f| \in R[a,b]$
5) $\inf\limits_{x\in(a,b)} |g(x)| > 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g} \in R[a,b]$

! А теперь задание!

1) $\int\limits_a^b c\, dx \to$ (c - константа)

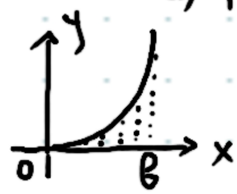


$; \ \Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}; \ \xi_k = c;$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \cdot c = \Delta x_k \sum_{k=0}^{n-1} c \cdot n^0 = c \cdot n \cdot \Delta x_k = c(b-a)$$

2) $b>0; \ \int\limits_0^b x^2 dx$ ($f(x)$ - монотонна); $\Delta x_k = \dfrac{b-0}{n} = \dfrac{b}{n}$

$x_k = \dfrac{k \cdot b}{n} \quad k \in [0:n]$



$\xi_k = x_k \ (k \in [0:n-1])$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{kb}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b^3}{3} = \int\limits_0^b x^2 dx$$

$1 \to 0$

3) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \qquad \Delta X_k = \dfrac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} = \dfrac{2\pi}{2n}$

$\varepsilon_k = k \Delta X_k \quad k \in [0 : n-1]$

$$\sigma = \sum_{n=0}^{n-1} \Delta X_k \cdot \sin(k \cdot \Delta X_k) = \Delta X_k \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k \Delta X_k) \quad *$$

$$\sin(k \Delta X_k) = \frac{1}{2\sin\frac{\Delta X_k}{2}} \cdot \left(\cos\left[\frac{2k-1}{2}\Delta X_k\right] - \cos\left[\frac{2k+1}{2}\Delta X_k\right]\right) =$$

$$= -2\sin\left[\frac{\frac{2k-1}{2}\Delta X_k + \frac{2k+1}{2}\Delta X_k}{2}\right] \sin\left[\frac{\frac{2k-1}{2}\Delta X_k - \frac{2k+1}{2}\Delta X_k}{2}\right] =$$

$$= -2\sin(k\Delta X_k) \cdot \sin\left(-\frac{\Delta X_k}{2}\right) = 2\sin(k\Delta X_k) \cdot \sin\left(\frac{\Delta X_k}{2}\right)$$

$*$

$$\left.\begin{aligned} k=0: &\quad \cos\left(-\tfrac{1}{2}\Delta X_k\right) - \cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta X_k\right) \\ k=1: &\quad \cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta X_k\right) - \cos\left(\tfrac{3}{2}\Delta X_k\right) \\ k=2: &\quad \cos\left(\tfrac{3}{2}\Delta X_k\right) - \cos\left(\tfrac{5}{2}\Delta X_k\right) \end{aligned}\right\} \cos\frac{\Delta X_k}{2} - \cos\left(\frac{2n-1}{2}\Delta X_k\right)$$

$$= \frac{\Delta X_k}{2\sin\frac{\Delta X_k}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\cos\left(\frac{2k-1}{2}\Delta X_k\right) - \cos\left(\frac{2k+1}{2}\Delta X_k\right)\right] =$$

$$= \frac{\Delta X_k}{2\sin\frac{\Delta X_k}{2}} \cdot \left(\cos\left[\frac{\Delta X_k}{2}\right] - \cos\left[\frac{2n-1}{2}\Delta X_k\right]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\to \underbrace{\frac{\frac{\Delta X_k}{2}}{\sin\frac{\Delta X_k}{2}}}_{1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}_{1} - \underbrace{\cos\left[\frac{2n-1}{4n}\pi\right]}_{0}\right) = 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$