# Алгоритм Брона-Кербоша

**Алгоритм Брона-Кербоша** (1973г.) был первоначально разработан для решения задачи поиска клик в заданном скелетном неографе **G**($X$,$U$) на основе применения метода ветвей и границ. Метод ветвей и границ является универсальным методом решения многих оптимизационных задач, в том числе NP-полных графовых задач. Решение находится по дереву всех возможных решений, но в отличие от полного перебора позволяет отсечь бесперспективные, заведомо не содержащие оптимальные решения. Отсюда и такое название метода.

Рассмотрим далее этот алгоритм для поиска максимальных и наибольших внутренне устойчивых множеств (ВУМ). Идея метода для данных задач заключается в следующем. Каждое максимальное ВУМ (МВУМ) состоит из максимального по включению в него несмежных между собой вершин, МВУМ порождает в графе максимальный пустой подграф. Начиная с произвольной вершины (образующей ВУМ), пытаемся добавить в него новые вершины из множества кандидатов, не нарушая свойств внутренней устойчивости (не смежности вершин). Высокая скорость данного алгоритма обеспечивается за счет отсечения тех вариантов, которые не приведут к расширению ВУМ. Для этого в алгоритме используется дополнительное множество, в котором фиксируются те вершины, которые уже использовались ранее для расширения данного ВУМ.

В алгоритме Брона-Кербоша на каждом шаге строятся следующие три множества:

$S_k$ - множество вершин ВУМ,

$Q^+{}_k$ - множество вершин – кандидатов для расширения $S_k$,

$Q^-{}_k$ - множество вершин, которые уже использовались для расширения $S_k$ на предыдущих шагах алгоритма (дополнительное множество).

Алгоритм использует следующие условия для определения состояний процесса поиска.

| № | Условие | Состояние процесса поиска в алгоритме |
|---|---|---|
| 1. | $Q^+{}_k = S_k = \varnothing$ | Конец поиска (закончен перебор всех возможных решений) |
| 2. | $Q^+{}_k \neq \varnothing$ | Дальнейшее расширение множества $S_k$ |
| 3. | $Q^+{}_k = Q^-{}_k = \varnothing$ | Найдено очередное МВУМ (больше нет кандидатов на расширение $S_k$ и в нем нет повторов удаленных вершин) |

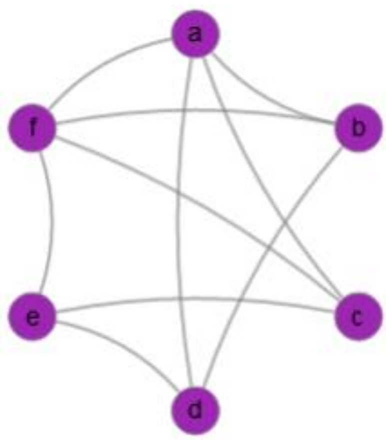
При расширении множества $S_k$ за счет добавления в него вершины $x$ по условию №2 производится коррекция множества $Q^-{}_k$ следующим образом. Вначале устанавливается $Q^-{}_k = \varnothing$, а затем в него добавляются вершины из множества $Q^-{}_{k-1}$, не смежные со всеми вершинами из множества.

Обозначим далее $\Gamma(x)$ - множество образов вершины $x$, $F$ - множество МВУМ в графе, $p$ - количество МВУМ в графе. Ветвление в алгоритме Брона-Кербоша для поиска решений осуществляется следующим образом.

Установка начальных значений: $k=0$, $p=0$, $S_0 = \varnothing$, $Q^+{}_0 = X$, $Q^-{}_0 = \varnothing$.
ПОКА $\neg(Q^+{}_k = S_k = \varnothing)$ ВЫПОЛНЯТЬ:

1. ПОКА $Q^+{}_k \neq \varnothing$ ВЫПОЛНЯТЬ:
   1.1. Определить следующий уровень в дереве решений: $k = k+1$
   1.2. Выбрать любую вершину $x \in Q^+{}_k$
   1.3. Построить множества $k$-го уровня за счет добавления вершины $x$:
   $S_k = S_{k-1} \bigcup x$, $Q^+{}_k = Q^+{}_{k-1} \setminus (x \bigcup \Gamma(x))$, $Q^-{}_k = \varnothing$
   1.4. Учесть повторы в $S_k$ ранее удаленных вершин по условию
   $\forall v \in Q^-{}_{k-1}(\Gamma(v) \bigcap S_k = \varnothing)$: $Q^-{}_k = Q^-{}_k \bigcup v$
2. ЕСЛИ $Q^+{}_k = Q^-{}_k = \varnothing$, ТО ВЫПОЛНИТЬ: $p = p+1$, $F_p = S_k$
3. Вернуться к предыдущему уровню: $k = k-1$
4. Скорректировать множества $k$-го уровня за счет удаления вершины $x$:
   $S_k = S_k \setminus x$, $Q^+{}_k = Q^+{}_k \setminus x$, $Q^-{}_k = Q^-{}_k \bigcup x$

ПРИМЕР. Для данного графа найти все МВУМ с помощью алгоритма Брона-Кербоша.




Решение для заданного на рисунке графа заполним в виде следующей таблицы.

| № | $k$ | $S_k$ | $Q^+{}_k$ | $Q^-{}_k$ | МВУМ? |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | - | a,b,c,d,e,f | - | |
| 2 | 1 | c | b,d | - | |
| 3 | 2 | c,b | - | - | + |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | c | d | b | |
| 5 | 2 | c,d | - | - | + |
| 6 | 1 | c | - | b,d | |
| 7 | 0 | - | a,b,d,e,f | c | |
| 8 | 1 | d | f | c | |
| 9 | 2 | d,f | - | - | + |
| 10 | 1 | d | - | c,f | |
| 11 | 0 | - | a,b,e,f | c,d | |
| 12 | 1 | e | a,b | - | |
| 13 | 2 | e,a | - | - | + |
| 14 | 1 | e | b | a | |
| 15 | 2 | e,b | - | - | + |
| 16 | 1 | e | - | a,b | |
| 17 | 0 | - | a,b,f | c,d,e | |
| 18 | 1 | a | - | e | |
| 19 | 0 | - | b,f | a,c,d,e | |
| 20 | 1 | b | - | c,e | |
| 21 | 0 | - | f | a,b,c,d,e | |
| 22 | 1 | f | - | d | |
| 23 | 0 | - | - | a,b,c,d,e,f | |

В результате работы алгоритма была построена следующая таблица МВУМ.

| № | МВУМ | НВУМ? |
|---|---|---|
| 1 | c,b | + |
| 2 | c,d | + |
| 3 | d,f | + |
| 4 | e,a | + |
| 5 | e,b | + |

Для данного графа все МВУМ являются также и НВУМ. Поэтому $\alpha_0(G)=2$, а количество НВУМ равно 5.