Zad. 2

a) $B_i^n(x) \geqslant 0$ ① i osiąga dokładnie 1 maksimum ② dla $x \in [0,1]$

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

$(1-x)^{n-i}$: $\geqslant 0$ w przedziale $[0,1]$

x^i: $\geqslant 0$ w przedziale $[0,1]$

$\binom{n}{i}$: zawsze $\geqslant 0$

Zatem ① spełniona.

Sprawdźmy ekstrema: $(x \in (0,1))$

$$B_i^n(x)' = 0$$

$$\binom{n}{i} i \cdot x^{i-1} \cdot (1-x)^{n-i} - \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot (n-i) \cdot (1-x)^{n-i-1} = 0 \quad / : \binom{n}{i}$$

$$i \cdot x^{i-1} \cdot (1-x)^{n-i} - x^i \cdot (n-i) \cdot (1-x)^{n-i-1} = 0 \quad / : x^{i-1} \cdot (1-x)^{n-i-1}$$

$$i \cdot (1-x) - x(n-i) = 0$$

$$i - ix - xn + ix = 0$$

$$i = xn$$

$x = \frac{i}{n}$ - czyli jest to jedyne ekstremum w przedziale $[0,1]$ ②

b) $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \equiv 1$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} = (t + 1 - t)^n = 1^n = 1$$

z dwumianu Newtona

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-y)^{n-i} = (x+y)^n\right)$$

c) $B_i^n(u) = (1-u) B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$

$$(1-u) B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u) =$$

$$= (1-u)\binom{n-1}{i} u^i (1-u)^{n-1-i} + u \binom{n-1}{i-1} u^{i-1} (1-u)^{n-i} =$$

$$= \binom{n-1}{i} u^i (1-u)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} u^i (1-u)^{n-i} =$$

$$= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] u^i (1-u)^{n-i} =$$

$$= \left[\frac{(n-1)!}{\ldots} + \frac{(n-1)!}{\ldots}\right] u^i (1-u)^{n-i} = \frac{(n-1)!(n-i) + (n-1)!\, i}{\ldots} u^i (1-u)^{n-i} =$$

$$= \left[\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right] u^i(1-u)^{n-i} = \frac{(n-1)!(n-i)+(n-1)!\,i}{i!(n-i)!} u^i(1-u)^{n-i} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-i+i)}{i!(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i} = \binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i} = B_i^n(u)$$

d) $B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1}B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(u) \qquad (0\le i\le n)$

$$\frac{n+1-i}{n+1}B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(u) =$$

$$= \frac{n+1-i}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}u^i\cdot(1-u)^{n+1-i} + \frac{i+1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}\cdot u^{i+1}\cdot(1-u)^{n-i} =$$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!}u^i(1-u)^{n+1-i} + \frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot u^{i+1}\cdot(1-u)^{n-i} =$$

$$= \binom{n}{i}\left(u^i(1-u)^{n+1-i} + u^{i+1}\cdot(1-u)^{n-i}\right) =$$

$$= \binom{n}{i}\left(u^i(1-u)^{n-i}(1-u+u)\right) = \binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i} = B_i^n(u)$$

Zad. 5

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)W_i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i\cdot(1-t)^{n-i}\cdot W_i$$

$$P(t) = \binom{n}{0}t^0\cdot(1-t)^n\cdot W_0 + \binom{n}{1}t^1\cdot(1-t)^{n-1}\cdot W_1 + \dots + \binom{n}{n-1}t^{n-1}\cdot(1-t)\cdot W_{n-1} + \binom{n}{n}t^n\cdot W_n$$

Możemy wykorzystać schemat Hornera i wyciągać $(1-t)$ przed nawias

$$P(t) = \left(\dots\left(W_0\binom{n}{0}(1-t) + W_1\binom{n}{1}t\right)(1-t) + \dots + W_{n-1}\binom{n}{n-1}t^{n-1}\right)(1-t) + W_n\binom{n}{n}t^n$$

Skorzystamy również z faktu, że $\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1}\cdot\frac{n+1-i}{i}$

ALGORYTM:

$b = n$ (symbol Newtona)

$w = W_0$

$d = t$ (t do kolejnych potęg)

$s = 1-t$

FOR $i=1$ to n:

$w = w \cdot s + W_i \cdot b \cdot d$
$d = d \cdot t$
$b = (b \cdot (n-i)) / (i+1)$

RETURN w

Zad. 7

$$R_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} \cdot W_i$$

Kombinacja barycentryczna punktu wyraża się przez

$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_n W_n$,

gdzie $\alpha_i \in \mathbb{R}$ oraz $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, a W_i to punkty

Czyli $\alpha_i = \dfrac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)}$,

więc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = 1$,

czyli $R_n(t)$ jest kombinacją barycentryczną punktów,

a więc jest on punktem na płaszczyźnie