Zad. 8

Weźmy ścieżkę P, która będzie najdłuższą ścieżką w grafie i przechodzi przez wierzchołki $v_0, v_1, \dots, v_n$.

Skoro każdy wierzchołek ma stopień 3, to v_0 muszą istnieć $2 \le i < j \le n$, takie że $v_0 v_i,\ v_0 v_j \in E(G)$.

Ponadto, $v_i, v_j \in P$, bo w przeciwnym razie P nie byłaby najdłuższą ścieżką.

Jeśli i jest nieparzyste, możemy utworzyć cykl biorąc ścieżkę od v_0 do v_i należącą do P, która ma nieparzystą długość i dołączając krawędź $v_0 v_i$, który będzie miał parzystą długość.

Analogicznie jeśli j jest nieparzyste.

Jeśli i oraz j są parzyste, to możemy wziąć ścieżkę od v_i do v_j należącą do P, która ma parzystą długość i dołączyć krawędzie $v_0 v_i$ i $v_0 v_j$. Otrzymamy wtedy cykl o parzystej długości.

Zad. 10

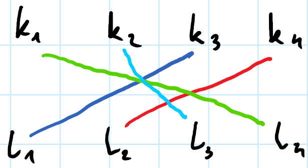
Niech $G = (K \cup L, E)$ będzie grafem dwudzielnym, gdzie K to zbiór kolumn, a L to zbiór liczb.

$K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, $L = \{l_1, l_2, \dots, l_3\}$

Krawędź $(k_i, l_j) \in E(G)$ wtw. gdy liczba l_j nie znajduje się w kolumnie k_i.

Przykład:

Dla prostokąta $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ otrzymany graf:



Aby dodać wiersz do prostokąta, należy znaleźć skojarzenie doskonałe grafu i do każdej kolumny dodać skojarzoną z nią liczbę.

$[1\ 2\ 3\ 4]$

Aby dodać wiersz do prostokąta, należy znaleźć skojarzenie doskonałe grafu i do każdej kolumny dodać skojarzoną z nią liczbę.

Czyli dla powyższego przykładu dopisalibyśmy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Skojarzenie doskonałe zawsze będzie istnieć, ponieważ każdy wierzchołek ma $n-m$ krawędzi,

czyli dla każdego $K' \subseteq K$, jeśli $|K'| = x$, to $|N(K')| \geqslant x = |K'|$

oraz dla każdego $L' \subseteq L$, jeśli $|L'| = y$, to $|N(L')| \geqslant y = |L'|$,

czyli spełniony jest warunek Halla.

Zad. 3

Aby problem miał rozwiązanie, żadna osoba ze zbioru B nie może mieć więcej niż jednej osoby chętnej na poślubienie jej.

Możemy utworzyć zbiór A', w którym każda osoba a znajdzie się tyle razy, ile kobiet chce poślubić i każdy „klon" a zostanie połączony z jedną z osób z B, którą chce poślubić (każdy z inną).

Wystarczy wtedy, że dla dowolnego $A'' \subseteq A'$ zachodzi $|N(A'')| \geqslant |A''|$.

Zad. 5

Mamy tablicę N, gdzie każdy wierzchołek ma przypisane wierzchołki, do których mają krawędź.

$S \leftarrow \{s\}$, $d(s) \leftarrow 0$

dla każdego sąsiada v z N wierzchołka s: $t(v) \leftarrow c(s,v)$

dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$

dopóki $S \neq V$ wykonaj:

dopóki $S \neq V$ wykonaj:

$u \leftarrow \operatorname{argmin}\{t(u) : u \notin S\}$

dodaj u do S

zaktualizuj wartości $t(v)$:

dla każdego sąsiada $v \notin S$ z N wierzchołka u:

$t(v) \leftarrow \min\{t(v), d(u) + c(u,v)\}$