Zad. 7

$x_0 = -3 \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 4$

$y_0 = 0 \quad y_1 = 2 \quad y_2 = 6 \quad y_3 = -10$

$$L_3 = y_0 \lambda_0 + y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3$$

$$\lambda_0 = \frac{(x+2)x(x-4)}{(-3+2)(-3)(-3-4)} = -\frac{1}{7} x(x+2)(x-4)$$

$$\lambda_1 = \frac{(x+3)x(x-4)}{(-2+3)(-2)(-2-4)} = \frac{1}{12} x(x+3)(x-4)$$

$$\lambda_2 = \frac{(x+3)(x+2)(x-4)}{3 \cdot 2 \cdot (-4)} = -\frac{1}{24}(x+3)(x+2)(x-4)$$

$$\lambda_3 = \frac{(x+3)(x+2)x}{(4+3)(4+2)\cdot 4} = \frac{1}{168}(x+3)(x+2)x$$

$$L_3 = \frac{1}{6} x(x+3)(x-4) - \frac{1}{4}(x+3)(x+2)(x-4) - \frac{10}{168}(x+3)(x+2)x$$

Zad. 9

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k$

Niech $f(x) = 1$.

$$1 = f(x) \equiv L_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \lambda_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x)$$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j=0 \\ 0, & \text{gdy } j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$

Niech $f(x) = \begin{cases} x^j & \text{dla } j \neq 0 \\ 1 & \text{dla } j = 1 \end{cases}$

① $j \neq 0$

$w(x) \equiv x^j$ w punktach od x_0 do x_n

$$x^j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) x_k^j$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j$$

② $j = 0$

skoro

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \cdot 1$$

to $1 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0)$

Zad. 8

$$f(x) = 2020x^5 + 1977x^4 - 1410x^3 + 1945x - 1791$$

a) Rozwiązanie zadania interpolacyjnego Lagrange'a jest jednoznaczne, zatem $L_n(x) = f(x)$

b) $x_0 = -1, \quad y_0 = f(-1) = -2020 + 1977 + 1410 - 1945 - 1791 = -2369$

$x_1 = 0, \quad y_0 = f(0) = -1791$

$x_2 = 1, \quad y_0 = f(1) = 2020 + 1977 - 1410 + 1945 - 1791 = 2741$

$$L_2(f) = y_0 \lambda_0 + y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2$$

$$\lambda_0 = \frac{(x-1)x}{\quad} = \frac{1}{\quad} x(x-1)$$

$$L_2(f) = y_0 \lambda_0 + y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2$$

$$\lambda_0 = \frac{(x-1)x}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

$$\lambda_1 = \frac{(x+1)(x-1)}{(-1)\cdot 1} = -(x+1)(x-1)$$

$$\lambda_2 = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}x(x+1)$$

$$L_2(f) = -\frac{2369}{2}x(x-1) + 1791(x+1)(x-1) - \frac{2741}{2}x(x+1) =$$

$$= -\frac{2369}{2}x^2 + \frac{2369}{2}x + 1791x^2 - 1791 - \frac{2741}{2}x^2 - \frac{2741}{2}x$$

Zad. 6

① istnienie

Weźmy $\lambda_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Rozpatrzmy 2 przypadki:

1) $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $k = i$

Wtedy mamy:

$$\lambda_i(x_k) = \lambda_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_i-x_j}{x_i-x_j} = 1$$

2) $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $k \neq i$

Wtedy mamy:

$$\lambda_i(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_k-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot\overbrace{(x_k-x_k)}^{0}\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} = 0$$

Dla $x_i \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mamy:

$$L_n(x_i) = y_0 \cdot \lambda_0(x_i) + y_1 \cdot \lambda_1(x_i) + \ldots + y_i \lambda_i(x_i) + \ldots + y_n \lambda_n(x_i)$$

Z 2) wiemy, że składniki sum o indeksach różnych od i są równe 0, a z 1), że składnik o indeksie i jest równy y_i, zatem $L_n(x_i) = y_i$, więc $L_n(x)$ jest wielomianem interpolującym funkcję $f(x)$ w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$.

② jednoznaczność

Weźmy dwa dowolne wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$ stopnia n, takie że dla $x_i \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $P(x_i) = Q(x_i)$.

Rozważmy wielomian $R(x)$ taki, że $R(x) = P(x) - Q(x)$.

Wiemy, że $R(x)$ jest stopnia co najwyżej n, bo $P(x)$ i $Q(x)$ są stopnia n.

Dla $x_i \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ zachodzi $R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i)$,
czyli $R(x_i) = 0$.

Wynika z tego, że $R(x)$ ma co najmniej $n+1$ miejsc zerowych, ale skoro jest stopnia co najwyżej n, to musi być tożsamościowo równy 0.

Zatem
$$R(x) = 0 \quad \text{czyli} \quad P(x) - Q(x) = 0,$$
więc $P(x) = Q(x)$,

czyli interpolacja wielomianowa Lagrange'a jest jednoznaczna.

Zad. 4

$T_k = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$ (k≥2)
$T_0(x) \equiv 1$
$T_1(x) \equiv x$

a) $T_2(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 =$
$= 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x =$
$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) =$
$= 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

b) * dla $T_n(x)$ współczynnik przy x^n to 2^{n-1}, $(n \geq 1)$
a przy x^{n-1} to 0.

Indukcja

Podstawa ind.

$T_1(x) = \overset{2^{1-1}}{1} \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$

$T_2(x) = 2x^2 - 1 + 0 \cdot x^1$ (2^{2-1})

Załóżmy, że dla każdego $i \leq n$ zachodzi *. Pokażemy, że zachodzi też dla $n+1$

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x \cdot (2^{n-1}x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \dots) - (2^{n-2}x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \dots) =$
$= 2^n x^{n+1} + 0 \cdot x^n + \dots$ ■

c)

i) $|T_n(x)| \leq 1$:

$|T_n(x)| = |\cos(n \cdot \arccos x)|$

Zbiór wartości cosinusa to $[-1,1]$,

zatem $|T_n(x)| \le 1$

ii) $|T_n(x)| = 1$

$|\cos(\alpha)| = 1$ dla $\alpha = k\cdot\pi$

$n\cdot \arccos x = k\pi$

$\frac{k\pi}{n} = \arccos x \quad / \cos$

$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = x$

$x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$

$0 \le \frac{k\pi}{n} \le \pi$

$0 \le k \le n$

iii) $T_{n+1} = \cos((n+1)\arccos x) = 0$

$(n+1)\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \cos$

$x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$

$0 \le \frac{2k+1}{2n+2}\pi \le \pi \quad /:\pi$

$0 \le \frac{2k+1}{2n+2} \le 1 \quad /\cdot(2n+2)$

$0 \le 2k+1 \le 2n+2 \quad /-1$

$-1 \le 2k \le 2n+1 \quad /:2$

$-\frac{1}{2} \le k \le n+\frac{1}{2}$

$k \in [0,n]$ - czyli $n+1$ zer rzeczywistych

Zad. 3

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &T_k = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad (k\ge 2) \\ &T_0(x) \equiv 1 \\ &T_1(x) \equiv x \end{aligned}}$$

$B_{n+1} = B_{n+2} = 0$

$B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + c_k$

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2})\cdot T_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}{}' B_k T_k(x) - 2x\sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2}B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - xB_1 T_0(x) - \frac{1}{2}B_2 T_0(x) + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+2}(x) - 2x\sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2}B_0 + xB_1 - xB_1 - \frac{1}{2}B_2 + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2}\underbrace{\left(T_{k+2}(x) - 2xT_{k+1}(x) + T_k(x)\right)}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$$

Zad. 1

Mamy algorytm w postaci

$w_n = a_n$

$w_{n-1} = w_n x + a_{n-1}$

Mamy więc: $\beta_0 = 0$

$$a_0(1+\beta_0) + a_1 x(1+\alpha_1)(1+\beta_0)(1+\beta_1) + \ldots + a_n x^n (1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)(1+\beta_0)\ldots(1+\beta_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j) \prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j)$$

Niech $(1+B)$ to maksymalny błąd $(1+\beta_i)$ a $(1+A)$ to maksymalny błąd $(1+\alpha_i)$.

Mamy wtedy $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=1}^{i}(1+B) \cdot \prod_{j=1}^{i}(1+A) = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+A)^i (1+B)^i$

bo $\beta_0 = 0$

Niech $(1+\varepsilon) = (1+A)(1+B)$. $1+\varepsilon$ jest nadal małym błędem.

Czyli $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i [(1+A)(1+B)]^i = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\varepsilon)^i = \sum_{i=0}^{n} [x\cdot(1+\varepsilon)]^i a_i = \sum_{i=0}^{n} \tilde{x}^i a_i$,

czyli jest to dokładny wynik dla lekko zaburzonych danych,

zatem algorytm jest numerycznie poprawny.