ZADANIE 3

Pokażemy, że rząd kwadratury w postaci $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ nie przekracza $2n+2$.

Aby to pokazać, zbudujemy wielomian $f(x)$ stopnia $2n+2$, dla którego zachodzi:

$$\int_a^b f(x) \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Weźmy $f(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2$ (stopień $2n+2$)

$\int_a^b f(x) > 0$ dla x, które nie są miejscami zerowymi $f(x)$

$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$, bo x_k są miejscami zerowymi $f(x)$

Czyli $\int_a^b f(x) > 0 = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$,

więc $\int_a^b f(x) \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, (dla x niebędących miejscami zerowymi $f(x)$)

co oznacza, że kwadratura nie jest dokładna, więc jej rząd nie przekracza $2n+2$.