Zad. 3

G jest drzewem <=> $\forall_{u,v \in G}$ w G istnieje jedna ścieżka z u do v

=>

Załóżmy, że G jest drzewem i weźmy dowolne wierzchołki u i v takie że $u, v \in G$

Skoro G jest drzewem, to jest grafem spójnym, więc istnieje co najmniej jedna ścieżka z u do v.

Jeśli istniałaby więcej niż 1 ścieżka, to dałoby się dojść z u do v jakąś ścieżką, a wrócić inną, czyli w grafie byłby cykl, co jest sprzeczne z założeniem.

Zatem w grafie G istnieje dokładnie jedna ścieżka z u do v.

<=

Załóżmy, że $\forall_{u,v \in G}$ w grafie G istnieje dokładnie jedna ścieżka z u do v.

Skoro istnieje ścieżka z u do v to graf jest spójny.

Skoro istnieje tylko jedna ścieżka z u do v to graf jest acykliczny.

Czyli graf G jest drzewem.

■

Zad. 6

Zbiór wierzchołków grafu Q_k możemy podzielić na 2 zbiory:

P - zbiór wierzchołków, w których występuje parzysta liczba jedynek

N - zbiór wierzchołków, w których występuje nieparzysta liczba jedynek

Wierzchołki są sąsiednie, gdy różnią się jedną współrzędną, czyli wierzchołek zawsze ma o jedną jedynkę mniej lub więcej niż jego sąsiad.

Oznacza to, że wierzchołek ze zbioru P nie może sąsiadować z wierzchołkiem ze zbioru P.
Analogicznie dla zbioru N.

Zatem $\forall_{\{u,v\} \in Q_k}$ $u \in P \wedge v \in N$, czyli Q_k jest grafem dwudzielnym.

Zad. 9

Aby pokazać, że przynajmniej jeden z grafów $G=(V,E)$ i $\bar{G}=(V,E')$ jest spójny, musimy pokazać następującą implikację:

G nie jest grafem spójnym => $\bar{G}$ jest grafem spójnym

Załóżmy, że graf G nie jest spójny.

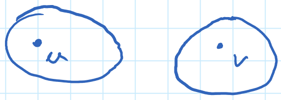
Wtedy graf G ma co najmniej 2 spójne składowe.

Z definicji dopełnienia grafu wiemy, że G i $\overline{G}$ mają takie same zbiory wierzchołków.

Weźmy dowolne różne wierzchołki $u, v \in V$.

Mamy 2 możliwości:

(1) u i v są w różnych spójnych składowych grafu G



Czyli $\{u,v\} \notin E$, co implikuje, że $\{u,v\} \in E'$,

co oznacza, że dowolne 2 wierzchołki w grafie $\overline{G}$ są ze sobą połączone,

czyli $\overline{G}$ jest spójny.

(2) u i v są w tej samej spójnej składowej

Wtedy istnieje jeszcze co najmniej jedna spójna składowa z co najmniej 1 wierzchołkiem - nazwijmy go w

Czyli $\{u,v\} \in E$, co implikuje, że $\{u,v\} \notin E'$.

Wiemy też, że $\{u,w\} \notin E$ i $\{w,v\} \notin E$, co implikuje, że $\{u,w\} \in E'$ i $\{w,v\} \in E'$,

co oznacza, że dla dowolnych u i v w grafie $\overline{G}$ istnieje ścieżka (u, w, v),

czyli istnieje ścieżka z u do v, więc $\overline{G}$ jest spójny

■

Zad. 8

Weźmy dwie najdłuższe ścieżki grafu spójnego - P_1 i P_2.

Załóżmy nie wprost, że P_1 i P_2 nie mają wspólnego wierzchołka.

Weźmy dowolny wierzchołek ze ścieżki P_1, nazwijmy go p_1.

Analogicznie weźmy wierzchołek z P_2 i nazwijmy p_2.

Skoro graf jest spójny to istnieje ścieżka z p_1 do p_2 o długości co najmniej 1.

Niech k będzie długością ścieżki P_1, a l ścieżki P_2.

Weźmy ten końcowy wierzchołek ścieżki P_1, którego odległość od punktu p_1 jest większa lub równa długości tej ścieżki.

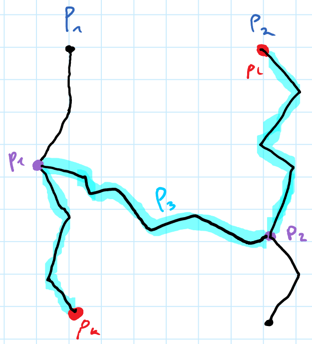
Nazwijmy ten wierzchołek p_k. Analogicznie zróbmy dla P_2, otrzymując wierzchołek p_l.

Wtedy:

$p_k - p_1 \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$

$p_l - p_2 \geq \lceil \frac{l}{2} \rceil$

Możemy poprowadzić ścieżkę z p_k do p_l przechodzącą przez p_1 i p_2 i nazwijmy ją P_3.



Wtedy $|P_3| = \lceil \frac{k}{2} \rceil + \lceil \frac{l}{2} \rceil + 1 \geq \min(k, l)$, czyli P_1 i P_2 nie są najdłuższymi ścieżkami.

Mamy więc sprzeczność z założeniem.

Zatem dwie najdłuższe ścieżki grafu spójnego muszą mieć wspólny wierzchołek.

Zad. 1

ALGORYTM

1. Oznaczamy pierwszy wierzchołek kolorem czerwonym i jako odwiedzony.
2. Idziemy do jego pierwszego sąsiada i sprawdzamy, czy jest pokolorowany.

   Jeśli nie, to nadajemy mu kolor inny niż kolor poprzedniego wierzchołka (jeśli poprzedni był czerwony to ten będzie niebieski i odwrotnie)

   Jeśli tak i ma ten sam kolor co poprzedni wierzchołek to nie jest to graf dwudzielny i kończymy algorytm.
3. Gdy wierzchołek nie ma już więcej sąsiadów, cofamy się do poprzedniego wierzchołka.
4. Powtarzamy krok 2.
5. Jeśli wszystkie wierzchołki zostały pokolorowane, to graf jest dwudzielny i kończymy algorytm.

Złożoność algorytmu to $O(m+n)$,

gdzie n - liczba wierzchołków, m - liczba krawędzi.

Jest tak ponieważ odwiedzamy wszystkie wierzchołki oraz ich sąsiadów.