MDL - Lista 4

sobota, 31 października 2020 19:06

Zad. 1 ? (do sprawdzenia)

Kontrprzykład

$132 = 11 \cdot 12$

$$\overset{1}{a_2}\ \overset{3}{a_1}\ \overset{2}{a_0}$$

$$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2i-1} = \sum_{i=1}^{1} a_1 = 3$$

$$\sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2i} = \sum_{i=0}^{1} a_0 = 2$$

$$(3-2) \bmod 11 = 1 \bmod 11 = 1 \not\equiv 0$$

Zad. 1 ? (do sprawdzenia, chyba coś poszło nie tak)

Aby policzyć 2 ostatnie cyfry rozwinięcia dziesiętnego 71^{71} musimy policzyć $71^{71} \bmod 100$.

$$71^{71} \bmod 100$$

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 25$$

$$71^{71} \equiv_4 (71 \bmod 4)^{71} \equiv_4 3^{71} \equiv_4 3 \cdot 3^{70} \equiv_4 3 \cdot 9^{35} \equiv_4$$

$$\equiv_4 (3 \bmod 4) \cdot (9 \bmod 4)^{35} \equiv_4 3 \cdot 1^{35} \equiv_4 3$$

$$71^{71} \equiv_{25} (71 \bmod 25)^{71} \equiv_{25} 21^{71} \equiv_{25} 21 \cdot 21^{70} \equiv_{25} 21 \cdot 441^{35} \equiv_{25}$$

$$71^{71} \equiv_{25} (71 \bmod 25)^{71} \equiv_{25} 21^{71} \equiv_{25} 21 \cdot 21^{70} \equiv_{25} 21 \cdot 441^{35} \equiv_{25}$$

$$\equiv_{25} 21 \cdot 16^{35} \equiv_{25} 21 \cdot 16 \cdot 256^{17} \equiv_{25} 21 \cdot 16 \cdot 6^{17} \equiv_{25}$$

$$\equiv_{25} 21 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 36^{8} \equiv_{25} 21 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 11^{8} \equiv_{25} 21 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 121^{4} \equiv_{25}$$

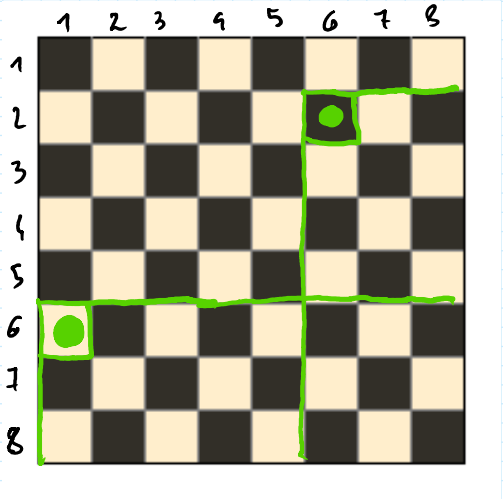
$$\equiv_{25} 21 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 21^{4} \equiv_{25} 21 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 441^{2} \equiv_{25} 169\,344 \equiv_{25} 9$$

$$x \bmod 4 = 3$$

$$x \bmod 25 = 9$$

$$x = 59$$

Zad. 10 ✗



Zad. 2 ✓

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}$$

$x = 5t + 2$ Szukamy najmniejszego t, dla którego spełnione jest drugie równanie.

$x \equiv 17 \mod (5 \cdot 7)$

$t = 3$

$x = 35u + 17$ Szukamy najmniejszego u, dla którego spełnione jest trzecie równanie.

$x \equiv 17 \mod (5 \cdot 7 \cdot 13)$

$u = 0$

Najmniejsze rozwiązanie to $x = 17$, a rozwiązanie ogólne to $x = 17 + (5 \cdot 7 \cdot 13)k$

Zad. 3 ✓

Jeśli 2^n-1 jest liczbą pierwszą, to n też jest liczbą pierwszą.
(dla $n \geq 2$)

Dowód przez kontrapozycję:
pokażemy, że

Jeśli n nie jest liczbą pierwszą, to 2^n-1 też nie jest liczbą pierwszą.

Załóżmy, że n nie jest liczbą pierwszą

Zatem $\exists_{\substack{x,y \in \mathbb{Z} \\ x,y>1}} \; n = x \cdot y$

$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^1 + 1)$

korzystamy z tego wzoru

Czyli $2^n - 1 = 2^{xy} - 1 = (2^x)^y - 1 = (2^x - 1)(2^{x(y-1)} + 2^{x(y-2)} + \ldots + 2^{x \cdot 1} + 1)$

Skoro $x>1$ to $2^x - 1 > 1$ i skoro $y>1$ to $2^x - 1 < 2^n - 1$,
a zatem $2^x - 1$ jest dzielnikiem 2^{n-1} i jest różny od 1 i $2^n - 1$,
więc $2^n - 1$ nie jest liczbą pierwszą. ■

Zad. 4 ✔

Zał. że $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą (czyli $a \in \mathbb{N} \wedge a > 0$)

$$a^n - 1 = (a-1)\overbrace{(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^1 + 1)}^{w(a)}$$

Zatem $a-1$ jest dzielnikiem liczby $a^n - 1$.
Skoro $a^n - 1$ jest pierwsza to mamy dwie możliwości:

1. $a - 1 = a^n - 1$

Wtedy jednak $w(a)$ musiałby być równy 1, a jest większy od 1
(bo wszystkie jego składniki są nieujemne)
Mamy zatem sprzeczność i odrzucamy ten przypadek.

2. $a - 1 = 1$
$\Updownarrow$
$a = 2$

Zatem a musi być równe 2. ■

Zad. 5 ✔

Weźmy 2 kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego:

a_{n-1} i a_n

Chcemy pokazać, że $NWD(a_n, a_{n-1}) = 1$

Korzystamy z algorytmu Euklidesa:

$NWD(a_n, a_{n-1}) = NWD(a_{n-2}+a_{n-1}, a_{n-1}) =$

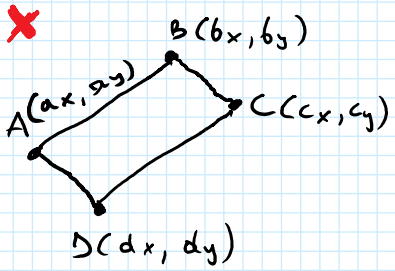
$a_{n-2} < a_{n-1}$, więc $(a_{n-2}+a_{n-1}) \bmod a_{n-1} = a_{n-2}$

$= NWD(a_{n-1}, a_{n-2}) = NWD(a_{n-2}+a_{n-3}, a_{n-2}) =$

$= NWD(a_{n-2}, a_{n-3}) = \dots = NWD(a_1, a_0) = NWD(1, 0) = 1$ ■

Tutaj zauważamy, że w każdym kolejnym kroku będziemy liczyć NWD dwóch kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego, zbliżając się do początku ciągu.

Zad. 11 ✗



$\vec{AB} = [b_x - a_x, b_y - a_y]$

$\vec{BC} = [c_x - b_x, c_y - b_y]$

$\vec{CD} = [d_x - c_x, d_y - c_y]$

$\vec{DA} = [a_x - d_x, a_y - d_y]$

$\vec{AB} \perp \vec{BC} \wedge \vec{CD} \perp \vec{DA}$

$\Updownarrow$

① $(b_x - a_x)(c_x - b_x) + (b_y - a_y)(c_y - b_y) = 0$

$\wedge$

② $(d_x - c_x)(a_x - d_x) + (d_y - c_y)(a_y - d_y) = 0$

① $b_x c_x - b_x^2 - a_x c_x + a_x b_x + b_y c_y - b_y^2 - a_y c_y + a_y b_y = 0$

Nieskończone - chyba przekombinowałem XD

Zad. 5 ✔

Jeśli $2^n + 1$ - liczba pierwsza to n - potęga dwójki

Załóżmy, że 2^{n+1} jest liczbą pierwszą.

Weźmy takie p, że p jest nieparzyste i $p|n$

Wtedy $\exists_{k\in\mathbb{N}}\ n = p\cdot k$

Skoro n jest nieparzyste, możemy przedstawić 2^n+1 w następujący sposób:

$a^n+1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a^1 + 1)$ – działa dla n nieparzystych

$$2^n+1 = 2^{kp}+1 = (2^k)^p+1 = (2^k+1)(2^{k(p-1)} - 2^{k(p-2)} + \ldots - 2^k + 1)$$

Widzimy że w obydwu nawiasach mamy liczby >1, co oznaczałoby, 2^n+1 nie jest liczbą pierwszą.

Jest to sprzeczne z założeniem, zatem p nie może liczbą parzystą.

Skoro n nie da się przedstawić jako iloczyn liczby nieparzystej i dowolnej liczby naturalnej, to znaczy, że n nie ma w rozkładzie na czynniki pierwsze żadnej liczby nieparzystej, a zatem n jest potęgą 2. ■