Zad. 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} y = -2 + 4\cdot\frac{x-a}{b-a} \\ dy = \frac{4}{b-a}dx \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} x = \frac{(y+2)(b-a)}{4} + a \\ dx = \frac{1}{4}(b-a)dy \end{matrix} \right| =$$

$$= \underline{\int_{-2}^{2} f\left(\frac{(y+2)(b-a)}{4} + a\right)} \cdot \frac{1}{4}(b-a)\,dy = \frac{1}{4}(b-a)\int_{-2}^{2} f\left(\frac{(y+2)(b-a)}{4} + a\right)dy$$

$$f(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_i$$

$$\int_a^b \lambda_i = A_i$$

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \lambda_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Zad. 3

Pokażemy, że rząd kwadratury w postaci $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ nie przekracza $2n+2$.

Aby to pokazać, zbudujemy wielomian $f(x)$ stopnia $2n+2$, dla którego zachodzi:

$$\int_a^b f(x) \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Weźmy $f(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2$ (stopień $2n+2$)

$\int^b f(x) > 0$ dla x, które nie są miejscami zerowymi $f(x)$

$\int_a^b f(x) > 0$ dla x, które nie są miejscami zerowymi $f(x)$

$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$, bo x_k są miejscami zerowymi $f(x)$

Czyli $\int_a^b f(x) > 0 = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$,

więc $\int_a^b f(x) \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, (dla x niebędących miejscami zerowymi $f(x)$)

co oznacza, że kwadratura nie jest dokładna, więc jej rząd nie przekracza $2n+2$.