Zadanie 1.

Pogrupujmy liczby od 1 do $2n$ w n zbiorów o nieparzystych indeksach.

Otrzymujemy zbiory $A_1, A_3, A_5, \dots A_{2n-1}$.

Do każdego zbioru A_x dodajmy wszystkie liczby w postaci $2^i \cdot x$, takie że $i \in \mathbb{N}$ oraz $2^i \cdot x \in [1, 2n]$.

Przykład dla $n=3$:

$A_1 = \{1, 2, 4\}$, $A_3 = \{3, 6\}$, $A_5 = \{5\}$

Jeśli jakieś dwie liczby znajdują się w jednym zbiorze, to znaczy, że jedna z nich jest podzielna przez drugą, bo jest 2^i razy większa.

Musimy wybrać $n+1$ liczb z tych n zbiorów, zatem z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że jakieś dwie liczby znajdą się w jednym zbiorze, co oznacza, że jedna jest podzielna przez drugą. ■

Zadanie 2

Mamy 5 punktów kratowych o współrzędnych (x_i, y_i) dla $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Wiemy, że $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$.

S - środek odcinka łączącego dwa punkty

$$S_{i,j} = \left(\frac{|x_i - x_j|}{2}, \frac{|y_i - y_j|}{2} \right)$$

Aby środek odcinka łączącego punkty (x_i, y_i) i (x_j, y_j) był punktem kratowym, x_i i x_j oraz y_i i y_j muszą mieć takie same parzystości.

P - liczba parzysta, N - liczba nieparzysta

Możemy podzielić punkty ze względu na parzystość ich współrzędnych.

Mamy więc 4 szuflady: PP, NN, PN, NP

Pierwsza litera oznacza parzystość współrzędnej x, a druga y.

Mamy 4 szuflady i 5 punktów, więc jakieś 2 punkty trafią do tej samej szuflady, czyli będą miać taką samą parzystość. Zatem środek odcinka łączącego te punkty będzie punktem kratowym. ∎

Zadanie 3

Weźmy n sum:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

...

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Jeśli jakaś S_k jest podzielna przez n to znaleźliśmy taki i oraz j: $i = 1$, $j = k$

W przeciwnym przypadku mamy $n-1$ możliwych reszt z dzielenia tych sum przez n $(1, \dots n-1)$.

Sum jest n, a możliwych reszt $n-1$, czyli co najmniej 2 sumy dadzą taką samą resztę.

Niech tymi sumami będą A_k i A_m $(k<m)$, a resztę z dzielenia ich przez n oznaczmy jako c.

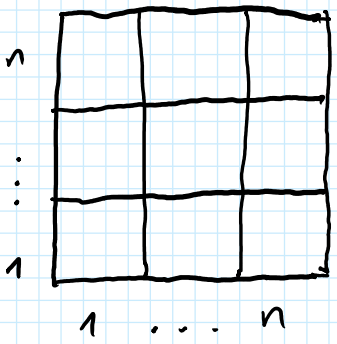
$A_k \equiv_n c \wedge A_m \equiv_n c \implies A_m - A_k \equiv_n c - c = 0$

Zatem $A_m - A_k$ jest podzielne przez n, więc znaleźliśmy

Zatem $A_m - A_k$ jest podzielne przez n, więc znaleźliśmy takie i oraz j: $i = k+1$, $j = m$ ■

Zadanie 5

Mamy szachownicę $n \times n$ i w każde pole wpisujemy 0, 1 lub −1.



Mamy n kolumn, n wierszów i 2 przekątne, co daje $2n+2$ sum.

W sumach występują tylko 0, 1 i −1, więc możemy uzyskać liczby z zakresu $[-n, n]$. Takich liczb jest $2n+1$.

Mamy zatem $2n+2$ sum i $2n+1$ możliwych wartości tych sum.

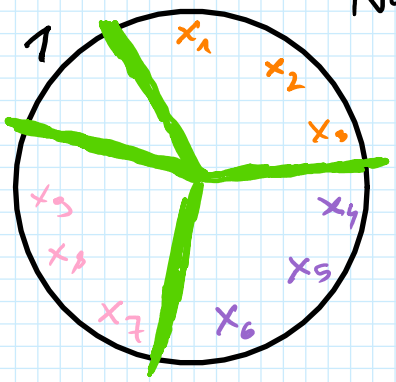
Oznacza to, że co najmniej 2 sumy będą równe. ■

Zadanie 6

Mamy liczby od 1 do 10. Ich suma to 55.

Zacznijmy od zapisania 1 na okręgu. Wtedy suma pozostałych liczb to 54.

Następnie stawiamy kolejne liczby na okręgu, grupując je po trzy trójki.



Rozmieszczenie liczb na okręgu może być dowolne.
Ważne, by każda z 3 części zawierała 3 liczby.

Załóżmy, że żadna trójka liczb nie da w sumie co najmniej 18.

Otrzymujemy wtedy 3 nierówności

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 < 18 \\ x_4 + x_5 + x_6 < 18 \\ x_7 + x_8 + x_9 < 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x_1 + x_2 + \ldots + x_9 < 54}$$

Mamy sprzeczność, ponieważ $x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 54$.

Zatem zawsze znajdziemy trzy sąsiednie liczby, których suma wynosi co najmniej 18. ■

Zadanie 7

Niech d będzie wspólnym dzielnikiem $\frac{a}{NWD(a,b)}$ i $\frac{b}{NWD(a,b)}$.

$$d \mid \frac{a}{NWD(a,b)} \overset{*}{\Longrightarrow} d \cdot NWD(a,b) \mid a$$

$$d \mid \frac{b}{NWD(a,b)} \overset{*}{\Longrightarrow} d \cdot NWD(a,b) \mid b$$

Zatem $d \cdot NWD(a,b)$ dzieli a oraz b, ale $NWD(a,b)$ to największy wspólny dzielnik a i b, czyli

$$d \cdot NWD(a,b) \leq NWD(a,b) \Longrightarrow d = 1,$$

Zatem $NWD\left(\frac{a}{NWD(a,b)}, \frac{b}{NWD(a,b)}\right) = 1$,

czyli $\frac{a}{NWD(a,b)}$ i $\frac{b}{NWD(a,b)}$ są względnie pierwsze. ■

$$* \quad d \mid \frac{a}{b} \Longrightarrow d \cdot b \mid a$$

Dowód:

$$\forall_{a,b,d \in \mathbb{Z}} \left(\overbrace{\exists_{k \in \mathbb{Z}} \ \frac{a}{b} = k \cdot d}^{L} \Longrightarrow \overbrace{\exists_{m \in \mathbb{Z}} \ a = m \cdot d \cdot b}^{P} \right)$$

Załóżmy, że zachodzi L. Pokażemy, że zachodzi P.

Wtedy $\frac{a}{b} = k \cdot d$.

$a = k \cdot d \cdot b$ – czyli znaleźliśmy takie m, że $a = m \cdot d \cdot b$ i jest ono równe k. ■