Zad. 8

Niech $G = \{V, E\}$ będzie grafem, w którym wierzchołki to uczniowie i każda para uczniów jest połączona krawędzią, jeśli się przyjaźnią.

$|V| = 2n, \quad \forall_{v \in V} \deg(v) \geq n$

Dla $n=1$ mamy parę uczniów, których usadzamy w jednej ławce.

Dla $n > 1$:

Mamy przynajmniej 3 wierzchołki, a minimalny stopień wierzchołka to co najmniej $n = \frac{|V|}{2}$.

Zatem z twierdzenia Diraca wiemy, że G zawiera cykl Hamiltona.

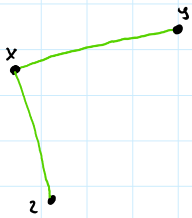
Mamy $2n$ wierzchołków, więc cykl ten jest parzysty.

Możemy wziąć co drugą krawędź z tego cyklu i w ten sposób usadzić uczniów w ławkach, czyli można to zrobić na dwa sposoby.

Zad. 10

Kontrprzykład:

$n = 3$



$\frac{(n-1)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$

$\deg(y) = 1$ ✓

$\deg(x) = 2$ ✓

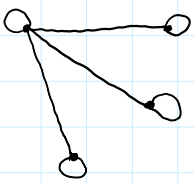
$\deg(z) = 1$ ✓

Nie ma cyklu Hamiltona.

Zad. 11

Kontrprzykład

$n = 4$



Zad. 9

Zad. 9

Zaprezentujmy turniej jako graf pełny.

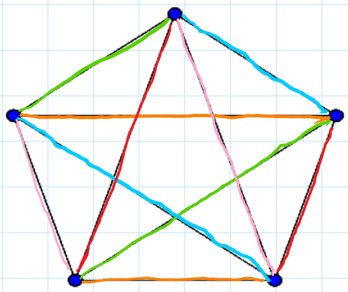
Dla n nieparzystego zaprezentujmy ten graf w postaci wielokąta foremnego wraz ze wszystkimi przekątnymi.

Wierzchołkami są gracze, a krawędzie między nimi to mecze.

Pokolorujmy każdy bok wielokąta innym kolorem, a następnie dla każdego boku znajdźmy równoległą do niego przekątną i pokolorujmy tym samym kolorem.

Każdy kolor odpowiada jednemu dniu turnieju. Mamy n kolorów, czyli turniej można rozegrać w co najmniej n dni.

Przykład dla $n = 5$



Dla parzystego n tworzymy analogiczny wielokąt o $n-1$ wierzchołkach * i analogicznie go kolorujemy – czyli używamy $n-1$ kolorów.

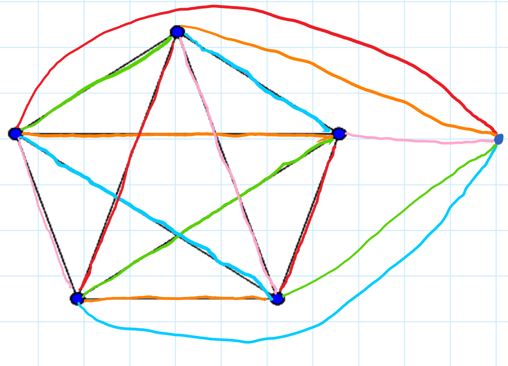
Każdy wierzchołek w tym wielokącie foremnym ma stopień $n-2$, czyli każdy wierzchołek nie ma krawędzi o jednym z kolorów.

Następnie dokładamy 1 wierzchołek i łączymy go z wszystkimi pozostałymi.

Każdą z nowo powstałych krawędzi do wierzchołka v z wielokąta * kolorujemy na kolor, który nie wystąpił wśród krawędzi v.

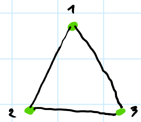
Otrzymamy $n-1$ kolorów.

Przykład dla $n = 6$



Jest to najbardziej optymalne rozwiązanie, ponieważ każdy z n graczy rozegrywa $n-1$ gier, a skoro może grać tylko jedną dziennie, to turniej musi trwać co najmniej $n-1$ dni.

Dla n nieparzystego musi to zająć n dni, co widać na przykładzie dla $n=3$:



dzień 1: 1 vs. 2

dzień 2: 2 vs. 3

dzień 3: 1 vs. 3