Zad. 1

a)

Przedział $[a_n, b_n]$ dzielimy na dwa mniejsze przedziały. Dzieli je $m_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$, $m_{k+1} \in [a_0, b_0]$, więc obydwa przedziały zawierają się w $[a_0, b_0]$

Jeśli $f(m_{k+1}) = 0$, kończymy działanie. W przeciwnym wypadku:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, m_{k+1}] \text{ dla } f(m_{k+1}) > 0 \\ [m_{k+1}, b_k] \text{ dla } f(m_{k+1}) < 0, \end{cases}$$

zatem $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

b) $$|b_n - a_n| = \left|\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}\right| = \left|\frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2}\right| = \ldots = \left|\frac{b_0 - a_0}{2^n}\right|$$

c) $|e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad (n \geq 0)$

Mamy więc $|e_n| = |\alpha - m_n|$ - α to szukany pierwiastek, a m_n to środek przedziału.

Rozpatrujemy 2 przypadki:

① m_n - początek przedziału $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ $(\alpha \geq m_n)$

wtedy $|\alpha - m_n| \leq |b_{n+1} - a_{n+1}|$

② m_n - koniec przedziału $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ $(\alpha \leq m_n)$

wtedy $|\alpha - m_n| \leq |b_{n+1} - a_{n+1}|$

wtedy $|\alpha - m_n| \le |b_{n+1} - a_{n+1}|$

Zatem $|\alpha - m_n| \le |b_{n+1} - a_{n+1}| = \left|\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right| = |2^{-n-1}(b_0 - a_0)|$

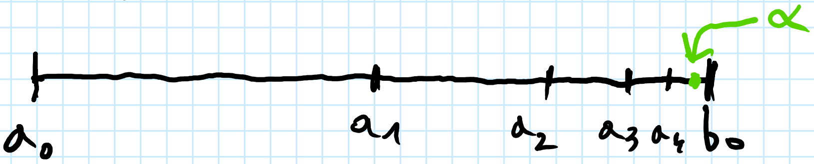
2^{-n-1} jest dodatnie i $b_0 - a_0$ również, ponieważ $a_0 < b_0$.

Możemy więc opuścić wartość bezwzględną i otrzymujemy:

$$|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad \blacksquare$$

d) Czy może zajść $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$?

Może, jeśli miejsce zerowe jest blisko b_0



Zad. 2

$|\varepsilon_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$

Szukamy n, dla którego błąd będzie mniejszy niż dany ε.

Mamy więc

$$|\varepsilon| \ge 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad / \cdot \frac{2^n}{\varepsilon}$$

$$2^n \ge \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}$$

$$n \ge \log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}$$

Zatem $n = \left\lceil \log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \right\rceil$

Zad. 4

Miejsca zerowe są w przedziałach $[-1, -0,5]$ i $[0, 0,5]$
Długość każdego z nich to 0,5.
Policzmy, ile kroków potrzebujemy, by błąd nie przekroczył 10^{-5}

$$10^{-5} \le 2^{-n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$10^{5} \le 2^{n+2} \quad /:4$$

$$2^{n} \geq \frac{1}{4} \cdot 10^{5}$$

$$n \gtrsim 14,609$$

Potrzebujemy 15 kroków.

Zad. 5

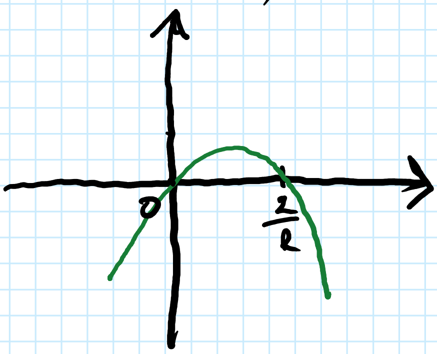
a) $f(x) = \frac{1}{x} - R$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

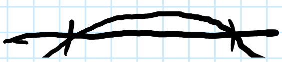
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - R}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n + (x_n - Rx_n^2) =$$

$$= x_n(2 - x_n R)$$

b)



c) $x_n(2 - x_n R) < 0$



$x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{R}, +\infty)$

$0 \quad \frac{2}{R}$

d) Załóżmy, że $x_n < 0$

$$x_n(2 - x_nR) < x_n \quad /:x_n$$

$$2 - x_nR > 1$$

$\boxed{x_n<0\text{, więc odwracamy znak nierówności}}$

$$-x_nR > -1$$

$$x_n < \frac{1}{R}$$

Skoro $x_n < 0$ i $R > 0$ to nierówność zawsze prawdziwa

Zatem jeśli $x_n < 0$ to $x_{n+1} < x_n$

e) $0 < x_n(2 - x_nR)$

$x \in (0, \frac{2}{R})$

$$x_n(2 - x_nR) < \frac{1}{R}$$

$$-x_n^2R^2 + 2x_nR - 1 < 0$$

$$-(x_nR - 1)^2 < 0$$

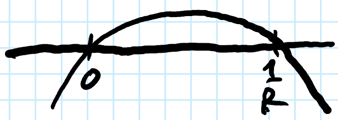
$x_n \in (-\infty, \frac{1}{R}) \cup (\frac{1}{R}, +\infty)$

Zatem $x \in (0, \frac{1}{R}) \cup (\frac{1}{R}, \frac{2}{R})$

f) Załóżmy, że $x_n \in (0, \frac{1}{R})$

$$x_n < 2x_n - x_n^2R$$

$$0 < x_n(1 - x_nR)$$



$x_n \in (0, \frac{1}{R})$

$$2x_n - x_n^2R < \frac{1}{R}$$

z **e)** wiemy, że $x_n \in (-\infty, \frac{1}{R}) \cup (\frac{1}{R}, +\infty)$

Zatem $x_n \in (0, \frac{1}{R})$

g) Z f) wiemy, że jeśli $x_n \in (0, \frac{1}{R})$ to $x_{n+1} \in (x_n, \frac{1}{R})$

Wnioskujemy z tego, że wraz z wzrostem n przedział coraz bardziej się zwęża, zbliżając się do $\frac{1}{R}$. Zatem $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{R}$

Dla jakich x_0 metoda jest zbieżna?

1° $F(\frac{1}{R}) = \frac{1}{R}$

2° $|F'(x)| < 1$

Sprawdzamy dla jakich x te warunki są spełnione. $F = x_n(2 - x_n R)$

1° $F(\frac{1}{R}) = \frac{1}{R} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{R}$

2° $F'(x) = 2 - 2xR$

$$|2 - 2xR| < 1$$

$$|1 - xR| < \frac{1}{2}$$

$$|x - \frac{1}{R}| < \frac{1}{2R}$$

czyli $x \in (\frac{1}{2R}, \frac{3}{2R})$ – w tym przedziale metoda jest zbieżna