## Zad. 1

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$s_1 = (a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots)$$

$$S(x) = a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2.$$

$S(x)$ – funkcja tworząca ciągu $s_n$

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{i} a_k\right) x^i\right]$$

$$B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$A(x)\cdot B(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots) +$$

$$+ (a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \dots) + \dots + (a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2}) + \dots =$$

$$= a_0 x^0 + (a_0+a_1)x^1 + (a_0+a_1+a_2)x^2 + \dots + (a_0+a_1+\dots+a_n)x^n + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{i} a_k\right)x^i\right] = S(x)$$

Czyli $S(x) = A(x)\cdot B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$

## Zad. 2

a) $a_n = n^2$

$$A(x) = 0 + x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \quad / \text{pochodna}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} \quad / \cdot x$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i x^i \quad / \text{pochodna}$$

$$\frac{1-2x+x^2-2x^2+2x}{(1-x)^4} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^{i-1} \quad / \cdot x$$

$$\frac{x-x^3}{(1-x)^4} = \frac{x(1-x)(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i$$

$$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

b) $a_n = n^3$

$$A(x) = 0 + x + 8x^2 + 27x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} i^3 x^i$$

z a) wiemy, że

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \quad / \text{pochodna}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^3 x^{i-1} = \frac{(2x+1)(1-x)^3 - (-3+6x-3x^2)(x^2+x)}{(1-x)^6}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^3 x^{i-1} = \frac{2x-6x^2+6x^3-2x^4+1-3x+3x^2-x^3+3x^2+3x-6x^3-6x^2+3x^4+3x^3}{(1-x)^6}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^3 x^{i-1} = \frac{x^4+2x^3-6x^2+2x+1}{(1-x)^6} = \frac{(1-x)^2(x^2+4x+1)}{(1-x)^6} \quad / \cdot x$$

$$\sum_{i=0} i^3 x^{i} = \qquad (1-x)^6$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^3 x^{i-1} = \frac{x^4+2x^3-6x^2+2x+1}{(1-x)^6} = \frac{(1-x)^2(x^2+4x+1)}{(1-x)^6} \quad / \cdot x$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^3 x^{i} = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$A(x) = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$x^{n+k}{}' = (n+k)\, x^{n+k-1}$$

$$(n+k)(n+k-1)\, x^{n+k-2}$$

c) $a_n = \binom{n+k}{k}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!\cdot n!} x^n = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)\, x^n = \frac{1}{k!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k}\right]^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{k!} \left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)}$$

## Zad. 6

$Q_k = (V, E)$

Wierzchołków jest $2^k$, ponieważ każdy element k-elementowego ciągu możemy wybrać na 2 sposoby (0 lub 1). Czyli $|V| = 2^k$.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Każdy wierzchołek jest stopnia $k$, bo jest on reprezentowany jako ciąg 0 i 1 o długości $k$, więc aby otrzymać reprezentacje sąsiadów wierzchołka $v$, musimy wybrać 1 z $k$ elementów ciągu i go zmienić (z 0 na 1 lub odwrotnie). Mamy więc $k$ takich możliwości.

Zatem $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2^k \cdot k = 2|E|$

czyli $|E| = 2^{k-1} \cdot k$

## Zad. 10

Załóżmy, że w grafie $G$ istnieje droga z $u$ do $v$.

Pokażemy, że istnieje wtedy ścieżka z $u$ do $v$.

Skoro istnieje droga z $u$ do $v$ to weźmy tą najkrótszą.

Niech będzie to $\{u, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, v\}$. $\left(\forall_{i<n}\ x_i \neq x_{i+1}\right)$

Jeśli ta droga nie jest ścieżką, to będzie wyglądała następująco:

$\{u, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{k-1}, x_k\}, \{x_k, x_{k+1}\}, \dots, \{x_{m-1}, x_m\}, \{x_m, x_{m+1}\}, \dots, \{x_n, v\}$

gdzie $k < m$ oraz $x_k = x_m$.

Oznacza to, że w tej drodze występuje cykl (może być więcej niż 1), czyli nie jest to najkrótsza droga.

Jeśli pozbędziemy się cyklu, nadal będziemy mogli dojść z u do v, ale żaden wierzchołek się nie powtórzy, czyli będzie to ścieżka z u do v.

## Zad. 8

macierz sąsiedztwa S

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | ... | $v_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | | 1 | 0 | .... | |
| $v_2$ | 1 | | | ... | |
| $v_3$ | 0 | | | ... | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $v_n$ | | | | ... | |

$S[i,j] = 1 \iff \{v_i, v_j\} \in E$

reprezentacja listowa

$L_{v_1} = (\text{sąsiedzi } v_1)$

$L_{v_2} = (\text{sąsiedzi } v_2)$

⋮

$L_{v_n} = (\text{sąsiedzi } v_n)$

$v_k \in L_{v_n} \iff \{v_n, v_k\}$

a) obliczenie stopnia ustalonego wierzchołka

macierz sąsiedztwa:

$O(|V|)$, bo musimy sprawdzić 1 wiersz macierzy

repr. listowa:

$O(|L_{v_n}|)$ gdzie $v_n$ to ustalony wierzch.

Wystarczy przejść przez listę $L_{v_n}$

(tak samo dla grafu nieskierowanego, skierowanego i prostego)

b) przeglądanie wszystkich krawędzi grafu

macierz sąsiedztwa:

$O(\frac{|V|^2}{2})$ dla grafu nieskierowanego i prostego, bo wystarczy sprawdzić połowę macierzy (bo jest symetryczna)

$O(|V|^2)$ dla skierowanego

repr. listowa:

$deg(v) = |L_v|$

$O(|V| \cdot \max(deg(v_1), deg(v_2), \dots, deg(v_n)))$,

bo musimy przeglądnąć wszystkie listy

(tak samo dla grafu nieskierowanego, skierowanego i prostego)

c) sprawdzanie, czy krawędź $(u,v) \in G$

macierz sąsiedztwa:

$O(1)$, bo wystarczy sprawdzić, czy $S[u,v] = 1$ (dla grafów prostych)

repr. listowa:

$O(deg(u))$, bo należy sprawdzić, czy u ma sąsiada v

czy $S[u,v]=1$ (dla grafów prostych)

lub czy $S[u,v]>0$ (dla pozostałych)

d) usuwanie z grafu G krawędzi $(u,v)$

macierz sąsiedztwa:

$O(1)$, bo wystarczy ustawić $S[u,v]$ na 0

(dla nieskierowanego jeszcze $S[v,u]$ na 0)

Jeśli jest kilka krawędzi $(u,v)$ to wtedy

$S[v,u]--=1$

(dla nieskierowanego jeszcze $S[v,u]--=1$)

e) wstawianie do grafu G krawędzi $(u,v)$

macierz sąsiedztwa:

$O(1)$, bo wystarczy zwiększyć $S[u,v]$ o 1

(dla nieskierowanego jeszcze zwiększyć $S[v,u]$ o 1)

$O(\deg(u))$, bo należy sprawdzić, czy u ma sąsiada v

(tak samo dla grafu nieskierowanego, skierowanego i prostego)

repr. listowa:

$O(\deg(v)+\deg(u))$ dla nieskierowanego,

bo musimy usunąć v z $L_u$ i u z $L_v$.

$O(\deg(u))$ dla skierowanego,

bo usuwamy tylko v z $L_u$.

repr. listowa:

$O(1)$ dla nieskierowanego,

bo musimy dodać v do $L_u$ i u do $L_v$.

Tak samo dla skierowanego,

ale dodajemy tylko v do $L_u$

(przy założeniu, że dodanie elementu do listy odbywa się w czasie stałym, tak jak np. w listach wiązanych)