ZADANIE 7

$$A_k = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{t-j}{k-j}\,dt$$

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{t-j}{k-j}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{t-j}{k-j}\,dt$$

Wiemy, że $\frac{1}{k-j} \in Q$, bo k i j są całkowite oraz że $\frac{1}{n} \in Q$, bo n jest całkowite.

Musimy sprawdzić, czy całka $\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} (t-j)\,dt$ jest liczbą wymierną.

$$\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} (t-j)\,dt = \int_0^n t(t-1)\ldots(t-k-1)(t-k+1)\ldots(t-n)\,dt =$$

$$= \int_0^n (a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0)\,dt = \int_0^n a_n t^n\,dt + \int_0^n a_{n-1}t^{n-1}\,dt + \ldots + \int_0^n a_0\,dt =$$

$$= -a_n \cdot \frac{n^{n+1}}{n+1} - a_{n-1}\cdot\frac{n^n}{n} - a_{n-2}\cdot\frac{n^{n-1}}{n-1} - \ldots - a_0\frac{n}{1}$$

Wszystkie n i a_i są całkowite, więc ta całka jest wymierna, czyli całe wyrażenie jest wymierne.