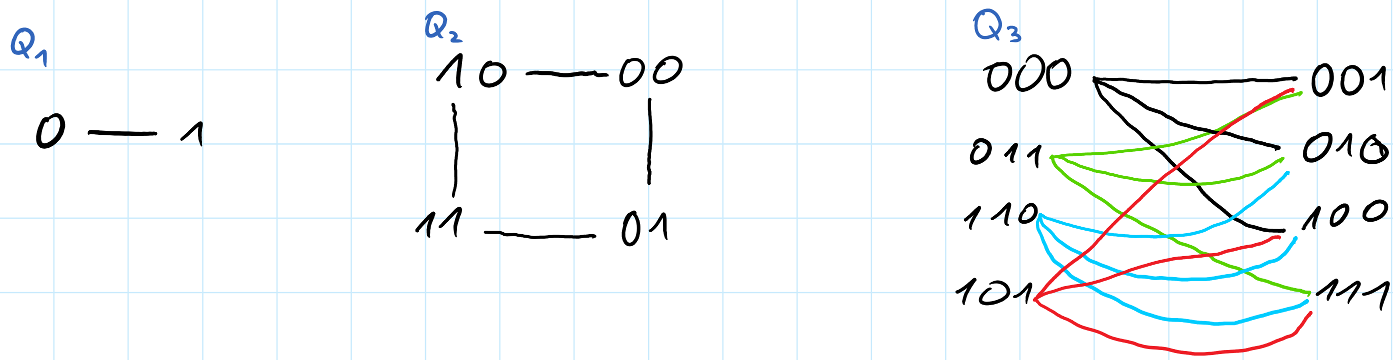
Zad. 3

Q_k jest grafem planarnym dla $k < 4$

Dowód:



Widać, że Q_1, Q_2 i Q_3 nie zawierają $K_{3,3}$ ani K_5, więc są grafami planarnymi.

Liczba krawędzi w grafie Q_k to $\frac{2^k}{2} \cdot k = 2^{k-1} \cdot k$, a liczba wierzchołków to 2^k.

Wiadomo, że Q_k nie zawiera trójkątów. Jeśli Q_k jest planarny, to $m \le 2n - 4$, gdzie m to liczba krawędzi, a n - liczba wierzchołków.

Czyli dla grafu Q_k mamy nierówność:

$$2^{k-1} \cdot k \le 2^{k+1} - 4$$
$$2^{k-1} \cdot k - 2^{k+1} \le -4$$
$$2^{k-1}(k-4) \le -4$$
$$k \le 3$$

Zatem Q_k jest grafem planarnym dla $k \le 3$

Zad. 12

Zad. 12

Dowód indukcyjny:

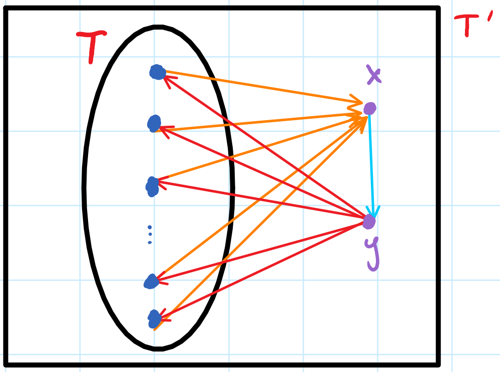
Dla $n=1$ turniej ma tylko 1 wierzchołek, który jest królem

Załóżmy, że dla każdego n nieparzystego istnieje turniej o n wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek jest królem.

Weźmy turniej T o n (n - nieparzyste) wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek jest królem.
Wiemy z założenia indukcyjnego, że taki turniej istnieje.

Pokażemy, że z turnieju T da się skonstruować turniej T' o $n+2$ wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek jest królem. Czyli musimy dodać do T 2 wierzchołki.

Dodajmy więc wierzchołki x i y oraz krawędzie (x,y)
oraz $\forall_{v \in T}$ krawędzie (v,x) i (y,v).



Zauważmy, że wierzchołki, które były królami w T, są też królami w T', ponieważ każdy z nich może dojść do x w 1 kroku a do y w 2 krokach.

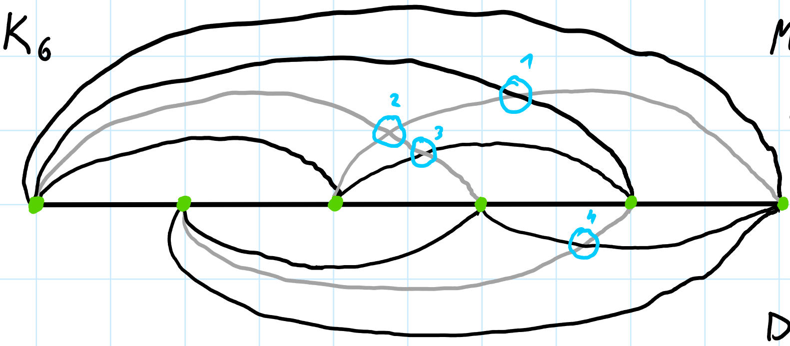
Wierzchołek y też jest królem, bo może dojść do każdego wierzchołka z T w 1 kroku, a do x w 2 krokach.

Wierzchołek x też jest królem, bo może dojść do każdego wierzchołka z T w 2 krokach, a do y w 2 krokach.

Zatem istnieje turniej o n wierzchołkach (n-nieparzyste), w którym każdy wierzchołek jest królem.

Zad. 4

K_6



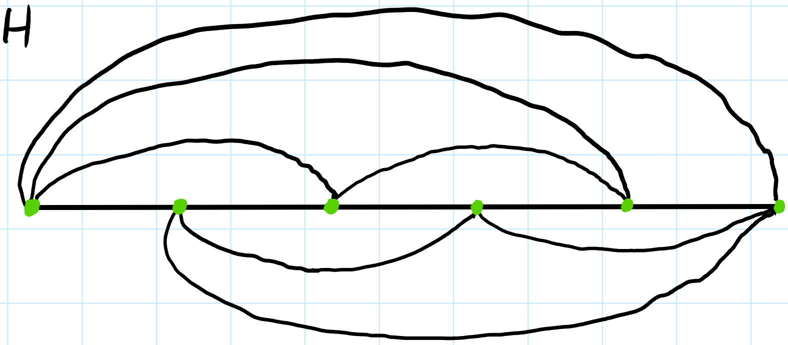
Minimalna liczba przecięć w grafie pełnym o n wierzchołkach dla n parzystego to

$$\frac{n(n-2)^2(n-4)}{48}$$

Dla $n=6$ mamy minimalnie 4 przecięcia.

Po usunięciu 3 krawędzi w kolorze szarym otrzymamy graf planarny.

H



Zad. 2

Niech G będzie grafem planarnym o n wierzchołkach i m krawędziach.
$\bar{G}$ jest dopełnieniem G i ma $\frac{n(n-1)}{2} - m$ krawędzi.
Jeśli $n \geq 3$ to zachodzi nierówność: $m \leq 3n - 6$ (1)

Jeśli $\bar{G}$ byłby planarny i miałby co najmniej 3 wierzchołki, to musiałaby zachodzić nierówność:

$$\frac{n(n-1)}{2} - m \leq 3n - 6 \quad (2)$$

Dodając stronami (1) do (2) otrzymujemy:

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 6n - 12$$

Teraz rozwiązujemy nierówność:

$$n^2 - n \leq 12n - 24$$

$$n^2 - 13n + 24 \leq 0$$

Czyli $n \leq 10$

Zatem graf i jego dopełnienie nie mogą być jednocześnie planarne, jeśli graf ma co najmniej 11 wierzchołków.