Zad. 1

a)

	x_k	y_k				
x_0	-3	-16 (b_0)				
x_1	-1	0	8 (b_1)			
x_2	0	-16	-16	-8 (b_2)		
x_3	1	32 (−8)	48 (8)	32 (12)	10 (b_3) (5)	
b) x_4	3	560	264	72	10	0

$L_n(x) = -16 + 8(x+3) - 8(x+3)(x+1) + 10(x+3)(x+1)x$

b) $L_n(x) = -16 + 8(x+3) - 8(x+3)(x+1) + 10(x+3)(x+1)x$

c) $L_n(x) = -16 + 8(x+3) - 8(x+3)(x+1) + 5(x+3)(x+1)x$

zamiast tego

Zad. 3

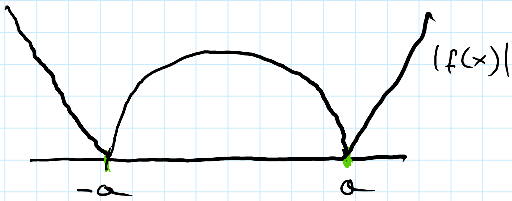
a) $f(x) = (x-a)(x+a) = x^2 - a^2$

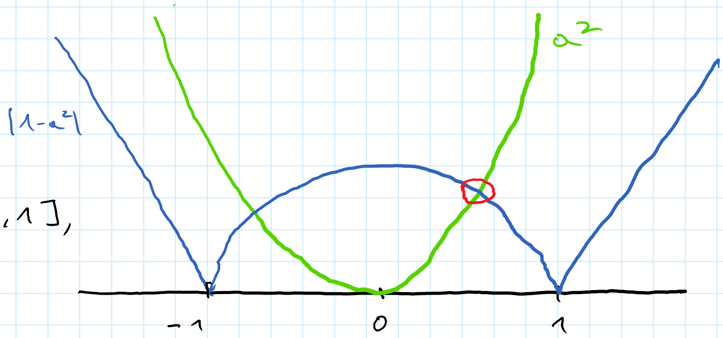
$f'(x) = 2x$

Ekstrema: $x \in \{-1, 0, 1\}$

$f(-1) = 1 - a^2 = f(1)$

$f(0) = -a^2 = a^2$





Bierzemy pod uwagę przedział $[0,1]$, bo wykresy są symetryczne względem osi OY.

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x)| = \max\{|1-a^2|, a^2\}$$

Policzmy dla jakiego a wykresy się przecinają.

$1 - a^2 = a^2$

$2a^2 = 1$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \lor a = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

b) $f(x) = (x-b)x(x+b) = x^3 - b^2 x$

$f'(x) = 3x^2 - b^2$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-\frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\}$

$f(-1) = b^2 - 1$ $\}$ $|f(-1)| = |f(1)|$

$$f(-1) = b^2 - 1$$
$$f(1) = 1 - b^2$$
$$\Big\} \; |f(-1)| = |f(1)|$$

$$f\left(-\tfrac{b}{\sqrt3}\right) = \frac{-b^3}{3\sqrt3} + \frac{b^3}{\sqrt3} = \frac{-b^3 + 3b^3}{3\sqrt3} = \frac{2b^3}{3\sqrt3}$$
$$f\left(\tfrac{b}{\sqrt3}\right) = \frac{b^3}{3\sqrt3} - \frac{b^3}{\sqrt3} = \frac{b^3 - 3b^3}{3\sqrt3} = \frac{-2b^3}{3\sqrt3}$$
$$\Big\} \; \left|f\left(-\tfrac{b}{\sqrt3}\right)\right| = \left|f\left(\tfrac{b}{\sqrt3}\right)\right|$$

$$\max_{[-1,1]} |f(x)| = \left\{1-b^2, \frac{2b^3}{3\sqrt3}\right\}$$
$$1 - b^2 = \frac{2b^3}{3\sqrt3}$$
$$b = \frac{\sqrt3}{2}$$

Zad. 2

Z def. rekurencyjnej wiemy, że jeśli znamy dwa poprzednie ilorazy różnicowe, potrzebujemy jednego dzielenia i dwóch odejmowań.

	k=0	k=1	...	k=n
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
...	...	...	...	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	...	$f[x_0, \dots x_n]$

$D(n)$ - liczba dzieleń potrzebna do obliczenia $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$D(0) = 0$

$D(1) = 1$

$D(2) = 3 = 2D(1) + 1$

$D(3) = 7 = 2D(2) + 1$

$$D(n) = \underbrace{2D(n-1)}_{\text{bo musimy obliczyć 2 o 1 krótsze ilorazy różnicowe}} + \underbrace{1}_{\text{bo musimy wykonać 1 dzielenie}}$$

$D(n) = 2^n - 1$

Dowód indukcyjny:

Baza:

$D(0) = 0 = 2^0 - 1$ ✓

Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $D(n) = 2^n - 1$.

$n+1$

Pokażemy, że $D(n+1) = 2^{n+1} - 1$.

$$D(n+1) = 2D(n) + 1 \underset{z\ zał.}{=} 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \ \blacksquare$$

$S(n)$ – liczba odejmowań potrzebna do obliczenia $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

Odejmowań jest dwa razy więcej (dla $n+1$), stąd:

czyli

$$S(n) = 2 \cdot D(n)$$

$$S(n) = 2^{n+1} - 2$$

Algorytm:

$$\left.\begin{aligned} x[n+1] &= \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \\ y[n+1] &= \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \end{aligned}\right\} \text{pamięć: } 2n = O(n)$$

```
FOR i = 1, i ≤ n, i++ :
    FOR j = n, j ≥ i, j-- :
        y[j] = (y[j] - y[j-1]) / (x[j] - x[j-i])
    END
END
RETURN y[]
```

Zad. 7

Wiemy, że $b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$.

Procedura Interp_Newton(x, f) może policzyć co najwyżej b_{30}, a my chcemy wyznaczyć b_{31}.

Wiemy też, że $L_{n+1}(x) = L_n(x) + b_{n+1} p_{n+1}(x)$

Czyli

$$L_{31}(x) = L_{30}(x) + b_{31} p_{n+1}(x)$$

Z def. wielomianu interpolacyjnego wiemy, że $f(x_{31}) = L_{31}(x_{31})$

Z tych dwóch równości możemy wyznaczyć b_{31}.

Z tych dwóch równości możemy wyznaczyć b_{31}.

$$f(x_{31}) = L_{30}(x_{31}) + b_{31} \cdot p_{31}(x_{31})$$

$$b_{31} = \frac{f(x_{31}) - L_{30}(x_{31})}{p_{31}(x_{31})}$$

$$p_{31}(x_{31}) = (x_{31} - x_0)(x_{31} - x_1) \dots (x_{31} - x_{30})$$

można policzyć schematem Hornera $O(n)$

$$L_{30}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_{30}(x - x_0) \dots (x - x_{29}) =$$
$$= b_0 + (x - x_0)\left(b_1 + b_2(x - x_1) + \dots + b_{30}(x - x_1) \dots (x - x_{29})\right) =$$
$$= b_0 + (x - x_0)\left(b_1 + (x - x_1)\left(b_2 + b_3(x - x_2) + \dots + b_{30}(x - x_2) \dots (x - x_{29})\right)\right) = \dots \text{ itd}$$

$L_{30}(x)$ również możemy obliczyć schematem Hornera

Zad. 6

$$f(x) = e^{\frac{x}{3}}, \quad f'(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}, \quad f''(x) = \frac{1}{9} e^{\frac{x}{3}}$$

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{\frac{x}{3}}, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{\frac{x}{3}}$$

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \le \max_{x \in [-1,1]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [-1,1]} |p_{n+1}(x)|$$

$$\max_{x \in [-1,1]} |p_{n+1}(x)| \le \frac{1}{4} n! \cdot h^{n+1}$$

Wszystkie węzły są równo równo odległe, więc $h = \frac{2}{n}$

Mamy zatem

$$\underbrace{\max_{x \in [-1,1]} \frac{\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{\frac{x}{3}}\right|}{(n+1)!}}_{\text{największa wartość dla } x=1} \cdot \frac{1}{4} n! \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \le 10^{-16}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{\frac{1}{3}}}{4(n+1)} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \le 10^{-16}$$

Działa dla $n=11$.

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa?

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa?

$$\max_{x \in [-1,1]} |p_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$$

Czyli mamy

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{\frac{1}{3}}}{(n+1)! \cdot 2^n} \le 10^{-16}$$

Działa dla $n = 11$