Zad. 1

$$x_{n+1} = x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} = \frac{x_n f_n - x_n f_{n-1} - f_n x_n + f_n x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} =$$

$$= \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \quad \blacksquare$$

Drugi wzór jest „bezpieczniejszy", bo jest w nim jedno mniej odejmowanie. Przy zbliżaniu się do miejsca zerowego, odejmowania mogą spowodować utratę cyfr znaczących.

Zad. 2

Metoda reguła falsi bazuje na fałszywym twierdzeniu, że na pewnym (małym) przedziale funkcja jest liniowa.

Warunki:

1. W przedziale $[a,b]$ jest dokładnie 1 pojedynczy pierwiastek
2. $f(a)f(b) < 0$
3. Pierwsza i druga pochodna mają w tym przedziale stałe znaki.

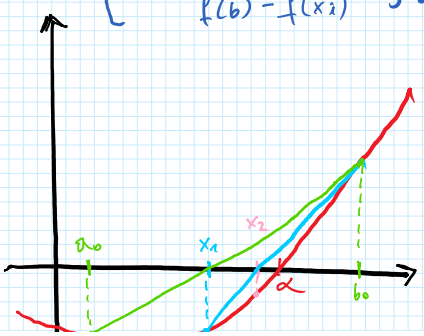
1. Wybieramy punkty $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$ $(f(a)f(b) < 0)$.
2. Przeprowadzamy cięciwę przez A i B.
3. Punkt przecięcia x_1 jest pierwszym przybliżeniem pierwiastka. Jeśli przybliżenie jest wystarczająco dobre, kończymy działanie.
4. Jeśli nie, prowadzimy cięciwę przez $(x_1, f(x_1))$ i A lub B – wybieramy punkt, którego druga współrzędna ma znak przeciwny do $f(x_1)$. Dzięki 3 ograniczeniu, jest na pewno taki, który punkt będzie stały.
5. Wyznaczamy przecięcie nowo wygenerowanej cięciwy z osią OX i algorytm powtarza się.

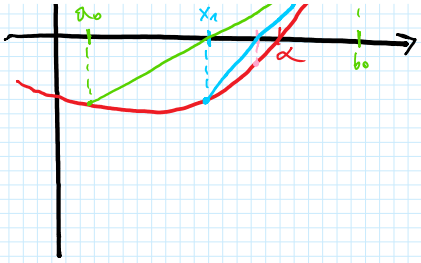
Wzory:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_{i+1} = \begin{cases} \dfrac{x_i f(a) - a f(x_i)}{f(a) - f(x_i)} & \text{gdy } f(a) f(x_i) \geq 0 \\ \dfrac{x_i f(b) - b f(x_i)}{f(b) - f(x_i)} & \text{gdy } f(b) f(x_i) \geq 0 \end{cases}$$

dla $i = 1, 2, \ldots$





Główną zaletą tej metody jest fakt, że w każdym kroku liczymy wartość funkcji w tylko jednym punkcie.

Zad. 4

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\overset{*}{f(\alpha) = 0}, \quad \overset{*}{f'(\alpha) \neq 0}, \quad \overset{*}{\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha}$$

Dowiedziemy, że

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{p}(\alpha) \neq 0$$

dla $p = 2$,

czyli że $F(\alpha) = \alpha$, $F'(\alpha) = 0$ i $F''(\alpha) \neq 0$

$$F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \overset{*}{=} \alpha$$

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - \left(\overset{=1}{\frac{f'(x)^2}{f'(x)^2}} - \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right) = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$F''(x) = \left(\frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right)' = \frac{(f(x)\cdot f''(x))' f'(x)^2 - (f'(x)^2)' f(x) f'(x)}{f'(x)^4} =$$

$$= \frac{(f(x)\cdot f''(x))' f'(x)^2 - (f'(x)^2)' f(x) f''(x)}{f'(x)^4} = \frac{\left(f'(x)f''(x) + f'''(x)f(x)\right)f'(x)^2 - 2f'(x)f''(x)f(x)f''(x)}{f'(x)^4} =$$

$$= \frac{f'(x)^3 f''(x) + f'''(x)f(x)f'(x)^2 - 2f'(x)f(x)f''(x)^2}{f'(x)^4}$$

$$F'(\alpha) = \frac{f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} \overset{*}{=} 0$$

$$F''(\alpha) = \frac{f'(\alpha)^3 f''(\alpha) + f'''(\alpha)f(\alpha)f'(\alpha)^2 - 2f'(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^4} \overset{*}{=}$$

$$= \frac{f'(\alpha)^3 f''(\alpha)}{f'(\alpha)^4} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \neq 0 \quad \blacksquare$$

Zad. 6

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad f(\alpha) = 0$$

$$\boxed{F(x) = x - \frac{f(x)}{}}$$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $f(\alpha)=0$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} \\ F'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x_0) - f(x)f''(x_0)}{f'(x_0)^2} \end{aligned}}$$

$$F(\alpha) = \alpha - \frac{0}{f'(x_0)} = \alpha$$

$$F'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)f'(x_0) - f(\alpha)f''(x_0)}{f'(x_0)^2} = 1 - \frac{f'(\alpha)f'(x_0)}{f'(x_0)^2} = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)}$$

Dla zbieżności liniowej:

$F'(\alpha) \neq 0$ dla $\frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)} \neq 1 \iff f'(\alpha) \neq f'(x_0)$, $|F'(\alpha)| < 1$ dla $\left|\frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)} - 1\right| < 1$

$\Downarrow$

$\alpha \neq x_0$

czyli $\left|\frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)}\right| < 2$

Sprawdźmy, czy zbieżność może być kwadratowa:

Skoro nie byłaby liniowa, to (1) $f'(\alpha) = f'(x_0)$ i $\left|\frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)}\right| \geq 2$

$$F''(x) = \left(-\frac{f'(x)f'(x_0) - f(x)f''(x_0)}{f'(x_0)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left((f''(x)f'(x_0) + f'(x)f''(x_0)) - (f'(x)f''(x_0) + f(x)f'''(x_0))\right)f'(x_0)^2 - \left(f'(x)f'(x_0) - f(x)f''(x_0)\right)\cdot 2f'(x_0)\cdot f''(x_0)}{-f'(x_0)^4}$$

$$= \frac{(f''(x)f'(x_0) - f(x)f'''(x_0))f'(x_0)^2 - (2f'(x)f'(x_0)^2 f''(x_0) - 2f(x)f''(x_0)^2 f'(x_0))}{-f'(x_0)^4}$$

$$F''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)f'(\alpha)^3 - 2f'(\alpha)^3 f''(x_0)}{-f'(\alpha)^4} = \frac{f''(\alpha) - 2f''(x_0)}{-f'(\alpha)} = \frac{2f''(x_0) - f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Zatem zbieżność będzie kwadratowa, jeśli zachodzą warunki z (1) oraz $\frac{2f''(x_0) - f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \neq 0$

Zad. 3

Mamy:

$F(x_k) = x_{k+1}$,

$*F(\alpha) = \alpha$, $*F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$,

$F^{(p)}(\alpha) \neq 0$

Weźmy $F(x_k) = x_{k+1}$ i odejmijmy obustronnie α

Wtedy

$F(x_k) - \alpha = x_{k+1} - \alpha$

Niech $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$ będzie naszym błędem,

zatem $F(\alpha + \varepsilon_k) - \alpha = \varepsilon_{k+1}$

Rozwińmy $F(\alpha + \varepsilon_k)$ w szereg Taylora:

$F(\alpha) \quad F^{(p-1)}(\alpha) \quad \frac{p-1}{\ldots} \quad F^{(p)}(\alpha)$

Rozwijamy $F(\alpha+\varepsilon_k)$ w szereg Taylora:

$$F(\alpha+\varepsilon_k) = F(\alpha) + \frac{F'(\alpha)}{1!}\cdot\varepsilon_k + \ldots + \frac{F^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}\cdot\varepsilon_k^{p-1} + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\cdot\varepsilon_k^{p} =$$

$$\overset{*}{=} F(\alpha) + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\cdot\varepsilon_k^{p} \overset{*}{=} \alpha + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\cdot\varepsilon_k^{p}$$

$$F(\alpha+\varepsilon_k) - \alpha = \alpha + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\varepsilon_k^{p} - \alpha = \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\varepsilon_k^{p} = \varepsilon_{k+1}$$

Czyli $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{p}\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\varepsilon_n^{p}\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|}{|\varepsilon_n|^p} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\right| = C \neq 0$$

$C \approx \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}$, p – rząd zbieżności

Zad. 7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = C \neq 0 \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}| \approx C\cdot|\varepsilon_n|^p \Rightarrow C \approx \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p}$$

$$\log\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \log C = \log\frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p}$$

Zatem

$$\log\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} - \log\frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p} = 0$$

$$\log|\varepsilon_{n+1}| - p\cdot\log|\varepsilon_n| - \log|\varepsilon_n| + p\cdot\log|\varepsilon_{n-1}| = 0$$

$$\log|\varepsilon_{n+1}| - \log|\varepsilon_n| = p\left(\log|\varepsilon_n| - \log|\varepsilon_{n-1}|\right) = 0$$

$$\log\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = p\cdot\log\frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|}$$

$$p = \frac{\log\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right|}{\log\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right|}$$

Zad. 5

α - pojedyńcze miejsce zerowe funkcji f

$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \neq f''(\alpha)$

Pokażemy, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna liniowo, czyli że $F(\alpha)=\alpha$, $F'(\alpha)\neq 0$, $|F'(\alpha)|<1$

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \overset{*}{=} 0 \qquad * \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{f''(x)} = 0$$

$$F'(x) = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$F'(\alpha) = \frac{f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)f''(x) + f f'''(x)}{2f'(x)\cdot f''(x)} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)\cdot f'''(x)}{2f'(x)f''(x)}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)\cdot f'''(x)}{2f'(x)f''(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)f'''(x) + f(x)\cdot f^{(4)}(x)}{2\left(f''(x)^2 + f'(x)\cdot f'''(x)\right)} = 0$$

$F'(\alpha) = \frac{1}{2}$, czyli $F'(\alpha) \neq 0$ i $|F'(\alpha)| < 1$

Zatem metoda Newtona jest zbieżna liniowo.