Zad. 4

$T_k = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$ $(k \geq 2)$

$T_0(x) \equiv 1$

$T_1(x) \equiv x$

a) $T_2(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 =$
$= 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x =$
$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) =$
$= 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

b) * dla $T_n(x)$ współczynnik przy x^n to 2^{n-1}, $(n \geq 1)$
a przy x^{n-1} to 0.

Indukcja

Podstawa ind.

$T_1(x) = 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$, gdzie $1 = 2^{1-1}$

$T_2(x) = \underbrace{2}_{2^{2-1}}x^2 - 1 + 0 \cdot x^1$

Załóżmy, że dla każdego $i \leq n$ zachodzi *. Pokażemy, że zachodzi też dla $n+1$

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x \cdot (2^{n-1}x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots) - (2^{n-2}x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \ldots) =$
$= 2^n x^{n+1} + 0 \cdot x^n + \ldots$ ■

c)

i) $|T_n(x)| \leq 1$:

$|T_n(x)| = |\cos(n \cdot \arccos x)|$

Zbiór wartości cosinusa to $[-1, 1]$,

zatem $|T_n(x)| \leq 1$

ii) $|T_n(x)| = 1$

$|\cos(\alpha)| = 1$ dla $\alpha = k \cdot \pi$

$n \cdot \arccos x = k\pi$

$\frac{k\pi}{n} = \arccos x \quad / \cos$

$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = x$

$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$

$$0 \leq \frac{k\pi}{n} \leq \pi$$

$$0 \leq k \leq n$$

iii) $T_{n+1} = \cos((n+1)\arccos x) = 0$

$$(n+1)\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \cos$$

$$0 \leq \frac{2k+1}{2n+2}\pi \leq \pi \quad /:\pi$$

$$0 \leq \frac{2k+1}{2n+2} \leq 1 \quad / \cdot (2n+2)$$

$$0 \leq 2k+1 \leq 2n+2 \quad / -1$$

$$-1 \leq 2k \leq 2n+1 \quad /:2$$

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq n + \frac{1}{2}$$

$k \in [0, n]$ - czyli $n+1$ zer rzeczywistych

Zad. 1

Mamy algorytm w postaci

$w_n = a_n$

$w_{n-1} = w_n x + a_{n-1}$

Mamy więc: $\beta_0 = 0$

$$a_0(1+\beta_0) + a_1 x (1+\alpha_1)(1+\beta_0)(1+\beta_1) + \ldots + a_n x^n (1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)(1+\beta_0)\ldots(1+\beta_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j) = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\beta_0)\prod_{j=1}^{i}(1+\beta_j)(1+\alpha_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i \cdot (1+\varepsilon_i) \cdot a_i$$

$|\alpha_j| \leq 2^{-t}$, $|\beta_j| \leq 2^{-t}$, więc z twierdzenia o kumulacji błędów

$$|\varepsilon_j| \leq (2i+1) \cdot 2^{-t}$$

Mamy więc dokładny wynik dla nieco zaburzonych danych, czyli algorytm jest numerycznie poprawny.