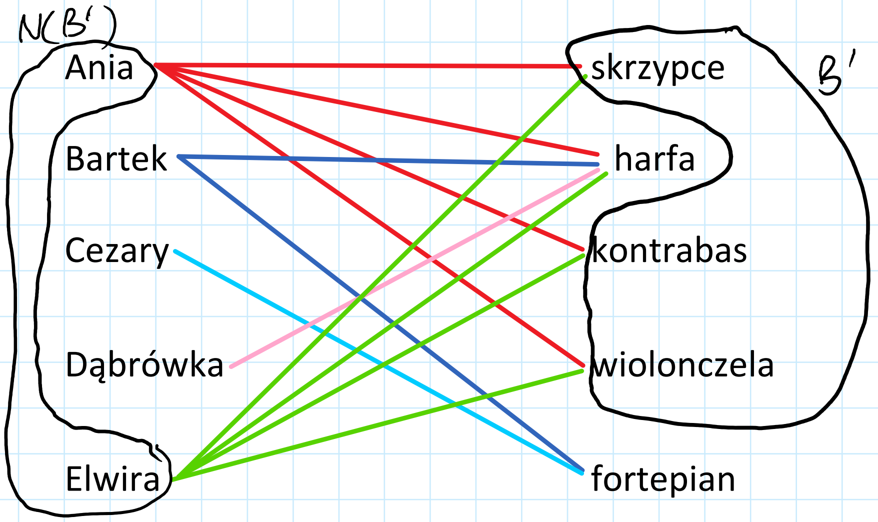
Zad. 10



Oznaczmy powyższy graf jako G.

$G = (A \cup B, E)$,

gdzie A to zbiór osób, a B to zbiór instrumentów

Weźmy zbiór $B' \subseteq B$ taki że $B' = \{$skrzypce, kontrabas, wiolonczela$\}$.

Wtedy $N(B') = \{$Ania, Elwira$\}$.

$|B'| = 3 > |N(B')| = 2$, czyli warunek Halla nie jest spełniony.

Zatem graf G nie zawiera skojarzenia doskonałego,

czyli tym osobom nie uda się dobrać składu.

Zad. 5

Załóżmy, że w jakiejś iteracji powstaje cykl o długości n. Weźmy wierzchołki, które tworzą ten cykl i nazwijmy je: $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

Kolejne wierzchołki tworzą między sobą krawędź,

czyli v_i tworzy krawędź z v_{i+1}, a v_{n-1} tworzy krawędź z v_0.

Oznaczmy te krawędzie jako: $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$,

gdzie e_i oznacza krawędź z v_i do v_{i+1}, a e_{n-1} krawędź z v_{n-1} do v_0.

Niech $c(e_i)$ będzie wagą krawędzi e_i.

Wiemy, że wagi są różne, więc z algorytmu otrzymujemy, że:

$$c(e_0) > c(e_1) > c(e_2) > \ldots > c(e_{n-1}) > c(e_0),$$

z czego wynika, że $c(e_0) > c(e_0)$,

więc otrzymujemy sprzeczność.

Zatem w żadnej iteracji algorytmu Boruvki nie powstanie cykl.

Zad. 6

Algorytm Boruvki wybierał taką krawędź e_i z dostępnych krawędzi,

że $c(e_i)$ było najmniejsze, gdzie $c(e_i)$ jest wagą krawędzi e_i.

Aby algorytm działał, gdy jakieś krawędzie mają takie same wagi,

należy wprowadzić wagę $g(e_i)$, taką że:

Weźmy dowolne e_i i e_j należące do zbioru krawędzi grafu:

Jeśli $c(e_i) < c(e_j)$: $g(e_i) < g(e_j)$

Jeśli $i < j \wedge c(e_i) = c(e_j)$: $g(e_i) < g(e_j)$

Wtedy algorytm wybierałby taką krawędź e_i z dostępnych krawędzi,

że $g(e_i)$ byłoby najmniejsze.

Dowód byłby analogiczny do dowodu z zadania 5.

Zakładając, że pojawi się cykl, otrzymalibyśmy, że

$$g(e_0) > g(e_1) > g(e_2) > \ldots > g(e_{n-1}) > g(e_0),$$

czyli sprzeczność.

Zad. 2

Jeśli usuniemy jedną krawędź dowolnego cyklu C grafu G, to G nie zostanie rozspójniony.

Niech cykl C składa się z krawędzi $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, takich że $c(e_0) > c(e_1) > c(e_2) > \ldots > c(e_{n-1})$.

Załóżmy że wyrzucimy krawędź e_i $(0 < i < n)$.

Wtedy dostaniemy drzewo T, które nie będzie MST grafu G, bo możemy zbudować drzewo T' usuwając z cyklu C krawędź e_0 (największą), a wtedy $c(T) > c(T')$.

Zad. 1

Załóżmy, że w grafie G są 2 MST - A i B.

Niech e będzie krawędzią o najmniejszej wadze i niech znajduje się w drzewie A, ale nie w drzewie B. Niech e będzie krawędzią $\{p, q\}$.

Wtedy B musi zawierać ścieżkę z p do q niezawierającą krawędzi e.

Jeśli dodalibyśmy e do B, to otrzymalibyśmy cykl.

Jeśli pozostałe krawędzie cyklu należałyby do A, to w A też byłby cykl, czyli A nie byłoby drzewem, więc ten cykl musi zawierać jakąś krawędź f, której nie ma w A.

Skoro e ma najmniejszą wagę, to f ma większą wagę niż e.

Wiemy, że A i B mają taką samą wagę. Jeśli z B zabierzemy f

i dodamy e, to dostaniemy drzewo rozpinające, które ma mniejszą wagę

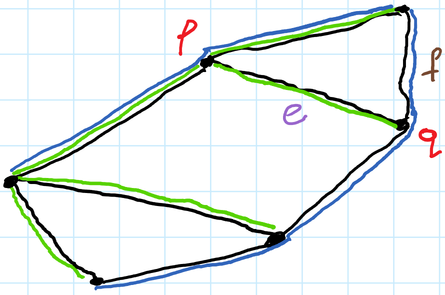
od drzewa A. Wtedy tylko B jest MST grafu G.

Otrzymujemy więc sprzeczność.

Przykład:

A - zielony

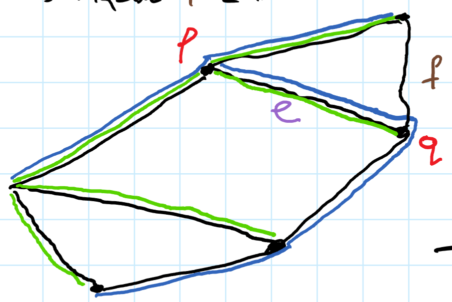
B - niebieski



$c(A) = c(B)$

$c(e) < c(f)$

Po usunięciu f z B i dodaniu e :



Teraz $c(A) > c(B)$