Zad. 3

Wierzchołkiem, z którego można dojść do każdego wierzchołka w mniej niż 2 krokach jest wierzchołek z największą liczbą krawędzi wychodzących (zawsze taki istnieje)

Weźmy graf skierowany G, który jest turniejem oraz wierzchołek $x \in G$, który ma najwięcej krawędzi wychodzących - k.

Weźmy dowolny wierzchołek $y \in G$:

Rozważmy przypadki:

1° $\forall_{\substack{y \in G \\ y \neq x}} (x, y) \in G$ - wtedy z x dojdziemy do każdego wierzchołka w 1 kroku

2° $\exists_{\substack{y \in G \\ y \neq x}} (y, x) \in G$ - wtedy x nie ma krawędzi wchodzącej do y, ale ma krawędzie wchodzące do k innych wierzchołków

Co najmniej jeden z tych wierzchołków (nazwijmy go z) ma krawędź wchodzącą do y. Skoro $(x, z) \in G$ i $(z, y) \in G$, to możemy dojść z x do y w 2 krokach, a do pozostałych wierzchołków w 1.

Gdyby żaden z tych k wierzchołków nie miał krawędzi wchodzącej do y, to y miałby $k+1$ krawędzi wychodzących (bo $(y, x) \in G$), czyli byłby wierzchołkiem z największą liczbą krawędzi wychodzących, co jest sprzeczne z założeniem.

$\blacksquare$

Zad. 6

Niech graf G będzie turniejem o n wierzchołkach.

Pokażemy, że w G jest co najmniej 1 ścieżka Hamiltona.

Dowód indukcyjny (po liczbie wierzchołków)

Podstawa indukcji:

$n = 1$

Istnieje ścieżka Hamiltona zawierająca jeden wierzchołek.

Krok ind.:

Załóżmy, że każdy turniej o n wierzchołkach ma co najmniej 1 ścieżkę Hamiltona.

Pokażemy, że każdy turniej o $n+1$ wierzchołkach ma co najmniej 1 ścieżkę Hamiltona.

Weźmy turniej T o n wierzchołkach. Z zał. ind. wiemy, ma co najmniej 1 ścieżkę Hamiltona.

Nazwijmy wierzchołki turnieju T tak, by ścieżka Hamiltona wyglądała następująco:

$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$

Weźmy dowolny wierzchołek v i dołączmy do T tak, by T nadal było turniejem.

Mamy 3 możliwości:

1. Jeśli $(v, v_1) \in T$, otrzymujemy ścieżkę Hamiltona:

   $v, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$

2. Jeśli $(v_n, v) \in T$, otrzymujemy ścieżkę Hamiltona:

   $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n, v$

3. Skoro 1 i 2 nie zachodzą, to $(v_1, v) \in T$ oraz $(v, v_n) \in T$

   Na pewno znajdziemy takie $i \in [1, n-1]$, że $(v_i, v) \in T$ oraz $(v, v_{i+1}) \in T$.

   Otrzymamy wtedy ścieżkę Hamiltona: $v_1, v_2, \ldots, v_i, v, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, v$

Zatem każdy turniej zawiera co najmniej jedną ścieżkę Hamiltona

Zad. 4

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym i hamiltonowskim.

Wtedy $|A| = |B|$

Dowód:

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Aby G był Hamiltonowski, musi zawierać cykl Hamiltona.

Skoro jest to graf dwudzielny to cykl musi przechodzić na zmianę przez wierzchołki z A i wierzchołki z B.

Załóżmy, że $|A| > |B|$ i że graf G ma cykl Hamiltona C.

Niech cykl rozpoczyna się od wierzchołka $u \in B$.

Po przejściu przez $2 \cdot |B|$ krawędzi cykl wraca do u i wszystkie wierzchołki z B zostały odwiedzone, ale pozostało $|A| - |B|$ wierzchołków w A, które nie zostały odwiedzone, więc C nie jest cyklem Hamiltona.

Zaczynając od $v \in A$, odwiedzilibyśmy wszystkie wierzchołki z B, ale na pewno skończylibyśmy na wierzchołku z A, z którego nie możemy przejść z powrotem do v, bo jest to graf dwudzielny.

Zatem C nie jest cyklem Hamiltona. ∎

Nie można obejść ruchem skoczka wszystkich pól szachownicy 5×5, ponieważ reprezentując ruchy skoczka jako graf dwudzielny, którego zbiór wierzchołków możemy podzielić na pola czarne i białe, nie uzyskamy cyklu Hamiltona (czyli nie przejdziemy przez każde

pole raz, kończąc na tym, od którego zaczęliśmy).

Jest tak, ponieważ na szachownicy 5×5 liczba pól białych nie jest równa liczbie pól czarnych.

Zad. 6

Niech wierzchołki n-wymiarowej kostki będą reprezentowane jako ciągi 0 i 1 o długości n.

Dwa wierzchołki są połączone jeśli odpowiadające im ciągi różnią się 1 współrzędną.

Pokażemy, że n-wymiarowa kostka ma ścieżkę Hamiltona z $(0,0,\dots,0)$ do $(1,0,\dots,0)$

Dowód indukcyjny:

Podstawa:
$n = 2$
Mamy ścieżkę $00, 01, 11, 10$.

Krok:
Załóżmy, że dla $n \geq 2$ n-wymiarowa kostka ma ścieżkę Hamiltona z $(0,0,\dots,0)$ do $(1,0,0,\dots,0)$

Pokażemy, że $n+1$-wymiarowa kostka ma ścieżkę Hamiltona z $(0,0,\dots,0)$ do $(1,0,0,\dots,0)$

Rozbijmy kostkę $n+1$-wymiarową na 2 kostki:

W jednej znajdą się wierzchołki reprezentowane przez ciągi zaczynające się od 0, a w drugiej zaczynające się od 1.

Będą to ciągi o długości $n+1$, ale skoro w obydwu grupach pierwsza współrzędna się nie zmienia, to możemy je potraktować jak ciągi o długości n. Z założenia indukcyjnego otrzymamy 2 ścieżki Hamiltona

- od $(0,0,\dots,0)$ do $(0,1,0,0,\dots,0)$
- od $(1,0,0,\dots,0)$ do $(1,1,0,0,\dots,0)$

Rozważamy graf nieskierowany, więc ścieżki mogą iść w obydwie strony.

łącząc te dwie ścieżki otrzymamy ścieżkę:

$$(0,0,\dots,0) \to \dots \to (0,1,0,\dots,0) \to (1,0,0,\dots,0) \to \dots \to (1,1,0,\dots,0),$$

która jest ścieżką Hamiltona.

■

Zad. 5

Ponumerujmy pola kostki w następujący sposób:

Patrząc od frontu na kostkę:

ŚCIANA FRONTOWA	ŚCIANA ŚRODKOWA	ŚCIANA TYLNA
1 2 3	10 11 12	19 20 21
4 5 6	13 14 15	22 23 24
7 8 9	16 17 18	25 26 27

Zauważmy, że mysz nie może się przenosić na pola o tej samej parzystości.

Możemy więc opisać ruchy myszy za pomocą grafu dwudzielnego

$$G = (P \cup N, E),$$

gdzie P to zbiór wierzchołków o numerach parzystych,
a N o numerach nieparzystych.

Zauważmy również, że $|P| = 13$, a $|N| = 14$ oraz że każdy róg kostki ma numer nieparzysty, a środek ma numer 14 czyli parzysty.

Jeśli mysz rozpocznie jedzenie od dowolnego rogu, zacznie od wierzchołka z numerem nieparzystym i będzie zjadała na przemian nieparzyste i parzyste.

Gdy dojdzie do 13 wierzchołka z numerem nieparzystym, będzie musiała przejść do 13 wierzchołka z numerem parzystym (czyli ostatniego parzystego), więc zostanie jej jeszcze ostatni wierzchołek z numerem nieparzystym.

Zatem mysz nie może zakończyć jedzenia na polu z numerem parzystym, czyli nie może zjeść środkowego pola jako ostatniego.