Zad. 2 $L = [1, 800]$

A - liczby podzielne przez 7 z zakresu $[1, 800]$

B - liczby podzielne przez 6 z zakresu $[1, 800]$

C - liczby podzielne przez 8 z zakresu $[1, 800]$

Z - liczby niepodzielne przez 7, ale podzielne przez 6 lub przez 8

$$Z = B \cup C - ((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$

$|B| = |\{6n \mid n \in \{1, \dots 133\}\}| = 133$

$|C| = |\{8n \mid n \in \{1, \dots, 100\}\}| = 100$

$|B \cap C| = |\{24n \mid n \in \{1, 33\}\}| = 33$

$|B \cup C| = 200$

liczby podzielne przez 6, 7 i 8

$|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$

$|A \cap B| = |\{42n \mid n \in \{1, 19\}\}| = 19$

$|A \cap C| = |\{56n \mid n \in \{1, 14\}\}| = 14$

$|A \cap B \cap C| = |\{7 \cdot 24n \mid n \in \{1, 4\}\}| = 4$

$|Z| = 200 - (19 + 14 - 4) = 171$

Zad. 3

A - sposoby ustawień, w których wszystkie a stoją obok siebie

B - sposoby ustawień, w których wszystkie b stoją obok siebie

C - sposoby ustawień, w których wszystkie c stoją obok siebie

W - wszystkie sposoby ustawień

X - sposoby ustawień, w których takie same litery nie tworzą jednego bloku

---

$X = W \setminus (A \cup B \cup C)$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A| = 6 \cdot \binom{5}{2} = 6 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 6 \cdot \frac{20}{2} = 60$

$|B| = 7 \cdot \binom{6}{2} = 7 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 7 \cdot \frac{30}{2} = 105$

$|C| = 8 \cdot \binom{7}{3} = 8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 8 \cdot \frac{210}{6} = 280$

$|A \cap B| = 12$

aaaabbbcc
caaaabbbc
cbbbaaaac
ccaaaabbb
aaaaccbbb
bbbccaaaa
caaaacbbb
cbbbcaaaa
aaaacbbbc
bbbcaaaac
ccbbbaaaa
bbbaaaacc

12

2 b obok siebie między blokami a i c

$|A \cap C| = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20$

3 b obok siebie

wszystkie b osobno

2 b obok siebie na początku

2 b na końcu

$$|B \cap C| = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 30$$

4 a obok siebie

3a na początku, lub na końcu lub między blokami b i c

2a na początku, lub na końcu lub między blokami b i c

aabbbaacc
aabbbacca · 2
aabbbccaa

bbbaaccaa
abbbaccaa · 2
abbbaacca · 2

$|A \cap B \cap C| = 3! = 6$ (na tyle sposobów możemy ustawić bloki)

$$|W| = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{24} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5}{6} = 1260$$

$$|X| = 1260 - (60 + 105 + 280 - 12 - 20 - 30 + 6) = 1260 - 389 = 871$$

Zad. 10

Sposoby wejścia po schodach będą reprezentować ciągi złożone z 1 i 2.

1 - pokonanie jednego stopnia

2 - pokonanie dwóch stopni

Suma każdego ciągu jest równa n.

Każdy ciąg może mieć długość od $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ do n.

Mamy zatem ciągi:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ - nie ma w nim żadnej 2

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ - jest w nim jedna 2

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ - są w nim dwie 2

$\vdots$

$a_1, a_2, \ldots, a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ - jest w nim $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dwójek

Musimy więc policzyć sumę możliwości ustawień dwójek w każdym ciągu.

Zatem $S = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}$

Zad. 11

Niech Y będzie zbiorem sposobów zaproszenia 3 osób z 7-osobowej grupy na 7 kolejnych kolacji.

Zatem $|Y| = \binom{7}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \ldots \cdot \binom{1}{3} = \binom{7}{3}^7$

sposoby zaproszenia na 1 kolację

Niech X będzie zbiorem sposobów zaproszenia 3 osób z 7-osobowej grupy na 7 kolejnych kolacji, tak żeby każda z osób została zaproszona na co najmniej 1 kolację.

Niech Z będzie zbiorem sposobów zaproszenia 3 osób z 7-osobowej grupy na 7 kolejnych kolacji, tak żeby co najmniej jedna osoba nie została zaproszona na co najmniej 1 kolację.

Zatem $|X| = |Y| - |Z|$. Policzmy więc moc zbioru Z.

Niech A_i będą zbiorami, w których i-ta osoba nie zostaje zaproszona ani razu
$i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Chcemy więc policzyć $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7|$.

Moc sumy tych zbiorów jest równa (z zasady włączeń i wyłączeń)

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,7\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

$|A_1| = \binom{6}{3}^7 = |A_2| = \dots = |A_7|$ (za każdym razem wybieramy spośród coraz mniejszej liczby osób)

$|A_1 \cap A_2| = \binom{5}{3}^7 = \dots = |A_6 \cap A_7|$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{4}{3}^7 = \dots = |A_5 \cap A_6 \cap A_7|$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{3}{3}^7 = \dots |A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 0 = \dots = |A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 0 = \dots = |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| = 0$

Zatem $|Z| = \binom{7}{1}\binom{6}{3}^7 - \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 + \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 - \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7$

Więc $|X| = \binom{7}{3}^7 - \left(\binom{7}{1}\binom{6}{3}^7 - \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 + \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 - \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7\right) =$

$= 55\,588\,723\,470$

Zad. 1

Niech A_n będzie zbiorem podzbiorów zbioru kolejnych n liczb naturalnych, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb.

$S(n) = |A_n|$

Każdy zbiór A_n możemy podzielić na dwie grupy

1. podzbiory zawierające n

Skoro każdy podzbiór zawiera n, to znaczy, że nie zawiera $n-1$.
Zatem możemy te podzbiory zbudować z podzbiorów, które są w A_{n-2}, dodając do każdego z nich n. Wtedy liczba takich zbiorów to $S(n-2)$.

2. podzbiory niezawierające n

Skoro żaden podzbiór nie zawiera n, to znaczy, że grupa tych podzbiorów to wszystkie podzbiory ze zbioru A_{n-1}, a więc jest ich $S(n-1)$

Zatem

$S(n) = S(n-2) + S(n-1)$

$S(0) = 1$ (bo jedynym podzbiorem zbioru pustego jest on sam)

$S(1) = 2$

Czyli $S(n)$ jest $n+2$ wyrazem ciągu Fibonacciego.

Zad. 6

Algorytm układania podwójnej wieży Hanoi:

Algorytm układania podwójnej wieży Hanoi:

1. Przenieś (rekurencyjnie) $2(n-1)$ krążków z A na C.
2. Przenieś 2 krążki z A na B
3. Przenieś (rekurencyjnie) $2(n-1)$ krążków z C na B.

Zatem $H_n = H_{n-1} + 2 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 2$

Rozwiązanie zależności rekurencyjnej:

$$h^2 = 2h + 2$$

$$h^2 - 2h - 2 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$h_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3} \qquad h_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

$$H_n = C\cdot(1+\sqrt{3})^n + D\cdot(1-\sqrt{3})^n$$

$$H_0 = 0 = C + D$$

$$H_1 = 2 = C\cdot(1+\sqrt{3}) - C(1-\sqrt{3})$$

$$C + C\sqrt{3} - C + C\sqrt{3} = 2$$

$$2C\cdot\sqrt{3} = 2$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D = -\frac{1}{3}$$

Zatem $H_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})$