Zad. 3

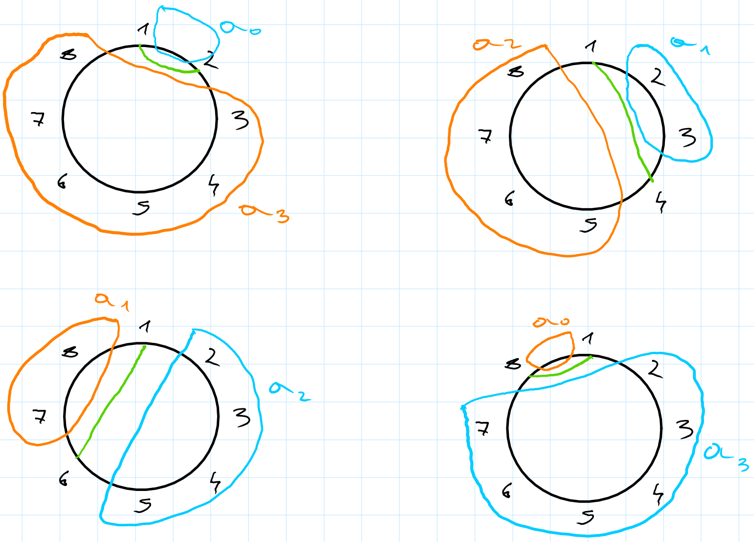
Największą liczbę niekrzyżujących się uścisków dłoni otrzymamy, gdy każda osoba uściśnie dłoń osoby oddalonej od niej o nieparzystą liczbę osób.

Gdy wybierzemy w ten sposób pierwszą parę uściskającą dłonie, podzielimy okrąg (stół) na dwie części.

Mamy $2n$ osób, więc możemy dokonać n takich podziałów łącząc osobę 1 z osobą o numerze większym o liczbę nieparzystą.

Niech a_n oznacza liczbę niekrzyżujących się uścisków $2n$ osób ($a_0 = 1$)

Przykład dla $n = 4$:



Łącząc osoby 1 i 2 mamy $a_0 \cdot a_3$ możliwości połączenia pozostałych. Analogicznie z pozostałymi podziałami.

Więc

$$a_4 = a_0 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1 + a_3 \cdot a_0$$

Zatem $$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1}$$

Widać, że jest to wzór na liczby Catalana, więc $$a_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

Zad. 1

d_n - liczba sposobów, na jakie można podzielić $(n+2)$-kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty, za pomocą $n-1$ nieprzecinających się przekątnych

$d_0 = 1$

Ponumerujmy wierzchołki $(n+2)$-kąta od w_1 do w_{n+2}

Weźmy wierzchołki w_1 i w_{n+2}. Odcinek je łączący to bok $(n+2)$-kąta.

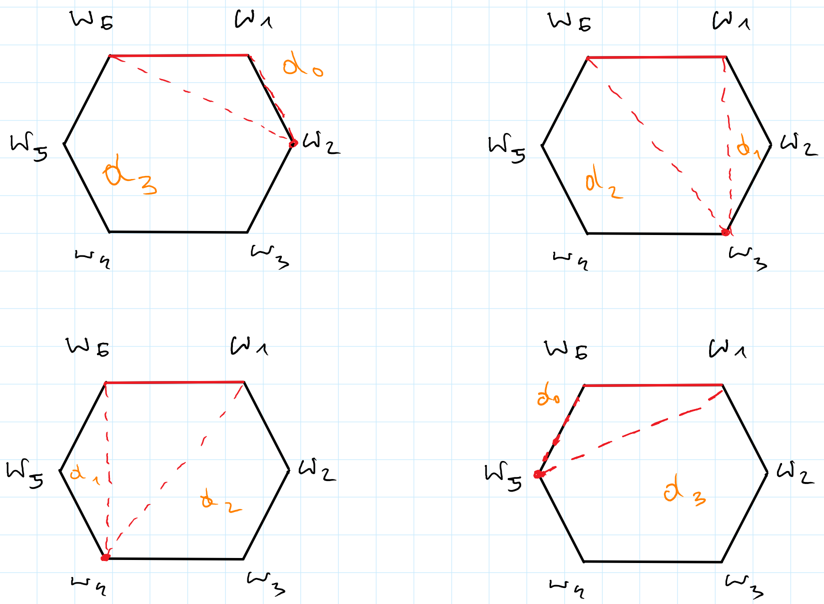
Wiemy, że przy podziale na trójkąty, ten odcinek będzie bokiem jednego z nich.

łącząc w_1 i w_{n+2} kolejno z pozostałymi wierzchołkami, będziemy tworzyć trójkąty, które będą dzieliły figurę na 2 mniejsze figury oraz ten trójkąt.

Czyli łączymy wierzchołki w_1 i w_{n+2} z wierzchołkiem w_k ($k \in [2, n+1]$), i wtedy figura dzieli się na k-kąt oraz $\underbrace{(n+2-(k-1))}_{n-k+3}$-kąt

Więc przy utworzeniu takiego trójkąta obliczamy $d_{k-2} \cdot d_{n-k+1}$.

Przykład dla $n=4$



Zatem $\quad d_n = \sum_{k=2}^{n+1} d_{k-2} \cdot d_{n-k+1}$.

Po zmianie granic sumowania otrzymujemy:

$$d_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \cdot d_{n-k-1}$$

czyli d_n to n-ta liczba Catalana

Zad. 6

$$b_n = (0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$a_i = b_{k+i}$$

$$b_0 = \dots = b_{k-1} = 0$$

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$B(x)$ - funkcja tworząca ciągu b_n

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i}_{0} + \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=k} b_i x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+k} x^{i+k} = x^k \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{b_{i+k}}_{= a_i} x^i = x^k \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = x^k \cdot A(x)$$

$$C_n = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

$$c_i = a_{k+1}$$

$$C(x) = a_k + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \dots$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\frac{A(x) - (a_0, a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k} = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i-k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Zatem $C(x) = \dfrac{A(x) - (a_0, a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k}$

Zad. 5

$A(x)$ - funkcja tworząca ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots)$

$B(x)$ - funkcja tworząca ciągu $(0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots)$

Z zad. 6 wiemy, że $B(x) = x^2 A(x)$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \cdot (2^i - 1) = \sum_{i=0}^{\infty} (x^i \cdot 2^i - x^i) = \sum_{i=0}^{\infty} 2x^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i =$$

$$= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}}{x^2} = \frac{\frac{1-x-1+2x}{(1-2x)(1-x)}}{x^2} = \frac{x^3}{2x^2-3x+1}$$

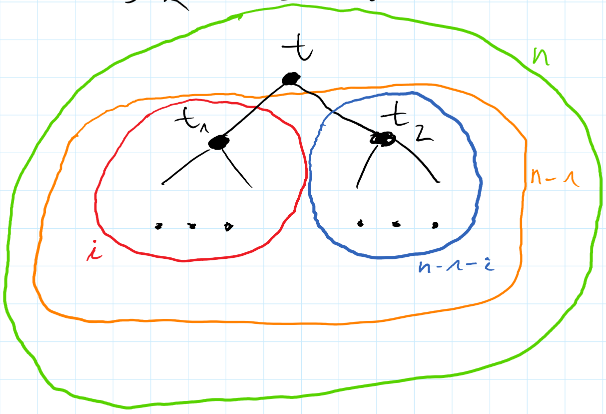
Zad. 2

T_n - liczba drzew binarnych, które mają n wierzchołków wewnętrznych

$T_0 = 1$, bo jest 1 drzewo z 0 wierzchołkami wewn., czyli drzewo puste

Dla $n \geq 0$:

Drzewo t, które ma n wierzchołków wewn. ma dzieci t_1 i t_2, które w sumie muszą mieć $n-1$ wierzch. wewn.



Drzewo t_1 ma i wierzch. wewn., a drzewo t_2 $n-1-i$

Zatem $$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-i-1}$$