Zad. 2

a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right|, \quad a_0 = a_1 = 1$

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_{n-1}^2$$

$$b_n = a_n^2$$

$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$$

$$E^2\langle b_n\rangle = E\langle b_n\rangle + \langle b_n\rangle$$

$(E^2 - E - 1)$ anihiluje ciąg b_n

$\Delta = 5$

$$\left(E - \frac{1-\sqrt5}{2}\right)\left(E - \frac{1+\sqrt5}{2}\right)$$

b_n jest postaci $\alpha\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} b_0 = 1 = \alpha + \beta \\ b_1 = 1 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) \end{cases}$$

$$(1-\beta)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) = 1 \quad \Big/ \cdot \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$$

$$\beta - 1 + \beta\left(\frac{1+2\sqrt5+5}{4}\right) = \frac{1+\sqrt5}{2} \quad \Big/ \cdot 4$$

$$4\beta - 4 + \beta(6+2\sqrt5) = 2 + 2\sqrt5$$

$$\beta(10+2\sqrt5) = 6 + 2\sqrt5$$

$$\beta = \frac{6+2\sqrt5}{10+2\sqrt5} = \frac{60 - 12\sqrt5 + 20\sqrt5 - 20}{100-20} = \frac{40+8\sqrt5}{80} = \frac{5+\sqrt5}{10}$$

$$\alpha = 1 - \frac{5+\sqrt5}{10} = \frac{5-\sqrt5}{10}$$

$$a_n = \sqrt{b_n} = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) + \frac{5+\sqrt5}{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{10}\right)}$$

bo mamy wartość bezwzględną

b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right|, \quad b_0 = 8$

$$b_{n+1}^2 = b_n^2 + 3$$

$$a_n = b_n^2$$

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

$$E\langle a_{n+1}\rangle = \langle a_{n+1} + 3\rangle = \langle a_{n+1}\rangle + \langle 3\cdot 1^n\rangle$$

$$(E-1)\langle a_{n+1}\rangle = \langle 3\cdot 1^n\rangle$$

anihilowany przez E-1

więc $(E-1)^2$

jest anihilatorem ciągu a_n.

a_n jest postaci $\alpha n + \beta$

$$\begin{cases} a_0 = 64 = \beta \\ a_1 = 67 = \alpha + \beta \end{cases}$$

$\alpha = 3$

$b_n = \sqrt{a_n} = \sqrt{3n + 64}$

c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}, \quad c_0 = 0, \ c_1 = 1$

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c_n}{n!} + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}$$

$a_n = \frac{c_n}{n!}, \quad a_0 = 0, \ a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$(E^2 - E - 1)$ anihiluje a_n (ciąg Fibonacciego)

a_n jest postaci $-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$

czyli: $c_n = \left(-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\right) \cdot n!$

Zad. 4

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k)}{k!} \cdot \frac{n!}{n!} =$$

$$\frac{\overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}^{n!}\cdot(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{k!\,n!} = \frac{(n+k)!}{k!((n+k)-k)!} =$$

$$= \binom{n+k}{n} \in \mathbb{N}$$

Zatem iloczyn k kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$

Zad. 6

$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1, \quad a_0 = 2, \ a_n > 0$

$b_n = a_n^2$

$b_n = 2b_{n-1} + 1$

$E\langle b_n \rangle = \langle 2b_n + 1 \rangle = 2\langle b_n \rangle + \langle 1 \rangle$ ← anihilowany przez $(E-1)$

Więc $(E-2)(E-1)$ anihiluje ciąg b_n,

czyli b_n jest postaci $\alpha \cdot 2^n + \beta$

$$\begin{cases} b_0 = 4 = \alpha + \beta \\ b_1 = 9 = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$2(4-\beta) + \beta = 9$

$8 - \beta = 9$

$\beta = -1$

$\alpha = 5$

$b_n = 5 \cdot 2^n - 1$

$a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$ (wykluczamy $-\sqrt{\ }$, bo $a_n > 0$)

Zad. 7

a_n - ciąg n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierający parzystą liczbę liter a

$a_1 = 24$

$$a_n = \underbrace{(25^{n-1} - a_{n-1})}_{\text{wszystkie „nieprawidłowe" } n-1 \text{ literowe słowa}} \cdot \underbrace{1} + \overbrace{a_{n-1}}^{\text{wszystkie „prawidłowe" } n-1 \text{ literowe słowa}} \cdot \underbrace{24}$$

Skoro miały nieparzystą liczbę „a", to po dopisaniu jednego „a" mamy n-literowe słowo z parzystą liczbą „a".

Słowo miały parzystą liczbę „a", to po dopisaniu litery różnej od „a" (24 możliwości) nadal mamy parzystą liczbę „a".

W ten sposób otrzymujemy wszystkie „prawidłowe" n-literowe słowa.

$a_n = (25^{n-1} - a_{n-1}) \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 24 = 25^{n-1} + 23a_{n-1}$

Czyli $(E-25)(E-23)$ jest anihilatorem ciągu a_n.

$a_n = \alpha 25^n + \beta 23^n$

$$\begin{cases} a_1 = 24 = 25\alpha + 23\beta \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{24 - 23\beta}{25} \\ a_2 = 577 = 625\alpha + 529\beta \end{cases}$$

$625 \cdot \left(\frac{24 - 23\beta}{25}\right) + 529\beta = 577$

$25 \cdot (24 - 23\beta) + 529\beta = 577$

$600 - 575\beta + 529\beta = 577$

$46\beta = 23$

$\beta = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{24 - \frac{23}{2}}{25} = \frac{\frac{25}{2}}{25} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{1}{2} \cdot 25^n + \frac{1}{2} \cdot 23^n$

Zad. 9

C_n – liczba ciągów prawidłowych (zgodnych z treścią zadania)

z_n – liczba prawidłowych ciągów z 0 na końcu

j_n – liczba prawidłowych ciągów z 1 na końcu

d_n – liczba prawidłowych ciągów z 2 na końcu

Czyli $C_n = z_n + j_n + d_n$

$z_n = j_{n-1} + d_{n-1}$ – bo możemy do n-1 elementowych ciągów z 1 lub 2 na końcu dopisać 0

$j_n = z_{n-1} + d_{n-1}$ – bo możemy do n-1 elementowych ciągów z 0 lub 2 na końcu dopisać 1

$d_n = z_{n-1} + j_{n-1} + d_{n-1}$ – bo możemy do n-1 elementowych ciągów z 0, 1 lub 2 na końcu dopisać 2

$C_n = z_n + j_n + d_n = j_{n-1} + d_{n-1} + z_{n-1} + d_{n-1} + z_{n-1} + j_{n-1} + d_{n-1} =$

$= 2j_{n-1} + 2d_{n-1} + 2z_{n-1} + d_{n-1} = 2(j_{n-1} + d_{n-1} + z_{n-1}) + d_{n-1} =$

$= 2c_{n-1} + d_{n-1} = 2c_{n-1} + z_{n-2} + j_{n-2} + d_{n-2} = 2c_{n-1} + c_{n-2}$

Zatem $c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2}$.

$E^2\langle c_n\rangle = \langle 2c_{n+1} + c_n\rangle = 2E\langle c_{n+1}\rangle + \langle c_n\rangle$,

czyli $E^2 - 2E - 1$ jest anihilatorem ciągu c_n.

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$E_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad E_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

c_n jest więc postaci $\alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$

$$\begin{cases} c_0 = 1 = \alpha + \beta \\ c_1 = 3 = (1+\sqrt{2})\alpha + (1-\sqrt{2})\beta \end{cases}$$

$(1+\sqrt{2})(1-\beta) + \beta - \sqrt{2}\beta = 3$

$1 - \beta + \sqrt{2} - \sqrt{2}\beta + \beta - \sqrt{2}\beta = 3$

$-2\sqrt{2}\beta = 2 - \sqrt{2}$

$\beta = -\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}-2}{4} = -\frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

$$\alpha = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $c_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$