

# Sprawozdanie - Algorytmy Grafowe

Szymon Szymankiewicz, Nikolas Szwargot

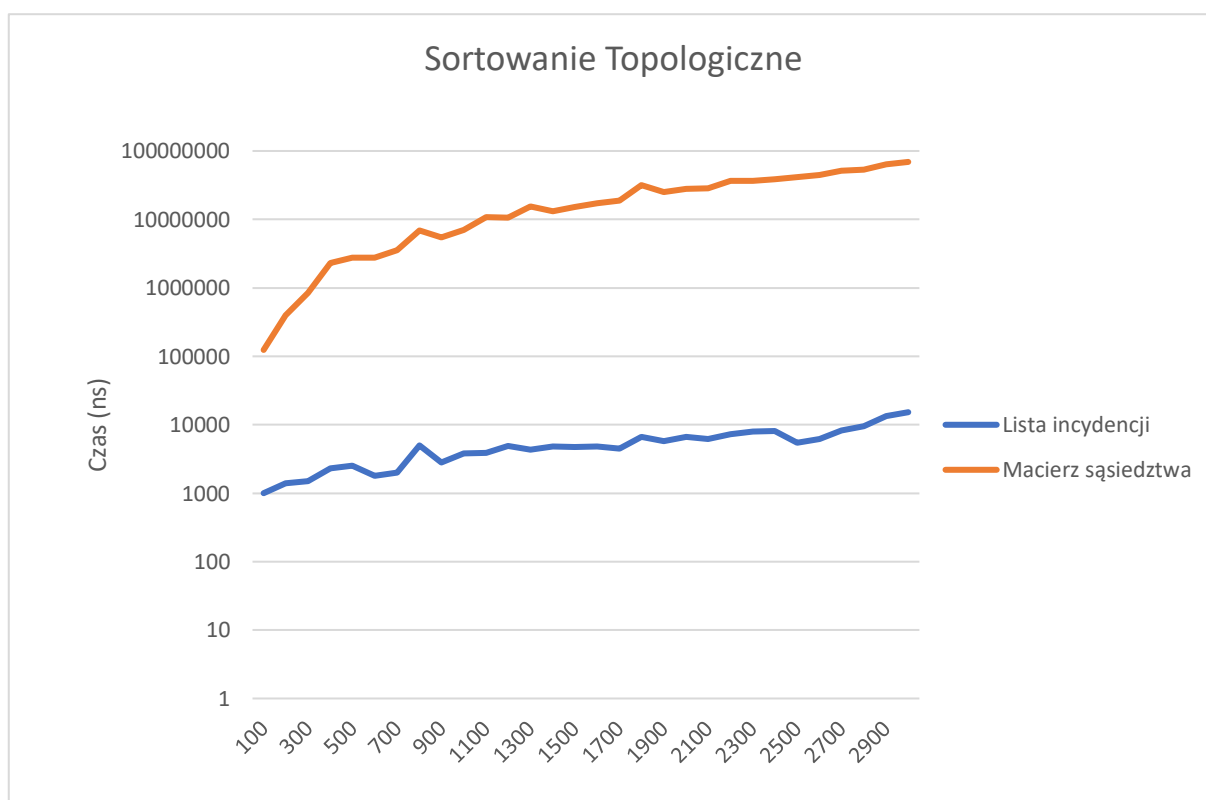
Lab 11, Informatyka, Semestr 2

## Wstęp

Celem naszego projektu jest porównanie i zagłębienie się w działanie dwóch algorytmów grafowych, którymi są Sortowanie Topologiczne oraz Wyznaczanie Minimalnego Drzewa Rozpinającego w różnych wariantach nasycień grafu krawędziami. Szybkość obu programów została również przetestowana za pomocą Listy Incydencji oraz Macierzy Sąsiedztwa. Programy użyte do zmierzenia szybkości działania zostały napisane w języku C++. Aby uzyskać pełen, czytelny widok wykresów czas wykonywania algorytmów został zmierzony w nanosekundach (Sortowanie Topologiczne) oraz milisekundach (wyznaczanie Minimalnego Drzewa Rozpinającego).

## I. Sortowanie Topologiczne

Wykres przedstawia czas wykonania sortowania topologicznego grafu skierowanego (DAG) dla badanych algorytmów grafowych. Poziom nasycenia krawędziami wynosi 60%. Na wykresie została wykorzystana skala logarytmiczna w celu łatwiejszego zauważenia i porównania prędkości wykonywania. Zakres wierzchołków wynosi 100-3000 z krokiem co 100.



## Wnioski

### Lista incydencji

Lista incydencji składa się z wszystkich następników dla kolejnych wierzchołków. Każdy następnik odpowiada danej krawędzi. Wynika stąd, że złożoność pamięciowa takiego  $O(|E|)$ , gdzie  $E$  to zbiór wszystkich krawędzi występujących w grafie. Sortowanie topologiczne dla listy incydencji ma lepszą złożoność obliczeniową niż dla macierzy sąsiedztwa. Jest to spowodowane tym, że wyszukiwanie kolejnych następników polega na przejściu po kolei listy dla danego wierzchołka, nie trzeba wykonywać żadnych porównań.

### Zalety

- Złożoność pamięciowa bardzo dobra w szczególności dla niegęstych grafów
- Szybkie wyszukiwanie kolejnego następnika
- Łatwa implementacja

### Wady

- Stosunkowo długi czas sprawdzenia istnienia danej krawędzi

### Macierz sąsiedztwa

Macierz sąsiedztwa jest reprezentowana przez tablicę dwuwymiarową wypełnioną przez 0 (brak krawędzi o danych indeksach) lub 1 (istnieje krawędź między wierzchołkami o danych indeksach). Złożoność pamięciowa takiego obiektu wynosi  $O(|V|^2)$ , gdzie  $V$  to zbiór wszystkich wierzchołków występujących w grafie. Wynika to z rozmiaru macierzy, która ma dokładnie tyle kolumn i wierszy, ile występuje wierzchołków w całym grafie. W pierwszy wymiar reprezentuje wierzchołki wychodzące, a drugi wchodzące, wartości informują o istnieniu danej krawędzi. Dla tej reprezentacji złożoność obliczeniowa sortowania topologicznego jest gorsza niż dla listy incydencji, co wynika z konieczności przeszukania całego wiersza macierzy, aby znaleźć wszystkie następniki.

### Zalety

- Złożoność pamięciowa jest taka sama dla danej liczby wierzchołków niezależnie od nasycenia krawędzi
- Sprawdzenie istnienia danej krawędzi wykonuje się w czasie  $O(1)$

## Wady

- Długi czas wyszukania wszystkich następników danego wierzchołka co za tym idzie dłuższe sortowanie
- Dla niegęstych grafów złożoność obliczeniowa jest stosunkowo duża

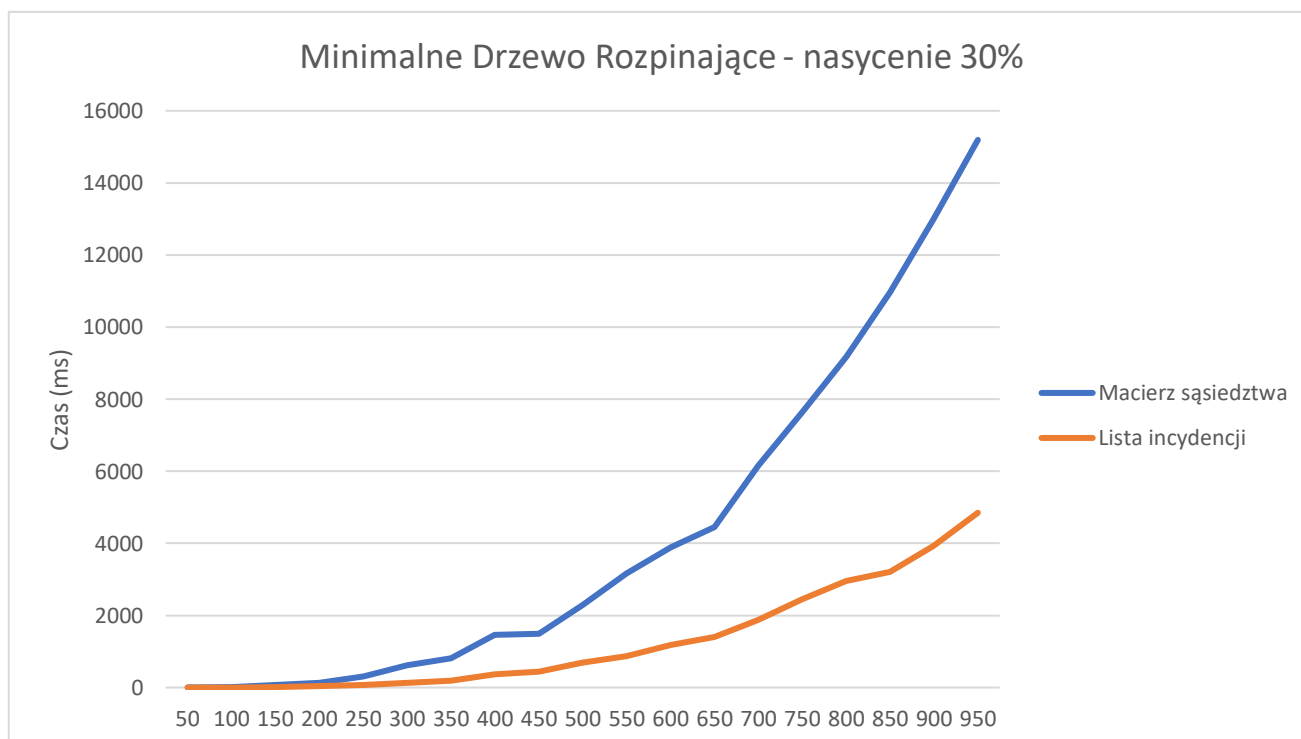
## Zastosowania dla sortowania topologicznego

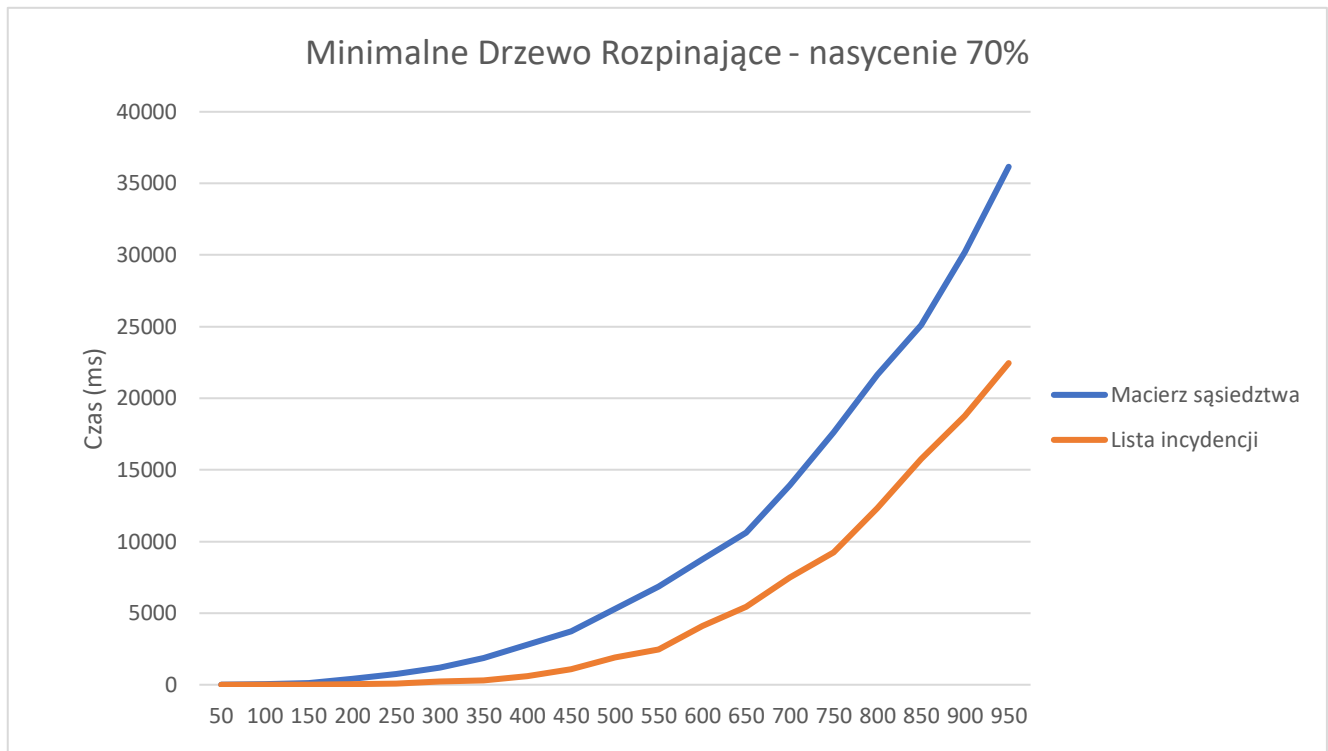
Sortowanie topologiczne pozwala na ustalenie kolejności wykonywania danych czynności/operacji, których możliwość wykonania jest od siebie zależna. Przykładem użycia sortowania topologicznego jest:

- ustalenie kolejności wykonania złożonych obliczeń
- sekwencjonowanie DNA
- znajdowanie cyklu w grafie
- maszynowe poprawianie gramatyki w zdaniach

## II. Minimalne Drzewo Rozpinające

Algorytm wyznaczania Minimalnego Drzewa Rozpinającego w grafie nieskierowanym z wagami na krawędziach polega na wybraniu tylko takich krawędzi, aby graf nieskierowany pozostał spójny oraz łączna waga wszystkich krawędzi w grafie była jak najmniejsza. Poniższe wykresy przedstawiają szybkość wykonania algorytmu dla listy incydencji oraz macierzy sąsiedztwa. Rozpatrzone zostały 2 przypadki w zależności od nasycenia grafu krawędziami. Nasycenie pierwszego grafu wynosi 30% natomiast grafu drugiego 70%.





## Wnioski

Z wykresu łatwo można zauważyć, że im większe nasycenie grafu krawędziami tym dłużej trwa wykonywanie algorytmu co wynika z faktu, że przetwarzana jest większa ilość krawędzi. Mimo, że złożoność obliczeniowa algorytmu dla obu reprezentacji grafu jest taka sama to przewaga listy incydencji nad macierzą sąsiedztwa pod względem szybkości wykonywania w obu przypadkach zależna jest od tego, że w przypadku macierzy sąsiedztwa poszukiwanie następników danego wierzchołka, czyli co za tym idzie, krawędzi wymaga przeszukania całego wiersza macierzy i wykonywania dodatkowych operacji porównań. Złożoność obliczeniowa wynosi  $O(|V|^2)$ , gdzie  $V$  oznacza zbiór wszystkich wierzchołków w grafie.

## Lista incydencji

- W przypadku listy incydencji poziom nasycenia ma znaczny wpływ na sposób wyznaczania Minimalnego Drzewa Rozpinającego. Wraz ze wzrostem nasycenia krawędzi co równoznaczne jest ze wzrostem ich następników algorytm w każdym kroku obciążony jest większą liczbą wymaganych operacji do przejścia, aby wyszukać krawędź o najmniejszej wadze, przez co różnica w szybkości wyszukiwania między listą, a macierzą przy większym nasyceniu coraz bardziej zanika.

## Macierz sąsiedztwa

- Podczas, gdy w liście incydencji znaczny wpływ miało nasycenie ilości krawędzi w grafie, tak w przypadku macierzy sąsiedztwa stopień nasycenia nie ma żadnego wpływu na szybkość działania algorytmu. W każdym przypadku zostanie przeszukana cała macierz w celu znalezienia wszystkich następników i nie zmieni ona swojego rozmiaru, gdy zostaną dodane nowe krawędzie jak i w przypadku, gdy będzie ich mniej. Pojawienie się większej ilości cyfry 1 (oznaczającej istnienie połączenia między wierzchołkami) nie zmieni efektywności działania w porównaniu do zmiany efektywności listy sąsiedztwa zależnej od nasycenia krawędzi.

## Zastosowania dla Minimalnego Drzewa Rozpinającego

Wyznaczenie Minimalnego Drzewa Rozpinającego jest najbardziej przydatne w przypadkach, gdzie potrzebna jest pewna optymalizacja/minimalizacja odległości. Przykładem użycia Minimalnego Drzewa Rozpinającego jest:

- budowa sieci m.in. elektrycznych i kanalizacyjnych
- projektowanie sieci transportowych takich jak autostrady czy kolej