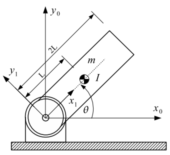
Laboratorium Sterowania Robotów Manipulacyjnych

Instytut Automatyki i Robotyki
Politechnika Poznańska
IAR-PP
oprac. Maciej M. Michałek



ĆWICZENIE 4

Jakość sterowania z regulatorem ROOS dla dwóch rodzajów ograniczonych podprzestrzeni sterowań: hiperkuli i hiperprostopadłościanu

Przedmiotem analizy jest jakość działania *Regulatora Odpornego z Ograniczeniami na Sterowania* – tzw. regulatora ROOS. Zastosowanie tego regulatora dopuszcza występowanie nieznajomości parametrycznej a nawet strukturalnej modelu sterowanego systemu gwarantując jednocześnie zbieżność i ograniczoność końcową błędów śledzenia dla ograniczonej trajektorii w przestrzeni konfiguracyjnej[1]. Proponowany algorytm sterowania uwzględnia wprost ograniczenia wartości momentów sterujących występujących podczas każdej praktycznej implementacji algorytmu sterowania [2] gwarantując, że

$$\forall_{t\geqslant 0} \ \|\boldsymbol{\tau}(t)\| \leqslant \tau_{max},$$

gdzie τ_{max} oznacza górne ograniczenie normy obliczanego wektora sterowań $\boldsymbol{\tau}(t)$. Efektywność wykorzystania dostępnej mocy wszystkich napędów manipulatora przy jednoczesnym spełnieniu powyższej nierówności zależy od właściwego sposobu ograniczania poszczególnych momentów sterujących. Poniżej przeanalizowane zostaną dwa przypadki, w których ograniczanie momentów sterujących jest związane z wyborem kształtu podprzestrzeni sygnałów sterujących jako hiperkuli bądź jako hiperprostopadłościanu.

Rozważmy nieliniowe równiania wektorowo-macierzowe reprezentujące model manipulatora PM2R postaci:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \tag{1}$$

gdzie: $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \triangleq \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{q}})$ oraz $\boldsymbol{M}_{2\times 2}$ – macierz bezwładności manipulatora, $\boldsymbol{C}_{2\times 2}$ – macierz współczynników uogólnionych sił Coriolisa i odśrodkowych, $\boldsymbol{G}_{2\times 1}$ – wektor uogólnionych sił grawitacji, $\boldsymbol{F}_{2\times 1}$ – wektor uogólnionych sił tarcia, $\boldsymbol{\tau}_{2\times 1} \in \mathcal{T}$ – wektor uogólnionych sił wymuszających ($\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ – przestrzeń wymuszeń/sterowań). Załóżmy, że równanie (1) nie jest w pełni znane projektantowi systemu sterowania. Ze względu nieznajomość prawdziwych wartości parametrów dynamicznych $\boldsymbol{p}$ manipulatora, a także ze względu na błąd struktury modelu (pominięcie pewnych elementów występujących w rzeczywistej macierzy $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ lub/i rzeczywistym wektorze reszty dynamiki $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$) pojawi się niepewność modelowania postaci $\Delta\boldsymbol{M}, \Delta\boldsymbol{h}$, a w szczególnym przypadku także niepewność strukturalna, dla której $\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{q}) \neq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ oraz $\boldsymbol{h}^*(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \neq \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ (por. ćwiczenie 2).

[1]Trajektoria referencyjna musi spełniać założenia **A1-A4** (patrz dalej).

1 Sterowanie w podprzestrzeni typu *hiperkula*

Załóżmy, że manipulator PM2R (równanie (1)) wyposażony jest w napędy zdolne do wytworzenia skończonych wartości momentów napędowych[2] $\tau_{1max} > 0, \tau_{2max} > 0$. Zatem w całym czasowym horyzoncie sterowania prawdziwe muszą być relacje:

$$\sup_{t\geqslant 0}|\tau_1(t)| \leqslant \tau_{1max}, \qquad \sup_{t\geqslant 0}|\tau_2(t)| \leqslant \tau_{2max}, \quad \text{gdzie} \quad [\tau_1(t)\ \tau_2(t)]^T \triangleq \boldsymbol{\tau}(t). \tag{2}$$

Poniżej przedstawione zostanie prawo sterowania, które gwarantuje spełnienie nierówności (2) i jednocześnie zbieżność i ograniczoność końcową błędów śledzenia.

Na początku zakładamy, że trajektorie zadane (referencyjne) są ograniczone, tzn.:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A1}: &\quad \sup_{t\geqslant 0}\|\boldsymbol{q}_d(t)\| \leqslant c_1,\\
\mathbf{A2}: &\quad \sup_{t\geqslant 0}\|\dot{\boldsymbol{q}}_d(t)\| \leqslant c_2,\\
\mathbf{A3}: &\quad \sup_{t\geqslant 0}\|\ddot{\boldsymbol{q}}_d(t)\| \leqslant c_3,
\end{aligned}$$

gdzie $c_1, c_2, c_3 > 0$ oznaczają pewne stałe dodatnie. Dodatkowo zakłada się, że dostępna moc zastosowanych napędów (wynikająca między innymi z wartości $\tau_{imax},\ i = 1,2$) pozwala generalnie na realizację trajektorii zadanej:

$$\mathbf{A4}: \quad \sup_{t\geqslant 0}\|\boldsymbol{\tau}_d(t)\| = \sup_{t\geqslant 0}\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}_d(t))\ddot{\boldsymbol{q}}_d(t) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}_d(t), \dot{\boldsymbol{q}}_d(t))\| < \tau_{max},$$

co oznacza, że trajektoria zadana jest tak zaprojektowana, by była realizowalna pomimo obecności ograniczeń sygnałów sterujących robota. Nierówność ostra w założeniu **A4** wskazuje na występowanie koniecznej nadwyżki dostępnego momentu napędowego potrzebnego do ograniczania wpływu zakłóceń i uchybów początkowych.

Wprowadźmy uogólniony (ważony) błąd śledzenia trajektorii:

$$\boldsymbol{r}(t) \triangleq \dot{\boldsymbol{e}}(t) + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}(t), \tag{3}$$

gdzie: $\boldsymbol{e}(t) \triangleq \boldsymbol{q}_d(t) - \boldsymbol{q}(t),\ \dot{\boldsymbol{e}}(t) \triangleq \dot{\boldsymbol{q}}_d(t) - \dot{\boldsymbol{q}}(t)$, a diagonalna macierz dodatnich współczynników wzmocnienia (wag) ma postać:

$$\boldsymbol{\Lambda} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{11},\ \lambda_{22} > 0.$$

Uwzględniając występowanie praktycznych ograniczeń momentów napędowych manipulatora, wprowadza się wektor ograniczeń sygnałów sterujących:

$$\boldsymbol{\tau}_{max} \triangleq \begin{bmatrix} \tau_{1max} \\ \tau_{2max} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdzie $\tau_{imax},\ i = 1,2$ spełniają nierówności (2).

Zgodnie z propozycją [2], odporne ciągłe prawo sterowania w przestrzeni typu hiperkula (lub inaczej: regulator ROOS w przestrzeni typu hiperkula) ma następującą postać:

$$\boldsymbol{\tau}(t) \triangleq \begin{cases} \dfrac{\tau_{HKmax}}{\|\boldsymbol{r}(t)\|}\boldsymbol{r}(t) & \text{dla} \quad \|\boldsymbol{r}(t)\| \geqslant \epsilon, \\[2ex] \dfrac{\tau_{HKmax}}{\epsilon}\boldsymbol{r}(t) & \text{dla} \quad \|\boldsymbol{r}(t)\| < \epsilon, \end{cases} \tag{5}$$

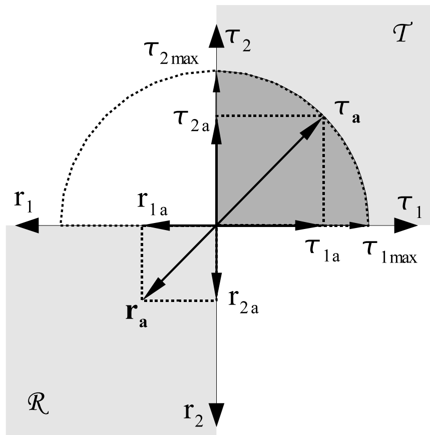
[2] W sensie wartości bezwzględnej.

gdzie górne ograniczenie τ_{HKmax} normy wektora sterowań $\boldsymbol{\tau}(t)$ zdefiniowane jest następująco:

$$\tau_{HKmax} \triangleq \min_{i=1,2} \{\tau_{imax}\} \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \forall_{t\geqslant 0} \; \|\, \boldsymbol{\tau}(t)\| \leqslant \tau_{HKmax}, \tag{6}$$

a elementy τ_{imax} wynikają z (4). Błąd ważony $\boldsymbol{r}(t)$ w (5) zdefiniowany jest wzorem (3), a współczynnik $\epsilon > 0$ stanowi założoną wartość normy ważonego błędu śledzenia $\boldsymbol{r}$.

Zauważmy, że wartość ograniczenia τ_{HKmax} z (6) jest promieniem hiperkuli $\boldsymbol{B}^2_{\tau_{HKmax}}$ o środku w początku układu współrzędnych dwuwymiarowej przestrzeni sterowań $\mathcal{T}$ (w ogólnym przypadku manipulatora o n stopniach swobody, przestrzeń sterowań $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$ jest n-wymiarowa). Dla manipulatora PM2R dwuwymiarowa hiperkula $\boldsymbol{B}^2_{\tau_{HKmax}}$ staje się kołem o promieniu τ_{HKmax} w przestrzeni sterowań $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ (rys. 1). Zgodnie z (6), promień takiej kuli jest równy zawsze najmniejszej wartości elementu z wektora $\boldsymbol{\tau}_{max}$.



Rysunek 1: Hiperkula $\boldsymbol{B}^2_{\tau_{HKmax}}$ w przestrzeni sterowań $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ dla $\tau_{1max} = \tau_{2max}$ oraz konstrukcja wektora sterowania $\boldsymbol{\tau}_a$ (indeks a należy interpretować następująco: $\boldsymbol{\tau}_a = \boldsymbol{\tau}(t_a)$, $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}(t_a)$).

Proponowane sterowanie odporne (5) należy do klasy ciągłych sterowań *z wektorem jednostkowym* (ang. *unit vector control* [3]) i nie zależy od elementów modelu manipulatora (1).

Należy zwrócić uwagę, iż w całym horyzoncie czasowym $t \geqslant 0$ wartość sterowania (5) nie przekracza ograniczenia τ_{HKmax}, a tym samym najmniejszej wartości elementu wektora ograniczeń $\boldsymbol{\tau}_{max} = [\tau_{1max}\ \tau_{2max}]^T$ czyniąc zadość nierównościom (2). Dodatkowo sterowanie (5) wewnątrz tunelu ϵ przyjmuje postać klasycznego zdecentralizowanego regulatora PD:

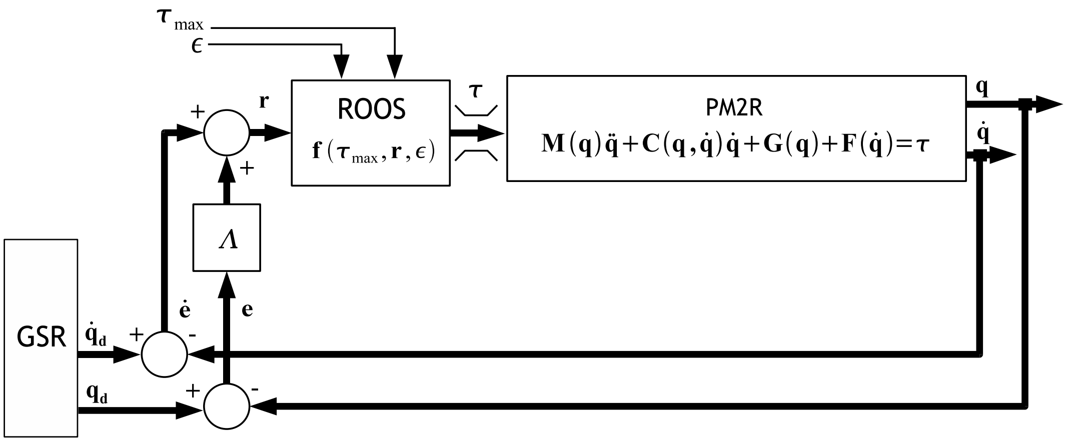
$$\text{dla } \|\, \boldsymbol{r}(t)\| < \epsilon : \qquad \boldsymbol{\tau}(t) \overset{(5)}{=} \frac{\tau_{HKmax}}{\epsilon}\boldsymbol{r}(t) \overset{(3)}{=} \boldsymbol{K}_v\dot{\boldsymbol{e}}(t) + \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{e}(t),$$

o wzmocnieniach $\boldsymbol{K}_p = \dfrac{\tau_{HKmax}}{\epsilon}\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{K}_v = \dfrac{\tau_{HKmax}}{\epsilon}\boldsymbol{I}$.

1.1 Przyjąć jednakowe ograniczenia momentów napędowych dla obu silników manipulatora PM2R stanowiących jednocześnie górne ograniczenie normy wektora sterowań $\boldsymbol{\tau}$:

$$\tau_{1max} = \tau_{2max} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_{HKmax} \overset{(6)}{=} \tau_{1max} = \tau_{2max}.$$

1.2 Zamodelować równanie regulatora ROOS według (5) i zastosować je do manipulatora (1) (rys. 2). Zapewnić możliwość swobodnej zmiany wartości zakładanego tunelu ϵ. Wartości elementów macierzy $\boldsymbol{\Lambda}$ dobrać doświadczalnie tak, aby zapewnić minimalne przeregulowania w przebiegu błędu pozycji $\boldsymbol{e}(t)$.



Rysunek 2: Schemat blokowy układu sterowania odpornego uwzględniający ograniczenia na sterowanie $\boldsymbol{\tau}$ (poprzez symboliczny zapis $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau}_{max}, \boldsymbol{r}, \epsilon)$ należy rozumieć prawo sterowania (5) lub (8) - (11).

1.3 Przeprowadzić symulację odpowiedzi systemu sterowania z manipulatorem PM2R dla skokowych wartości zadanych pozycji (przyjąć: $\ddot{\boldsymbol{q}}_d = \dot{\boldsymbol{q}}_d = \boldsymbol{0}$):

$$\boldsymbol{q}_d = [Q_{1d} \quad Q_{2d}]^T \cdot \mathbf{1}(t).$$

- *Czy błędy śledzenia zmierzają asymptotycznie do zera? Przeanalizować zbieżność błędów śledzenia dla różnych wartości parametru ϵ. Czy sygnały sterujące spełniają nierówności (2)? Zbadać wpływ wartości współczynnika ϵ na występowanie zjawiska drgań sterowania (ang.* chattering*). Czy można przyjąć $\epsilon = 0$, aby uzyskać asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia do zera? Odpowiedź uzasadnić.*

1.4 Przeprowadzić symulacje odpowiedzi systemu sterowania z manipulatorem PM2R dla następujących przebiegów wartości zadanych pozycji:

$$\boldsymbol{q}_d(t) = \begin{bmatrix} Q_{1d}\sin(\omega_1 t) \\ Q_{2d}\sin(\omega_2 t) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{q}_d(t) = \begin{bmatrix} Q_{d01} + Q_{d11}t + Q_{d21}t^2 + Q_{d31}t^3 \\ Q_{d02} + Q_{d12}t + Q_{d22}t^2 + Q_{d32}t^3 \end{bmatrix}.$$

- *Jak zachowują się błędy śledzenia? Odnieść uzyskane przebiegi błędów do przyjętej wartości współczynnika ϵ. Przeanalizować przebiegi sygnałów sterujących. Czy nadal spełnione są nierówności (2)?*

1.5 Przyjąć ograniczenia momentów napędowych dla obu silników manipulatora PM2R następująco:

$$\tau_{2max} = 0.5\tau_{1max} \quad \Rightarrow \quad \tau_{HKmax} \overset{(6)}{=} \tau_{2max}.$$

Przeprowadzić symulację odpowiedzi systemu sterowania z manipulatorem PM2R dla skokowych wartości zadanych pozycji (przyjąć: $\ddot{\boldsymbol{q}}_d = \dot{\boldsymbol{q}}_d = \mathbf{0}$):

$$\boldsymbol{q}_d = [Q_{1d} \quad Q_{2d}]^T \cdot \mathbf{1}(t).$$

- *Przeanalizować przebiegi sterowań. Jaka jest maksymalna wartość sterowania w całym horyzoncie czasowym symulacji? Czy algorytm sterowania (5) pozwala na pełne wykorzystanie dostępnego momentu napędowego pierwszego ogniwa? Odpowiedź uzasadnić.*

Zmniejszając wartość τ_{1max} znaleźć doświadczalnie taką wartość ograniczenia $\overline{\tau_{max}}$, dla którego sterowanie (5) zastosowane do manipulatora (1) nie zapewnia zbieżności błędu regulacji $\boldsymbol{e}$ do otoczenia zera definiowanego wartością ϵ (dla skokowych wartości zadanych). Zapisać znalezioną wartość $\overline{\tau_{max}}$.

2 Sterowanie w podprzestrzeni typu *hiperprostopadłościan*

Sterowanie (5) w podprzestrzeni typu *hiperkula* nie pozwala na pełne wykorzystanie dostępnych momentów napędowych zastosowanych w manipulatorze aktuatorów [1]. Aby wyeliminować tę niedogodność należy zmienić rodzaj podprzestrzeni, w której będzie generowane sterowanie $\boldsymbol{\tau}$. W tym celu przypomnijmy wektor ograniczeń $\boldsymbol{\tau}_{max}$ i wprowadźmy diagonalną macierz ograniczeń $\boldsymbol{\mathcal{T}}_{max}$:

$$\boldsymbol{\tau}_{max} \triangleq \begin{bmatrix} \tau_{1max} \\ \tau_{2max} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{T}}_{max} \triangleq \begin{bmatrix} \tau_{1max} & 0 \\ 0 & \tau_{2max} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Obliczanie prawa sterowania ROOS w nowej przestrzeni sterowań typu *hiperprostopadłościan* wymaga przeprowadzenia następujących operacji [1]:

I. obliczanie wektora *potencjalnego* sterowania $\boldsymbol{\tau}_p(t)$ o kierunku zgodnym z chwilowym kierunkiem wektora błędu śledzenia $\boldsymbol{r}(t)$ (tak obliczony wektor sterowań nie może być jeszcze podany na manipulator (1) bowiem w ogólności nie spełnia nierówności (2)):

$$\boldsymbol{\tau}_p(t) = \begin{bmatrix} \tau_{p1}(t) \\ \tau_{p2}(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{cases} \dfrac{\tau_{HPmax}}{\| \boldsymbol{r}(t)\|} \boldsymbol{r}(t) & \text{dla} \quad \| \boldsymbol{r}(t)\| \geqslant \epsilon, \\[2ex] \dfrac{\tau_{HPmax}}{\epsilon} \boldsymbol{r}(t) & \text{dla} \quad \| \boldsymbol{r}(t)\| < \epsilon, \end{cases} \tag{8}$$

przy czym

$$\tau_{HPmax} \triangleq \| \boldsymbol{\tau}_{max}\| \overset{(7)}{=} \sqrt{\tau_{1max}^2 + \tau_{2max}^2}, \tag{9}$$

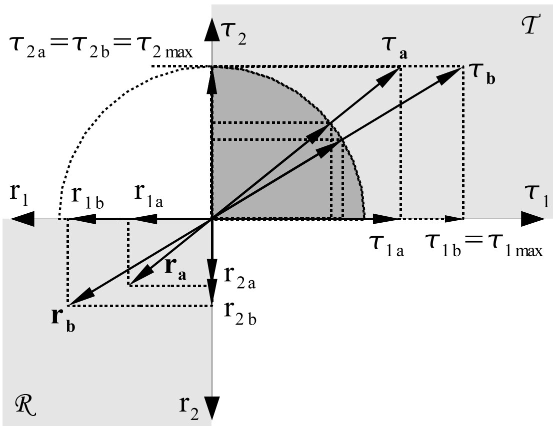
II. określenie współczynnika skalującego k w postaci:

$$k(t) \triangleq \left[\max\left\{ 1; \frac{|\tau_{p1}(t)|}{\tau_{1max}}; \frac{|\tau_{p2}(t)|}{\tau_{2max}} \right\} \right]^{-1}, \tag{10}$$

III. skalowanie sterowania *potencjalnego* $\boldsymbol{\tau}_p(t)$ tak, aby spełnić nierówności (2):

$$\boldsymbol{\tau}(t) \triangleq k(t)\boldsymbol{\tau}_p(t). \tag{11}$$

Należy zauważyć, iż przeskalowany zgodnie z (11) wektor sterowania $\boldsymbol{\tau}(t)$ zachowuje kierunek wektora *potencjalnego* sterowania $\boldsymbol{\tau}_p(t)$ (zmianie ulega tylko norma wektora). Korzyści ze stosowania nowej podprzestrzeni sterowań typu *hiperprostopadłościan* przedstawiono na rys. 3 (dla $n = 2$ hiperprostopadłościan przechodzi w prostokąt o długościach boków $2\tau_{1max}$, $2\tau_{2max}$), gdzie zwrócono uwagę na porównanie wektorów sterowań generowanych w obu typach przestrzeni. Sterowania z hiperprostopadłościanu mają większe normy niż sterowania z hiperkuli (kolor ciemno-szary). Własność ta pozwala na pełne wykorzystanie dostępnych momentów napędowych manipulatora.



Rysunek 3: Konstrukcja wektorów sterowań $\boldsymbol{\tau}_a,\ \boldsymbol{\tau}_b$ w przestrzeni sterowań $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ typu *hiperprostopadłościan* dla dwóch przykładowych chwilowych wektorów uogólnionego błędu śledzenia $\boldsymbol{r}_a,\ \boldsymbol{r}_b$. Dla porównania, na rysunku zaznaczono obszar dopuszczalnych sterowań równoważny dla przestrzeni typu *hiperkula* – kolor ciemno-szary.

2.1 Przyjąć jednakowe ograniczenia momentów napędowych dla obu silników manipulatora PM2R:

$$\tau_{1max} = \tau_{2max} \quad \Rightarrow \quad \tau_{HPmax} \overset{(9)}{=} \|\boldsymbol{\tau}_{max}\| = \sqrt{\tau_{1max}^2 + \tau_{2max}^2}.$$

2.2 Zamodelować równanie regulatora ROOS z (11) i zastosować ją do manipulatora (1). Zapewnić możliwość swobodnej zmiany wartości zakładanego tunelu ϵ. Wartości elementów macierzy $\boldsymbol{\Lambda}$ dobrać doświadczalnie tak, aby zapewnić minimalne przeregulowania w przebiegu błędu pozycji $\boldsymbol{e}(t)$.

2.3 Przeprowadzić symulację odpowiedzi systemu sterowania z manipulatorem PM2R dla skokowych wartości zadanych pozycji (przyjąć: $\ddot{\boldsymbol{q}}_d = \dot{\boldsymbol{q}}_d = \mathbf{0}$):

$$\boldsymbol{q}_d = [Q_{1d} \quad Q_{2d}]^T \cdot \mathbf{1}(t).$$

- *Czy błędy śledzenia zmierzają asymptotycznie do zera? Czy sygnały sterujące spełniają nierówności (2)? Porównać jakość sterowania (dynamiczną i statyczną) po zastosowanie algorytmów (5) i (11) dla tych samych wartości ograniczeń sygnałów sterujących:* τ_{1max}, τ_{2max}.

2.4 Przyjąć ograniczenia momentów dla obu silników manipulatora PM2R następująco:

$$\tau_{2max} = 0.5\tau_{1max}, \qquad \tau_{HPmax} \overset{(9)}{=} \| \boldsymbol{\tau}_{max} \| = \sqrt{\tau_{1max}^2 + \tau_{2max}^2}.$$

2.5 Przeprowadzić symulację odpowiedzi systemu sterowania z manipulatorem PM2R dla skokowych wartości zadanych pozycji (przyjąć: $\ddot{\boldsymbol{q}}_d = \dot{\boldsymbol{q}}_d = \mathbf{0}$).

$$\boldsymbol{q}_d = [Q_{1d} \quad Q_{2d}]^T \cdot \mathbf{1}(t).$$

- *Przeanalizować przebiegi sterowań. Jaka jest maksymalna wartość sterowania w całym horyzoncie czasowym symulacji? Czy prawo sterowania (11) ogranicza normę sterowania* $\boldsymbol{\tau}$ *do wartości dopuszczalnego sterowania* τ_{2max} *mniejszego z zastosowanych napędów, jak w przypadku hiperkuli?*

2.6 Zmienić wartości ograniczeń następująco:

$$\tau_{1max} = \overline{\tau_{max}}, \qquad \tau_{2max} = 0.5\tau_{1max},$$

gdzie wartość $\overline{\tau_{max}}$ została znaleziona doświadczalnie w punkcie 1.5. Przeprowadzić symulacje odpowiedzi systemu sterowania z manipulatorem PM2R dla skokowych wartości zadanych pozycji zgodnie z wartościami przyjętymi podczas realizacji punktu 1.5.

- *Czy jakość działania układu sterowania poprawiła się w stosunku do wyników z punktu 1.5? Porównać przebiegi sygnałów sterujących dla obu typów przestrzeni sterowania:* hiperkuli *oraz* hiperprostopadłościanu, *gdy* $\tau_{1max} = \overline{\tau_{max}}$.

Literatura

[1] P. Dutkiewicz, M. Michalski, M. Michałek. Robust tracking with control vector constraints. *Proceedings of the Second International Workshop on Robot Motion and Control*, strony 169–174, Bukowy Dworek, October 2001.

[2] M. Galicki. Śledzenie odporne manipulatorów z ograniczeniem na sterowania. *Studia z Automatyki i Informatyki*, strony 83–92. Poznań, 2000.

[3] L. Sciavicco, B. Siciliano. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, London, 2002.