Szymon Ociepka *Data wykonania: 08.05.2024*

Eliminacja Gaussa

Metody numeryczne

1. Wprowadzenie teoretyczne

Metoda eliminacji Gaussa jest jednym z podstawowych algorytmów stosowanych do rozwiązywania układów równań liniowych. Jest to metoda bezpośrednia, co oznacza, że po skończonej liczbie kroków dostajemy dokładne rozwiązanie (w granicach błędu numerycznego).

Głównym celem metody eliminacji Gaussa jest przekształcenie pierwotnego układu równań do postaci, w której łatwo można znaleźć rozwiązanie. Dokonuje się tego poprzez eliminację niewiadomych - stąd nazwa metody.

$$\mathbf{Ax = b} \tag{1}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

macierz n x n **szukane rozwiązanie** **wektor danych**

W metodzie eliminacji Gaussa wyróżniamy dwa etapy:

- postępowanie proste (eliminacja w przód),
- postępowanie odwrotne (wsteczne).

1.1 postępowanie proste

Krok I: odejmowany od i-tego wiersza układu jest wiersz pierwszy pomnożony przez:

$$m_{i1}=\frac{a_{i1}^{1}}{a_{11}^{1}}, \tag{2}$$

gdzie:

a – poszczególne elementy macierzy,

i – 2, 3, …, n

Krok II: odejmowany od i-tego wiersza układu jest drugi wiersz pomnożony przez m_{i2}, a kolejne mnożniki wyznaczane ze wzoru:

$$m_{ij}=\frac{a_{ij}^{k}}{a_{jj}^{k}}, \tag{3}$$

gdzie:

k = 1, …, n

i = 2, …, n

j = 1, …, n - 1

Po wykonaniu n-1 eliminacji uzyskany zostaje trójkątny układ równań.

1.2 Postępowanie odwrotne

Rozpoczynamy od ostatniego równania w układzie, które zawiera tylko jedną niewiadomą. Rozwiązujemy to równanie, co daje nam wartość tej niewiadomej. Następnie przechodzimy do przedostatniego równania. Znając już wartość niewiadomej z ostatniego równania, możemy ją podstawić do przedostatniego równania i rozwiązać je, co daje nam wartość kolejnej niewiadomej. Powtarzamy ten proces, przechodząc do góry przez układ równań, aż znajdziemy wartości wszystkich niewiadomych.

- Wyznaczenie ostatniej niewiadomej wartości z ostatniego równania:

$$x_n=\frac{b_n^n}{a_{nn}^n}, \tag{4}$$

- Wyznaczenie pozostałych wartości x_i:

$$x_i=\frac{b_i^n-\sum_{k=i+1}^{n} a_{\mathrm{i,k}}^n x_k}{a_{ii}^n}, \tag{5}$$

gdzie:

i = n – 1, …, 1

2. Opis implementacji numerycznej

Zmienna **tab** to dwuwymiarowa tablica, która reprezentuje układ równań. Każdy wiersz tablicy reprezentuje jedno równanie, a każda kolumna reprezentuje jedną zmienną. Ostatnia kolumna reprezentuje wektor prawych stron równań.

Zmienna **n** to liczba wierszy jak i kolumn badanej macierzy.

Pierwsza pętla ***for*** to główna pętla eliminacji Gaussa. Dla każdego kroku ***k***, pętla eliminuje zmienną ***k*** z wszystkich równań poniżej ***k***. Wewnętrzna pętla przechodzi przez wszystkie równania poniżej równania ***k***. Najbardziej wewnętrzna pętla aktualizuje wszystkie elementy w równaniu ***i*** poprzez odejmowanie od nich odpowiednio przeskalowanego równania ***k***. Skalowanie jest realizowane przez wyrażenie ***tab[i][k] / tab[k][k]***, które jest współczynnikiem, przez który mnożone jest równanie ***k*** przed odjęciem go od równania ***i***.

```
for (int k = 0; k < n; k++) {
    for (int i = k + 1; i < n; i++) {
        for (int j = n; j >= 0; j--) {
            tab[i][j] -= tab[k][j] * (tab[i][k] / tab[k][k]);
        }
    }
}
```

Fragment kodu 1: sprowadzanie macierzy do postaci trójkątnej górnej

Po wykonaniu tego fragmentu kodu, układ równań jest w postaci trójkątnej górnej, co oznacza, że można go łatwo rozwiązać za pomocą podstawienia wstecznego.

```
for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
    x[i] = tab[i][n];
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
        x[i] -= tab[i][j] * x[j];
    }
    x[i] /= tab[i][i];
    cout << "x" << i + 1 << " = " << x[i] << endl;
}
```

Fragment kodu 2: postępowanie wsteczne

Podstawienie wsteczne zaczyna się od ostatniego równania w układzie i przechodzi w górę, rozwiązując każde równanie po kolei.

Pętla **for (int i = n - 1; i >= 0; i--)** przechodzi przez każde równanie w układzie, zaczynając od ostatniego i idąc w górę. Po wykonaniu tego fragmentu kodu, wszystkie **x[i]** są obliczone, co daje rozwiązanie układu równań.

3. Testy kodu numerycznego

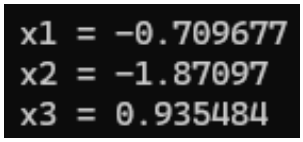
Test I

Macierz 3x3 = {(10, -7, 0); (-3, 2, 6); (5, -1, 5)}
wektor danych = {(6); (4); (3)}

Wynik programu Matrix calculator:

x_1 = -0.7096774
x_2 = -1.8709677
x_3 = 0.9354839

Wynik zaimplementowanego programu:



Fragment konsoli: wynik programu dla testu I

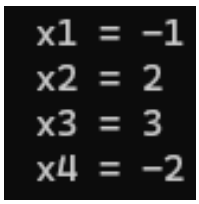
Test II

Macierz 4x4 = {(4, -2, 4, -2); (3, 1, 4, 2); (2, 4, 2, 1); (2, -2, 4, 2)}
wektor danych = {(8); (7); (10); (2)}

Wynik programu Matrix calculator:

x_1 = -1
x_2 = 2
x_3 = 3
x_4 = -2

Wynik zaimplementowanego programu:



Fragment konsoli: wynik programu dla testu II

Test III

Macierz 20x20 = {

[5.10433490e+00, 1.75969137e+00, 3.34269222e+00, 1.69270851e+00,
2.10571531e+00, 2.88859060e+00, 7.58084997e+00, 7.89813209e+00,
3.22961138e+00, 2.74727035e+00, 1.64047227e+00, 8.50491285e-01,
9.92490806e+00, 8.17924897e+00, 5.55289459e+00, 1.42494093e+00,
2.76959304e+00, 1.56532834e-01, 6.66525688e+00, 1.67808636e+00];

[2.51787444e+00, 8.85065540e+00, 6.96539888e+00, 7.74759713e+00,
1.69969840e-01, 9.25868652e+00, 8.47749420e+00, 2.61761845e-01,
3.94321306e+00, 5.89072001e+00, 8.29337823e+00, 2.20212145e+00,
7.22467370e-03, 4.30461845e+00, 3.28503270e+00, 8.94091309e+00,
4.78059184e+00, 8.36653930e+00, 1.44848560e+00, 3.45006255e+00];

[3.74780917e-02, 5.07160375e+00, 3.63896851e+00, 4.77241115e+00,
4.97797037e+00, 5.43678447e+00, 6.30858043e+00, 5.55483663e+00,
3.29617157e+00, 2.44656662e+00, 8.70682154e+00, 7.59035931e+00,
3.75598973e+00, 6.20465356e+00, 9.60523352e-01, 4.15748008e-01,
5.67764815e-01, 2.29292958e+00, 4.43041021e-01, 8.20206925e+00];

[1.00599731e+00, 6.22345945e+00, 7.93202559e+00, 7.97800763e+00,
3.94323078e-01, 5.71393977e+00, 5.80092904e+00, 1.73848000e+00,
7.03076629e+00, 2.15698396e+00, 6.28935358e+00, 6.76508355e+00,
5.28644884e+00, 7.80555007e+00, 5.22660948e+00, 5.42241227e+00,
6.22280648e+00, 2.29594435e+00, 3.66192245e+00, 8.94837190e+00];

[5.04506405e+00, 5.80367597e+00, 8.92849022e+00, 7.47350443e+00,
3.81950675e+00, 9.55397235e+00, 7.86375898e+00, 8.97189930e+00,
2.04109623e+00, 1.04662443e+00, 7.18326849e+00, 4.74199460e+00,
7.47098892e+00, 6.52205664e+00, 5.90895425e+00, 6.80910265e+00,
6.89623538e+00, 7.82277807e+00, 3.03142408e+00, 3.93553100e-01];

[4.45523365e+00, 6.01620888e+00, 2.88395450e+00, 6.96428198e+00,
7.73912909e+00, 2.85965153e+00, 3.60405756e+00, 6.10323893e+00,
6.55659667e+00, 6.79311561e+00, 2.92094880e-01, 5.40647851e+00,
6.55074767e-01, 3.23988216e+00, 3.70867922e+00, 8.76834262e+00,
6.61527717e+00, 5.05942327e+00, 3.81894900e+00, 6.78664542e+00];

[9.27976892e+00, 3.91287173e-01, 9.40598010e+00, 6.93501657e+00,
1.25907761e+00, 6.07041081e+00, 3.73698707e+00, 3.32356886e+00,
8.02306992e+00, 9.09421238e+00, 9.05273293e+00, 1.01063740e+00,
3.34950663e+00, 7.67360842e+00, 1.21020805e+00, 6.41917805e+00,
5.82974058e-01, 8.64370265e+00, 7.49893468e+00, 7.34494266e+00];

```
[   2.36519035e+00,  2.69722816e+00,  4.01132931e+00,  6.04524995e-01,
    2.78986742e+00,  5.88113190e-01,  1.70759426e+00,  1.88147281e+00,
    4.97805120e+00,  7.15255989e+00,  6.75748205e+00,  8.66745105e+00,
    9.63209183e+00,  8.22806126e+00,  9.77046017e+00,  9.87722962e+00,
    2.27708536e+00,  3.42119156e+00,  8.35105691e+00,  8.55444398e+00  ];

[   6.32598011e+00,  5.56797387e+00,  3.27672707e+00,  4.49173411e+00,
    3.88967740e+00,  3.79663182e-01,  5.55830142e+00,  6.05870363e+00,
    4.26713016e+00,  6.96345639e+00,  7.35682525e+00,  1.57858773e+00,
    1.64768488e+00,  5.11799385e+00,  4.69080581e+00,  9.54082419e+00,
    1.31438264e+00,  7.26865764e+00,  7.52952520e+00,  3.16112249e+00  ];

[   5.96547032e+00,  5.78959748e+00,  3.53345854e+00,  8.37157841e-01,
    4.77173930e+00,  9.19910453e+00,  1.06503884e+00,  2.26380068e+00,
    6.26659347e+00,  6.87270384e+00,  4.48992683e+00,  4.45212059e+00,
    5.91484727e+00,  2.87956094e+00,  7.56822762e+00,  5.35478736e+00,
    5.91397316e+00,  5.94583961e-01,  6.59043999e+00,  4.43922465e+00  ];

[   3.63303691e+00,  9.11389066e+00,  4.23603836e+00,  8.73014942e-01,
    3.65089960e+00,  4.18420322e+00,  3.35587359e+00,  8.28711266e+00,
    7.58771886e+00,  9.94696512e+00,  8.40620542e+00,  1.25716918e+00,
    4.40411940e+00,  5.83188472e+00,  3.93880154e-01,  4.96834824e+00,
    4.52895273e+00,  5.21410603e+00,  8.60665147e+00,  4.54284683e+00  ];

[   2.91323767e+00,  1.44008056e+00,  4.23208327e+00,  3.00957861e-01,
    1.08987750e+00,  5.48323873e+00,  1.96486696e+00,  1.01730182e+00,
    6.35255648e+00,  2.96065467e+00,  9.72233337e+00,  9.70441754e+00,
    3.07306254e+00,  9.53766596e+00,  5.87427411e+00,  5.46489467e+00,
    1.04610751e+00,  1.82749805e+00,  2.88475357e+00,  7.11506000e+00  ];

[   9.96272469e+00,  6.94720317e+00,  5.76208837e+00,  5.14148927e+00,
    2.42928342e-01,  4.78850571e-01,  7.60312581e+00,  4.07857444e+00,
    5.42740508e+00,  9.59580480e+00,  3.29723088e+00,  3.32570968e+00,
    2.07962047e+00,  4.36821045e+00,  1.38199237e+00,  1.21833966e+00,
    3.84247551e+00,  6.13067429e+00,  4.12853462e+00,  2.31645282e+00  ];

[   1.81356132e+00,  6.85345417e-01,  9.34653337e+00,  8.10179528e+00,
    8.14915767e+00,  7.30401328e+00,  4.24759787e+00,  6.43647092e-02,
    2.89913710e+00,  4.44501423e+00,  4.07712828e+00,  3.01926374e+00,
    3.11920370e+00,  5.86888955e+00,  2.47016437e+00,  9.53229639e+00,
    3.44072622e+00,  2.41160594e+00,  4.47801568e+00,  1.02601112e+00  ];

[   2.36171217e+00,  3.80714231e+00,  9.04112234e+00,  9.93247987e-01,
    8.01372338e+00,  5.36806789e+00,  6.64952989e+00,  3.21883742e+00,
    5.76103675e+00,  2.28765379e+00,  8.76735948e-01,  2.63635605e+00,
    2.21634567e+00,  8.30723171e+00,  2.47507677e+00,  3.78674492e+00,
```

8.32553680e+00, 6.59268067e+00, 7.52608251e+00, 8.38006564e+00];

[4.46482512e+00, 1.13144056e+00, 5.85889396e+00, 8.64117482e+00,
6.10507694e+00, 4.26822267e+00, 6.75249314e+00, 9.39769297e+00,
8.62397307e+00, 7.48413287e-02, 9.05092405e+00, 1.34185519e+00,
6.93917786e+00, 3.36307954e+00, 1.46575447e+00, 8.38722476e+00,
3.96298772e+00, 7.21608290e-01, 3.99208685e+00, 5.62599782e+00];

[8.81342133e+00, 4.45953067e+00, 2.31022845e+00, 4.58171052e+00,
2.41465605e+00, 4.49131090e+00, 8.04915367e+00, 8.59212755e-01,
9.99860407e+00, 3.93193991e-02, 3.36702510e+00, 6.13047314e+00,
2.92667166e+00, 2.16410499e+00, 8.77746429e+00, 2.77522324e+00,
8.81347467e+00, 4.08634046e-01, 7.88836051e+00, 3.50529396e+00];

[4.54377058e+00, 8.57130416e+00, 9.57173070e-01, 1.81131982e-01,
2.61306214e+00, 1.08561613e+00, 9.88020918e+00, 9.61983697e+00,
7.98149672e+00, 1.02130046e+00, 8.11118393e+00, 8.99452642e+00,
3.42575761e+00, 8.93780489e+00, 7.82694356e+00, 6.70572668e+00,
3.81870093e+00, 9.97967854e+00, 5.14824629e+00, 6.68100978e+00];

[4.09244084e+00, 6.47744012e+00, 4.31626204e-01, 2.01357125e+00,
9.07116695e+00, 5.00847293e+00, 9.34224113e+00, 7.91980139e+00,
2.45861412e+00, 8.37514505e+00, 8.19399706e+00, 1.19978850e+00,
3.10794710e+00, 4.02921482e+00, 5.37454753e+00, 2.27273053e+00,
1.46724630e+00, 6.26394725e+00, 7.51526370e+00, 6.64156544e+00];

[9.76335803e+00, 5.02048297e+00, 8.16110497e+00, 3.17586938e+00,
6.24951419e+00, 1.97398801e+00, 5.05391652e+00, 4.50493279e+00,
9.73979315e+00, 8.58993726e+00, 6.24727732e+00, 6.89333240e+00,
9.52123357e+00, 2.02189392e-01, 8.13574765e+00, 9.03349868e-01,
9.87113674e+00, 6.77803126e+00, 9.99926084e+00, 6.43465967e+00]}

wektor danych = {

[0.37420695]; [3.21757695]; [7.84957695]; [6.72922658];

[2.00267396]; [5.23242394]; [4.27969739]; [4.81143087];

[2.13077584]; [1.79740411]; [2.78116646]; [9.07648293];

[7.60278802]; [0.44804225]; [3.03032564]; [1.08351171];

[6.82213138]; [6.96424131]; [6.5750299]; [2.76621875]

}

Wynik programu Matrix calculator:

x_1 = 12.19254145

x_2 = 7.24097684

x_3 = -23.52001299

x_4 = 9.56210165

x_5 = 16.50620674

x_6 = -8.72811736

x_7 = -13.28704939

x_8 = -21.11798518

x_9 = 0.9464735

x_{10} = -6.07601471

x_{11} = 11.47032627

x_{12} = -15.63654823

x_{13} = 15.9192917

x_{14} = 23.91029996

x_{15} = -4.76981873

x_{16} = -5.91822258

x_{17} = 15.86916816

x_{18} = 10.3475958

x_{19} = -15.95905739

x_{20} = -2.3372826486

Wynik zaimplementowanego programu:

```
x1 = 12.1925
x2 = 7.24097
x3 = -23.52
x4 = 9.5621
x5 = 16.5062
x6 = -8.72811
x7 = -13.287
x8 = -21.118
x9 = 0.946473
x10 = -6.07601
x11 = 11.4703
x12 = -15.6365
x13 = 15.9193
x14 = 23.9103
x15 = -4.76982
x16 = -5.91822
x17 = 15.8692
x18 = 10.3476
x19 = -15.9591
x20 = -2.33728
```

Fragment konsoli: wynik programu dla testu III

Test IV

Macierz 6x6 = {(-4, 2, -1, 3, 0, -4); (1, 0, 5, -1, 0, 3); (-3, -2, -3, -2, 4, 5);
(3, 3, 3, 1,-2, 0); (-2, 1, 0, -4, -4, -2); (4, -3, 4, -4, 4, -2)}
wektor danych = {(3); (0); (4); (5); (4); (-5)}

Wynik programu Matrix calculator:

x_1 = −0,2583113
x_2 = 3,5002639
x_3 = −0,4575198
x_4 = −1,2580475
x_5 = 1,0476253
x_6 = 0,4292876

Wynik zaimplementowanego programu:

```
x1 = -0.258311
x2 = 3.50026
x3 = -0.45752
x4 = -1.25805
x5 = 1.04763
x6 = 0.429288
```

Fragment konsoli: wynik programu dla testu IV

3.1 Testy metody wyboru elementu głównego

Test V

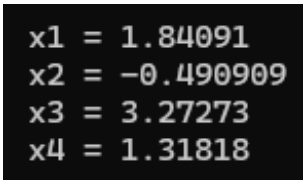
Macierz 4x4 = {(-1, -5, 0.5, 5.5); (-2, 0, -1, 3); (-1.5, -1.25, 0.5, -0.75); (0, -1.25, 0.5, 5.5)}
wektor danych = {(9.5); (-3); (-1.5); (9.5)}

Wynik programu Matrix calculator:

x_1 = 1,8409091
x_2 = −0,4909091
x_3 = 3,2727273

x_4 = 1,3181818

Wynik zaimplementowanego programu:



Fragment konsoli: wynik programu dla testu V

Test VI

Macierz 4x4 = {(-2, -4, 5, -2); (6.5, 2, 1.25, 3.5); (1.75, 7.25, -8.75, 5.5); (3.25, -2.75, 3.75, 1)}

wektor danych = {(-5); (1.75); (5); (6)}

Wynik programu Matrix calculator:

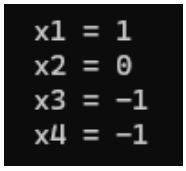
x_1 = 1

x_2 = 0

x_3 = -1

x_4 = -1

Wynik zaimplementowanego programu:



Fragment konsoli: wynik programu dla testu VI

Test VII

Macierz 6x6 = {(0.53, 4.35, 5.3, -5.5, -4.63, 3.62); (4.2, -8.23, -35, 7.13, -4.62, -34); (62.3, 63.2, 6, 0.16, -75, 6.23); (-53.35, 6.3, 2.63, 4.98, -3, -0.97); (-5.3, 5.72, 5.3, 3.85, 5.7, 4); (3.2, 0.35, -0.95, 8.5, 9.53, 2); }

wektor danych = {(4.2); (-4.32); (4); (-8.5); (-0.4); (6.4)}

Wynik programu Matrix calculator:

$x_1 = -0{,}3638161$

$x_2 = 2{,}4025723$

$x_3 = -6{,}7263939$

$x_4 = -3{,}0505920$

$x_5 = 1{,}5870367$

$x_6 = 5{,}5694046$

Wynik zaimplementowanego programu:

```
x1 = -0.363816
x2 = 2.40257
x3 = -6.72639
x4 = -3.05059
x5 = 1.58704
x6 = 5.5694
```

Fragment konsoli: wynik programu dla testu VII

4. Analiza wyników

W celu głębszej analizy powstała tabela, w której porównane zostały wyniki zaimplementowanych metod z wynikami programu „Matrix calculator” na podstawie powyższych testów.

Tabela 1: wyniki Testu I

wartości	**Matrix Calculator**	**Program**
x_1	-0.7096774	-0.709677
x_2	-1.8709677	-1.87097
x_3	0.9354839	0.935484

Tabela 2: wyniki Testu II

wartości	**Matrix Calculator**	**Program**
x_1	-1	-1
x_2	2	2
x_3	3	3

x_4	-2	-2

Tabela 3: wyniki Testu III

wartości	Matrix Calculator	Program
x_1	12.19254145	12.1925
x_2	7.24097684	7.24097
x_3	-23.52001299	-23.52
x_4	9.56210165	9.5621
x_5	16.50620674	16.5062
x_6	-8.72811736	-8.72811
x_7	-13.28704939	-13.287
x_8	-21.11798518	-21.118
x_9	0.9464735	0.946473
x_{10}	-6.07601471	-6.07601
x_{11}	11.47032627	11.4703
x_{12}	-15.63654823	-15.6365
x_{13}	15.91922917	15.9193
x_{14}	23.91029996	23.9103
x_{15}	-4.76981873	-4.76982
x_{16}	-5.91822258	-5.91822
x_{17}	15.86916816	15.8692
x_{18}	10.3475958	10.3476
x_{19}	-15.95905739	-15.9591
x_{20}	-2.3372826486	-2.33728

Tabela 4: wyniki Testu IV

wartości	Matrix Calculator	Program
x_1	−0,2583113	−0,258311

x_2	3,5002639	3,50026
x_3	−0,4575198	−0,45752
x_4	−1,2580475	−1,25805
x_5	1,0476253	1,04763
x_6	0,4292876	0,429288

Tabela 5: wyniki Testu V

wartości	**Matrix Calculator**	**Program**
x_1	1,8409091	1,84091
x_2	−0,4909091	−0,490909
x_3	3,2727273	3,27273
x_4	1,3181818	1,31818

Tabela 6: wyniki Testu VI

wartości	**Matrix Calculator**	**Program**
x_1	1	1
x_2	0	0
x_3	-1	-1
x_4	-1	-1

Tabela 7: wyniki Testu VII

wartości	**Matrix Calculator**	**Program**
x_1	−0,3638161	−0,363816
x_2	2,4025723	2,40257
x_3	−6,7263939	−6,72639
x_4	−3,0505920	−3,05059
x_5	1,5870367	1,58704
x_6	5,5694046	5,5694

Dzięki analizie wyników można stwierdzić, że przedstawiona metoda została zaimplementowana poprawnie. Wyniki uzyskane za pomocą programu są bardzo bliskie z wynikami uzyskanymi za pomocą kalkulatora macierzy. Jednakże, w przypadku testu III zauważono istotne rozbieżności, które mogą wynikać z dużego rozmiaru macierzy oraz precyzji jej elementów - liczby zmiennoprzecinkowe o dużej liczbie miejsc po przecinku.
W trakcie obliczeń numerycznych, takich jak eliminacja Gaussa, mogą wystąpić błędy zaokrąglenia wynikające z ograniczonej precyzji liczb zmiennoprzecinkowych. Te błędy mogą się kumulować w trakcie obliczeń, prowadząc do zaokrąglenia wyników.

5. Wnioski

W tym sprawozdaniu przedstawiono oraz omówiono metodę eliminacji Gaussa służącą do rozwiązywania układów równań liniowych. Pokazano oraz wytłumaczono jej prostą implementację w języku c++. Z analizy przeprowadzonych testów wynika że metoda eliminacji Gaussa jest skutecznym narzędziem do rozwiązywania układów równań liniowych. Testy wykazały, że zastosowana implementacja jest efektywna pod względem czasu obliczeń, szczególnie dla dużych układów równań, natomiast mogą wystąpić błędy zaokrąglenia wynikające z ograniczonej precyzji liczb zmiennoprzecinkowych.

6. Źródła

- prezentacja z zajęć „lab 8.pdf”
- prezentacja z zajęć „lab 9.pdf”
- matrixcalc.org