

Opis problemu

Temat: **Problem najkrótszej ścieżki (z jednego miejsca)**

Problem najkrótszej ścieżki z pojedynczego źródła (Single-Source Shortest Path - SSSP) polega na znalezieniu najkrótszych ścieżek z wybranego wierzchołka źródłowego do wszystkich pozostałych wierzchołków w grafie ważonym. Wagi krawędzi reprezentują odległości, koszty, czas lub inne metryki, które chcemy zminimalizować.

W kontekście grafu ważonego $G = (V, E)$, gdzie:

- V to zbiór wierzchołków
- E to zbiór krawędzi
- Każda krawędź $e \in E$ ma przypisaną wagę $w(e)$

Celem jest znalezienie najkrótszej ścieżki $p(s, v)$ dla każdego wierzchołka $v \in V$, gdzie s jest wierzchołkiem źródłowym. Ścieżka $p(s, v)$ jest sekwencją krawędzi prowadzących od s do v o minimalnej sumie wag.

Omówienie różnych metod rozwiązania problemu

Algorytm Dijkstry

Algorytm Dijkstry jest efektywną metodą znajdowania najkrótszych ścieżek w grafach z nieujemnymi wagami krawędzi. Jego główne cechy:

- Złożoność czasowa: $O((V + E) \log V)$ przy użyciu kolejki priorytetowej
- Wymaga, aby wszystkie wagi były nieujemne
- Wykorzystuje strategię zachłanną
- Gwarantuje znalezienie optymalnego rozwiązania dla grafów z nieujemnymi wagami

Algorytm działa poprzez iteracyjne wybieranie wierzchołka o najmniejszej tymczasowej odległości i relaksację jego krawędzi wychodzących.

Algorytm Bellmana-Forda

Algorytm Bellmana-Forda jest alternatywną metodą, która może pracować z ujemnymi wagami krawędzi:

- Złożoność czasowa: $O(V \times E)$
- Może obsługiwać ujemne wagi krawędzi
- Wykrywa ujemne cykle w grafie
- Wolniejszy od algorytmu Dijkstry, ale bardziej uniwersalny

Algorytm wykonuje $V-1$ iteracji relaksacji wszystkich krawędzi, a następnie sprawdza występowanie ujemnych cykli.

Przykłady zastosowania

Problem najkrótszej ścieżki ma wiele praktycznych zastosowań:

1. Systemy nawigacji GPS
 - Znajdowanie najkrótszej/najszybszej trasy między lokalizacjami
 - Optymalizacja tras w czasie rzeczywistym
2. Sieci komputerowe
 - Routing pakietów w sieciach
 - Optymalizacja opóźnień w komunikacji
3. Logistyka i transport
 - Planowanie tras dostaw
 - Optymalizacja kosztów transportu
4. Media społecznościowe
 - Znajdowanie połączeń między użytkownikami
 - Analiza sieci społecznych
5. Gry komputerowe
 - Pathfinding dla postaci
 - Sztuczna inteligencja NPC

Opis zastosowanych algorytmów

Implementacja zawiera dwa główne algorytmy:

1. Dijkstra:

Algorithm Dijkstra(Graph, start):

distances \leftarrow map of all vertices initialized to infinity

distances[start] \leftarrow 0

predecessors \leftarrow map of all vertices initialized to null

PriorityQueue queue \leftarrow empty priority queue

queue.insert((0, start))

visited \leftarrow empty set

while queue is not empty:

(current_distance, current_vertex) \leftarrow queue.removeMin()

if current_vertex in visited:

continue

visited.add(current_vertex)

for each (neighbor, weight) in Graph.neighbors(current_vertex):

distance \leftarrow current_distance + weight

if distance < distances[neighbor]:

distances[neighbor] \leftarrow distance

predecessors[neighbor] \leftarrow current_vertex

queue.insert((distance, neighbor))

return (distances, predecessors)

2. Bellman-Ford:

```

Algorithm BellmanFord(Graph, start):
    distances ← map of all vertices initialized to infinity
    distances[start] ← 0
    predecessors ← map of all vertices initialized to null

    for i from 1 to |V| - 1:
        for each vertex in Graph.vertices:
            for each (neighbor, weight) in Graph.neighbors(vertex):
                if distances[vertex] + weight < distances[neighbor]:
                    distances[neighbor] ← distances[vertex] + weight
                    predecessors[neighbor] ← vertex

    for each vertex in Graph.vertices:
        for each (neighbor, weight) in Graph.neighbors(vertex):
            if distances[vertex] + weight < distances[neighbor]:
                return (distances, predecessors, false)

    return (distances, predecessors, true)

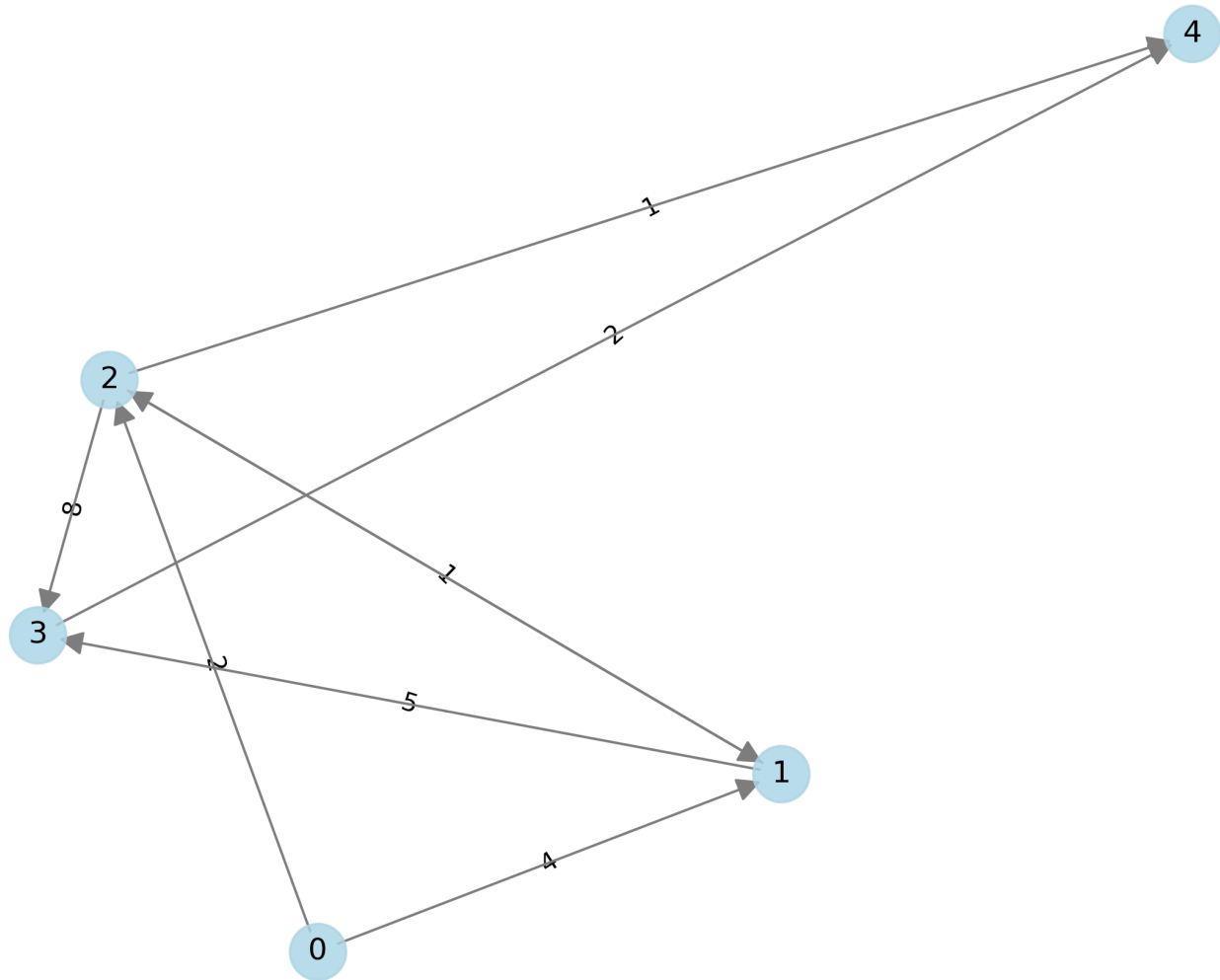
```

Ilustracja działania programu

Program demonstruje działanie obu algorytmów na dwóch różnych przykładach:

1. Graf z wagami nieujemnymi (Dijkstra):

Graph with Non-negative Weights (Dijkstra's Algorithm)

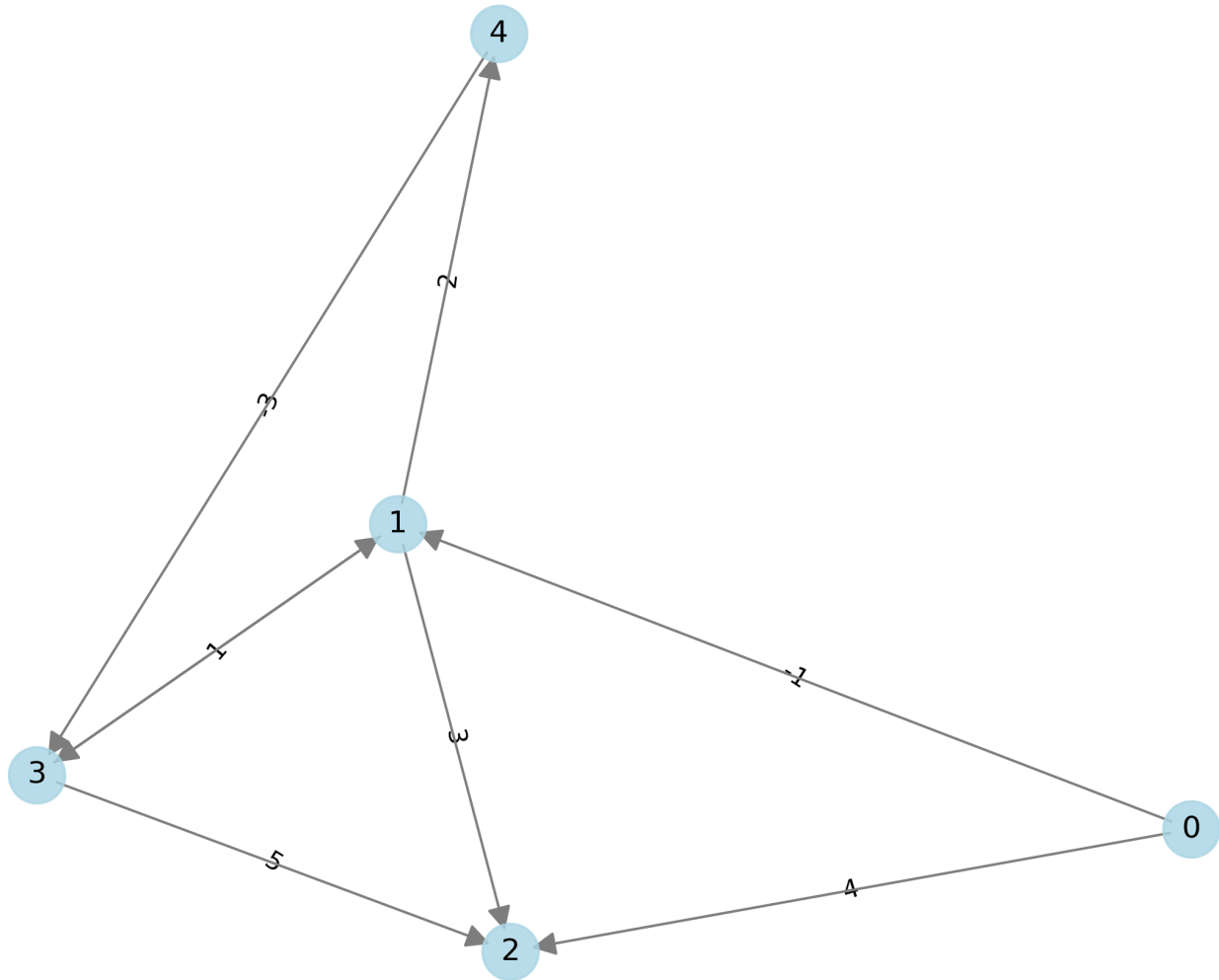


Wynik dla ścieżki 0 -> 4:

- Najkrótsza ścieżka: 0 -> 2 -> 4
- Całkowita odległość: 3

2. Graf z wagami ujemnymi (Bellman-Ford):

Graph with Negative Weights (Bellman-Ford Algorithm)



Wynik dla ścieżki 0 -> 4

- Najkrótsza ścieżka: 0 -> 1 -> 4
- Całkowita odległość: 1

Wynik pokazuje zdolność algorytmu Bellmana-Forda do pracy z ujemnymi wagami i wykrywania ujemnych cykli.

Podział zadań

- **Szymon Rafałowski:**
 - Implementacja algorytmu Dijkstry
 - Implementacja algorytmu Bellmana-Forda

- Implementacja przykładów grafów
- Implementacja dokumentacji

- **Aleks Rogoziński:**

- Dodaj tutaj