

## Introduction

### Panorama de la consommation de vin en France

La France reste, encore aujourd'hui, un acteur majeur sur le marché du vin international. En effet, d'après le CNIV (Comité National des Interprofessions des Vins à appellation d'origine protégée<sup>1</sup>), les exploitations viticoles françaises représentent 11% de la surface mondiale de vignes de cuve (destinées à la production de vin). Elles produisent 17% de la production mondiale en 2019.

La culture du vin est aussi fortement présente sur le territoire national, puisque la France est le 2<sup>nd</sup> plus grand pays consommateur de vin au monde.

Pourtant, cette consommation de vin est en baisse. Toujours d'après le CNIV, les Français consommaient 100 litres par personne et par an en 1975, mais seulement 40 litres aujourd'hui. Cette baisse est liée à l'évolution des habitudes de consommation des Français.

On peut notamment lire dans Vin et Société<sup>2</sup> que les jeunes boivent de moins en moins d'alcool. La part des jeunes de 17 ans n'ayant pas consommé d'alcool dans le mois aurait doublé entre 2000 et 2022. On remarque également que les consommateurs accordent de plus en plus d'importance à la qualité de leur vin. Ils consomment moins, mais le prix qu'ils sont prêts à déboursier en moyenne pour obtenir une bouteille a augmenté.

Si les avantages de la baisse de la consommation pour la santé sont indéniables, on peut tout de même s'interroger sur l'avenir de la filière viticole française. Nous nous intéresserons donc aux déterminants de la consommation de vin en France, en prêtant une attention particulière aux indices de prix et aux catégories d'âges des consommateurs. Grâce à notre jeu de données, nous essaierons de réaliser une projection de la consommation de vin à l'horizon 2030.

### Tendances démographiques, évolution des prix et de la consommation

On dispose des variables annuelles suivantes, pour les années 1999 à 2021 incluses : la dépense totale des ménages français pour les boissons, en millions d'euros ; la consommation de vin par habitant, en litres ; l'indice des prix à la consommation pour le vin et les boissons fermentées ; l'indice annuel des prix à la consommation ; et le Produit Intérieur Brut (PIB) en milliards d'euros. On remarque sur la figure suivante

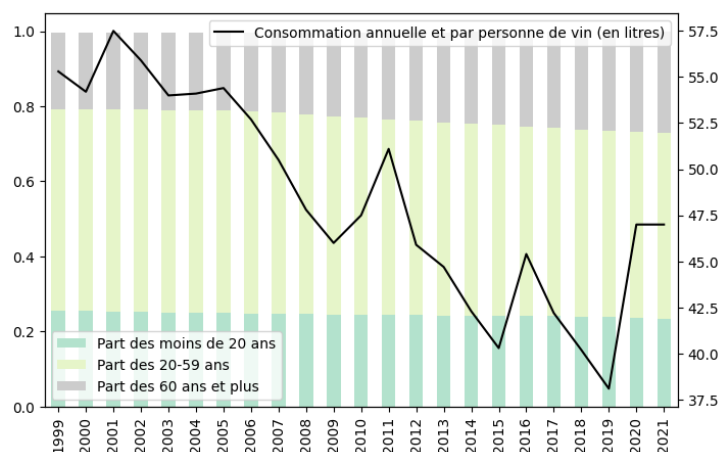


FIGURE 1 – Évolution des différentes tranches d'âge et de la consommation de vin en France

(Figure 1) que la consommation annuelle de vin par personne enregistre une forte baisse sur l'ensemble de

1. Site : <https://www.intervin.fr/etudes-et-economie-de-la-filiere/chiffres-cles>  
2. <https://www.vinetsociete.fr/etude/evolution-consommation-vin-france/>

la période, avant de connaître une remontée moyenne en 2020. D'autre part, la part de personnes âgées dans la population augmente. Cela pourrait laisser penser que la consommation moyenne de vin diminue parce que les personnes âgées sont plus nombreuses. Or, on sait que ce sont les jeunes qui consomment de moins en moins de cette boisson. On se propose donc de changer de données, pour tenter de capturer un effet de génération et non un effet d'âge. On comparera donc la consommation moyenne de vin en  $t$  à la part de personnes majeures (en âge de boire de l'alcool) nées à partir de 1981 en  $t$ <sup>3</sup>. On gardera toutefois en tête que cette solution est largement imparfaite : il faudrait en réalité disposer de la consommation de vin par cohorte. On observe par ailleurs que la part de l'achat de boissons dans le budget annuel des ménages a augmenté (Figure 2), alors même que la consommation annuelle par personne est en baisse. Cela pourrait être lié à la hausse du prix réel du vin et des boissons fermentées observée sur l'ensemble de la période. Toutefois, le manque de finesse des indicateurs (dépenses des ménages pour l'ensemble des boissons, et non pas uniquement pour le vin ou même l'alcool) empêche toute conclusion.

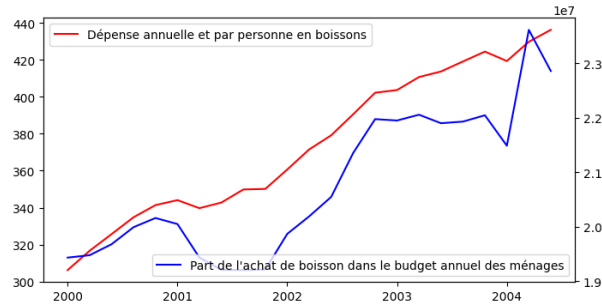


FIGURE 2 – Évolution de la dépense des ménages français pour les boissons

## 1 Spécification du modèle

En posant  $Y_t$  la consommation annuelle moyenne de vin par personne en France (en litres) pour l'année  $t$ ,  $X_{1,t}$  la proportion de personnes majeures nées après 1981 dans la population (en %),  $X_{2,t}$  l'indice de prix du vin et des boissons fermentées rapporté à l'indice des prix à la consommation (en %) et  $X_{3,t}$  le PIB par habitant en  $t$ , on veut estimer les coefficients  $\beta_i$  de la relation suivante :

$$\ln Y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln X_{1,t} + \beta_2 \ln X_{2,t} + \beta_3 \ln X_{3,t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Nous utilisons un estimateur MCO avec Python. Les résultats sont disponibles en annexe A. On sait que

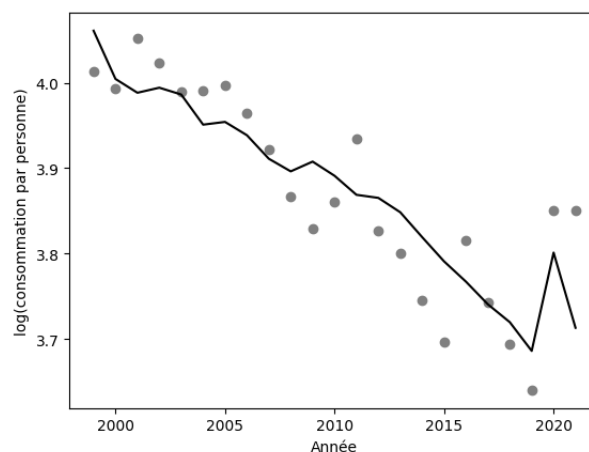


FIGURE 3 – Consommation observée et consommation prédite

le coefficient de détermination  $R^2$  mesure la part de la variance de la variable endogène expliquée par le modèle. On obtient, pour notre modèle, un  $R^2$  ajusté de 0,745, : notre modèle linéaire explique 74,5% de la variance de la consommation de vin au cours du temps. On voit graphiquement que les valeurs prédites par notre modèle semblent s'aligner sur les valeurs observées de façon satisfaisante.

3. Source Insee : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/7750004>

## 2 Tests sur le modèle

Nous avons estimé le modèle précédent à l'aide de l'estimateur des MCO. Toutefois, les coefficients du modèle linéaire (1) peuvent être estimés à condition que les hypothèses suivantes soient vérifiées.

*H1* : Le nombre d'observations est supérieur ou égal au nombre de variables explicatives.

*H2* : Les variables explicatives  $X_j$  sont linéairement indépendantes.

*H3* : Les variables explicatives  $X_j$  ne sont pas aléatoires. Inversement, le terme d'erreur  $\varepsilon$  est aléatoire.

*H4* : L'espérance mathématique des termes d'erreur est nulle.

*H5* : La variance des termes d'erreur est constante. C'est l'hypothèse d'homoscédasticité.

*H6* : Les termes d'erreur ne sont pas corrélés entre eux. C'est l'hypothèse d'absence d'autocorrélation.

*H7* : Les termes d'erreur suivent une loi normale.

Avant de progresser dans l'interprétation des résultats de notre régression, cette partie présentera une série de tests visant à vérifier les hypothèses précédentes. Nous savons déjà que *H1* est validée, puisque nous avons 3 variables explicatives, pour 23 observations. De plus, il est facile de vérifier visuellement (dans les graphiques tracés plus hauts) que les variables explicatives que nous avons choisi ne sont pas des variables aléatoires (hypothèse *H3*) : elles montrent des tendances nettes et régulières sur plus de deux décennies. Enfin, on peut facilement calculer la moyenne des erreurs (elle est égale à  $4,8 \times 10^{-14}$  ce qui est extrêmement proche de 0), ce qui ne nous permet pas a priori de rejeter *H4*.

On notera que lorsque les hypothèses *H5* et *H6* (respectivement l'homoscédasticité et l'absence d'autocorrélation) ne sont pas vérifiées, la matrice de variance-covariance de l'estimateur des MCO ne peut plus être utilisée pour les tests sur le modèle. Dans ce cas, nous utiliserons la méthode des moindres carrés généralisés (MCG). En présence d'autocorrélation, on pourra également utiliser la méthode de Cochrane-Orcutt pour réaliser l'estimation.

### 2.1 Absence d'autocorrélation

Nous cherchons à vérifier l'absence d'autocorrélation des termes d'erreur (hypothèse *H6*). Le test de Durbin-Watson permet de détecter une autocorrélation d'ordre 1 et le test de Ljung-Box permet de tester l'autocorrélation d'un ordre supérieur ou égal à 1. En présence d'autocorrélation, on pourra utiliser la méthode d'estimation de Cochrane-Orcutt.

**Test de Durbin-Watson** On peut appliquer le test de Durbin-Watson car :

- Les séries utilisées pour construire le modèle ne comportent pas de données manquantes ;
- La matrice des variables explicatives ne contient pas de variable endogène retardée ;
- Le modèle possède un terme constant.

La statistique de test de Durbin-Watson est  $d = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}$  où les  $\hat{\varepsilon}_i$  sont les résidus MCO.

Sous l'hypothèse  $H_0$ , les résidus ne sont pas autocorrélés (et inversement sous l'hypothèse  $H_1$ ). On interprétera la valeur de la statistique de test comme suit :

- Plus  $d$  est proche de 0, plus une corrélation positive est probable ;
- Plus  $d$  est proche de 2, moins il est possible de rejeter  $H_0$  (pas d'autocorrélation) ;
- Plus  $d$  est proche de 4, plus une corrélation négative est probable.

En se référant à la table de Durbin-Watson (annexe B), on voit que pour ne pas rejeter  $H_0$ , il faut que  $d_U < d < 4 - d_U$ , i.e. pour 23 observations et 3 variables explicatives  $1,407 < d < 2,593$ . Or, ici,  $d = 1,151 \in [0,858; 1,407]$ , c'est-à-dire que  $d_L < d < d_U$ , ce qui ne permet pas de conclure sur l'absence d'autocorrélation. On procède donc à un nouveau test, avec le test de Ljung-Box.

**Test de Ljung-Box** Sous  $H_0$ , les résidus sont distribués de façon indépendante. Sous  $H_1$ , il y a une auto-corrélation entre les termes d'erreur jusqu'au  $p$ -ème retard :

$$\begin{cases} H_0 : \varepsilon_i = u_i ; \\ H_1 : \varepsilon_i = \sum_{j=1}^p \gamma_j \varepsilon_{i-j} + u_i. \end{cases} \quad , \text{ avec } u_i \text{ un terme aléatoire.}$$

Avec  $\hat{\rho}_k$  le coefficient de corrélation entre les résidus  $\hat{\varepsilon}_i$  et  $\hat{\varepsilon}_{i-k}$ , la statistique de test de Ljung-Box est :

$$LB(p) = n(n+2) \sum_{j=1}^p \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j}$$

Pour ne pas rejeter  $H_0$ , il faut que la p-value du test soit supérieure à 0,05. On observe la p-value pour plusieurs nombres de retards (figure 4 ci-après) et on remarque qu'elle est supérieure à 5% jusqu'au 11e

retard. Or, nos données n'étant pas saisonnières, il est recommandé dans notre cas de choisir  $\min(10, n/5)$  nombre de retards pour le test ( $n=23$  le nombre d'observations). Donc on peut admettre l'hypothèse d'absence d'autocorrélation des erreurs (hypothèse  $H_6$ ).

Retard	Statistique	P-value	Retard	Statistique	P-value
1	1.897913	0.168312	12	21.413121	0.044649
2	2.972476	0.226222	13	22.793633	0.04422
3	3.133291	0.371527	14	22.824663	0.063183
4	3.38262	0.495949	15	24.903708	0.051252
5	5.164168	0.396175	16	27.043768	0.040999
6	5.618727	0.467225	17	27.046611	0.057388
7	8.832176	0.264931	18	27.062756	0.077826
8	13.885068	0.084811	19	29.544098	0.057895
9	13.99827	0.122387	20	33.973113	0.026307
10	15.625228	0.110875	21	34.916237	0.028838
11	17.11521	0.104514	22	40.205896	0.010228

FIGURE 4 – Tableau des statistiques de test de Ljung-Box en fonction du nombre de retards

## 2.2 Homoscédasticité

L'hypothèse  $H_5$ , c'est-à-dire l'hypothèse d'homoscédasticité, postule que la variance du terme d'erreur est constante. Si nous validons cette hypothèse, cela nous permettra par la suite d'estimer la variance des estimateurs des paramètres  $\beta_j$  du modèle, et d'effectuer des tests de significativité avec un test de Student.

Les tests de Goldfeld et Quandt, Breusch et Pagan ainsi que le test de White permettent de tester si les erreurs sont homoscédastiques. Nous ne pourrions toutefois pas mettre en place le test de White qui ne concerne que des échantillons supérieurs à 50 observations. En cas d'hétéroscédasticité, nous utiliserons la méthode de la régression pondérée en transformant notre modèle à estimer.

**Test de Breusch et Pagan** Sous  $H_0$ , la variance du terme d'erreur est constante. Sous l'hypothèse alternative  $H_1$ , elle varie en fonction des variables explicatives :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\varepsilon}^2 = \beta_0 + u_0; \\ H_1 : \hat{\varepsilon}^2 = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + u_1. \end{cases}$$

La statistique de test est égale à  $BP = nR^2$ , avec  $R^2$  le coefficient de détermination correspondant au modèle de l'hypothèse alternative. Si  $BP$  suit une loi  $\chi^2_{k,\alpha}$  (risque de 1<sup>ère</sup> espèce  $\alpha$ , nombre de variables explicatives  $k$ ), on doit rejeter  $H_0$ . On choisit  $\alpha = 5\%$  (risque de rejeter  $H_0$  alors qu'elle est vraie).

Lagrange multiplier statistic	p-value	f-value	f p-value
3.860748281403777	0.27689871920935827	1.2775528605680162	0.3105569281290082

La p-value est largement supérieure à 0,05 : on ne peut pas rejeter  $H_0$ . Nous menons tout de même un test de Goldfeld et Quandt, plus précis sur l'origine d'une possible hétéroscédasticité.

**Test de Goldfeld et Quandt** Ce test met en lumière, lorsqu'elle existe, une variation de la variance des résidus en fonction d'une variable explicative (marque d'hétéroscédasticité). Il faut commencer par ordonner les données de façon croissante en fonction de la variable indépendante concernée, puis le diviser en deux sous-échantillons et estimer les variances respectives de ses sous-groupes pour évaluer l'écart entre elles. Finalement, la statistique de test sera le rapport entre la plus grande variance et la plus petite, qui suit la distribution d'une statistique de Fisher (F) sous l'hypothèse  $H_0$  (homoscédasticité). Sur Python :

```
Y = df['conso_par_personne']
X = df[['proportion_1981', 'prix_vin_rapporte', 'PIB_par_habitant']]
sm.stats.diagnostic.het_goldfeldquandt(Y, X, drop=0.2)
```

On obtient une statistique de test de 2,44 et une p-value correspondante de  $0,17 > 0,05$ . Encore une fois, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle (homoscédasticité).

## 2.3 Normalité des erreurs

L'hypothèse de normalité des erreurs  $H7$  n'est pas indispensable pour estimer le modèle, car pour que l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires soit sans biais il suffit que l'espérance des erreurs soit nulle (hypothèse  $H4$ ). Elle permettra toutefois de réaliser par la suite des tests (Fisher, Student) sur les coefficients du modèle.

Nous souhaitons vérifier que les termes d'erreurs sont distribués selon une distribution gaussienne centrée en 0. La normalité des erreurs est usuellement vérifiée grâce aux tests de Jarque-Bera, Anderson-Darling ou Kolmogorov-Smirnov. Pour commencer, nous réalisons un premier test visuel avec un "QQ plot".

**Diagramme quantile-quantile** Sur ce diagramme, on compare les quantiles de la loi normale et celles de la distribution observées. Si cette dernière est gaussienne, les quantiles doivent (à peu près) suivre la diagonale des quantiles de la loi normale. En observant notre QQ-plot, cela semble être le cas (figure 5).

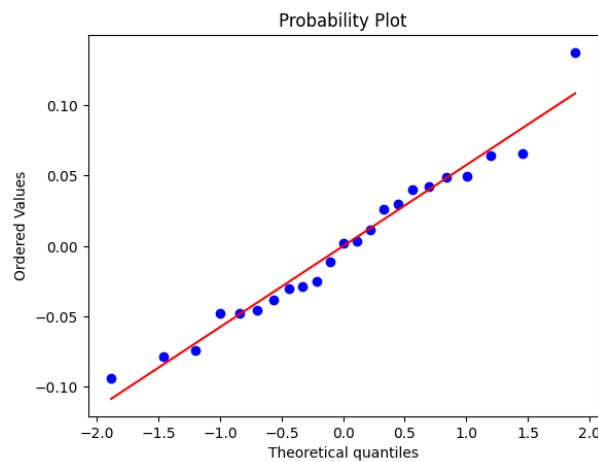


FIGURE 5 – Diagramme quantile-quantile des résidus de la régression

**Test de Kolmogorov-Smirnov** Ce test repose sur l'écart entre la fonction de répartition de la loi normale  $F_0$  et celle de la variable d'intérêt (ici, la fonction de répartition du terme d'erreur) estimée à partir d'un échantillon de  $n$  observations :  $F_n$ . La statistique de test est  $D_n = \sup |F_n(x) - F_0(x)|$ . Les résultats du tests sont les suivants :

Statistique	Localition	Signe	P-value
0.4625317031128604	-0.09405759380649803	-1	5.0257180681001394e-05

L'hypothèse nulle est rejetée car la p-value est inférieure à 0,05. On procède à un second test, le test de Jarque-Berra.

**Test de Jarque-Berra** Le test de Jarque-Berra nous permet de savoir si les moments centrés d'ordre 3 (*skewness*,  $S_K$ , indiquant la symétrie de la distribution) et 4 (*kurtosis*,  $K_S$ , indiquant la forme plutôt leptokurtique ou platykurtique de la distribution) des résidus sont similaires à ceux d'une loi normale. Sous  $H_0$ ,  $S_K = 0$  et  $K_S = 3$ . Sous  $H_1$ ,  $S_K \neq 0$  ou  $K_S \neq 3$ . Soit  $\bar{X}$  la moyenne et  $S_X$  l'écart-type, on a :

$$S_K = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j - \bar{X}}{S_X} \right)^3 \text{ et } K_S = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j - \bar{X}}{S_X} \right)^4$$

La statistique de test se définit comme suit :  $JB = \frac{n}{6} [S_K^2 + \frac{(K_S - 3)^2}{4}]$ . Elle suit une loi  $\chi_2$  sous l'hypothèse  $H_0$ . En réalisant le test, on obtient une statistique de test égale à 0,573 et une p-value égale à 0,751  $> 0,05$ . On ne peut donc pas rejeter  $H_0$ , ce qui nous laisse dans l'embarras vis-à-vis des résultats du test de Kolmogorov-Smirnov. Nous réalisons un troisième test.

**Test d'Anderson-Darling** En réalisant le test sur python, on reçoit un message qui nous confirme que la distribution des résidus ressemble à celle d'une loi normale.

```
anderson(results.resid, dist='norm')
message: '`anderson` successfully fit the distribution to the data.')
```

On obtient une statistique de test de 0,250. On peut la comparer aux valeurs critiques fournies : elles est inférieure aux valeurs critique pour tous les niveaux de significativité. Nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse nulle (distribution différente d'une loi normale) du test.

Niveau de significativité	15%	10%	5%	2,5%	1%
Valeurs critiques	0.511	0.582	0.699	0.815	0.969

Les résultats de ce test ayant confirmé ceux du test de Jarque-Berra, on considérera pour la suite que les résidus de la régression du modèle suivent une distribution proche de celle d'une loi normale.

## 2.4 Absence de multicollinéarité

L'hypothèse d'absence de multicollinéarité ( $H_2$ ) est cruciale car s'il existe une relation linéaire entre les variables explicatives, la matrice  $(X'X)$  n'est plus inversible et la méthode des MCO n'est plus valide. Même s'il n'existe pas de linéarité parfaite entre les variables, de la "quasi-linéarité" peut apparaître. Dans ce cas, les coefficients seront très sensibles à une légère variation des données, ce qui peut fausser le modèle. Dans un premier temps, nous allons tenter d'identifier la présence ou l'absence de multicollinéarité. Si elle se confirme, nous mettrons en place des méthodes (régression sous contrainte) pour y remédier.

**Coefficient de corrélation** Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre deux séries  $x_j$  et  $x_l$  est : 
$$Corr(x_j, x_l) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \hat{x}_j)(x_{il} - \hat{x}_l)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \hat{x}_j)^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{il} - \hat{x}_l)^2}}$$

**Critère du VIF** Le VIF (ou facteur d'inflation de la variance) mesure l'incidence de la multicollinéarité sur la variance d'un estimateur de coefficient  $\hat{\beta}_i$ . Il est égal au ratio de la variance effective de l'estimateur  $Var(\hat{\beta}_j)$  par rapport à une variance théorique  $Var_{min}(\hat{\beta}_j)$ , dans une situation où toutes les variables seraient indépendantes.

**Tableau de décomposition des coefficients** Tableau de décomposition des variances des coefficients Besley, Kuh et Welsch.

## 3 Tests sur les paramètres du modèles

Les tests de Student et de Fisher reposent sur l'hypothèse de normalité des erreurs. Toutefois, ils restent cependant valides de manière asymptotique (sur un grand échantillon) même lorsque la distribution des erreurs n'est pas gaussienne.

Avec l'hypothèse de normalité des perturbations, il a été établi que les estimateurs MCO des coefficients étaient distribués suivant une loi normale et que  $\frac{(N-K)S^2}{\sigma^2}$  suit une loi de  $\chi^2$  sous condition que les perturbations soient homoscédastiques et non corrélées. Ces résultats permettent de mettre en œuvre les tests avec les t-stat et la F-stat sans tenir compte de la taille n de l'échantillon. Si les perturbations ne sont pas gaussiennes, il faut pouvoir se mettre dans un cadre dit asymptotique où la taille de l'échantillon est grande afin d'utiliser un théorème limite central. L'utilisation de ce théorème nécessite que les perturbations soient indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Si de plus, les variables explicatives sont aléatoires, il est nécessaire de supposer que les erreurs et les variables explicatives soient non corrélées. Dans ce cadre asymptotique auquel on adjoint d'autres hypothèses sur les perturbations, les estimateurs MCO des coefficients sont alors asymptotiquement gaussiens. Les tests habituels t et F ainsi que le test de restriction de Wald sont toujours valables mais asymptotiquement, i.e. dans les grands échantillons mais pas dans les petits.

L'hypothèse de normalité des perturbations est donc très importante pour de petits échantillons.

2. Test de Fisher du modèle global

3. Test de Student

Si un paramètre est non significatif : erreur sur les données, multicollinéarité

## **4 Test de la stabilité temporelle**

Test de Chow, test sur les résidus, les résidus au carré (cusum square/2)

## **5 Prévvision**

Prévisions avec distribution normale ou avec bootstrap si non gaussien

# Annexes

## A Régression par MCO

```
model = smf.ols(formula="np.log(conso_par_personne) ~ np.log(proportion_1981)
+ np.log(prix_vin_rapporte) + np.log(PIB_par_habitant)", data=df,)
results = model.fit()
```

Résultats : Ici, "proportion\_1981" est la proportion de majeurs nés après 1981, "prix\_vin\_rapporte" est l'indice du prix du vin et des boissons fermentées rapporté à l'indice des prix à la consommation, et "PIB\_par\_habitant" est le PIB par habitant.

### OLS Regression Results

```
=====
Dep. Variable:      np.log(conso_par_personne)      R-squared:                0.780
Model:                                OLS          Adj. R-squared:        0.745
Method:                  Least Squares          F-statistic:             22.42
Date:                    Thu, 02 Jan 2025         Prob (F-statistic):       1.85e-06
Time:                    11:50:12                Log-Likelihood:          34.272
No. Observations:              23                AIC:                    -60.54
Df Residuals:                  19                BIC:                    -56.00
Df Model:                      3
Covariance Type:              nonrobust
=====
```

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
Intercept	24.5012	7.278	3.366	0.003	9.268	39.735
np.log(proportion_1981)	-0.0044	0.043	-0.102	0.920	-0.095	0.086
np.log(prix_vin_rapporte)	-1.0684	0.407	-2.625	0.017	-1.920	-0.216
np.log(PIB_par_habitant)	-1.5021	0.708	-2.121	0.047	-2.985	-0.020

```
=====
Omnibus:              0.901      Durbin-Watson:              1.151
Prob(Omnibus):        0.637      Jarque-Bera (JB):            0.573
Skew:                  0.378      Prob(JB):                    0.751
Kurtosis:              2.835      Cond. No.                    6.86e+03
=====
```



## B Table de significativité de Durbin-Watson

n\k	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
6	0.390	1.142																		
7	0.435	1.036	0.294	1.676																
8	0.497	1.003	0.345	1.489	0.229	2.102														
9	0.554	0.998	0.408	1.389	0.279	1.875	0.183	2.433												
10	0.604	1.001	0.466	1.333	0.340	1.733	0.230	2.193	0.150	2.690										
11	0.653	1.010	0.519	1.297	0.396	1.640	0.286	2.030	0.193	2.453	0.124	2.892								
12	0.697	1.023	0.569	1.274	0.449	1.575	0.339	1.913	0.244	2.280	0.164	2.665	0.105	3.053						
13	0.738	1.038	0.616	1.261	0.499	1.526	0.391	1.826	0.294	2.150	0.211	2.490	0.140	2.838	0.090	3.182				
14	0.776	1.054	0.660	1.254	0.547	1.490	0.441	1.757	0.343	2.049	0.257	2.354	0.183	2.667	0.122	2.981	0.078	3.287		
15	0.811	1.070	0.700	1.252	0.591	1.465	0.487	1.705	0.390	1.967	0.303	2.244	0.226	2.530	0.161	2.817	0.107	3.101	0.068	3.374
16	0.844	1.086	0.738	1.253	0.633	1.447	0.532	1.664	0.437	1.901	0.349	2.153	0.269	2.416	0.200	2.681	0.142	2.944	0.094	3.201
17	0.873	1.102	0.773	1.255	0.672	1.432	0.574	1.631	0.481	1.847	0.393	2.078	0.313	2.319	0.241	2.566	0.179	2.811	0.127	3.053
18	0.902	1.118	0.805	1.259	0.708	1.422	0.614	1.604	0.522	1.803	0.435	2.015	0.355	2.238	0.282	2.467	0.216	2.697	0.160	2.925
19	0.928	1.133	0.835	1.264	0.742	1.416	0.650	1.583	0.561	1.767	0.476	1.963	0.396	2.169	0.322	2.381	0.255	2.597	0.196	2.813
20	0.952	1.147	0.862	1.270	0.774	1.410	0.684	1.567	0.598	1.736	0.515	1.918	0.436	2.110	0.362	2.308	0.294	2.510	0.232	2.174
21	0.975	1.161	0.889	1.276	0.803	1.408	0.718	1.554	0.634	1.712	0.552	1.881	0.474	2.059	0.400	2.244	0.331	2.434	0.268	2.625
22	0.997	1.174	0.915	1.284	0.832	1.407	0.748	1.543	0.666	1.691	0.587	1.849	0.510	2.015	0.437	2.188	0.368	2.367	0.304	2.548
23	1.017	1.186	0.938	1.290	0.858	1.407	0.777	1.535	0.699	1.674	0.620	1.821	0.545	1.977	0.473	2.140	0.404	2.308	0.340	2.479
24	1.037	1.199	0.959	1.298	0.881	1.407	0.805	1.527	0.728	1.659	0.652	1.797	0.578	1.944	0.507	2.097	0.439	2.255	0.375	2.417
25	1.055	1.210	0.981	1.305	0.906	1.408	0.832	1.521	0.756	1.645	0.682	1.776	0.610	1.915	0.540	2.059	0.473	2.209	0.409	2.362
26	1.072	1.222	1.000	1.311	0.928	1.410	0.855	1.517	0.782	1.635	0.711	1.759	0.640	1.889	0.572	2.026	0.505	2.168	0.441	2.313
27	1.088	1.232	1.019	1.318	0.948	1.413	0.878	1.514	0.808	1.625	0.738	1.743	0.669	1.867	0.602	1.997	0.536	2.131	0.473	2.269
28	1.104	1.244	1.036	1.325	0.969	1.414	0.901	1.512	0.832	1.618	0.764	1.729	0.696	1.847	0.630	1.970	0.566	2.098	0.504	2.229
29	1.119	1.254	1.053	1.332	0.988	1.418	0.921	1.511	0.855	1.611	0.788	1.718	0.723	1.830	0.658	1.947	0.595	2.068	0.533	2.193
30	1.134	1.264	1.070	1.339	1.006	1.421	0.941	1.510	0.877	1.606	0.812	1.707	0.748	1.814	0.684	1.925	0.622	2.041	0.562	2.160