定義 1.12　関数 $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ が ハミルトン方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (i=1,2) \qquad H：ハミルトニアン$$

の第1積分

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{dG(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))}{dt} = 0.$$

□

例 1.13　ハミルトニアン H はそれが定めるハミルトン方程式の第一積分。

□

- ハミルトニアン以外の第一積分を組織的に求めるアルゴリズムはない。十分な数の第一積分がない例もある。

(b) 角運動量

$$(1.18) \quad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = p_i \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{GmM}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} q_i \end{cases} \quad (i=1,2)$$

の第1積分を求める。

ケプラーの法則の復習　(i)～(iii)

(i) 惑星は楕円軌道を描き，太陽はその焦点の1つと一致する。

(ii) L_t；惑星の時刻 t での位置と太陽を結ぶ線分。

$Area(t_0, t_1)$ ： L_t が，$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の間に通る平面の部分の面積とする。