○ ハミルトン方程式の性質を保ったまま、方程式を摂動した場合。

$$H_\varepsilon = \frac{q^2+p^2}{2} + \varepsilon g(q,p)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p + \varepsilon \dfrac{\partial g}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -q - \varepsilon \dfrac{\partial g}{\partial q} \end{cases} \quad (1.13)$$

定理 1.9 $\forall (q_0, p_0)$ $\exists \varepsilon_0 > 0$

$|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0 \Rightarrow$ (1.13) の $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$

なる解は周期解。

[証明] $C_\varepsilon = \dfrac{q_0^2+p_0^2}{2} + \varepsilon g(q_0, p_0)$,

$L_\varepsilon = \{(q,p) \mid H_\varepsilon(q,p) = C_\varepsilon\}$ とおく。

$\varepsilon = 0$ のとき L_0 は、円だから閉曲線。

ε が十分に小さいとき、L_ε も閉曲線

∵『電磁場とベクトル解析』定理 1.31

「$L = \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 \mid f(q,p) = C\}$ とし、$\forall (q,p) \in L$ に対して、

$\mathrm{grad} f(q,p) \neq 0$.

$\Rightarrow$ L は滑らかな曲線の和である。」

「補題 1.34 $L \subset \mathbb{R}^2$, 次の2つは同値

(i) L は滑らかな曲線の和。

(ii) $\forall (p,q) \in L$ $\exists \varepsilon > 0$ s.t