97 7. 16

$l(s) = \varphi_s(p)$, $l(t+s) = \varphi_{t+s}(p)$ (定義より)

$l' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$: $l'(t) = l(t+s)$ とすると

$$l'(0) = l(s) .$$

よって $l'(t) = \varphi_t(l(s))$.

$\therefore$ $\varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_t(l(s)) = l'(t) = l(t+s) = \varphi_{t+s}(p)$ □

系二は φ_t は可微分同相写像

[証明] $\varphi_{-t}(\varphi_t(p)) = \varphi_{-t+t}(p) = \varphi_0(p) = l(0) = p$

$\therefore$ φ_{-t} は逆写像.

定理 (常微分方程式の解の存在と一意性)

常微分方程式 $\frac{dx_i}{dt}(t) = a_i(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ $(i=1,\cdots,n)$ $(*)$

について次が成り立つ。

(i) $(*)$は任意の初期条件 $x_i(0) = p_i$ に対して, $^\exists \varepsilon > 0$

s.t $-\varepsilon < t < \varepsilon$ で定義された C^∞級の解をもつ。

(ii) $(*)$は二つの解が定義域上のある1点, $t = t_0$ で同じ値ならば,

定義域の共通部分全体で解は一致する。

(iii) (解の初期条件に関する微分可能性)

$^\forall p \in U \subset \mathbb{R}^n$ について, pの近傍 $V \subset U$ を十分小さくとれば,

$^\exists \varepsilon > 0$, s.t $\forall q \in V$ について, 初期条件 $x(t_0) = q$