$p_2=\alpha$ とおく。 $p_1 = \|\dot{\boldsymbol{m}}\|^2 \dot{q}_1$ に注意すると，(3.68)は，

$$H = \frac{1}{2}\left(\|\dot{\boldsymbol{m}}(q_1)\|^2 \dot{q}_1^2 + m_2(q_1)^{-2}\alpha^2 \right). \qquad (3.69)$$

$$\Rightarrow \int^{q_1} \frac{\|\dot{\boldsymbol{m}}(u)\|^2}{\sqrt{2H - m_2(u)^{-2}\alpha^2}}\, du = t \qquad (3.70)$$

$q_1(t)$は(3.70)の積分の逆関数で与えられる。

例3.60　$\boldsymbol{m}(u) = (u, 1)$　のとき 回転面Sは円筒. (3.70)の左辺は.

$$\int^{q_1} \frac{1}{\sqrt{2H-\alpha^2}}\, du = \frac{q_1}{\sqrt{2H-\alpha^2}} + C \qquad \square$$

回転面の測地流は, 2つの第1積分をもつ(Hとp_2). よって完全積分可能である.

したがって曲面がコンパクトであれば, 定理3.52により, 解は準周期解か周期解.

周期解 → 閉じた測地線,　準周期解 →

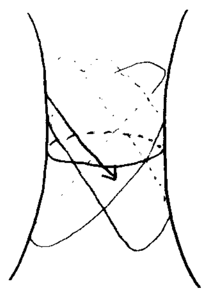

図3.5

準周期的な測地線

問6. $\boldsymbol{m}(u) = (u, 2u)$の 場合の測地線

[解]　(3.70) $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{q_1} \frac{\|\dot{\boldsymbol{m}}(u)\|^2}{\sqrt{2H - m_2(u)^{-2}\alpha^2}}\, du$

$$= \int_0^{q_1} \frac{5}{\sqrt{2H - \frac{1}{4u^2}\alpha^2}}\, du = \frac{5}{4H}\sqrt{8Hq_1^2 - \alpha^2} + t_0 = t$$

↑ 要check