$$u \wedge dv = f\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge d(g\,dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l})$$

$$= f\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge \left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}\right)$$

$$= \sum_i f \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$

$$= (-1)^k \sum_i f \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_l}$$

$$\therefore \quad d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^k u \wedge dv. \qquad \square$$

問4　$w = dx^1 \wedge dx^2 + \cdots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n}$ のとき　(微分2形式)

$w^n = \underbrace{w \wedge \cdots \wedge w}_{nケ}$ を計算せよ。

[解]

$$w^n = (dx^1 \wedge dx^2 + \cdots\cdots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n})^n$$

nケの w の中から $dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$ を 1つずつ選ぶことになるが

$$dx^{2i-1} \wedge dx^{2i} \wedge dx^{2i-1} \wedge dx^{2i} = 0$$

(重複しないで)

であるから，0 にならない項の選び方は $n!$ 通り。

$u^i = dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$ とおくと

$$u^i \wedge u^j = (-1)^4 u^j \wedge u^i = u^j \wedge u^i$$

で結合法則を用いると，

$$w^n = n!\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \wedge \cdots \wedge dx^{2n-1} \wedge dx^{2n} \qquad \square$$

ネ