$U = \{(s,t) \mid 0 < s < 2\pi,\ -\pi/2 < t < \pi/2\}$ とおくと

$$\int_S \omega = \int_U \Phi^* \omega = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, ds\, dt$$

$$= 2\pi \left[\sin t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi \quad //$$

除いた部分 $y = 0,\ x > 0$ は1次元で面積は0.

問10. 向きの付かない曲面上の微分2形式の積分は

定義されないが、向きの付かない曲面に対しても

その面積は定義される。なぜか？

∵ 曲面 S に向きが付かない場合，座標のとり方によって

$\int_S \omega$ は一意ではないが，面積は一意に定まる

から。

補題 2.36 $S \subseteq \mathbb{R}^3$：向きの付いた曲面

n：単位ベクトル

$\mathbb{W} = W^x \dfrac{\partial}{\partial x} + W^y \dfrac{\partial}{\partial y} + W^z \dfrac{\partial}{\partial z}$：$S$ の近傍で定義されたベクトル場

のとき

$$\int_S \mathbb{W} \cdot dS = \int_S i_2(\mathbb{W}).$$

[証明] $\varphi : U \to S$ を向きを保つ座標とする。

$$n = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big/ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|.$$