(g_{ij}) は可逆であるから、§1.4の仮定はみたされる。よってハミルトニアン式(1.40)は、

$$H(q,p) = \sum_i p_i y^i - E(q,p) = \sum_{i,j} g_{ij} y^j y^i - E(q,p) = E(q,p) 。$$

(g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) で表すと、

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}(q)\, y^i y^j = \frac{1}{2}\sum_i p_i y^i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}(q)\, p_i p_j \qquad (3.60)$$

これでハミルトン方程式を書き下すと、

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \displaystyle\sum_j g^{ij} p_j \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j,k} \dfrac{\partial g^{jk}}{\partial q^i} p_j p_k \end{cases} \qquad (3.61)$$

測地線の方程式を力学系と見たとき測地流という。

(d) 測地線の方程式

(3.61)を x の方程式に直してみる。 $\left(\dfrac{\partial A^{-1}}{\partial x} = -A^{-1}\dfrac{\partial A}{\partial x}A^{-1} \right)$

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial q^i} = -\sum_{l,m} g^{jl}\frac{\partial g_{lm}}{\partial q^i} g^{mk} \qquad (3.62)$$

(3.61)の第2式に代入

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k,l,m} g^{jl}\frac{\partial g_{lm}}{\partial q^i} g^{mk} p_j p_k . \qquad (3.63)$$

(3.61)の第1式を t で微分

$$\frac{d^2 q^i}{dt} = \sum_j \frac{dg^{ij}}{dt} p_j + \sum_j g^{ij}\frac{dp_j}{dt}$$

合成関数の微分

$$= \sum_{j,k}\frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt} p_j + \sum_j g^{ij}\frac{dp_j}{dt}$$