例1.10. ニュートンの重力理論

M：原点にある物体の質量
m：運動する質点の質量
G：重力定数　　　　　　とするとき，

力：$(F_1, F_2) = -\dfrac{GmM}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}}(q_1, q_2)$

ポテンシャル　$V(q_1, q_2) = -\dfrac{GmM}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}$　　(1.17)

このVに対して，ハミルトン方程式は，

運動方程式
$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = p_i \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{GmM}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}} q_i \end{cases} \quad (i=1,2) \qquad (1.18)$$

定理 1.11　2次元の場合のエネルギー保存の法則

ハミルトニアンHは，ハミルトン方程式の解曲線上で定数である。すなわち，$(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$ をハミルトン方程式の解とすると

$$\frac{dH(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))}{dt} = 0$$

[証明]　$\dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dfrac{dq_i}{dt}$　$\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dfrac{dp_i}{dt}$　より明らか

□

運動の軌跡 … 2次元

$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = C$ … 3次元

$H=C$ は積分曲線(運動の軌路)と一致しない。