計算規則 2.14　　2.10 と同様　□.

補題 2.15　u : 微分 k 形式，v : 微分 l 形式 について

$$u \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge u.$$

[証明]　$u = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$,　$v = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$

$1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq n$，$1 \leqq j_1 < \cdots < j_l \leqq n$ のときを

示せば一般のときは 計算規則 2.14 (iii) と (v) より O.K.

$\exists a, \exists b$ s.t. $i_a = j_b \Rightarrow u \wedge v = 0 = v \wedge u$

$\forall a, \forall b$　$i_a \neq j_b$ のとき

$$
\begin{aligned}
u \wedge v &= (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}) \\
&= dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&\overset{(ii)}{=} -dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^k dx^{j_1} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (-1)^k dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_3} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{kl} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
&= (-1)^{kl} v \wedge u
\end{aligned}
$$

□