有限次元の場合と同様に

「補題」1.22 $\mathcal{L}:\Omega(x_0,x_1)\to\mathbb{R}^3$ が $x\in\Omega(x_0,x_1)$ で

極大 又は 極小

$\Updownarrow$ def

「十分に近い道 $y:[0,1]\to\mathbb{R}^3\in\Omega(x_0,x_1)$ に対して,

$\mathcal{L}(x)\geqq\mathcal{L}(y)$ 又は $\mathcal{L}(x)\leqq\mathcal{L}(y)$」

未定義
難しい。

$\Rightarrow$ x で $\mathcal{L}$ は極値をとる。 □

def 1.21

問6 $\mathcal{L}$ は $x\in\Omega(x_0,x_1)$ で最小

i,e $\forall y\in\Omega(x_0,x_1)$, $\mathcal{L}(x)\leqq\mathcal{L}(y)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ は x で極値をとる。

Ans 定義 1.21 に従って示す。

$x_\delta(t)=x(t)+\delta\Delta x(t)$ とおくと, $\delta=0$ のとき 仮定より

$\mathcal{L}(x_\delta)$ は最小。 $\mathcal{L}(x_\delta):\delta\to\mathcal{L}(x_\delta)$ は微分可能。

$$\lim_{\delta\to0}\frac{\mathcal{L}(x+\delta\Delta x)-\mathcal{L}(x)}{\delta}$$

$$=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\Bigl(\int_0^1\Bigl(\frac{\|\dot{x}+\delta\Delta\dot{x}\|^2}{2}-V(x+\delta\Delta x)\Bigr)dt-\int_0^1\Bigl(\frac{\|\dot{x}\|^2}{2}-V(x)\Bigr)dt$$

$$=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\int_0^1\Bigl(\frac{2\delta\dot{x}\cdot\Delta\dot{x}+\delta^2\|\Delta\dot{x}\|^2}{2}-\mathrm{grad}\,V(x)\cdot\delta\Delta x+\|\delta\Delta x\|U(\delta\Delta x)\Bigr)dt$$