▵ 1枚の座標で覆われない曲面(球面 etc)の場合

$S = \bigcup \varphi_i(U_i)$ として.

$^\exists V_i \subsetneqq U_i$ s.t $S = \bigcup \varphi_i(V_i)$, $\varphi_i(V_i) \cap \varphi_j(V_j)$ は1次元

∵ 補題 2.24 (「電磁場とベクトル解析」)

S: 曲面 , $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^3 \mid i \in I, S = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i)\}$
: 局所座標系

$^\exists V_i \subsetneqq U_i$

s.t (i) V_i は区分的に滑らかな曲線 L_i で囲まれた領域

(ii) $i \neq j \Rightarrow \varphi_i(V_i) \cap \varphi_j(V_j) \subsetneqq \varphi_i(L_i)$

(iii) $\bigcup \varphi_i(V_i) = S$ □

$\int_S u = \sum_i \int_{V_i} \varphi_i^* u$ とおくと V_i , φ_i によらない.

1形式の積分も同様。

例題 2.34 $l(t) = (\cos t, \sin t, t)$ のとき

$\int_0^\pi l^*(t) \ (x\,dx + y\,dx)$ を計算.

[解] (与式) $= \int_0^\pi (\cos t \ d(\cos t) + \sin t \ dt)$

$= \int_0^\pi (-\cos t \sin t + \sin t)\,dt$

$= \int_0^\pi (-\frac{1}{2}\sin 2t + \sin t)\,dt$

$= \left[\cos 2t - \cos t \right]_0^\pi = \{1-(-1)\} - (1-1) = 2$ □