2.5 φ_t : $\mathbb{R}^3$上の 1径数変換群,

$\forall t$ に対して $\varphi_t \in E(3) = O(3) \times \mathbb{R}^3$, $\varphi_t = (A(t), v(t))$とおく。

(1) $\frac{dA}{dt}(0) = B$, $\frac{dv}{dt}(0) = w$ のとき, $\varphi_t = (A(t), v(t))$ を B, wで表せ。

[解]

$A(t) = \exp(tB)$ $\quad v = tw$ $\quad$ Bは反対称行列 と表せる。

$$\because \quad \frac{dA}{dt}(t)\Big|_{t=0} = B\exp(tB)\Big|_{t=0} = B.\ ,$$

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = w$$

$$\varphi_t(x) = \exp(tB)x + tw \qquad \square$$

(2) $\psi_t = (A'(t), v'(t)) \in E(3)$も 1径数変換群

$\frac{dA'}{dt}(0) = B'$, $\frac{dw'}{dt}(0) = w'$ のとき,

$\varphi_t\psi_s = \psi_s\varphi_t$ となるための必要十分条件を B, w, B', w'を用いて表せ。

[解] $\mathbb{V}(x) = \frac{d\varphi_t(x)}{dt}\Big|_{t=0} = Bx + w$

$\mathbb{W}(x) = \frac{d\psi_t}{dt}(x)\Big|_{t=0} = B'x + w'$ とすると,

補題 2.55 より

$$\varphi_t\psi_s = \psi_s\varphi_t \iff [\mathbb{V}, \mathbb{W}] = 0$$

$$\iff (\text{Next})$$