定理 1.29. $\mathcal{H}(\mathbb{q}, \mathbb{p})$ が $(\mathbb{q}, \mathbb{p}) \in \Omega(\mathbb{q}_0, \mathbb{q}_1, \mathbb{p}_0, \mathbb{p}_1; U)$ で極値をとる。

$\Longleftrightarrow$ $(\mathbb{q}, \mathbb{p})$ が

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad (1.39)$$

の解。

[証明] 定理 1.27 と 同様 □

(e) ハミルトニアンとラグラジアンの関係

$L(\mathbb{x}, \mathbb{y})$: ラグラジアン, $q_i = x_i$ とおく。

p_i が q_i の正準共役な座標(一般運動量)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial y_i}$$

仮定 1.31 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ を

$$(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) = \left(x_1, \cdots x_n, \frac{\partial L}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial y_n}\right)$$

に対応させる対応は可微分同相写像である □

$\Phi : U \to V$ が 可微分同相写像

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\begin{cases} \Phi \text{ が微分可能} \\ \text{逆写像 } \Phi^{-1} : V \to U \text{ が存在} \\ \Phi^{-1} \text{ が微分可能} \end{cases}$