「ケプラーの第2法則は角運動量保存の法則を導く」

定義 1.14

$V(q_1, q_2)$ が中心力場のポテンシャル

$\Leftrightarrow$ $^\exists K$: 1変数関数 s.t $V(q_1, q_2) = K(\sqrt{q_1^2 + q_2^2})$ □

定理 1.15 $V(q_1, q_2)$: 中心力場ポテンシャル

$$H = \frac{\|\mathbb{p}\|^2}{2} + V = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V$$

$\Rightarrow$ 角運動量 $A(\mathbb{q}, \mathbb{p})$

は H が定める ハミルトン系の第1積分である □

$\Updownarrow$

tによらずに一定

定義 1.16 $G_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $G_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ のとき,

ポアソン括弧 $\{G_1, G_2\} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\{G_1, G_2\} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial G_1}{\partial q_i} \frac{\partial G_2}{\partial p_i} - \frac{\partial G_1}{\partial p_i} \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \right)$$ □

定理 1.17 $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$(\mathbb{q}(t), \mathbb{p}(t))$: ハミルトニアン H に対する ハミルトン方程式の解

のとき,

$$\frac{dG(\mathbb{q}(t), \mathbb{p}(t))}{dt} = \{G, H\}.$$