$\frac{df}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}\, f = \mathbf{0}$.

$\exists t_0 \in D$ で $\mathrm{grad}\, f(x(t)) \neq \mathbf{0}$ のとき $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0} > 0$

$f(x(t))$ は単調非減少。

よって $f(x(t_0)) > f(x(t_0+T))$ となり

$x(t_0) = x(t_0+T)$ に矛盾。

$\therefore$ $^\forall t \in D$ で $\mathrm{grad}\, f = \mathbf{0} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

$\therefore$ $x(t)$ は定常解。

1.2 $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^2$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$$

の解は次の (1), (2), (3) の場合

周期解、定常解、有界、非有界のどれにあたるか。

[解] $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^2 = C$ とおくと

$\mathrm{grad}\, f = (2x - y^2, -2xy + 2y) = \mathbf{0}$ 解くと,

$\Rightarrow 2x = y^2 \Rightarrow -y^3 + 2y = 0$

$\Rightarrow -y(y^2 - 2) = 0 \Rightarrow y = 0, \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow x = 0, 1$

よって $f(x, y)$ は $(0, 0), (1, \pm\sqrt{2})$ で極値をとる。