※ 添字が1回ずつ, 上下に付いている場合に, 添字について和をとる。

※ 分母の上付き添字は $\left(\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i} の\ i\right)$ は下付きとみなす。

ベクトル場の座標変換の場合

$$\sum_i^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j}^n X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j} 。$$

上下に添字のついた　　$T^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_l}$: テンソル → 一般相対論

・アインシュタインの規約

… 上下の同じ添字について総和をとるとき Σ を省略する。

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l} u_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l} u_{ij}$$

⇒ 上下に同じ添字がついているとき、その添字に対する総和は

座標変換によらない。

$\sum u_i dx^i$ と $\sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ に対して、$\sum u_i X^i$ は不変

微分2形式でアインシュタインの規約を使った例。

$$i_{X^k \frac{\partial}{\partial x^k}}\left(u_{ij}\, dx^i \wedge dx^j \right) = X^i u_{i,k}\, dx^k - X^i u_{k,i}\, dx^k .$$

(P88)

例題 2.23　　$U = V = \mathbb{R}^2$　　$(r, \theta) \in U$, $(x, y) \in V$

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = (x, y)$$

のとき,

V上の 1-形式 $u = f(x,y)dx + g(x,y)dy$

に対して $\Phi^* u$ を計算