$\Phi^* u$: $\Phi: U \to V$ による u の引き戻し (pull back)

$$\Phi^* u \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} f_{i_1 \cdots i_k} \circ \Phi \, d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k}.$$

$f_{i_1 \cdots i_k} \circ \Phi$ は写像の合成。

注意2.22 微分形式の引き戻し Φ^* とベクトル場の座標変換 Φ_* の違い。

(i) Φ_* …… 同じ次元の空間の間の可微分同相写像に対してしか定義できない。

Φ^* …… 次元が一般には異なる2つの空間の間の，任意の可微分写像に対して定まる。

(ii) Φ_* …… U 上のベクトル場を V 上のベクトル場に変換。

Φ^* …… V 上の微分形式を U 上の微分形式に変換。 □

◎ 上付き、下付き添字とアインシュタインの規約

上付き … ベクトル場の係数，座標 $\sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

下付き …… 微分形式の係数 $\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n u_{i_1, \cdots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$

▵ 微分2形式の座標変換の法則の例。

$$\sum_{i,j=1}^n u_{ij} \, dx^i \wedge dx^j = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^n u_{ij} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \right) \wedge \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^l} dy^l \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} u_{ij} \, dy^k \wedge dy^l$$

u_{ij} を係数とする微分形式

$\xrightarrow{\text{座標変換}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} u_{ij}$ を係数とする微分形式.