1.4 $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t)) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = x(t)\frac{dy}{dt} + f(x(t), y(t))$$ とおく.

(1) オイラー・ラグランジュの方程式

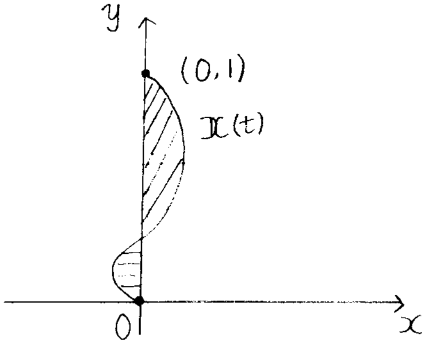
解) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = x$

よって求める方程式は,

$$\left(\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{d}{dt}(0, x) = 0$$

(2) $f(x,y) = 0$ の場合, 図の曲線 $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$ に対して.



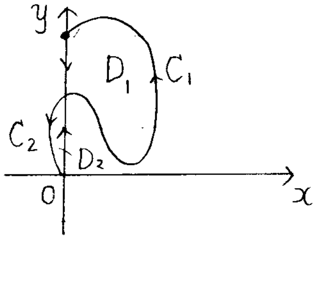
$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \int_0^1 x(t)\frac{dy}{dt}(t)\,dt$$

は図の の面積から の面積を引いたものである。

[証明] t を y で変数変換して,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \int_0^1 x(t)\,dy \quad 。$$

t に y を対応させる写像が1対1でない場合



図のように C_i, D_i $(i = 1,2)$ とすると

$$\int_0^1 x(t)\frac{dy}{dt}\,dt =$$