1径数変換群の定義　　$\ell(s)$の定義

$\ell(0)=\varphi_t(p)$ より $\ell(s)=\psi_s(\varphi_t(p))=\varphi_t(\psi_s(p))$ □

(ii) ⇒ (i)

$$\varphi_t(\psi_s(p))=\psi_s(\varphi_t(p))$$

両辺をsで微分し $\frac{d}{ds}\varphi_t(\psi_s(p))=\frac{d}{ds}\psi_s(\varphi_t(p))$

$$D\varphi_t\left(\frac{d}{ds}\psi_s(p)\right)=$$

$s=0$ $$D\varphi_t\left(\frac{dp}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\varphi_t(p)$$

$$D\varphi_t(\mathbb{W}(p))=\mathbb{W}(\varphi_t(p))$$

両辺に $D\varphi_{-t}$ を掛ける $\mathbb{W}(p)=D\varphi_{-t}\mathbb{W}(\varphi_t(p))$

$$[\mathbb{V},\mathbb{W}]=\lim_{t\to 0}\frac{D\varphi_{-t}\mathbb{W}(\varphi_t(p))-\mathbb{W}}{t}=0$$ □

(e) ユークリッド合同変換群の無限小変換

$\mathbb{R}\to E(3):\ t\mapsto (A(t),v(t))$ で

$$(A(t),v(t))\cdot(A(s),v(s))=(A(t+s),v(t+s))$$

をみたすもの，E(3)の部分群で $\mathbb{R}$ と同型のものについて

- 平行移動 $v\in\mathbb{R}^3$

$$(A(t),v(t))=(I,tv)$$

$$\varphi_t(p)=(I,tv)(p)=p+tv$$

に対応する無限小変換は