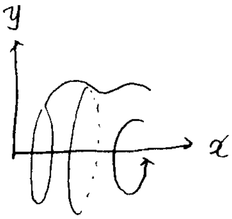
(e) 回転面の測地線

これまでの結果を応用して　回転面の測地線を調べる.

$m : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ ： xy 平面内の曲線

$m(u)$ の y 座標は 正 と　　する.

S： m を x 軸に沿って回転して
得られる曲面



$m(u) = (m_1(u), m_2(u))$

$\varphi : (a,b) \times \mathbb{R} \to S$ ： S の座標

$$\varphi(u,v) = (m_1(u),\ m_2(u)\cos v,\ m_2(u)\sin v) \qquad (3.67)$$

（$\varphi(s, t+2\pi) = \varphi(s,t)$ より, 座標系の定義のうちで単射性がみたされてないが, ここでの考察には差し支えない.）

この場合の (3.61) で リーマン計量は

$$g_{1,1} = \|\dot{m}\|^2 ,\quad g_{1,2} = g_{2,1} = 0 \qquad g_{2,2} = m_2(u)^2 .$$

$q_1 = u,\ q_2 = v$　とおくと　(3.59) より, 共役な運動量は

$$p_1 = \|\dot{m}(q_1)\|^2 \dot{q}_1 ,\qquad p_2 = m_2(v)^2 \dot{q}_2 .$$

(3.60) のハミルトニアンは,

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(\|\dot{m}(q_1)\|^{-2} p_1^2 + m_2(q_2)^{-2} p_2^2\right). \qquad (3.68)$$

これは q_2 を含まないから, p_2 は第1積分。 ☒