。有限次元 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の場合

$$f(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{x+\Delta x}}) = f(x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \times \Delta x_i + \|\Delta x\| g(\Delta x)$$

$$= f(x) + \mathrm{grad}\, f(x) \cdot \Delta x + \|\Delta x\| g(\Delta x)$$

但し g は Δx の近傍で定義された関数

で $\lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta x) = 0$.

(ラング 解析入門 第3版 P469)

合成関数の微分より,

$$\left.\frac{d}{d\delta} f(x+\delta\Delta x)\right|_{\delta=0} = \sum_i \left.\frac{\partial f(x+\delta\Delta x)}{\partial(x_i+\delta\Delta x_i)} \frac{d(x_i+\delta\Delta x_i)}{d\delta}\right|_{\delta=0}$$

$$= \sum_i \left.\frac{\partial f(x+\delta\Delta x)}{\partial(x_i+\delta\Delta x_i)} \Delta x_i\right|_{\delta=0}$$

$$= \left.\mathrm{grad}\, f(x+\delta\Delta x) \cdot \Delta x\right|_{\delta=0}$$

$$= \mathrm{grad}\, f(x) \cdot \Delta x \qquad (1.27)$$

f が x で極大又は極小。

$\Rightarrow$ $f(x+\delta\Delta x)$ は, $\delta = 0$ で極大又は極小。

$\Rightarrow$ $\forall \Delta x \in \mathbb{R}^n$ で, $\mathrm{grad}\, f(x) \cdot \Delta x = 0$

$\Rightarrow$ $\mathrm{grad}\, f(x) = 0$.

x で f が極値をとる。 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{grad}\, f(x) = 0$