[証明] $x=(x^1,\cdots,x^n)\in U$,　$y=(y^1,\cdots,y^n)\in V$

$\Phi(x)=(\varphi^1(x),\cdots,\varphi^n(x))$, $u=f\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$ とする。

$\Phi^*u=f\circ\Phi\, d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n$.　(定義より)

$d\varphi^i=\sum_j \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}dx^j$ で，補題 2.19 より

$$\Phi^*u=f\circ\Phi\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^j}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^1}\\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^i} & \cdots & \frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i} & \cdots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^i}\\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial\varphi^j}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^n}\end{pmatrix} dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \quad (2.19)$$

$$=f\circ\Phi\det D\Phi\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$\Phi$は向きを保つので

$$\det D\Phi=|\det D\Phi|.$$

積分の変数変換公式より，　(小平 P433 定理8.15)

$$\int_U\Phi^*u=\int_U f\circ\Phi|\det D\Phi|dx^1\cdots dx^n$$

$$=\int_V f\,dy^1\cdots dy^n=\int_V u. \qquad \square$$

(b) ベクトル場の微分と微分形式の外微分

定義 2.29　$U$ : $\mathbb{R}^3$の開集合

$$\mathbb{V}=V^x\frac{\partial}{\partial x}+V^y\frac{\partial}{\partial y}+V^z\frac{\partial}{\partial z}$$ : $U$上のベクトル場

$U$上の微分1形式 $\mathbb{V}^*\overset{\text{def}}{=}V^x dx+V^y dy+V^z dz$ 。

0形式 $f$,　1形式 $u=u^1dx+u^2dy+u^3dz$