。 q と p を独立に動かす変分原理について

$H = H(t, q, p)$ ： 時間に依存するハミルトニアン ： 2n+1 変数

道 $(q(t), p(t)) : [0,1] \to \mathbb{R}^{2n}$ に対して

$$\mathcal{H}(q, p) = \int_0^1 \left(p(t) \cdot \dot{q}(t) - H(\underset{1}{t}, \underset{n}{q(t)}, \underset{n}{p(t)}) \right) dt \qquad (1.35)$$ 。

$$\Omega(q_0, q_1) = \{ (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q(0) = q_0, \ q(1) = q_1 \}$$

とおく.

定義 1.26 $\mathcal{H}(q, p)$ が $(q, p) \in \Omega(q_0, q_1)$ で極値をとる

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(\Delta q(t), \Delta p(t))$ ： 任意の変分, $\Delta q(0) = \Delta q(1) = 0$,

に対して

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(q + \delta \Delta q, p + \delta \Delta p) \Big|_{\delta = 0} = 0. \qquad (1.36)$$

定理 1.27 $\mathcal{H}(q, p)$ が $(q, p) \in \Omega(q_0, q_1)$ で極値をとる

$\Longleftrightarrow$ (q, p) が

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad (1.37)$$

の解 。

[証明] (1.36) を示す。

$$\frac{d}{d\delta} \mathcal{H}(q + \delta \Delta q, p + \delta \Delta p) \Big|_{\delta = 0}$$