よって　$g_1(t) = \sqrt{\dfrac{\frac{16H^2}{25}(t+t_0)+\alpha^2}{8H}}$,　$g_2(t) = \alpha t + C$.

(f) 楕円面の測地線 … 回転面以外の曲面の測地流で、完全積分可能な例.
(ヤコビ).

$$\Sigma(\sigma) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a-\sigma} + \frac{y^2}{b-\sigma} + \frac{z^2}{c-\sigma}, \quad a>b>c \right\} \qquad (3.71)$$

とする.

補題3.61　$x, y, z > 0$ に対して (3.71)をみたす $\sigma_i$ で　$a > \sigma_1 > b > \sigma_2 > c > \sigma_3$ なるものが丁度1つずつある。

[証明] (3.71)の左辺 $h(\sigma)$ とおく. $h'(\sigma) > 0$. 関数値 $h(\sigma)$ は $\sigma = a, b, c$ の前後で $+\infty$ から $-\infty$ に変わる。さらに $\lim_{\sigma \to \pm\infty} h(\sigma) = 0$.

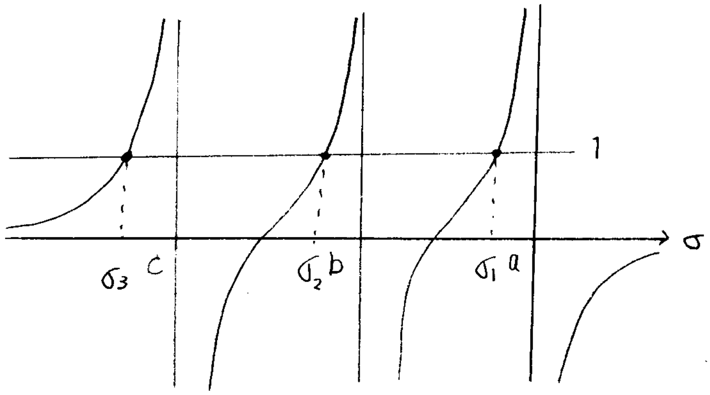


図3.6　$h(\sigma)$ のグラフ

グラフより補題は得られる. ∎

補題3.61 より　$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$ と

$\{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a > \sigma_1 > b > \sigma_2 > c > \sigma_3\}$

の間に可微分同相写像ができる. この逆写像を $(x, y, z) = \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

とおく. $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を楕円座標という.