$(f\cdot g)' = f'g + fg'$

$f\cdot g - \int f'g - \int fg'$

(b) ラグランジュの変分原理

定理 1.23　$x : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \in \Omega(x_0, x_1)$ に対して，次の (i), (ii) は同値

(i)　$x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ はニュートンの運動方程式

$$\frac{d^2 x}{dt} = -\mathrm{grad}\, V \qquad (1.26)$$

をみたす。

(ii)　$x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ で　$\mathcal{L}(x) = \int_0^1 \left(\frac{\|\dot{x}\|^2}{2} - V(x) \right) dt$

が極値をとる。

[証明]　$\Delta x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\Delta x(0) = \Delta x(1) = 0$

$x_\delta(t) = x(t) + \delta \Delta x(t)$　とおく。

$$\frac{d}{d\delta}\mathcal{L}(x_\delta, \dot{x}_\delta) = \frac{d}{d\delta}\int_0^1 \left(\frac{\|\dot{x}_\delta\|^2}{2} - V(x_\delta) \right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{d}{d\delta}\frac{dx_\delta}{dt}\cdot\frac{dx_\delta}{dt} - \frac{dx_\delta}{d\delta}\cdot \mathrm{grad}\, V(x_\delta) \right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{d\Delta x}{dt}\cdot\frac{dx_\delta}{dt} - \Delta x \cdot \mathrm{grad}\, V(x_\delta) \right) dt \qquad (1.29)$$

$\delta = 0$ として　部分積分，　Δx

$$\left.\frac{d}{d\delta}\mathcal{L}(x_\delta, \dot{x}_\delta)\right|_{\delta=0} = \underbrace{\left[\Delta x \cdot \frac{dx_\delta}{dt} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \Delta x \cdot \frac{d^2}{dt^2}x\, dt - \int_0^1 \Delta x \cdot \mathrm{grad}\, V(x)\, dt$$
$$= \int_0^1 \Delta x \cdot \left(-\frac{d^2}{dt^2}x - \mathrm{grad}\, V(x) \right) dt$$

$$\therefore \quad \left.\frac{d}{d\delta}\mathcal{L}(x_\delta, \dot{x}_\delta)\right|_{\delta=0} = 0 \iff \frac{d^2}{dt^2}x = -\mathrm{grad}\, V(x) \qquad \square$$