以上より

定理 1.24　$x \in \Omega(x_0, x_1)$ に対して，次の (i),(ii) は同値．

(i)　$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$ オイラー・ラグランジュ方程式　(1.34)

(ii)　$x \in \Omega(x_0, x_1)$ は $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \int_0^1 L(x, \dot{x})dt$ は極値をとる　□

例題 1.25　ラグランジアン

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + x_1^2 x_2$$

に対する オイラーラグランジュ方程式。

[解]　$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1x_2,\quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1^2,\quad \underset{\partial \dot{x}_1}{\overset{\parallel}{\frac{\partial L}{\partial y_1}}} = \underset{\dot{x}_1}{\overset{\parallel}{y_1}}\quad \underset{\partial \dot{x}_2}{\overset{\parallel}{\frac{\partial L}{\partial y_2}}} = \underset{\dot{x}_2}{\overset{\parallel}{y_2}}$$

$$\left(2x_1x_2,\ x_1^2\right) - \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1, \dot{x}_2\right) = 0$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2x_1x_2,\quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1^2 .$$　□

(d) ハミルトンの変分原理

$q = (q_1, \cdots, q_n)$，　位置

$p = (p_1, \cdots, p_n)$．　運動量

$\{(q, p) \mid q \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n\}$ ：相空間

$\{q = (q_1, \cdots, q_n) \mid q_i \in \mathbb{R}\}$：配位空間．