(2) $L(t)$, $B(t)$ が (＊) の解。

$\boldsymbol{v}$: $L(0)$の固有値 λ に関する固有ベクトルで

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = B(t)\boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v} \end{cases}$$ を満たす。

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}(t)$ は $L(t)$ の固有値に関する固有ベクトル

証) $$\frac{d}{dt}\big(L(t)\boldsymbol{v}(t)\big) = \frac{dL(t)}{dt}\boldsymbol{v}(t) + L(t)\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}$$

$$= \big(B(t)L(t) - L(t)B(t)\big)\boldsymbol{v}(t) + L(t)B(t)\boldsymbol{v}(t)$$

$$= B(t)L(t)\boldsymbol{v}(t)$$

$\therefore$ $\boldsymbol{w}(t) = L(t)\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{w}(t) = B\boldsymbol{w}(t)$$ の解。 ◁

また $\boldsymbol{w}(0) = L(0)\boldsymbol{v}(0) = \lambda\boldsymbol{v}$ (固有値と固有ベクトルの定義)

$\therefore$ $\boldsymbol{w}(t) = \lambda\boldsymbol{v}(t)$ (常微分方程式の解と一意性)

$\therefore$ $\boldsymbol{v}(t)$ は $L(t)$ の固有値 λ に関する固有ベクトル

(3) $$\det(TE - L(t)) = T^3 + J_1(t)T^2 + J_2(t)T + J_3(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dJ_i(t)}{dt} = 0$$

証) 固有値を λ_1, λ_2, λ_3 とすると

$$\det(TE - L(t)) = (T-\lambda_1)(T-\lambda_2)(T-\lambda_3)$$

解と係数の関係より $J_1(t) = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$