このときラグランジアンは、

$$L(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}{4} - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2 \text{。}$$

このとき オイラー・ラグランジュ方程式 は、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \varsigma^1} - \dfrac{\partial L}{\partial y^1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \varsigma^2} - \dfrac{\partial L}{\partial y^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 y_2}{dt^2} + 3y_2 = 0 \end{cases}$$

これを解いて、

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 \cos\sqrt{2}\,t + C_2 \sin\sqrt{2}\,t \\ y_2(t) = C_3 \cos\sqrt{6}\,t + C_4 \sin\sqrt{6}\,t \end{cases} .$$

例題 2.8　中心力場の運動のラグランジアン

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - K(\sqrt{x^2+y^2})$$

を 極座標に変換。

[解]　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta} , \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{2} - K(r) .$$

□

(e) ベクトル場の微分と座標変換

$\mathbb{W} = W^u \dfrac{\partial}{\partial u} + W^v \dfrac{\partial}{\partial v}$ ： $\mathbb{R}^2$の開集合U上のベクトル場

$\Phi : U \to V$ ： 可微分同相写像