$\Rightarrow$ (ii) $\forall x' \in \Omega(x_0, x_1)$,　$t = i(s)$　$\tilde{x}'(s) = x'(t(s))$　とする.

$\tilde{x}'(s) : I \to \mathbb{R}^3$　$\tilde{x}'(0) = x_0$,　$\tilde{x}'(1) = x_1$

よって　$\tilde{x}'(s) \in \Omega(x_0, x_1)$.

$$\mathcal{L}(x', \dot{x}') \underset{(3.55)}{=} \mathcal{L}(\tilde{x}', \dot{\tilde{x}}') \underset{\text{補題}3.55}{=} \sqrt{2\mathcal{E}(\tilde{x}', \dot{\tilde{x}}')}$$

$$\geqq \sqrt{2\mathcal{E}(x, \dot{x})} \geqq \mathcal{L}(x, \dot{x}). \qquad (3.56)$$

よって　x で $\mathcal{L}$ は最小値をとる。
さらに　$x' = x$ に対して, (3.56) を当てはめると, 等号が成立する。よって補題 3.55 より. $L(x, \dot{x})$ は定数.

(ii) を仮定する。　$\forall x' \in \Omega(x_0, x_1)$ に対して, 補題 3.56 の変数変換
$t = t(s)$,　$\tilde{x}'(s) = x'(t(s))$ を考える. すなわち $L(\tilde{x}', \dot{\tilde{x}}')$ は定数 (補題 3.56).
すると, 補題 3.56 と (3.55) より

$$\sqrt{2\mathcal{E}(x', \dot{x}')} \geqq \mathcal{L}(x', \dot{x}') \geqq \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \sqrt{2\mathcal{E}(x, \dot{x})}$$

よって (i) が成り立つ。　■

以上で, 長さを　(～ read aloud ～)　最小にする曲線を求めよう。

定義 3.58　$l(t) = \varphi(x(t))$ が測地線であるとは, (3.53) が x で 定義 1.21 の意味で極値をとることを指す。

(c) 測地線を表すハミルトン方程式

(3.53) で与え ～ (read aloud) ～ 測地線を表わすハミルトン方程式を求めよう.

まず　$q^i = x^i$　とおく. q^i と共役な運動量は

$$p_i = \frac{\partial E}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{2} g_{ij}(q^1, q^2) y^j \qquad (3.59)$$