(d) 2自由度完全積分可能系

定理 3.47 ～ read aloud ～ ある特殊なハミルトン系 $H = \dfrac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \left(\dfrac{c}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \dfrac{\delta}{x_1^2 + x_2^2} \right)$.

～ これを述べよう。

定義 3.51 $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$: $\mathbb{R}^4$ 上のハミルトニアン

で定まるハミルトン系が完全積分可能系

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists G$: ハミルトン系の第1積分 s.t. $^\forall(q, p)$ で $\mathrm{grad}\, G$ と $\mathrm{grad}\, H$ が1次独立 □

中心力場の場合 $H = \dfrac{p^2}{2} + K(r)$ $r = |q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$

角運動量 $A(q, p) = q \times p$ (p.19)

$= q_1 p_2 - q_2 p_1$

$$\mathrm{grad}\, H = \left(\frac{\partial K}{\partial r} \frac{q_1}{r},\ \frac{\partial K}{\partial r} \frac{q_2}{r},\ p_1,\ p_2 \right)$$

$$\mathrm{grad}\, A = \left(p_2,\ -p_1,\ -q_2,\ q_1 \right)$$

1次独立

原点外で、
座標成分が交換してある.

～ この場合 ～ read aloud ～ ということもある.

定理 3.52 $H(q, p)$ で定まるハミルトン系が、$^\exists G$: $\{H, G\} = 0$ をもち

完全積分可能.

$\Sigma(H_0, G_0) = \{ (q, p) \in \mathbb{R}^4 \mid H(q, p) = H_0,\ G(q, p) = G_0 \}$

: コンパクト, 弧状連結

のとき,

(i) $\Sigma(H_0, G_0)$ はトーラス.