

補題 3.12

$$\begin{cases} Q(q, p) = q \\ P(q, p) = p + v(q) \end{cases} \quad (3.10) \quad \text{が正準変換}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial v^i}{\partial q^j} = \frac{\partial v^j}{\partial q^i}$$

[証明]

$$\begin{aligned} \Phi^* \sum_i dp^i \wedge dq^i &= \sum_i \left(dp^i + \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial q^j} dq^j \right) \wedge dq^i \\ &= \sum_i dp^i \wedge dq^i + \sum_{i,j} \frac{\partial v^i}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i \\ &= \sum_i dp^i \wedge dq^i + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^j} - \frac{\partial v^j}{\partial q^i} \right) dq^j \wedge dq^i \end{aligned}$$

定理 3.13

$$\begin{cases} Q(q, p) = Q \\ P(q, p) = {}^t DQ(q)^{-1} p + v(q) \end{cases} \quad (3.6) \quad \text{が正準変換}$$

\Leftrightarrow (3.6) は,

$$\begin{cases} Q'(q, p) = Q'(q) \\ P'(q, p) = {}^t DQ'(q)^{-1} p \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} Q(Q', P) = Q' \\ P(Q', P) = P + V(Q') \end{cases} \quad \frac{\partial V^i}{\partial Q'^j} = \frac{\partial V^j}{\partial Q'^i}$$

の合成。

第1章では, q は物体の位置, p は速度 又は 運動量。

定理 3.13 は \sim (read the rest aloud).

(c) 正準変換の作り方 (2) ... 生成関数

(read the first aloud) \sim 用いる方法である。

$$\Phi: \underbrace{U}_{\mathbb{R}^{2n}} \rightarrow \underbrace{V}_{\mathbb{R}^{2n}} : \Phi(q, p) = (Q, P)$$