[証明] $\Phi_t(\mathbb{q},\mathbb{p}) = (\mathbb{Q}(\mathbb{q},t), \mathbb{P}(\mathbb{q},\mathbb{p},t))$ とおく.

一般に行列値関数 A について $\quad \dfrac{\partial A^{-1}}{\partial x} = -A^{-1}\dfrac{\partial A}{\partial x}A^{-1}$.

(3.7) の第2式を t で微分

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = -({}^tD\mathbb{Q}^{-1})^{-1}\frac{d({}^tD\mathbb{Q}^{-1})}{dt}({}^tD\mathbb{Q}^{-1})^{-1}\mathbb{p}$$

$t=0$ とおいて成分で表すと, $\quad \mathbb{Q}(\mathbb{q},0) = \varphi_t(\mathbb{q}) = \mathbb{q}$ より

$${}^t(D\mathbb{Q}^{-1})^{-1} = I.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}(\mathbb{q},\mathbb{p},t) = \frac{\partial}{\partial q^j}\underbrace{\frac{dQ^i(\mathbb{q},\mathbb{p},t)}{dt}}_{\varphi_t(\mathbb{q})} = \frac{\partial V^i}{\partial q^j}$$

ゆえ, $\quad \left.\dfrac{dP^i}{dt}\right|_{t=0} = -\sum_j \dfrac{\partial V^j}{\partial q^i} p_j$

一方, $\quad \left.\dfrac{dQ^i}{dt}\right|_{t=0} = V^i \qquad$ (補題 2.52)

よって $\quad \mathbb{V} = \sum_i V^i\dfrac{\partial}{\partial q^i} - \sum_{i,j}\dfrac{\partial V^j}{\partial q^i}(\mathbb{q})\dfrac{\partial}{\partial p_i} \qquad (3.40) \quad$ ■

(3.40) のベクトル場 (read aloud) が得られる.

補題 3.44 $\quad \mathbb{V}, \quad G(\mathbb{q},\mathbb{p}) = \mathbb{V}(\mathbb{q})\cdot\mathbb{p}$ に対して

$$X_G = -\sum_i V^i(\mathbb{q})\frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i,j}\frac{\partial V^j}{\partial q^i}(\mathbb{q})\, p_j\frac{\partial}{\partial p_i}. \qquad \square$$

[証明] 計算による. ■

定理 3.41 (read aloud) 示された.