こ ハミルトン系と微分形式

§3.1 正準変換

(a) 正準変換

$(q^1, \cdots, q^n, p^1, \cdots, p^n) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$H(q^1, \cdots, q^n, p^1, \cdots, p^n)$: $2n$ 変数関数

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p^i} \\ \dfrac{dp^i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (1.37)$$

: H をハミルトニアンとするハミルトン方程式

のとき,

ハミルトン・ベクトル場 $\quad \mathbb{X}_H \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \dfrac{\partial}{\partial p^i} - \dfrac{\partial H}{\partial p^i} \dfrac{\partial}{\partial q^i} \right) \qquad (3.1)$

□

U, V : $\mathbb{R}^{2n}$ の領域

$\Phi : U \to V$: 可微分同相写像

$$: \underset{\underset{(\mathbb{q},\ \mathbb{p})}{\parallel}}{(q^1, \cdots, q^n, p^1, \cdots, p^n)} \mapsto \Phi(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \underset{\underset{(\mathbb{Q},\ \mathbb{P})}{\parallel}}{(Q^1, \cdots, Q^n, P^1, \cdots, P^n)} .$$

$H(\mathbb{Q}, \mathbb{P})$: $V \to \mathbb{R}$

のとき,

$H(\mathbb{q}, \mathbb{p}) \overset{\text{def}}{=} H \circ \Phi = H(\Phi(\mathbb{q}, \mathbb{p}))$: $U \to V \to \mathbb{R}$

□