(iii) スカラー倍.

$$i_{fX}(u) = i_X(fu) = f\,i_X(u) .\qquad \square$$

例題 3.4

$$i_{\left(x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^3}\right)}(dx^1\wedge dx^2 + dx^2\wedge dx^3)$$ を計算せよ。

[解]

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= x^1 i_{\frac{\partial}{\partial x^1}}(dx^1\wedge dx^2 + dx^2\wedge dx^3) \\ &\quad + i_{\frac{\partial}{\partial x^3}}(dx^1\wedge dx^2 + dx^2\wedge dx^3) \\ &= x^1 dx^2 + 0 + 0 - dx^2 \\ &= (x^1 - 1)dx^2 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

補題 3.5 X : ベクトル場, u : k形式 , v : ℓ形式 のとき,

$$i_X(u\wedge v) = i_X(u)\wedge i_X(v) + (-1)^k u\wedge i_X(v)$$

[証明] $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $u = dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$, $v = dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}$ とする。

(i) $i_m \neq j$, $j_n \neq j$ のとき,

$$i_X(u\wedge v) = 0 ,$$

$$i_X(u)\wedge v + (-1)^k u\wedge i_X(v) = 0 .$$

(ii) $i_m = j$, $j_n \neq j$ のとき

$$\begin{aligned}i_X(u\wedge v) &= (-1)^{m-1} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{m-1}}\wedge dx^{i_{m+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell} \\ &= i_X(u)\wedge v + 0 \\ &= i_X(u)\wedge v + (-1)^k u\wedge i_X(v) .\end{aligned}$$