$$= \sum_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial p^i}\frac{\partial}{\partial p^j} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p^j \partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^j}\right)$$

$$- \sum_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^j} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p^i \partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^j}\right)$$

$$- (f \Leftrightarrow g) \qquad (3.38)$$

(3.37) と (3.38) は一致する。

補題 3.38　$H: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

φ_H^t : X_H で生成される1経数変換群

φ_G^t : X_G で生成される1経数変換群　　のとき

(i) $\{H, G\} =$ 定数 $\Leftrightarrow$ (ii) $\varphi_H^t \circ \varphi_G^s = \varphi_G^s \circ \varphi_H^t$

[証明]　(i) $\Rightarrow X_{\{H,G\}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 3.37}}}{=} [X_H, X_G] = 0$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 2.55}}}{\Rightarrow}$ (ii)　Δ

(ii) $\Rightarrow [X_H, X_G] = X_{\{H,G\}} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q^j}\{H, G\} = 0$, $\frac{\partial}{\partial p^j}\{H, G\} = 0$

$\Rightarrow$ (i)　(教科書にはウソが述べてある。
アーノルド 古典力学の数学的方法
P210 系9)

補題 3.39 (ヤコビの恒等式)

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \qquad \square$$

[証明] 次ページ