$\{(x,y)\in L \mid \|(x,y)-(q,p)\| < \varepsilon\}$ が滑らかな閉曲線。」

$$\mathrm{grad}\, H_\varepsilon = \left(q + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial q},\ p + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial p}\right) \neq 0$$

∵ $\mathrm{grad}\, H_\varepsilon = 0$ とすると, H_ε = 定数 となるが
H_ε は実際には、$H_\varepsilon = \dfrac{q^2+p^2}{2} + \varepsilon g(p,q)$
と定義されているので矛盾。

$\Rightarrow$ L_ε 上 $H_\varepsilon = \dfrac{q^2+p^2}{2} + \varepsilon g(p,q)$ に対するハミルトンベクトル場は 0 ではない。

$\Rightarrow$ 解 $(q(t), p(t))$ は閉曲線 L_ε 上を進み止まることはない。

$\Rightarrow$ $\exists T_0 > 0$ で, $(q(T_0), p(T_0))$ は (q_0, p_0) に戻ってくる。

$\Rightarrow$ この T_0 に対して, $q(t+T_0) = q(t)$, $p(t+T_0) = p(t)$ 。

$\Rightarrow$ $(q(t), p(t))$ は周期解。 □

§1.3 2次元空間上の運動

(a) 平面上の運動

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$: 物体の位置

運動方程式
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F_1 \\[2mm] \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = F_2 \end{cases} \qquad (1.14)$$

「力 (F_1, F_2) は (x_1, x_2) だけにより決まる」とする。

「$\exists V$: ポテンシャル s.t. $(F_1, F_2) = -\mathrm{grad}\, V$
$$= -\left(\frac{dV}{dx_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}\right)$$