$$(A, w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto (A, w)\cdot v \overset{\text{def}}{=} Av + w \qquad (2.28)$$

は　E(3)の $\mathbb{R}^3$ への作用

∵ (i) $((A_1, w_1)\cdot(A_2, w_2))\cdot v$

$= (A_1A_2, w_1 + A_1w_2)\cdot v = A_1A_2v + w_1 + A_1w_2$

$= (A_1, w_1)\cdot(A_2v + w_2) = (A_1, w_1)\cdot((A_2, w_2)\cdot v)$

(ii) $(I, 0)\cdot v = Iv + 0 = v.$ □

定理 2.49　合同変換（$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の写像で長さを保つもの）

全体のなす群は，E(3)と一致する。

[証明]　$0 = (0, 0, 0)$，$e_1 = (1, 0, 0)$，$e_2 = (0, 1, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1)$　とする。

$0' = f(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$e_i' = f(e_i) = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3})$

$e_i' - 0' = f_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3})$　とする。

三平方の定理より　$i \neq j$ ならば，

$|e_ie_j|^2 = |0e_i|^2 + |0e_j|^2 = 2$　（∵ $e_i \perp e_j$）

fは合同変換だから，

$|e_i'e_j'|^2 = |0'e_i'|^2 + |0'e_j'|^2$。

$|f_if_j|^2 = |f_i|^2 + |f_j|^2$

∴　$f_i \perp f_j$