

例 2.43 φ_t が写像であるためには、微分方程式の解の存在と一意性が 必要である。

(2.25) の解は, $\forall t \in {}^{\neq} \cup (0, \delta)$ で存在するが
 $\forall t \in \mathbb{R}$ で存在するかどうかはわからない。 \square

ベクトル場が **完備** (complete)

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (2.25) の解が 任意の初期条件に対し
 $t \in \mathbb{R}$ 全体で存在する。 \square

以後 ベクトル場の完備性を必要に応じて仮定する。 \square

問 13 \mathbb{R} 上のベクトル場 $e^x \frac{\partial}{\partial x}$ は完備でない。

証)

$$\frac{dx}{dt} = e^x$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{e^x} = \int dt$$

$$\Rightarrow t = -e^{-x} + c \Rightarrow c - t = e^{-x}$$

$$\Rightarrow x = -\log(c - t)$$

$\therefore t < c$ \therefore 完備でない。

(b) 1 変数変換群の性質

補題 2.44

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_s(\varphi_t(p))$$

証明) $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \begin{cases} \frac{d\ell}{dt} = V(\ell(t)) \\ \ell(0) = p \end{cases}$ の解 とする。