条件 3.14　$(q, Q) : U \to \mathbb{R}^{2n} : (q, p) \mapsto (q, Q(q, p))$

は可微分同相である。　$\square$

この条件をみたす正準変換 $\Phi : U \to V$ を求める。

$$\Phi^*\Omega = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i dp^i \wedge dq^i = \sum_i dP^i \wedge dQ^i \qquad (3.11)$$
（以下 Φ^* を省略）

$$\Leftrightarrow \quad d\sum_i (p^i dq^i - P^i dQ^i) = 0 \qquad (3.12)$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^\exists S : \text{0形式} : U \to \mathbb{R}$$

U：単連結と仮定して
定理 2.31

$$\text{s.t} \quad dS = \sum_i (p^i dq^i - P^i dQ^i) \qquad (3.13) \quad \Delta$$

条件 3.14 より　U と $(q, Q)(U)$ を同一視して，　$(q, Q) \in U$ とする。

$$\Rightarrow \quad dS = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S}{\partial Q^i} dQ^i \right) \quad \Delta$$

$$(3.13) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial q^i} = p^i \ , \quad \frac{\partial S}{\partial Q^i} = -P^i \qquad (3.14) \quad \Delta$$

注意 3.15　(3.14) $\dfrac{\partial S}{\partial q^i}$ は　p^j と q^j $(j \neq i)$ をとめて，S を q^i で偏微分したものではなく，

$\underbrace{Q^j \text{ と } q^j \ (j \neq i) \text{ をとめて}}$ S を q^i で偏微分したもの。

座標のとり方に依存．（(3.14) を導くとき，S の変数について言及した。）

(3.13) は座標のとり方に依存しない．（U 上の 0 形式としただけ）．　$\square$

定理 3.16　$\Phi : U \to V$ が，条件 3.14 をみたす正準変換

$$\Leftrightarrow \quad {}^\exists S : U \to \mathbb{R} \quad \text{s.t} \quad (3.13) \text{ or } (3.14) \qquad \square$$

定義 3.17　$S : U \to \mathbb{R}$ が 正準変換 Φ の 生成関数（or 母関数）

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (3.13) \text{ or } (3.14)$$