問題3.1

$$\Phi_* \mathbb{X}_{H(q,p)} = \mathbb{X}_{H(Q,P)} \qquad (3.2)$$

となる十分条件は？ □

問1　(3.2)を成分で表せ。

[解]

$$(\text{左辺}) = \Phi_* \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} - \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right)$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial Q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} - \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial Q^i} \right)$$

(巻末解答では Φ_* は省略してある。P43参照) ■

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i \quad : \ U\text{上の2形式}$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dQ^i \quad : \ V\text{上の2形式} \qquad (\text{シンプレティック形式})$$

定理3.2

$$\Phi^* \Omega = \omega \quad \Rightarrow \quad (3.2)\text{が成立する.}$$ □

以下，定理3.2の証明をこの項の目的とする。

計算規則3.3　内部積　$i_{\mathbb{X}} u$の定義

(i) $\mathbb{X} = \frac{\partial}{\partial x^j}$，$u = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$のとき.

$$i_{\mathbb{X}} u = \begin{cases} (-1)^{m-1} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{m-1}} \wedge dx^{i_{m+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} & (j = i_m). \\ 0 & (\forall m,\ j \neq i_m). \end{cases}$$

(ii) 分配法則

$$i_{\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2}(u) = i_{\mathbb{X}_1}(u) + i_{\mathbb{X}_2}(u).$$

$$i_{\mathbb{X}}(u_1 + u_2) = i_{\mathbb{X}}(u_1) + i_{\mathbb{X}}(u_2).$$