§ 1.4 変分原理

(a) 道の空間上での極大極小

質点の運動 $x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $V(x)$: ポテンシャル

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}(t) \qquad \text{とする。}$$

$x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ に対する ラグラジアン (Lagrangian)

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \left(\frac{\|\dot{x}(t)\|^2}{2} - V(x(t)) \right) dt \qquad (1.25) \text{。}$$

ニュートンの運動方程式 $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{grad}\, V \qquad (1.26) \text{。}$$

変分原理 (variational principle)

「 $x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ が (1.26) を満たす

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ が $x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ で極値をとる 」

。〜〜部分の説明

$$\Omega(x_0, x_1) = \{ \ell : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \mid \ell(0) = x_0,\ \ell_1 = x_1,$$
$$\ell \text{ は無限回微分可能} \}$$

とおくと

$$\mathcal{L} : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad \text{。}$$

注意 1.20 汎関数… 無限次元空間 ($\Omega(x_0, x_1)$) 上の関数のこと

$$\mathbb{R}^n = \{ f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \mathbb{R} \} \quad : \text{有限次元}$$
$$= \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$$