(d) 変分原理 と 正準変換

(read the first aloud)～ を考える。

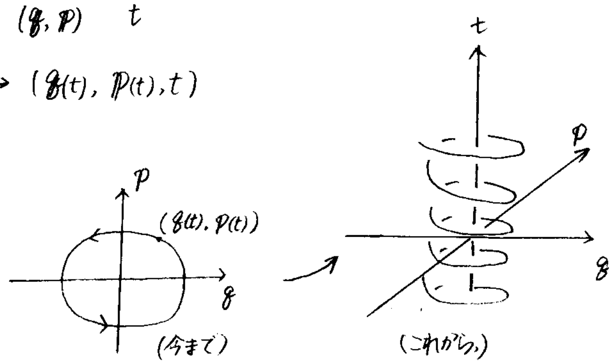
$H(q,p,t)$: 時間に依存するハミルトニアン。

$\mathcal{H}(q(t),p(t)) = \int_0^1 \left(p(t)\cdot\dot{q}(t) - H(t,q(t),p(t))\right)dt$: ハミルトンの汎関数。

$\theta_{H(q,p,t)} = \sum_i p^i dq^i - H(q,p,t)dt$: $\underset{\substack{\cup \\ (q,p)}}{U} \times \underset{\substack{\cup \\ t}}{[0,1]}$ 上の1形式

$l : [0,1] \to \mathbb{R}^{2n+1}$: $t \mapsto (q(t),p(t),t)$

$\Omega(0,1;U) = \{(q(t),p(t)) : [0,1] \to U : C^\infty 級\}$



補題3.18 $\int l^*\theta_{H(q,p,t)} = \mathcal{H}(q(t),p(t))$.

[証明] (左辺) $= \sum_i \int p^i(t)\, l^* dq^i - \int H(q,p,t)dt$

$= \int_0^1 \left(p(t)\cdot\dot{q}(t) - H(q,p,t)\right)dt$

$= \mathcal{H}(q(t),p(t))$. ■

ハミルトン方程式の～(read the part aloud)～ 不変性が使える。

$\tilde{\Phi}(q,p,t) = (Q(q,p,t),P(q,p,t),t)$: $\Phi_t(q,p) = (Q(q,p,t),P(q,p,t))$ なる、
時間tに依存する写像の族

$H'(Q,P,t) : V\times[0,1] \to \mathbb{R}$

$\mathcal{H}_H(q(t),p(t)) = \int_0^1 (p\cdot\dot{q} - H)dt$, $\mathcal{H}_{H'}(Q(t),P(t)) = \int_0^1 (P\cdot\dot{Q} - H')dt$ とする。

$\tilde{\Phi}(q(t),p(t),t) = (Q(t),P(t),t)$ のとき、$\mathcal{H}_H(q(t),p(t))$ と $\mathcal{H}_{H'}(Q(t),P(t))$ を比較。