(C) 群とその作用

定義　集合Gが群

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x, \forall y \in G, \quad x * y \in G \\ \text{(ii)} & \forall x, \forall y, \forall z \in G, \quad (x*y)*z = x*(y*z) \\ \text{(iii)} & \exists e \in G, \quad \forall x \in G \quad e*x = x*e = x \\ \text{(iv)} & \forall x \in G, \exists x^{-1} \in G \quad x*x^{-1} = x^{-1}*x = e \end{cases}$$
□

定義2.46　$f: G \to X$: a map : $g \to f(g) = gP$

: 群Gの空間Xへの作用

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $g_1, g_2, e \in G, \quad p \in X$

$$\begin{cases} \text{(i)} & (g_1 g_2)p = g_1(g_2 p) \\ \text{(ii)} & ep = p \end{cases}$$
□

例 2.47　$O(3) = \{ A \in M(n, \mathbb{F}) \mid A{}^tA = {}^tAA = I \}$

は行列の積で群。

[証明] (i) $A, B \in O(3) \Rightarrow (AB){}^t(AB) = AB{}^tB{}^tA = I$

$\Rightarrow AB \in O(3)$

(ii) 行列の積だから

(iii) Iが単位元

(iv) 逆行列が逆元。$A \in O(3) \Rightarrow {}^tAA = E$

$\Rightarrow {}^tA = A^{-1}$

$\Rightarrow {}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA){}^tA = A{}^tA = E \quad \therefore A^{-1} \in O(3)$ □