定理 3.49　$\forall z_1, \forall z_2 \in S^1$ に対して　$\exists \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$　s.t　$\lim_{i\to\infty} \varphi_\rho^{n_i}(z_1) = z_2$

i.e　$\forall \varepsilon > 0$,　$\forall i > \exists i_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_\rho^{n_i}(z_1) - z_2| < \varepsilon$

[証明]　背理法による.

$\exists z_1, \exists z_2 \in S^1$に対しては　$\forall \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ についても　$\lim_{i\to\infty} \varphi_\rho^{n_i}(z_1) \neq z_2$

i.e　$\exists \varepsilon_{12} > 0$,　$\exists i > \forall i_{\varepsilon_{12}}$　s.t　$|\varphi_\rho^{n_i}(z_1) - z_2| \geqq \varepsilon_{12} > 0$

$$\varepsilon = \inf\{\, |\varphi_\rho^{n}(z_1) - z_2| \mid n \in \mathbb{Z} \} \qquad (3.47)$$

とおく。　$\varepsilon \geqq \varepsilon_{12} > 0$　よって　$\varepsilon \geqq 0$

$I = \{ z \in S^1 \mid |z - z_2| < \varepsilon \}$　とする.　　ΔΔ

補題 3.50　$\forall n \neq \forall m$　に対して.　$\varphi_\rho^n(I) \cap \varphi_\rho^m = \phi$.

[証明]　背理法による.　$\exists n \neq \exists m$　$\varphi_\rho^n(I) \cap \varphi_\rho^m(I) \neq \phi$　$m > n$

とする.　$m - n = r$ とすると,

$$I \cap \varphi_\rho^r(I) = \varphi_\rho^{-n}(\varphi_\rho^n(I)) \cap \varphi_\rho^{-n}(\varphi_\rho^m(I)) \supset \varphi_\rho^{-n}(\varphi_\rho^n(I) \cap \varphi_\rho^m(I))$$

$$\neq \varphi_\rho^{-n}(\phi) = \phi$$

$\therefore$　$I \cap \varphi_\rho^r(I) \neq \phi$.