$w = \sum_i dp^i \wedge dq^i$ とおくと，

φ^tによって座標系は変わっていない．
直交座標が極座標になったりということはない。

$$\varphi_t \text{が正準変換である} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi_t^* w = w \quad (3.32)$$

◦ (3.32) の必要十分条件を求める。

(3.22) $\Leftrightarrow$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi_\varepsilon^* w - w}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^n d\varphi_\varepsilon^{i+n} \wedge d\varphi_\varepsilon^i - w}{\varepsilon}$$

とりあえず認めて $\longrightarrow$

$$= \left(\sum_{i=1}^n d\frac{\partial \varphi_\varepsilon^{i+n}}{\partial \varepsilon} \wedge d\varphi_\varepsilon^i + \sum_{i=1}^n d\varphi^{i+n} \wedge d\frac{\partial \varphi_\varepsilon^i}{\partial \varepsilon} \right) \Bigg|_{\varepsilon=0}$$

1径数変換群 $\longrightarrow$

$$= \sum_{i=1}^n dV^{i+n} \wedge dq^i + \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dV^i$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V^{i+n}}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial V^{i+n}}{\partial p^j} dp^j \right) \wedge dq^i$$

$$+ \sum_{i=1}^n dp^i \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial V^i}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial V^i}{\partial p^j} dp^j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial V^{i+n}}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial V^{i+n}}{\partial p^j} dp^j \wedge dq^i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial V^i}{\partial q^j} dp^i \wedge dq^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial V^i}{\partial p^j} dp^i \wedge dp^j$$

$$= \sum_{i<j}^n \left(\frac{\partial V^{i+n}}{\partial q^j} - \frac{\partial V^{j+n}}{\partial q^i} \right) dq^j \wedge dq^i - \sum_{i<j} \left(\frac{\partial V^i}{\partial p^j} - \frac{\partial V^j}{\partial p^i} \right) dp^j \wedge dp^i$$

$$+ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial V^{j+n}}{\partial p^i} + \frac{\partial V^i}{\partial q^j} \right) dp^i \wedge dq^j \quad (3.33)$$

△

$$i_J(\mathbb{V}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n V^i dp^i - V^{i+n} dq^i$$ とする。

定義 3.28

$$J(\mathbb{V}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial p^i} - \sum_{i=1}^n V^{i+n} \frac{\partial}{\partial q^i}$$

□

(3.33) と定義より $\displaystyle \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi_\varepsilon^* w - w}{\varepsilon} = -d\, i_J(\mathbb{V})$. (3.34)

△