2.1 1径数変換群と無限小変換

1) ベクトル場の1径数変換群

$\mathbb{V} = \sum_i V^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 　$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場

$$\begin{cases} \dfrac{d\ell}{dt}(t) = \mathbb{V}(\ell(t)) \\ \ell(0) = \mathbb{p} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (2.25)$$

$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$: $\ell(0) = p$ となる $\mathbb{V}$ の積分曲線

このとき

$$\varphi_t(p) = \ell(t) \qquad (2.26)$$

$$\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad p \mapsto \varphi_t(p) = \ell(t)$$

「ベクトル場」$\mathbb{V}$ が生成する1径数変換群

例 2.42　$A = (a_{ij}) \in GL(n ; \mathbb{R})$　　$\mathbb{V}_A(x) = Ax$

$$\mathbb{V}_A = \sum_i V_A^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad V_A^i(x) = \sum_j a_{ij} x^j$$

とする。このとき (2.25) は

$X' = AX(t)$, 　$X(0) = \cdots$

$$\begin{cases} \dfrac{d\ell^i}{dt}(t) = \sum_j a_{ij} \ell^j(t) \\ \ell^i(0) = p^i \end{cases} \qquad \square$$

「[illegible]」

「力学と微分方程式」 P68

この解は, 　$x(t) = \exp(tA)\mathbb{p}$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right) \mathbb{p}$$

よって　$\varphi_t(p) = \exp(tA)\mathbb{p}$ 　$\square$