問7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ : \ (s,t) \to f(s,t)$

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \ : \ (s,t) \to \Phi(s,t) = (x, y, \xi, \eta)$$
$$= \left(s, t, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

のとき

$$\Phi^*(\xi dx + \eta dy)$$

解) $\Phi^*(\xi dx + \eta dy) = \dfrac{\partial f}{\partial s} ds + \dfrac{\partial f}{\partial t} dt = df$.

(e) 微分形式の概念の座標不変性

$x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ のとき

$x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^i$ (射影)

$$\left.\begin{array}{ll} dx^i & \cdots\cdots \text{形式的な記号 (定義 2.9)} \\ & \cdots\cdots \text{関数 } x^i \text{ の外微分} \end{array}\right\} \text{意味の一致}$$

$$dx^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} dx^i \qquad (\text{定義 } 2.12) \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

◦実際的意味

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (x, y) & \longrightarrow & (u, v) = (x, x+y) \end{array} \quad \text{のとき}$$

$$du = dx \qquad (2.18)$$

一方 $\dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial x}$ (?) について