作用の定義 ↓　　群 ℝ だから $\mathbb{V}$ は完備

$\ell(t) = \psi_t(p)$ は p を通るベクトル場の積分曲線

積分曲線の一意性，φ_t の定義より

$$\psi_t(p) = \varphi_t(p) .$$

(d) 括弧積

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$: ベクトル場

φ_t, ψ_t : $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ が生成する1径数変換群　　とする。

$\mathbb{V}$ と $\mathbb{W}$ の間の括弧積

$$[\mathbb{V}, \mathbb{W}] \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\varphi_{-\varepsilon})_*(\mathbb{W}) - \mathbb{W}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{D\varphi_{-\varepsilon}\mathbb{W}(\varphi_\varepsilon(\mathbb{p})) - \mathbb{W}}{\varepsilon} \quad . (2.29) 。\square$$

$\mathbb{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$\mathbb{W} = \sum W^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ とする。

$\varphi_t(\mathbb{p}) = \ell(t)$，$\ell(0) = \mathbb{p}$　　$\frac{d\ell}{dt}(t) = \mathbb{V}(\ell(t))$: φ_t の定義

より

$$\frac{d\ell(t)}{dt} = \mathbb{V}(\ell(t))$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ell(t+\varepsilon) - \ell(t)}{\varepsilon} = \mathbb{V}(\ell(t))$$

$$\Rightarrow {}^\forall E > 0, {}^\exists \Delta(E), \quad |\varepsilon| < \Delta(E) \Rightarrow \left| \frac{\ell(t+\varepsilon) - \ell(t)}{\varepsilon} - \mathbb{V}(\ell(t)) \right| < E$$

$$\Rightarrow {}^\exists \varepsilon C > 0, {}^\exists \Delta(\varepsilon C), \quad |\varepsilon| < \Delta(\varepsilon C)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\ell(t+\varepsilon) - \ell(t)}{\varepsilon} - \mathbb{V}(\ell(t)) \right| < \varepsilon C$$