「解析入門」 P395～P396 $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ 定理 8.3

$$\left\{ \frac{\partial(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)} = \begin{vmatrix} I & * \\ 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j} \end{vmatrix} \neq 0 \right.$$

$\Leftrightarrow$ 仮定 1.32

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j}\right) \neq 0 \qquad \square$$

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \to (q_1, \cdots, q_n)$$

は ルジャンドル変換

例 1.33 $\quad L(x, y) = \dfrac{m\|y\|^2}{2} - V(x)$ 。 (1.25)

したがって $\quad p = \dfrac{\partial L}{\partial y} = m y \qquad \square$

定理 1.34

ハミルトニアン

$H(t, q, p) \overset{\text{def}}{=} p \cdot y - L(t, x, y)$ (1.40) のとき.

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (1.34)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (1.37)$$

[証明] $\quad p_i = \dfrac{\partial L}{\partial y_i} \qquad \dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} = 0 \quad \because$ $(t, x_i, y_i) \to (t, q_i, p_i)$ の逆変換より

$$\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = 0 \ (j \neq i) \qquad \frac{\partial t}{\partial p_i} = 0 \qquad \begin{vmatrix} I & * \\ 0 & \frac{\partial y_j}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$