補題 3.21

$$H = H' \circ \tilde{\Phi} - \frac{\partial S}{\partial t} \qquad (3.19)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_H(q(t), P(t)) - S(q(1), P(1), 1) + S(q(0), P(0), 0) = \mathcal{H}_{H'}(Q(t), P(t)) \qquad \square$$

$(q, Q)^*$ で引き戻しても積分は不変

◎ $(\Delta q(0), \Delta P(0)) = (\Delta q(1), \Delta P(1)) = 0$ なる変分を考える限り

$$-S(q(1), P(1), 1) + S(q(0), P(0), 0)$$

は無視してよい。

$\because$ $-S(q(1)+\delta q(1), P(1)+\delta\Delta P(1)) + S(q(0)+\delta q(0), P(0)+\delta P(0)) = -S(q(1), P(1), 1) + S(q(0), P(0), 0)$. ■

定理 3.22 $S(q, Q, t) : \tilde{\Phi}(q, P, t) = (Q(q, P, t), P(q, P, t), t)$ の生成関数

$H = H' \circ \Phi - \frac{\partial S}{\partial t}$ のとき,

(i) $(q(t), p(t))$ が Hに関するハミルトン方程式の解

$\Leftrightarrow$ (ii) $(Q(t), P(t))$ が H'に関するハミルトン方程式の解 $\square$

[証明]

$$\frac{d}{d\delta}\mathcal{H}_H(q(t)+\delta\Delta q(t), P(t)+\delta\Delta P(t))\Big|_{\delta=0} = \frac{d}{d\delta}\mathcal{H}_{H'}(Q(t)+\delta\Delta Q(t), P(t)+\delta\Delta P(t))\Big|_{\delta=0}$$

のことを述べているのだと思うが, 不満なので 実際に示してみる。

$$\mathcal{H}_H(q(t)+\delta\Delta q(t), P(t)+\delta\Delta P(t))$$

$$= \mathcal{H}_{H'}(Q(q(t)+\delta\Delta q(t), p(t)+\delta P(t), t), P(q(t)+\delta\Delta q(t), p(t)+\delta\Delta P(t), t))$$

$$= \mathcal{H}_{H'}\Bigg(Q(q(t), P(t), t) + \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathrm{grad}\, Q^i \cdot \delta\Delta(q, P)(t) \\ \vdots \end{pmatrix} + O(\delta\Delta(q, P)(t)),$$

$$P(q(t), P(t), t) + \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathrm{grad}\, P^i \cdot \delta\Delta(q, P)(t) \\ \vdots \end{pmatrix} + O(\delta\Delta(q, P)(t)), t\Bigg) \qquad \Delta$$