問5 $u_j=\sum_{i=1}^{n} u_{ji}dx^i$ $(j=1,\cdots,n)$: $U\subseteqq\mathbb{R}^2$ 上の微分1形式 のとき

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_m=\sum_{1\leqq j_1<\cdots<j_m\leqq n}\det\begin{pmatrix}u_{1j_1} & u_{ij_1} & u_{mj_1}\\ u_{1j_k} & u_{ij_k} & u_{mj_k}\\ u_{1j_m} & u_{ij_m} & u_{mj_m}\end{pmatrix}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}$$

を示せ。

[解] u^i から dx^{j_i} を選んだとき, $(1\leqq i\leqq m)$

$dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}$ の項の係数は

$$(u_{1j_1}dx^{j_1}+\cdots+u_{1j_m}dx^{j_m})\wedge\cdots\wedge(u_{ij_1}dx^{j_1}+\cdots+u_{ij_m}dx^{j_m})\wedge\cdots$$
$$\wedge(u_{mj_1}dx^{j_1}+\cdots+u_{mj_m}dx^{j_m})$$

の係数で 補題2.19 より $\det\begin{pmatrix}u_{1j_1} & u_{ij_1} & u_{mj_1}\\ u_{1j_k} & u_{ij_k} & u_{mj_k}\\ u_{1j_m} & u_{ij_m} & u_{mj_m}\end{pmatrix}$

これを $1\leqq j_1<\cdots<j_m\leqq n$ のすべての場合について行うので

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_m=\sum\det(\quad)\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}$$ □

(d) 微分形式の引き戻し

U : $\mathbb{R}^n$ の開集合 , V : $\mathbb{R}^m$ の開集合

$U\ni x=(x^1,\cdots,x^n)$, $V\ni y=(y^1,\cdots,y^m)$

$\Phi:U\to V$: 無限回微分可能

$\Phi(x)=(\varphi^1(x),\cdots,\varphi^m(x))$

定義2.21 $u=\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq m} f_{i_1\cdots i_k}(y^1,\cdots,y^m)dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k}$

: V 上の微分 k 形式