(C) ニュートンの運動方程式とケプラーの法則

中心力場の運動に対する
2つの第1積分 …… ハミルトニアン H
角運動量 A

$$\Sigma(H_0, A_0) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 \mid H = H_0,\ A = A_0\}$$

$(r\cos\theta, r\sin\theta) = (q_1, q_2)$ 極座標表示

p_r : (p_1, p_2) の半径方向の成分

p_θ : (p_1, p_2) の半径方向と垂直な方向の成分

$$\mathbb{p} = (p_1, p_2) = p_r(\cos\theta, \sin\theta) + p_\theta(-\sin\theta, \cos\theta)$$
$$= \frac{p_r}{r}(q_1, q_2) + \frac{p_\theta}{r}(-q_2, q_1)$$

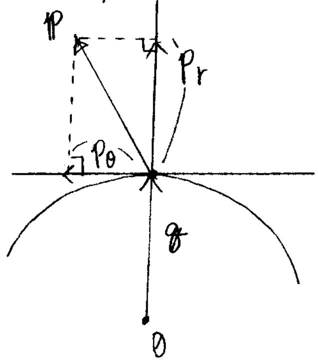

図1.9 運動量の角方向と半径方向への分解

このとき $\Sigma(H_0, A_0)$ は次のように表わされる。

$$\begin{cases} H_0 = \dfrac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \dfrac{GmM}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = \dfrac{p_r^2 + p_\theta^2}{2} - \dfrac{GmM}{r} \\ A_0 = q_1 p_2 - q_2 p_1 = r p_\theta \end{cases} \tag{1.19}$$

p_θ を消去

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2} + \frac{A_0^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r} \tag{1.20}$$