補題 3.29, 3.30 より

定理 3.31　単連結な領域上では，　$\mathbb{V}$: ベクトル場　のとき

(i) φ_t : $\mathbb{V}$が生成する1径数変換群　が 正準変換

$\Leftrightarrow$ (ii)　$\exists G$. s.t　$\mathbb{V} = -\mathbb{X}_G$　□

(b) ベクトル場の微分

定理 3.31は～(*read the rest aloud*)～を調べよう。

$\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{m} V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$: $\mathbb{R}^m$の開集合U上のベクトル場

φ_t : $\mathbb{V}$が生成するベクトル場（1径数変換群）

f : U上の関数　のとき，

$f \circ \varphi_t = f$ が成り立つための十分条件を求める。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varphi_\varepsilon(p)) - f(p)}{\varepsilon} = \frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) \Big|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \varphi_t^i(p) \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} V^i(p) . \qquad (3.35)$$

定義 3.32　$\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{m} V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$: ベクトル場,　f: 関数　のとき

$\mathbb{V}$によるfの微分 $\mathbb{V}(f)$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \mathbb{V}(f)(p) = \sum_i V^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$ □

補題 3.33　φ_t : $\mathbb{V}$の生成するベクトル場（1径数変換群）　のとき，

(i)　$\mathbb{V}(f) = 0.$

(ii)　$f \circ \varphi_t = f$　（これが欲しかったモノ）