例 3.27　ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2) - \frac{1}{q_1^2 + q_2^2}$$

のとき，q_i と正準共役な運動量 p_i は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = (q_1^2 + q_2^2)\dot{q}_i \quad (*)$$ 。 (§1.4 (e) 参照 P33 以下も同様)

このときハミルトニアンは，

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - \frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2) + \frac{1}{q_1^2+q_2^2}$$

$$= \frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} - \frac{1}{2}\frac{(q_1^2+q_2^2)}{(q_1^2+q_2^2)^2}(p_1^2+p_2^2) + \frac{1}{q_1^2+q_2^2} \quad ((*)\text{を使って})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{p_1^2+p_2^2}{q_1^2+q_2^2} + \frac{1}{q_1^2+q_2^2} .$$

H·J 方程式は，

$$2H = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2}{q_1^2+q_2^2} + \frac{2}{q_1^2+q_2^2} \qquad (3.27)$$

$$\Rightarrow \quad 2Hq_1^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 - 2Hq_2^2 + 1$$

$S(q_1, q_2) = S_1(q_1) + S_2(q_2)$ とすると

$$\Rightarrow \quad 2Hq_1^2 - \left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)^2 - 2Hq_2^2 + 1 = Q \qquad (3.28)$$

とおくと，H, Q をパラメータとした (3.27) の解 $S(q_1, q_2)$ が得られる。

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = \int_0^{q_1} \sqrt{2Hx^2 - Q - 1}\, dx \\ S_2 = \int_0^{q_2} \sqrt{2Hx^2 + Q + 1}\, dx \end{cases}$$

S は q_1, q_2, H. Q の関数，