$J_2(t) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$

$J_3(t) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

(2)により $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は t によらない。

以上より $\dfrac{dJ_i}{dt} = 0$

(4) 次の I_1, I_2, I_3 は第1積分

$$I_1 = p_1 + p_2 + p_3$$

$$I_2 = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 - (e^{q_2-q_3} + e^{q_3-q_1} + e^{q_1-q_2})$$

$$I_3 = p_1p_2p_3 - (p_1e^{q_2-q_3} + p_2e^{q_3-q_1} + p_3e^{q_1-q_2})$$

証) $\det(TE - L(t)) = \begin{vmatrix} T-b_1 & -a_1 & -a_3 \\ -a_1 & T-b_2 & -a_2 \\ -a_3 & -a_2 & T-b_3 \end{vmatrix}$

$= T^3 - (b_1+b_2+b_3)T^2 + (b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)T$

$\quad - (b_1b_2b_3 - b_1a_2^2 - b_2a_3^2 - b_3a_1^2 + 2a_1a_2a_3)$ △

$I_1 = -2(p_1 + p_2 + p_3) = -2J_1$

$I_2 = 4(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1) - (4a_2^2 + 4a_3^2 + 4a_1^2)$

$= 4J_2$

$I_3 = 8b_1b_2b_3 - (8b_1a_2^2 + 8b_2a_3^2 + 8b_3a_1^2)$

$= -8J_3 - 2a_1a_2a_3$

$= -8J_3 - 2$ よって I_1, I_2, I_3 とも第1積分