補題 2.20　u_i $(i=1,\cdots,m)$：微分1形式

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(m) \end{pmatrix} \in S_m \quad \text{とすると,}$$

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_m = \mathrm{sng}\,\sigma \; u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(m)}.$$

[証明]　$\sigma = (i \;\; i+1) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & m \\ 1 & \cdots & i+1 & i & \cdots & m \end{pmatrix}$

のときは

$$u_1 \wedge \cdots \wedge \underline{u_i \wedge u_{i+1}} \wedge \cdots \wedge u_m = (-1)\, u_1 \wedge \cdots \wedge \underline{u_{i+1} \wedge u_i} \wedge \cdots \wedge u_m$$

一般の場合は σ を互換の積で表せば明らか。　□

[補題 2.19 の証明]

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = (u_{11} dx^1 + \cdots + u_{1n} dx^n) \wedge \cdots \wedge (u_{n1} dx^1 + \cdots + u_{nn} dx^n)$$

を分配法則を使って計算.　$dx^i \wedge dx^i = 0$ より.

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \sum_{\sigma \in S_n} u_{1\sigma(1)} \cdots u_{n\sigma(n)} \underline{dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)}}$$

補題 2.20 ⇒

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underline{\mathrm{sng}\,\sigma} \; u_{1\sigma(1)} \cdots u_{n\sigma(n)} \underline{dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}$$

$$= \det(u_{ij})\; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \qquad \square$$

行列式の定義（岩波講座 現代数学への入門）

『行列と行列式 1』　P105　§3.3　定義 3.14