$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\right)\cdot\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\right)$ を計算.

(3.71) で $\sigma=\sigma_1$ として σ_1 で偏微分

$$2\frac{\partial x}{\partial\sigma_1}\frac{x}{a-\sigma_1}+2\frac{\partial y}{\partial\sigma_1}\frac{y}{b-\sigma_1}+2\frac{\partial z}{\partial\sigma_1}\frac{z}{c-\sigma_1}$$
$$=-\left(\frac{x}{a-\sigma_1}\right)^2-\left(\frac{y}{b-\sigma_1}\right)^2-\left(\frac{z}{c-\sigma_1}\right)^2 \qquad (3.73)$$

$\Sigma(\sigma_1)$の法ベクトル $\left(\frac{x}{a-\sigma_1},\frac{y}{b-\sigma_1},\frac{z}{c-\sigma_1}\right)$ は $\Sigma(\sigma_3)$ と $\Sigma(\sigma_2)$ に接する.

$\sigma_1\sigma_2$平面の $\sigma_2=$一定 なる曲線の φ による像に接する。

$\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma_1},\frac{\partial y}{\partial\sigma_1},\frac{\partial z}{\partial\sigma_1}\right)$ と $\left(\frac{x}{a-\sigma_1},\frac{y}{b-\sigma_1},\frac{z}{c-\sigma_1}\right)$ は平行.

(3.73) より.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma_1},\frac{\partial y}{\partial\sigma_1},\frac{\partial z}{\partial\sigma_1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a-\sigma_1},\frac{y}{b-\sigma_1},\frac{z}{c-\sigma_1}\right) \qquad (3.74)$$ 。

補題3.63 $\psi(u)=(u-\sigma_1)(u-\sigma_2)(u-\sigma_3)$, $f(u)=2(a-u)(b-u)(c-u)$

とおくと,
$$\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}-1=\frac{2\psi(u)}{f(u)} \qquad (3.75)$$ □

[証明] (3.75)の両辺に $f(u)$ を掛ける. その両辺はいずれも u の3次多項式であり,

両辺とも $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ を解にもち, u^3の係数が2である. よって (3.75)が成立する. ■

(3.75)の左辺をσ_1で偏微分, $u=\sigma_1$ とおく

$$2\frac{\partial x}{\partial\sigma_1}\frac{x}{a-\sigma_1}+2\frac{\partial y}{\partial\sigma_1}\frac{y}{b-\sigma_1}+2\frac{\partial z}{\partial\sigma_1}\frac{z}{c-\sigma_1}$$
$$=-4\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\sigma_1}\right)^2\right\}$$