$\therefore \quad \mathrm{grad}(f\circ\Phi) \neq (\Phi^{-1})_*(\mathrm{grad} f) \quad \square$

§2.2 微分形式

(a) 3次元空間の中の微分形式

$x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ の座標

定義 2.9 　U: $\mathbb{R}^3$ 内の領域.

U 上の「微分0形式」: U 上の関数のこと

U 上の「微分1形式」: $f_1(x)dx^1 + f_2(x)dx^2 + f_3(x)dx^3$

なる形式的な和。(f_i は U 上の関数)

U 上の「微分2形式」: $f_{12}(x)dx^1\wedge dx^2 \ f_{23}(x)dx^2\wedge dx^3 + f_{13}(x)dx^1\wedge dx^3$

(f_{ij} は U 上の関数)

U 上の「微分3形式」: $f(x)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ 　(f は U 上の関数)

微分 0, 1, 2, 3 形式を単に微分形式 (differential form) という。 $\square$

$dx^1\wedge dx^3 = 0\,dx^1\wedge dx^2 + 0\,dx^2\wedge dx^3 + 1\,dx^1\wedge dx^3.$

(係数 0 と 1 の規則)

u が微分 k 形式のとき k を u の次数 (degree) という。

・微分形式の間の和. 微分形式と関数の積

$(f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3) + (g_1 dx^1 + g_2 dx^2 + g_3 dx^3)$

$= (f_1+g_1)dx^1 + (f_2+g_2)dx^2 + (f_3+g_3)dx^3$

$g(f_{12}dx^1\wedge dx^2 + f_{23}dx^2\wedge dx^3 + f_{13}dx^1\wedge dx^3)$

$= gf_{12}dx^1\wedge dx^2 + gf_{23}dx^2\wedge dx^3 + gf_{13}dx^1\wedge dx^3$ etc