(b) 長さとエネルギー

$$L(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}(x)\, y^i y^j} \qquad (3.50)$$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t)}\, dt \qquad (3.51)$$

とおくと ~ read aloud ~ うまくいかない。そこで ~ 置き換える.

$$E(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}(x)\, y^i y^j \qquad (3.52)$$

$$\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t)\, dt \qquad (3.53)$$: エネルギー

とおく.

補題 3.55

$$2\mathcal{E}(x, \dot{x}) \geqq (\mathcal{L}(x, \dot{x}))^2 \qquad (3.54)$$

$$\text{等号} \Leftrightarrow \frac{dL(x, \dot{x})}{dt} = 0$$

[証明] $E(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2} L(x(t), \dot{x}(t))^2$.

$f(t) = L(x(t), \dot{x}(t))$, $\alpha = \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \int_0^1 f(t)\, dt$ とおく,

$$0 \leqq \int_0^1 (f(t) - \alpha)^2 dt = \int_0^1 f^2(t)\, dt - 2\alpha \underbrace{\int_0^1 f(t)\, dt}_{\alpha} + \alpha^2 = 2\mathcal{E}(x, \dot{x}) - \alpha^2.$$

(3.54) $\Leftrightarrow f(t) \equiv \alpha$ のとき $\dfrac{df(t)}{dt} = \dfrac{d(F(1) - F(0))}{dt} = 0$

■

次の補題に ~ read aloud ~ わかる。

補題 3.56 $\forall x = x(t)$ に対して $^\exists$変数変換 $t = t(s)$, s.t $\tilde{x}(s) = x(t(s))$ とおくと,

$L(\tilde{x}(s), \dot{\tilde{x}}(s))$ は s によらない。

[証明] $f(t) = L(x(t), \dot{x}(t))$, $\alpha = \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \int_0^1 f(t)\, dt$,

$$s(t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^t f(u)\, du \qquad \text{とおく.}$$