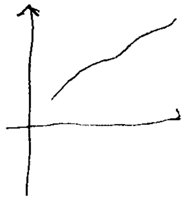
$f(t) = \sqrt{\frac{dl}{dt} \cdot \frac{dl}{dt}} > 0$ 。よって $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\alpha} f(t) > 0$ （$\because \alpha > 0$）。

定義より　$S(0) = 0$,　$S(1) = 1$.



この逆関数を $t = t(s)$ とおくと、　$t(0) = 0$,　$t(1) = 1$.

単調増加

よって変数変換を与える.

$$L(\tilde{x}(s), \dot{\tilde{x}}(s)) = \sqrt{\sum_i \sum_j g_{ij}(\tilde{x}^1(s), \tilde{x}^2(s)) \frac{d\tilde{x}^i}{ds} \frac{d\tilde{x}^j}{dt}}$$

$$= \sqrt{\sum_i \sum_j g_{ij}(x^1(t), x^2(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{dx^j}{dt} \frac{dt}{ds}}$$

$$= \frac{dt}{ds} L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{dt}{ds} f(t).$$

$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\alpha}{f(t)}$,　よって　$L(\tilde{x}(s), \dot{\tilde{x}}(s)) = \frac{\alpha}{f(t)} f(t) = \alpha$.

$\therefore$　$L(\tilde{x}(s), \dot{\tilde{x}}(s))$ は s によらない。 ■

s を弧長パラメータという.

定理 3.57　$x \in \Omega(x_0, x_1)$　次の2つは同値

(i)　x で $\mathcal{E}$ が最小値

(ii)　x で $\mathcal{L}$ が最小値　かつ　$L(x, \dot{x})$ は t によらない.

[証明]　弧長パラメータ s により $t = t(s)$　$\tilde{x}(s) = x(t(s))$ とすると,

$$\mathcal{L}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(\tilde{x}(s)) \frac{d\tilde{x}^i}{ds} \frac{d\tilde{x}^j}{ds}}\, ds$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{ds} \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, ds$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt = \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad (3.55)$$