(3.5) $\sum_i \left(\frac{\partial P^i}{\partial p^j} \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \right) = \delta_{jk}$ より

$${}^t(D\Phi)_{11}(D\Phi)_{22} = I$$

qを固定して, $\Phi : p \mapsto P(q, p)$ を考える。

この写像のヤコビ行列は, $D\Phi_{22}(q,p) = {}^tD\Phi_{11}^{-1}(q,p)$

Φ: 正準変換
かつ
$Q = Q(q)$

$D\Phi_{11}$ は, p にはよらないから, $D\Phi_{22}$ は pによらない。

よって $p \mapsto P(q,p)$ は 1次変換 i.e. $P(q,p) = {}^tDQ^{-1}(q)p + v(q)$ (3.6)

Δ

$v(q) = 0$ のとき,
$$\begin{cases} Q(q,p) = Q(q) \\ P(q,p) = {}^tDQ(q)^{-1}p \end{cases} \qquad (3.7)$$

定義 3.9 $\Phi : (q,p) \mapsto (Q,P)$. (3.7) を点変換と呼ぶ。

補題 3.10 点変換は正準変換である。

[証明] Φを(3.7)として,

$$\Phi^* \sum_{i=1}^n dP^i \wedge dQ^i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P^i}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial P^i}{\partial p^j} dp^j \right) \wedge \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} dq^k \right) \right) = (*) \quad \Delta$$

ここを考える。

$$P = \begin{pmatrix} P^1 \\ \vdots \\ P^i \\ \vdots \\ P^n \end{pmatrix} = {}^tDQ(q)^{-1}p = {}^t\begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^1}{\partial q^i} & \cdots & \frac{\partial Q^1}{\partial q^n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^j}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} & \cdots & \frac{\partial Q^j}{\partial q^n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^n}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^i} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^j \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$$