1.5　ハミルトニアン　$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}p_i^2+\sum_{i=1}^{3}e^{q_i-q_{i+1}}$　$(q_4=q_1)$

のハミルトン方程式について、

(1)　$a_i=\frac{1}{2}e^{(q_i-q_{i+1})/2}$，$b_i=\frac{1}{2}p_i$

$$L=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。

「　q_i, p_i がハミルトン方程式の解

$\Longleftrightarrow$　　$L(t)$，$B(t)$ が

$$\frac{dL(t)}{dt}=B(t)L(t)-L(t)B(t)\qquad (Lax表示)$$

の解。」

を示せ。

証）
$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=p_i \\ \dfrac{dp_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}=-e^{q_i-q_{i+1}}+e^{q_{i-1}-q_i} \end{cases}\quad (ハミルトン方程式)$$

$$\frac{da_i}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{(q_i-q_{i+1})/2}\underset{\shortparallel}{\frac{dq_i}{dt}}-\frac{1}{2}e^{(q_i-q_{i+1})/2}\frac{dq_{i+1}}{dt}\right.$$

$$=\frac{1}{2}(a_i\cdot 2b_i-a_i\cdot 2b_{i+1})$$

$$=a_ib_i-a_ib_{i+1}$$

$$\frac{db_i}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dp_i}{dt}=\frac{1}{2}\left(-e^{q_i-q_{i+1}}+e^{q_{i-1}-q_i}\right)$$

$$=-2a_i^2+2a_{i-1}^2$$