第 2 章　被覆空間

4　ルベッグ数

第 1 章で 基点 x_0 をもつ位相空間 X の基本群 $\pi_1(X, x_0)$ を定義し, 二つのホモトピックな弧上連結位相空間 X, Y は 同じ基本群をもつことを示した。

基本群を計算するための道具を作り出すことは大変重要である。なぜならば二つの弧上連結な位相空間が 同型でない基本群をもてば, この二つの位相空間は同相でないことが示されるからである。

このような道具の一つとして被覆空間の理論があるともいえる。また位相と群論を基本群によって結びつけるといってもよい。

まず, 後で必要となるコンパクト距離空間における次の命題をあげておこう。

命題 4.1
コンパクト距離空間 (X, d) において, X の開被覆 $\{ U_\alpha \}_{\alpha \in \Lambda}$ に対して, 次の条件をみたす正の数 $\exists \delta > 0$ が存在する。

$$X \text{ の部分集合 } A \text{ の直径 } d(A) < \delta \Longrightarrow \exists \alpha \in \Lambda \; ; \; A \subset U_\alpha$$

この δ を (開) 被覆 $\{ U_\alpha \}_{\alpha \in \Lambda}$ の **ルベッグ数** (***Lebesgue number***) という。

証明

この命題を使うと, よく知られている一様連続に関する次の定理がえられる。

系 4.2
コンパクト距離空間 X から 距離空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ は,
$\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists \delta > 0$ $s.t.$ 任意の x の δ-近傍 $U(x, \delta)$ に対して,

$$f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \varepsilon)$$

をみたす (一様連続)

問題 4.1　上の系 4.2 を 命題 4.1 を使って示せ。

5　被覆空間の定義

まず, 被覆空間とは何であるか？ということの理解の助けとなる 次の様な例から始めよう。

例 5.1
$\mathbb{R}^2$ の中の $\mathbb{S}^1$ を 複素平面 $(\mathbb{C})$ にあると思って

$$\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1 \} = \{ e^{2\pi i\theta} \; ; \; 0 \leq \theta < 1 \}$$

と表す。

このとき $\mathbb{R}^1$ から $\mathbb{S}^1$ への写像 $p:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ を

$$p(x) = e^{2\pi i x}$$

と定義すると,

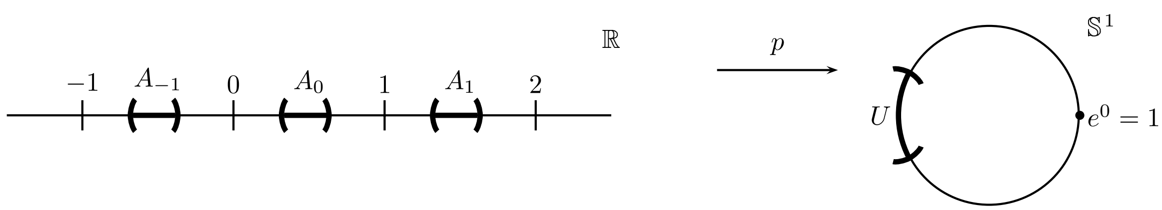
(**1**) p は 連続で全射

(**2**) p は 単射ではないが,

$z \in \mathbb{S}^1$ をとり, U を z を含む $\mathbb{S}^1$ 上の小さい弧とすれば, $p^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^1$ の開区間 A_ℓ ($\ell \in \mathbb{Z}$) からなり,

$$\left(\begin{array}{ccc} A_k + 1 & = & A_{k+1} \\ A_k + i & = & A_{k+i} \end{array} \right.$$

をみたす。ここに $A_k + i$ とは $\{a + i; a \in A_k\}$ のことである。さらに p は $J = A_\ell$ を U の上へ同相に移す (すなわち $p|_J$ は同相写像)。まとめると $\forall z \in \mathbb{S}^1$ に対して, z の開近傍 U が存在して, $p^{-1}(U)$ は 互いに交わらない開区間の和で, その開区間は p によって U の上へ同相に移る。



これを一般化したものが, 被覆空間 (covering space) である。正式な定義は次で与えられる。

定義 5.1

弧状連結な Hausdorff 空間 X, $\widetilde{X}$ と, 連続写像 $p:\widetilde{X} \to X$ が 次の条件をみたすとき,
$(\widetilde{X}, p)$ は **被覆写像 (*covering map*) p をもつ X 上の被覆空間 (*covering space*)** という。

(**1**) p は全射

(**2**) X の任意の点 x に対して, x の開近傍 $U = U(x)$ が存在して, 次をみたす。

$\forall \widetilde{x}_i \in p^{-1}(x)$ に対して, $\widetilde{x}_i$ の開近傍 $\widetilde{U}(\widetilde{x}_i)$ が存在して,

(i) $p|_{\widetilde{U}(\widetilde{x}_i)} : \widetilde{U}(\widetilde{x}_i) \to U(x)$ は位相同型写像

(ii) $\displaystyle\bigcup_{\widetilde{x}_i \in p^{-1}(x)} \widetilde{U}(\widetilde{x}_i) = p^{-1}(U(x))$

(iii) $\widetilde{x}_i \neq \widetilde{x}_j$ で $\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_j \in p^{-1}(x)$ ならば, $\widetilde{U}(\widetilde{x}_i) \cap \widetilde{U}(\widetilde{x}_j) = \emptyset$

ここで, $U(x)$, $\widetilde{U}(\widetilde{x}_i)$ を, それぞれ, x, $\widetilde{x}_i$ の **標準近傍 (*canonical neighborhood*)** という。
また $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ は **x の上にある (*lie above x*)** という。

注意 11

(**1**) 弧状連結性ははずせない。X のコピーをいくつか作って, $\widetilde{X}$ とすれば, つまらない被覆空間ができるので。

(**2**) X, $\widetilde{X}$ とも弧状連結という条件を付けているが, p は全射であるから, 実は $\widetilde{X}$ が弧状連結だけで 十分である。

(**3**) 被覆といっても, 開集合からなる (開) 被覆という様に 使われる被覆とは異なるものであるから, 混同しないように。

今後被覆空間といったら, 断らなくても, 弧状連結な Hausdorff 空間 を扱うものとする。

例 5.2 写像 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ を $p(r_1, r_2) = (e^{2\pi i r_1}, e^{2\pi i r_2})$ と定義すると, 平面 $\mathbb{R}^2$ はトーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の被覆空間と考えられる。$\pi_1(\mathbb{R}^2, 0)$ は単位元だけの群であるから, $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1,1))$ は $p^{-1}\{(1,1)\}$ すなわち整数全体の集合のそれ自身との直積と 1 対 1 の対応 (全単射) にある。

例 5.3 実射影平面 (real projective plane) $\mathbb{P}^2$
$\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線全てを元とする集合を $\mathbb{P}^2$ とおく。別のいい方をすれば, $R^3_* = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ とおき, R^3_* に次のような同値関係 $\sim$ をいれる。

$$p, q \in R^3_* \text{ に対して,} \quad p \sim q \text{ とは,} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \; ; \; p = \lambda q$$

そして, $R^3_*/\sim$ を商空間として位相をいれた位相空間を **実射影平面 (*real projective plane*)** といい, $\mathbb{P}^2 = R^3_*/\sim$ と表す。

そして $\mathbb{R}^3$ における, 原点を中心とし 半径 1 の球面 $\mathbb{S}^2$ を考えると, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\sim$ とみなせる。ここに

$$x, y \in \mathbb{S}^2 \text{ に対して,} \quad x \sim y \iff y = x \text{ または } y = -x$$

である。そして, $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ を商空間の標準写像とすると, これは被覆写像である。

6 道とホモトピーの持ち上げ (lifting of paths and homotopies)

$(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とする。このとき X の道 $\alpha : I \to X$ に対して, $p \cdot \widetilde{\alpha} = \alpha$ をみたす $\widetilde{X}$ への道 $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ が作れる (リフトできる) ということをまず示そう。すなわち

定理 6.1
$\alpha : I \to X$ を x_0 を基点とする X の道とし, $\widetilde{x}_0$ を x_0 の上にある点とすると, $\widetilde{x}_0$ を始点とする $\widetilde{X}$ の道

$$\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$$

で, $p \cdot \widetilde{\alpha} = \alpha$ をみたすものが一意に存在する。

証明

定義 6.2
上の定理によって存在する $\widetilde{\alpha}$ を α の **持ち上げ (*lift*)** という。また $\widetilde{\alpha}$ は α を ***cover* している** とか, $\widetilde{\alpha}$ は α の **上にある** とかいうこともある。

もっと一般に, $(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とし, 位相空間 A から X への連続写像 $f : A \to X$ に対して, A から $\widetilde{X}$ への連続写像 $\widetilde{f} : A \to \widetilde{X}$ で, $p \cdot \widetilde{f} = f$ をみたすものを, 写像 f の **持ち上げ (*lift*)** という。

一般に一意性については, 次が言える。

系 6.3
$p : \widetilde{X} \to X$ を被覆写像とし, $f : W \to X$ を弧状連結空間 W から X への連続写像としたとき, f の $\widetilde{X}$ へ持ち上げがあった, すなわち $p \cdot \widetilde{f} = f$ をみたす $\widetilde{f} : W \to \widetilde{X}$ が存在したとすれば, $\widetilde{f}$ は W の一点の像を決めれば, 一意に決まる。きちんと述べると, 連続写像 $\widetilde{f}, \widetilde{f}' : W \to X$ が
 (1) $p \cdot \widetilde{f} = p \cdot \widetilde{f}' = f$
 (2) ある $w_0 \in W$ に対して $\widetilde{f}(w_0) = \widetilde{f}'(w_0)$
みたすならば, $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$ である。

証明

次に, 道のホモトピーの持ち上げの問題を考えると, 次の結果が得られる。

定理 6.4
$(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とする。α, β を 始点を x_0 終点を x_1 とする X の二つの道とし,
F を α と β の (道) ホモトピーとする, すなわち

$$F \ : I \times I \to X \quad ; \quad \text{連続写像 で}$$
$$\begin{cases} F(s,0) = f(s) \ (0 \le s \le 1), & F(0,t) = x_0 \ (0 \le t \le 1), \\ F(s,1) = g(s) \ (0 \le s \le 1), & F(1,t) = x_1 \ (0 \le t \le 1) \end{cases}$$

をみたすものとする。
このとき, x_0 の上にある $\widetilde{X}$ の任意の点 $\widetilde{x}_0$ をとると

$$\exists! \ \widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X} \quad s.t. \quad p \cdot \widetilde{F} = F, \ \widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0$$

実際 $\widetilde{F}(0,t) = \widetilde{x}_0$, $\widetilde{F}(1,t) = \widetilde{x}_1$ となり (ここに $\widetilde{x}_1$ は x_1 の上にある点), $\widetilde{F}$ は $\widetilde{\alpha}$ と $\widetilde{\beta}$ のホモトピーとなる (ここに, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ は, それぞれ, 一意に決まる x_0 を始点とする α, β の持ち上げである $\widetilde{X}$ 内の道である)。

証明

系 6.5
x_0 を基点とする X の閉じた道を ℓ とし, $\widetilde{x}_0$ を x_0 の上にある点とすると, $\widetilde{x}_0$ を始点とする ℓ の持ち上げである $\widetilde{X}$ の道が一意に存在する ($\widetilde{\ell}(0) = \widetilde{x}_0$)。そして $\widetilde{\ell}(1)$ は ホモトピー類 $[\ell]$ にのみ依存する。
さらに, もし $\widetilde{\ell}$ が閉じた道で, m が ℓ にホモトピックならば, $\widetilde{x}_0$ を始点とする m の上にある一意に定まる $\widetilde{X}$ の道 $\widetilde{m}$ も閉じた道であり, $\widetilde{\ell}$ にホモトピックである。

問題 6.1 系 6.5 を示せ。

定理 6.6
$(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とすれば,

$$p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

は, 単射準同型写像である。ここに, p_* は 被覆写像 $p : \widetilde{X} \to X$ によって誘導される $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ から $\pi_1(X, x_0)$ への準同型写像である (定義 3.1 参照)。

証明

注意 12
$\widetilde{\ell}$ を始点 $\widetilde{x}_0$ 終点 $\widetilde{x}_1$ とする $\widetilde{X}$ の道とし, $\sigma_{\widetilde{\ell}} : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ を $[m] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ に対して

$$\sigma_{\widetilde{\ell}}([\widetilde{m}]) = [\widetilde{\ell}^{-1} * \widetilde{m} * \widetilde{\ell}]$$

で定義される同型写像とすると, 明らかに

$$p_* \cdot \sigma_{\widetilde{\ell}} = \sigma_\ell \cdot p_*$$

である。ここに $p \cdot \widetilde{\ell} = \ell$ で, $\sigma_\ell : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ は $\sigma_\ell(m) = [\ell^{-1} * m * \ell]$ で定義される同型写像 (定理 2.12 参照) である ($p(\widetilde{x}_0) = x_0$, $p(\widetilde{x}_1) = x_1$ とおいている)。
(これらは p が被覆写像であることを必要としていない。道の積が連続写像で保たれることのみを使っている。)

定理 6.7 $(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とする。
このとき, $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}'_0$ を $x_0 \in X$ の上にある点とすると, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ と $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))$ は $\pi_1(X, x_0)$ の共役な部分群である。
逆に π^0 を $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ の $\pi_1(X, x_0)$ における共役部分群とすると, x_0 の上にある点 $\widetilde{x}'_0$ が存在して,

$$\pi^0 = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))$$

となる。

証明

定理 6.8 $(\widetilde{X}, p)$ を X の被覆空間とすれば,
x_0 の上にある $\widetilde{X}$ の点の濃度は, 指数 $[\pi_1(X, x_0), p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))]$ に等しい。ここに, $\widetilde{x}_0$ は x_0 の上にある点である。そして これは x_0 の選び方に依存しない。

証明

この定理によって, 次のような場合には 基本群が計算できる。

例 6.1
例 5.3 の被覆写像 $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ を考えると, $\mathbb{S}^2$ は単連結 (後で示される) より, $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{e\}$
よって, $p_*(\pi_1(\mathbb{S}^2, \widetilde{x}_0)) = \{e\}$ は $\pi_1(\mathbb{P}^2, x_0)$ の自明な部分群である (ただし $p(\widetilde{x}_0) = x_0$)。したがって,
$\pi_1(\mathbb{P}^2, x_0)$ の元の数 $= \pi_1(\mathbb{P}^2, x_0)$ の $p_*\pi_1(\mathbb{S}^2, \widetilde{x}_0)$ の剰余類の数 $= p^{-1}(x_0)$ の上にある点の数 $= 2$
ゆえに, $\pi_1(\mathbb{P}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ であることが分かる (位数 2 の群は $\mathbb{Z}_2$ のみであるという群論の結果を使っている)。

7 写像の持ち上げ (lifting of maps)

次に, 写像の持ち上げ (lifting of maps) は存在するか？という問題を考えよう。

前の節で, 道と道のホモトピーの持ち上げは存在することを示した。では A を弧状連結な位相空間とし, $f:(A,a_0)\to(X,x_0)$ を連続写像, $(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ を X の被覆空間, $\widetilde{x}_0$ を x_0 の上にある点とするとき,

$\boxed{\exists\widetilde{f}:(A,a_0)\to(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\ ;\ \text{連続写像}\quad s.t.\quad p\widetilde{f}=f}$ **?**

という問題が考えられる。系 6.3 より 存在すれば一意である。しかし, 存在については次のように存在しない例がある。

例 7.1

$p:\mathbb{R}^1\to\mathbb{S}^1$ を 例 5.1 の被覆写像とし,
$f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ を 恒等写像とする ($f=1$)。
$p\widetilde{f}=1:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ をみたす連続写像 $\widetilde{f}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^1$ は (少なくとも直観的には) 存在しない。

そこで次のような定義を行う。

定義 7.1

位相空間 A が <u>**局所弧状連結** (***locally path connected***)</u> である (また 略して <u>***l.p.c.***</u> であるという) とは, 任意の A の点 p と, p の任意の開近傍 U に対して,
次の条件をみたす p の開近傍 V が存在するときをいう。

(**1**) $V\subset U$

(**2**) V の任意の二点は U の道で結ばれる。
すなわち, $\forall x,y\in V$ に対して, $\exists f:I\to U$ s.t. $f(0)=x,\ f(1)=y$

補題 7.2

A が 局所弧状連結であるための必要十分条件は, A が 弧状連結な開集合からなる基底を持つことである。

<u>証明</u>

定理 7.3

A を 弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間とし, $f:(A,a_0)\to(X,x_0)$ を連続写像, $\widetilde{x}_0$ を x_0 の上にある点とする。このとき $\widetilde{f}(a_0)=\widetilde{x}_0$ なる f の持ち上げ $\widetilde{f}:A\to\widetilde{X}$ が存在するための必要十分条件は $f_*(\pi_1(A,a_0))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$ である。すなわち,

$$\begin{aligned}&\exists!\ \widetilde{f}:(A,a_0)\to(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\ ;\ f\ \text{の持ち上げ (すなわち}\ p\widetilde{f}=f)\\ &\Longleftrightarrow\quad f_*(\pi_1(A,a_0))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))\end{aligned}$$

<u>証明</u>

定理 7.4

定理 7.3 と同じ仮定のもと
二つの連続写像 $f,\ g:(A,a_0)\to(X,x_0)$ に対して,

$F : A \times I \to X$ を, f と g のホモトピーとする。
そのとき, $\exists \widetilde{F} : A \times I \to \widetilde{X}$; $\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ のホモトピーで, F の持ち上げとなる。

<u>証明</u>

注 13
基点 x_0 をもつ位相空間 X と n 次元球面

$$\mathbb{S}^n = \{\ x \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ |x| = 1\ \}$$

に $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間としての位相をいれたものを考える。
そして, $\mathbb{S}^n$ の任意の点 a_0 をとり, $\mathbb{S}^n$ から X への連続写像 $f : (\mathbb{S}^n, a_0) \to (X, x_0)$ 全体のホモトピー類の集合

$$\pi_n(X, x_0) = \{\ f : (\mathbb{S}^n, a_0) \to (X, x_0); \text{連続写像}\ \}/\sim$$

を考えると, $\pi_n(X, x_0)$ に群構造がはいることが分かっている。このことの証明は, 代数的位相幾何学に関する参考書等を参照して下さい。

これは 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の一般化であるが, さらに, 次のことが分かる。

$(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ を X の被覆空間とし, $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ とおくと,
$n \geq 2$ ならば, $\pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ である。

問題 7.1 上の注 13 を示せ。

補題 7.5 $(\widetilde{X}^{(i)}, p^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ を X の 被覆空間とする。X が局所弧状連結ならば, $\widetilde{X}^{(1)}$, $\widetilde{X}^{(2)}$ も 局所弧状連結で, 標準近傍として弧状連結なものを選べる。

問題 7.2 上の補題 7.5 を示せ。

定理 7.6
$(\widetilde{X}^{(i)}, p^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ を X の被覆空間とし, X は局所弧状連結とする。このとき, $x_0 \in X$ をとり, $\widetilde{x}_0^{(i)} \in \widetilde{X}^{(i)}$ を, $\widetilde{X}^{(i)}$ の基点で $p(\widetilde{x}_0^{(i)}) = x_0$ $(i = 1, 2)$ をみたす点とする。
このとき, $\pi^{(i)} = p_*^{(i)}(\pi_1(\widetilde{X}^{(i)}, \widetilde{x}_0^{(i)}))$ とおくとき,
$\pi^{(1)} \subset \pi^{(2)}$ ならば,

$$\exists!\ h : (\widetilde{X}^{(1)}, \widetilde{x}_0^{(1)}) \to (\widetilde{X}^{(2)}, \widetilde{x}_0^{(2)}) \quad s.t. \quad p^{(2)} h = p^{(1)}$$

であり, さらに, $(\widetilde{X}^{(1)}, h)$ は $\widetilde{X}^{(2)}$ の被覆空間である。

<u>証明</u>

これで, $\pi_1(X, x_0)$ の部分群に対応した被覆空間の一意性が証明される。

系 7.7
$\pi^{(1)} = \pi^{(2)}$ ならば, 定理 7.6 の h は位相同型写像である。

証明

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

したがって, $\pi_1(X, x_0)$ の部分群 π^0 と, 被覆写像を p, q とする (X, x_0) の被覆空間 (Y, y_0), (Z, z_0) がそれぞれ与えられ $(p(y_0) = x_0 = q(z_0))$,
$p_*(\pi_1(Y, y_0)) = q_*(\pi_1(Z, z_0)) = \pi^0$ とすると, 位相同型写像

$$h : (Y, y_0) \to (Z, z_0) \quad s.t. \quad q \cdot h = p$$

が一意に存在する。

(Y, p), (Z, p) を X を 2 つの X の被覆空間とするとき, (Y, p) と (Z, p) が同じとは, Y と Z が同相というだけではなく, 右上の図式を可換にする Y から Z への同相写像 h が存在するときと定める。系 7.7 は, この意味で被覆空間は一意であることを示している。

これで一意性はできた。残りは 存在の問題である。これには, 群の部分群の集合と位相空間の被覆空間の集合のきちんとした対応が必要である。それについて今後考えよう。

さてそのためにまず, $\pi_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ が $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群であるときを考えよう。

$p_*(\pi_1(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \lhd \pi_1(X, x_0)$ としよう。もし X が 局所弧状連結なら, 定理 6.7 より x_0 の上にある $\widetilde{x}'_0$ が存在して,

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0)) = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$$

であるから

$$\exists!\ h : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0) \quad ; \quad \text{位相同型写像} \quad s.t. \quad ph = p$$

このとき h は 不動点を持たないか 恒等写像である (不動点の定義は下にある。各自証明せよ)。

ここに, 位相同型写像 $f : X \to X$ に対して, $x \in X$ が $f(x) = x$ をみたすならば, x は f の **不動点 (*fixed point*)** という。また 位相同型写像 $f : X \to X$ が 不動点を持たない時, ***fixed point free*** であるという。

定義 7.8 ($\widetilde{X}$ の 被覆変換 (cover(ing) transformation))
$\widetilde{X}$ から $\widetilde{X}$ の上への位相同型写像 $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ で $ph = p$ をみたすものを,
$\widetilde{X}$ の **被覆変換 (*cover(ing) transformation*)** という。明らかに, $\widetilde{X}$ の被覆変換全体は, 写像の合成を積として群になる (恒等写像が単位元, h の逆写像 h^{-1} が h の逆元) ので,
これを H とかき, **被覆変換群 (*cover(ing) transformation group*)** という。

定理 7.9
弧状連結かつ局所弧状連結空間 X の被覆空間を $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ とする。
$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = \pi^0$ が $\pi = \pi_1(X, x_0)$ ($\widetilde{x}_0$ は x_0 の上にある点) の正規部分群ならば,
$\widetilde{X}$ の被覆変換群 H は, 商群 π/π^0 と同型, すなわち

$$\varphi : H \cong \pi/\pi^0$$

である。

<u>証明</u>

注意 14
被覆変換群 H の積 $h_\alpha h_\beta$ は, はじめに h_β 次に h_α と, ここでは決めている。また H, π/π_0 は $\widetilde{x}_0$ の取り方に依存するが, 上の定理 7.9 の $\varphi : H \to \pi/\pi^0$ は $\widetilde{x}_0$ の取り方に依存しない。

被覆変換群を導入したので, 被覆空間と理論と群論の間に もう一つ繋がりができた。すなわち

$$\begin{array}{ccc} \text{位相空間} & \xrightarrow{\pi_1} & \text{群} \\ \text{被覆空間} & \xrightarrow{\pi_1} & \text{部分群} \end{array}$$

であったが, もし部分群が正規だと

$$\text{被覆空間} \quad \xrightarrow{H} \quad \text{商群}$$

という対応が作られる。
ここで, 言葉を導入しておこう。

定義 7.10
(弧状連結かつ局所弧状連結) 空間 X の被覆空間 $(\widetilde{X}, p)$ が <u>**正則** (***regular***)</u> とは, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ が $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群のときをいう。ここに $\widetilde{x}_0$ は x_0 の上にある点である。(もちろん正則であることは x_0 の選び方によらない)

注 15
定理 7.9 によると, 正則被覆空間 $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ の被覆変換群は, 商群 $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ (ここに $p(\widetilde{x}_0) = x_0$) に同型である。もしも, $(\widetilde{X}, p)$ が X の普遍被覆空間 (universal covering space) (詳しい定義はすぐ下) ならば, $\widetilde{X}$ は単連結だから, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = \{e\}$ (単位元のみからなる群), すなわち $\pi_1(X, x_0)$ の 自明な部分群である。その時, $\pi_1(X, x_0)$ は被覆変換群 H に同型である。このことを使って, 次の例のように基本群を計算できる場合がある。

定義 7.11
位相空間 X の被覆空間 $(\widetilde{X}, p)$ において, $\widetilde{X}$ が単連結のとき, $(\widetilde{X}, p)$ を
<u>**普遍被覆空間** (***universal covering space***)</u> という。これは, $(\widetilde{X}', p')$ を勝手な X の被覆空間とすると, 定理 7.6 によって, 被覆写像 $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ が存在して, $(\widetilde{X}, h)$ は $\widetilde{X}'$ の被覆空間になるからこういう名前になっている。

例 7.2
(1) 1 次元球面 $\mathbb{S}^1 = \{\ z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\ \}$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{S})$ を計算しよう。例 5.1 の被覆空間 $(\mathbb{R}^1, p)$ を考える。すなわち, $\mathbb{R}^1$ は 1 次元ユークリッド空間で, p は $p(x) = e^{2\pi i x}$ で定義される $\mathbb{R}^1$ から $\mathbb{S}^1$ への写像である。

$\mathbb{R}^1$ は単連結だから, $(\mathbb{R}^1, p)$ は $\mathbb{S}^1$ の普遍被覆空間となるので, $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong H(\mathbb{R}^1, p)$ である。ここに $H(\mathbb{R}^1, p)$ は $(\mathbb{R}^1, p)$ の被覆変換群である。

$\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ を $\varphi(x) = x + n$ $(n \in \mathbb{Z})$ とすると, $e^{2\pi i(x+n)} = e^{2\pi i x}$ だから, $\varphi \in H$ である。逆に, $\varphi \in H$ とする。そして $\forall x \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\varphi(x) = x + n(x) \quad (n(x) \in \mathbb{Z})$$

とすると, $n(x)=\varphi(x)-x$ は 定値だから $n(x)$ は 定値写像である (連結集合の 連続像は 連結で, $\mathbb{Z}$ 上の連結集合は 1 点のみからなる集合だから)。よって, $\varphi(x)=x-n$ $(n\in\mathbb{Z})$ となる。よって $H(\mathbb{R}^1,p)\cong\mathbb{Z}$ である。したがって, $\pi_1(\mathbb{S}^1)\cong\mathbb{Z}$ である。また $\mathbb{R}^1$ は可縮より, $\pi_n(\mathbb{S}^1)=0$ $(n>1)$ である。

(2) Annulus $A=\{z\in\mathbb{C};1\le|Z|\le 2\}$ の基本群も $\mathbb{Z}$ である。なぜならば, A は $\mathbb{S}^1$ と同じホモトピー型をもつから (各自確かめよ)。

(3) トーラス (torus) $T^2=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ の基本群は $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ である。なぜなら,

$$\pi_1(T^2)\cong\pi_1(\mathbb{S}^1)\times\pi_1(\mathbb{S}^1)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

だからである。ホモロジー群を学んだ諸君は, $H_1(T^2)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ であることを知っているだろう。この群と, 今求めた群 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ は直和で書いてあるか直積で書いてあるかの違いだけで同じものであることを注意しておく。

(4) レンズ空間 (lens space) $L(p,q)$

最初, レンズ空間の説明をしよう。$\mathbb{S}^3\subset\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$ を考える。すなわち

$$\mathbb{S}^3=\{\ (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\ ;\ |z_1|^2+|z_2|^2=1\ \}$$

とし, p, q を二つの互いに素である正の整数とし, $T_{pq}:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ を

$$T_{pq}(z_1,z_2)=(z_1\,e^{\frac{2\pi i}{p}},z_2\,e^{\frac{2q\pi i}{p}})$$

で定義される写像とする。すると T_{pq} は $\mathbb{S}^3$ から $\mathbb{S}^3$ の上への同相写像である。また, $T_{pq}^2=T_{pq}T_{pq}$ も $\mathbb{S}^3$ から $\mathbb{S}^3$ の上への同相写像である。これを続けていくと, $\mathbb{S}^3$ の同相写像からなる群 G が作られ, T_{pq} は G の生成元で, G は p 個の元 $\{T_{pq},T_{pq}^2,\ldots,T_{pq}^{p-1},T_{pq}^p=1\}$ からなる。さらに T_{pq}^j $(1\le j\le p)$ は, $j=p$ を除いて 不動点を持たない。このとき, レンズ空間 $L(p,q)$ は $\mathbb{S}^3$ に作用する群 G の軌道空間 (orbit space) として定義される。すなわち, $L(p,q)=\mathbb{S}^3/\!\sim$ である。ここに 同値関係 $\sim$ は,

$$\forall x,y\in\mathbb{S}^3 \text{ に対して}, x\sim y \text{ とは } \exists T\in G\ ;\ y=T(x)$$

のときと定めたものである。x を含む類を $[x]$ で表すことにする。また, これを $\mathbb{S}^3/G$ とかくことが多い。

このとき, 射影 $\ell:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3/G=L(p,q)$ が考えられ, この ℓ によって, $\mathbb{S}^3/G$ に商位相をいれる。すると $L(p,q)$ は $\mathbb{S}^3$ がコンパクト, 弧状連結, 局所弧状連結であるから, コンパクト, 弧状連結, 局所弧状連結である。よって, ℓ が被覆写像であることがわかる。なぜならば, $\forall[x]\in L(p,q)$ に対して, $\ell^{-1}([x])=\{x,T_{pq}(x),T_{pq}^2(x),\ldots,T_{pq}^{p-1}(x)\}$ であるので, x の $\mathbb{S}^3$ における開近傍 U を $T_{pq}^i(U)\cap T_{pq}^j=\emptyset$ $(i\ne j,\ i\le i,j\le p)$ になるようにとれる ($\mathbb{S}^3$ がコンパクト距離空間より, 各自確かめよ)。そうすると, $\ell(U)$ は $[x]$ の標準近傍で, $T_{pq}^i(U)$ は $T_{pq}^i(x)$ の標準近傍である ($\mathbb{S}^3$ における)。

さて $\pi_1(L(p,q))$ を計算するために, 被覆変換群 $H(\mathbb{S}^3,\ell)$ を計算しよう。

まず $\forall T\in G$ をとると, $Tx\sim x$ より, $\ell(T(x))=\ell(x)$ $(\forall x\in\mathbb{S}^3)$ だから $T\in H$ である。

逆に, $\forall\varphi\in H$ をとると, $\ell\varphi=\ell$ だから, $\forall x\in\mathbb{S}^3$ に対して,

$$\exists j=j(x)\ (1\le j\le p)\ ;\ \varphi(x)=T_{pq}^j(x)$$

である。このとき, $j=j(x):\mathbb{S}^3\to\{1,2,\cdots,p\}=A$ であるが, $\mathbb{S}^3$ は連結より その像 $j(\mathbb{S}^3)$ も連結であり, A の連結成分は 1 点 $\{m\}$ $(1\le m\le p)$ であるから

$$j=j(x)=m\quad(\forall x\in\mathbb{S}^3)$$

となる。すなわち, $x \in \mathbb{S}^3$ に関係ない一定の値を取る。すなわち

$$\varphi = T_{pq}^m$$

であるから, $\varphi \in G$ となる。

よって, $\pi_1(L(p,q)) \cong H(\mathbb{S}^3, \ell) \cong G \cong \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である。

この例は 閉 3 次元多様体においては, 位相同型ではないが, 同じホモトピー型をもつ例であるという意味で重要である (まだここでは位相同型でないことは示せないが)。例えば $L(7,1)$ と $L(7,2)$ は位相同型でないが 同じホモトピー型をもつことが分かっている。(レンズ空間に対しては, 位相同型である, あるいは 同じホモトピー型をもつ必要十分条件は 1960 年代に得られている†。)

8 被覆空間の構成 (Constructions of covering spaces)

さて最終目標である, 被覆空間の構成の問題を考えよう。主定理は次のように述べられる。

定理 8.7 X を弧状連結で局所弧状連結かつ局所単連結な Hausdorff 空間とする。このとき, $\pi_1(X, x_0)$ の任意の部分群 π^0 に対して, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = \pi^0$ をみたす被覆空間 $(\widetilde{X}, p)$ がただ一つ存在する (局所単連結の定義は後程述べる)。

もちろん一意性は, 系 7.7 よりすでに示されているので, 残るは $\widetilde{X}$ の存在だけである。各 π^0 に対して, 位相空間 $\widetilde{X}$ と 写像 $p : \widetilde{X} \to X$ を構成し, ある局所的な条件をみたせば, この構成が要求を完全にみたすことを示す。

さて, 弧状連結な位相空間 (X, x_0) と $\pi_1(X, x_0)$ の部分群 π^0 が与えられているとする。このとき, x_0 を始点とする X の道全体の集合を考え, その集合に対して, 次のように同値関係 $\overset{\pi^0}{\sim}$ 略して $\sim$ を導入する。

α, β を x_0 を始点とする X の道とするとき, $\alpha \overset{\pi^0}{\sim} \beta$ であるとは

(**1**) $\alpha(1) = \beta(1)$ である。

(**2**) すると, $\alpha * \beta^{-1}$ が考えられるが, $[\alpha * \beta^{-1}] \in \pi^0$ である。

のときをいう。もちろん $\overset{\pi^0}{\sim}$ は同値関係となる。

このとき, x_0 を始点とする X の道全体の集合の同値関係 $\overset{\pi^0}{\sim}$ による商集合を $\widetilde{X} = \widetilde{X}_{\pi^0}$ と表し, ℓ を x_0 を始点とする X の道とするとき, ℓ を含む同値類を $[\ell]_{\pi^0}$ あるいは 略して $[\ell]$ で表す。

このとき, $\widetilde{X}$ については, 次のことが必要であることがわかる。

(**1**) 自然に基点である $\widetilde{x}_0$ には, 丁度 $[e]_{\pi^0}$ を対応させねばいけない。

(**2**) $p[\ell]_{\pi^0} = \ell(1)$ で定まる射影 $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ が存在しなければならない。

(**3**) p を連続にする (自然な) 位相が必要である。

ことが分かる。

よって, $\widetilde{x}_0 = [e]_{\pi^0}$ とおく。また, $p : \widetilde{X} \to X$ を $p([\ell]) = \ell(1)$ と定める (p が 全射であるのは明らかである)。残るは (3) である。このためには $\widetilde{X}$ に位相を入れなければならない。

そのために, 次のような, 道に対して, その道の終点の開近傍への道の継続 (continuation) というアイデアを導入しよう。

---

† $L(p,q) \approx L(p',q')$ である必要十分条件は $p = p'$ であって, $q' \equiv \pm q(\ mod\, p\ )$ あるいは $qq' \equiv \pm 1(\ mod\, p\ )$ である。また, $L(p,q) \simeq L(p',q')$ である必要十分条件は $p = p'$ であって, $q' \equiv \pm m^2 q(\ mod\, p\ )$ あるいは $qq' \equiv \pm m^2(\ mod\, p\ )$ をみたす p と互いに素である整数 m が存在することである。

定義 8.1
u を x_0 を始点とする X の道, すなわち, $[u] \in \widetilde{X}$ とし, U を u の終点 $u(1)$ の開近傍とする。このとき $u(1)$ を始点とする X の道 v が U の中に全て含まれている (すなわち $v(t) \in U$, $0 \le t \le 1$) なら, $u * v$ は **u の U への 継続 (*continuation*)** であるという。(図 2 参照)

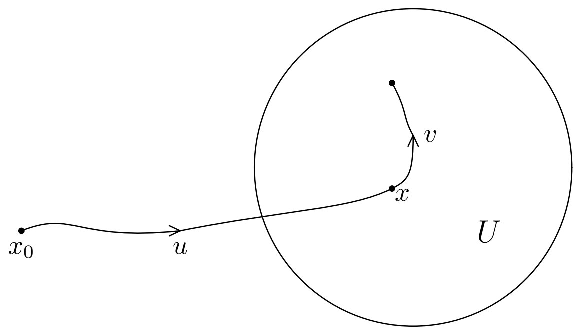


図 2: 継続 (continuation)

$\widetilde{x} = [\ell]_{\pi^0} \in \widetilde{X}$ が与えられたとき, $(U, \widetilde{x})$ で ℓ の U への継続の同値類の集合をあらわす。すなわち, $(U, \widetilde{x}) = \{\, [\ell * v] \in \widetilde{X} \,;\, \ell * v$ は ℓ の U への継続である $\}$ である。ここに U は $p(\widetilde{x}) = \ell(1)$ の開近傍である。
このとき, 明らかに

$$\{\ (U, \widetilde{x})\ ;\ \widetilde{x} = [\ell]_{\pi^0} \in \widetilde{X},\ U \text{ は } p(\widetilde{x}) = \ell(1) \text{ の開近傍 }\}$$

は, $\widetilde{X}$ の位相の基底をなし, $(U, \widetilde{x})$ は $\widetilde{x}$ の開近傍で $p(U, \widetilde{x}) \subset U$ だから, p は連続である。

さらに, $\widetilde{X}$ の位相と p に関する 二, 三の事実を示しておこう。

命題 8.2
$\widetilde{y} \in (U, \widetilde{x})$ ならば $(U, \widetilde{y}) = (U, \widetilde{x})$ である。

証明

命題 8.3
x_0 を始点とする X のすべての道 ℓ に対して, ℓ の持ち上げである $\widetilde{x}_0$ を始点とする $\widetilde{X}$ の道 $\widetilde{\ell}$ が存在する。

証明

命題 8.3 によって, $\widetilde{X}$ は 弧状連結であることが示される。しかし, まだ $(\widetilde{X}, p)$ が被覆空間とは 結論できない。$\widetilde{X}$ と X に関する標準近傍が必要であるが, これには X にまだ局所的な条件が必要である。そのために, 次の様な定義をする。

定義 8.4
(1) X の部分空間 X_0 が,

弱い意味の X に関して単連結 (***weakly simply connected relative to*** X)
(略して w.s.c. という) とは
X_0 の全ての閉じた道が X で 定値写像にホモトピックである。ときをいう。
(2) 位相空間 X が (**弱い意味で**) **局所単連結** (***locally simply connected in the weak sense***)
(略して l.s.c. という) とは,
X の全ての点 x が w.s.c. な近傍をもつ。ときをいう。すなわち, 任意の $x \in X$ に対して, 次をみたす x の近傍 U が存在することをいう。

U のすべての閉じた道は, X で定値写像にホモトピックである。

補題 8.5
X が, 局所弧状連結で, かつ弱い意味で局所単連結ならば,
X は 弧状連結かつ弱い意味の X に関して単連結な開集合からなる基底をもつ。

証明

この 補題の助けにより, 主定理が示される。
まず,

命題 8.6
$\widetilde{X}$ は Hausdorff 空間である。

問題 8.1
命題 8.6 を示せ。

定理 8.7
X が, 局所弧状連結で, かつ (弱い意味で) 局所単連結とすると,
$p : \widetilde{X}_{\pi^0} \to X$ は 被覆写像で,

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}_{\pi^0})) = \pi^0 \subset \pi_1(X, x_0)$$

となる。

証明

補足 : 第 2 章

4 節

証明　(命題 4.1)

上のような $\delta > 0$ が存在しないと仮定すると,
減少列 $\{ \delta_n \}$ で, $\delta_n > 0$, $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ であって, 次の条件をみたすものが存在する。
任意の正の整数 n に対して, X の部分集合 S_n が, 直径 $\rho(S_n) < \delta$ をみたせば, $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して, $S_n \subset U_\alpha$ をみたす U_α が存在しない, すなわち, $S_n \not\subset U_\alpha$ である。

そこで任意の正の整数 n に対して, $x_n \in S_n$ をとる。X はコンパクト距離空間だから, 点列コンパクトである。よって, $\{x_n\}$ の部分列で収束するものが存在する。繁雑さを避けるために, その収束部分列を 再び $\{x_n\}$ で表すことにすると, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ とかける。

$\{U_\alpha\}$ は X の開被覆だから, $\exists \alpha \in \Lambda$; $x \in U_\alpha$ である。すると, 正の整数 N が存在して, x の $\frac{1}{N}$-近傍 $U(x, \frac{1}{N}) \subset U_\alpha$ となる。このとき, 正の整数 M を $\delta_M < \frac{1}{2N}$ で, $x_M \in U(x, \frac{1}{N})$ になるように選ぶ。すると, $a \in S_M$ ならば, $\rho(S_M) < \delta_M < \frac{1}{2N}$ より, $d(a, x_M) < \frac{1}{2N}$ である。よって, $d(a, x) \le d(a, x_M) + d(x_M, x) < \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}$ となる。すなわち $a \in U(x, \frac{1}{N})$。したがって, $S_M \subset U(x, \frac{1}{N}) \subset U_\alpha$ となり矛盾である。

6 節

証明　(定理 6.1)

$U(x)$ で x の標準近傍を表すことにする。

$\boxed{\text{存在}}$　$\mathfrak{U} = \{ \alpha^{-1}(U(\alpha(t))) \}_{t \in I}$ は I の開被覆である。よって, 命題 4.1 によって存在する開被覆 $\mathfrak{U}$ のルベッグ数を δ' とする。

このとき $0 < \delta < \delta'$ をとると, 長さ δ 以下の I の部分区間 I' は $\exists x \in X$; $\alpha(I') \subset U(x)$ をみたす。

そこで まず $[0, \delta]$ について考える。
$[0, \delta]$ に対しても, $\exists x_1 \in X$; $\alpha([0; \delta]) \subset U(x_1)$ である。
すると, $\alpha(0) = x_0 \in U(x_1)$ より条件 $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{U}(\widetilde{x}_1)$, $p(\widetilde{U}(\widetilde{x}_1)) = U(x_1)$ をみたす $\widetilde{x}_1$ の標準近傍 $\widetilde{U}(\widetilde{x}_1)$ が一意に存在する。
そこで, $p_1 = p|_{\widetilde{U}(\widetilde{x}_1)}$ とすると,

$$p_1 : \widetilde{U}(\widetilde{x}_1) \to U(x_1)$$

は, 位相同型写像となる。

そこで $0 \le t \le \delta$ なる t について

$$\widetilde{\alpha}(t) = p_1^{-1} \alpha(t)$$

と定める。

次に, $[0; \delta]$ の代わりに $[\delta; 2\delta]$ ではじめると, 同じように (x_1,$\widetilde{x}_1$ の代わりに $\alpha(\delta)$, $\widetilde{\alpha}(\delta)$ と思えばよい)

$$\widetilde{\alpha} : [\delta; 2\delta] \to \widetilde{X}$$

が 定義される。

この操作を I 上全てに $\widetilde{\alpha}$ が定義できるまで続ける (有限回の操作でできる)。

すると $\widetilde{\alpha}: I \to \widetilde{X}$ が定義されるが, これは連続で, 作り方から $p \cdot \widetilde{\alpha} = \alpha$ である (各自確認せよ)。

$\boxed{\text{一意性}}$ $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2 : I \to \widetilde{X}$ で $\widetilde{\alpha}_1(0) = \widetilde{x}_0$, $\widetilde{\alpha}_2(0) = \widetilde{x}_0$, $p \cdot \widetilde{f}_1 = f = p \cdot \widetilde{f}_2$ をみたすものとするとき, $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$ を示せばよい。

$A = \{\ a \in I\ ;\ \widetilde{\alpha}_1|_{[0;a]} = \widetilde{\alpha}_2|_{[0;a]}\ \}$ とおくと, $a = 0$ なら $\widetilde{\alpha}_1(a) = \widetilde{\alpha}_2(a)$ であるから, $A \neq \emptyset$ である。

そこで $\alpha = \sup\ A$ とおくと, $[0;\alpha) \subset A$ より $[0;\alpha)$ では $\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha}_2$ である。すると
$\underline{\widetilde{\alpha}_1(\alpha) = \widetilde{\alpha}_2(\alpha)}$
なぜならば, もし $\widetilde{\alpha}_1(\alpha) \neq \widetilde{\alpha}_2(\alpha)$ とすると, $p \cdot \widetilde{\alpha}_1(\alpha) = p \cdot \widetilde{\alpha}_2(\alpha)$ だから, 条件 (3) より $\widetilde{X}$ の開集合 U_1, U_2 が存在して, $U_1 \ni \widetilde{\alpha}_1(\alpha)$, $U_2 \ni \widetilde{\alpha}_2(\alpha)$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である。
すると

$$\exists \varepsilon > 0\ ;\ \widetilde{\alpha}_1((\alpha - \varepsilon; \alpha)) \subset U_1\ ,\ \widetilde{\alpha}_2((\alpha - \varepsilon; \alpha)) \subset U_2$$

で, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ より矛盾する。よって $\alpha \in A$ である。

$\underline{a \in A,\ a \neq 1 \text{ ならば } \exists \delta\ ;\ [a; a+\delta] \subset A}$ を示そう。

$\alpha(a)$ に対して, 標準近傍 $U(f(a))$ が存在する。ここで, $a + \delta \in I$, $\alpha([a; a+\delta]) \subset U(\alpha(a))$ をみたす十分小さい $\delta > 0$ をとる。
すると, $\widetilde{\alpha}$ が連続だから $\widetilde{\alpha}_i([a; a+\delta]) \subset \widetilde{U}(\widetilde{\alpha_i}(a))$ をみたす。ところが $p|_{\widetilde{U}(\widetilde{\alpha}_i(a))}$ は単射だから

$$\widetilde{\alpha}_1(t) = \widetilde{\alpha}_2(t) \quad (\forall t \in [a; a+\delta]\,)$$

したがって, $0 \leq \alpha$, $\alpha \in A$ で $\alpha < 1$ なら矛盾。

よって $\alpha = 1$ となり, $\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha}_2$ である。

<u>証明</u>　(定理 6.4)

四角形 $I \times I$ の開被覆

$$\{F^{-1}(U(F(s,t)))\}\ ((s,t) \in I \times I)\ (\text{ ここに } U(x) \text{ は } x \in X \text{ の標準近傍を表す })$$

を考える。命題 4.1 より, この開被覆の ルベック数を使うと,
$\delta_0 > 0$ が存在して, 一辺の長さ δ_0 以下の四角形の F による像はある標準近傍 $U(x)$ に含まれるようにできる。よって, $I \times I$ を一辺の長さ $\delta (< \delta_0)$ の四角形に分割すると, この四角形の F による像はある標準近傍に含まれる。また 定理 6.1 によって, $I \times \{0\}$ を, $\widetilde{x}_0$ を始点とする $\widetilde{X}$ の道 $\widetilde{\alpha}$ に (一意に) 持ち上げられる。すなわち

$$\widetilde{\alpha}: I \times \{0\} \to \widetilde{X}$$

が一意に存在する。

次に, $I_i = \{i\delta\} \times I$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して, $F|_{I_i}$ は X の道で, 始点を x_i とすると $(F|_{I_i}(0) = \alpha(i\delta) = x_i)$, $F|_{I_i}$ は $\widetilde{x}_i$ を始点とする $\widetilde{X}$ の道に持ち上げられる (図 3 参照)。

このとき, $[0;\delta] \times [0;\delta]$ の持ち上げを作るために, まず $F([0;\delta] \times [0;\delta]) \subset U(x)$ ($U(x)$ は x の標準近傍) であり,

$$Q = ([0;\delta] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0;\delta]) \cup (\{\delta\} \times [0;\delta])$$

にはすでに 持ち上げ $\widetilde{F}$ が存在し, $\widetilde{F}(Q) \subset p^{-1}(U)$ である。
ここで, $\widetilde{F}$ は連続で, Q は連結だから, $\widetilde{F}(Q) \subset \widetilde{U}$ である (各自確かめよ)。ここで, $\widetilde{U}$ は p によって同相に

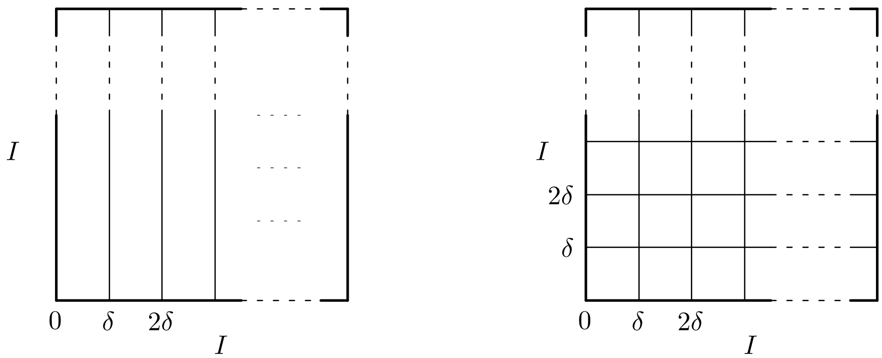


図 3: ホモトピーの持ち上げ

U に移される $\widetilde{X}$ の標準近傍である。
よって, $[0;\delta] \times [0;\delta]$ の元 (s,t) に対して

$$\widetilde{F}(s,t) = (p|_{\widetilde{U}})^{-1} F(s,t) \quad ((s,t) \in [0;\delta] \times [0;\delta])$$

と定義することによって, $\widetilde{F}$ を $[0;\delta] \times [0;\delta]$ に拡張できる (各自確かめよ)。
この操作を $[\delta;2\delta] \times [0;\delta]$, $[2\delta;3\delta] \times [0;\delta]$, $\cdots$ と続けていく。
次に, $[0;\delta] \times [\delta;2\delta]$, $[\delta;2\delta] \times [\delta;2\delta]$, $\cdots$ と続けて行けば, 有限回で $I \times I$ まで拡張できる (各自確かめよ)。
一意性は 系 6.3 より成り立つ。

証明　(定理 6.6)
$\widetilde{\ell}$, $\widetilde{m}$ が $\widetilde{x}_0$ を基点とし, $p(\widetilde{\ell}) = p(\widetilde{m})$ をみたす $\widetilde{X}$ の閉じた道としたとき, $\widetilde{\ell} \simeq \widetilde{m}$ を示せばよいが, $\widetilde{\ell}$ を $p(\widetilde{\ell})$ の持ち上げとみなせば, 系 6.5 そのものであるので, 成り立つ。

証明　(定理 6.7)
$\widetilde{\ell}$ を $\widetilde{x}_0$ から $\widetilde{x}'_0$ への $\widetilde{X}$ の道とする。注 12 によって,

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0)) = p_*(\sigma_{\widetilde{\ell}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))) = \sigma_\ell(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)))$$

よって, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))$ と $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ は 共役部分郡である。
逆に, $\pi^0 = \sigma_\ell(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)))$ とおく。ここで ℓ は x_0 を基点とする道で, $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ である。このとき, $\widetilde{\ell}$ を $\widetilde{x}_0$ を始点とし $p(\widetilde{\ell}) = \ell$ なる $\widetilde{X}$ の道とし, $\widetilde{\ell}(1) = \widetilde{x}'_0$ とおく。すると

$$\pi^0 = \sigma_\ell(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))) = p_*(\sigma_{\widetilde{\ell}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))) = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))$$

証明　(定理 6.8)
$\pi^0 = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ による $\pi_1(X, x_0)$ の右剰余類から, x_0 の上にある点への対応を, 次のように定める。
$[\ell] \in \pi_1(X, x_0)$ をとり, $\widetilde{\ell}$ を $\widetilde{x}_0$ を始点とする ℓ の持ち上げとする。ℓ は 閉じた道だから, $\widetilde{\ell}(1) \in p^{-1}(x_0)$ である。それゆえ, $\psi : \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ を

$$\psi([\ell]) = \widetilde{\ell(1)}$$

と定める (系 6.5 より well-defined である)。
ψ は明らかに全射である。
また $\psi[\ell]=\psi([m])$ とすると, $\widetilde{\ell}(1)=\widetilde{m}(1)$ より, $[\widetilde{\ell}*\widetilde{m}^{-1}]\in\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ だから, $p_*([\widetilde{\ell}*\widetilde{m}^{-1}])=[\ell][m]^{-1}\in\pi^0$ である。すなわち $[\ell]$ と $[m]$ は同じ右剰余類にはいる。逆に $[\ell]\in\pi^0[m]$ だと (右剰余類として同じ), 明らかに $\psi([\ell])=\psi([m])$ である。
よって, $\psi([m])=\psi([\ell])$ と, $[m]$ と $[\ell]$ が同じ右剰余類にはいることは, 同値である。
ここで, $[\ell][m]^{-1}\in\pi^0$ とすると, $\ell\simeq m$ である。
したがって, ψ は 剰余類の上で一つの同じ値を取り, 異なる剰余類に対しては異なる値を取る。
よって ψ は単射。

[x_0 の選び方によらないことの証明]
$\forall x_1\in X$ をとり, ℓ を x_0 から x_1 への道とする。
$\widetilde{\ell}$ を ℓ の持ち上げで, $\widetilde{x}_0$ を始点とするものとし, $\widetilde{\ell}(1)=\widetilde{x}_1$ とおく。注 12 によって

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0) & \overset{\sigma_{\widetilde{\ell}}}{\cong} & \pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_1)\\ \downarrow p_* & & \downarrow p_*\\ \pi_1(X,x_0) & \overset{\sigma_{\ell}}{\cong} & \pi_1(X,x_1)\end{array}$$

は可換図式だから

$$[\pi_1(X,x_0),p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))]=[\pi_1(X,x_1),p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_1))]$$

である。

7 節

証明 (補題 7.2)
$\Longleftarrow$ は明らか。
$\Longrightarrow$ を示す。A が 局所弧状連結とする。A の任意の点 p と p の 任意の開近傍 U に対して, $V=\{\ x\in U\ ;\ x$ は p と U の道で結ばれる $\}$ とおくと,
(**1**) $p\in V\subset U$
(**2**) V は開集合
(**3**) V は弧状連結
が示される。このとき, 各 $p\in A$ に対して, V_p を作れば,

$$\{\ V_p\ \}_{p\in A}$$

が基底である。
(1), (2), (3) を示せば終る。
(1) は明らか。
(2) $\forall x\in V$ ならば $x\in U$, A は局所弧状連結より,
$\exists W$; 開集合が存在して, $x\in W\subset U$ で, $\forall w\in W$ は x と U の道で結ばれる。
よって, $w\in V$ (p と x, x と w の道を続ければよい) である。
したがって, $W\subset V$ となり, V は開集合。

(3) $\forall v \in V$ が V の道で p と結ばれることを 示せばよい。
$\forall v \in V$ に対して, p と v を結ぶ U の道 ℓ が存在する。しかし, 任意の t $(0 \leq t \leq 1)$ に対して $\ell(t) \in V$ である。なぜならば, $\ell(t)$ は p と U の道 $\ell(ts)$ $(0 \leq s \leq 1)$ で結ばれるので。

<u>証明</u>　(定理 7.3)
($\Longleftarrow$ の証明)
$f_*(\pi_1(A, a_0)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ とする。
$\forall a \in A$ とし, ℓ を a_0 と a を結ぶ道とすると, $f(\ell)$ は $x_0 = f(a_0)$ と $x_1 = f(a)$ を結ぶ道だから,
$\widetilde{x}_0$ を始点とする $f(\ell)$ の持ち上げ $\widetilde{m}$ が存在するが,

$\boxed{\widetilde{m}(1) \text{ は } \ell \text{ の取り方によらない。}}$

なぜならば, ℓ_1 を a_0 と a を結ぶ A の道とし, $\widetilde{m}_1$ を $\widetilde{x}_0$ を始点とする $f(\ell_1)$ の持ち上げとする。$\ell * \ell_1^{-1}$ は a_0 を基点とする閉じた道だから, $k = f(\ell * \ell_1^{-1})$ も x_0 を 基点とする閉じた道である。よって, $\widetilde{m}(1) = \widetilde{m}_1(1)$
そこで, $\boxed{\widetilde{f}(a) = \widetilde{m}(1) \text{ と定義すれば } \widetilde{f} \text{ は連続である。}}$
$\widetilde{x}$ の任意の開近傍 $\widetilde{V}(\widetilde{x})$ をとる。このとき, $\widetilde{U}(\widetilde{x})$ を $\widetilde{x}$ の標準近傍とすると, $\widetilde{W}(\widetilde{x}) = \widetilde{V}(\widetilde{x}) \cap \widetilde{U}(\widetilde{x})$ は, $\widetilde{x}$ の開近傍で

$$\widetilde{W}(\widetilde{x}) \subset \widetilde{V}(\widetilde{x})$$

かつ p によって $\widetilde{W}(\widetilde{x})$ は 同相に $W(x)$ に移る。$f^{-1}(W(x))$ は a の開近傍で, A は局所弧状連結だから, 弧状連結な a の開近傍 $N(a)$ が存在して, $N(a) \subset f^{-1}(W(x))$ をみたす。
すると, <u>$\widetilde{f}(N(a)) \subset \widetilde{W}(\widetilde{x})$ である。</u>
なぜなら, $b \in N(a)$ をとると, b は N の道で a と結ばれる。この道を使って $\widetilde{f}(b)$ を定められるので $\widetilde{f}(b) \in \widetilde{W}(\widetilde{x})$ となるから
よって, $\widetilde{f}$ は連続
($\Longrightarrow$ の証明)
$\widetilde{f}$ を f の持ち上げで $\widetilde{f}(a_0) = \widetilde{x}_0$ なる連続写像とする。すると, 明らかに,

$$f_*(\pi_1(A, a_0)) = p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(A, a_0))) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　(定理 7.4)
A が 弧状連結で 局所弧状連結だから, $A \times I$ も 弧状連結で 局所弧状連結であり, $F_*(\pi_1(A \times I)) = f_*(\pi_1(A))$ より, $f_*(\pi_1(A)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}))$ ならば,

$$F_*(\pi_1(A \times I)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}))$$

だから。

<u>証明</u>　(注 13)
(2) は次のように示せる。
$n \geq 1$ のとき, $\mathbb{S}^n$ は 弧状連結かつ局所弧状連結,

$n \geq 2$ のとき, $\mathbb{S}^n$ は 単連結 (証明は後程) だから,
定理 7.3 より, $f : (\mathbb{S}^n, a_0) \to (X, x_0)$ の $\widetilde{x}_0$ を始点とする持ち上げ $\widetilde{f} : (\mathbb{S}^n, a_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ が一意に定まるが, 定理 7.4 より,

$$f \simeq g \Longleftrightarrow \widetilde{f} \simeq \widetilde{g}$$

である。よって 写像 $p_* : \pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ を

$$p_*([\widetilde{f}]) = [p\widetilde{f}] = [f]$$

と定めると, well-defined で, 全単射である。明らかに, p_* は準同型写像だから 同型写像である。

証明　(定理 7.6)
定理 7.3 より,

$$\exists!\ h : (\widetilde{X}^{(1)}, \widetilde{x}_0^{(1)}) \to (\widetilde{X}^{(2)}, \widetilde{x}_0^{(2)}) \quad s.t. \quad p^{(2)}h = p^{(1)}$$

だから, これが, 被覆写像であることを示せばよい。
すなわち, $\forall \widetilde{x}^{(2)} \in \widetilde{X}^{(2)}$ に対して, $h^{-1}(\widetilde{U}(\widetilde{x}^{(2)}))$ が, 被覆の定義の条件をみたす 互いに交わらない開集合に分けられる 開近傍 $\widetilde{U}(\widetilde{x}^{(2)})$ をみつければよい。

$x = p^{(2)}(\widetilde{x}^{(2)})$ として, U_2 を $p^{(2)}$ に関する x の標準近傍, U_1 を $p^{(1)}$ に関する x の標準近傍とする。X は局所弧状連結だから, $U_1 \cap U_2$ に含まれる x の 弧状連結な開集合 U が存在する。この U は $U \subset U_i$ $(i = 1, 2)$ だから $p^{(1)}$ に関しても $p^{(2)}$ に関しても x の標準近傍である。すると

$$\left(p^{(2)}\right)^{-1}(U) = \bigcup \widetilde{U}(\widetilde{x}_j^{(2)})$$

とかけ, $p^{(2)}(\widetilde{x}_j^{(2)}) = x$ で $\widetilde{U}(\widetilde{x}_j^{(2)})$ は $p^{(2)}$ に関する標準近傍である。そして, $p^{(2)}(\widetilde{x}_j^{(2)}) = x$ より

$$\exists j_0 \ ; \ \widetilde{x}_{j_0}^{(2)} = \widetilde{x}^{(2)}$$

このとき,

$\boxed{\widetilde{U}(\widetilde{x}^{(2)}) = \widetilde{U}(\widetilde{x}_{j_0}^{(2)}) \text{ が, } \widetilde{x}^{(2)} \text{ の } h \text{ に関する } \widetilde{X}^{(2)} \text{ の標準近傍となる。}}$

なぜなら, $\left(p^{(1)}\right)^{-1}(U) = \bigcup \widetilde{U}(\widetilde{x}_k^{(1)})$ とすると, $\widetilde{U}(\widetilde{x}_k^{(1)})$ は $\widetilde{x}_k^{(1)}$ の $p^{(1)}$ に関する標準近傍であり, $p^{(1)}(x_k^{(1)}) = x$ で $p^{(1)}|_{\widetilde{U}\widetilde{x}_k^{(1)}}$ は同相写像なので, $\widetilde{U}(\widetilde{x}_k^{(1)})$ は 弧状連結である。このとき $p^{(2)}h = p^{(1)}$ より

$$h(\widetilde{U}(\widetilde{x}_k^{(1)})) = \widetilde{U}(\widetilde{x}^{(2)}) \quad \text{であるか} \quad h(\widetilde{U}(\widetilde{x}_k^{(1)})) \cap \widetilde{U}(\widetilde{x}^{(2)}) = \emptyset$$

である (各自示せ)。よって, $\widetilde{U}(\widetilde{x}_k^{(1)})$ は h に関して $X^{(1)}$ の標準近傍であり, $h(\widetilde{U}(\widetilde{x}_k^{(1)})) = \widetilde{U}(\widetilde{x}^{(2)})$ は 対応する $\widetilde{X}^{(2)}$ の標準近傍である。

証明　(系 7.7)
定理 7.3 によって,

$$\begin{aligned}
&\exists!\ h : (\widetilde{X}^{(1)}, \widetilde{x}_0^{(1)}) \to (\widetilde{X}^{(2)}, \widetilde{x}_0^{(2)}) \\
&\exists!\ k : (\widetilde{X}^{(2)}, \widetilde{x}_0^{(2)}) \to (\widetilde{X}^{(1)}, \widetilde{x}_0^{(1)}) \\
&s.t. \quad h(\widetilde{x}_0^{(1)}) = \widetilde{x}_0^{(2)}, \quad h(\widetilde{x}_0^{(2)}) = \widetilde{x}_0^{(1)}, \quad p^{(2)}h = p^{(1)}, \quad p^{(1)}k = p^{(2)}
\end{aligned}$$

よって,

$$p^{(2)}hk = p^{(2)},\ p^{(1)}kh = p^{(1)}$$

である。

$p^{(2)}hk = p^{(2)}$ より, 1 と hk は $(\widetilde{X}^{(2)}, \widetilde{x}_0^{(2)}) \to (\widetilde{X}^{(2)}, \widetilde{x}_0^{(2)})$ で, $p^{(2)}$ を被覆している ($p^{(2)}$ の持ち上げである)。そして, $1(\widetilde{x}_0^{(2)}) = \widetilde{x}_0^{(2)}$, $hk(\widetilde{x}_0^{(2)}) = \widetilde{x}_0^{(2)}$ であるから, 持ち上げの一意性から,

$$1 = hk$$

同様に,

$$1 = kh$$

したがって, h, k は位相同型写像である。

<u>証明</u>　(定理 7.9)

まず π から H への写像 $\varphi : \pi \to H$ を定める。そのために, $\forall\alpha \in \pi$ をとり, $\widetilde{x}_0$ を x_0 の上にある点とする。v を $[v] = \alpha$ なる 基点を x_0 とする X の閉じた道とする。さらに, $\widetilde{x}_0$ を始点とする v の持ち上げ $\widetilde{v}$ を考え, $\widetilde{x}'_0$ を $\widetilde{v}$ の終点とする。このとき, 系 6.5 より, $\widetilde{x}'_0$ は α にのみ依存する (v の取り方によらない)。系 7.7 あるいは 系 7.7 の証明を使うと, $\widetilde{x}_0$ を $\widetilde{x}'_0$ に移す被覆変換は一意に存在するので, それを h_α と表すと, $p \cdot h_\alpha = p$ である, すなわち, h_α は被覆変換である。

そこで, π から H への写像 φ を $\varphi(\alpha) = h_\alpha$ と定めると, $\widetilde{X}$ は弧状連結だから, φ は全射である。
次に, <u>φ は準同型を示そう。</u>
$\forall\alpha, \beta$ をとる。そして, $h_\beta(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0$ とする。もし, h_β の決め方から, $\widetilde{x}_0$ から $\widetilde{y}_0$ への $\widetilde{X}$ の道 $\widetilde{w}$ に対して, $w = p \cdot \widetilde{w}$ は x_0 から x_0 への X の道であって, $[w] = \beta$ である。この w の $h_\alpha(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}'_0$ を始点とする持ち上げ $\widetilde{w}'$ を作ると, $h_\alpha(\widetilde{w})$ も $\widetilde{w}'$ も始点が $\widetilde{x}'$ である w の持ち上げなので, 一意性より $h_\alpha(\widetilde{w}) = \widetilde{w}'$ である。よって, $\widetilde{w}'(1) = \widetilde{y}'_0$ とおくと, $\widetilde{y}'_0 = \widetilde{w}'(1) = h_\alpha(\widetilde{w}(1)) = h_\alpha(\widetilde{y}_0) = h_\alpha(h_\beta(\widetilde{x}_0)) = (h_\alpha \cdot h_\beta)(\widetilde{x}_0)$ である。 また $\widetilde{x}'_0$ は $h_\alpha(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}'_0$ より, $[v] = \alpha$ なる X の x_0 から x_0 への X の道 v の $\widetilde{x}_0$ を始点とする持ち上げ $\widetilde{v}$ の終点であり, $\widetilde{y}'_0$ は $\widetilde{v} * \widetilde{w}$ の終点である。これは $v * w$ の $\widetilde{x}_0$ を始点とする持ち上げだから, $h_{\alpha\beta}(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}'_0$ である。よって, $(h_\alpha \cdot h_\beta)(\widetilde{x}_0) = h_{\alpha\beta}(\widetilde{x}_0)$ である。したがって, $h_\alpha \cdot h_\beta = h_{\alpha\beta}$ といえる。

最後に, <u>$\ker\varphi = \pi^0$</u> を示そう。

これは, $h_\alpha = 1$ とすると, $[v] = \alpha$ をみたす x_0 を基点とする X の閉じた道 v に対して $\widetilde{x}_0$ を始点とする v の持ち上げである $\widetilde{X}$ の道 $\widetilde{v}$ の終点が x_0 であること。すなわち $\widetilde{v}$ は閉じた道であることを意味する。そこで $\widetilde{\alpha} = [\widetilde{v}]$ とおくと, $\widetilde{\alpha} \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ で $p \cdot \widetilde{v} = v$ より $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ である。よって $\alpha \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = \pi^0$ となる。逆は, 同様なので各自確かめよ。

<u>8 節</u>

<u>証明</u>　(命題 8.2)

$\widetilde{x} = [\ell]_{\pi^0} \in \widetilde{X}$ とすると, $\widetilde{y} \in (U, \widetilde{x})$ より, U 内の道で, $\ell(1)$ を始点とし, $\widetilde{y} = [\ell * m]_{\pi^0}$ をみたす道 m が存在する。このとき, 任意の $\ell * m$ の U への継続は, ℓ の U への継続になるので, $(U, \widetilde{y}) \subset (U, \widetilde{x})$ となる。また, U への ℓ の継続は, U への m の継続にホモトピックであるから, $(U, \widetilde{x}) \subset (U, \widetilde{y})$ といえる。

<u>証明</u>　(命題 8.3)

ℓ_t $(0 \leq t \leq 1)$ を $\ell_t(s) = \ell(ts)$ $(0 \leq s \leq 1)$ で定められる X の道たちとすると, ℓ_t は x_0 を始点とし, $\ell(t)$ を終点とする X の道であり, t が増えるにしたがって x_0 で止まっている道から $\ell_1 = \ell$ まで変わる。

そこで, $\widetilde{\ell}$ を $\widetilde{\ell}(t) = [\ell_t]_{\pi^0}$ と定めると, $\widetilde{X}$ の道である。すなわち, $\widetilde{\ell} : I \to \widetilde{X}$ は連続で (各自確かめよ), 明らかに, $p(\widetilde{\ell}) = \ell$ で,

$$\widetilde{\ell}(1) = [\ell]_{\pi^0}$$

となる。

証明 ($\widetilde{\ell}$ が連続であること)

$I = [0,1]$ の任意の点 t において $\widetilde{\ell} : I \to \widetilde{X}$ が連続であることを示す。$\widetilde{\ell}(t) = \widetilde{x}$ とおくと, $\widetilde{x}$ を含む基底の元 $(U, \widetilde{x})$ に対して, t の I における開近傍 J が存在して, $\widetilde{\ell}(J) \subset (U, \widetilde{x})$ を示せばよい。 ここに U は $x = p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{\ell}(t)) = p([\ell_t]) = \ell_t(1)$ の 開近傍 U である。
$p(\widetilde{\ell}) = \ell$ すなわち, $p(\widetilde{\ell}(t)) = \ell(t) = \ell_t(1)$ で $\ell : I \to X$ は連続なので, 上の $x = \ell_t(1)$ の開近傍 U に対して, t の I における開区間 J が存在して, $\ell(J) \subset U$ をみたす。このとき $t' \in J$ をとると, $\widetilde{\ell}(t') \in (U, \widetilde{x})$ である。なぜなら, $\widetilde{\ell}(t') = [\ell_{t'}] = [\ell_t * \xi]$ をみたす $\ell_t(1)$ を始点とし $\ell_{t'}(1)$ を終点とする ℓ に沿った道 ξ が存在する。そして, $\ell_t(1) \in U$, $\ell_{t'}(1) \in U$ と ξ の作り方より, ξ は U 内の道である。よって, $\widetilde{\ell}(t')$ は $(U, \widetilde{x})$ に含まれる。

証明 (補題 8.5)

$\forall x \in X$ をとり, V を X の開集合で, $x \in V$ とする。仮定より, X の弱い意味の局所単連結な近傍 W が存在する。すると, $W \cap V$ も x の近傍で, X は 局所弧状連結だから, $U_x \subset V \cap W$ をみたす x の弧状連結な開近傍 $U_x^{(V)}$ が存在する。$U_x^{(V)} \subset W$ より, $U_x^{(V)}$ も, また 弱い意味の単連結である。よって $\mathfrak{B} = \{\ U_x^{(V)}\, ; x \in X, V; x$ の開近傍$\}$ とすれば, 求める X の基底になる。

逆は 明らかに成り立つ。

証明 (命題 8.6)

任意に $\widetilde{X}$ の異なる元 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ をとる $(\widetilde{x} \neq \widetilde{y})$。 このとき x_0 を始点とする X の道 α, β が存在して, $\widetilde{x} = [\alpha]$, $\widetilde{[y]} = [\beta]$ である。このとき, $p([\alpha]) = \alpha(1) = x$, $p([\beta]) = \beta(1) = y$ とおくと, x, y は X の点である。そこで, 次のように 2 つの場合に分けて証明する。

場合 (i) $x \neq y$ のとき,
X は ハウスドルフ空間なので, x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在して, $U \cap V = \emptyset$ をみたす。すると $\widetilde{x} \in (U, \widetilde{x})$ で $\widetilde{y} \in (V, \widetilde{y})$ で, さらに, $(U, \widetilde{x}) \cap (V, \widetilde{y}) = \emptyset$ であることが分かる。
なぜなら, $[\gamma] \in (U, \widetilde{x}) \cap (V, \widetilde{y})$ とすると, $[\gamma] \in (U, \widetilde{x})$ より, $x = \alpha(1)$ を始点とする U 内の道 ξ が存在して, $[\gamma] = [\alpha * \xi]$ である。また, $[\gamma] \in (V, \widetilde{y})$ より $y = \beta(1)$ を始点とする V 内の道 η が存在して, $[\gamma] = [\beta * \eta]$ である。したがって, $\gamma(1) = \xi(1) \in U$ であり, $\gamma(1) = \eta(1) \in V$ となり $U \cap V = \emptyset$ に矛盾する。

場合 (ii) $x = y$ のとき,
X が 局所単連結なので, $x = y$ の 開近傍 U が存在して, U 内の閉じた道は X で定値写像とホモトピックである。すると $\widetilde{x} \in (U, \widetilde{x})$ かつ $\widetilde{y} \in (U, \widetilde{y})$ で, $(U, \widetilde{x}) \cap (U, \widetilde{y}) = \emptyset$ である。
なぜなら, $[\gamma] \in (U, \widetilde{x}) \cap (U, \widetilde{y})$ とすると, $[\gamma] \in (U, \widetilde{x})$ より, x を始点とする U 内の道 ξ が存在して, $[\gamma] = [\alpha * \xi]$ であり, $[\gamma] \in (U, \widetilde{y})$ より, $y = x$ を始点とする V 内の道 η が存在して, $[\gamma] = [\beta * \eta]$

である。よって $[\alpha*\xi]=[\beta*\eta]$ より, まず $\xi(1)=\eta(1)$ で, かつ $[\alpha*\xi*(\beta*\eta)^{-1}]\in\pi^0$ すなわち $[\alpha*\xi*\eta^{-1}*\beta^{-1}]\in\pi^0$ であるが, $\xi*\eta^{-1}$ は U 内の閉じた道であるから, 仮定より $\xi*\eta^{-1}\simeq 1$ である。よって $\alpha*\xi*\eta^{-1}*\beta^{-1}\simeq\alpha*\beta^{-1}$ より, $[\alpha*\beta^{-1}]\in\pi^0$ となるので, $[\alpha]=[\beta]$, すなわち $\widetilde{x}=\widetilde{y}$ となり これは仮定に矛盾する。

証明　(定理 8.7)

$x\in X$ の標準近傍として, x を含む 弧状連結で, 弱い意味の単連結な 開集合 $U=U_x$ をとる (補題 8.5)。さらに $\widetilde{x}$ が x の上にある点ならば, $\widetilde{U}=(U,\widetilde{x})$ を $\widetilde{x}$ の標準近傍としてとれば, 次のことが 示される。

(1) $p|_{\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to U$ は 位相同型 (全射) である。

(2) $p^{-1}(U)=\displaystyle\bigcup_{\widetilde{x}\in p^{-1}(x)}(U,\widetilde{x})$ である。

(3) $\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2\in\widetilde{X}$, $p(\widetilde{x}_1)=p(\widetilde{x}_2)=x$, $\widetilde{x}_1\neq\widetilde{x}_2$ ならば, $(U,\widetilde{x}_1)\cap(U,\widetilde{x}_2)=\emptyset$ である。

まず, p が連続であることは示したので,

(a) p が全射である

(b) p が開写像である。

を示そう。

(a) p が全射

X の任意の点 x に対して, X が弧状連結なので, x_0 を始点とし, x を終点とする X の道 u が存在するので, $\widetilde{x}=[u]_{\pi^0}$ とおくと, $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ で, $p(\widetilde{x})=u(1)=x$ となるので, p は全射である。

(b) p が開写像

p が開写像であることを示すには, $\widetilde{X}$ の基底の任意の元 $(V,\widetilde{x})$ に対して, $p((V,\widetilde{x}))$ が開集合を示せばよい。但し $\widetilde{x}=[u]_{\pi^0}$, $p(\widetilde{x})=u(1)=x$, V は x の開近傍である。

$p((V,\widetilde{x}))\subset V$ は p の定め方より明らか。逆を示すために, 先ず x と V 内の道で結ばれる V の点の集合を $A=\{\,z\in V\,;\,z\,\text{は}\,x\,\text{と}\,V\,\text{内の道で結ばれる}\,\}$ とおく。そして $y\in p((V,\widetilde{x}))$ を任意にとると, $p(\widetilde{y})=y$ をみたす $(V,\widetilde{x})$ の元 $\widetilde{y}$ が存在する。すなわち, x を始点とする V 内の道 v が存在して $\widetilde{y}=[u*v]$ で $p(\widetilde{y})=(u*v)(1)=v(1)=y$ となる。また一方, X が局所弧状連結であることより, y の弧状連結な近傍 W が存在して, $W\subset V$ である。すると明らかに, $W\subset A$ である (各自確かめよ) ので, $A\subset p((V,\widetilde{x}))$ を示せば, $W\subset p((V,\widetilde{x}))$ となるので, $p((V,\widetilde{x}))$ が y の近傍となり, $p((V,\widetilde{x}))$ が開集合であることが示される。

さて, $A\subset p((V,\widetilde{x}))$ を示すために, A から任意に元 z をとると, $z\in A$ より x を始点とし z を終点とする V 内の道 ℓ が存在する。ここで $\widetilde{z}=[u*\ell]$ を考えると ℓ も V 内の道であるから, ￥$wtz=[u*\ell]\in(V,\widetilde{x})$ である。また $p(\widetilde{z})=p([u*\ell])=(u*\ell)(1)=\ell(1)=z$ となるので, $z\in p((V,\widetilde{x}))$ となる。

[注] 実際には, $p((V,\widetilde{x}))$ の任意の元 y をとれば, $(V,\widetilde{x})$ の元 $[u*\ell]$ (ℓ は x を始点とする V 内の道) が存在して, $p([u*\ell]))=y$ である $(\ell(1)=y)$ から, $y\in A$ となるので, $A=p((V,\widetilde{x}))$ である。

次に, (1), (2) そして (3) を示す。

$\boxed{\text{(1) の証明}}$

$p|_{\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to U$ が全射

U は 弧状連結だから, $p(\widetilde{U})=U$ である。

なぜなら, U の任意の元 y に対して, U は弧状連結だから, x を始点とし, y を終点とする U 内の道 ξ が存在するので, $\widetilde{y} = [u * \xi]_{\pi^0}$ とおけば, $\widetilde{y} \in \widetilde{U}$ で, $p(\widetilde{y}) = (u * \xi)(1) = \xi(1) = y$ である。

<u>$p|_{\widetilde{U}}$ が単射</u>

$\widetilde{y}, \widetilde{z} \in \widetilde{U} = (U, \widetilde{x})$ で $p(\widetilde{y}) = p(\widetilde{z})$ をみたす元 $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$ をとる。ここで, $\widetilde{x} = [u]$ とすれば, x から $p(\widetilde{y}) = y = z = p(\widetilde{z})$ への U 内の道 ℓ, m が存在して,

$$\widetilde{y} = [u * \ell],\ \widetilde{z} = [u * m]$$

とおける。ここで, U は 弱い意味の単連結だから, $\ell * m^{-1}$ は X で 定値写像にホモトピックである。よって, $u * \ell * m^{-1} * u^{-1}$ も 定値写像にホモトピックである。したがって,

$$[u * \ell] = [u * m]$$

よって, $\widetilde{y} = \widetilde{z}$ である。

<u>$p|_{\widetilde{U}}$ は 開写像</u>

A が $\widetilde{U}$ で開集合ならば, $\widetilde{U}$ が $\widetilde{X}$ で開集合だから, A は $\widetilde{X}$ でも開集合なので, p が開写像であることに注意すれば, $p(A)$ は X で開集合である。よって $p|_{\widetilde{U}}(A) = p(A) \cap U$ より, $(p|_{\widetilde{U}})(A)$ が U で 開集合となる。

$\boxed{\text{(2) の証明}}$

$p^{-1}(U) \supset \displaystyle\bigcup_{\widetilde{x} \in p^{-1}(x)} (U, \widetilde{x})$ は, $p(U, \widetilde{x}) = U$ より明らかだから, $p^{-1}(U) \subset \displaystyle\bigcup_{\widetilde{x} \in p^{-1}(x)} (U, \widetilde{x})$ を示せばよい。

$\forall \widetilde{y} \in p^{-1}(U)$ をとると, $p(\widetilde{y}) \in U$ だから, x_0 からの X の道で, 終点 $\ell(1)$ は U に属する道 ℓ が存在して, $\widetilde{y} = [\ell]$ となる。すると, U は 弧状連結だから, x から $\ell(1)$ への U 内の道 m が存在する。すると, $[\ell * m^{-1}] \in p^{-1}(x)$ で, $[\ell] = [\ell * m^{-1} * m]$ とかけるから, $\widetilde{x} = [\ell * m^{-1}]$ とすれば, $\widetilde{y} = [(\ell * m^{-1}) * m] \in (U, \widetilde{x})$ となり, 証明終了。

$\boxed{\text{(3) の証明}}$

$\widetilde{y} \in (U, \widetilde{x}_1) \cap (U, \widetilde{x}_2)$ をとると, 補題 8.5 より $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in (U, \widetilde{y})$ で, $p|_{(U, \widetilde{y})}$ は単射だから, $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_2$ である。

これで, $p : \widetilde{X}_{\pi^0} \to X$ は 被覆写像であることが示せた。

あと残るは, $\boxed{p_*(\pi_1(\widetilde{X}_{\pi^0}) = \pi_0}$ をしめすことが残っている。

ℓ を x_0 を基点とする X の閉じた道とすると, ℓ の上にある (持ち上げである) $\widetilde{x}_0$ を始点とする $\widetilde{X}_{\pi^0}$ の道は ただ一つなので, それを $\widetilde{\ell}$ とする。さて $\forall t \in I$ に対して $\ell_t(s) = \ell(st)$ と定めた道たち ℓ_t で定まる $[\ell_t]$ も 始点が $\widetilde{x}_0$ である ℓ の持ち上げである。ℓ の持ち上げの一意性より

$$\widetilde{\ell} = [\ell_t]$$

である。すると

$[\ell] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ ならば $p \cdot \widetilde{\ell} = \ell$ より, $[\widetilde{\ell}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ である。すなわち $\widetilde{\ell}$ は閉じた道である。よって $[\ell] = [e]$ となる。したがって $[\ell] \in \pi^0]$ となる。

逆に $[\ell] \in \pi^0$ とすると, $[\ell] = [e] = \widetilde{x}_0$。ここで ℓ の $\widetilde{x}_0$ を始点とする $\widetilde{X}$ への持ち上げを $\widetilde{\ell}$ とすると $\widetilde{\ell}(1) = \widetilde{x}_0$、すなわち $\widetilde{\ell}$ は閉じた道であるから $[\widetilde{\ell}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ でさらに $p_*([\widetilde{\ell}]) = [\ell]$ より $[\ell] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ となる。

よって, $\pi^0 = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ となり証明終了。

9　持ち上げに関する定理の別証

6 節において, 道の持ち上げ 道のホモトピーの持ち上げの存在と一意性を示し, 節 7 において, それらを使って写像の持ち上げ、ホモトピーの持ち上げについて述べた。

ここでは順序を変えて, 道の持ち上げ 道のホモトピーの持ち上げの存在と一意性を使わないで, 写像の持ち上げ、ホモトピーの持ち上げの定理を示す。ただし, コンパクトという条件をつけることになるけれども。

先ず一意性については, 前と同様に先に簡単に示される。すなわち

定理 9.1　$(\widetilde{X}, p)$ を空間 X の被覆空間とし, Y を連結かつ局所連結な空間とする。$\alpha, \beta : Y \to \widetilde{X}$ を

(**1**) $p \cdot \alpha = p \cdot \beta$

(**2**) $y_0 \in Y$ に対して $\alpha(y_0) = \beta(y_0)$

である連続写像とすると, $\alpha = \beta$ である。

<u>証明</u>

$$Z = \{\, y\, ;\, \alpha(y) = \beta(y)\,\}$$

とする。$Z = Y$ を示したい。Y は連結で, $Z \neq \emptyset$ $(y_0 \in Z)$ であるから, Z が開かつ閉であることを示せばよい。

<u>Z が閉であること</u>：　写像 $\alpha \times \beta : Y \to \widetilde{X} \times \widetilde{X}$ を

$$(\alpha \times \beta)(y) = (\alpha(y), \beta(y))$$

によって定義すると, $\alpha \times \beta$ は連続である。D を $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ の対角集合, すなわち

$$D = \{\, (\widetilde{x}, \widetilde{x})\, ;\, \widetilde{x} \in \widetilde{X}\,\}$$

とする。$\widetilde{X}$ はハウスドルフであるから, D は閉である。したがって, $Z = (\alpha \times \beta)^{-1}(D)$ は Y の中で閉。(この議論は, 任意の位相空間 S から 任意のハウスドルフ空間 T への任意の 2 つの連続写像に対して, 2 つの写像一致するような点の集合が S の中で閉になることを示している。)

<u>Z が開であること</u>：　$z \in Z$ とし, $x = p \cdot \alpha(z) = p \cdot \beta(y)$ とする。U を, x を含む標準的な開集合とすると, $p^{-1}(U)$ は交わらない開集合の和集合である。$\alpha(z) = \beta(z)$ を含むその中の 1 つの開集合を W とする。W は $p^{-1}(U)$ の中で開かつ閉である。したがって, $p^{-1}(U)$ の連結な部分集合で W の点を含むものはすっかり W に含まれる。さて, $(p \cdot \alpha)^{-1}(U)$ は z を含む Y の開集合である。Y は局所連結あるから, $z \in V_1 \subset (p \cdot \alpha)^{-1}(U)$ なる Y の中の連結な開集合 V_1 が存在する。α が連続であるから, $\alpha(V_1)$ は $p^{-1}(U)$ の中の連結集合である。また $\alpha(z) \in W$ である。したがって $\alpha(V_1) \subset W$。同様に, z を含む Y の中の連結な開集合 V_2 が存在して, $\beta(V_2) \subset W$ である。$p|_W$ が単射で $p \cdot \alpha = p \cdot \beta$ であるから, $V_1 \cap V_2$ 上では $\alpha = \beta$ である。したがって $V_1 \cap V_2$ は Z に含まれ, z を含む開集合である。これは Z が開集合であることを示している。□

定理 9.2 (ホモトピー被覆定理)

$(\widetilde{X}, p)$ を空間 X の被覆空間とし, Y をコンパクト, 連結かつ局所連結な空間とする。f を Y から $\widetilde{X}$ への連続写像 $f : Y \to \widetilde{X}$ とし, $F : Y \times I \to X$ を $y \in Y$ に対して $F(y, 0) = p \cdot f(y)$ なるホモトピーとする。このとき, ホモトピー $G : Y \times I \to \widetilde{X}$ が存在して, 次の (1),(2) が成り立つ。

(**1**) $G(y,0)=f(y)$
(**2**) $p\cdot G=F$
さらに, ある区間の t に対して $F(y,t)$ が一定となる y に対しては, $G(y,t)$ もその区間で一定となるように G を選ぶことができる。

証明は最後に回して, この定理から導かれる結果をいくつか述べる。

系 9.3
$(\widetilde{X},p)$ を空間 X の被覆空間とし, $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ とする。このとき, $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})\to\pi_1(X,x)$ は単射である。

証明　$[\widetilde{\alpha}]\in\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$ が p_* の核 (kernel) にはいっているとする。すなわち, $p_*([\widetilde{\alpha}])=[e_x]$ である。ただし $x=p(\widetilde{x})$ で, e_x は x への定値写像 $e_x:X\to X$ を表す。このとき,

$$[p\cdot\widetilde{\alpha}]=p_*([\widetilde{\alpha}])=e=[e_x]\quad\text{すなわち}\quad p\cdot\widetilde{\alpha}\doteq e_x$$

$[\widetilde{\alpha}]$ が $\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$ の単位元であること, すなわち $\widetilde{\alpha}\doteq e_{\widetilde{x}}$ を示したい。

$p\cdot\widetilde{\alpha}$ から e_x へのホモトピーを $F:I\times I\to X$ とする。$Y=I$ としたホモトピー被覆定理より, $p\cdot G=F$ なるホモトピー $G:I\times I\to\widetilde{X}$ が存在して, すべての $t_1\in I$ に対して $G(t_1,0)=\widetilde{\alpha}(t_1)$ が成り立つ。さらに, $F(0,t_2)=x$ と $F(1,t_2)=x$ は, $t_2\in I$ に対して一定であるから, G はすべての $t_2\in I$ に対して

$$G(0,t_2)=\widetilde{\alpha}(0)=\widetilde{x}\quad\text{かつ}\quad G(1,t_2)=\widetilde{\alpha}(1)=\widetilde{x}$$

となるように選べる。$p\cdot G=F$ であって $F(t_1,1)=e_x(t_1)$ であるから, 道 $t_1\mapsto G(t_1,1)$ (正確には $\widetilde{\beta}(t_1)=G(t_1,1)$ で定まる $\widetilde{X}$ の道 $\widetilde{\beta}:I\to\widetilde{X}$) も道 $t_1\mapsto e_{\widetilde{x}}(t_1)$ もともに p によって e_x に移される。さらに, $G(0,1)=\widetilde{x}=e_{\widetilde{x}}(0)$ であるから, この2つの道は一致している。したがって定理 9.1 によって, すべての $t_1\in I$ に対して $G(t_1,1)=e_{\widetilde{x}}(t_1)$ が成り立つ。G が $\widetilde{\alpha}$ から $e_{\widetilde{x}}$ へのホモトピーである。□

系 9.4
$(\widetilde{X},p)$ を空間 X の被覆空間とする。α を X の中の道とし, $x_0=\alpha(0)$ とし, $p(\widetilde{x}_0)=x_0$ なる $\widetilde{x}_0\in\widetilde{X}$ を選ぶ。このとき, $\widetilde{x}_0$ を始点とし, α を被覆する, すなわち $p\cdot\widetilde{\alpha}=\alpha$ なる X の中の道が一意的に存在する。

証明　一意性は定理 9.1 の結果である。存在を示せために, $Y=\{y_0\}$ を1点の空間とし, $f:Y\to\widetilde{X}$ を $f(y_0)=\widetilde{x}_0$ とした場合のホモトピー被覆定理を使う。$Y\times I$ から I への射影は $Y\times I$ から I への同相写像なので, この同相写像で2つの空間を同一視して, α を $Y\times I\to X$ の写像とみることができる。そうすると $\alpha(y_0,0)=x_0=p\cdot f(y_0)$ となり, ホモトピー被覆定理によってホモトピー $G:Y\times I\to\widetilde{X}$ が存在して, $p\cdot G=\alpha$ かつ $G(y_0,0)=f(y_0)=\widetilde{x}_0$ が成り立つ。
$\widetilde{\alpha}:I\to\widetilde{X}$ を $\widetilde{\alpha}(t)=G(y_0,t)$ によって定義すると, $\widetilde{\alpha}$ は求める性質をもっている。□

系 9.5
$(\widetilde{X},p)$ を空間 X の被覆空間とし, $x\in X$, $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$, $p(\widetilde{x})=x$ とする。このとき, $p^{-1}(\{x\})$ と 剰余集合 $\pi_1(X,x)/p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$ の間に自然な1対1対応が存在する。

証明　$c:\pi_1(X,x)\to p^{-1}(\{x\})$ を次のように定義する。$g\in\pi_1(X,x)$ とする。α と β を g の2つの代表元とする。すなわち $g=[\alpha]=[\beta]$ である。系 9.4 によって, $\widetilde{x}$ を始点とする $\widetilde{X}$ の持ち上げ $\widetilde{\alpha}$ と $\widetilde{\beta}$ が一意的に存在する。さて $\alpha\doteq\beta$ であるから, ホモトピー被覆定理によって, $\widetilde{\alpha}\doteq\widetilde{\beta}$ である。特に, $\widetilde{\alpha}$ と $\widetilde{\beta}$ は

同じ終点をもつ。すなわち $\widetilde{\alpha}(1)=\widetilde{\beta}(1)$ である。そこで, g の任意の代表元を α として, $c(g)=\widetilde{\alpha}(1)$ と定義する。

$\widetilde{X}$ は弧状連結であるから, $\widetilde{x}$ を $p^{-1}(\{x\})$ の各元と $\widetilde{X}$ の中の道によって結ぶことができる。この道は X の中の閉じた道 (その道を射影したもの) の持ち上げになっている。したがって, $c:\pi_1(X,x)\to p^{-1}(\{x\})$ は全射である。

次に, c が $\pi_1(X,x)$ の $p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$ による剰余類上では一定の値をとることを示す。$[\alpha]$ と $[\beta]$ が同じ剰余類に入っているとする。このとき, ある $[\gamma]\in p_*\pi_1(\widetilde{x},\widetilde{x})$ に対して

$$[\beta]=[\gamma][\alpha]=[\gamma\alpha]$$

となる。したがって

$$c([\beta])=c([\gamma\alpha])=\widetilde{\gamma\alpha}(1)$$

ところが, 系 9.4 によって $\widetilde{\gamma\alpha}=\widetilde{\gamma}\widetilde{\alpha}$ であるから

$$c([\beta])=\widetilde{\gamma}\widetilde{\alpha}(1)=\widetilde{\alpha}(1)=c([\alpha])$$

となり, c を各剰余類へ制限したものは一定である。したがって

$$\widetilde{c}(H[\alpha])=c([\alpha]),\quad [\alpha]\in\pi_1(X,x)$$

と定義することによって, c は写像 $\widetilde{c}:\pi_1(X,x)/p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})\to p^{-1}(\{x\})$ を決める。ここで, $H[\alpha]$ は $[\alpha]$ を含む $H=p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$ による剰余類である。c が全射であるから, $\widetilde{c}$ も全射である。また $\widetilde{c}$ は単射でもある。なぜなら $\widetilde{c}(H[\alpha])=\widetilde{c}(H[\beta])$ とすれば $c([\alpha])=c([\beta])$, すなわち $\widetilde{\alpha}(1)=\widetilde{\beta}(1)$ であるから, $[\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}^{-1}]\in\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x})$ である。$h=p_*([\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}^{-1}])$ とすると

$$h[\beta]=[p\cdot(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}^{-1})][\beta]=[\alpha\beta^{-1}][\beta]=[\alpha]$$

となり, $[\alpha]$ と $[\beta]$ は H の同じ剰余類にはいっている。すなわち

$$H[\alpha]=H[\beta]$$

となるので単射が示された。□

さて, 定理 9.2 の証明をしよう。

証明　(定理 9.2) Y と I がコンパクトであるから, $Y\times I$ もコンパクトである。したがって $F(Y\times I)$ もコンパクト。そこで, $F(Y\times I)$ は有限個の標準的な開集合 $U_1,U_2,\cdots,U_r$ でおおうことができる ($F(Y\times I)$ を標準的な開集合でおおい, 有限部分被覆をとる)。$\{F^{-1}(U_i)\}_{i=1}^r$ が $Y\times I$ をおおい, $Y\times I$ の開集合の基は (Y の開集合) $\times$ (I の開集合) の形でかけるから, Y の連結な開集合による有限部分被覆 $\{V_\alpha\}$ と単位区間の分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ が存在して, $F(V_\alpha\times[t_i,t_{i+1}])\subset$ (ある U_ℓ が成り立つようにできる。それはすぐ前の議論と同様に, $F^{-1}(U_\ell)$ に含まれる連結な開集合の基の元で $Y\times I$ をおおい, コンパクト性より有限部分被覆をとればよい。

G を構成するために, 次の性質 (1), (2), (3) をみたす $G_i:Y\times[t_{i-1},t_i]\to\widetilde{X}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ を構成する。

(**1**) $p\cdot G_i = F|_{Y\times[t_{i-1},t_i]}$

(**2**) G_i は連続

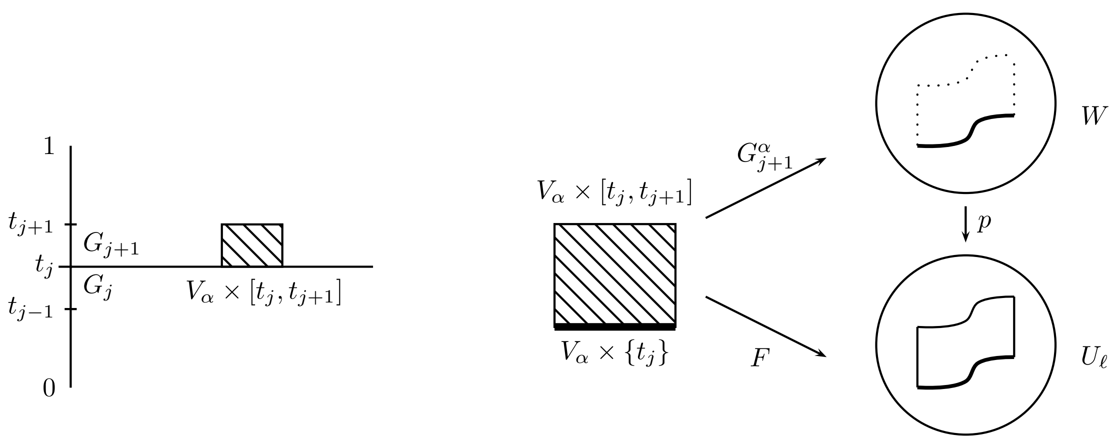
(**3**) $Y\times[t_{i-1},t_i]\cap Y\times[t_i,t_{i+1}]=\{(y,t_i);y\in Y\}$ の上では $G_i=G_{i+1}$

閉集合に対する貼りあわせの命題を使って, G_i を貼りあわせて得られる G は連続で, また明らかに $p\cdot G=F$ となる。

帰納法により, $i\le j$ に対して G_i が定義され, (1), (2) ($i=1,2,\cdots,j$ に対して), (3) ($i=1,2,\cdots,j-1$ に対して) をみたすと仮定する。G_{j+1} を構成する。(3) を満足させるために, $G_{j+1}(y,t_j)$ は $G_j(y,t_j)$ と一致させる。$G^{\alpha}_{j+1}:V_\alpha\times[t_j,t_{j+1}]\to\widetilde{X}$ を次のように定義する。まず, X の中のある標準的な開集合 U_ℓ に対して $F(V_\alpha\times[t_j,t_{j+1}])\subset U_\ell$ である。V_α は連結であるから, 集合 $G_j(V_\alpha\times\{t_j\})$ も連結である。ところが

$$p\cdot G_j(V_\alpha\times\{t_j\})=F(V_\alpha\times\{t_j\})\subset U_\ell$$

であるから, $G_j(V_\alpha\times\{t_j\})$ は $p|_W:W\to U_\ell$ が同相である 1 つの開集合 $W\subset p^{-1}(U_\ell)$ に含まれる。$G^{\alpha}_{j+1}=(p|_W)\cdot F|_{V_\alpha\times[t_j,t_{j+1}]}$ と定義する。このとき, $V_\alpha\times\{t_j\}$ 上では $G^{\alpha}_{j+1}=G_j$ である。

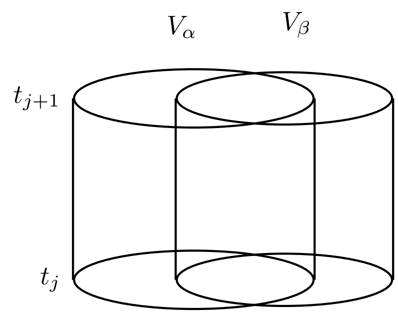


次に, 位相空間 $Y\times[t_j,t_{j+1}]$ 上の連続写像 G_{j+1} を構成するために, 空間 $Y\times[t_j,t_{j+1}]$ の中のおのおのの開集合 $V_\alpha\times[t_j,t_{j+1}]$ 上で定義された写像 G^{α}_{j+1} を貼りあわせる。開集合に関する貼りあわせの命題より, $(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j,t_{j+1}]$ 上で G^{α}_{j+1} と G^{β}_{j+1} が一致することだけを確かめればよい。

$G_j(V_\alpha\times\{t_j\})$ が開集合 W_α に含まれ , $p|_{W_\alpha}:W_\alpha\to U_\ell$ が同相で, $G_j(V_\beta\times\{t_j\})$ が開集合 W_β に含まれ , $p|_{W_\beta}:W_\alpha\to U_m$ が同相であるとする。V_α 上で $G^{\alpha}_{j+1}=G_j$ であり, かつ V_β 上で $G^{\beta}_{j+1}=G_j$ であるから, $(V_\alpha\cap V_\beta)\times\{t_j\}$ 上で $G^{\alpha}_{j+1}=G^{\beta}_{j+1}$ である。$(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j,t_{j+1}]$ 上の任意の点は $(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j,t_{j+1}]$ 上の 道で $(V_\alpha\cap V_\beta)\times\{t_j\}$ と結ぶことができるから

$$G^{\alpha}_{j+1}((V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j,t_{j+1}])\subset W_\alpha\cap W_\beta,\quad G^{\beta}_{j+1}((V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j,t_{j+1}])\subset W_\alpha\cap W_\beta$$

となっている。ところが $p\cdot G^{\alpha}_{j+1}=F|_{V_\alpha\times[t_j,t_{j+1}]}$ であり, かつ $p\cdot G^{\beta}_{j+1}=F|_{V_\beta\times[t_j,t_{j+1}]}$ であって, $W_\alpha\cap W_\beta$ 上では $p|_{W_\alpha}=p|_{W_\beta}$ であるから, $(V_\alpha\cap V_\beta)\times[t_j,t_{j+1}]$ 上で $G^{\alpha}_{j+1}=G^{\beta}_{j+1}$ が成り立つ。



$(V_\alpha \cap V_\beta) \times \{t_j\}$

この帰納法の議論は帰納法の出発点, すなわち G_1 を構成することにも使える。$Y \times \{t_0\}$ 上で, G_1 は f に等しい。

定理の最後の主張は, 上の構成法によって自動的にみたされる。このことは読者自身で確かめよ。

問題 9.1 定理 9.2 の証明の中の不十分な点を補え。