第3章 単体的複体のホモロジー群

6 チェイン (chain) と境界作用素 ∂

いくつかの向きの付いた r-単体の集まりを表すために, r-チェイン (chain) と呼ばれているものを, 次のように定義しよう。

K を n 次元単体的複体とし, 各 r-単体に向きを与えておく (K は向きの付いた複体)。

向きの付いた単体をもとにして 複体 K における チェイン (鎖) の定義を次のように与える。

定義 6.1 複体 K によって定まる次のような形式的表現

$$c^r = \alpha_1\sigma_1^r + \alpha_2\sigma_2^r + \cdots + \alpha_\lambda\sigma_\lambda^r \qquad (\alpha_i \text{ は整数}, \ \sigma_i^r \text{ は 向きの付いた } r\text{-単体})$$

を K の **r-チェイン (r-chain)** または **$r-$ 鎖** と言う。ただし 2 つの r-チェイン

$$c_1^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\alpha_i\sigma_i^r \quad (\alpha_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i^r \text{ は } r \text{ 単体})$$
$$c_2^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\beta_i\sigma_i^r \quad (\beta_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i^r \text{ は } r \text{ 単体})$$

が等しいとは,

$$\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_i = \beta_i, \cdots, \alpha_\lambda = \beta_\lambda$$

を意味するとする。

次に 2 つの r-チェイン $c_1^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\alpha_i\sigma_i^r, \ c_2^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\beta_i\sigma_i^r \quad (\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i^r$ は 向きの付いた r-単体) と, 整数 s に対して, 和, 差, 整数倍を

$$(*) \qquad \begin{cases} c_1^r + c_2^r &= \displaystyle\sum_{i=1}^{\lambda}(\alpha_i + \beta_i)\sigma_i^r \\ c_1^r - c_2^r &= \displaystyle\sum_{i=1}^{\lambda}(\alpha_i - \beta_i)\sigma_i^r \\ sc_1^r &= \displaystyle\sum_{i=1}^{\lambda}(s\alpha_i)\sigma_i^r \end{cases}$$

と定義する。

これらの演算に関して通常の加法, 減法の公式が成り立つ事は明らかであろう。

特に, ただ 1 つの α_i が 1 で, 他の α_j は 0 ($j \neq i$) の場合, c^r を σ_i^r で表すものとする。すなわち

$$\sigma_i^r = 0\sigma_1^r + \cdots + 0\sigma_{i-1}^r + 1 \cdot \sigma_i^r + 0\sigma_{i+1}^r + \cdots + 0\sigma_\lambda^r$$

そうすれば

$$c^r = \alpha_1\sigma_1^r + \alpha_2\sigma_2^r + \cdots + \alpha_\lambda\sigma_\lambda^r$$

は $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_\lambda^r$ なる r-チェイン に $(*)$ の演算を行ったものとみなすものとができる。
特に,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\lambda = 0 \text{ の時,} \quad c^r = 0$$

とおく。そして r-チェイン全体を

$$C_r(K)$$

と表し, K の **r-チェイン群 (*chain group*)** または **r-鎖群** という。$C_r(K)$ を K を省略して C_r と書くこともある。

これは (1 年のとき習った) 線形空間の概念と類似していることに気付かれたであろう。すなわち, 体 K 上の n 次元線形空間 V の元 v は, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ を V の基底 (base) とすると,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \qquad (\lambda_i \in K)$$

と一意に書け, その和, 差, スカラー倍は, $v' = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i v_i \quad (\lambda'_i \in K)$ とすると

$$\begin{cases} v + v' &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda'_i) v_i \\ v - v' &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda'_i) v_i \\ sv &= \sum_{i=1}^{n} (s\lambda_i) v_i \end{cases}$$

であった。そしてこの V を $v_1, v_2, \cdots, v_n$ を 基底 (base) とする n 次元線形空間といった。これと同様に $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_\lambda^r$ が 複体 K の全ての r-単体とすると, K の r-チェイン全体は, $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_\lambda^r$ を基底とする $\mathbb{Z}$ 上の線形空間のように思える[1]。唯一の違いは, $\mathbb{Z}$ は体でない (割算ができない) ことである。後程この違いは鮮明になってくる。

向き付けられた 2-単体 $\alpha = \langle v_0, v_1, v_2\rangle$ に対して, その境界 $\partial_2\alpha \ (\in C_1(K))$ を

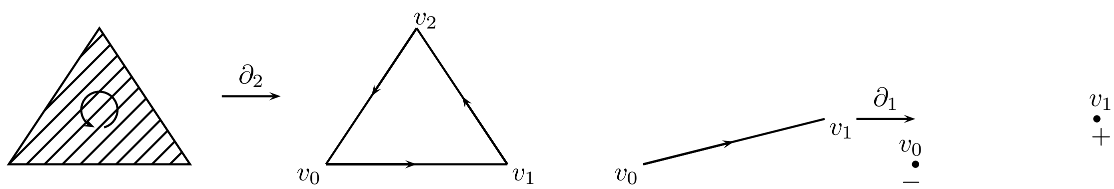
$$\partial_2\alpha = \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_0\rangle + \langle v_0, v_1\rangle$$

と定義する。
向き付けられた 1-単体 $\langle s\rangle = \langle v_0, v_1\rangle$ に対して, その境界 $\partial_1\langle s\rangle \ (\in C_0(K))$ を

$$\partial_1\langle s\rangle = \langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle$$

と定義する。

[1] この様なものは $\mathbb{Z}$-自由加群 (free module) と呼ばれている。



次に境界作用素 ∂ という概念を定める。

2-チェイン $c^2 = \sum_{i=1}^{\lambda} n_i \alpha_i \quad (n_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i$ は 向きの付いた 2-単体) と, 1-チェイン $c^1 = \sum_{j=1}^{\mu} m_j a_j \quad (n_j \in \mathbb{Z}$, a_j は 向きの付いた 1-単体) に対して,

$$\partial c^2 = \sum_{i=1}^{\lambda} n_i \partial \alpha_i$$
$$\partial c^1 = \sum_{j=1}^{\mu} m_j \partial a_j$$

によって, チェインの境界を定義する。

これを一般の場合に定義する。

定義 6.2 向きの付いた r-単体 $\sigma^r = \langle a_0, a_1, \cdots, a_r \rangle$ に対して

$$\partial_r \sigma^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \langle a_0, a_1, \cdots, \hat{a_i}, \cdots, a_r \rangle$$

(ここで $\langle a_0, a_1, \cdots, \hat{a_i}, \cdots, a_r \rangle$ とは $\langle a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_r \rangle$ のこと, すなわち, $\langle a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r \rangle$ から a_i を取り除いたものを表す。) と定め, r-チェイン

$$c = \sum_{j=0}^{\lambda} n_j \sigma_j^r \quad (n_j \in \mathbb{Z},\ \sigma_j^r \text{ は 向きの付いた } r\text{-単体})$$

に対して,

$$\partial_r c = \sum_{j=1}^{\lambda} n_j \partial \sigma_j^r$$

と定めると, $\partial_r : C_r \to C_{r-1}$ なる写像が定義される。さらに明らかに, c_1, c_2 を 2 つの r-チェインとするとき,

$$\partial_r (c + c') = \partial_r (c_1) + \partial_r (c_2)$$

が成り立つ。(∂_r は準同型写像である。) この $\partial_r : C_r \to C_{r-1}$ を **境界作用素** (***boundary operater***) または **バウンダリー作用素** という。

これによって, $\{C_r(K), \partial_r\}$ が定義されたが, これらすべてをまとめて, 次のように言う。

n 次元複体 K に対して,

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \to \cdots \to C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K) \to \cdots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

なるチェイン群 $C_r(K)$ と, 準同型写像 ∂_r からなる列ができる。
これを K に関する **チェイン複体 (chain complex)** または **鎖複体** といい, $\mathscr{C}(K)$ で表す。
また $\mathscr{C}(K) = \{C_r(K), \partial_r\}$ あるいは ∂_r を略して $\mathscr{C}(K) = \{C_r(K)\}$ と書くこともある。

さて, 例えば 2-単体 $\alpha = \langle v_0, v_1, v_2\rangle$ について, ∂_2 を施し, さらに ∂_1 を施してみると,

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_2\alpha^2 &= \partial_1\partial_2\langle v_0, v_1, v_2\rangle \\
&= \partial_1(\langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_0\rangle + \langle v_0, v_1\rangle) \\
&= \partial_1(\langle v_1, v_2\rangle) + \partial(\langle v_2, v_0\rangle) + \partial(\langle v_0, v_1\rangle) \\
&= \langle v_2\rangle - \langle v_1\rangle + \langle v_0\rangle - \langle v_2\rangle + \langle v1\rangle - \langle v_0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。実はこれは一般に成り立つ。すなわち, 次の補題が成り立つ。

補題 6.3 任意の $r = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して, 次が成り立つ。

$$\partial_r\partial_{r+1} = 0$$

証明 $(r+1)$-単体 $\sigma^{r+1} = a_0a_1\cdots a_{r+1}$ に対して示せば十分である (繁雑なので $\langle a_0, a_1, \cdots, a_{r+1}\rangle$ 等を $a_0a_1\cdots a_{r+1}$ と書く。)。

$$\begin{aligned}
&\partial_r\partial_{r+1}\sigma^{r+1} = \partial_r\left(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i a_0a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_{r+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i a_0a_1\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_i\cdots a_{r+1}\right) + \sum_{j=i+1}^{r+1}(-1)^{j-1}\left(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i a_0a_1\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_{r+1}\right) \\
&= \sum_{j<i}(-1)^{i+j}a_0a_1\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_i\cdots a_{r+1} + \sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}a_0a_1\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_{r+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

今後も, 繁雑なので $\langle a_0, a_1, \cdots, a_{r+1}\rangle$ 等を混乱を生じない限り $a_0a_1\cdots a_{r+1}$ と略記して書く。

さて, いよいよ本来の目的であるホモロジー群の定義に取りかかろう。そのために輪体 (cycle) と, 境界輪体 (bounding cycle) という概念を定めなければならない。

輪体 (cycle) とは, 境界を持たないチェインのことである。これは次のように数学的に述べられる。

定義 6.4
輪体とは $\partial_r : C_r \to C_{r-1}$ という写像で 0 に移されるチェインと定義される。すなわち $\ker\partial_r = \partial_r^{-1}(0)$ を $Z_r = Z_r(K)$ とかいて **r-輪体群 (cycle group)** または **r-サイクル群** あるいは **r 次サイクル群** といい, Z_r の元を **r-輪体 (cycle)** または **r-サイクル** あるいは **r 次サイクル** という。

また 境界輪体 (bounding cycle) は, 輪体が 1 つ上のチェインの境界になっている (0 にホモローグである) ことを, 数学的に述べるために必要である。これは数学的には次のように述べられる。

定義 6.5
$\partial_{r+1} : C_{r+1} \to C_r$ という写像で C_{r+1} の元の像になっているチェインと定義される。すなわち $\operatorname{im}\partial_{r+1} = \partial_{r+1}(C_{r+1})$ を, $B_r = B_r(K)$ とかいて, **r-境界輪体群 (bounding cycle group)** または
r-バウンダリーサイクル群 あるいは **r 次バウンダリーサイクル群** といい,
B_r の元を **r-境界輪体 (bounding cycle)** または **r-バウンダリーサイクル** あるいは
r 次バウンダリーサイクル という。

このように定義すると, 補題 6.3 より, $\partial_r\partial_{r+1} = 0$ だから $\operatorname{im}\partial_{r+1} \subset \ker\partial_r$ すなわち $B_r \subset Z_r$ である。

定義 6.6
そこで 商群 Z_r/B_r が考えられるが これを $H_r = H_r(K)$ とかいて,
K の **(r 次) ホモロジー群 (Homology group)** という。
$z^r \in Z_r(K)$ を含む類を $[z^r]$ と表して, ホモロジー類といい, 同じホモロジー類に属する 2 つの輪体 z_1^r, z_2^r (すなわち $[z_1^r] = [z_2^r]$) を **ホモローグである (homologous)** といい, $z_1^r \sim z_2^r$ と表す。

すこし代数学関係のこと (の復習) を述べよう。

定義 6.7
集合 A と 単位元をもつ可換環 R が与えられたとき, A は演算を $+$ でアーベル群をなしていて, 次のスカラー倍と言われている $R \times A$ から A への演算 $\cdot$ が定義されていて, 次の条件

(1) $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
(2) $(r_1 + r_2) \cdot x = r_1 \cdot x + r_2 \cdot x$
(3) $(r_1 r_2) \cdot x = r_1(r_2 \cdot x)$
(4) $1 \cdot x = x$

(r, r_1 r_2 は R の元, x, y は A の元)
をみたすとき, A を 環 R 上の **(左) 加群 (*module*)** という。
特に R が体であるとき, A を 体 R 上の **ベクトル空間 (*vector space*)** という。

命題 6.8 $C_r(K)$ は, $\mathbb{Z}$ 上の加群をなす。

一般に, アーベル群 A を考える。任意の A の元 g と 任意の自然数 n に対して, $ng = g + g + \cdots + g$ (n 回) と定める。また, $(-n)g = -(ng)$ と定める。すると, A はこの意味で $\mathbb{Z}$ 上の加群となる (と考えられる)。すなわち,

命題 6.9
アーベル群 A は, 上の意味で $\mathbb{Z}$ 上の加群とみなせる。

ここからは, $\mathbb{Z}$ 上の加群のことを, 単に加群という。単位元だけからなる加群を 0 で表す。

A, B を加群とする。群の準同型写像 $f : A \to B$ が, 任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$f(ra) = rf(a)$$

をみたすとき, f は加群の準同型写像であるという。自然な加群の構造に対しては, 群の準同型写像は自動的に加群の準同型写像になる。準同型写像であり, さらに全単射であるとき, f は加群の同型写像という。また同型写像で結ばれる加群は互いに同型であるという。

すべての元を単位元にうつす写像は 加群の準同型写像であるが, これを 0 で表す。

アーベル群の場合と同様に, 加群の任意の部分加群は正規部分加群で, その剰余群は加群としての構造を自然に継承する。さらに加群の準同型定理が成り立つ。すなわち $f : A \to B$ を加群の全射準同型写像とすると, $\ker f = \{a \in A\ ;\ f(a) = 0\}$ は A の部分加群であり, その剰余類 $[a]$ に代表元 $a \in A$ の f による像 $f(a)$ を対応させる写像

$$\overline{f} : A/\ker f \to B$$

は加群の同型写像である。

定義 6.10
加群 A に対して, B を A の部分集合とする。このとき, B が A を **生成する** とは, 任意の A の元が B の有限個の元の $\mathbb{Z}$ 上の１次結合として表せるときをいう。

定義 6.11 (自由加群)
加群 A の元の部分集合 $\mathfrak{B}$ があり, 任意の A の元が $\mathfrak{B}$ の有限個の元の $\mathbb{Z}$ 上の１次結合として一意に表せるとき, $\mathfrak{B}$ は A の **基底** であるという。基底をもつ加群を **自由加群 (*free module*)** という。

$\mathbb{Z}$ は 1 を基底とする自由加群である。$\mathbb{Z}$ の直和は自由加群である。有限位数の元をもつ加群は自由ではない。アーベル群の場合と同様に, 有限生成加群の構造は次のようによくわかっている。

定理 6.12 (加群の基本定理)
有限生成加群 A は以下の巡回加群の直和と同型である。

$$A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$$

ここで各 n_j は n_{j+1} の約数である。さらにこのような表示における無限巡回加群の個数と, 自然数の組 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ は一意である。

アーベル群の場合と同様に, 有限生成加群 A の無限巡回群の直和因子の個数を階数といい, $\operatorname{rank} A$ で表す。

加群 A_1, A_2, B_1, B_2 と 加群の準同型 $\varphi : A_1 \to A_2$, $\psi : B_1 \to B_2$, $h_1 : A_1 \to B_1$, $h_2 : A_2 \to B_2$ が $h_2\varphi = \psi h_1$ をみたす時

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\varphi} & A_2 \\
{\scriptstyle h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_2} \\
B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2
\end{array}$$

と書いて, **可換な図式** (*commutative diagram*) という

図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_{i+1} & \xrightarrow{\varphi_{i+1}} & A_i & \xrightarrow{\varphi_i} & A_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & {\scriptstyle h_{i+1}}\big\downarrow & & {\scriptstyle h_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle h_{i-1}}\big\downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & B_{i+1} & \xrightarrow{\psi_{i+1}} & B_i & \xrightarrow{\psi_i} & B_{i-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

において, すべての i について $h_i\varphi_{i+1} = \psi_{i+1}h_{i+1}$ が成り立つとき, この図式は **可換である** (*commutative*) または **可換な図式** (*commutative diagram*) という。

7 チェィン準同型 (写像) とチェインホモトピー

複体 K からチェイン群 $C_r = C_r(K)$ を定め, チェイン複体 $\mathscr{C}(K) = \{C_r(K)\}$ と定めてきた。 複体 K を忘れて, チェイン複体 $\mathscr{C} = \{C_r\}$ から (C_r は加群) はじめると考えたとき, チェイン群 C_r を $C_r(\mathscr{C})$, Z_r を $Z_r(\mathscr{C})$, B_r を $B_r(\mathscr{C})$, H_r を $H_r(\mathscr{C})$ 等と書くこともある (これらの詳しいことについては, 後でまとめて 11 節で述べる)。

複体 K から定まるチェイン複体

$$\mathscr{C} : \cdots \to C_{r+1} \xrightarrow{\partial_{r+1}} C_r \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1} \to \cdots C_0 \to 0$$

と, 複体 K' から定まるチェイン複体

$$\mathscr{C}' : \cdots \to C'_{r+1} \xrightarrow{\partial'_{r+1}} C'_r \xrightarrow{\partial'_r} C'_{r-1} \to \cdots C'_0 \to 0$$

において, $\{\ f_r : C_r \to C'_r\ \}$ ($f_r : C_r \to C'_r$ は準同型写像) が定義されていて, 次の図式が可換であるとき,

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\longrightarrow & C_{r+1} & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r & \xrightarrow{\partial_r} & C_{r-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \big\downarrow{\scriptstyle f_{r+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_r} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{r-1}} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle f_0} & & \\
\longrightarrow & C'_{r+1} & \xrightarrow{\partial'_{r+1}} & C'_r & \xrightarrow{\partial'_r} & C'_{r-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

すなわち 任意の r に対して $f_{r-1}\,\partial_r = \partial'_r\,f_r$ が成り立つ時, **チェイン準同型写像** (*chain homomorphism*) と言い,

$$f = \{\ f_r\ \} : \{\ C_r \to C'_r\ \} \quad \text{または} \quad f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}''$$

とかく。

以前 定義 2.9 で定義した単体写像から, 次のようにしてチェイン準同型写像が定まる。

K_1, K_2 を複体, $f : K_1 \to K_2$ を単体写像とする。単体写像 f から次のようにチェイン準同型写像が定まる。

向きの付いた q-単体 $\sigma^q = a_0a_1\cdots a_q$ に対して, $f_{\#q}(\sigma^q)$ を

$$f_{\#q}(\sigma^q) = \begin{cases} f(a_0)f(a_1)\cdots f(a_q) & (\ f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q) \text{ が全て異なる時 }) \\ 0 & (\ f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q) \text{ に同じものがある時 }) \end{cases}$$

と定義し, $C_q(K_1)$ の元 $c^q = \sum_i n_i\sigma_i^q \quad (n_i \in \mathbb{Z})$ に対して,

$$f_{\#q}(c^q) = f_{\#q}\left(\sum_i n_i\sigma_i^q\right) = \sum_i n_i f_{\#q}(\sigma_i^q)$$

と定義すると, 準同型写像

$$f_{\#q} : C_q(K_1) \to C_q(K_2) \qquad (q = 0, 1, \cdots)$$

が定義されるので, これによりチェイン準同型写像

$$\{f_{\#q}\} : \{C_q(K_1)\} \to \{C_q(K_2)\}$$

すなわち, $\mathscr{C}_1 = \{C_q(K_1)\}, \mathscr{C}_2 = \{C_q(K_2)\}$ に対して,

$$f_\# : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$$

が得られる。

まとめると,

命題 7.1
K_1, K_2 を複体, $f : K_1 \to K_2$ を単体写像とする。このとき, チェイン準同型写像 $f_\# : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ が上のようにして 得られる。

問題 7.1　これを示せ。

さらに, 任意のチェイン準同型写像について,

定理 7.2
$f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ をチェイン準同型写像とすると, f は $\mathscr{C}$ のホモロジー群から $\mathscr{C}'$ のホモロジー群への準同型写像 $f_* : H_*(\mathscr{C}) \to H_*(\mathscr{C}')$ をひきおこす。(詳しくは $f_{*r} : H_r(\mathscr{C}) \to H_r(\mathscr{C}')$ である。)

証明　先ず 基本的な次の 2 つのことを示そう。

(1) $f_r(Z_r(\mathscr{C})) \subset Z_r(\mathscr{C}')$ の証明

$\forall z \in Z_r(\mathscr{C})$ なら $\partial_r(z) = 0$
条件 $\partial'_r f_r = f_{r-1}\partial_r$ より
$\partial'_r f_r(z) = f_{r-1}\partial_r(z) = 0$
ゆえに, $f_r(z) \in Z_r(\mathscr{C}')$

(2) $f_r(B_r(\mathscr{C})) \subset B_r(\mathscr{C}')$ の証明

$x \in B_r(\mathscr{C})$ ならば
$\exists a \in C_{r+1}(\mathscr{C})$; $\partial_{r+1}(a) = x$ より
$\partial'_{r+1} f_{r+1}(a) = f_r\partial_{r+1}(a) = f_r(x)$
ゆえに, $f_r(x) \in B_r(\mathscr{C}')$

この 2 つのことより $[x] \in H_r(\mathscr{C})$ に対して $f_r(x) \in Z_r(\mathscr{C}')$ だから, $[f_r(x)] \in H_r(\mathscr{C}')$ を対応させることによって,

$$f_{r*} : H_r(\mathscr{C}) \to H_r(\mathscr{C}')$$

が構成できる。この写像が well-defined であることは, (2) により, 明らかであるが, 念のため 証明をきちんとかいておこう。
$z, z' \in Z_r(\mathscr{C})$ で $[z] = [z']$ とすると, $z - z' \in B_r(\mathscr{C})$ である。このことより, $\exists a \in C_{r+1}(\mathscr{C})$; $\partial_{r+1}(a) = z - z'$ である。よって, $\partial'_{r+1} f_{r+1}(a) = f_r\partial_{r+1}(a) = f_r(z - z') = f_r(z) - f_r(z')$ となる。ゆえに, $f_r(z) - f_r(z') \in B_r(\mathscr{C}')$ すなわち $[f_r(z)] = [f_r(z')]$ である。 □

系 7.3
K_1, K_2 を複体とする。$f : K_1 \to K_2$ を単体写像に対して, f は $\mathscr{C}$ のホモロジー群から $\mathscr{C}'$ のホモロジー群への準同型写像 $f_* : H_*(\mathscr{C}) \to H_*(\mathscr{C}')$ をひきおこす。

次に, チェインホモトピー (chain homotopy) と言う概念を説明する。
$\mathscr{C}_1 = \{C_r(K_1), \partial_r\}$, $\mathscr{C}_2 = \{C_r(K_2), \partial'_r\}$ をチェイン複体とし, f, g を $\mathscr{C}_1$ から $\mathscr{C}_2$ への チェイン準同型写像とする。
いま各 r に対して定義された準同型写像

$$\Phi_r : C_r(K_1) \to C_{r+1}(K_2)$$

で条件

$$\partial'_{r+1}\Phi_r + \Phi_{r-1}\partial_r = g - f$$

をみたすものが存在する時, f と g は, **チェインホモトープ (*chain homotopic*)** または **鎖ホモトープ** であるといい $f \simeq g$ と表す。
Φ_r の集合 $\Phi = \{\Phi_r : C_r(K_1) \to C_{r+1}(K_2)\}$ のことを, **チェインホモトピー (*chain homotopy*)** または **鎖ホモトピー** といい, $\Phi : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ と表す。

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{r+1}(K_1) \arrow[r, "\partial_{r+1}"] & C_r(K_1) \arrow[r, "\partial_r"] \arrow[dl, "\Phi_r"'] & C_{r-1}(K_1) \arrow[r] \arrow[dl, "\Phi_{r-1}"'] & \cdots \arrow[r] & C_0(K_1) \arrow[r] & 0 \\
{} \arrow[r] & C_{r+1}(K_2) \arrow[r, "\partial'_{r+1}"] & C_r(K_2) \arrow[r, "\partial'_r"] & C_{r-1}(K_2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_0(K_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

注 13
前に習ったホモトピーとは異なる概念であるが, 混同しない限り同じ記号 $\simeq$ を使う。

命題 7.4
$\simeq$ は同値関係である

例 7.1
K_1, K_2 を単体的複体, $\varphi, \psi : K_1 \to K_2$ を単体写像とする。
K_1 の (各) 単体 $\sigma^r = a_0a_1\cdots a_r$ に対して, K_2 の単体 τ^s が存在して, $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_r)$ と $\psi(a_0), \psi(a_1), \cdots, \psi(a_r)$ が τ^s の頂点であるとき, 単体写像 φ, ψ は **隣接 (*contiguous*)** するといった。
このとき, $\varphi_\#, \psi_\# : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ は, チェインホモトープである。
$\sigma^r \in K_1$ を $\sigma^r = a_0a_1\cdots a_r$ に対して,

$$\Phi_r(a_0a_1\cdots a_r) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r)$$

を線型に拡張したものが求めるチェインホモトピーである。
例 7.1 のチェインホモトピーであることは次のようにして示される。

定義に従って計算していけばよい。

$$
\begin{aligned}
\partial_{r+1}(\Phi_r(\sigma^r)) &= \partial\left(\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\,\partial\left(\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\varphi(a_0)\cdots\widehat{\varphi(a_i)}\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r)\right. \\
&\quad \left.+\sum_{i=j}^{r}(-1)^{i+1}\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\widehat{\psi(a_i)}\cdots\psi(a_r)\right) \\
&= \sum_{0\le i\le j\le q}(-1)^{i+j}\varphi(a_0)\cdots\widehat{\varphi(a_i)}\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r) \\
&\quad +\sum_{0\le j\le i\le r}(-1)^{i+j+1}\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\widehat{\psi(a_i)}\cdots\psi(a_r) \\
&= \psi(a_0)\cdots\psi(a_r)-\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_r) \\
&\quad +\sum_{0\le i<j\le r}(-1)^{i+j}\varphi(a_0)\cdots\widehat{\varphi(a_i)}\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r) \\
&\quad +\sum_{0\le j<i\le r}(-1)^{i+j+1}\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\widehat{\psi(a_i)}\cdots\psi(a_r)
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{r-1}(\partial(\sigma^r)) &= \Phi\left(\sum_{i=0}^{r}a_0\cdots\widehat{a}_i\cdots a_r\right) \\
&= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\,\Phi(a_0\cdots\widehat{a}_i\cdots a_r) \\
&= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\widehat{\psi(a_i)}\cdots\psi(a_r)\right. \\
&\quad \left.+\sum_{j=i+1}^{r}(-1)^{j-1}\varphi(a_0)\cdots\widehat{\varphi(a_i)}\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r)\right) \\
&= \sum_{0\le j<i\le r}(-1)^{i+j}\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\widehat{\psi(a_i)}\cdots\psi(a_r) \\
&\quad +\sum_{0\le i<j\le r}(-1)^{i+j-1}\varphi(a_0)\cdots\widehat{\varphi(a_i)}\cdots\varphi(a_j)\psi(a_j)\cdots\psi(a_r)
\end{aligned}
$$

これらを加えると

$$\psi(a_0)\cdots\psi(a_r)-\varphi(a_0)\cdots\varphi(a_r)$$

となる。□

今まで 写像の合成は, 記号 $g\cdot f$ 等で表してきたが, 今後は $\cdot$ も省略して, 記号 gf 等で表すことにする。

補題 7.5

チェインホモトープなチェイン準同型写像 f と g はホモロジー群の同じ準同型対応を引き起こす。すなわ

ち f と g から引き起こされる ホモロジー群の準同型写像を, それぞれ

$$f_*, g_*; H_r(\mathscr{C}_1) \to H_r(\mathscr{C}_2)$$

と表せば, $f_* = g_*$ である。

<u>証明</u>　$[x] \in H_r(\mathscr{C}_1)$ に対して, $f_{*r}([x]) = [f_r(x)]$ であった。このとき,

f と g は チェインホモトープだから, f と g の チェインホモトピー $\Phi = \{\Phi_r\}$ が存在するこのとき $[x] \in H_r(\mathscr{C}_1)$ に対して,

$$\partial'_{r+1}\Phi_r(x) + \Phi_{r-1}\partial_r(x) = g(x) - f(x)$$

が成り立つ。$x \in Z_r(\mathscr{C}_1)$ なので, $\partial_r(x) = 0$ であるから, $g(x) - f(x) = \partial'_{r+1}\Phi_r(x)$ となる。
ここで, $\Phi_r(x) \in C_{r+1}(\mathscr{C}_2)$ だから, $\partial'_{r+1}\Phi_r(x) \in B_r(\mathscr{C}_2)$ となるので

$$g(x) \sim f(x), \quad \text{ゆえに}, g_*([x]) = f_*([x])$$

である。 □

定義 7.6
二つのチェイン複体 $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ に対して,

$$\exists f : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2 \ ; \ \text{チェイン準同型}$$

$$\exists g : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_1 \ ; \ \text{チェイン準同型}$$

$$s.t. \quad fg \simeq 1 \ , \qquad gf \simeq 1$$

であるとき, f は $\mathscr{C}_1$ から $\mathscr{C}_2$ への <u>**チェイン同値写像** (***chain equivalence map***)</u> という。もちろん, g は $\mathscr{C}_2$ から $\mathscr{C}_1$ へのチェイン同値写像といってもよい。

命題 7.7
$f : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ と $g : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_3$ がチェイン同値写像ならば, 合成写像 $gf : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_3$ もチェイン同値写像である。

問題 7.2　命題 7.7 を示せ。

命題 7.8
$f : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ がチェイン同値写像ならば, $f_* : H_r(\mathscr{C}_1) \cong H_r(\mathscr{C}_2)$ が成り立つ。

<u>証明</u>　$\exists g : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_1$ で, $fg \simeq 1, gf \simeq 1$ だから, $f_*g_* = 1_*$ かつ , $g_*f_* = 1_*$ である。
よって, g_*, f_* は全単射である。 □

8　$C_q(\mathscr{C})$ と $H_q(\mathscr{C})$

K を n 次元複体とし, q-チェイン群 $C_q = C_q(K)$ は生成元 $x_i^q (1 \leq i \leq \lambda_q)$ をもつ自由加群とし (x_i^q は向きの付いた q 次元単体 σ_i^q であった), $\mathscr{C} = \{(C_q, \partial_q)\}$ において, $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ を,

$$\partial x_i^q = \sum_j g_{ij} x_j^{q-1} \quad (g_{ij} \in \mathbb{Z})$$

とかくと, 行列 $\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{1\le i\le\lambda_q \\ 1\le j\le\lambda_{q-1}}}$ は, $(\lambda_q \times \lambda_{q-1})$ 行列である。そして, 行列 $\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix}$ は, $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ を満たさねばならない。

このとき,

定理 8.1

$q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ に対して C_q の自由生成系をうまくとることによって次のようにできる。すなわち C_q の生成元として, a_i^q, b_j^q, c_k^q, d_ℓ^q, e_m^q $\quad (1 \leq i \leq \alpha_q,\ 1 \leq j \leq \beta_q,\ 1 \leq k \leq \gamma_q,\ 1 \leq \ell \leq \delta_q,\ 1 \leq m \leq \varepsilon_q)$ をとり

$$\begin{cases} \lambda_q = \alpha_q + \beta_q + \gamma_q + \delta_q + \varepsilon_q \\ \partial a_i^q = e_i^{q-1} \quad (1 \leq i \leq \alpha_q) \\ \partial b_j^q = t_j^{q-1} d_j^{q-1} \quad (1 \leq j \leq \beta_q,\ t_j^{q-1} \text{ は 1 より大きい自然数}) \\ \partial c_k^q = 0 \quad (1 \leq k \leq \gamma_q) \\ \partial d_\ell^q = 0 \quad (1 \leq \ell \leq \delta_q = \beta_{q+1}) \\ \partial e_m^q = 0 \quad (1 \leq m \leq \varepsilon_q = \alpha_{q+1}) \end{cases}$$

で, さらに t_j^{q-1} は t_{j+1}^{q-1} を割る $(1 \leq j \leq \beta_q - 1)$

をみたすようにできる。これを, チェイン複体 $\mathscr{C} = \{C_q, \partial_q\}$ の基本基底という。ただし $\partial = \partial_q$ である。

証明

$\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix}$ は $(\lambda_q \times \lambda_{q-1})$ 型の整係数行列である。

証明に入る前に整数行列に関する線型代数を少し述べておこう。

(この理論を使っても 加群の基本定理を証明できることに注意しておく。)

整数行列の基本変形は, 次の (1) - (6) である。

(**1**) i 行を -1 倍する。

(**2**) i 行と j 行を入れ換える。

(**3**) j 行の k 倍を i 行に加える。$(k \in \mathbb{Z})$

(**4**) i 列を -1 倍する。

(**5**) i 列と j 列を入れ換える。

(**6**) i 列の k 倍を j 列に加える。$(k \in \mathbb{Z})$

$$P(i) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{c} ⓘ \end{array} \\ ⓘ & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

とおくと, $P(i)$ を行列 A に左から掛けることにより, 上の (1) を実現できる。生成元の変化で述べれば, x_i^q を $-x_i^q$ に変えることに対応する。$P(i)$ を行列 A に右から掛けることにより, 上の (4) を実現できる。

生成元の変化で述べれば, x_i^{q-1} を $-x_i^{q-1}$ に変えることに対応する。

$$
Q(i,j) = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} & & ⓘ & & ⓙ & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ ⓘ \\ \\ ⓙ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$Q(i,j)$ を行列 A に左から掛けることにより, 上の (2) を実現できる。生成元の変化で述べれば, x_i^q と x_j^q の交換に対応する。$Q(i,j)$ を行列 A に右から掛けることにより, 上の (5) を実現できる。生成元の変化で述べれば, x_i^{q-1} と x_j^{q-1} の交換に対応する。

$$
R(i,j;k) = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} & & ⓘ & & ⓙ & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ ⓘ \\ \\ ⓙ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & k & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$R(i,j;k)$ を行列 A に左から掛けることにより, 上の (3) を実現できる。生成元の変化で述べれば,

$$
\left\{ \begin{array}{ccl} x_i^q & \to & x_i^q + kx_j^q \\ x_j^q & \to & x_j^q \end{array} \right.
$$

$R(i,j;k)$ を行列 A に右から掛けることにより, 上の (6) を実現できる。生成元の変化で述べれば,

$$
\left\{ \begin{array}{ccl} x_i^{q-1} & \to & x_i^{q-1} - kx_j^{q-1} \\ x_j^{q-1} & \to & x_j^{q-1} \end{array} \right.
$$

基本変形によって (線型代数の時と同様に)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \qquad\varepsilon_{q-1}\qquad & \qquad\delta_{q-1}\qquad & \qquad\qquad \end{array} \\
\begin{array}{c} \alpha_q \\[3em] \beta_q \\[3em] \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{matrix} & & \\ \hline
 & \begin{matrix}t_1^{q-1}&&&\\&t_2^{q-1}&&\\&&\ddots&\\&&&t_{\delta_{q-1}}^{q-1}\end{matrix} & \\ \hline
 & & \begin{matrix}0&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{matrix} \\
 & &
\end{array}\right)
\end{array}
$$

とできる。このとき, $x \in C_q$ を,

$$
x = \sum_{i=1}^{\alpha_q} r_i a_i^q + \sum_{j=1}^{\beta_q} s_j b_j^q + \sum_{k=1}^{\gamma_q} t_k c_k^q + \sum_{\ell=1}^{\delta_q} u_\ell d_\ell^q + \sum_{m=1}^{\varepsilon_q} v_m e_m^q \quad (r_i, s_j, t_k, u_\ell, v_m \in \mathbb{Z})
$$

と表せば,

$$
\partial x = \sum_{i=1}^{\alpha_q} r_i e_i^{q-1} + \sum_{j=1}^{\beta_q} t_j^{q-1} s_j d_j^{q-1}
$$

となる。

したがって, $\mathbb{Z}[x]$ で x を生成元とする加群 $\mathbb{Z}$ を表すと,

$$
\begin{aligned}
Z_q(\mathscr{C}) &= \sum_{k=1}^{\gamma_q} \mathbb{Z}[c_k^q] + \sum_{\ell=1}^{\delta_q} \mathbb{Z}[d_\ell^q] + \sum_{m=1}^{\varepsilon_q} \mathbb{Z}[e_m^q] \\
B_q(\mathscr{C}) &= \sum_{\ell=1}^{\delta_q} \mathbb{Z}[t_\ell^q d_\ell^q] + \sum_{m=1}^{\varepsilon_q} \mathbb{Z}[e_m^q]
\end{aligned}
$$

となる。すると,

$$
H_q(\mathscr{C}) = B_q(\mathscr{C}) \big/ Z_q(\mathscr{C}) \ \cong\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\gamma_q} \oplus \mathbb{Z}\big/t_1^q\mathbb{Z} \ \oplus \cdots \oplus\ \mathbb{Z}\big/t_{\delta_q}^q\mathbb{Z}
$$

となる。 □

q 次元ホモロジー群 $H_q(\mathscr{C})$ の有限位数の元全体からなる部分群を, $\mathscr{C}$ の q 次元 **ねじれ群** (***torsion group***) と呼び $T_q(\mathscr{C})$ と書く。

$$T_q(\mathscr{C}) = T_q \cong \mathbb{Z}/t_1^q\mathbb{Z} \ \oplus \cdots \oplus \ \mathbb{Z}/t_{\delta_q}^q\mathbb{Z}$$

である。$t_1^q, t_2^q, \cdots, t_{\delta_q}^q$ を, $\mathscr{C}$ の q 次元 **ねじれ係数** (***torsion number***) という。
また q 次元ホモロジー群の階数 γ_q を $\mathscr{C}$ の q 次元 ***Betti* 数** (***Betti number***) という。

定理 8.2
q 次元ホモロジー群 $H_q(\mathscr{C})$ は, $\mathscr{C}$ の q 次元 Betti 数と q 次元ねじれ係数によって (一意に) きまる。
また, λ_q は (向きの付いた) q-単体の数であったので,

$$\lambda_q = \alpha_q + \beta_q + \gamma_q + \delta_q + \varepsilon_q = \alpha_q + \beta_q + \gamma_q + \beta_{q+1} + \alpha_{q+1}$$

より,

$$\boxed{\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\lambda_q = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\gamma_q} \quad \text{すなわち} \quad \boxed{\chi(K) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\gamma_q}$$

である。なぜならば,

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_0 & = & \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \beta_1 + \alpha_1 \\
-\lambda_1 & = & -\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \beta_2 - \alpha_2 \\
\vdots & & \\
(-1)^{q-1}\lambda_{q-1} & = & (-1)^{q-1}\alpha_{q-1} + (-1)^{q-1}\beta_{q-1} + (-1)^{q-1}\gamma_{q-1} + (-1)^{q-1}\beta_q + (_1)^{q-1}\alpha_q \\
(-1)^q\lambda_q & = & (-1)^q\alpha_q + (-1)^q\beta_q + (-1)^q\gamma_q + (-1)^q\beta_{q+1} + (-1)^q\alpha_{q+1} \\
(-1)^{q+1}\lambda_{q+1} & = & (-1)^{q+1}\alpha_{q+1} + (-1)^{q+1}\beta_{q+1} + (-1)^{q+1}\gamma_{q+1} + (-1)^{q+1}\beta_{q+2} + (-1)^{q+1}\alpha_{q+2} \\
\vdots & & \\
+) \qquad (-1)^n\lambda_n & = & (-1)^n\alpha_n + (-1)^n\beta_n + (-1)^n\gamma_n + (-1)^n\beta_{n+1} + (-1)^n\alpha_{n+1} \\
\hline
\end{array}$$

を考えると, $(n+1)$-単体は存在しないので, $\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} = 0$ である。
また $\partial a_0 = e_{-1}$, $\partial b_0 = d_{-1}$ だが, e_{-1}, d_{-1} はないので, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ である。
よって, 上の式が成り立つ。 □

9 非輪状な複体 (acyclic complex)

まず 複体 K に対して, K がサイクルを持たない (あるいは 1 点と同じホモロジー群をもつ) 複体は簡単な複体であると考えられるが, そのことを定義しよう。

定義 9.1
複体 K が **非輪状** (***acyclic***) **である** とは

$$\begin{array}{rcl}
H_q(K) & = & 0 \quad (q \neq 0) \\
H_0(K) & \cong & \mathbb{Z}
\end{array}$$

のときをいう。

そして, ここでは r 単体 σ に対して, $K(\sigma)$ は複体であったが, この複体は非輪状であることを示す。そのためにまず補題を用意しよう。それを述べるために次の言葉を定義しよう。

定義 9.2
点 x と 単体 $\sigma = a_0a_1\cdots a_s$ が **可接合 (*joinable*)** であるとは, $x, a_0, a_1, \cdots, a_s$ が c-独立であるときをいう。このとき, 出来上がった単体 $(xa_0a_1\cdots a_s)$ を x と σ の **接合 (*join*)** といい, $x * \sigma$ と表す。

単体的複体 K に対して, x と K が可接合という概念も次のように定められる。

定義 9.3
単体的複体 K に対して, x と K が **可接合** とは
(**1**) 任意の K の元 (単体) σ に対して, x と σ が可接合である。
(**2**) 任意の K の 2 つの元 (単体) σ, τ に対して, $(x*\sigma)\cap(x*\tau) = \emptyset$ である。
このとき, $K \cup \{x\} \cup \{\, x*\sigma\,;\, \sigma \in K\,\}$ を x と K の **接合** といい, $x * K$ と表す。

実は, この可接合という概念は, もっと一般化できる。

定義 9.4
r-単体 $\sigma = a_0a_1\cdots a_r$ と s-単体 $\tau = b_0b_1\cdots b_s$ が **可接合 (*joinable*)** であるとは, $a_0, a_1, \cdots, a_r$, $b_0, b_1, \cdots, b_s$ が c-独立であるときをいう。このとき, 出来上がった単体 $(a_0a_1\cdots a_rb_0b_1\cdots b_s)$ を σ と τ の **接合 (*join*)** といい, $\sigma * \tau$ と表す。明らかに $\sigma * \tau$ は $(r+s+1)$ 次元である。

定義 9.5
単体的複体 K と L に対して, K と L が **可接合** とは
(**1**) 任意の K の元 (単体) σ と L の元 (単体) τ に対して, σ と τ が可接合である。
(**2**) 任意の K の 2 つの元 (単体) σ_1, σ_2 と任意の L の 2 つの元 (単体) τ_1, τ_2 に対して, $(\sigma_1*\tau_1)\cap(\sigma_2*\tau_2) = \emptyset$ である。
このとき, $K \cup L \cup \{\, \sigma*\tau\,;\, \sigma \in K, \tau \in L\}$ を K と L の **接合** といい, $K * L$ と表す。

問題 9.1
$K * L$ は複体をなすことを示せ。

さて, x と K が 可接合のとき,

$$x * K = K \cup \{x\} \cup \{x*\sigma\,;\, \sigma \in K\,\}$$

であった。 K の r チェイン $c^r = \sum_{i=1}^{s} n_i\sigma_i^r$ $(n_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i^r$ は K の 向きの付いた r 単体$)$ に対して, $x * c^r = \sum_{i=1}^{s} n_i(x*\sigma_i^r)$ と決めると, これは複体 $x * K$ の $(r+1)$ チェインであるが, 境界作用素 ∂_{r+1} での像は,

補題 9.6

$$\begin{cases} \partial_{r+1}(x * c^r) &= c^r - x * \partial_r(c^r) \quad (r \geq 1) \\ \partial_1(x * c^0) &= c^0 - \varepsilon(c^0)\, x \end{cases}$$

となる。ここに, $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ は $c^0 = \sum_j n_j \sigma_j^0$ (n_j は整数 , σ は 0-単体) とすると, $\varepsilon(c^0) = \sum_j n_j$ によって定められた写像である。

証明　$r \geq 1$ であるとき, r-単体 $\sigma^r = a_0 a_1 \cdots a_r$ については, $x * \sigma^r = x a_0 a_1 \cdots a_r$ だから,

$$\partial_{r+1}(x * \sigma^r) = a_0 a_1 \cdots a_r + \sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+1} x a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_r$$

であり, $\partial_r \sigma^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_r$ だから,

$$\partial_{r+1}(x * \sigma^r) = \sigma^r - x * \partial_r \sigma^r$$

である。そして,
r-チェイン $c^r = \sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i^r$ については,

$$\begin{aligned} &\partial_{r+1}(x * c^r) = \sum_{i=1}^{s} n_i \partial_{r+1}(x * \sigma_i^r) = \sum_{i=1}^{s} n_i(\sigma_i^r - x * \partial_r \sigma_i^r) \\ &= \sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i^r - \sum_{i=1}^{s} n_i (x * \partial_r \sigma_i^r) = \sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i^r - x * \sum_{i=1}^{s} n_i \partial_r \sigma_i^r = c^r - x * \partial_r c^r \end{aligned}$$

となり, 補題が成り立つ。

0-単体 $\sigma^0 = a$ については, $\partial_1(x * \sigma^0) = \partial_1(xa) = \sigma^0 - x$ であって,
0-チェイン $c^0 = \sum_j n_j \sigma_j^0$ については,

$$\begin{aligned} &\partial_1(x * c^0) = \partial_1\left(\sum_j n_j (x * \sigma_j^0)\right) = \sum_j n_j \partial_1(x * \sigma_j^0) = \sum_j n_j(\sigma_j^0 - x) \\ &= \sum_j n_j \sigma_j^0 - \sum_j n_j x = c^0 - \varepsilon(c^0) x \end{aligned}$$

となるので補題が成立する。 □

この節の目的の結果を述べる前に, 簡単な 0 次のホモロジー群に関する結果を先に述べておこう。

K が弧状連結でないとき, 弧状連結成分を $K_1, K_2, \cdots, K_s$ とすると,

補題 9.7

$$H_i(K) \cong H_i(K_1) \oplus H_i(K_2) \oplus \cdots \oplus H_i(K_s)$$

である。

問題 9.2 補題 9.7 を示せ。

また, $H_0(K)$ については, 次のように簡単に計算できる。

補題 9.8
K を弧状連結な複体とすると, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である。

証明 K が 1 つの頂点 v のみからなるとき, $K = \{v\}$ とすると $C_0(K) = \{n\,v\}$ $(n \in Z)$, $C_q(K) = 0$ $(q \geq 1)$ である。したがって $n\,v$ に n を対応させることにより $C_0(K) \cong \mathbb{Z}$ となり また $Z_0(K) = \mathrm{Ker}\ \partial_0 = C_0(K)$, $B_0(K) = \mathrm{Im}\ \partial_1 = \{0\}$ であるから, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である。

K がそれ以外の連結な複体の時, $Z_0(K) = C_0(K) =< v_0, v_1, \cdots, v_s >$ である。 K は連結だから 任意の頂点 v_i は v_0 と K の 1 次元単体の列 $\sigma_1^1, \sigma_2^1, \cdots, \sigma_s^1$ で結べて, $\sigma_1^1 =< v_0 a_1 >$, $\sigma_2^1 =< a_1 a_2 >$, $\cdots$, $a_s^1 =< a_{s-1} v_i >$ とおくと, $\partial(\sigma_1^1 + \sigma_2^1 + \cdots + \sigma_s^1) = v_i - v_0$ であるから, $B_0(K) =< v_1 - v_0, v_2 - v_0, \cdots, v_s - v_0 >$ となる (各自示せ)。よって $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}$ が示される。□

問題 9.3 補題 9.8 の残った部分の証明を付けよ。

命題 9.9
K の弧状連結成分が r である必要十分条件は, $H_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (r 個) であることである。

問題 9.4
命題 9.9 を示せ。

定理 9.10
σ^r を r-単体 $(r \geq 0)$ とするとき, $K = K(\sigma^r)$, $\dot{K} = K(\dot{\sigma}^r)$ とおく。このとき,

$$\begin{cases} H_s(K) & = & 0 \quad (s \neq 0) \\ H_0(K) & \cong & \mathbb{Z} \end{cases}$$

すなわち, K は非輪状な複体である。また, $r \geq 1$ のとき,

$$\begin{cases} H_s(\dot{K}) & = & 0 \quad (s \neq r-1, 0) \\ H_{r-1}(\dot{K}) & \cong & H_0(\dot{K}) \quad \cong \quad \mathbb{Z} \end{cases}$$

である。

証明 $\sigma^r = a_0 a_1 \cdots a_r$ とし, 先ず $K = K(\sigma)$ のホモロジー群を求めよう。

$K = K(\sigma)$ に可接合な x をとる[2]。

このとき, 単体写像 $f : K \to x * K$, $g : x * K \to K$ を次のように定める。

$$\begin{cases} f(a_i) = a_i & (0 \leq i \leq r) \\ g(x) = a_0, \quad g(a_i) = a_i & (0 \leq i \leq r) \end{cases}$$

明らかに f, g は単体写像で, そして, $gf = 1_K$ だから,

$$g_* f_* = 1_*,$$

[2] $K \subset \mathbb{R}^N$ ならば, $x \in \mathbb{R}^{N+1} - \mathbb{R}^N$ にとれば 可接合である。

である。また $s \geq 0$ に対して, 準同型写像 $D_s : C_s(K) \to C_{s+1}(x * K)$ を,

$$D_s(c^s) = x * c^s \quad (c^s \in C_s(K))$$

と定めれば, $s \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} \partial D_s(c^s) + D_{s-1}\partial(c^s) &= \partial(x * c^s) + D_s\partial(c^s) \\ &= c^s - x * \partial(c^s) + x * \partial c^s = c^s \end{aligned}$$

で, D_s は f_s と 0 のチェインホモトピーとなる。よって,

$$f_{*s} = 0$$

である。すなわち, $s \geq 1$ に対して

$$H_s(K) = 0$$

となる。

$H_0(K)$ は K が弧状連結なので, 補題 9.8 より $H_0(K) = \mathbb{Z}$ となる。

次に $H_s(\overset{\bullet}{K})$ を求めよう。

$s < r$ については, $C_s(K) = C_s(\overset{\bullet}{K})$ だから, $s < r-1$ については,

$$H_s(K) = H_s(\overset{\bullet}{K})$$

である。また, $s = r-1$ の時は, 同型写像 $\theta : \mathbb{Z} \to C_r(K)$ を

$$\theta(n) = n\sigma^r \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

と定義し, $\partial_r\theta \ : \ \mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K)$ を考えると,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta} & C_r(K) & \xrightarrow{\partial_r} & C_{r-1}(K) \\ n & \longmapsto & n\sigma^r & \longmapsto & n\displaystyle\sum_{i=0}^{r}(-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a_i} \cdots a_r \end{array}$$

なので, $\partial_r\theta(n) = 0$ ならば, $\sigma_i^{r-1} = a_0 a_1 \cdots \hat{a_i} a_r$ と表わせば,

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i n\sigma_i^{r-1} = 0$$

となり, $\sigma_0^{r-1}, \sigma_1^{r-1}, \cdots, \sigma_r^{r-1}$ は $C_{r-1}(K)$ の基底であるから, $n = 0$ でなければならない。よって, $\partial_r\theta$ は単射である[3]。

したがって θ が全射であることに注意すれば, $\partial_r\theta$ によって, $\partial_r\theta(\mathbb{Z}) = \partial_r(C_r(K)) = B_{r-1}(K) \cong \mathbb{Z}$ となる。すると, $H_{r-1}(\overset{\bullet}{K}) = Z_{r-1}(\overset{\bullet}{K}) \Big/ B_{r-1}(\overset{\bullet}{K})$ であって, $B_{r-1}(\overset{\bullet}{K}) = \mathrm{im}\ \partial_r = 0$ なので $(C_r(\overset{\bullet}{K}) = 0$ より$)$,

$$H_{r-1}(\overset{\bullet}{K}) = Z_{r-1}(\overset{\bullet}{K}) = Z_{r-1}(K)$$

[3] $\mathbb{Z}, C_r(K)$ はどちらも自由加群だから, いつでも単射は言えるのでこの証明は実はいらない（11 節参照）

となる。ところが, $H_{r-1}(K)=0\ (r\geq 2)$ で, $H_{r-1}(K)=Z_{r-1}(K)\Big/B_{r-1}(K)$ だから,

$$Z_{r-1}(K)=B_{r-1}(K)$$

である。したがって,

$$H_{r-1}(\dot{K})=B_{r-1}(K)$$

となる。それゆえ,

$$H_{r-1}(\dot{K})\cong\mathbb{Z}$$

で, その元は, サイクル $\partial_r(n\cdot\sigma^r)=\displaystyle\sum_{i=0}^{r}(-1)^i n\sigma_i^{r-1}$ で代表される。

また 生成元は $\displaystyle\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\sigma_i^{r-1}$ である。 □

10 添加複体, 被約ホモロジー群

n 次元複体 K に対して, $C_q(K)$ は $0\leq q\leq n$ のみ定めていたが, ここで便宜上 $q<0,\ q>n$ は $C_q(K)=0$ と考える (ていた)。したがって, 鎖複体は

$$\cdots\to 0\to C_n(K)\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}(K)\to\cdots\to C_r(K)\xrightarrow{\partial_r}C_{r-1}(K)\to\cdots\to C_1(K)\xrightarrow{\partial_1}C_0(K)\xrightarrow{\partial_0}0$$

であった。

$C_q(K)$ は q-単体の 1 次結合 $(0\leq q\leq n)$ であった。ここでは さらに $q=-1$ に対しても, $\emptyset$ の 1 次結合と考える。すなわち $c\in C_{-1}(K)$ の元は, $c=n\,\emptyset=n\ (n\in\mathbb{Z})$ と考える。(すなわち $C_{-1}(K)=\mathbb{Z}$)
そして $\partial_0=0$ (すなわち 零写像) であったがこれを次のように変える。
$C_0(K)$ の元 x は

$$\sum_{i=1}^{s}n_i\sigma_i^0\qquad(n_i\in\mathbb{Z},\ \sigma_i^0\text{ は向きの付いた 0-単体 })$$

と表されるので,

$$\sum_{i=0}^{s}n_i$$

によって $\mathbb{Z}$ の元に対応させて決まる写像

$$\varepsilon: C_0(K)\to\mathbb{Z}$$

を添加写像という。明らかに, ε は全射準同型である。

すると 1-単体 $\sigma^1=a_0a_1$ に対しては,

$$\varepsilon\partial_1(a_0a_1)=\varepsilon(a_1-a_0)=\varepsilon(a_1)-\varepsilon(a_0)=0$$

である。そこで

$$C_{-1}(K)=\mathbb{Z},\qquad\varepsilon: C_0(K)\to C_{-1}(K)$$

とし, $\mathscr{C} = \{C_q(K), \partial_q\}$ に, $C_{-1}(K)$ と ε を加えたもの (正確には変えたもの) を **添加複体** あるいは **被約 (鎖) 複体** という。すなわち
$\mathscr{C} = \{C_q(K), \partial_q\}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{C}_q(K) = C_q(K)\ (q \geq 0), && \widetilde{C}_{-1}(K) = \mathbb{Z}, \\
&\widetilde{\partial}_q = \partial_q\ (q > 0), && \widetilde{\partial}_0 = \varepsilon
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{C}} \quad : \quad & \cdots \to 0 \to \widetilde{C}_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \widetilde{C}_{n-1}(K) \to \cdots \to \widetilde{C}_q(K) \xrightarrow{\partial_q} \widetilde{C}_{q-1}(K) \to \\
& \cdots \to \widetilde{C}_1(K) \xrightarrow{\partial_1} \widetilde{C}_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} \widetilde{C}_{-1}(K) \to 0
\end{aligned}$$

ができる。これを, **被約鎖複体** (***reduced chain complex***) と言い, $\widetilde{\mathscr{C}} = \{\widetilde{C}_q(K), \widetilde{\partial}_q\}$ と表す。
この $\widetilde{\mathscr{C}}$ に対して, ホモロジー群が前と同じように,

$$\begin{aligned}
&q \geq 1 \text{ のとき} && H_q(\widetilde{\mathscr{C}}) = Z_q(\widetilde{\mathscr{C}}) / B_q(\widetilde{\mathscr{C}}) \quad (\ = Z_q(\mathscr{C}) / B_q(\mathscr{C}) = H_q(\mathscr{C})\ ), \\
&q = 0 \text{ のとき} && Z_0(\widetilde{\mathscr{C}}) = \ker \varepsilon, \\
& && B_0(\widetilde{\mathscr{C}}) = \mathrm{im}\ \partial_1, \\
& && H_0(\widetilde{\mathscr{C}}) = Z_0(\widetilde{\mathscr{C}}) / B_0(\widetilde{\mathscr{C}})
\end{aligned}$$

と定義できる。このとき, この $H_q(\widetilde{\mathscr{C}})$ のことを $\widetilde{H}_q(K)$ と表し,
被約ホモロジー群 (***reduced Homology group***) という。
あるいは, $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ より自然に導かれる準同型写像を, $\varepsilon_* : H_0(K) \to \mathbb{Z}$ とおくとき ($\varepsilon_*([z]) = \varepsilon(z)$ と定める) , $\ker\ \varepsilon_*$ を $\widetilde{H}_q(K)$ と定めても同じである。

問題 10.1
この 2 つの定義が同じであることを示せ。

このとき, 次の命題が示される。

命題 10.1

$$H_0(K) \cong \widetilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$$

である。

問題 10.2 命題 10.1 を示せ。

普通の鎖複体の時と同じように, 被約複体の時も鎖準同型写像が定義される。すなわち, $\widetilde{\mathscr{C}} = \{\widetilde{C}_q, \widetilde{\partial}_q\}$, $\widetilde{\mathscr{C}}' = \{\widetilde{C}'_q, \widetilde{\partial}'_q\}$ を二つの被約複体とし,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{C}} \quad &: \quad \cdots \to 0 \to \widetilde{C}_n \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} \widetilde{C}_{n-1} \to \cdots \to \widetilde{C}_q \xrightarrow{\widetilde{\partial}_q} \widetilde{C}_{q-1} \to \cdots\cdots \to \widetilde{C}_1 \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} \widetilde{C}_0 \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} \widetilde{C}_{-1} \to 0 \\
\widetilde{\mathscr{C}}' \quad &: \quad \cdots \to 0 \to \widetilde{C}'_n \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_n} \widetilde{C}'_{n-1} \to \cdots \to \widetilde{C}'_q \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_q} \widetilde{C}'_{q-1} \to \cdots\cdots \to \widetilde{C}'_1 \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_1} \widetilde{C}'_0 \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_0} \widetilde{C}'_{-1} \to 0
\end{aligned}$$

とする。このとき $\{\ \widetilde{f}_r : \widetilde{C}_r \to \widetilde{C}'_r\ \}$ が定義されていて, 次の図式が可換であるとき,

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\longrightarrow & \widetilde{C}_{r+1} & \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{r+1}} & \widetilde{C}_r & \xrightarrow{\widetilde{\partial}_r} & \widetilde{C}_{r-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \widetilde{C}_0 & \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} & \widetilde{C}_{-1} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_{r+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_r} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_{r-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_0} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_{-1}} & \\
\longrightarrow & \widetilde{C}'_{r+1} & \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_{r+1}} & \widetilde{C}'_r & \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_r} & \widetilde{C}'_{r-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \widetilde{C}'_0 & \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_0} & \widetilde{C}'_{-1} & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

すなわち

$$\widetilde{f}_{r-1}\ \widetilde{\partial}_r = \widetilde{\partial}'_r\ \widetilde{f}_r$$

が成り立つ時 (被約複体の) **<u>鎖準同型</u>** (***chain homomorphism***) と言う。

このときも単体写像から, 同様に (被約複体の) 鎖準同型写像が定まる。
この時定まる準同型写像を

$$\widetilde{f}_{\#q} :\ \widetilde{C}_q(K_1) \to \widetilde{C}_q(K_2) \qquad (q = 0, 1, \cdots)$$

と表し,

$$\{\widetilde{f}_{\#q}\} : \{\widetilde{C}_q(K_1)\} \to \{\widetilde{C}_q(K_2)\}$$

すなわち

$$\widetilde{f}_{\#} : \widetilde{\mathscr{C}}_1 \to \widetilde{\mathscr{C}}_2$$

が得られる。

また, 被約複体の鎖準同型写像からも同様に

定理 10.2
$\widetilde{f}$ を $\widetilde{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{C}}'$; 被約複体の鎖準同型写像とすると,
$\widetilde{f}$ は $\widetilde{\mathscr{C}}$ の (被約) ホモロジー群から $\widetilde{\mathscr{C}}'$ の (被約) ホモロジー群への準同型

$$\widetilde{f}_* : H_*(\widetilde{\mathscr{C}}) \to H_*(\widetilde{\mathscr{C}}')$$

をひきおこす。($\widetilde{f}_{*r} : H_r(\widetilde{\mathscr{C}}) \to H_r(\widetilde{\mathscr{C}}')$ である)

11 ホモロジー代数の初歩

前の節では, 複体からチェイン複体を構成してホモロジー群を定義したが, この節では, 次のように, 複体を忘れて (幾何学的な図形を忘れて) 先ずチェイン複体を定義する。 そして加群とその間の準同型写像のみから代数的にホモロジー理論を構成することができることをこの節で説明する。

定義 11.1 (チェイン複体)
次数をもつ (次数つき) 加群と準同型写像の列

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

が, 任意の $1 \leq q \leq n+1$ に対して

$$\partial_{q-1}\partial_q = 0$$

をみたすとき, **チェイン (鎖) 複体** (***chain complex***) という。C_q を q **次チェイン群** (***chain group***) または q**-チェイン群**, その元を q **次チェイン** (***chain***) または q**-チェイン** という。
また ∂_q を **境界作用素** (***boundary operator***) または **バウンダリー作用素** という。

∂_{n+1} は 0 からの加群の準同型写像なので 0(零写像), また ∂_0 は 0 への加群の準同型写像なのでやはり 0(零写像) である。そのため, これらはいちいち記さないことにする。また混乱の恐れがない限り, ∂_q を単に ∂ と書く。チェイン複体は $(\mathscr{C}, \partial)$ とか $\mathscr{C}$ と記すこともある。

チェイン複体

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

において,

$$Z_q = \ker \partial_q, \qquad B_q = \operatorname{im} \partial_{q+1}$$

とおき, Z_q を q**-輪体群** (***cycle group***), B_q を q**-境界輪体群** (***bounding cycle group***) という。また, Z_q の元を q**-輪体** (***cycle***), q**-サイクル** あるいは q **次サイクル** (***cycle***) , B_q の元を q**-境界輪体** (***boundary cycle***), q**-バウンダリーサイクル** あるいは q **次バウンダリーサイクル** (***boundary cycle***) という。$\partial_q \partial_{q+1} = 0$ であったから,

$$B_q \subset Z_q$$

である。

定義 11.2 (チェイン複体のホモロジー群)
剰余加群 Z_q/B_q を, チェイン複体 $\mathscr{C}$ の **(q 次) ホモロジー群** (***homology group***) といい, $H_q(\mathscr{C})$ で表す。剰余類はとくに **ホモロジー類** (***homology class***) とよび, サイクル $c \in Z_q$ が属するホモロジー類を $[c]$ で表す.

$(\mathscr{C}, \partial)$, $(\mathscr{C}', \partial')$ をチェイン複体とする。各 q に対して加群の準同型写像 $\varphi_q : C_q \to C'_q$ が与えられ,

$$\partial'_q \varphi_q = \varphi_{q-1} \partial_q$$

をみたすとき, すなわち次の図式が可換のとき $\varphi = \{\varphi_q\}$ を **チェイン準同型写像** (***chain homomorphism***) という。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_q} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{q-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & \\
\longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

バウンダリー作用素と同じように, φ_q を単に φ と書くことが多い。また $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ などとも記す。

補題 11.3
$\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ をチェイン準同型写像とする。$\mathscr{C}$ の q 次サイクル c, c_0, c_1 に対し, 次が成り立つ。

(1) $\varphi(c)$ は $\mathscr{C}'$ の q 次サイクルである。

(2) $[c_0] = [c_1]$ であれば, $[\varphi(c_0)] = [\varphi(c_1)]$ である。
証明　c はサイクルなので $\partial c = 0$ である。したがって

$$\partial'\varphi(c) = \varphi(\partial c) = \varphi(0) = 0$$

となり, $\varphi(c)$ もサイクルである。
$[c_0] = [c_1]$ より $c_0 - c_1$ はバウンダリーサイクルである。したがってあるチェイン $d \in C_{q+1}$ が, $\partial d = c_0 - c_1$ をみたす。そこで

$$\varphi(c_0) - \varphi(c_1) = \varphi(c_0 - c_1) = \varphi(\partial(d)) = \partial'\varphi(d)$$

となる。これは $\varphi(c_0) - \varphi(c_1)$ が バウンダリーサイクルであることを示している。したがって $[\varphi(c_0)] = [\varphi(c_1)]$ である。□

$\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ をチェイン準同型写像とする。$\gamma \in H_q(\mathscr{C})$ に対し, γ に属するサイクル (γ の代表元) を c とするとき, この補題 11.3 により $\varphi(c)$ のホモロジー類は, 代表 c の取り方によらず決まる。そこで

定義 11.4 (誘導準同型写像)
$\gamma = [c]$ に $[\varphi(c)]$ を対応させる写像を φ の **誘導準同型写像** (***induced homomorphism***) といい,

$$\varphi_* : H_q(\mathscr{C}) \to H_q(\mathscr{C}')$$

で表す。

ここでは ∂ と同様に, 任意の次数 q に対する q 次ホモロジー群の間の誘導準同型写像を, 1つの記号 φ_* で表した。このような略記を以降たびたび断らずに使う (混乱を生まないときは)。

誘導準同型写像は共変函手性 (covariant functor) をもつ。

補題 11.5 (共変函手性)
$\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, $\varphi' : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}''$ を チェイン複体の間のチェイン準同型写像とするとき,
(1) $(\varphi'\varphi)_* = \varphi'_*\varphi_* : H_q(\mathscr{C}) \to H_q(\mathscr{C}'')$
(2) $id_* = id : H_q(\mathscr{C}) \to H_q(\mathscr{C})$

問題 11.1
補題 11.5 を示せ。

定義 11.6
$\varphi, \psi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ をチェイン準同型写像とする。加群の準同型写像 $D_q : C_q \to C'_{q+1}$ は, 各 q に対し,

$$\partial'_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = \varphi - \psi \tag{11.1}$$

をみたすとき, $\mathbb{D} = \{D_q\}$ を, φ と ψ を結ぶ **チェインホモトピー** (***chain homotopy***) という。各 D_q を D と表すこともある。チェインホモトピーで結ばれる φ と ψ は **チェインホモトピック** (***chain homotopic***) であるといい, $\varphi \simeq \psi$ と表す。
この $\simeq$ が同値関係であることは, 命題 7.4 と同様に示される。

命題 11.7 (誘導準同型写像のホモトピー不変性)
$\varphi, \psi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ がチェインホモトピックなら, φ_* と ψ_* は写像として等しい。すなわち

$$\varphi_* = \psi_* : H_q(\mathscr{C}) \to H_q(\mathscr{C}')$$

である。

<u>証明</u>　$\mathbb{D}$ を φ と ψ を結ぶチェインホモトピーとする。$c \in C_q$ をサイクルとする。すなわち $\partial c = 0$ である。このときチェインホモトピーのみたす式 (11.1) より

$$\varphi(c) - \psi(c) = \partial' D(c)$$

である。したがって $[\varphi(c)] = [\psi(c)] \in H_q(\mathscr{C}')$ であり,

$$\varphi_*([c]) = [\varphi(c)] = [\psi(c)] = \psi_*([c])$$

である。すなわち $\varphi_* = \psi_*$ がわかる。□

次に, ホモロジー代数のごく初歩の完全性について解説する。

定義 11.8
加群と準同型写像の列

$$\cdots \longrightarrow A_{q+1} \xrightarrow{h_{q+1}} A_q \xrightarrow{h_q} A_{q-1} \longrightarrow \cdots$$

に対し, $\ker h_q = \mathrm{im}\, h_{q+1}$ が成り立つとき, A_q で <u>**完全** (***exact***) **である**</u> といい, すべての q について, A_q で完全であるとき, その列は <u>**完全である**</u> とか <u>**完全列** (***exact sequence***)</u> という。３つの項からなる完全列

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

は，とくに <u>**短完全列** (***short exact sequence***)</u> とよばれる。

命題 11.9　次が成り立つ

(1) 列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

が完全列である必要十分条件は 準同型写像 $f : A \to B$ が単射であることである。

(2) 列

$$A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

が完全列である必要十分条件は 準同型写像 $g : A \to B$ が全射であることである。

(3) 列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$$

が完全列である必要十分条件は 準同型写像 $h : A \to B$ が全単射であることである。

問題 11.2
命題 11.9 を示せ。

ここで, よく使われる 5 項補助定理 (Five Lemma) と呼ばれている有名な定理をあげておこう。

定理 11.10 (5 項補助定理 (Five Lemma))
加群と準同型写像からなる可換な図式

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_3} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

において, 図式の横方向は完全列であるとする。
このとき, h_1, h_2, h_4, h_5 が同型写像ならば, h_3 も同型写像である。

問題 11.3
定理 11.10 を示せ。

完全列の概念は, 自然にチェイン複体にも拡張される。チェイン複体とチェイン準同型写像の列

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{C} \xrightarrow{\psi} \mathscr{C}'' \longrightarrow 0$$

が, 各次数 q において完全であるとき, **チェイン複体の短完全列** という。詳しく述べると, 次の図式において, 横向きは完全列で, 可換な図式であるということである。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\varphi_{q+1}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\psi_{q+1}} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{q+1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{\varphi_q} & C_q & \xrightarrow{\psi_q} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_q} & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & C_{q-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & C''_{q-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{q-1}} & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

チェイン複体の短完分列が与えられると, $H_q(\mathscr{C}'')$ から $H_{q-1}(\mathscr{C})$ へのバウンタリー準同型写像

$$\partial_* : H_q(\mathscr{C}'') \to H_{q-1}(\mathscr{C})$$

が下の図式を右から左へ階段状にたどることにより定まる (**連結準同型写像** と呼ばれる)。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{\varphi_q} & C_q & \xrightarrow{\psi_q} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_q} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{\varphi_{q-1}} & C_{q-1} & \xrightarrow{\psi_{q-1}} & C''_{q-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{q-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{q-2} & \xrightarrow{\varphi_{q-2}} & C_{q-2} & \xrightarrow{\psi_{q-2}} & C''_{q-2} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

すなわち $\alpha \in H_q(\mathscr{C}'')$ に対して α を代表するサイクル $c'' \in C''_q$ を 1 つ選ぶ。このとき上の列の完全性から ψ_q は全射なので, あるチェイン $c \in C_q$ が存在して $\psi(c) = c''$ をみたす。 c は, 図式の右上の四角が可換なので $\psi(\partial c) = \partial'' c'' = 0$ である。したがって中間の列の完全性により $\ker \psi_{q-1} = \operatorname{im} \varphi_{q-1}$ なので, あるチェイン $c' \in C'_{q-1}$ が存在して, $\varphi(c') = \partial c$ をみたす。この c' はさらに下に延びる図式を見ると, $\varphi(\partial' c') = \partial \varphi(c') = \partial\partial c = 0$ をみたすが, φ は単射なのて, $\partial' c' = 0$ である。したがって c' はサイクルてある。そこでバウンダリー作用素 ∂_* を

$$\partial_*(\alpha) = [c']$$

により定義する。像として定めたホモロジー類は, 定義の過程で現れたいろいろな選択の自由度によらないことが確かめられる。

問題 11.4
上で述べられていることの (完全な) 証明を付けよ (特に選択の自由度によらないことを示せ。)

定理 11.11
チェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{C} \xrightarrow{\psi} \mathscr{C}'' \longrightarrow 0$$

に対して,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(\mathscr{C}') \xrightarrow{\varphi_*} H_q(\mathscr{C}) \xrightarrow{\psi_*} H_q(\mathscr{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(\mathscr{C}') \xrightarrow{\varphi_*} \cdots$$

は完分列である.

証明　各時点での完全性を確かめればよいが, すべて定義にもどった議論でわかる。ここでは三分の一に相当する $H_q(\mathscr{C})$ での完全性, すなわち $\ker \psi_* = \operatorname{im} \varphi_*$ だけを示し, 後は読者の演習に残す。

$\ker \psi_*$ の元を表すサイクル $c \in C_q$ を選ぶ。このとき $[\psi(c)] = \psi_*([c]) = 0$ なので, $\psi(c)$ はバウンダリーサイクルとなり, 適当な $d'' \in C''_{q+1}$ をとれば, $\partial''(d'') = \psi(c)$ とできる。一方, ψ は全射なので, $\psi(d) = d''$ をみたすチェィン $d \in C_{q+1}$ が存在する。c から ∂d を引いた $c - \partial d$ を考えると, ∂d はバウンダリーサイクルなので $c - \partial d$ と c は同じホモロジー類を表す。しかも $\psi(c - \partial d) = \psi(c) - \psi(\partial d) = \psi(c) - \partial''(\psi d)) = \psi(c) - \partial''(d'') = 0$ なので, 完全性 ($\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$) より, 適当な $c' \in C'_q$ により, $\varphi(c') = c - \partial d$ と表せる。ここで c' はサイクルである。なぜならば $\varphi(\partial'(c')) = \partial \varphi(c') = \partial(c - \partial d) = \partial c - \partial^2 d = \partial c = 0$ で φ は単射なので, $\partial'(c') = 0$ となるからである。すると $\varphi_*([c]) = [\varphi(c')] = [c - \partial d] = [c]$ となるので, 包含関係 $\ker \psi_* \subset \operatorname{im} \varphi_*$ が示される。

次に $\mathrm{im}\,\varphi_*$ の元を表すサイクル $c \in C_q$ を選ぶ。$c \in \mathrm{im}\,\varphi_*$ なので, $c' \in C'_q$ が存在して, $[c] = \varphi_*([c']) = [\varphi(c')]$ となる。 すると $[\varphi(c')] = [c]$ なので, $c - \varphi(c')$ はバウンダリーサイクルとなり, $\partial(d) = c - \varphi(c')$ をみたすチェィン $d \in C_{q+1}$ が存在する。チェィン複体の間の図式の可換性と列の完全性から, $\partial''\psi(d) = \psi\partial(d) = \psi(c - \varphi(c')) = \psi(c) - \psi\varphi(c') = \psi(c)$ である。これは $\psi(c)$ がバウンダリーサイクルであることを示すので, $\mathrm{im}\,\varphi_* \subset \ker\psi_*$ がわかる。以上から, $\mathrm{im}\,\varphi_* = \ker\psi_*$ である。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\varphi_{q+1}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\psi_{q+1}} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial'_{q+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_{q+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial''_{q+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{\varphi_q} & C_q & \xrightarrow{\psi_q} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial'_q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial''_q} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & C_{q-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & C''_{q-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

問題 11.5
残りの完全性を示せ。

次の定理の証明も, 演習問題として読者に残す。

定理 11.12 (∂_* の自然性)
２つのチェイン複体の短完全列の間に以下の図式を可換にするチエイン準同型写像があるとする。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{C}' & \longrightarrow & \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & {\scriptstyle g}\Big\downarrow & & {\scriptstyle h}\Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{B}' & \longrightarrow & \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

このときバウンダリー作用素 ∂_* は, 図式

$$\begin{array}{ccc}
H_q(\mathscr{C}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(\mathscr{C}') \\
{\scriptstyle h_*}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\
H_q(\mathbb{B}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(\mathbb{B}')
\end{array}$$

を可換にする.

問題 11.6
定理 11.12 を示せ。

短完全列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

はしばしば表れるが, g は全射なので, 準同型定理より, $A'' \cong A/\ker g$ で完全性より 右辺は $A/\mathrm{im}\,f$ と等しい。さらに f は単射であるから, $\mathrm{im}\,f \cong A'$ であるから, $A'' \cong A/A'$ がいえる。それなら, A' と A'' に

よって A が決まるのではないかということが問題になる。たとえば A'' が自由加群ならば, $A \cong A' \oplus A''$ となり (補題 11.14), A' と A'' によって, A が決まる。しかし A'' が自由加群でなければ, 必ずしも A は A' と A'' によって決まらない。例えば, $A' = \mathbb{Z}$, $A'' = \mathbb{Z}_2$ としたとき, 列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f'} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{g'} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

は共に完全である (各自確かめよ)。ただし, 準同型写像はそれぞれ $f(m) = 2m$, $g(m) = [m]$, $f'(m) = (m, 0)$, $g'(m, [n]) = [n]$ と定義されたものである。$\mathbb{Z}$ は位数有限の元をもたないが, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ は位数 2 の元をもつから, $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ は同型ではない。

ではどういうときに A' と A'' によって A が決まる, すなわち $A \cong A' \oplus A''$ になるかということについては次のような重要な補題がある。

補題 11.13

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

を加群の短完全列とする。このとき, 次の 2 つは同値である。

(**1**) 準同型写像 $\overline{g} : A'' \to A$ が存在して $g\overline{g} = 1$ が成り立つ。

(**2**) 準同型写像 $\overline{f} : A \to A'$ が存在して $\overline{f}f = 1$ が成り立つ。

上の条件 (1), (2) が成り立つとき, **分解 (*split*) する** 短完全列 あるいは **分離する** 短完全列 あるという。また, 短完全列は 分解 (分離) するということもある。

なお このとき, 同型 $A \cong A' \oplus A''$ が成り立つ。

証明

(1) から (2)

任意の A の元 a に対し, (1) の仮定より, $\overline{g}$ が存在するので, $\overline{g}g(a)$ はまた A の元で, $g(a - \overline{g}g(a)) = g(a) - g\overline{g}g(a) = g(a) - g(a) = 0$ である。よって, $\ker g = \operatorname{im} f$ より, A' の元 a'_0 が存在して, $f(a'_0) = a - \overline{g}g(a)$ となる。そこで, $\overline{f} : A \to A'$ を $\overline{f}(a) = a'_0$ で定める (f は単射なので $a'_0 \in A'$ は一意)。残るは $\overline{f} \cdot f = 1$ をみたすことを示せばよい。それを示すために, a' を A' の任意の元とし, $a = f(a')$ とおくと, この a に対して上のように $a'_0 \in A'$ があって, $f(a'_0) = a - \overline{g}g(a)$ となる。上の f の定めかたにより $\overline{f}(a) = a'_0$ であるが, $f(a'_0) = a - \overline{g}g(a) = f(a') - \overline{g}gf(a') = f(a')$ (完全性より $gf = 0$ であるから) で, f は単射より $a'_0 = a'$ となる。よって $\overline{f}f(a') = \overline{f}(a) = a'_0 = a'$ なので $\overline{f}f = 1$ をみたす。また $f\overline{f}(a) = f(a') = a - \overline{g}g(a)$ より $f\overline{f} + \overline{g}g = 1$ が成立する。

(2) から (1)

任意の A'' の元 a'' に対し, g は全射なので, A の元 a が存在して $g(a) = a''$ である。このとき, (2) の仮定より $\overline{f}$ が存在するので, $a - f\overline{f}(a)$ は A の元となる。そこで $\overline{g} : A'' \to A$ を $\overline{g}(a'') = a - f\overline{f}(a)$ と定める。この $\overline{g}$ が a のとりかたに依らずに定まる (well-defined) ことを次に示そう。$a_1 \in A$ が $g(a_1) = a''$ をみたす元とすると, $g(a - a_1) = a'' - a'' = 0$ と $\ker g = \operatorname{im} f$ (完全性) より, $f(a') = a - a_1$ をみたす A' の元 a' が存在する。すると $a' = \overline{f}f(a') = \overline{f}(a - a_1) = \overline{f}(a) - \overline{f}(a_1)$ だから, $a' = \overline{f}(a) - \overline{f}(a_1)$ を f で移すと, $a - a_1 = f\overline{f}(a) - f\overline{f}(a_1)$, すなわち, $a - f\overline{f}(a) = a_1 - f\overline{f}(a_1)$ となるので, $a \in A$ のとりかたに依らずに $\overline{g}(a'')$ が定まる。これで $\overline{g}$ の well-defined が示され, $\overline{g}$ が定義される。そして, 完全性より

$gf=0$ であるから $g\overline{g}(a'')=g(a-f\overline{f}(a))=g(a)-gf\overline{f}(a)=g(a)=a''$ なので $g\overline{g}=1$ をみたす。さらに $\overline{g}g(a)=\overline{g}(a'')=a-f\overline{f}(a)$ より, $\overline{g}g+f\overline{f}=1$ が分かる。

<u>$A\cong A'\oplus A''$(直和) であること</u>　$f,\overline{g}$ は単射なので, つぎの 2 つを示せばよい。

(**1**) $f(A')+\overline{g}(A'')=A$

(**2**) $f(A')\cap\overline{g}(A'')=\{0\}$

(1) の証明 : 任意の A の元 a に対して, $f\overline{f}+\overline{g}g=1$ より, 任意の A の元 a は $a=f\overline{f}(a)+\overline{g}g(a)$ であり, $\overline{f}(a)\in A'$ かつ $g(a)\in A''$ なので $a\in f(A')+\overline{g}(A'')$ である。よって, $A\subset f(A')+\overline{g}(A'')$ が成り立つ。逆は $\overline{g}(A''),f(A')\subset A$ より明らかに成り立つ。

(2) の証明 : $a\in f(A')\cap\overline{g}(A'')$ をとる。$a\in f(A')$ より A' の元 a' が取れて $f(a')=a$ であり, また $a\in\overline{g}(A'')$ より A'' の元 a'' があって $\overline{g}(a'')=a$ である。このとき, $gf(a')=g(a)$ で, また $g\overline{g}=1$ より, $a''=g\overline{g}(a'')=g(a)=gf(a')$ で $gf=0$ だから, $a''=0$ である。よって $a=\overline{g}(a'')=0$ となる。□

補題 11.14

$$0\longrightarrow A'\xrightarrow{\ f\ }A\xrightarrow{\ g\ }A''\longrightarrow 0$$

を加群の短完全列とする。A'' が自由加群であれば, この短完全列は分解する。

<u>証明</u>　A'' が自由加群であるので, $\{a''_\lambda\}$ なる基底がある。g は全射なので, $a_\lambda\in A$ を $g(a_\lambda)=a''_\lambda$ なるものとして選び, $\overline{g}:A''\to A$ を $\overline{g}(a''_\lambda)=a_\lambda$ で定めると, $g\overline{g}=1$ なので, 補題 11.13 の (1) をみたす。よって分解することが分かる。□

12　相対ホモロジー群

L を単体的複体 K の部分複体とすると, L に含まれる単体は K に含まれるから, すべての q に対して

$$C_q(L)\subset C_q(K) \tag{12.1}$$

と思え, この包含関係はホモロジー群の間の準同型写像

$$i_*:H_q(L)\to H_q(K)$$

を導く。i_* は包含関係 (12.1) から導かれているが単射とは限らない。例えば $L=K(\partial s)$, $K=K(s)$ とすると, $\dim s=n\geq 2$ のとき, $H_{n-1}(K(\partial s))\cong\mathbb{Z}$ であるが $H_{n-1}(K(s))=0$ であるから, i_* は単射ではない。一般に, i_* の核, 像を求めることは易しくないが, その情報を得るための一般論をこの節で解説する。

i_* は包含関係 (12.1) から導かれた写像であるから, i_* に関する情報はすべて (12.1) に含まれているはずである。そこで, (12.1) から得られる量として, 剰余群

$$C_q(K,L)=C_q(K)/C_q(L)$$

を考える。$C_q(K,L)$ の元は K のチェインであって L に含まれる単体の部分は無視したものと思えばよい。バウンダリー作用素 $\partial:C_q(K)\to C_{q-1}(K)$ は準同型で, $C_q(K)$ の部分加群 $C_q(L)$ を $C_{q-1}(K)$ の部分加群 $C_{q-1}(L)$ に移すから, 準同型写像

$$\partial:C_q(K,L)\to C_{q-1}(K,L)$$

を導く。具体的には, $C_q(K)$ の元 c が定める $C_q(K)/C_q(L) = C_q(K,L)$ の元 $c + C_q(L)$ に対し

$$\partial(c + C_q(L)) = \partial(c) + C_{q-1}(L) \in C_{q-1}(K)/C_{q-1}(L) = C_{q-1}(K,L)$$

である。合成写像 $\partial^2 : C_{q+1}(K) \to C_{q-1}(K)$ は零写像であるから, $\partial^2 : C_{q+1}(K,L) \to C_{q-1}(K,L)$ も零写像である。これによって, $\{C_q(K,L), \partial_q\}$ はチェイン複体になる。したがって

$$\begin{aligned} Z_q(K,L) &= \ker\{\partial : C_q(K,L) \to C_{q-1}(K,L)\} \\ B_q(K,L) &= \mathrm{im}\{\partial : C_{q+1}(K,L) \to C_q(K,L)\} \end{aligned}$$

と定義すると, $B_q(K,L) \subset Z_q(K,L)$ となり, $H_q(K)$ のときと同様に,

$$H_q(K,L) = Z_q(K,L)/B_q(K,L)$$

と定義し, $Z_q(K,L)$ の元 $c + C_q(L)$ が定める $H_q(K,L)$ の元を $[c + C_q(L)]$ と表す。$H_q(K,L)$ を, 対 (K,L) の q 次 **相対ホモロジー群** (***relative homology group***) という。

約束　便宜上 L が空集合 $\emptyset$ であることも許し $C_q(\emptyset) = 0$ と思うと, $C_q(K,\emptyset) = C_q(K)$ であるから $H_q(K,\emptyset) = H_q(K)$ となる。

例 12.1
s を n 単体 $(n \geq 1)$ とし, $K = K(s)$, $L = K(\partial s)$ ととる。$K(s)$ の元で $K(\partial s)$ に含まれないのは s 自身だけであるから, $\langle s\rangle$ (向きつけられた単体) で生成される自由加群を $\mathbb{Z}(\langle s\rangle)$ と書くと

$$C_q(K(s), K(\partial s)) = \begin{cases} \mathbb{Z}(\langle s\rangle) & (q = n) \\ 0 & (q \neq n) \end{cases}$$

したがって, すべての q に対してバウンダリー作用素 ∂ は零写像となるから

$$H_q(K(s), K(\partial s)) = C_q(K(s), K(\partial s)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = n) \\ 0 & (q \neq n) \end{cases}$$

となる。$\langle s\rangle$ が定めるホモロジー類 $[\langle s\rangle]$ は $H_n(K(s), K(\partial s))$ の生成元を与えることに注意する。

$C_q(K,L)$ の元 $c + C_q(L)$ $(c \in C_q(K))$ が $Z_q(K,L)$ に属していれば

$$0 = \partial(c + C_q(L)) = \partial(c) + C_{q-1}(L) \in C_{q-1}(K,L) = C_{q-1}(K)/C_{q-1}(L)$$

より $\partial(c)$ は $C_{q-1}(L)$ の元であるが, $\partial^2(c) = 0$ であるから, 実は $Z_{q-1}(L)$ の元である。(c は $C_q(K)$ の元であって $C_q(L)$ の元とは限らないから, $\partial(c)$ が $B_{q-1}(L)$ の元とは限らないことに注意せよ)。

補題 12.1
$[c_1 + C_q(L)] = [c_2 + C_q(L)] \in H_q(K,L)$ ならば, $[\partial(c_1)] = [\partial(c_2)] \in H_{q-1}(L)$ である。

証明

$[c_1 + C_q(L)] = [c_2 + C_q(L)]$ より $c_1 - c_2 + C_q(L) \in B_q(K,L)$ であるから, $C_{q+1}(L)$ の元 d で

$$c_1 - c_2 + C_q(L) = \partial(d) + C_q(L) \in C_q(K,L) = C_q(K)/C_q(L)$$

つまり $c_1 - c_2 - \partial(d) \in C_q(L)$ をみたすものがある。したがって

$$\partial(c_1) - \partial(c_2) = \partial(c_1 - c_2 - \partial(d)) \in B_{q-1}(L)$$

であるから, $[\partial(c_1)] = [\partial(c_2)] \in H_{q-1}(L)$ を得る。□

上の補題より, $[c + C_q(L)] = [c_2 + C_q(L)] \in H_q(K, L)$ に $[\partial(c)] \in H_{q-1}(L)$ を対応させる写像

$$\partial_* : H_q(K, L) \to H_{q-1}(L)$$

が, 代表元のとり方によらずに矛盾なく定義できる。容易にわかるように ∂_* は準同型写像である。

また, $C_q(K)$ から $C_q(K, L) = C_q(K)/C_q(L)$ への自然な写像 $j : C_q(K) \to C_q(K, L)$ はバウンダリー作用素と可換であるから, 準同型写像

$$j_* : H_q(K) \to H_q(K, L)$$

を導く。

定理 12.2 列

$$\xrightarrow{j_*} H_{q+1}(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L) \xrightarrow{i_*}$$

は完全である。この列を対 (K, L) の **ホモロジー完全列** (homology exact sequence) という。

証明

地道に定義を追っていけば証明できる (が, 自分で図を書きながら証明を追うと理解が深まるであろう)。

(1) $H_q(L)$ における完全性。 $H_{q+1}(K, L)$ の元を代表する $Z_{q+1}(K, L)$ の元を $c + C_{q+1}(L)$ $(c \in C_{q+1}(K))$ とすると, ∂_* の定義より

$$\partial_*([c + C_{q+1}(L)]) = [\partial(c)] \in H_q(L)$$

であるが, $\partial(c)$ は K のチェインと思えば $B_q(K)$ の元であるから

$$i_*\partial_*([c + C_{q+1}(L)]) = i_*([\partial(c)]) = 0 \in H_q(K)$$

である。よって $i_*\partial_*$ は零写像, つまり $\operatorname{im}\partial_* \subset \ker i_*$ である。

逆に $\ker i_* \subset \operatorname{im}\partial_*$ を示す。$[b] \in H_q(L)$ $(b \in Z_q(L))$ を $\ker i_*$ の元とする。$i_*([b]) = 0 \in H_q(K)$ より, b を K のチェインと思うと $b = \partial(c)$ となる $c \in C_{q+1}(K)$ が存在する。$\partial(c) = b$ は $C_q(L)$ の元であるから, $c + C_{q+1}(L) \in C_{q+1}(K, L)$ は実は $Z_{q+1}(K, L)$ の元である。よってこの元はホモロジー類 $[c + C_{q+1}(L)] \in H_{q+1}(K, L)$ を定めるが, ∂_* の定義より

$$\partial_*([c + C_{q+1}(L)]) = [\partial(c)] = [b] \in H_q(L)$$

であるから, $\ker i_* \subset \operatorname{im}\partial_*$ である。つまり $H_q(L)$ において完全である。

(2) $H_q(K)$ における完全性。 $C_q(L)$ の元を $C_q(K)$ の元とみて, さらに $C_q(K)/C_q(L)$ の元とみると 0 であるから, j_*i_* は零写像, つまり $\operatorname{im} i_* \subset \ker j_*$ である。

逆に $\ker j_* \subset \operatorname{im} i_*$ を示す。$[c] \in H_q(K)$ $(c \in Z_q(K))$ を $\ker j_*$ の元とすると, $J_*([c]) = 0 \in H_q(K, L)$ より $c + C_q(L) \in B_q(K, L)$。したがって $c + C_q(L) = \partial(c') + C_q(L)$ となる元 $c' \in C_{q+1}(K)$ が存在する。

これは $c-\partial(c')$ が $C_q(L)$ に属することを意味している。ここで, c は $Z_q(K)$ の元で ∂^2 は零写像であるから, $c-\partial(c')$ は実は $Z_q(L)$ の元である。よってこの元はホモロジー類 $[c-\partial(c')]\in H_q(L)$ を定めるが, $\partial(c')$ は $B_q(K)$ の元であるから, $i_*([c-\partial(c')])=[c]\in H_q(K)$ となる。したがって $\ker j_*\subset \operatorname{im} i_*$ である。以上より $\operatorname{im} i_*=\ker j_*$, つまり $H_q(K)$ において完全である。

(3) $H_q(K,L)$ における完全性。 $H_q(K)$ の元を代表する $Z_q(K)$ の元を c とすると, ∂_* の定義より $\partial_* j_*([c])=[\partial(c)]\in H_{q-1}(L)$ であるが, c は $Z_q(K)$ の元だから $\partial(c)=0$。したがって $\partial_* j_*$ は零写像, つまり $\operatorname{im} j_*\subset \ker\partial_*$ である。

逆に $\ker\partial_*\subset \operatorname{im} j_*$ を示す。$[c+C_q(L)]\in H_q(K,L)$ $(c\in C_q(K))$ を $\ker\partial_*$ の元とする。∂_* の定義より $\partial_*([c+C_q(L)])=[\partial(c)]\in H_{q-1}(L)$ であるが, これが 0 より $\partial(c)\in B_{q-1}(L)$。したがって $\partial(c)=\partial(b)$ なる $C_q(L)$ の元 b が存在する (c は $C_q(K)$ の元であって $C_q(L)$ の元であるとは限らないことに注意)。b は L のチェインであるが, K のチェインとみると, 上の式より $c-b\in Z_q(K)$。したがってこの元はホモロジー類 $[c-b]\in H_q(K)$ を定めるが, $b\in C_q(L)$ より

$$c+C_q(L)=(c-b)+b+C_q(L)=(c-b)+C_q(L)$$

であるから $[c+C_q(L)]=j_*([c-b])\in H_q(K,L)$ である。したがって $\ker\partial_*\subset \operatorname{im} j_*$ である。以上より $\operatorname{im} j_*=\ker\partial_*$, つまり $H_q(K,L)$ で完全である。□

実は, 11 節の結果 (定理 11.11) を使えば, 次のように この定理 12.2 を示すことができる。それを解説しよう。

先ず, 包含写像 $i:C_q(L)\to C_q(K)$ と自然な写像 $j:C_q(K)\to C_q(K,L)$ によって

補題 12.3
次の列

$$0 \longrightarrow C_q(L) \xrightarrow{\ i\ } C_q(K) \xrightarrow{\ j\ } C_q(K,L) \longrightarrow 0$$

は完全列である。

問題 12.1
補題 12.3 を示せ。

このことにより, 定理 11.11 を使えば, 定理 12.2 を示すことができる。記号 ∂_* は定理 11.11 の意味で連結準同型写像であるので, 同じ記号 ∂_* を使う。

定理 12.2 の列は, $H_q(L)$, $H_q(K)$ を簡約ホモロジー群 $\widetilde{H}_q(L)$, $\widetilde{H}_q(K)$ で置き換えても完全である。つまり次が成立する。

定理 12.4 列

$$\xrightarrow{j_*} H_{q+1}(K,L) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_q(L) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K,L) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(L) \xrightarrow{i_*}$$

は完全である。この列を対 (K,L) の **簡約ホモロジー完全列** (reduced homology exact sequence) という。

$q \neq 0$ では $\widetilde{H}_q = H_q$ であるから, 上の定理は大部分定理 12.2 から成立する。チェックしなければならないのは, $\partial_* : H_1(K,L) \to H_0(L)$ の像が $\widetilde{H}_0(L)$ に入ること, $i_* : H_0(L) \to H_0(K)$ が $\widetilde{H}_0(L)$ を $\widetilde{H}_0(K)$ に移すこと, 列

$$H_1(K,L) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_0(L) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_0(K) \xrightarrow{j_*} H_0(K,L) \xrightarrow{\partial_*} 0$$

が完全であることであるが, これらを示すのは難しくないので, 読者にまかせる。

問題 12.2
定理 12.4 を示せ。

定理 12.2 の完全列より簡約ホモロジーの完全列の方が, 0 次のホモロジー群のところを詳しく議論しなくてすむため使いやすいことがしばしばある。例えば 非輪状な複体はそうである。

相対ホモロジー群 $H_q(K,L)$ は, K に含まれる単体のうち L に含まれるものは無視して作られるものである。言い換えれば, K の単体のうち L に含まれないもののみによっている。そう考えれば, 次の定理はもっともであろう。

定理 12.5 (切除定理)
2 つの単体的複体の対 (K,L), (K',L') が 2 条件

(**1**) K', L' はそれぞれ K, L の部分複体

(**2**) $|K'| - |L'| = |K| - |L|$

をみたしているならば, 包含写像から導かれる準同型写像 $H_q(K',L') \to H_q(K,L)$ は, すべての q に対して同型である。

証明

条件 (1) より, 包含写像 $C_q(K') \to C_q(K)$ があり $C_q(L')$ を $C_q(L)$ に移すから, 準同型写像

$$\varphi : C_q(K')/C_q(L') \to C_q(K)/C_q(L)$$

を得る。ここで, $C_q(K')/C_q(L')$, $C_q(K)/C_q(L)$ はそれぞれ L' に含まれない K' の q 単体, L に含まれない K の単体で生成される自由加群であるが, それら q 単体は条件 (2) より一致する。したがって上の写像 φ は同型である。さらに φ は明らかにバウンダリー作用素と可換であるから, ホモロジー群 $H_q(K',L')$ と $H_q(K,L)$ の間の同型を導く。□

13 マイヤー · ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列

複体 K を考え, その部分複体 K_1, K_2 が $K = K_1 \cup K_2$ をみたすとすると,
$K_0 = K_1 \cap K_2$ は K_1, K_2 の部分複体となるが, このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & K_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
K_0 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & K \\
 & K_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

が, 可換な図式となる包含写像 i_1, i_2, j_1, j_2 が存在し, これらは単体写像とできる。
そのとき

$$
\begin{array}{rcll}
\varphi_q & : & C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) \to C_q(K) & \text{を} \\
 & & \varphi_q((c_1, c_2)) = j_{1\#}(c_1) + j_{2\#}(c_2) & , \\
\psi_q & : & C_q(K_0) \to C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) & \text{を} \\
 & & \psi_q(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c)) &
\end{array}
$$

と定めると これらはチェイン準同型写像である。これらを使うと,

補題 13.1
列

$$
0 \longrightarrow C_q(K_0) \xrightarrow{\ \psi_q\ } C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) \xrightarrow{\ \varphi_q\ } C_q(K) \longrightarrow 0
$$

は完全列である。

問題 13.1
補題 13.1 を示せ。

K の境界作用素を ∂_q で表し, その部分複体である K_1, K_2, K_0 の境界作用素も, 同じ記号 ∂_q で表すことにする。すると, $\mathscr{C}' = \{C_q(K_0), \partial_q\}$, $\mathscr{C} = \{C_q(K_1) \oplus C_q(K_2), \partial_q \oplus \partial_q\}$, $\mathscr{C}'' = \{C_q(K), \partial_q\}$ とおくと, すべてチェイン複体となるので, 定理 11.11 を使えば

定理 13.2 列

$$
\cdots \to H_q(K_0) \xrightarrow{\psi_*} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\varphi_*} H_q(K) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(K_0) \to \cdots
$$

は, 完全列になっている。
これを, **マイヤー・ビートリス (*Mayer-Vietoris*) の完全列 (*exact sequence*)** という。

マイヤー・ビートリスの完全列はホモロジー群を実際に計算するのにきわめて有効である。
マイヤー・ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列の応用例を上げておこう。

例 13.1
r 個の m-単体 $\sigma_1^m, \sigma_2^m, \cdots, \sigma_r^m$ $(m \geq 2)$ が一つの頂点 a を共有していて, それ以外では共通点を持たない。すなわち $\sigma_i^m \cap \sigma_j^m = \{a\}$ $(i \neq j)$ であるとし (図 23 参照), $\sigma_1^m, \sigma_2^m, \cdots, \sigma_r^m$ の $m-1$ 次元以下の辺単体すべてからなる $m-1$ 次元複体を K_r とする。$r=1$ すなわち 1 個の場合は $K_1 = K(\partial\sigma_1^m)$ だから, 定理 9.10 によって,

$$H_q(K_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, m-1) \\ 0 & (q \neq 0, m-1) \end{cases}$$

である。

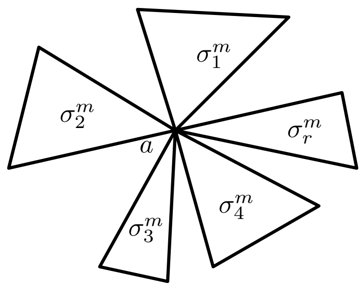


図 23: r-leafed rose

$$K_r = K_{r-1} \cup K(\partial\sigma_r^m), \qquad K_{r-1} \cap K(\partial\sigma_r^m) = \{a\}$$

であるから, $(K_r; K_{r-1}, K(\partial\sigma_r^m))$ に関するマイヤー・ビートリスの完全列

$$\cdots \to H_q(\{a\}) \xrightarrow{\psi_q} H_q(K_{r-1}) \oplus H_q(K(\partial\sigma_r^m)) \xrightarrow{\varphi_q} H_q(K_r) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(\{a\}) \to \cdots$$

を使えば, r に関する数学的帰納法によって,

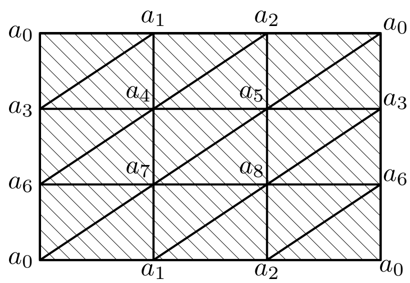
$$H_q(K_r) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \ (\mathbb{Z} \text{ の } r \text{ 個の直和}) & (q = m-1) \\ 0 & (q \neq 0, m-1) \end{cases}$$

を得る。

問題 13.2 次の複体 (図参照) のホモロジー群を求めよ。

(**1**) トーラス $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (図 24)

K

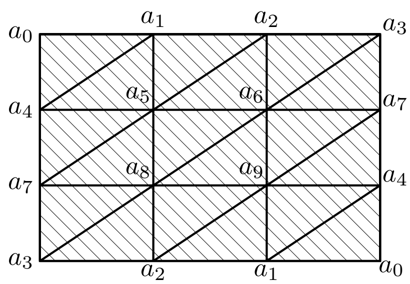


四角形の上辺と下辺 (同じ向きで)
左辺と右辺 (同じ向きで) は同じものである。
したがって 上と下の辺 a_0a_1, 辺 a_1a_2,
辺 a_2a_0 は同じ
左と右の辺 a_0a_3, 辺 a_3a_6, 辺 a_6a_0
は同じ

図 24: トーラスの三角形分割

(**2**) 射影平面 $\mathbb{P}^2$ (図 25)

K

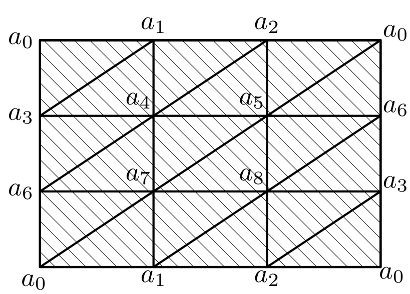


四角形の上辺と下辺 (反対向きで)
左辺と右辺 (反対向きで) は同じものである。
したがって 上と下の辺 a_0a_1, 辺 a_1a_2,
辺 a_2a_3 は同じ
左と右の辺 a_0a_4, 辺 a_4a_7, 辺 a_7a_3
は同じ

図 25: (実) 射影平面の三角形分割

(**3**) クラインの壷 K (図 26)

K



四角形の上辺と下辺 (同じ向きで)
左辺と右辺 (反対向きで) は同じものである。
したがって 上と下の辺 a_0a_1, 辺 a_1a_2,
辺 a_2a_0 は同じ
左と右の辺 a_0a_3, 辺 a_3a_6, 辺 a_6a_0
は同じ

図 26: クラインの壷の三角形分割