第1章　ホモトピーと基本群

1　ホモトピー

定義 1.1　連続写像 $f : X \to Y$ と $g : X \to Y$ が **ホモトピック** (***homotopic***) とは, 次の条件をみたす連続写像

$$F : X \times I \to Y$$

が存在するときを言う。ここに I は 閉区間 $[0, 1]$ を表す。

$$F(x, 0) = f(x) \qquad x \in X$$
$$F(x, 1) = g(x) \qquad x \in X$$

このとき, $f_t(x) = F(x, t)$ とおくと, 連続写像

$$f_t : X \to Y$$

が定まるが, $\{f_t\}_{t \in I}$ または F を **f と g のホモトピー** (***homotopy***) といい,

$$f \simeq g \quad \text{あるいは} \quad f \overset{F}{\simeq} g \text{ あるいは} \quad f \overset{\{f_t\}}{\simeq} g$$

と表す。

注意 1　$(x, t) \in X \times I$ の t は, 時刻を示しているとみなせる。このとき, $f_t(x) = F(x, t)$ は $X \to Y$ の写像の I-パラメーター族である。時刻 0 においては f_0 であり, 時刻 1 においては f_1 である。時刻が 0 から 1 へ増加するに従って, 写像 f_0 は写像 f_1 に連続的に変形される。

命題 1.2　X, Y, Z を位相空間
f, g, $h : X \to Y$; 連続写像 とすると, 次が成り立つ。
(1) $f \simeq f$
(2) $f \simeq g \Longrightarrow g \simeq f$
(3) $f \simeq g$, $g \simeq h \Longrightarrow f \simeq h$

証明　(1) $F : X \times I \to Y$ を $F(x, t) = f(x)$ とすればよい。
(2) f と g のホモトピーを $F : X \times I \to Y$ とすると, $F(x, 0) = f(x)$ かつ $F(x, 1) = g(x)$ だから,
$G : X \times I \to Y$ を $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ とおけば, G は連続で
$G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$ かつ $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ となる。
(3) f と g のホモトピーを $F : X \times I \to Y$ とし, g と h のホモトピーを $G : X \times I \to Y$ とすると,
$H : X \times I \to Y$ を

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

とおけば, H は連続で $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ かつ $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ だから,
H は f と h のホモトピーとなる。□

命題 1.3　$f, g : X \to Y$ がホモトピック (すなわち $f \simeq g$) であり,
$f', g' : Y \to Z$ もホモトピック (すなわち $f' \simeq g'$) とすると,
合成写像 $f' \cdot f,\ g' \cdot g : X \to Z$ もホモトピック (すなわち $f' \cdot f \simeq g' \cdot g$) である。

<u>証明</u>　$F : X \times I \to Y$ を f と g のホモトピーとし, $G : Y \times I \to Z$ を f' と g' のホモトピー とすると $H : X \times I \to Z$ を $H(x,t) = G(F(x,t),t)$ とおけば, H は 連続写像で
$H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f(x),0) = (f' \cdot f)(x)$ で, $H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(g(x),1) = (g' \cdot g)(x)$
だから H は $f' \cdot f$ と $g' \cdot g$ のホモトピーである。□
普通, 写像の合成は $\circ$ を使うがここでは $\cdot$ を使う。

定義 1.4　位相空間 X と Y が **<u>ホモトピック (*homotopic*)</u>** である, または, **<u>同じホモトピー型 (*same homotopy type*)</u>** をもつ とは,

$$\exists f \ : \ X \to Y\ ;\ \text{連続写像}$$
$$\exists g \ : \ Y \to X\ ;\ \text{連続写像}$$
$$f \cdot g \simeq 1_Y \ \text{かつ}\ g \cdot f \simeq 1_X$$

(ただし 1_Xは X 上の恒等写像, 1_Yは Y 上の恒等写像である。)

のときをいい, $X \simeq Y$ と表す。f あるいは g のことを X と Y の **<u>ホモトピー (*homotopy*)</u>** という。

注意 2　「同じホモトピー型」が同値関係であることは容易に確かめられる。したがって, 位相空間全体の集まりは同値類に分類される。２つの空間が同じ類に入るのは, それらが同じホモトピー型をもつときである。明らかに, 同相な空間は同じホモトピー型をもつ。代数的トポロジーでは多くのことが, ホモトピー型で不変な位相空間の性質を調べることにかかわっている。ホモトピー型で不変な性質とは, 空間 X の性質であって, X と同じホモトピー型をもつ “すべての” 位相空間について成り立つものをいう。

定義 1.5
(1)　位相空間 X を Y の一点 y に対応させる写像は 連続写像であるが, これを **<u>定値写像 (*constant map*)</u>** といい, c で表す。
(2)　恒等写像 $1_X : X \to X$ が $c(x) = x_0$ で定義される定値写像 $c : X \to X$ とホモトピックであるとき, すなわち

$$1_X \simeq c$$

のとき 位相空間 X を **<u>可縮 (*contractible*)</u>** という。

命題 1.6
(1)　X が可縮ならば, X からの任意の連続写像 $f : X \to Y$ は定値写像に ホモトピックである。
(2) Y の中で 二つの点 y_0 と y_1 が弧で結ばれる (すなわち $\exists \alpha : I \to Y$; 連続写像で $\alpha(0) = y_0, \alpha(1) = y_1$) ならば, $c_0(x) = y_0\ (\forall x \in X)$, $c_1(x) = y_1\ (\forall x \in X)$　で定義される二つの 定値写像 $c_0, c_1 : X \to Y$ は ホモトピックである。

問題 1.1　上の命題 1.6 を示せ。

記号 1
n 次元ユークリッド空間 を $\mathbb{R}^n$ で表す。

$\mathbb{D}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ と表し, n **次元球** (***ball***) という。
$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ と表し, n **次元球面** (***sphere***) という。

命題 1.7
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{D}^n$ は 可縮である。

証明　$\mathbb{D}^n$ の元 x に対して, $F : \mathbb{D}^n \times I \to \mathbb{D}^n$ を $F(x,t) = tx$ $(0 \leq t \leq 1)$ とおけば, $F(x,1) = x$ かつ, $F(x,0) = 0$ となる。□

定理 1.8　位相空間 X が可縮である必要十分条件は, X が 1点と同じホモトピー型をもつときである。

証明　X を可縮とすると, $c(x) = x_0$ $(x_0 \in X)$ で定義されるある定値写像 $c : X \to X$ に対して $1_X \simeq c$ である。$f = c : X \to \{x_0\}$ とし, $g : \{x_0\} \to X$ を $g(x_0) = x_0$ で定義する。明らかに $g \cdot f = c \simeq 1_X$ かつ $f \cdot g = 1_{\{x_0\}}$ であるから, X と $\{x_0\}$ は同じホモトピー型をもつ。
逆に, X が1点からなる空間 $Y = \{y_0\}$ と同じホモトピー型をもつとすると, 連続写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ が存在して, $g \cdot f \simeq 1_X$ かつ $f \cdot g \simeq 1_Y$ である。$x_0 = g(y_0)$, $c : X \to X$ を $c(x) = x_0$ とすれば, $c = g \cdot f \simeq 1_X$ であるから, X は可縮である。□

2　基本群 (fundamental group)

定義 2.1
$I = [0;1]$ から 位相空間 X への連続写像

$$\alpha : I \to X$$

のことを (X の) **道** (***path***) という。$\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ をそれぞれ道 α の **始点** (***initial point***) **終点** (***terminal point***) という。α を x_0 と x_1 を結ぶ道, あるいは x_0 から x_1 への道 などという。

注意 3
分かっているとは思うが, 一応 次の注意をしておく。
2つの道 $\alpha, \beta : I \to X$ に対して, 集合として $\alpha(I) = \alpha(I)$ (像として等しい) であっても, 道として必ずしも等しくない。写像として $\alpha = \alpha$ でなくてはならない。

定義 2.2
2つの道 α, β において, α の終点と β の始点とが 一致 $(\alpha(1) = \beta(0))$ するとき, $\gamma :\ I \to X$ を

$$\gamma(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

と定めると, 道 γ が得られる。これを α と β の **積** (***product***) といい

$$\gamma = \alpha * \beta$$

と表す。α が x_0 から x_1 への道, β が x_1 から x_2 への道であれば, $\alpha * \beta$ は x_0 から x_2 への道である。
また 道 α が x_0 から x_1 への道であれば, これに対して,

$$\gamma(s) = \alpha(1-s) \quad 0 \leq s \leq 1$$

で定められた 道 γ を 道 α の **逆** (***inverse***) あるいは **逆** (***inverse***) **道** といい α^{-1} で表す。α^{-1} は x_1 から x_0 への道である。また明らかに, $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ である。

定義 2.3 x_0 と x_1 を 結ぶ二つの道 α と β が **(道) ホモトピック** (***homotopic***) **である** とは, 連続写像

$$F : I \times I \to X$$

が存在して ,

$$\begin{cases} F(s,0) &=& \alpha(s) & 0 \le s \le 1 \\ F(s,1) &=& \beta(s) & 0 \le s \le 1 \\ F(0,t) &=& x_0 & 0 \le t \le 1 \\ F(1,t) &=& x_1 & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

をみたすときをいい, 記号 $\alpha \doteqdot \beta$ で表す。また F のことを, (道) ホモトピーという。

注意 4 普通のホモトピックとは, $F(0,t) = x_0$, $F(1,t) = x_1$ という条件が付加されているところ (だけ) が違う。記号もここでは $\doteqdot$ という記号を使っているが, 参考書によっては, ホモトピック $\simeq$ と同じ記号を使うものもある。

前の命題 1.2 (1)(2)(3) と同じ公式が成り立つ。したがって, $\doteqdot$ も同値関係である。

補題 2.4
α_0, α_1 : x_0 と x_1 を結ぶ道
β_0, β_1 : x_1 と x_2 を結ぶ道 とするとき
(1) $\alpha_0 \doteqdot \alpha_1$, $\beta_0 \doteqdot \beta_1$ ならば $\alpha_0 * \beta_0 \doteqdot \alpha_1 * \beta_1$ である。
(2) $\alpha_0 \doteqdot \alpha_1$ ならば $(\alpha_0)^{-1} \doteqdot (\alpha_1)^{-1}$ である。

証明
(1) $F : I \times I \to X$ を $\alpha_0 \doteqdot \alpha_1$ の (道) ホモトピー, $G : I \times I \to X$ を $\beta_0 \doteqdot \beta_1$ の (道) ホモトピーとする。このとき $H : I \times I \to X$ を

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

と定めれば,

$$\begin{array}{lcl} H(s,0) &=& \begin{cases} F(2s,0) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(2s-1,0) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \qquad (\alpha_0 * \beta_0)(s) = \begin{cases} \alpha_0(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \beta_0(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \\ H(s,1) &=& \begin{cases} F(2s,1) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(2s-1,1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \qquad (\alpha_1 * \beta_1)(s) = \begin{cases} \alpha_1(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \beta_1(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \end{array}$$

となり 証明終了
(2) も同様 (各自確かめよ)。□

問題 2.1 補題 2.4 を示せ。

定義 2.5 α とホモトピックな道全体を (α の定める) 道の **ホモトピー類** (***homotopy class***) といい, $[\alpha]$ で表す。

特に, $x \in X$ に対して, $e_x(s) = x$ である道 $e_x : I \to X$ を e_x と表す。これは 道といっても s が 0 から 1 まで変わるとき, その像 $e_x(s)$ は つねに x に止まっている定値写像である。

定義 2.6 $\simeq$ による同値類の **積** と **逆** が

$$
\begin{aligned}
&[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta] \quad (\text{ただし}\,\alpha * \beta\,\text{が定義できるとき}) \\
&[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]
\end{aligned}
$$

によって定義される。この積と逆は補題 2.4 によって代表元の取り方に依らずに定まる。

このとき,

補題 2.7

(1) $(\alpha * \beta) * \gamma$ が定義されるとき, $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$

(2) α の始点が x_0 のとき $[e_{x_0}][\alpha] = [\alpha]$

(3) α の終点が x_1 のとき $[\alpha][e_{x_1}] = [\alpha]$

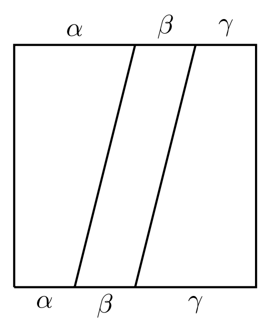
(4) α の始点が x_0, 終点が x_1 のとき

$$[\alpha][\alpha^{-1}] = [e_{x_0}], \quad [\alpha^{-1}][\alpha] = [e_{x_1}]$$

証明

(1) $(\alpha * \beta) * \gamma \doteq \alpha * (\beta * \gamma)$ を示す。さて

$$
\begin{aligned}
((\alpha * \beta) * \gamma)(s) &= \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ \gamma(2s-1) & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases} &= \begin{cases} \alpha(4s) & (0 \le s \le \frac{1}{4}) \\ \beta(4s-1) & (\frac{1}{4} \le s\frac{1}{2}) \\ \gamma(2s-1) & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases} \\
(\alpha * (\beta * \gamma))(s) &= \begin{cases} \alpha(2s) & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ (\beta * \gamma)(2s-1) & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases} &= \begin{cases} \alpha(2s) & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ \beta(4s-2) & (\frac{1}{2} \le s\frac{3}{4}) \\ \gamma(4s-3) & (\frac{3}{4} \le s \le 1) \end{cases}
\end{aligned}
$$



である。よって, 求めるホモトピーは, 右の図を参考にして求めると,

$$
F(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4s}{t+1}) & (0 \le s \le \frac{t+1}{4}) \\ \beta(4s-t-1) & (\frac{t+1}{4} \le s \le \frac{t+2}{4}) \\ \gamma(\frac{4s-t-2}{2-t} & (\frac{t+2}{4} \le s \le 1) \end{cases}
$$

となる。

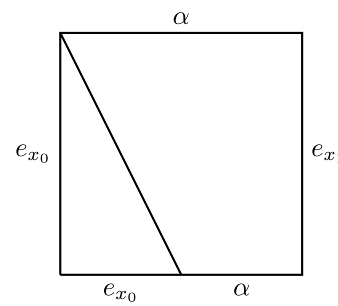
(2) $e_{x_0} * \alpha \doteq \alpha$ を示す。それには次の条件をみたす連続関数 $F : I \times I \to X$ を構成すればよい。

$$
\begin{aligned}
&F(s,0) = (e_{x_0} * \alpha)(s), \quad F(s,1) = \alpha(s) \qquad && (\forall s \in I) \\
&F(0,t) = x_0, \qquad\qquad\quad\;\; F(1,t) = \alpha(1) = x_1 && (\forall t \in I)
\end{aligned}
$$

そのために, F を右図の三角形上では x_0 への定値写像と定義する。台形上では水平な各線分上では (適当にパラメーターを入れて) α に等しくなるようにする。式で書くと,

$$F(s,t) = \begin{cases} x_0 & (0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}) \\ \alpha(\frac{2s-1+t}{1+t}) & (\frac{1-t}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

となる。

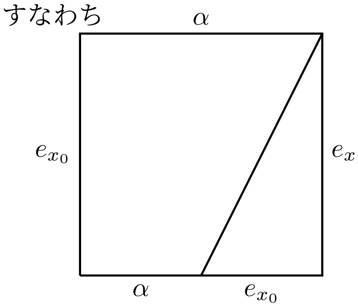


(3)　また, $\alpha * e_{x_1} \dot{\simeq} \alpha$ は右図を参考にすれば同様に示される。すなわち

ホモトピー $F : I \times I \to X$ を

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{2s}{1+t}) & (0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}) \\ x_1 & (\frac{t+1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とすればよい。

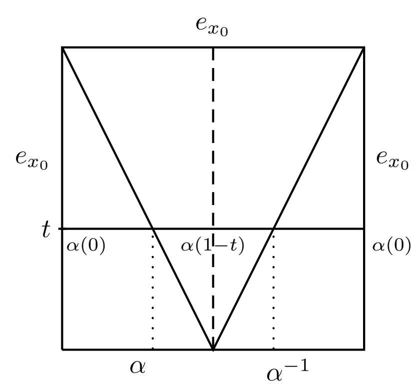


(4)　$[\alpha][\alpha^{-1}] = [e_{x_0}]$ を示す。これが示されれば, 後半は α と α^{-1} の役割を入れ換えればよい。そこで $\alpha * \alpha^{-1} \dot{\simeq} e_{x_0}$ を示そう。そのためには, 「終点 x_1 を道 α に沿って x_0 に引き戻す」ことをおこなえばよい。

右図を参考にホモトピー $F : I \times I \to X$ を求めれば,

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s) & (0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}) \\ \alpha(1-t) & (\frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2}) \\ \alpha^{-1}(2s-1) & (\frac{1+t}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

となる。□



系 2.8 X を位相空間とし $x_0 \in X$ とする。始点と終点を x_0 とする道の $\dot{\simeq}$ に関する同値類の集合は, 上で定義した積と逆の演算によって群になる。この群を $\pi_1(X, x_0)$ と表し, 組 (X, x_0) の **基本群** (***fundamental group***) または **１次のホモトピー群** (***1-st homotopy group***) という。

後程述べるが, 実は n 次のホモトピー群 $\pi_n(X, x_0)$ というものが定義されるので 1 次のホモトピー群というのである。

定義 2.9
X における道 (path) が **閉じた道** (***closed path, loop***) とは, その始点と終点が一致するときをいう。こ

のとき

$$\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$$

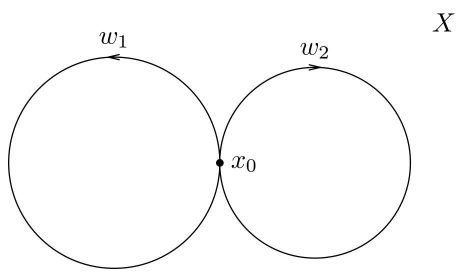
を, 閉じた道 w の **基点** (***base point***) という。

この言葉を使えば, 基本群の定義は次のようにいえる。

定義 2.10
X を位相空間とし $x_0 \in X$ とする。x_0 を基点とする閉じた道の $\simeq$ に関する同値類の集合は, 上で定義した積と逆の演算によって群になる。この群を $\pi_1(X, x_0)$ と表し, 組 (X, x_0) の **基本群** (***fundamental group***) または **１次のホモトピー群** (***1-st homotopy group***) という。

定義 2.11
位相空間 X において, X の 任意の二点 P, Q が X 上の弧で結ばれるとき, すなわち, 連続写像 $f : I \to X$ $(I = [0; 1])$ が存在して, $f(0) = P$, $f(1) = Q$ になるとき, X を **弧上連結** (***pathwise connected***) という。

注意 5
$\pi_1(X, x_0)$ においては, 一般に交換律は成り立たない。例えば

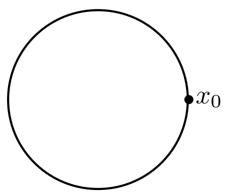


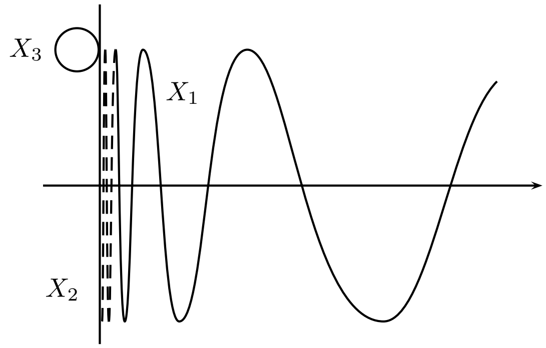
とすると,

$$[w_1] * [w_2] \neq [w_2] * [w_1]$$

である。(厳密な証明を, まだここでは与える事はできない)

注意 6 X の中の２つの基点 x_0, x_1 が与えられたとき, 一般には $\pi_1(X, x_0)$ と $\pi_1(X, x_1)$ の間になんらかの関係を期待することはできない。たとえば, x_0 と x_1 が X の同じ連結成分に属していなければ, まったく関係がない。円周と１点の和集合 (x_1 は円周に含まれていない) X を考える (左図)。円周上の点 x_0 に対しては, $\pi_1(X, x_0)$ は単位元でない元をもつが, $\pi_1(X, x_1)$ は明らかに単位元だけの群である。





同様に, X が弧状連結でなければ, 上の群の間に何の関係も期待できない。空間 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \subset \mathbb{R}^2$ を考える。ここで X_1 は $\sin(\frac{1}{x})$ $(0 < x < 1)$ のグラフであり, X_2 は $\{0\} \times I$, X_3 は中心を y 軸より左側にもち, 点 $(0,1)$ で y 軸に接する円である (右図)。$x_0 \in X_1$ に関しては, $\pi_1(X, x_0)$ は単位元だけの群である。しかし $x_1 = (0,1)$ に対しては, $\pi_1(X, x_1)$ は単位元でない元をもつ。

弧状連結な空間では, 次の様に事態はよくなる。

定理 2.12
X を弧上連結な位相空間 とし, x_0, x_1 を X の任意の 2 点とする。このとき, $\pi_1(X, x_0)$ から $\pi_1(X, x_1)$ の上への (群としての) 同型写像が存在する。

<u>証明</u>　x_0 から x_1 への道 γ を一つとる。このとき, $\gamma_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ を $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して

$$\gamma_\#([\alpha]) = [\gamma]^{-1}[\alpha][\gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$$

と定義する。$\gamma_\#$ は準同型写像である。なぜなら, $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して,

$$\gamma_\#([\alpha])\gamma_\#([\beta]) = [\gamma^{-1}][\alpha][\gamma][\gamma^{-1}][\beta][\gamma] = [\gamma^{-1}][\alpha][e_{x_0}][\beta][\gamma] = [\gamma^{-1}][\alpha][\beta][\gamma] = \gamma_\#([\alpha][\beta]).$$

$\gamma_\#$ は逆写像 $\gamma_\#^{-1} = (\gamma^{-1})_\#$ をもつから, $\gamma_\#$ は同型写像である。□

注意 7 群 G の元 a に対して, a による G の **内部自己同型写像**とは, $b \in G$ に対して $i_a(b) = aba^{-1}$ で与えられる G からそれ自身への同型写像 $i_a : G \to G$ のことをいう。いま, x_0 から x_1 への X の 2 つの道が与えられたとしよう。このとき, 2 つの同型写像 $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ が得られる。上の証明は, 実はこの 2 つの同型写像の差が $\pi_1(X, x_0)$ の内部自己同型写像であることをも示している。

系 2.13 γ_1, γ_2 を X の中の x_0 から x_1 への道とする。このとき

$$(\gamma_2)_\# = (\gamma_1)_\# i_a$$

が成り立つ。ここで, i_a は $a = [\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ による $\pi_1(X, x_0)$ の内部自己同型写像である。

<u>証明</u>　$[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ とすると

$$(\gamma_1)_\#^{-1}(\gamma_2)_\#([\alpha]) = [\gamma_1][\gamma_2]^{-1}[\alpha][\gamma_2][\gamma_1]^{-1} = [\gamma_1 * \gamma_2^{-1}][\alpha][\gamma_1 * \gamma_2^{-1}]^{-1} = i_a[\alpha]$$

すなわち $(\gamma_1)_\#^{-1}(\gamma_2)_\# = i_a$. したがって $(\gamma_2)_\# = (\gamma_1)_\# i_a$ である。□

注意 8 定理 2.12 は, 弧上連結な位相空間は, 基点がちがっていても, 基本群はすべて同型であることを示している。すなわち 抽象的な群としては同型である。そこでこのとき, x_0 を略して $\pi_1(X,x_0)$ を $\pi_1(X)$ とかくこともある。しかし, 上の系はこの群が可換でない限り, 異なる基点に対する群を同一視する自然な方法がないことを示している (同型写像は 2 つの基点を結ぶ道のホモトピー類に依存している)。したがって基本群は与えられた基点に関して計算された具体的な群として扱う。基点の重要性は, 連続写像に関する基本群の行動を調べるときに明らかになる。

注意 9 2 つの道 α と β の積 (積が可能なとき) を $\alpha * \beta$ と書いてきたが, 今後は $\alpha\beta$ と略記することが多い。

3 種々の写像と基本群

ここでは, 主として, 弧上連結な位相空間を扱う。

定義 3.1
X と Y を弧状連結な位相空間とする。$f : X \to Y$ を連続写像とする。$x_0 \in X$ に対して $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ を

$$f_*([\alpha]) = [f \cdot \alpha] \qquad (\text{ただし } [\alpha] \in \pi_1(X,x_0))$$

によって定義する (ここに $\cdot$ は写像の合成を表す)。この定義は well-defined である。なぜなら, α と β を x_0 から x_0 への道とし $\alpha \doteq \beta$ とすれば, $f \cdot \alpha \doteq f \cdot \beta$ だからである ($f \cdot \alpha$ から $f \cdot \beta$ へのホモトピーは, α から β へのホモトピーを F とすれば, $f \cdot F$ で与えられる)。この f_* のことを f によって **誘導された** あるいは **導かれた (*induced*)** (基本群の間の) 準同型写像という。

$f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ は準同型写像である。なぜなら, $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,x_0)$ に対して

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha\beta]) = [f \cdot (\alpha\beta)] = [(f \cdot \alpha)(f \cdot \beta)] = [f \cdot \alpha][f \cdot \beta] = f_*([\alpha])f_*([\beta])$$

が成り立つ。

ここで, 位相空間対 (X, A) のホモトピーについて少し言及しておこう。

定義 3.2 **位相空間対** とは, 位相空間 X とその部分集合 A のことで, A にはふつう部分空間としての位相がはいっていると考える。位相空間対を略して空間対ともいう。

位相空間対 (X, A) から位相空間対 (Y, B) への写像 f とは, 写像 $f : X \to Y$ で, $f(A) \subset B$ をみたすものをいい,

$$f : (X, A) \to (Y, B)$$

とかく。

位相空間対 (X, A) から位相空間対 (Y, B) への二つの写像 $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ が **(対の) ホモトピック** とは, 次の条件をみたす連続写像

$$F : X \times I \to Y$$

が存在するときをいう。

(**1**) $F(x, 0) = f(x) \qquad (\forall x \in X)$

(**2**) $F(x,1) = g(x) \qquad (\forall x \in X)$
(**3**) $F(a,t) \in B \quad (\forall a \in A)$
あるいは, F を対の写像でかくと,
次の条件をみたす連続写像

$$F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$$

が存在するときをいう。
(**1**) $F(x,0) = f(x) \qquad (\forall x \in X)$
(**2**) $F(x,1) = g(x) \qquad (\forall x \in X)$
また 位相空間対 (X,A) と (Y,B) が, **ホモトピック** (***homptopic***) あるいは,
同じホモトピー型 (***same homotopy type***) **をもつ** あるいは, **ホモトピー型** (***homotopy type***) **が同じ** とは,

$$\exists f \;:\; (X,A) \to (Y,B)) \;;\; \text{連続写像}$$
$$\exists g \;:\; (Y,B) \to (X,A) \;;\; \text{連続写像}$$
$$f \cdot g \simeq 1_Y,\; g \cdot f \simeq 1_X \;(\text{対としてホモトピック})$$
$$1_X \text{は } X \text{ 上の恒等写像},\; 1_Y \text{は } Y \text{ 上の恒等写像}$$

のときをいい, $(X,A) \simeq (Y,B)$ と表す。
もう少し強いものとして上の性質 (3) を
$(3')$ $F(a,t) = f(a) = g(a)$ $(\forall a \in A)$
に変えたものを, (A **を止めて**) **ホモトピック** (***homotopic relative*** A) といい,

$$f \simeq g \quad rel\ A$$

と表す。
もちろん, これは $f(a) = g(a)$ $(\forall a \in A)$ である 2 つの写像についてのみ考えられる。
3 つ以上の組に付いても, 同様に定義される (読者にゆだねる)。

この様に定義すれば, x_0 を基点とする閉じた道の $\doteqdot$ によるホモトピー類は, 位相空間対 $(I, \{0,1\})$ から 位相空間対 $(X, x_0)^*$へのホモトピー類とみなせる。

例 3.1 n 次元球 $\mathbb{D}^n$ は可縮 (命題 1.7 参照) であるが, 実はもっと強く, $\mathbb{D}^n$ の任意の点 x_0 をとり, $c(x) = x_0$ で定義される 定値写像を $c : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ とすると, $1_X \simeq c \quad \mathrm{rel}\ \{x_0\}$ が示される (各自ホモトピーを作ってみよ)。 したがって, $\pi_1(\mathbb{D}^n, x_0) = \{e\}$ であることが示される (命題 3.11 参照)。

連続写像が導く準同型写像に対して, 次のことが成り立つ。

命題 3.3
(1) 定義 3.1 の f_* は, $f(x_0) = y_0$ とすれば, 空間対の写像 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ のホモトピー類にのみ依存する。
(2) $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ とすれば, $(gf)_* = g_* f_*$ が成り立つ。
(3) $id_* = id$ である。ここに id は 恒等写像である。

*正確には $(X, \{x_0\})$ である。このような時は, 今後もこの { と } は省略されることが多い。

<u>証明</u>　(1) $g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ で, $f\simeq g$ ならば, $f_*=g_*$ を示せばよい。
$\forall[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$ をとると, $f\simeq g$ rel $\{x_0\}$ より $f\cdot\alpha\doteq g\cdot\alpha$ だから,

$$f_*([\alpha])=[f\cdot\alpha]=[g\cdot\alpha]=g_*([\alpha])$$

となるので, $f_*=g_*$ である。(2), (3) は明らか。

系 3.4
写像 $f:X\to Y$ が同相写像ならば,

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$$

は, 同型写像である。

<u>証明</u>　前の命題によって,

$$f_*:\pi_1(X)\to\pi_1(Y)\ ,\ g_*:\pi_1(Y)\to\pi_1(X)$$

がひき起こされ, $f_*\cdot g_*=1_*$, $g_*\cdot f_*=1_*$ だから, f_* は同型である。

さらに, 連続写像が色々な性質をもつとき, f_* も色々な性質もつことが得られる。これについて説明しよう。

定義 3.5　X を位相空間とし, A を X の部分空間とする。X から A への連続写像 $r:X\to A$ が $r|_A=id$ という条件をみたすとき, r を X から A への <u>**レトラクション** (***retraction***)</u> といい, このようなレトラクションがあるとき, A を X の <u>**レトラクト** (***retract***)</u> という。これは次のようにも言える。写像 $i:A\to X$ を包含写像とする。このとき連続写像 $r:X\to A$ が $r\cdot i=id_A$ をみたすとき, レトラクションという。

命題 3.6　X を位相空間とし, A を X の部分空間とする。$x_0\in A$を基点とし, 連続写像 $r:(X,x_0)\to(A,x_0)$ をレトラクションとすると, r から導かれた準同型写像 $r_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(A,x_0)$ は全射である。

問題 3.1　命題 3.6 を示せ。

例 3.2　$\mathbb{D}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2\leq 1\}$ を円板とし, $\partial\mathbb{D}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2=1\}$ をその境界すなわち円周とする。$\pi_1(\partial\mathbb{D}^2,x_0)$ ($x_0=(1,0)\in\mathbb{R}^2$) は $\mathbb{Z}$ (この結果は 27 ページの 例 7.2 で示される) であり, 例 3.1 より, $\pi_1(\mathbb{D}^2,x_0)=\{e\}$ である。したがって命題 3.6 より, レトラクション $r:(\mathbb{D}^2,x_0)\to(\partial\mathbb{D}^2,x_0)$ は存在しないことが分かる。

例 3.3　X, Y を位相空間とし, $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ を単射な連続写像とする。このとき定義 3.1 によって写像 $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ は準同型写像だが, 必ずしも単射にはならない。例として X を円周, $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2=1\}$, Y を円板, $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 1\}$ とし, 写像 $f:X\to Y$ を包含写像とする。f は単射な連続写像であるが, X は円周なので, $\pi_1(X,x_0)\cong\mathbb{Z}$ であり, Y は円板なので, 可縮となり, $\pi_1(\mathbb{D}^2,x_0)=\{e\}$ である。したがって f_* は全射準同型写像であるが単射ではない。ただし f が包含写像で, さらに X が Y のレトラクトであるときは, f_* は単射準同型写像である。

命題 3.7　X を位相空間とし, A を X の部分空間とし, 写像 $i:A\to X$ を包含写像とする。A が X のレトラクトであれば i から導かれる準同型写像 $i_*:\pi_1(A,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ ($x_0\in A$) は単射である。

問題 3.2 命題 3.7 を示せ。

定義 3.8 X を位相空間とし, A を X の部分空間とする。X から A への連続写像 $f : X \to A$ が X の恒等写像 id_X とホモトピック, 正確には $i : A \to X$ を包含写像とすると, $i \cdot f$ と id_X がホモトピック $i \cdot f \simeq id_X$ のとき, f を X から A への **変形** (***deformation***) という。特に $A = X$ のとき f を単に X の変形という。また X から A への変形 f がレトラクション ($f = r$) のとき, f を **変形レトラクション** (***deformation retraction***) といい, このような f があるとき A を X の **変形レトラクト** (***deformation retract***) という。これは $f = r$ をレトラクションとしたとき $i\,r \simeq id_X$ である事と同じである。

命題 3.9 連続写像 $f : (X, x_0) \to (X, f(x_0))$ が X の変形ならば, 準同型写像 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, f(x_0))$ は同型写像である。

問題 3.3 命題 3.9 を示せ。

定義 3.10 X を位相空間とし, A を X の部分空間とする。レトラクション $r : X \to A$ が存在して, $i \cdot r \simeq id_X \text{ rel } A$ のとき, すなわち写像 $i \cdot r$ が X の恒等写像 1_X と A を止めてホモトピックのとき r を **強変形レトラクション** (***strong deformation retraction***) といい, このような r があるとき A を X の **強変形レトラクト** (***strong deformation retract***) という。

命題 3.11 連続写像 $r : X \to A$ を X の強変形レトラクションとすると, 準同型写像 $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ は同型写像である ($x_0 \in A$)。

問題 3.4 命題 3.11 を示せ。

系 3.4 で, 同相な位相空間の基本群は同型であることを示した。しかし, もっと条件を弱くできる。すなわちホモトピー型が同じでも基本群は同型であることが示される。それを示すために, まず次の補題を示す。

補題 3.12
$f_0, f_1 : X \to Y$ に対して, $F : X \times I \to Y$ を f_0 と f_1 のホモトピーとする。このとき

$$(f_1)_* = \sigma_\# \cdot (f_0)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f_1(x_0))$$

が成り立つ。ここで, σ は $\sigma(t) = F(x_0, t)$ で定義される $f_0(x_0)$ から $f_1(x_0)$ への Y の道である。

注意 10 上の補題 3.12 は, ホモトピックな写像が内部自己同型を除いて同じ基本群の準同型写像を導くことをいっている。この内部自己同型が, 2 つの写像によって X の基点が Y の異なる点に移されるかもしれない事実を補償している。
これは上の命題 3.9 と同じではない。上の命題では $f_0(x_0) = f_1(x_0)$ が仮定されているが, 一般には異なる。

証明　$[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ とする。

$$(f_1)_*[\alpha] = \sigma_\#((f_0)_*[\alpha]) \qquad \text{すなわち} \quad [f_1 \cdot \alpha] = \sigma_\#([f_0 \cdot \alpha]) = [\sigma^{-1}(f_0 \cdot \alpha)\sigma]$$

を示したい。そこで, $f_1 \cdot \alpha \doteq \sigma^{-1}(f_0 \cdot \alpha)\sigma$ を示そう。そのために, 写像 $G : I \times I \to Y$ を

$$G(s, t) = F(\alpha(s), t) \qquad (s, t \in I)$$

によって定義する。F と α が連続であるから, G は連続である。さらに

$$
\begin{array}{rclclcl}
G(s,0) & = & F(\alpha(s),0) & = & f_0(\alpha(s)) & = & f_0\cdot\alpha(s) \\
G(s,1) & = & F(\alpha(s),1) & = & f_1(\alpha(s)) & = & f_1\cdot\alpha(s) \\
G(0,t) & = & F(\alpha(0),t) & = & F(x_0,t) & = & \sigma(t) \\
G(1,t) & = & F(\alpha(1),t) & = & F(x_0,t) & = & \sigma(t)
\end{array}
$$

したがって, G によって $I\times I$ の境界が 図 1 のように写像される。

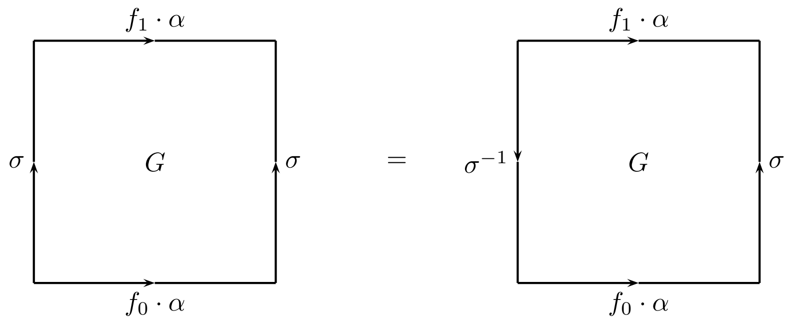
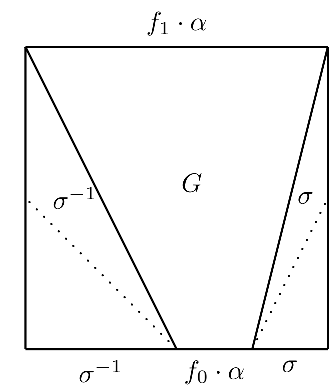


図 1: $I\times I$

$f_1\cdot\alpha$ から $\sigma^{-1}(f_0\cdot\alpha)\sigma$ へのホモトピー H は, G を下図に示すように変形すればよい。



式で表せば, H は次の様に与えられる。

$$
H(s,t)=\begin{cases}
\sigma^{-1}(2s) & (0\le s\le \frac{1-t}{2}) \\
G(\frac{4s+2t-2}{3t+1},t) & (\frac{1-t}{2}\le t\le \frac{1+t}{2}) \\
\sigma(4s-3) & (\frac{1+t}{2}\le t\le 1)
\end{cases}
$$

□

定理 3.13

弧状連結な位相空間 X, Y において, X と Y のホモトピー $f: X\to Y$ が存在すれば, $x_0\in X$ の f の像 $f(x_0)$ を y_0 とおけば,

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$$

は 同型である。よって, 同じホモトピー型をもつ弧状連結な空間を X, Y とすると, それらの基本群は同型 $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$ である。

<u>証明</u>

$f:X\to Y$, $g:Y\to X$ を,

$$f(x_0)=y_0,\quad g(y_0)=x_1,\quad g\cdot f\simeq id:X\to X,\quad f\cdot g\simeq id:Y\to Y$$

をみたす写像とする。このとき, F を $g \cdot f$ と id のホモトピーとすると, $\alpha(t) = F(x_0, t)$ で定められた X の道を $\alpha : I \to X$ とすると, 補題 3.12 によって,

$$\sigma_\alpha = (g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*^{(0)}$$

ここに, $f_*^{(0)} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),\ g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_1)$ は, f, g から導かれる準同型写像である。

同様に, $f \cdot g \overset{G}{\simeq} id : Y \to Y$ より, $f(x_1) = y_1$ とすれば, $\beta(t) = G(y_0, t)$ によって Y の道を定めれば, $\sigma_\beta = (f \cdot g)_* = {f_*}^{(1)} g_*$
ここに, ${f_*}^{(1)} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, y_1)$ は, f によって道かれる準同型写像である。

したがって, σ_α は同型写像だから, g_* は全射で, また σ_β も同型写像だから, g_* は単射である。

故に, g_* は同型となる。したがって, $f_*^{(0)}$ も同型とわかる。□

定義 3.14
弧上連結な位相空間 X において, $\pi_1(X)$ が 単位元のみよりなる群であるとき,
X は **単連結** (***simply connected***) である, あるいは 1**-連結** (***1-connected***) という。

命題 3.15
弧上連結な位相空間 X が可縮 (contractible) ならば, 単連結である。

問題 3.5
命題 3.15 を示せ。

系 3.16
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ は単連結である。

また 位相空間の直積空間の基本群については, 次のような定理が成り立つ。

定理 3.17
$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$
ここに 右辺は群の直積である。

証明　$p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ を射影とし, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を決めておけば,
写像 $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ に対して, Z から $X \times Y$ への写像 h を

$$h(z) = (f(z), g(z)) \quad (\forall z \in Z)$$

と定めることにより定義される。この $h : Z \to X \times Y$ は, ふつう $h = \{f, g\}$ とかかれるが, これは,

$$p_1 \cdot h = f, \quad p_2 \cdot h = g$$

をみたす。

ここで, $L(X, x_0)$ を x_0 を基点とする X の閉じた道の集合, $L(Y, y_0)$ を y_0 を基点とする Y の閉じた道の集合, $L(X \times Y, (x_0, y_0))$ を (x_0, y_0) を基点とする $X \times Y$ の閉じた道の集合 とする。

すると, $\ell \in L(X, x_0)$, $m \in L(Y, y_0)$ をとると, $\ell : I \to X$, $m : I \to Y$ だから, $\{\ell, m\} : I \to X \times Y$ が定まるので, $L(X, x_0) \times L(Y, y_0) \to L(X \times Y, (x_0, y_0))$ を,

$$(l, m) \mapsto \{\ell, m\}$$

と定めると, 全単射で, 道の積を保つことがわかる。さらに,

$$\{\ell_0, m_0\} \simeq \{\ell_1, m_1\} \Longleftrightarrow \ell_0 \simeq \ell_1,\ m_0 \simeq m_1$$

だから,

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \ \square$$

補足 : 第 1 章

2 節

(補題 2.7 の補足)

$s=\frac{t+1}{4}$ の所で $F(s,t)$ は $\alpha(1)=\beta(0)$ で $s=\frac{t+2}{4}$ の所で $F(s,t)$ は $\beta(1)=\gamma(0)$ であるから F は連続であり, $F(0,t)=\alpha(0)$, $F(1,t)=\gamma(1)$ である。また

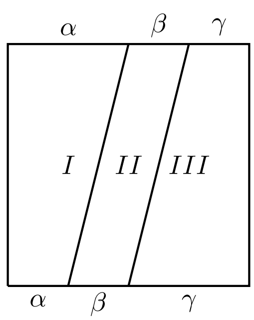
$$F(s,0)=\begin{cases}\alpha(4s) & 0\le s\le\frac{1}{4}\\ \beta(4s-1) & \frac{1}{4}\le s\le\frac{1}{2}\\ \gamma(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}=((\alpha*\beta)*\gamma)(s)$$

$$F(s,1)=\begin{cases}\alpha(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ \beta(4s-2) & \frac{1}{2}\le s\le\frac{3}{4}\\ \gamma(4s-3) & \frac{3}{4}\le s\le 1\end{cases}=((\alpha*\beta)*\gamma)(s)$$

したがって, F は $((\alpha*\beta)*\gamma)$ と $(\alpha*(\beta*\gamma))$ の間の (道) ホモトピーである。

$F(s,t)$ **の求め方**

右図のように $I\times I$ を 3 つの領域に分け, 領域ごとに $F(s,t)$ の求め方を 2 つの方法で述べる。



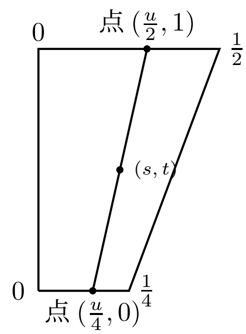
$\boxed{\text{方法 1}}$.

$[I]$ 領域内の任意の点 (s,t) を通り 線分 $[(0,0),(\frac{1}{4},0)]$ および $[(0,1),(\frac{1}{2},1)]$ を $u:(1-u)$ に内分する点 (すなわち 点 $(\frac{u}{4},0)$ および $(\frac{u}{2},1)$) を通る直線の方程式は

$$\frac{t-0}{1-0}=\frac{s-\frac{u}{4}}{\frac{u}{2}-\frac{u}{4}}$$

である。よって $\frac{u}{4}t=s-\frac{u}{4}$, したがって, $u=\frac{4s}{1+t}$ $(0\le u\le 1)$ となる。

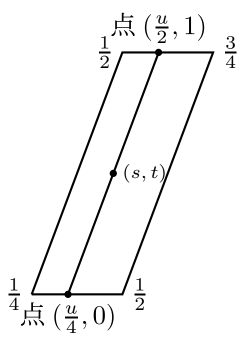
これより $[I]$ 内では $\alpha(u)=\alpha(\frac{4s}{1+t})$ $(0\le s\le\frac{1+t}{4})$

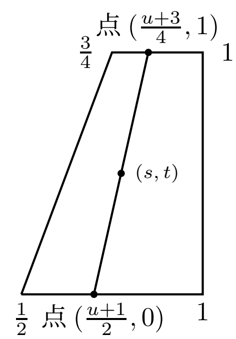


$[II]$ 領域内の任意の点 (s,t) を通り 線分 $[(\frac{1}{4},0),(\frac{1}{2},0)]$ および $[(\frac{1}{2},1),(\frac{3}{4},1)]$ を $u:(1-u)$ に内分する点 (すなわち 点 $(\frac{u+1}{4},0)$ および $(\frac{u+2}{4},1)$) を通る直線の方程式は

$$\frac{t-0}{1-0} = \frac{s-\frac{u+1}{4}}{\frac{u+2}{4}-\frac{u+1}{4}} \left(= \frac{s-\frac{u+1}{4}}{\frac{1}{4}} \right)$$

である。よって $\frac{1}{4}t = s - \frac{u+1}{4}$, したがって, $u = 4s - t - 1$ となる。
これより $[II]$ 内では $\beta(u) = \beta(4s-t-1)$ $(\frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4})$





$[III]$ 領域内の任意の点 (s,t) を通り 線分 $[(\frac{1}{2},0),(1,0)]$ および $[(\frac{3}{4},1),(1,1)]$ を $u:(1-u)$ に内分する点 (すなわち 点 $(\frac{u+1}{2},0)$ および $(\frac{u+3}{4},1)$) を通る直線の方程式は

$$\frac{t-0}{1-0} = \frac{s-\frac{u+1}{2}}{\frac{u+3}{4}-\frac{u+1}{2}} \left(= \frac{s-\frac{u+1}{2}}{\frac{u+3-2u-2}{4}} = \frac{s-\frac{u+1}{2}}{\frac{1-u}{4}} \right)$$

である。よって $\frac{1}{4}t - \frac{u}{4}t = s - \frac{u+1}{2}$, したがって $u = \frac{4s-t-2}{2-t}$ となる。
これより $[III]$ 内では $\gamma(u) = \gamma(\frac{4s-t-2}{2-t})$ $(\frac{t+2}{4} \leq s \leq 1)$

$\boxed{\text{方法 2}}$. 比を使う方法

$[I]$ 領域内の任意の点 (s,t) を取る。右図を参考に比を考えると $s:\frac{1+t}{4}=u:1$ である。これを解くと $u=\frac{4s}{1+t}$ となり, 範囲は $0\leq s\leq\frac{1+t}{4}$ となる。

$[II]$ 領域内の任意の点 (s,t) を取る。下図を参考にすると, $s:\frac{1+t}{4}=\frac{u}{2}:\frac{1}{2}$ である。これを解くと $u=4s-t-1$ となり, 範囲は $(\frac{t+1}{4}\leq s\leq\frac{t+2}{4})$ となる。

$[III]$ 領域内の任意の点 (s,t) を取る。I と同様に比を考えると $1-s:\frac{2-t}{4}=1-u:1$ である。これを解くと $u=\frac{4s-t-2}{2-t}$ となり, 範囲は $(\frac{t+2}{4}\leq s\leq 1)$ となる。