補足：第 2 章の証明のヒント

3 節

証明　(定理 3.3)

$a_1, a_2 \in |s^{k-1}|$ とする。$w \neq v$ なる $w \in [v, a_1] \cap [v, a_2]$ が存在したとする。$a_1 = a_2$ を示そう。まず, a_1, a_2, v の $[s]$ における重心座標表示を考える。

$$a_1 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{1i} v_i, \quad a_2 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i} v_i, \quad v = \sum_{i=0}^{k} \beta_i v_i$$

$a_1 \notin (s)$, $a_2 \notin (s)$ だから, ある $i_1, i_2 \leq k$ に対して $\alpha_{1i_1} = 0$, $\alpha_{2i_2} = 0$ である。さらに $v \in (s)$ だから, すべての i に対して $\beta_i \neq 0$ である。また, $w \in [v, a_1]$ より, ある $t_1 \in I$ $(t_1 \neq 1)$ に対して $w = t_1 v + (1 - t_1) a_1$ である。したがって $w = \sum_{i=0}^{k} \{t_1 \beta_i + (1 - t_1)\alpha_{1i}\} v_i$ で, 同様に, $w \in [v, a_2]$ より, ある $t_2 \in I$ $(t_2 \neq 1)$ に対して $w = \sum_{i=0}^{k} \{t_2 \beta_i + (1 - t_2)\alpha_{2i}\} v_i$ である。重心座標の一意性より,

$$t_1 \beta_i + (1 - t_1)\alpha_{1i} = t_2 \beta_i + (1 - t_2)\alpha_{2i} \qquad (i = 0, 1, \cdots, k)$$

ゆえに

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{\beta_i}\{(1 - t_2)\alpha_{2i} - (1 - t_1)\alpha_{1i}\}$$

$i = i_1$ をとれば,　$t_1 - t_2 = \frac{1}{\beta_{i_1}}(1 - t_2)\alpha_{2i_1} \geq 0$

$i = i_2$ をとれば,　$t_1 - t_2 = -\frac{1}{\beta_{i_2}}(1 - t_1)\alpha_{1i_2} \leq 0$

したがって, $t_1 - t_2 = 0$, $t_1 = t_2$ で, すべての i に対して $\alpha_{1i} = \alpha_{2i}$ であり, これより $a_1 = a_2$ で $(v, [s^{k-1}])$ が一般的な位置にあることが証明された。

いま, $[s]$ が凸であることから $v * |s^{k-1}| \subset [s]$ である。逆に, $[s] \subset v * |s^{k-1}|$ を示そう。$w \in |s^{k-1}|$ ならばたしかに $w \in v * |s^{k-1}|$ である。そこで $w \in (s)$ と仮定する。$w \neq v$ としてよい。重心座標をとると,

$$w = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i, \qquad v = \sum_{i=0}^{k} \beta_i v_i \quad (\text{すべての } \alpha_i, \beta_i > 0)$$

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i - \beta_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1 - 1 = 0$$

であり, またある i に対して $\alpha_i - \beta_i \neq 0$ であるから, ある j に対して $\alpha_j - \beta_j < 0$ である。このような各 j について $f_j(t) = \beta_j + t(\alpha_j - \beta_j)$ とおく。$f_j(1) = \alpha_j > 0$ かつ $\alpha_j - \beta_j < 0$ より, 大なる t に対して $f_j(t) < 0$ であるから, $\beta_j + t_j(\alpha_j - \beta_j) = 0$ をみたす $t_j > 1$ が存在する。そのようなすべての j に対して $t_{i_0} \leq t_j$ なるような i_0 を j の中から選ぶと, $\beta_{i_0} + t_{i_0}(\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}) = 0$ であり, しかもすべての i に対して, $\beta_i + t_{i_0}(\alpha_i - \beta_i) \geq 0$ である ($\alpha_i - \beta_i$ の正, 負 あるいは 0 と場合分けすれば, それぞれ示せることを各自確かめてみよ)。ゆえに $v + t_{i_0}(w - v) = x \in |s^{k-1}|$ (図 19 を見よ。) である。また

$$w = \frac{1}{t_{i_0}} x + \frac{t_{i_0} - 1}{t_{i_0}} v = t'x + (1 - t')v, \quad t' = \frac{1}{t_{i_0}} < 1.$$

これより $w \in v * |s^{k-1}|$ である。□

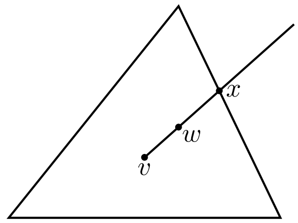

図 19:

<u>証明</u>　(定理 3.5)

定理 3.3 より, $(v, |s^{k-1}|)$ は一般的な位置にあり, かつ $v * |s^{k-1}| = [s]$ である。ところが $|L| = |K(\overset{\bullet}{s})|$ であるから $(v, |L|)$ は一般的な位置にあり, かつ $v * |L| = |K(s)|$ である。

$\widetilde{L}$ が単体的複体であることを示す必要がある。$\widetilde{L}$ は開単体の集合であり, さらに $\widetilde{L}$ の各単体 $\neq (v)$ は L に含まれるか, (t, v) という形をもつかのいずれかである。もしそれが L に含まれるならば, その開辺単体はすべて L に含まれ, したがって $\widetilde{L}$ に含まれる。また (t, v) という形ならば, その開辺単体は (t), (v) と $\{(t_1, v)\,;\, t_1$ は (t) の開辺単体 $\}$ である。このように各場合とも, すべての開辺単体は $\widetilde{L}$ に含まれ, したがって複体の条件 (1) は満たされる。複体の条件 (2) を確かめるには異なる開単体は空である共通部分しかもたないことを示さねばならない。このことは, L は複体であるから, L の各々の単体の組に対しては, 確かに成り立っている。また, $(t) \in L$ ならば, すべての $(s_1) \in L$ に対して $(t) \cap (s_1, v) = \emptyset$ である。実際, $(s_1, v) \subset (s)$ である。明らかに (v) は $\widetilde{L}$ の他の開単体とは交わらない。そこで, $(t_1), (t_2) \in L$ に対して $(t_1, v) \cap (t_2, v) \neq \emptyset$ と仮定する。$w \in (t_1, v) \cap (t_2, v)$ とすると, これらは開単体だから $w \neq v$ である。さて, $w \in [v, x]$ であるような $x \in |K(\overset{\bullet}{s})| = |L|$ が一意に存在する (定理 3.3 を見よ)。$[t_1, v] = v * [t_1]$ より $x \in (t_1)$ である。同様に $x \in (t_2)$ より $(t_1) \cap (t_2) \neq \emptyset$ である。したがって L が複体であることより, $(t_1) = (t_2)$, $(t_1, v) = (t_2, v)$ である。よって $\widetilde{L}$ は複体である。

$\widetilde{L}$ の点集合は

$$|\widetilde{L}| = \bigcup_{wts \in \widetilde{L}} |\widetilde{s}| = \bigcup_{t \in L} v * |t| = v * |L| = |K(s)|$$

である。$\widetilde{L}$ の各開単体は $K(s)$ の開単体に含まれる — L は $K(\overset{\bullet}{s})$ の細分であるから, L の開単体は $K(\overset{\bullet}{s})$ の開単体に含まれ, 残りは (s) に含まれる—。したがって $\widetilde{L}$ は $K(s)$ の細分である。□

<u>証明</u>　(定理 3.7)

K の次元 $\dim K$ に関する帰納法で証明する。$\dim K = 0$ のときは $K^{[1]} = K$ だから明らか (証明する必要がない)。次元 $\leq n-1$ のすべての単体的複体に対して定理が正しいと仮定する。$\dim K = n$ とする。このとき $(n-1)$-骨格 $K^{(n-1)}$ は次元 $\leq n-1$ の複体である。これより $K^{(n-1)}$ に対しては成り立っている。特に

$$s_0, s_1, \cdots, s_r \in K, \quad s_0 \precneqq s_1 \precneqq \cdots \precneqq s_r, \qquad \text{かつ} \quad \dim s_r \leq n-1$$

ならば, $\{b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)\}$ は c-独立で, $(K^{(n-1)})^{[1]}$ の開単体 $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))$ を与える。さらに,

$$(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)) \subset (s_r)$$

いま, $s_0, s_1, \cdots, s_r \in K$, $(s_0 \subsetneqq s_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq s_r)$ かつ $\dim s_r = n$ と仮定する。$s_{r-1} \subsetneqq s_r$ より $\dim s_{r-1} \leq n-1$ で, $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1}))$ は s_r の真の辺単体 (s_{r-1}) に含まれる単体である。$b(s_r) \in (s_r)$ だから, 定理 3.3 より $(b(s_r), (b(s_0), \cdots, b(s_{r-1})))$ は一般的な位置にあるということがいえる。これより $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))$ は開単体で, 閉単体

$$[b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)] = b(s_r) * [b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1})] \subset [s_r]$$

の内部である。したがって, $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)) \subset (s_r)$ である。

これで $K^{[1]}$ が開単体の集まりであるというところまではわかった。実は単体的複体であることがわかる。複体の条件 (1) は明らかに満足される。すなわち $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r))$ の任意の辺単体は $(b(s_{j_0}), b(s_{j_1}), \cdots, b(s_{j_t}))$ であり, これより $K^{[1]}$ に属する。さて条件 (2) を確かめよう。$s_0 \subsetneqq s_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq s_r$, $\overline{s}_0 \subsetneqq \overline{s}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \overline{s}_q$, かつ

$$(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)) \cap (b(\overline{s}_0), b(\overline{s}_1), \cdots, b(\overline{s}_q)) \neq \emptyset$$

と仮定する。w が共通部分に属するとすれば, $w \in (s_r) \cap (\overline{s}_q)$ である。K は複体だから $(s_r) = (\overline{s}_q)$ であり, $b(s_r) = b(\overline{s}_q)$ である。さらに

$$(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1})) \subset (s_{r-1}), \qquad (b(\overline{s}_0), b(\overline{s}_1), \cdots, b(\overline{s}_{q-1})) \subset (\overline{s}_{q-1})$$

ここで, (s_{r-1}) と $(\overline{s}_{q-1})$ はともに (s_r) の辺単体である。これより

$$\begin{aligned}
&(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1})), \quad (b(\overline{s}_0), b(\overline{s}_1), \cdots, b(\overline{s}_{q-1})) \in K(s_r)^{[1]} \\
&w \in (b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1}), b(s_r)) \cap (b(\overline{s}_0), b(\overline{s}_1), \cdots, b(\overline{s}_{q-1}), b(s_r)) \\
&\quad \subset b(s_r) * (b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1})) \cap (b(\overline{s}_0), b(\overline{s}_1), \cdots, b(\overline{s}_{q-1}))
\end{aligned}$$

であるから, 定理 3.5 と帰納法の仮定によって

$$(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_{r-1})) = (b(\overline{s}_0), b(\overline{s}_1), \cdots, b(\overline{s}_{q-1}))$$

このことは, $K^{[1]}$ が単体的複体であることを示している。最後に $|K^{[1]}| = |K|$ を示さなければならない。明らかに $|K^{[1]}| \subset |K|$ である。また帰納法の仮定より $|K^{[1]}| \supset |(K^{(n-1)})^{[1]}| = |K^{(n-1)}|$ である。したがって

$$|K^{[1]}| \supset |K| - |K^{(n-1)}|$$

を示せばよい。そこで $w \in |K| - |K^{(n-1)}|$ と仮定する。このとき w は, 次元 n をもつある開単体 (s) に属さなければならない。したがって

$$w \in (s) \subset [s] = b(s) * |K(\overset{\bullet}{s})|$$

さて, $|K(\overset{\bullet}{s})| \subset |K^{(n-1)}| = |(K^{(n-1)})^{[1]}|$ だから, ある

$$(s_1) = (b(s_0), \cdots, b(s_k)) \in (K^{(n-1)})^{[1]}$$

に対して $w \in b(s) * (s_1)$ である。$w = b(s)$ ならば w は $K^{[1]}$ の頂点であり, $w \neq b(s)$ ならば, $w \in (b(s_0), \cdots, b(s_k), b(s)) \subset |K^{[1]}|$ である。□

証明　(補題 3.9)

まず次の命題を示す。すなわち，「A を $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合とし，$\widehat{A}$ で A を含む最小の凸集合を表すとき，diam $A =$ diam $\widehat{A}$ である。」ことを示す。明らかに diam $\widehat{A} \geq$ diam A である。逆を示すために $d =$ diam A とおき，$a \in A$ をとる。a を中心とし，半径 d の閉球 $B(a,d)$ を考えると，$A \subset B(a,d)$ で，$B(a,d)$ は凸集合であるから，$\widehat{A} \subset B(a,d)$ である。したがって，任意の $\hat{a} \in \widehat{A}$ と $a \in A$ に対して，$||\hat{a} - a|| \leq d$ である。そこで $\hat{a}$ を中心とし半径が d なる閉球 $B(\hat{a},d)$ を取ると，$A \subset B(\hat{a},d)$ が成り立つ。したがって，$\widehat{A} \subset B(\hat{a},d)$ となる。よって diam $\widehat{A} \leq d =$ diam A となる。

補題の証明に取り掛かろう。K の単体 s の頂点の集合を $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ とおいて，この命題を使えば $\widehat{A} = [s]$ であるから，diam $[s] =$ diam $A = \max\{d(v_i, v_j)\}$ となるから v_i を v_1 に，v_j を v_2 と頂点の番号をつけ変えれば補題の前半部は示せた。後半部分は K に属する全ての単体の直径の内で最大な単体について適用すればよい。 □

証明　(注意 4)

diam $[s] = d$ とおく。上の補題 3.9 より $[s]$ の頂点 v_1, v_2 が存在して diam $[s] = d(v_1, v_2)$ である。ここで，diam $(s) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in (s)} d(x_1, x_2)$ であるから diam $(s) = d$ を示すためには 次の 2 つを示せばよい。

(**1**) (s) の任意の点 x_1, x_2 に対して，$d(x_1, x_2) \leq d$

(**2**) 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，(s) の点 x_1, x_2 が存在して $d(x_1, x_2) > d - \varepsilon$

(1) は $(s) \subset [s]$ より，明らかに $d(x_1, x_2) \leq d$ である。

(2) を示そう。そのために $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r)$ とおく。このとき x_1, x_2 を重心座標で次のように表される点を考える。

$$x_1 = \sum_{i=0}^{r} a_i v_i, \qquad x_1 = \sum_{i=0}^{r} b_i v_i$$

ただし

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{3d}, & b_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{3d}, \\ a_i = \frac{\varepsilon}{3rd},\ (i \neq 1) & b_i = \frac{\varepsilon}{3rd},\ (i \neq 2) \end{array}$$

すると，$a_i > 0$ $(i = 0, 1, \cdots, r)$ で $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} a_i = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3d}\right) + r \cdot \frac{\varepsilon}{3rd} = 1$ であり，また同様に $b_i > 0$ $(i = 0, 1, \cdots, r)$ で $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} b_i = 1$ であるから，x_1, $x_2 \in (s)$ である。また

$$d(v_1, x_1) = d(v_1, \sum_{i=0}^{r} a_i v_i) \leq \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot d(v_1, v_i)$$

で $d(v_1, v_1) = 0$, $d(v_1, v_i) \leq d$ $(i \neq 1)$ より

$$\leq r \cdot \frac{\varepsilon}{3rd} \cdot d = \frac{\varepsilon}{3}$$

同様に $d(v_2, x_2) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ である。よって

$$d(v_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, v_2) \geq d(v_1, v_2)$$

を使えば, $d(x_1, x_2) + \frac{2}{3}\varepsilon \geq d$ だから

$$d(x_1, x_2) \geq d - \frac{2}{3} > d - \varepsilon$$

となる。よって diam $s = d$ となる。□

証明　(定理 3.10)

補題 3.9 より, $s_k \precneqq s_h$ で mesh $K^{[1]} = d(b(s_k), b(s_h))$ であるような単体 $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)) \in K^{[1]}$ が存在する。必要ならば頂点の番号をつけかえることにより, $s_k = (v_0, v_1, \cdots, v_p)$, $s_h = (v_0, v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_q)$ とできる。すると

$$\begin{aligned} \text{mesh } K^{[1]} &= ||b(s_k) - b(s_h)|| = \left\| \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{q} v_j \right\| \\ &= \frac{1}{q+1} \left\| \frac{q+1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - \sum_{j=0}^{q} v_j \right\| = \frac{1}{q+1} \left\| \sum_{j=0}^{q} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - v_j \right) \right\| \\ &= \frac{1}{p+1} \ \frac{1}{q+1} \left\| \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} (v_i - v_j) \right\| \leq \frac{1}{p+1} \ \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} \|v_i - v_j\| \end{aligned}$$

ところが $\|v_i - v_j\| \leq \text{diam } [s_h] \leq \text{mesh } K$ であり, さらに, この和で $i = j$ の場合は第 (i,j) 項 $= 0$ である。そのような和が $p+1$ 個あるから 0 でない項の個数は

$$(p+1)(q+1) - (p+1) = (p+1)q$$

である。和の各項 $\leq$ mesh K で, $q \leq m$ より

$$\text{mesh } K^{[1]} \leq \frac{q}{q+1} \text{mesh } K \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh } K$$

となる。□

4 節

証明　(定理 4.2)

$|K|$ における $\text{St}(v)$ の補集合は閉であることを示そう。

$$\text{St}(v)^c = \bigcup_{v \notin [s]} (s)$$

$v \notin [s]$ より v は s の辺単体ではない。したがって $(s) \subset \text{St}(v)^c$ ならば $[s] \subset \text{St}(v)^c$ である。$[s]$ はコンパクトであるから $[s]$ は閉である。これより, $\text{St}(v)^c = \bigcup_{(s) \subset \text{St}(v)^c} [s]$ は閉である。

次に, 頂点を含むただ一つの開単体はその頂点だけからなる 0-単体だから, $\text{St}(v)$ における唯一の頂点は v だけである。

最後に, $p \in |K|$ ならば, ある $(s) \in K$ に対して $p \in (s)$ であり, このことから (s) の頂点 v に対して $p \in \mathrm{St}(v)$ である。したがって $\displaystyle\bigcup_{v \in K^{(0)}} \mathrm{St}(v) = |K|$ となる。□

<u>証明</u>　(定理 4.5)

$p \in |K|$ とする。このときある単体 $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r) \in K$ に対して $p \in (s)$ であり, かつすべての $j = 0, 1, \cdots, r$ に対して

$$f(p) \in f((s)) \subset f(\mathrm{St}(v_j)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$$

さて, ある単体 $(t) \in L$ に対して $f(p) \in (t)$ だから, (t) に対して $(t) \cap \mathrm{St}(\varphi(v_j)) \neq \emptyset$ がすべての j についていえる。ところが L は複体で $\mathrm{St}(\varphi(v_j))$ は開単体の和集合であるから, すべての j に対して $(t) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$ である。すなわち, すべての j に対して $\varphi(v_j)$ は (t) の頂点である。s における重心座標を考えれば, $p = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} a_j v_j$ であり, かつ

$$|\varphi|(p) = \sum_{j=0}^{r} a_j \varphi(v_j) \in [t]$$

となる。これより証明された。□

<u>証明</u>　(定理 4.7)

$F : |K| \times I \to |L|$ を

$$F(p,t) = t|\varphi|(p) + (1-t)f(p)$$

により定義する。定理 4.5 より, $f(p)$ と $|\varphi|(p)$ が凸集合である同一の閉単体に属し, それらを結ぶ線分もまたその閉単体に属すことから, F が $|L|$ への写像であることが言える。F が連続であり, すべての $p \in |K|$ に対して $F(p,0) = f(p)$ かつ $F(p,1) = |\varphi|(p)$ であることは容易に確かめられる。F が $|K_1|$ 上で不変だということは, 次の補題から $\varphi|_{K_1}$ が $f|_{|K_1|}$ の単体近似 (各頂点 $v \in K_1$ について $f(\mathrm{St}_{K_1}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ だから) であることから, $f = |\varphi|$ が $|K_1|$ で成り立つ。□

<u>証明</u>　(補題 4.8)

各頂点 $v \in K$ に対して

$$f(v) \in |f|(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$$

である。ところが, f は単体写像であるから $f(v)$ は頂点であり, 定理 4.2 より $f(v) = \varphi(v)$ である。このように f と φ が各頂点で一致し, 両者が単体写像であることから一致する。□

<u>証明</u>　(定理 4.9)

必要であることは明らかである。十分であることをいうには, φ が単体写像の定義の条件を確かめればよい。すなわち, $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r)$ が K における単体ならば, $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_r)$ が L のある一つの単体の頂点であることをいえばよい。ところが, すべての $j = 0, 1, \cdots, r$ に対して $f((s)) \subset f(\mathrm{St}(v_j)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$ だから $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{r} \mathrm{St}(\varphi(v_j)) \neq \emptyset$ である。これより, すべての j に対してある開単体 $(t) \subset \mathrm{St}(\varphi(v_j))$ が存在する。したがって, すべての j に対して, $\varphi(v_j)$ は (t) の頂点でなければならない。

証明　(定理 4.10)

定理 4.2 より, $\{\,\mathrm{St}(w)\,\}_{w\in L^{(0)}}$ は $|L|$ の開被覆である。f が連続であるから, $\{\,f^{-1}(\mathrm{St}(w))\,\}$ は $|K|$ の開被覆である。$|K|$ はコンパクト距離空間だから 半径 δ の任意の球体がこの被覆のある開集合に含まれるように $\delta>0$ をとることができる。$\mathrm{mesh}\,K_n<\frac{\delta}{2}$ となるように十分大きな n を選べば, 各 $s\in K_n$ に対して $\mathrm{diam}\,[s]\le\frac{\delta}{2}$ である。ゆえに, K_n の各頂点 v に対して $\mathrm{St}(v)\subset B_v(\delta)$ である。 ここに $B_v(\delta)$ は中心 v で 半径 δ である閉球体を表す。 ところがある $w\in K^{(0)}$ に対して $B_v(\delta)\subset f^{-1}(\mathrm{St}(w))$ であるから, 各 $v\in(K_n)^{(0)}$ に対してある $w\in L^{(0)}$ をとれば $\mathrm{St}(v)\subset f^{-1}(\mathrm{St}(w))$ である。そのような頂点 $w\in L^{(0)}$ を $\varphi(v)$ とすれば (w は有限個だけ存在する。その内の任意の 1 つをとれ), $\varphi:(K_n)^{(0)}\to L^{(0)}$ は $\mathrm{St}(v)\subset f^{-1}(\mathrm{St}(\varphi(v)))$ をみたす。すなわち, 各 $v\in(K_n)^{(0)}$ に対して $f(\mathrm{St}(v))\subset\mathrm{St}(\varphi(v))$ となる。したがって, 定理 4.9 より φ は f の単体近似である。□

証明　(系 4.11)

3 節の 定理 3.10 より, 任意に小さいメッシュをもつ細分が存在する。与えられた $\varepsilon>0$ に対して 細分 L_m を $\mathrm{mesh}\,L_m<\varepsilon$ であるようにとる。このとき, $f:|K|\to|L_m|$ とみなせる。定理 4.10 より, K の細分 K_n と f の単体近似 $\varphi:K_n\to L_m$ が存在し, 系 4.6 から,

$$d(f,|\varphi|)\le\mathrm{mesh}\,L_m<\varepsilon$$

となる。□

5 節

証明　(定理 5.3)

$(s)=(v_0,v_1,\cdots,v_k)$ を K の単体とする。このとき, すべての $j=0,1,\cdots,k$ と $i=1,2$ について

$$f((s))\subset f(\mathrm{St}(v_j))\subset\mathrm{St}(\varphi_i(v_j))$$

である。したがって

$$f((s))\subset\bigcap_{j=0}^{k}\mathrm{St}(\varphi_1(v_j))\cap\bigcap_{j=0}^{k}\mathrm{St}(\varphi_2(v_j))$$

である。(t) を $f((s))\cap(t)\neq\emptyset$ であるような L の開単体とする。このとき

$$(t)\subset\bigcap_{j=0}^{k}\mathrm{St}(\varphi_1(v_j))\cap\bigcap_{j=0}^{k}\mathrm{St}(\varphi_2(v_j))$$

となる。よって $\varphi_1(v_0),\varphi_1(v_1),\cdots,\varphi_1(v_k)$ および $\varphi_2(v_0),\varphi_2(v_1),\cdots,\varphi_2(v_k)$ は (t) の頂点である。□

証明　(定理 5.4)

まず, 各 $p\in|K|$ に対して, $\varphi_1(p)$ と $\varphi_2(p)$ は L の同一の単体に属している。$p\in(s)=(v_0,v_1,\cdots,v_k)\in K$ とすれば, 重心座標に関して $p=\sum_{i=0}^{k}a_iv_i$ と表せる。φ_1 と φ_2 は隣接することから $\varphi_1(v_0),\cdots,\varphi_1(v_k)$ と

$\varphi_2(v_0), \cdots, \varphi_2(v_k)$ は L のある単体 (t) の頂点である。よって $j = 1, 2$ に対して $\varphi_j(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i \varphi_j(v_i) \in (t)$ である。今, $F : |K| \times I \to |L|$ を

$$F(p, t) = (1-t)\varphi_1(p) + t\varphi_2(p) \qquad (p \in |K|,\ t \in I)$$

により定義する。各 $p \in |K|$ に対して, $\varphi_1(p)$ と $\varphi_2(p)$ は同一の単体に属し, したがってそれらを結ぶ線分もその単体に属すから, この定義は意味を持つ。この F が φ_1 から φ_2 へのホモトピーである。□

証明　(定理 5.6)

$F : I \times I \to |K|$ を α_0 から α_1 へのホモトピーとする。$\{\mathrm{St}(w)\}_{w \in K^{(0)}}$ は $|K|$ の開被覆だから, $\{F^{-1}(\mathrm{St}(w))\}_{w \in K^{(0)}}$ は $I \times I$ の開被覆である。また $I \times I$ はコンパクト距離空間であるから, $\delta > 0$ が存在して, 半径 δ の任意の球体はある $w \in K^{(0)}$ に対して $F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ に含まれるようにできる。

頂点 $v_0 = 0, v_1, \cdots, v_k = 1$ をもつ I の細分 I' と, 頂点 $\ell/2k$ $(\ell = 0, 1, \cdots, 2^k)$ をもつ別の細分 I'' をとる。このとき $I' \times I''$ は, 頂点 $v_r^\ell = (v_r, \ell/2^k)$ と, 2-単体 $(v_r^\ell, v_{r+1}^\ell, v_{r+1}^{\ell+1})$ あるいは $(v_r^\ell, v_r^{\ell+1}, v_{r+1}^{\ell+1})$ をもつ単体的複体をつくる (図 20)。

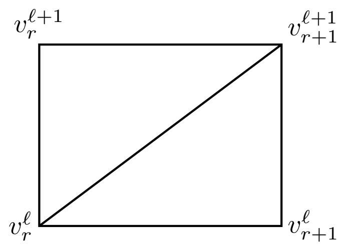

図 20: $I \times I$ の単体分割

細分を十分細かく選べば, $\mathrm{St}(v_r) \times [(\ell-1)/2^k, (\ell+1)/2^k]$ が半径 δ の球体内に含まれ, したがって, ある $w \in K^{(0)}$ に対して $F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ に含まれる。$\mathrm{St}(v_r^\ell) \subset \mathrm{St}(v_r) \times [(\ell-1)/2^k, (\ell+1)/2^k] \subset F^{-1}(\mathrm{St}(w))$ より, 4 節の定理 4.9 を用いれば F の単体近似である単体写像 $\Phi : M \to K$ が存在し,

$$\mathrm{St}(v_r) \times [(\ell-1)/2^k, (\ell+1)/2^k] \subset F^{-1}(\mathrm{St}(\Phi(v_r^\ell)))$$

である。ただし, 上の条件をみたす十分細かい細分を M とおいている。ここで $\varphi_i = \Phi|_{I \times \{i\}}$ $(i = 0, 1)$ とすれば, φ_i は $F|_{I \times \{i\}} = \alpha_i$ の単体近似である。

さて, $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$ を示そう。$\psi_\ell = \Phi|_{I \times \{\ell/2^k\}}$ とすると, $\psi_0 = \varphi_0$ かつ $\psi_{2^k} = \varphi_1$ である。ψ_ℓ と $\psi_{\ell+1}$ が $\ell = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$ に対して互いに隣接することを示せば十分である。すなわち各単体 $(v_r, v_{r+1}) \in I'$ に対して, 頂点

$$\psi_\ell(v_r) = \Phi(v_r^\ell),\ \psi_\ell(v_{r+1}) = \Phi(v_{r+1}^\ell),\ \psi_{\ell+1}(v_r) = \Phi(v_r^{\ell+1}),\ \psi_{\ell+1}(v_{r+1}) = \Phi(v_{r+1}^{\ell+1})$$

が K の1つの単体に属していることを示せばよい。ところが

$$\begin{aligned}\bigcap_{i,j=0}^{1} \mathrm{St}(\Phi(v_{r+i}^{\ell+j})) &\supset F\left(\mathrm{St}(v_r)\times[\tfrac{\ell}{2^k},\tfrac{\ell+1}{2^k}]\right)\cap F\left(\mathrm{St}(v_{r+1})\times[\tfrac{\ell}{2^k},\tfrac{\ell+1}{2^k}]\right)\\ &\supset F\left((v_r,v_{r+1})\times[\tfrac{\ell}{2^k},\tfrac{\ell+1}{2^k}]\right)\end{aligned}$$

であり, これは $\emptyset$ でないから, K の単体 (t) に含まれる。したがって, 問題となった4つの頂点は (t) の頂点である。□

注 5 で述べた場合の証明では $I\times I$ の代わりに $K\times I$ の単体分割 (Prizm 作用素) が必要になる。

証明　(定理 5.9)

同型写像 $h: E(K,v_0)\to\pi_1(|K|,v_0)$ を次のように構成する。ω を v_0 を始点および終点とする K の順路とする。このとき K の頂点のある集合 $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ に対して, $\omega=|v_0v_1||v_1v_2|\cdots|v_{k-1}v_k|$ (ただし $v_k=v_0$) とかける。さて区間 I を, 頂点 $\{0,1/k,2/k,\cdots,(k-1)/k,1\}$ をもつ単体的複体とみなす。$\varphi_\omega(j/k)=v_j$ $(j=0,1,\cdots,k)$ により定義された頂点写像 $\varphi_\omega: I^{(0)}\to K^{(0)}$ を考える。$|v_0v_1||v_1v_2|\cdots|v_{k-1}v_k|$ は順路であるから φ_ω は単体写像 $\varphi_\omega: I\to K$ と思える。すると, 連続写像 $|\varphi_\omega|: I\to|K|$ は $|K|$ の v_0 を基点とする閉じた道であるので, $h(\omega)=[|\varphi_\omega|]$ と定める。

$\omega\overset{E}{\simeq}\tau$ ならば $\omega\doteq\tau$ である。すなわち, $|\varphi_\omega|\doteq|\varphi_\tau|$ である。したがって $h(\omega)=h(\tau)$ であり, h は定義可能である (well-defined)。この h は準同型写像である。実際, $\omega=e_1e_2\cdots e_k$ と $\tau=e_1'e_2'\cdots e_m'$ が, v_0 を始点および終点とする順路であれば, $|\varphi_{\omega\tau}|$ と $|\varphi_\omega||\varphi_\tau|$ の間のホモトピーは図 21 から得られる。

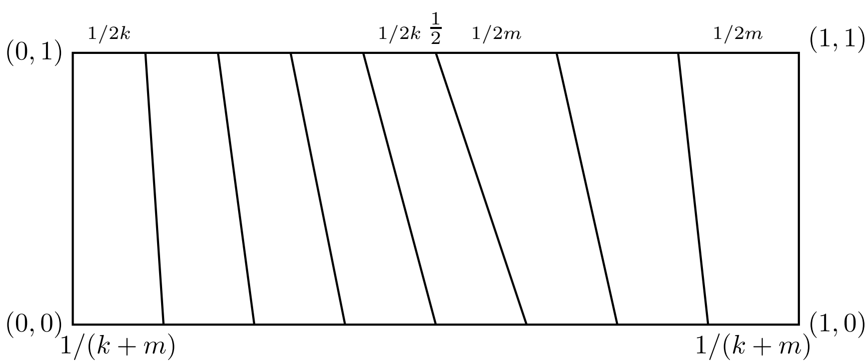

図 21: h が準同型写像を示すホモトピー

「h は全射である。」ことを示そう。$[\alpha]\in\pi_1(|K|,v_0)$ とすれば, 単体近似定理より I の細分 I' と α の単体近似 $\varphi: I'\to K$ が存在して, $|\varphi|\doteq\alpha$ となる。したがって $[|\varphi|]=[\alpha]$ である。ここで $t_0<t_1<\cdots<t_k$ を I' の頂点とし, ω を K の順路 $|\varphi(t_0)\varphi(t_1)||\varphi(t_1)\varphi(t_2)|\cdots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)|$ とすると

$$h(\omega)=[|\varphi|]=[\alpha]$$

である。

「h は単射である。」ことを最後に示そう。これを示すためには, ω が $|\varphi_\omega| \doteq e_{v_0}$ なる順路ならば $\omega \overset{E}{\simeq} |v_0 v_0|$ であることを示さねばならない。ところが定理 5.6 より, I の細分 I' と単体写像 $\varphi_0, \varphi_1 : I' \to K$ が存在し, φ_0, φ_1 はそれぞれ $|\varphi_\omega|, e_{v_0}$ の単体近似であり, $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$ をみたすようにできる (この細分 I' は, φ_ω を定義するのに用いた I の細分より細かく選べる)。e_{v_0} は単体写像であり (正確には e_{v_0} の I' への制限) φ_1 はそれの単体近似であるから $\varphi_1 = e_{v_0}$ である。このとき

$$\omega \overset{E}{\simeq} |v_0 v_0|$$

を示すためには, 次の (1), (2) を証明すれば十分である。

(1) φ と ψ が隣接同値な単体写像 $I' \to K$ ならば, $\omega_\varphi \overset{E}{\simeq} \omega_\psi$ である。ただし, ω_φ と ω_ψ はそれぞれ φ と ψ により作られた順路である。

(2) $\psi : I \to K$ が単体写像で, $\varphi : I' \to K$ が I のより細かい細分 I' における $|\psi|$ の単体近似ならば $\omega_\varphi \overset{E}{\simeq} \omega_\psi$ である。

なぜならば, (2) より $\omega = \omega_{\varphi_\omega} \overset{E}{\simeq} \omega_{\varphi_0}$ で, (1) より

$$\omega_{\varphi_0} \overset{E}{\simeq} \omega_{\varphi_1} = \omega_{e_{v_0}} = |v_0 v_0|$$

がいえるからである。

(1) **の証明** $\overset{E}{\simeq}$ は同値関係だから, 隣接する単体写像についてのみ証明すれば十分である。そこで $\varphi, \psi : I' \to K$ が互いに隣接するとする。ここで $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ を I' の頂点とし,

$$\begin{aligned}
\omega_\varphi &= |\varphi(t_0)\varphi(t_1)||\varphi(t_1)\varphi(t_2)|\cdots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)| \\
\omega_\psi &= |\psi(t_0)\psi(t_1)||\psi(t_1)\psi(t_2)|\cdots|\psi(t_{k-1})\psi(t_k)|
\end{aligned}$$

とおく。すると

$$\omega_\varphi \omega_\psi^{-1} = |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\cdots|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)||\psi(t_k)\psi(t_{k-1})|\cdots|\psi(t_1)\psi(t_0)|$$

である。ところが, φ と ψ は隣接するから, $\varphi(t_{k-1}), \varphi(t_k), \psi(t_{k-1}), \psi(t_k)$ は同一の単体の頂点である。しかも $\varphi(t_k) = \psi(t_k) = v_0$ である。したがって

$$|\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)||\psi(t_k)\psi(t_{k-1})| \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})|$$

である。ゆえに

$$\omega_\varphi \omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\cdots|\varphi(t_{k-2})\varphi(t_{k-1})||\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})||\psi(t_{k-1})\psi(t_{k-2})|\cdots|\psi(t_1)\psi(t_0)|$$

となる。同様に, φ と ψ が隣接するから

$$\begin{aligned}
|\varphi(t_{k-2})\varphi(t_{k-1})||\varphi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})| &\overset{E}{\simeq} |\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-1})| \\
|\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-1})||\psi(t_{k-1})\psi(t_{k-2})| &\overset{E}{\simeq} |\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-2})|
\end{aligned}$$

であるから,

$$\omega_\varphi \omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\varphi(t_1)|\cdots|\varphi(t_{k-3})\varphi(t_{k-2})||\varphi(t_{k-2})\psi(t_{k-2})||\psi(t_{k-2})\psi(t_{k-3})|\cdots|\psi(t_1)\psi(t_0)|$$

となる。これを繰り返せば

$$\omega_\varphi\omega_\psi^{-1} \overset{E}{\simeq} |\varphi(t_0)\psi(t_0)| = |v_0 v_0|$$

となり示される。

(2) **の証明** $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = 1$ を I の頂点全てとする。ψ を I' の部分複体 (頂点 $\{t_0, t_1, \cdots, t_k\}$ のみからなる部分複体) へ制限したものは単体写像である。したがって, φ が $|\psi|$ の単体近似であることを使えば, $i = 0, 1, 2, \cdots, k$ に対して $\varphi(t_i) = \psi(t_i)$ である。さらに ψ は単体写像であるから $\psi((t_i, t_{i+1}))$ は 0 次元か 1 次元の K の単体 (s) である。

よって, 「$t_i < u < t_{i+1}$ である I' の各頂点 u に対して $\varphi(u)$ は (s) の頂点である。」実際 φ が ψ の単体近似であるから

$$\psi(u) \in \psi(\mathrm{St}(u)) \subset \mathrm{St}_K(\varphi(u))$$

で, $\psi(u) \in (s)$ より $(s) \cap \mathrm{St}(\varphi(u)) \neq \emptyset$ であるので, $(s) \subset \mathrm{St}(\varphi(u))$ となり, $\varphi(u)$ は (s) の 1 つの頂点 すなわち $\varphi(u)$ は $\psi(t_i)$ か $\psi(t_{i+1})$ に等しい。

このように, $u_0 = t_i < u_1 < \cdots < u_r = t_{i+1}$ が t_i と t_{i+1} の間の I' の頂点ならば, $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_{r-1})\}$ は K の同一の単体 (s) の頂点である。さらに, $\varphi(u_0) = \varphi(t_i) = \psi(t_i)$ から, $\varphi(u_0)$ は (s) の頂点である。同様に $\varphi(u_r)$ も (s) の頂点である。よって $\{\varphi(u_0), \varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_r)\}$ は (s) の頂点である。

さて, ψ, φ を $[t_i, t_{i+1}]$ に制限した ω_φ, ω_ψ の一部を考えよう。ω_ψ のこの部分はちょうど $|\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$ であり, ω_φ に対応する部分は

$$|\varphi(u_0)\varphi(u_1)||\varphi(u_1)\varphi(u_2)|\cdots|\varphi(u_{r-1}\varphi(u_r))|$$

である。$\{\varphi(u_0), \varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_r)\}$ は K の同一の単体の頂点であるから, この部分は

$$|\varphi(u_0)\varphi(u_r)| = |\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})| = |\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$$

に稜同値である。したがって ω_φ と ω_ψ のこの部分は稜同値である。これが各 i についていえるので $\omega_\psi \overset{E}{\simeq} \omega_\varphi$ がいえる。□

証明 (定理 5.11)

まず $\mathbb{S}^n$ は $(n+1)$-単体 s^{n+1} から定まる複体 $K(s^{n+1})$ の n-骨格 $|K(s^{n+1})^{(n)}| = |K(\dot{s})|$ と同相である。実際, s が $\mathbb{R}^{n+1}$ の $(n+1)$-単体ならば, 次にあげる写像 $\varphi : |K(\dot{s})| \to \mathbb{R}^{n+1}$ は $|K(\dot{s})|$ を $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の上に同相に写す。$x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in |K(\dot{s})|$ に対して

$$\varphi(x) = \frac{1}{||x-b||}(x_1 - b_1, x_2 - b_2, \cdots, x_{n+1} - b_{n+1})$$

ただし, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ は s の重心とする。そして, $||x-b|| = \left[\sum_{i=0}^{n+1}(x_i - b_i)^2\right]^{1/2}$ である。幾何学的には, $[s]$ は $\mathbb{S}^n$ 内に描かれているとみなすことができ, φ は重心から外側に向けた射影である。

最後に $\pi_1(|K(\dot{s})|, v_0) = \{e\}$ を示せば十分である。定理 5.9 より, $\pi_1(|K(\dot{s})|, v_0)$ のあらゆる元は順路による表現をもち, 特にその像は $|K(\dot{s})^{(1)}|$ に含まれる。$n > 1$ のときは $p \notin |K(\dot{s})^{(1)}|$ なる点 $p \in |K(\dot{s})|$ が存在する。ところが $|K(\dot{s})| - \{p\}$ は $\mathbb{R}^n$ と同相で可縮である。ゆえに $\alpha \simeq e_{v_0}$ である。□

証明　(定理 5.14)

頂点の個数に関する帰納法を用いる。T が 1 つの頂点のみをもつときは明らかである。n 個の頂点をもつ樹木に対して定理が正しいと仮定する。T が $n+1$ 個の頂点をもち, v_0 がその端点であるとする。このとき 頂点 v_0 をもつ 1-単体 $s \in T$ がただ 1 つ存在する。

$L = T - \{(s), v_0\}$ とすると L は単体的複体で, かつ $|L| = |T| - (s) \cup \{v_0\}$ である。(t) を $|L| - (t)$ が連結であるような L の 1-単体とすると, $|T| - (t)$ も連結である。したがって L は樹木である。L は n 個のみの頂点をもつから, 帰納法の仮定より可縮である。さらに $|L|$ と $|T|$ はホモトピー同値である ($f : |T| \to |L|$ を, $(s) \cup \{v_0\}$ を s のもう一方の頂点に写し, L をそれ自身に写すものとする。$g : |L| \to |T|$ を包含写像とする。このとき $f \cdot g \simeq id_{|L|}$, $g \cdot f \simeq id_{|T|}$ である。)。したがって T は可縮である。□

証明　(定理 5.16)

T の頂点の個数 n に関する帰納法を用いる。$n = 1$ に対しては明らかである。n 個の頂点をもつ樹木に対して定理が正しいと仮定する。T が $n+1$ 個の頂点をもつとする。L を定理 5.14 の証明で得られた樹木とすれば L は n 個の頂点をもち, したがって $\chi(L) = 1$ である。ところが $\alpha_0(T) = \alpha_0(L) + 1$, $\alpha_1(T) = \alpha_1(L) + 1$ である。したがって $\chi(T) = \chi(L) = 1$ である。□

証明　(定理 5.17)

K が樹木ならば $n = 0$ である。したがって定理 5.16 より明らかである。K が樹木でないとき, (s_1) を $|K| - (s_1)$ が連結であるような開 1-単体とする。$K - (s_1)$ が樹木ならばそこで止め, そうでなければ次に (s_2) として $|K| - (s_1) \cup (s_2)$ が連結であるような開 1-単体をとり, これを続けていく。K には有限個の 1-単体しか存在しないから, この操作はいつかは終る。すなわち, ある n に対して $K - \{ (s_1), (s_2), \cdots, (s_n) \}$ は樹木 T である。したがって

$$\chi(K) = \chi(T) - n = 1 - n \qquad \text{すなわち} \qquad n = 1 - \chi(K)$$

である。(以上より, 「K から 1-単体を取り出して樹木をつくる方法は一意的ではないが, 取りだされる 1-単体の個数はその方法に依存しない」ことがわかる。) □

証明　(定理 5.18)

$h_1 \cdot h$ と $h \cdot h_1$ が恒等写像であるような準同型写像

$$h : E(K, v_0) \to F_n, \qquad H_1 : F_n \to E(K, v_0)$$

を構成しよう。そうすれば $E(K, v_0)$ が F_n と同型であることが示され, 定理 5.9 に帰着される。

h の構成　$(s_1), (s_2), \cdots, (s_n)$ $(n = 1 - \chi(K))$ を $T - \{ (s_1), (s_2), \cdots, (s_n) \}$ が樹木であるような K の開 1-単体とする (定理 5.17 を参照)。F_n を生成元 $(s_1), (s_2), \cdots, (s_n)$ をもつ自由群とする。各 $j = 1, 2, \cdots, n$ に対して s_j^{+1} を K の稜 $|v_j v_j'|$ とする。ただし, v_j と v_j' は s_j の頂点である。(ここで, 各 s_j の頂点に対して暗黙のうちにある順序がつけられているとする。) s_j^{-1} を稜 $|v_j' v_j|$ とする。このとき K の各順路は

$$\omega = \rho_1 s_{j_1}^{\varepsilon_1} \rho_2 s_{j_2}^{\varepsilon_2} \rho_3 \cdots \rho_k s_{j_k}^{\varepsilon_k} \rho_{k+1}$$

という形である。ここで, 各 ρ_i は樹木 T の順路である (自明な順路 $|v_{j_i}v_{j_i}|$ も許す)。いま,

$$h(\omega) = (s_{j_1})^{\varepsilon_1}(s_{j_2})^{\varepsilon_2}\cdots(s_{j_k})^{\varepsilon_k}$$

とおく。h が定義可能であることを確かめなければならない。すなわち, $h(\omega)$ が ω の稜同値類のみに依存することをいう。このためには, 「ω_1 と ω_2 が K の順路で, 基本稜同値の違いだけならば $h(\omega_1) = h(\omega_2)$ であること」を示せば十分である。そこで

$$\omega_1 = \sigma|v_1v_2||v_2v_3|\tau, \qquad \omega_2 = \sigma|v_1v_3|\tau$$

とする。ただし σ と τ は K の順路で, v_1, v_2, v_3 は同一の単体の頂点である。K はグラフだから, 2-単体をもたず, $v_1 = v_2 = v_3$, $v_1 = v_2$, $v_2 = v_3$, $v_1 = v_3$ のいずれかである。最初の 3 つの場合のおのおのにおいては, 単体 (v_1, v_2) と (v_2, v_3) の少なくとも 1 つは 0-単体であり, したがって, それは (s_j) ではなく, 他は (v_1, v_3) に等しい。このような最初の 3 つの場合のおのおのにおいて, $h(\omega_1) = h(\omega_2)$ である。第 4 の場合は,

$$\omega_1 = \sigma|v_1v_2||v_2v_1|\tau, \qquad \omega_2 = \sigma|v_1v_1|\tau$$

である。(v_1, v_2) が s_j でなければ明らかに $h(\omega_1) = h(\omega_2)$ である。ある j に対して $(v_1, v_2) = (s_j)$ ならば

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma s_j^{\pm 1} s_j^{\mp 1}\tau \\ h(\omega_1) &= h(\sigma)(s_j)^{\pm 1}(s_j)^{\mp 1}h(\tau) = h(\sigma)eh(\tau) = h(\sigma)h(\tau) = h(\omega_2) \end{aligned}$$

となる。したがって, すべての場合において $h(\omega_1) = h(\omega_2)$ であり, h は定義可能である。明らかに h は準同型である。

h_1 の構成　F_n は自由群だから, 生成元 $(s_j) = (v_j, v'_J)$ 上で h_1 を定義すれば十分である。このためには σ_j を樹木 T の v_0 から v_j への順路, τ_j を T の v_0 から v'_j への順路とし, $h_1((s_j))$ を順路 $\sigma_j s_j^{+1}\tau_j^{-1}$ の稜同値類と定義する。この定義は σ_j に依存しない。なぜならば, v_0 から v_j への T の他の任意の順路は, σ_j に稜同値である (T は定理 5.14 より単連結であるから)。τ_j に関しても同様。h_1 は一意的に準同型写像 $F_n \to E(K, v_0)$ に拡張される。

$h \cdot h_1$ は恒等写像である。なぜならば, F_n の各生成元 (s_j) に対して

$$h \cdot h_1((s_j)) = h(\sigma_j s_j^{+1}\tau_j^{-1}) = (s_j)$$

であるから,

$h_1 \cdot h$ は恒等写像である。なぜならば,

$$\omega = \rho_1 s_{j_1}^{\varepsilon_1}\rho_2 s_{j_2}^{\varepsilon_2}\rho_3\cdots\rho_k s_{j_k}^{\varepsilon_k}\rho_{k+1}$$

が K の順路 (各 ρ_i は樹木 T の順路である) であるならば

$$\begin{aligned} h_1 \cdot h(\omega) &= h_1((s_{j_1})^{\varepsilon_1}(s_{j_2})^{\varepsilon_2}\cdots(s_{j_k})^{\varepsilon_k}) \\ &= (\sigma_{j_1}s_{j_1}^{+1}\tau_{j_1}^{-1})^{\varepsilon_1}(\sigma_{j_2}s_{j_2}^{+1}\tau_{j_2}^{-1})^{\varepsilon_2}\cdots(\sigma_{j_k}s_{j_k}^{+1}\tau_{j_k}^{-1})^{\varepsilon_k} \\ &= \eta_{j_1}s_{j_1}^{\varepsilon_1}\eta'_{j_1}\eta_{j_2}s_{j_2}^{\varepsilon_2}\eta'_{j_2}\cdots\eta_{j_k}s_{j_k}^{\varepsilon_k}\eta'_{j_k} \end{aligned}$$

ただし

$$\eta_{j_i} = \begin{cases} \sigma_{j_i} & \varepsilon_i = 1\,\text{のとき} \\ \tau_{j_i} & \varepsilon_i = -1\,\text{のとき} \end{cases}$$
$$\eta'_{j_i} = \begin{cases} \tau_{j_i}^{-1} & \varepsilon_i = 1\,\text{のとき} \\ \sigma_{j_i}^{-1} & \varepsilon_i = -1\,\text{のとき} \end{cases}$$

である。ところが ω と $(h_1 \cdot h)(\omega)$ を比べるとき ρ_1 と η_{j_1} とは両方とも v_0 から $s_{j_1}^{\varepsilon_1}$ の始点への T の順路であるので, 稜同値である。同様に ρ_2 と $\eta'_{j_1}\eta_{j_2}$ とはどちらも $s_{j_1}^{\varepsilon_1}$ の終点から $s_{j_2}^{\varepsilon_2}$ の始点への T の順路であるので, 稜同値である。よって, 帰納的に $(h_1 \cdot h)(\omega) \overset{E}{\simeq} \omega$ が示される。すなわち $h_1 \cdot h$ は恒等写像である。□

証明　(系 5.19)
K は (したがって $K^{(1)}$ もまた) 弧上連結と仮定してよい。$i : K^{(1)} \to K$ を包含写像とする。このとき

$$i_* : E(K^{(1)}, v_0) \to E(K, v_0)$$

は稜道群の定義より全射である。したがって, 定理 5.9 より

$$i_* : \pi_1(|K^{(1)}|, v_0) \to \pi_1(|K|, v_0)$$

は全射である。$n = 1 - \chi(K^{(1)})$ とする。このとき, $\pi_1(|K^{(1)}|, v_0) = F_n$ である。すなわち, n 個の生成元の自由群であり, したがって

$$i_* : F_n \to \pi_1(|K|, v_0)$$

は全射である。H を i_* の核とすると

$$\pi_1(|K|, v_0) \cong F_n/H$$

である。□

注 12
$E(K^{(1)}, v_0)$ を F_n とみなすと, 部分群 H は, $\rho_1|v_1v_2||v_2v_3||v_3v_1|\rho_2^{-1}$ という形の順路により生成された部分群 (正規部分群) である。ただし, ρ_1 と ρ_2 は v_0 から v_1 への樹木 T の順路であり, かつ (v_1, v_2, v_3) は K の 2-単体である。

証明　(系 5.20)
そのような f が存在したと仮定する。$g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{D}^2$ を包含写像とする。このとき $f \cdot g = id_{\mathbb{S}^1}$ であり, したがって $(f \cdot g)_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ は恒等写像である。ところが, $(f \cdot g)_* = f_* \cdot g_*$ であり, また, $\mathbb{D}^2$ は 1 点にホモトピックであるから, $\pi_1(\mathbb{D}^2, 1) = \{e\}$ である。このとき

$$\mathrm{Im}(f \cdot g)_* = \mathrm{Im}(f_* \cdot g_*) \subset \mathrm{Im}\, f_* = \{e\}$$

で, $(f \cdot g)_*$ は全射だから, $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \{e\}$ となり, 定理 5.18 に矛盾する。□

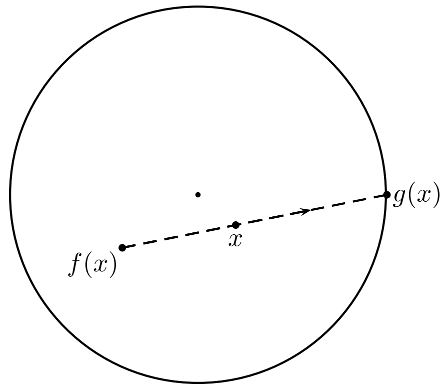

図 22: $\mathbb{D}^2$ から $\mathbb{S}^1$ への写像

証明　(系 5.21)

不動点が存在しないと仮定する。このとき $x \in \mathbb{D}^2$ に対して $f(x) \neq x$ であり, $x - f(x) \neq 0$ ($\mathbb{R}^2$ におけるベクトルの和) である。

$g : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ を次のように定義する。すなわち, 各 $x \in \mathbb{D}^2$ に対して $g(x)$ をベクトル $x - f(x)$ に沿った $\mathbb{S}^1$ の上への $f(x)$ の射影とする (図 22)。

このとき g は連続で, $g|_{\mathbb{S}^1}$ は恒等写像である。これは前の系に反する。□