第 2 章　細分と複体の基本群

3　重心細分

定義 3.1
$v \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。組 (v, A) が **一般の位置にある** (***general position***) とは, $v \notin A$ かつ $a_1 \neq a_2$ に対して $[v, a_1] \cap [v, a_2] = \{v\}$ であることをいう。$[v, a_1]$ は, 閉単体である。

例 3.1　次にあげる平面上の点と集合 (図 9) は一般的な位置にある。

図 9:　一般の位置にある

例 3.2　次の点と集合 (図 10) は一般的な位置に ' ない'。

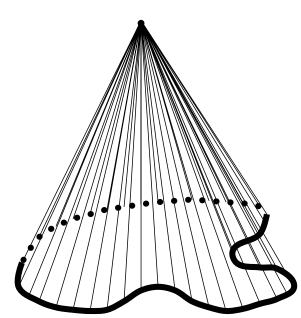
図 10:　一般の位置にない

A が内部も含んだ三角形ならば, (v, A) が一般の位置にあるような点 $v \in \mathbb{R}^2$ はない。

定義 3.2
(v, A) が一般の位置にあるとする。頂点 v と底 A をもつ **錐** (***cone***) あるいは v と A の **結** (***join***) $v * A$ を集合

$$v * A = \bigcup_{a \in A} [v, a]$$

と定義する。



v と A の錐

定理 3.3
$[s]=[v_0,v_1,\cdots,v_k]$ を k-単体とする。$v\in(s)$ とすると, $(v,|s^{k-1}|)$ は一般の位置にあり, $v*[s^{k-1}]=[s]$ である。ここに, s^{k-1} は 複体 $K(s)$ の $(k-1)$-骨格を表している。

証明

問題 3.1 次を示せ。
$[s]=[v_0,v_1,\cdots,v_k]$ とする。$(v,[s])$ が一般の位置にあるための必要十分条件は, $\{v_0,v_1,\cdots,v_k,v\}$ が c-独立であることであり, またそのとき, $v*[s]=[v_0,v_1,\cdots,v_k,v]$ である。

定義 3.4
(s) を k-単体とする。(s) の **重心** (***barycenter***) とは, 重心座標 $(1/(k+1),\cdots,1/(k+1))$ をとる (s) の点をいい, $b(s)$ で表す。すなわち $(s)=(v_0,v_1,\cdots,v_k)$ ならば

$$b(s)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}v_i$$

K を単体的複体とする。K の **細分** (***subdivision***) とは, 次の (1), (2) をみたす単体的複体 K' のことをいう。

(**1**) $|K|=|K'|$

(**2**) $(s)\in K'$ ならば K のある単体 $(t)\in K$ が存在して, $(s)\subset(t)$ となる。

例 3.3
図 11 の 2 列目の各複体は 1 列目の各複体の細分である。 2 列目の 2 番目と 3 番目の複体は同じ点集合をもつが, 互いに他の細分でないことに注意せよ。

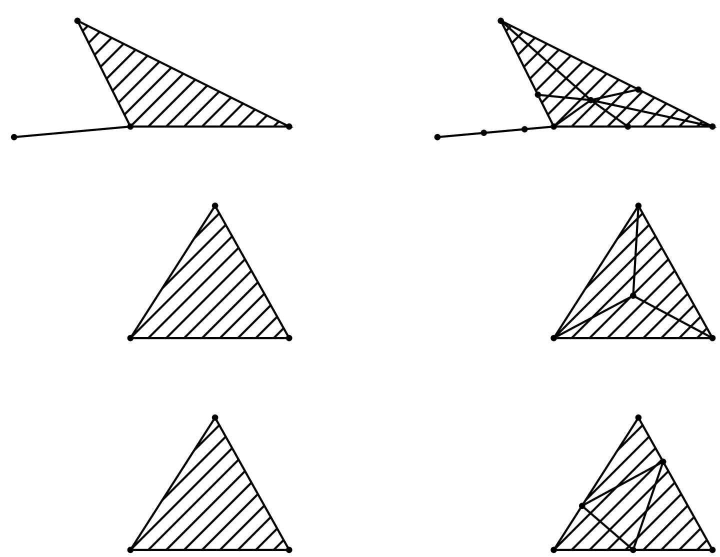


図 11: 細分

定理 3.5
(s) を k-単体, L を $K(\overset{\bullet}{s})$ の細分とする。$v \in (s)$ のとき, $(v, |L|)$ は一般的な位置にある。しかも $v * |L|$ は $\widetilde{L} = L \cup \{\, (t, v)\, ;\, t \in L \,\} \cup \{v\}$ により定義された複体 $\widetilde{L}$ の点集合である (図 12)。ここで,

$$(t) = (v_0, v_1, \cdots, v_r) \in L$$

に対して $(t, v) = (v_0, v_1, \cdots, v_r, v)$ である。複体 $\widetilde{L}$ は $K(s)$ の細分である。

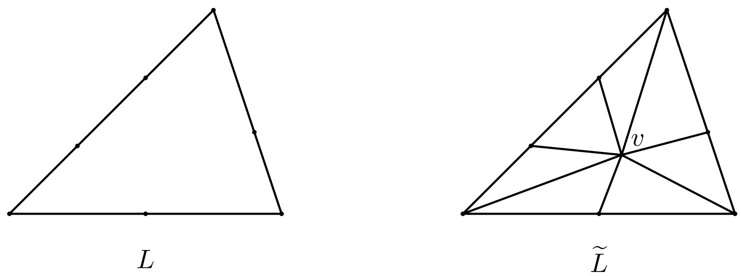


図 12: 定理 3.5

<u>証明</u>
繁雑さを避けるために, 混乱を生じないときは (s) あるいは $[s]$ を s で表すこともある。

定義 3.6
K を単体的複体とする。次のように K 上に半順序 $\prec$ が定義される。

$$(s_1) \prec (s_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (s_1) \text{ は } (s_2) \text{ の辺単体である}$$

記号 $(s_1) \precneqq (s_2)$ は $(s_1) \prec (s_2)$ かつ $(s_1) \neq (s_2)$ を意味する。閉単体でも同じである。

定理 3.7
K を単体的複体とする。

$$K^{[1]} = \{\, (b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_k))\, ;\, s_0 \precneqq s_1 \precneqq \cdots \precneqq s_k,\ s_0, s_1, \cdots, s_k \in K \,\}$$

とすると $K^{[1]}$ は K の細分である。しかも $s_0 \precneqq s_1 \precneqq \cdots \precneqq s_r$ なる各 $s_0, s_1, \cdots, s_r \in K$ に対して $(b(s_0), b(s_1), \cdots, b(s_r)) \subset (s_r)$ である。

注 3　細分 $K^{[1]}$ は K の <u>(**第一**) **重心細分** (***barycentric subdivision***)</u> とよばれる。繰り返し行って得られる

$$K^{[n]} = (((K^{[1]})^{[1]}) \cdots)^{[1]}$$

は K の <u>**第 n 重心細分**</u> といわれる。
<u>証明</u>

定義 3.8
(X, d) を距離空間とする。S を X の部分集合とする。S の **直径 (*diameter*)** diam S を

$$\operatorname{diam} S = \sup_{x_1, x_2 \in S} d(x_1, x_2)$$

と定義する。S がコンパクトならば d の連続性より最大値が存在する。したがって コンパクトのときには次のようにも書ける。

$$\operatorname{diam} S = \max_{x_1, x_2 \in S} d(x_1, x_2)$$

K を $\mathbb{R}^n$ における単体的複体とし, $\mathbb{R}^n$ には普通の距離が与えられているとする。K の **メッシュ(*mesh*)** とは, K の単体の最大の直径のことをいう。すなわち

$$\operatorname{mesh} K = \max_{s \in K} \operatorname{diam}[s]$$

補題 3.9
s が $\mathbb{R}^n$ における単体ならば, s のある頂点 v_1, v_2 に対して diam $[s] = d(v_1, v_2)$ である。また K が単体的複体ならば, K のある単体の頂点 v_1, v_2 が存在して mesh $K = d(v_1, v_2)$ である。

証明

注意 4
s が $\mathbb{R}^n$ における単体ならば, 実は diam $[s]$ = diam (s) である。したがって, K の mesh の定義における単体は開単体でも閉単体でもよいことが分かる。

証明

定理 3.10
K を m 次元の単体的複体とする。このとき

$$\text{mesh } K^{[1]} \leq \frac{m}{m+1} \text{ mesh } K$$

特に, $\lim_{n \to \infty} K^{[n]} = 0$ である。

証明

4 単体近似定理

次のように単体写像 $\varphi : K \to L$ は定義されていた。

K の頂点の集合 $V(K)$ から L の頂点の集合 $V(L)$ への写像 φ であって, 次の性質をみたすとする。K の単体 $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r)$ に対して, $\varphi(v_0)$, $\varphi(v_1)$, $\cdots$, $\varphi(v_r)$ が L の単体をなす。もっと詳しくいうと, $\varphi(v_0)$, $\varphi(v_1)$, $\cdots$, $\varphi(v_r)$ の内 同じものは 1 つにすると, それらが単体を張る, すなわち, それらは c- 独立で, それらによって生成される凸集合から得られる開単体が L の開単体である。

このとき $|K|$ から $|L|$ への写像が次のように定められる。$p \in |K|$ に対して $p \in (s)$, $(s \in K)$ がただ 1 つ存在するので, $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_k)$ とすれば, $p = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in (s)$ と表す時

$$f(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i \varphi(v_i)$$

により定義する。このとき 写像 $f : |K| \to |L|$ は明らかに連続写像である。これを $|\varphi|$ と表す。

定義 4.1 (星状体)
K を単体的複体とし, v を K の頂点とする。v の **星状体** (***star***) とは, 点集合

$$\mathrm{St}\,(v) = \bigcup_{v \in [s], (s) \in K} (s)$$

をいう。

また, (t) を K の単体とする。(t) の **星状体** (***star***) とは, 点集合

$$\mathrm{St}\,(t) = \bigcup_{(t) \prec (s), (s) \in K} (s)$$

をいう。

定理 4.2
K を単体的複体とする。K の頂点 v に対して, $\mathrm{St}(v)$ は v を含む $|K|$ の開集合であり, v は $\mathrm{St}(v)$ に属するただ 1 つの頂点である。$\{\,\mathrm{St}(v)\,\}_{v \in K}$ は $|K|$ の開被覆である。

証明

補題 4.3
K を単体的複体とする。K の頂点 $v_0, v_1, \cdots, v_r$ に対して, $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{r} \mathrm{St}(v_j) \neq \emptyset$ である必要十分条件は, $v_0, v_1, \cdots, v_r$ がある K の単体 (t) の頂点であることである。またこのとき, $v_0, v_1, \cdots, v_r$ によって作られる K の単体を (t_1) とすると, $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{r} \mathrm{St}(v_j) = \mathrm{St}(t_1)$ となる。

問題 4.1
補題 4.3 を示せ。

定義 4.4 (単体近似)
K と L を単体的複体とする。$f : |K| \to |L|$ を連像写像とする。単体写像 $\varphi : K \to L$ が f の **単体近似** (***simplicial aproximation***) であるとは, K の各頂点 v に対して $f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ であることをいう。

定理 4.5
$\varphi : K \to L$ が $f : |K| \to |L|$ の単体近似であるとする。このとき, 任意の $p \in |K|$ に対して $f(p)$ と $|\varphi|(p)$ は L における同一の閉単体に属する。

証明

系 4.6
$\varphi : K \to L$ が $f : |K| \to |L|$ の単体近似であるとき,

$$d(f, |\varphi|) \leq \mathrm{mesh}\, L, \quad \text{ただし}\, d(f, |\varphi|) = \sup_{p \in |K|} d(f(p), |\varphi|(p))$$

定理 4.7
$\varphi : K \to L$ を $f : |K| \to |L|$ の単体近似とする。K_1 を K の部分複体とし, f の K_1 への制限が単体写像であるとする。このとき, f と $|\varphi|$ との間のホモトピーで $|K_1|$ 上不変であるものが存在する。
証明

補題 4.8
$f : K \to L$ が単体写像で, φ が $|f|$ の単体近似ならば, $|\varphi| = |f|$ である。
証明

定理 4.9
$f : |K| \to |L|$ は連続で, $\varphi : K^0 \to L^0$ は頂点写像であるとする。φ が f の単体近似であるための必要十分条件は, すべての $v \in K^0$ に対して $f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ が成り立つことである。
証明

定理 4.10
$f : |K| \to |L|$ を連続写像とする。K_n を $\lim_{n\to\infty} \mathrm{mesh}\, K_n = 0$ なる K の細分の列とする。このとき, 十分大きな n に対して φ が f の単体近似となるような単体写像 $\varphi : K_n \to L$ が存在する。
証明

系 4.11
$f : |K| \to |L|$ を連続写像とする。このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して K の細分 K_n と L の細分 L_m, および $d(f, |\varphi|) < \varepsilon$ であるような f の単体近似 $\varphi : K_n \to L_m$ が存在する。
証明

5 単体的複体の基本群

定義 5.1
K と L を単体的複体とする。2つの単体写像 $\varphi_1, \varphi_2 : K \to L$ が **隣接する** とは 次の性質をみたすものと定義する。
K の (各) 単体 $(v_0, v_1, \cdots, v_k)$ に対し, L の単体 (t) が存在して, $\varphi_1(v_0), \varphi_1(v_1), \cdots, \varphi_1(v_k)$ と $\varphi_2(v_0), \varphi_2(v_1), \cdots, \varphi_2(v_k)$ が (t) の頂点になっている

例 5.1
K を $K(s)$, ただし, $s = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ とし, L を 図 13 のような 3 つの頂点 $\{w_0, w_1, w_2\}$ と 2 つの 1-単体 (w_0, w_1) と (w_1, w_2) をもつ 1 次元複体とする。
単体写像 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : K \to L$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(v_0) = \varphi_1(v_1) = w_0, \quad \varphi_1(v_2) = \varphi_1(v_3) = w_1 \\
&\varphi_2(v_0) = \varphi_2(v_1) = \varphi_2(v_2) = \varphi_2(v_3) = w_1 \\
&\varphi_3(v_0) = w_2, \quad \varphi_3(v_1) = \varphi_3(v_2) = \varphi_3(v_3) = w_1
\end{aligned}$$

φ_1 と φ_2 が隣接し, φ_2 と φ_3 が隣接することは容易にわかる。しかし, φ_1 と φ_3 は隣接しない。したがって, 隣接するという性質は同値関係ではない。

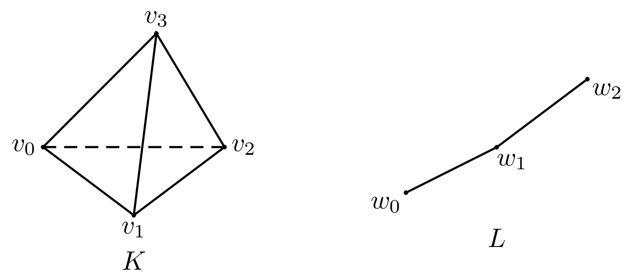


図 13: 隣接する写像

定義 5.2
単体写像 $\varphi, \psi : K \to L$ が <u>**隣接同値である**</u> とは, $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_k = \psi$ で, 各 $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して, φ_i が φ_{i-1} に隣接するような単体写像 $K \to L$ の列 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$ が存在することをいう。この関係を $\overset{C}{\simeq}$ で表す。これは同値関係になる。

定理 5.3
K と L を単体的複体とし, $f : |K| \to |L|$ を連続写像とする。このとき, $\varphi_1, \varphi_2 : K \to L$ がともに f の単体近似であるならば φ_1 と φ_2 は隣接する。
<u>証明</u>

定理 5.4
$\varphi_1, \varphi_2 : K \to L$ を互いに隣接する単体写像とする。このとき, $|\varphi_1|$ と $|\varphi_2|$ はホモトピックである。
<u>証明</u>

系 5.5
隣接同値な単体写像はホモトピックである。

定理 5.6
K を単体的複体とする。$\alpha_0, \alpha_1 : I \to |K|$ を $|K|$ の (中の) 道とする。$\alpha_0 \doteqdot \alpha_1$ ならば, I の細分 I' と単体写像 $\varphi_0, \varphi_1 : I' \to K$ が存在して,
(1) φ_j は α_j $(j = 0, 1)$ の単体近似である。
(2) $\varphi_0 \overset{C}{\simeq} \varphi_1$
が成り立つ。また, 与えられた I の任意の細分に対して, より「細かい」細分 I' を選ぶことができる。
<u>証明</u>

注 5
もっと一般に, K と L が 2 つの単体的複体で,

$$f_0, f_1 : |K| \to |L|$$

がホモトピックな写像ならば, K の細分 K' と, 上の条件 (1), (2) をみたす単体写像 $\varphi_0, \varphi_1 : K' \to L$ が存在する。

これは定理 5.6 の証明を一般化して得られる。

定義 5.7
K を単体的複体とする。K の **稜** とは, K の頂点の順序対 $e = |v_1 v_2|$ で, v_1, v_2 が K のある単体に属するようなものである。v_1 を e の **始点**, v_2 を e の **終点** という。$e = |v_1 v_2|$ ならば 稜 $|v_2 v_1|$ は e^{-1} と表される。K における **順路** とは, 各 $i = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して e_i の終点と e_{i+1} の始点が一致するような K の稜の有限列 $\omega = e_1 e_2 \cdots e_k$ のことである。ω の **始点** を e_1 の始点, ω の **終点** を e_k の終点とする。2 つの順路 $\omega = e_1 e_2 \cdots e_k$, $\tau = e'_1 e'_2 \cdots e'_m$ に対して, ω の終点と τ の始点が等しいときは, **積** $\omega\tau$ が次のように定義される。

$$\omega\tau = e_1 e_2 \cdots e_k e'_1 e'_2 \cdots e'_m$$

順路 $\omega = e_1 e_2 \cdots e_k$ の **逆** とは, 順路

$$e_k^{-1} \cdots e_2^{-1} e_1^{-1}$$

のことである。K の順路全体に対して, 同値関係を次のように定義する。$e = |v_1 v_2|$, $f = |v_2 v_3|$ で, v_1, v_2, v_3 が 1 つの単体の頂点であるとき, 積 ef は, 稜 $|v_1 v_3|$ に **稜同値** であるという。順路 ω にこれを繰り返し用いて順路 τ が得られるとき, ω と τ は **稜同値** であるといい, $\omega \overset{E}{\simeq} \tau$ と表す。

例 5.2
K を図 14 に示す複体とする。このとき

$$|v_0 v_1||v_1 v_2| \overset{E}{\simeq} |v_0 v_2| \overset{E}{\simeq} |v_0 v_3||v_3 v_2|$$

したがって

$$|v_0 v_1||v_1 v_2| \overset{E}{\simeq} |v_0 v_3||v_3 v_2|$$

である。

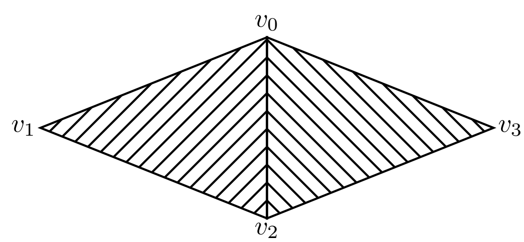


図 14: 稜同値

注 6
稜同値は同値関係である。さらに, ω が始点を v とする順路ならば, $\omega\omega^{-1} \overset{E}{\simeq} |vv|$ である。また $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が 1 つの単体の頂点ならば, $|v_1 v_2||v_2 v_3| \cdots |v_{k-1} v_k| \overset{E}{\simeq} |v_1 v_k|$ である。

定理 5.8
K を単体的複体, v_0 を K の頂点とする。$E(K, v_0)$ を, v_0 を始点および終点とする K の順路の稜同値類の集合とする。このとき, $E(K, v_0)$ は群をなし, 単位元は $|v_0 v_0|$, 積の演算と逆元は上の定義 5.7 で定義したものである。$E(K, v_0)$ は (K, v_0) の **稜道群** とよばれる。

問題 5.1
定理 5.8 を示せ。

注 7
抽象複体 A の稜道群は A の任意の実現に対する稜道群として定義される。

定理 5.9
K を単体的複体, v_0 を K の頂点とする。このとき $E(K, v_0)$ は, $\pi_1(|K|, v_0)$ と同型である。
証明

系 5.10
K を単体的複体とし, $v_0 \in K^{(0)}$ とする。$i : K^{(2)} \to K$ を K の 2-骨格から K への包含写像とすれば, i は同型写像

$$i_* : E(K^{(2)}, v_0) \to E(K, v_0)$$

を引き起こす。その結果, 誘導された写像

$$i_* : \pi_1(|K^{(2)}|, v_0) \to \pi_1(|K|, v_0)$$

は同型写像である。
証明　稜同値の定義は $K^{(2)}$ のみに依存する。

定理 5.11
n-球面 $\mathbb{S}^n$ $(n > 1)$ は単連結である。すなわち, 各 $p \in \mathbb{S}^n$ に対して $\pi_1(\mathbb{S}^n, p) = \{e\}$ である。
証明

定義 5.12
グラフ (*graph*) とは次元 < 2 の単体的複体のことをいう。**樹木 (*tree*)** T とは, 各 1-単体 $s \in T$ に対して, $|T| - (s)$ が連結でないような弧状連結なグラフのことをいう。
グラフの **端点** とは, 高々 1 つの 1-単体の頂点である点をいう。

命題 5.13
任意の樹木は端点をもつ。

問題 5.2　命題 5.13 を示せ。

定理 5.14
任意の樹木は可縮である。
証明

系 5.15
T を樹木とし, v_0 を T の頂点とする。このとき

$$\pi_1(|T|, v_0) = E(T, v_0) = \{e\}$$

注 8
K をグラフとする。α_0 を K の頂点の個数とし, α_1 を 1-単体の個数とする。このとき オイラー数は $\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1$ である。整数 $\chi(K)$ は細分に関して不変である。実際, K の別の頂点を加えると, ある 1-単体は２つの 1-単体に分かれ, α_0 と α_1 は１ずつふえる。一般の複体に対しても実は正しいが (ここでは証明できないが), グラフについては上のように証明できる。

定理 5.16
T を樹木とする。このとき $\chi(T) = 1$ である。
証明

定理 5.17
K を弧状連結なグラフとする。残りの空間が連結であるように取り出される開 1-単体の最大個数を n とする。(n は K における「基本」回路の個数である。) このとき $n = 1 - \chi(K)$ である。
証明

ここで「n 個の生成元をもつ自由群」F_n を定義しておこう。n 個の文字 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ と記号

$$a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1} \quad \text{および} \quad e$$

を考える。これらの文字と記号を任意の順序で — 繰り返しも許して — 有限の長さの列に並べることにより得られる「語 (word)」全体の集合を S とする。２つの語 α と β の「積」$\alpha\beta$ を, α と β を並べることと定義する (β は α のうしろにつけられる)。語の「逆元」は並べ方の順序を逆にし, 同時に α_j を α_j^{-1} に, α_j^{-1} を α_j に, e を e におきかえることにより得られたものと定義する。S の同値関係 $\sim$ を次のように定義する。すなわち $ee \sim e$ であり, すべての j に対して

$$\begin{aligned} &a_j a_j^{-1} \sim e, && a_j^{-1} a_j \sim e, \\ &a_j e \sim a_j, && a_j^{-1} e \sim a_j^{-1}, \\ &e a_j \sim a_j, && e a_j^{-1} \sim a_j^{-1} \end{aligned}$$

さらに, ２つの語が同値 $\sim$ であるとは, 上の「基本」同値関係のいずれかを繰り返し用いて一方から他方が得られることをいう。同値類の集合において, すでに定義した積と逆元を考え, 単位元として e の同値類をとるとそれは群をなす。この群を F_n とする。$a_1, a_2, \cdots, a_n$ をその生成元という。

例 5.3
１つの生成元をもつ自由群は, 整数の群 $\mathbb{Z}$ である。

注 9 $n > 1$ に対して F_n は非可換である。実際, $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \neq e$

注 10
F_n を生成元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ をもつ自由群, G を任意の群とすると, 任意の写像 $h : \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \to G$ は準同型写像 $\widetilde{h} : F_n \to G$ に拡張できる。準同型写像 $\widetilde{h}$ は

$$\widetilde{h}(a_{j_1}^{\pm} a_{j_2}^{\pm} \cdots a_{j_r}^{\pm}) = h(a_{j_1})^{\pm} h(a_{j_2})^{\pm} \cdots h(a_{j_r})^{\pm}$$

により定義される。

さらに, この性質は群 F_n を特徴づける。すなわち, H が n 個の元により生成されていて, これらの生成元から勝手な群の中への任意の写像が群準同型写像に拡張されるならば, H は F_n と同型である。

問題 5.3
上の注 10 を示せ。

定理 5.18
K を弧状連結なグラフとし, v_0 を K の頂点とする。このとき, $\pi_1(|K|, v_0)$ は, $n = 1 - \chi(K)$ 個の生成元をもつ自由群と同型である。

証明

例 5.4
p_1 と p_2 を $\mathbb{R}^2$ の相異なる点とする。このとき, $p \in \mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}$ に対して $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}, p)$ は 2 つの生成元をもつ自由群である。

なぜならば, まず 図 15 のグラフ K を考える。(p_1 と p_2 はグラフの部分にふくまれないことに注意せよ。)

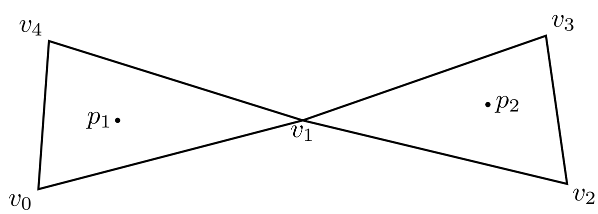


図 15: $\mathbb{R}^2 - \{p_1, p - 2\}$ の基本群

このとき, $\mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}$ と $|K|$ は同じホモトピー型をもつ (実際, 図 16 の射影で定義された写像 $\mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\} \to |K|$ と包含写像 $|K| \to \mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}$ とでホモトピー同型が得られる)。

したがって

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}, p) = \pi_1(|K|, p)$$

となる。ところが, $\chi(K) = 5 - 6 = -1$ であり, $n = 1 - (-1) = 2$ であるから, 定理 5.18 より $\pi_1(|K|, v_0) \cong F_2$ となる。

系 5.19
K を単体的複体とする。このとき, 基本群 $\pi_1(|K|, v_0)$ (v_0 は K の頂点) は「自然な」方法で自由群の商群となる。

証明

例 5.5
次の複体 (トーラス) の基本群を求めてみよう。

トーラスのなす複体 K における 1-骨格 $K^{(1)}$ から, 定理 5.17 における樹木を T とする。T は $\chi(K^{(1)}) = 9 - 27 = -18$ より 定理 5.18 の n は $n = 1 - (-18) = 19$ であることに留意すると, いろいろの取り方があるが例えば次のようにする。

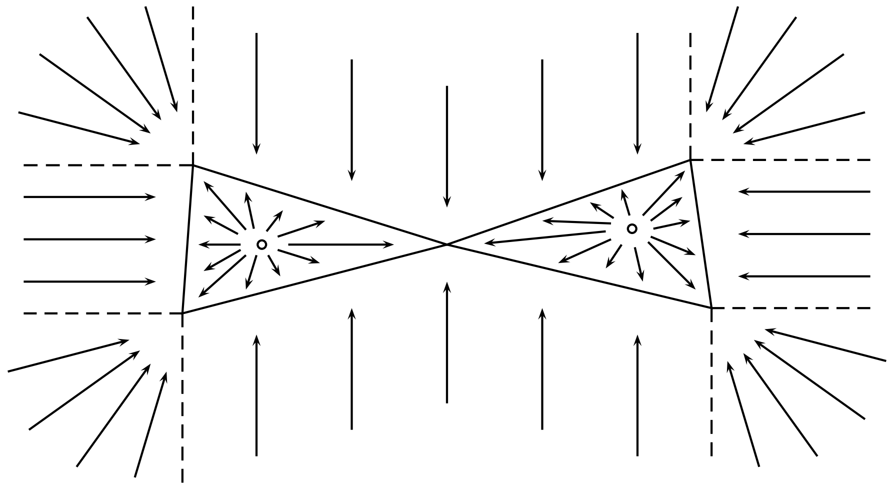
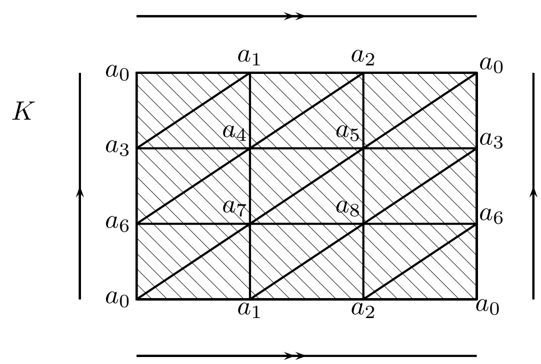
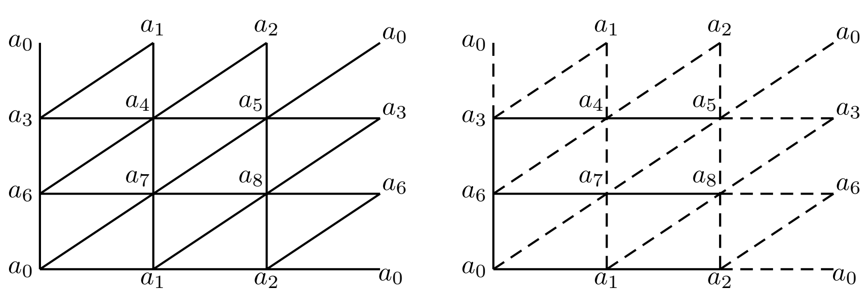


図 16: グラフの基本群



四角形の上辺と下辺左辺と右辺は
同じものである。
したがって 上と下の辺 a_0a_1, 辺 a_1a_2,
辺 a_2a_0 は同じ
左と右の辺 a_0a_3, 辺 a_3a_6, 辺 a_6a_0
は同じ

図 17: トーラスの三角形分割



1-骨格 $K^{(1)}$　　樹木 T

図 18: トーラスの 1-骨格 $K^{(1)}$ とその樹木 T

系 5.20
$\mathbb{D}^2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2+y^2 \le 1 \}$ を $\mathbb{R}^2$ の単位球体とすると，$f|_{\mathbb{S}^1}$ が恒等写像であるような連続写像 $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ は存在しない。

証明

系 5.21 (ブラウアーの不動点定理の特別な場合)
$\mathbb{D}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の単位球体とする。$f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ が連続であれば f は不動点をもつ。すなわち，$f(x) = x$ なる $x \in \mathbb{D}^2$ が存在する。

証明

注 11
これら 2 つの系 5.20 と 系 5.21 は高い次元へ一般化される。

(**1**) n-球体 $\mathbb{D}^n$ ($\mathbb{R}^n$ の閉球体) からその境界 ($(n-1)$-球面 $\mathbb{S}^{n-1}$) の上への連続写像で，$\mathbb{S}^{n-1}$ への制限が恒等写像であるものは存在しない。

(**2**) 閉 n-球体 $\mathbb{D}^n$ からそれ自身の中への任意の連続写像は不動点をもつ。

しかし，$\mathbb{S}^{n-1}$ は $n > 2$ に対して単連結だから，上記の証明は適用できない。証明中の基本群は，別の位相不変量 ($(n-1)$-次ホモロジー群) により置き換えられなければならない。$n = 1$ の場合には $\mathbb{D}^1 = I$ が連結であることから，これらの系が成り立つ。