第1章　複体

1　単体と複体

定義 1.1
V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし, C を V の部分集合とする。C が **凸集合 (*convex*)** であるとは, すべての $t \in I = [0,1]$ に対して

$$c_1, c_2 \in C \text{ ならば } tc_1 + (1-t)c_2 \in C$$

が成り立つことをいう。

定義 1.2
ベクトル空間 V のベクトルの集合 $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ が **凸独立**, あるいは $c-$ **独立** であるとは, 集合 $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \cdots, v_k - v_0\}$ が1次独立であることをいう。この定義はどのベクトルを v_0 にするかにはよらないことに注意せよ。

問題 1.1　上のことを示せ。

例 1.1　$\mathbb{R}^2$ において, $\{v_0, v_1, v_2\}$ が $c-$ 独立であるための必要十分条件は, $\{v_0, v_1, v_2\}$ が 同一直線上にないことである。

定理 1.3
$\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ が $c-$ 独立であるとする。C を $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ で生成された 凸集合とする。すなわち, C を $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ を含む最小の凸集合とする。このとき, C は $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ という形のベクトル全体からなる。ただし, すべての i に対して, $a_i \geq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$ である。さらに, 各 $v \in C$ はこの形で一意的に表せる。

証明　まず 凸集合の共通部分は 凸集合であることに注意すれば, たしかに C は存在する（ C は $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ を含むすべての凸集合の共通部分である)。
いま,

$$C_1 = \left\{ v \;\middle|\; v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i,\ a_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right\}$$

とすると, C_1 は凸である。なぜならば, $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$, $w = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i$ とすれば

$$tv + (1-t)w = \sum_{i=0}^{k} \{ta_i + (1-t)b_i\} v_i$$

かつ

$$\sum_{i=0}^{k} \{ta_i + (1-t)b_i\} = t \sum_{i=0}^{k} a_i + (1-t) \sum_{i=0}^{k} b_i = t + (1-t) = 1$$

したがって C_1 は $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ を含む凸集合である。これより $C_1 \supset C$ である。

逆に $C_1 \subset C$ を証明しよう。帰納法で証明する。たしかに, 1つを除いて他のすべての a_i が 0 であるとき, $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in C$ である。0 でない a_i が高々 n 個あるときは, 常に $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in C$ とする $(n < k+1)$。$\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ が $n+1$ 個の 0 でない a_i をもつとする。(必要ならば番号をつけかえることにより) $a_0, a_1, \cdots, a_n \neq 0$ で, 他のすべてに対しては $a_i = 0$ と仮定してよい。これより

$$\sum_{i=0}^{k} a_i v_i = (1-a_n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i + a_n v_n$$

また

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} = \frac{1}{1-a_n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1}{1-a_n}(1-a_n) = 1$$

であるから, 帰納法の仮定より $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i \in C$ である。C が凸であることから, $t \in I$ に対して

$$t \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i + (1-t) v_n \in C$$

である。ここで $t = 1 - a_n$ とおけば $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in C$。すなわち $C_1 \subset C$。したがって $C_1 = C$ がいえた。

次に一意性を示そう。

$$v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i, \quad \sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} b_i = 1$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i - \left(\sum_{i=0}^{k} (a_i - \sum_{i=0}^{k} b_i \right) v_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)(v_i - v_0). \end{aligned}$$

$\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \cdots, v_k - v_0\}$ が一次独立だから, すべての $i > 0$ に対して $a_i - b_i = 0$ である。したがって明らかに $a_i = b_i$ である。□

定義 1.4
V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。$c-$ 独立なベクトル $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ により生成された凸集合を
<u>(**閉**) $k-$ **単体** (***simplex***)</u> といい, $[v_0 v_1 \cdots v_k]$ と書く。k を単体の <u>**次元** (***dimension***)</u> という。
$v \in [v_0, v_1, \cdots, v_k]$ のとき, $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \left(\text{ただし } a_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right)$ の係数 a_i を v の
<u>**重心座標** (***barycentric coordinate***)</u> という。v に対する a_i を $a_i(v)$ と書く。

例 1.2 $\mathbb{R}^1$ のベクトル $\{v_0, v_1\}$ に対して単体 $[v_0, v_1]$ は閉区間 $[v_0, v_1]$ である。$\{v_0, v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に対して $[v_0, v_1, v_2]$ は頂点 v_0, v_1, v_2 をもつ三角形である。この三角形の重心は重心座標 $(1/3, 1/3, 1/3)$ をもつ点である。$V = \mathbb{R}^n$ に対して, 単体 $[v_0, v_1, \cdots, v_k]$ は相対位相でコンパクト距離空間 (閉かつ有界) である。実際, 重心座標を用いると, $[v_0, v_1, \cdots, v_k]$ は k 個の単位区間の積に同相であることが容易にわかる。しかし, この同相写像は等距離写像ではない。

定義 1.5
V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。$\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ を $c-$ 独立な集合とする。集合

$$\{\, v \in [v_0, v_1, \cdots, v_k]\,;\, a_i(v) > 0, i = 0, 1, \cdots, k \,\}$$

を **(開) $k-$ 単体** といい, $(v_0, v_1, \cdots, v_k)$ と書く。また, 開単体を (s) とも書き, 対応する閉単体を $[s]$ と書く。

$[s] = [v_0, v_1, \cdots, v_k]$ を閉単体とする。点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ を $[s]$ の **頂点 (*vertex*)** という。また閉単体 $[t] = [v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_s}]$ ($\{v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_s}$ は $\{0, 1, \cdots, k\}$ の空でない部分集合) を $[s]$ の **閉辺単体 (*face*)** といい, 開単体 $(t) = (v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_s})$ を $[s]$ の (あるいは (s) の) **開辺単体 (*face*)** といい, $[t] \prec [s]$, $(t) \prec [s]$, $(t) \prec (s)$ などと書く。 開辺単体, 閉辺単体 をまとめて, **辺単体 (*face*)** という。閉辺単体であって自分自身でないもの $(\neq [s])$ を **真の (*proper*) 閉辺単体** といい, $[t] \precneqq [s]$ の様に書く。真の開辺単体も同様に定義される。同様に真の辺単体ということもある。

注意 1　(**1**) 1 つの頂点は 0 次元閉辺単体である。それはまた開辺単体でもある。

(**2**) 開単体 (s) は, 閉単体 $[s]$ の開集合である。その閉包は $[s]$ である。

(**3**) 閉単体 $[s]$ は, その開辺単体の和集合である。

(**4**) 単体の異なる開辺単体は互いに交わらない。

(**5**) 開単体 (s) は, 閉単体 $[s]$ の内部である。すなわち, 閉単体から真の開辺単体を引いたものである。

(**6**) 定義から容易に分かるように, 単体において頂点の順序は関係しない。すなわち $[v_0, v_1, v_2]$ と $[v_1, v_0, v_2]$ は同じものである。

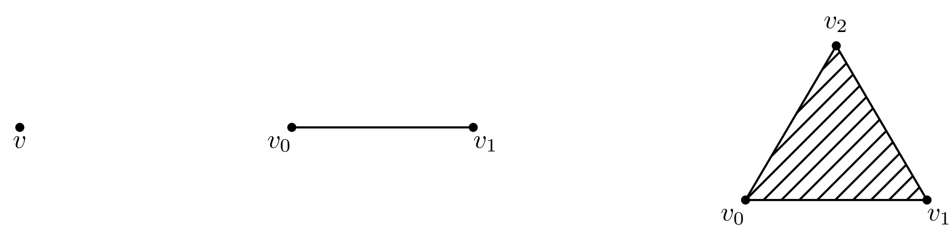


図 1: 単体

定義 1.6
n 次元ユークリッド空間内の有限個の開単体からなる集合 K が次の性質をもつとき, K を **(ユークリッド的) 単体的複体 (simplicial complex)**, または, 単に **複体 (complex)** という。

(**1**) $(s) \in K$, 　$(t) \prec (s)$ ならば $(t) \in K$

(2) $(s), (t) \in K$ で $(s) \cap (t) \neq \emptyset$ ならば $(s) = (t)$

K に含まれる 1 番大きい次元の単体の次元 r を, 複体 K の **次元 (dimension)** といい $\dim K$ で表す。このとき K を r **次元複体 (r-dimensional complex)** という。

例 1.3

次の図 2 は単体的複体の例である。

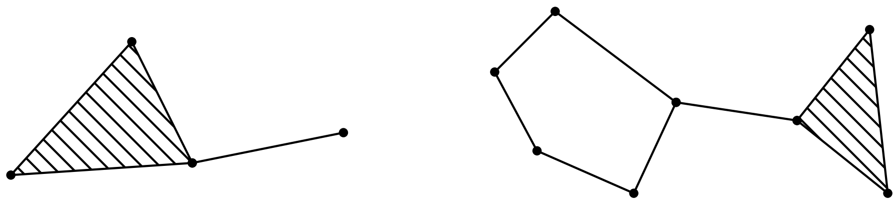


図 2: 複体

また, 次の図 3 は単体的複体ではない。

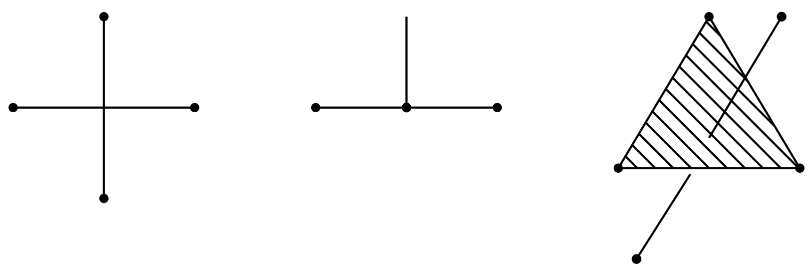


図 3: 複体でない例

しかし, 単体をいくつか付け加えることにより, 図 3 の点集合を複体にすることができる (図 4)。

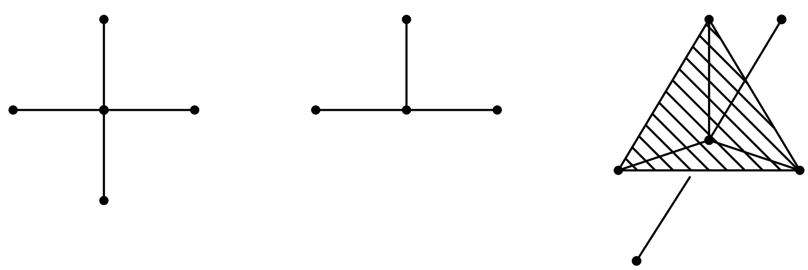


図 4: 複体に

例 1.4

単体 (s) に対して, (s) の 辺単体全てからなる集合

$$\{\ (t)\ ;\ (t) \prec (s)\ \}$$

は明らかに 複体をなすが, これを $K(s)$ と表す。また (s) の 真の辺単体全てからなる集合

$$\{\ (t)\ ;\ (t) \precneqq (s)\ \} = K(s) - \{\ (s)\ \}$$

も 複体をなすが, これを $K(\overset{\bullet}{s})$ あるいは $K(\partial s)$ と表す。ただし, s が 0 単体のときは $K(\overset{\bullet}{s}) = \emptyset$ とみなす。

定義 1.7
n 次元複体 K において, i 単体の数を λ_i とするとき,

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda_i$$

を K の **オイラー標数 (Euler characteristic)** という。

命題 1.8
(s) を r-単体とすると,

$$\chi(K(s)) = 1\ ,\ \chi(K(\overset{\bullet}{s})) = 1 - (-1)^r$$

複体 K を点集合 ($\mathbb{R}^n$ の部分空間) とみたとき, 多面体という。すなわち,

定義 1.9 多面体 (polyhedron)

$$|K| = \bigcup_{(s)\in K} (s) = \bigcup_{(s)\in K} [s]$$

のことを, **多面体 (polyhedron)** という。明らかに $|K|$ はコンパクトである。また 点集合 $X = |K|$ は **三角形分割 (triangulation)** K をもつ という。あるいは X は **三角形分割可能 (trianglable)** という。

ここで, よく使われる重要な補題を挙げておこう。

補題 1.10
$\forall x \in |K|$ に対して, $x \in (s)$ をみたす K の元 (単体) $(s) \in K$ がただ一つ存在する。
すなわち, $\exists!(s) \in K\ ;\ x \in (s)$ である。

ここでは開単体の集まりとして単体的複体を定義したが, 閉単体の集まりとして単体的複体を定義している文献もある。それは, 次のように述べられる。

定義 1.11
n 次元ユークリッド空間内の有限個の閉単体からなる集合 K が次の性質をもつとき, K を **(ユークリッド的) 単体的複体 (simplicial complex)**, または, 単に **複体 (complex)** という。

(1) $[s] \in K, \quad [t] \prec [s]$ ならば $[t] \in K$

(2) $[s], [t] \in K$ で $[s] \cap [t] \neq \emptyset$ ならば, $[s] \cap [t] \prec [s]$ かつ $[s] \cap [t] \prec [t]$

問題 1.2
２つの単体的複体の定義 1.6 と 1.11 が本質的に同値 (どちらからでももう一方が定義できること) を示せ。

さて, r-単体の向きを定義しておこう。今までは r-単体 $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r)$ というときは, 頂点の順序は関係しなかった。2-単体 $(s) = (v_0, v_1, v_2)$ と (v_1, v_0, v_2) は同じ単体 (s) であった。ここで 2-単体なら裏表, 1-単体なら線分の向き, 3-単体なら右手系か左手系か, を表すものを次のように定める。

定義 1.12
r-単体 $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r)$ の **向き (orientation)** とは, 頂点の順列を定めることをいう。またこのとき $r+1$ 個の元の置換に対して偶置換で移った順列は同じ方向をもつと考える。奇置換で移った順列は反対の方向をもつと考える。これによって頂点の順列は二つに分かれる。向きの定まった単体のことを **向きの付いた単体 (oriented simplex)** といい, $\langle v_0, v_1, \cdots, v_r \rangle$ と表す。向きづけられた単体も (s) または s で表すことが多い。また $\langle s \rangle$ と書くこともある。
複体 K の全ての単体に向きがあたえられているとき, K を **向きの付いた複体** という。
向き付け可能 (orientable) という言葉とは異なるものである。そのとき (向き付け可能のとき), 向き付け可能になるように各単体に向きを与えることを, 向き付けられた (oriented) という使い方をする。 これとは異なるものであるが, ここでは便宜上 この言葉を使う。

例 1.5
1-単体 (v_0, v_1) では 頂点の順列は (v_0, v_1), (v_1, v_0) の２つのみであり, (v_0, v_1) は二つの異なる向き $\langle v_0, v_1 \rangle$, $\langle v_1, v_0 \rangle$ をもつ。これは図形でいえば, 図 5 の矢印と考えられる。
2-単体 (v_0, v_1, v_2) に対しては,

$$(v_0, v_1, v_2) \quad \sim \quad (v_1, v_2, v_0) \quad \sim \quad (v_2, v_0, v_1),$$
$$(v_0, v_2, v_1) \quad \sim \quad (v_1, v_0, v_2) \quad \sim \quad (v_2, v_1, v_0)$$

で, (v_0, v_1, v_2) は 二つの異なる向き $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$, $\langle v_0, v_2, v_1 \rangle$ をもつ。これは図形でいえば, 図 5 の矢印と考えられる。

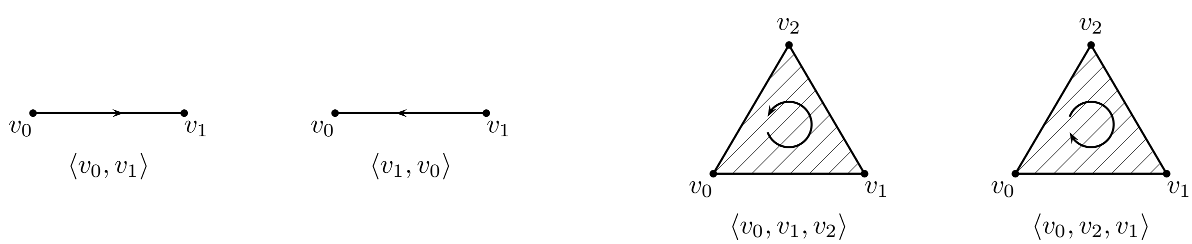


図 5: 単体の向き

2 部分複体, 抽象複体, 単体写像

定義 2.1
複体 K に対して, その部分集合で複体をなすものを, **部分複体 (subcomplex)** という。

命題 2.2
複体 K の部分集合 L が K の部分複体である必要十分条件は

$$(s) \in L \text{ で } \quad (t) \prec (s) \text{ ならば } (t) \in L \tag{2.1}$$

をみたすことである。

定義 2.3
複体 K において, (s) を 真の面とする K の単体が存在しないとき, (s) は **主な単体 (principal simplex)** という。

命題 2.4
(s) を, 複体 K の 主な単体 (principal simplex) とするとき, $K - \{\ (s)\ \}$ は K の部分複体である。

定義 2.5
複体 K の m 次元以下の単体すべての集合は, 部分複体をなすが, これを **m-骨格 (skelton)**, または **m-切片** といい, $K^{(m)}$ で表す。

命題 2.6
L を 複体 K の部分複体とするとき, $|L| = \bigcup_{\sigma \in L} [\sigma]$ であり, $|K| - |L|$ は $|K|$ で開集合である。

ここで, 今まで考えてきた $\mathbb{R}^n$ の中の図形である単体的複体を抽象化した複体, 抽象複体を定義しよう。

定義 2.7
有限集合 V があたえられたとき, V の部分集合の族 (集まり) $\mathcal{K}$ で

(0) $v \in V \Rightarrow \{v\} \in \mathcal{K}$
(1) $A \in \mathcal{K},\, B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$

をみたすとき, $(\mathcal{K}, V)$ あるいは $\mathcal{K}$ を **抽象複体 (abstruct complex)** といい, V の元を ($\mathcal{K}$ の) 頂点, $\mathcal{K}$ の元を単体と言う。

単体的複体 K は K の頂点全ての集合を V, K の単体 σ の頂点の集合を $\mathcal{K}$ の元とすれば, ($\mathcal{K}$ は) 抽象複体である。この作り方を, **単体的複体の抽象化** という。

ここで 二つの抽象複体が同型ということを次のように定義する。

定義 2.8
$(\mathcal{K}, V)$, $(\mathcal{K}', V')$ を二つの抽象複体とするとき, V から V' への全単射 $\varphi : V \ \to\ V'$ が存在して,

$\{v_0, v_1, \cdots, v_s\} \in \mathcal{K}$ ならば, $\{\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_s)\} \in \mathcal{K}'$
$\{v'_0, v'_1, \cdots, v'_t\} \in \mathcal{K}'$ ならば, $\{\varphi^{-1}(v'_0), \varphi^{-1}(v'_1), \cdots, \varphi^{-1}(v'_t)\} \in \mathcal{K}$

であるとき, 抽象複体 $(\mathcal{K}, V)$ と $(\mathcal{K}', V')$ は **同型である** という。

単体的複体 K から抽象的複体 $\mathcal{K}$ は上のように作られるが, 逆に抽象的複体 $(\mathcal{K}, V)$ があたえられたとき, $\mathcal{K}$ に同型な単体的複体 K ($\mathbb{R}^n$ の図形) を実現することを考えよう。

V の元の数を t とするとき, t より大きい n をとり, $\mathbb{R}^n$ に, (独立である) t 個の点 $a_1, a_2, \cdots, a_t$ をとる。例えば, i 番目だけ 1 である

$$a_i = (0, 0, \cdots, \overset{i\text{番目}}{1}, 0, \cdots, 0)$$

をとる。そして, $\mathcal{K}$ の元 $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_q}\}$ を, $\mathbb{R}^n$ の q-単体 $a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_q}$ に対応させる。このようにして, $\mathcal{K}$ の元からえられる単体を全て集めたものを K とすると, K は (単体的) 複体である。
このようにして作られた複体 K より, 再び抽象複体 $(\overline{\mathcal{K}}, \overline{V})$ を単体的複体の抽象化によって作ると, 明らかに, $(\mathcal{K}, V)$ と同型である。このように $(\mathcal{K}, V)$ と $(\overline{\mathcal{K}}, \overline{V})$ が同型である複体 K を $(\mathcal{K}, V)$ の **幾何学的実現 (geometric representation)** という。

複体 K と L が与えられたとき, K から L への写像は次のように定める。

定義 2.9
K の頂点の集合 $V(K)$ から L の頂点の集合 $V(L)$ への写像 f であって, 次の性質をみたすとする。
K の単体 $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r)$ に対して, $f(v_0)$, $f(v_1)$, $\cdots$, $f(v_r)$ が L の単体をなす。もっと詳しくいうと, $f(v_0)$, $f(v_1)$, $\cdots$, $f(v_r)$ の内 同じものは 1 つにすると, それらが単体を張る, すなわち, それらは c-独立で, それらによって生成される凸集合から得られる開単体が L の開単体である。このとき, f は K から L への **単体写像 (simplicial map)** といい, $f : K \to L$ と表す。

注 2

(1) 上でも述べたが $f(v_0)$, $f(v_1)$, $\cdots$, $f(v_r)$ が全て異なる点であることは要求していない。 すなわち同じ点があってもいいので, 張られる単体は r 次元とは限らない。

(2) f は K から L への写像ではないが, K の単体 $(s) = (v_0, v_1, \cdots, v_r)$ に対して $f(v_0)$, $f(v_1)$, $\cdots$, $f(v_r)$ の内 同じものは 1 つにすると, L の単体 (t) を張るので, (s) が (t) に対応していると思えるので, $f : K \to L$ という書き方をし, しかも

$$(s') \prec (s) \ ((s) \in K) \text{ ならば } f((s')) \prec f((s))$$

をみたす。

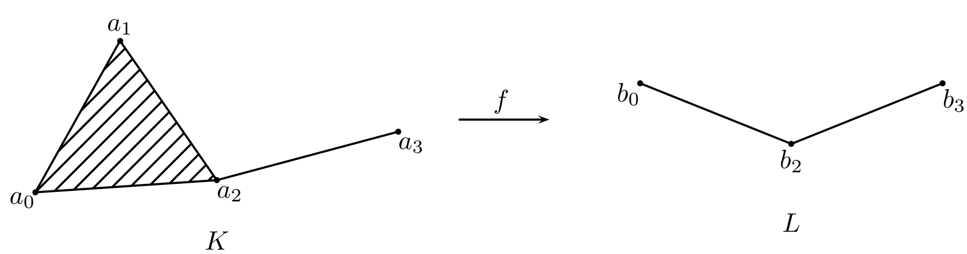


図 6: 単体写像

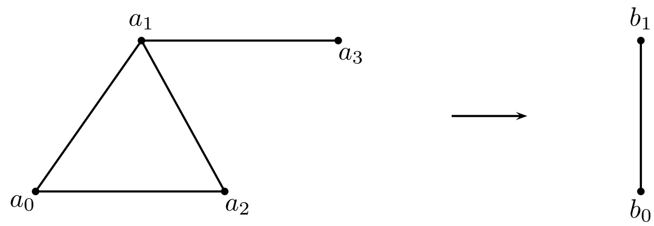
例 2.1 単体写像の例として, $K = \{ (a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_0, a_2), (a_2, a_3), (a_0), (a_1), (a_2), (a_3) \}$ と $L = \{ (b_0, b_2), (b_2, b_3), (b_0), (b_2), (b_3) \}$ を考え, f を

$$f(a_0) = f(a_1) = b_0, \quad f(a_2) = b_2, \quad f(a_3) = b_3$$

とすれば, $f : K \to L$ は単体写像である。そして K の単体は次のように移る。

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} (a_0, a_1, a_2) & \to & (b_0, b_2), & (a_0, a_1) & \to & (b_0), \\ (a_0, a_2) & \to & (b_0, b_2), & (a_1, a_2) & \to & (b_0, b_2), \\ (a_2, a_3) & \to & (b_2, b_3) & & & \end{array}\right.$$

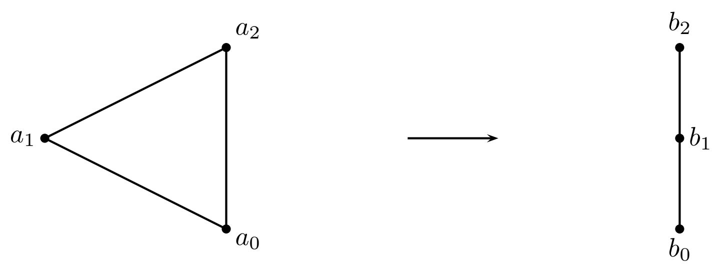
例 2.2　次の図 7 における射影は単体写像である。



$$f(a_0) = f(a_2) = b_0, \quad f(a_1) = f(a_3) = b_1$$

図 7:　単体写像

しかし, 次の図 8 における射影は単体写像ではない。



$$f(a_0) = b_0, \quad f(a_1) = b_1, \quad f(a_2) = b_2$$

図 8:　単体写像でない