2008年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第7回

6月3日 清野和彦

6.2 テイラーの定理と極大極小：1変数関数の場合

実は、1変数関数に関しては、高校のとき既に $f'(a) = 0$ を満たす点 a が極大点や極小点であるかどうかを関数の増減を（少なくとも見た目には）使わずに判定する一つの**十分条件**を学んでいます。それは、**2階微分**を使う方法です。

$$f''(a) > 0 \text{ ならば極大、} f''(a) < 0 \text{ ならば極小}$$

というものです。十分条件でしかない理由は、$f''(a) = 0$ のとき「極大・極小」のどちらも起こりうるからです。例えば $f(x) = x^4, -x^4$ における $x = 0$ がそれぞれの例です。また、$f'(a) = 0$ でも $f''(a) = 0$ だと極値を取らない場合もあることは、$f(x) = x^3$ における $x = 0$ などで皆さんもよくご存知の通りです。（図1。） こ

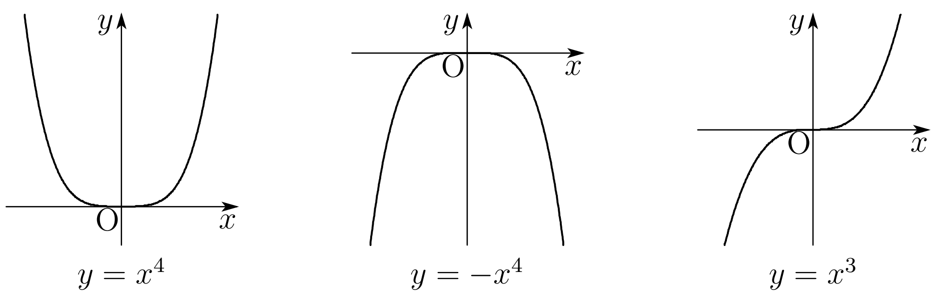

図1: $f''(a) \neq 0$ は $x = a$ で極値を取るための必要条件ではない。上図はすべて $f'(0) = f''(0) = 0$ だが、$y = x^4$ では極小、$y = -x^4$ では極大である。また、$y = x^3$ のように $f'(0) = f''(0) = 0$ でも極大や極小にならない例もあるので、「$f'(a) = 0$ ならば極値を取る」も成り立たない。

のように、2階微分の値を見て極大極小を判定する方法は、$f'(a) = f''(a) = 0$ となる a にだけは適用できないのですが、しかし、f' が0の場所で f'' まで0というのはかなり特殊です。例えば f が多項式の場合、$f'(a) = f''(a) = 0$ というのは $f'(x) = 0$ という方程式が a を重根に持つということです。しかし、係数をほんの少し変えると重根は二つの単根に分かれてしまうので、$f'(a) = f''(a) = 0$ は係数を適当に決めた多項式ではほとんど起こり得ません。このように、f'' の正負で極大極小を判定できない場合はとても少ないので、十分条件ではあるけれどもこの条件を2変数関数の場合に拡張することができればいいじゃないか、と考えることにしましょう。

ところが、高校でこの条件を導くときタブーを使ってしまっているのです。例えば「$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば極小」をどうやって導いたかを思い出してみましょう。

> $f''(a)=(f')'(a)>0$ なので、(f が C^2 級、つまり f'' が連続なら、) $f'(x)$ は a の近くで増加している。今 $f'(a)=0$ なのだから、$a-r<x<a$ ならば $f'(x)<0$、すなわち $f(x)$ は減少、$a<x<a+r$ ならば $f'(x)>0$、すなわち $f(x)$ は増加の成り立つ正実数 r が存在する。よって、$x=a$ で f は減少から増加に転じているので極小である。 □

後半で「$f'>0$ なら f は増加」などを使っているところは、高校での極小の定義である「減少から増加に転じる点」に持ち込むためなので仕方がないとも言えるのですが、問題は

$$f''(a)>0 \text{ だから } f'(x) \text{ は } a \text{ の近くで増加}$$

の部分です。もし 2 変数関数の 2 階微分に当たるものが然るべく定義できたとしても、この部分の議論は適用できないことになってしまいます。

詰まるところ、視点を変えなければダメなわけです。ではどのように視点を変えるか、というと

1 次近似よりもよい近似を使う

というのが標語としての答です。

> 微分の値が 0 でなければ 1 次近似で関数の増減がよく近似できていたのに、微分の値が 0 だと 1 次近似からでは「極大・極小・どちらでもない」の情報が取り出せないので、もっとよい近似が必要なのだ

と考えようというわけです。なぜ「もっとよい近似が必要」と考えるのかをグラフで説明してみましょう。例えば微分の値が正の点では、関数のグラフがその点における接線の上側にあろうが下側にあろうが交叉していようがとにかく増加はしています(図 2 の $f(x)$)。このように「増加か減少か」という問に答えるためには、そこでのグラフの「曲がり具合」は必要ありません。しかし、微分の値が 0 の点では、グラフが接線より上にあるなら極小、下にあるなら極大、交叉しているならどちらでもない、というように、グラフの近似として接線を使ったのでは情報が足りない、つまり「似ている度合いが少ない」のです(図 2 の $g(x)$)。 そこで「もっとよい近似」、すなわち

> **接線より元の関数によく似ているが、接線のように様子がよく分かる曲線(をグラフに持つ関数)**

が欲しい、となるわけです。

では、「もっとよい近似」とは何か? それを説明しましょう。

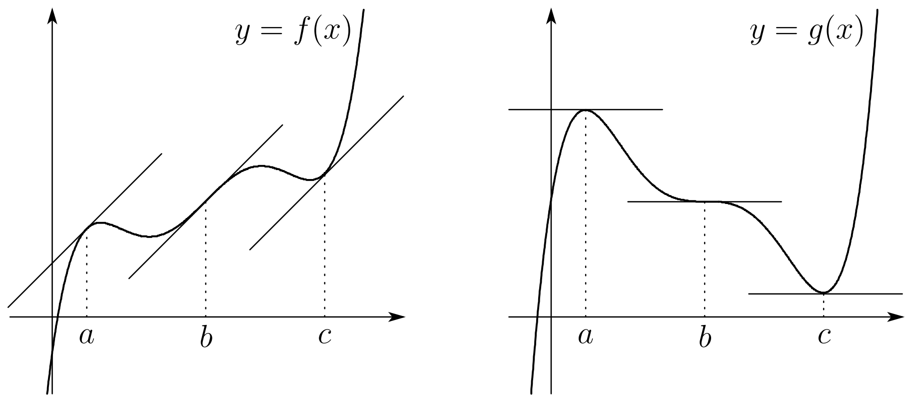

図 2: $f(x)$ は $x = a, b, c$ の近くですべて接線と同様に増加しているが、$g(x)$ は $x = a$ で極大、$x = c$ で極小、$x = b$ ではどちらでもないというように、接線では「似方」が足りない。

6.2.1　テイラー近似多項式

「そもそも 1 次近似とは何であったか」を「もっとよい近似」につながっていくように心がけながら振り返ってみましょう。

そもそも関数は「変数の値を決めたときの値」というものでした。だから、

x が a に近ければ $f(x)$ の値は $f(a)$ に近い

という条件、すなわち「$f(x)$ は $x = a$ で連続」という条件が成り立っていれば、$f(a)$ という値は a の近くにおける $f(x)$ の近似値として利用できるでしょう。これが（ここで言うところの）「近似」という概念の始まりです。このことを、「値」ではなく「関数」を使って（無理矢理）述べ直すと、

> f が $x = a$ で連続ならば、$f(a)$ という**定数関数（0 次式）**は $x = a$ の近くで元の関数 $f(x)$ の近似である。

となります。このことを

連続関数においては、$f(a)$ は $x = a$ における 0 次近似である

と言います。

さて、「知りたいもの」と「その近似」が手には入ったら、次にすべきことは「誤差」を調べることです。今の場合、誤差とは $f(x) - f(a)$ のことです。しかし、これを直接調べることは知りたい関数 $f(x)$ そのものを調べるのと同じですから何の工夫もなしではどうにもなりません。そこで出てくる工夫が「極限を考える」ということです。とはいえ $f(x)$ は $x = a$ で連続なので、ただ極限を取っても

$$f(x) - f(a) \xrightarrow{x \to a} 0$$

と 0 になってしまって何も情報が得られません。そこで、$x \to a$ になる代表的な関数 $x-a$ との**比**の極限を取ってみるわけです（差を取っても 0 になるだけですから）。そのようにして得られる「誤差情報」が微分係数

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} f'(a)$$

だったのです。

さて、我々は $f(x)$ を近似する関数という視点からものを見ようとしているわけですから、$f'(a)$ という値そのものではなく、それと同じ情報を持つ関数に直したいところです。そのために、微分係数の定義式で分母を払った式

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0 \tag{1}$$

の分子の $f(x)$ 以外の部分をまとめた式

$$f(a)+f'(a)(x-a)$$

がそのような近似関数だと考えられるでしょう。これが 1 次近似でした。

このような道筋で考えると、1 次近似とは 0 次近似と元の関数の誤差を見積もろうとして出てきたものなので、0 次近似では捉えられなかったなにがしかの情報を捉えていると考えられます。だから、1 次近似は 0 次近似より「もっとよい近似」になっていると言ってよいでしょう。だから、上のまねをして 1 次近似と元の関数の誤差を見積もってやれば 1 次近似より「もっとよい近似」を得ることができそうに思えます。それを実行してみましょう。

さて、1 次近似と $f(x)$ との誤差を調べたいのですが、式(1) で分かるように $f(x)$ との差は $x-a$ で割っても 0 に収束してしまって情報がありません。そこで、$x \to a$ のとき a となる関数として $x-a$ ではなく $(x-a)^2$ を採用して比の極限を考えてみることにしましょう。つまり、

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \xrightarrow{x\to a} \ ? \tag{2}$$

の収束先です。これは分母が $x-a$ ではないので微分の定義式ではなく、そのままでは我々の知識を越えています。しかし、微分の定義式に似てはいるので、「微分をいじるための道具」の中からこれに適用できるように拡張できそうなものを探してみましょう。

とは言っても、「微分をいじるための道具」（計算のための道具ではないですよ）なんて前節で使った**平均値の定理**以外何も持っていません。だから、上の極限の式(2) の左辺に適用できるように平均値の定理を拡張することを考えてみましょう。

平均値の定理の左辺は微分の定義式の極限を取る前の式 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ と全く同じです。一方式(2) の場合、分母が $x-a$ でなく $(x-a)^2$ となってしまっていることが難点です。そこで、平均値の定理の左辺の分母を $x-a$ に限らず勝手な関数 $g(x)-g(a)$

に置き換えることはできないかと考えてみます。その後で、$g(x) = (x-a)^2$ としてみようというわけです。すると、

$$\frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} \tag{3}$$

という式になります。（上で議論中の関数 $f(x)$ と混ざらないように、分子の関数を $h(x)$ としました。）x と書くといかにも変数っぽいので、ここでは考えていることをハッキリさせるために x をやめて b と書き直すことにしましょう。すると、平均値の定理の左辺

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$

は

> x が a から b までの変化したときの（x の変化に対する）h の変化の変化率

と解釈されます。だから、我々の扱いたい値(3)（で $x = b$ 賭したもの）は、

> x が a から b までの変化したときの g **の変化に対する** h **の変化の変化率**

となるでしょう。このような変化率は xy 平面に $x = g(t), y = h(t)$ で決まる**パラメタ曲線（点の運動）**を考えると自然に出てきます。（xy 平面で x を使いたいので g と h の変数を t に書き換えました。）図 3 を見てください。 この図を見ると、

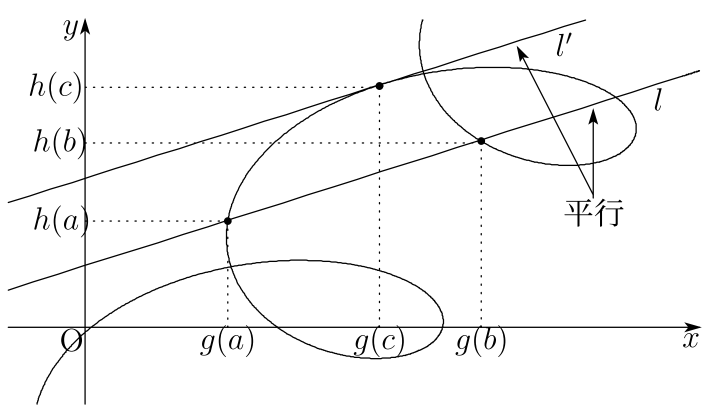

図 3: コーシーの平均値定理の図形的意味。

$$\frac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)}$$

という値は、

曲線上の 2 点 $(g(a), h(a))$ と $(g(b), h(b))$ を結ぶ直線 l の傾き

と解釈できます。一方、普通の平均値の定理のときと全く同様に、直線 l を平行移動していくとどこかで曲線の接線 l' になることが（直観的には）分かります。そのときの接点における t の値を c としましょう。すると、l' の傾きは

$$\frac{h'(c)}{g'(c)}$$

です。なぜなら、パラメタ曲線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$ の $t = c$ における接線 l' は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(c) \\ h(c) \end{bmatrix} + (t-c) \begin{bmatrix} g'(c) \\ h'(c) \end{bmatrix}$$

とベクトル表示されるので、傾き、つまり y 成分の増加を x 成分の増加で割ったものは

$$\frac{h'(c)}{g'(c)}$$

になるからです。

そして、l と l' は平行なのですから、この二つの傾きは等しくなります。というわけで、図形的直観を利用してしまいましたが、次の定理が得られました。

定理 5. $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能な二つの関数 $h(x),\ g(x)$ に対し、$g(a) \neq g(b)$ であり h' と g' は同時には 0 にならないとすると、

$$\frac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{h'(c)}{g'(c)}$$

の成り立つ c が (a, b) に存在する。

最初に書いてある条件は分母が 0 にならないようにするためのものです。

$g(x) = x$ のときが普通の平均値の定理なので、この定理はその拡張になっています。発見者にちなんで**コーシーの平均値定理**という名前が付いています。

注意. h に対する平均値の定理の結論を g に対する平均値の定理の結論で割ればコーシーの平均値定理になるのではないか、と思ってしまうかも知れませんが、そうはいきません。なぜなら、

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(c)$$

の c と

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

の c は（一般には）違う値なので、上を c_1、下を c_2 と書くと、得られる結論は

$$\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}\frac{b-a}{g(b)-g(a)} = \frac{h'(c_1)}{g'(c_2)}$$

となってしまうのです。右辺の変数の値を共通の c に取れるというところが、コーシーの平均値定理の普通の平均値定理を本当に拡張したものになっている部分なのです。★

問題 19. $h(t) = t^3$, $g(t) = t^2$ とする。

$$\frac{h(3)-h(0)}{3} = h'(c_1), \quad \frac{g(3)-g(0)}{3} = g'(c_2), \quad \frac{h(3)-h(0)}{g(3)-g(0)} = \frac{h'(c)}{g'(c)}$$

を満たす 0 と 3 の間の数 c_1, c_2, c を求めよ。

問題 20. $h(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$, $0 \leq a < b \leq 2\pi$, $g(a) \neq g(b)$ のとき、

$$\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{h'(c)}{g'(c)}$$

を満たす a と b の間の c を（直観的に）求めよ。

さて、我々が本当に欲しかったのは、コーシーの平均値定理の左辺で $b \to a$ の極限を取ったものでした。c は a と b の間にあるので、$b \to a$ とすると $c \to a$ となります。よって、次の**ロピタルの定理**が得られます。

定理 6. $[a, b)$ で連続で (a, b) で微分可能な二つの関数 $h(x)$, $g(x)$ に対し、(a, b) 内の任意の x に対して $g(x) \neq g(a)$ が成り立っているとき、

$$\lim_{x \to a} \frac{h'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{h'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ。

となります。

注意. ロピタルの定理は、

右辺の極限が存在するならば左辺の極限も存在して値が一致する

と言っているので、仮定が成り立たないとき、つまり**右辺の極限が存在しないとき左辺の極限があるかないかについては何も言っていません**。誤解しやすい点ですので、気を付けてください。★

問題 21. 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

を求めよ。

ロピタルの定理を使って式(2) の極限を計算してみましょう。設定は、

$$h(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a),\quad h(a)=0,\qquad h'(x)=f'(x)-f'(a)$$

および、

$$g(x)=(x-a)^2,\qquad g(a)=0,\qquad g'(x)=2(x-a)$$

です。よって、ロピタルの定理により、f **が 2 階微分可能ならば**、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}&=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\frac{1}{2}f''(a)\end{aligned}$$

となります。(一つ目の等号がロピタルの定理、三つ目の等号は微分の定義式です。)

この結果を式(2) に戻すと

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

となります。1 次近似を得たときのように右辺を左辺に移項して分子に乗せると

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^2}=0$$

がえられられます。1 次近似を定義したときのように、これの左辺の分子で $f(x)$ から引いている部分

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

という **2 次式**が欲しかった「もっとよい近似」であるはずです。この 2 次式を

$f(x)$ の a における(テイラー)2 次近似

と呼びます。

6.2.2 2 次近似との大体の関係

1 次近似をより精密にして 2 次近似を得たのですから、2 次近似は $x=a$ の近くで $f(x)$ にとてもよく似ているだろうと**期待されます**。この「期待」が本当に正しいことの説明は次節に回すとして、このことを信じるとどうなるか考えてみましょう。

$x=a$ が極値の候補点、すなわち $f'(a)=0$ とします。すると、そこでの 2 次近似は 1 次の項が消えて

$$f(a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

となります。これは $f''(a)>0$ ならば下に凸の放物線なので $x=a$ で最小であり、$f''(a)<0$ ならば上に凸の放物線なので $x=a$ で最大です。よって、「$x=a$ の近くでは 2 次近似は $f(x)$ に似ている」ということを信じるなら、

$$f''(a)>0 \text{ ならば } x=a \text{ は極小点 } f''(a)<0 \text{ ならば } x=a \text{ は極大点}$$

であることが「増加減少」という考え方を使わずに説明できました。

6.2.3 正確な関係：テイラーの定理

残ったのは「2 次近似が元の関数に似ている」ということの証明です。これには「1 次近似が元の関数に似ている」ということのまねをするのがよいでしょう。なぜなら、2 次近似は 1 次近似の作り方をまねて作ったからです。

「1 次近似が元の関数に似ている」ということの証明には平均値の定理を使いました。つまり、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

が 1 次近似そのものであるのに対し、極限を取らない

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a+\theta(x-a))$$

を利用したわけです。これのまねをするということは、ロピタルの定理の代わりにコーシーの平均値定理を使うということに当たるでしょう。やってみると、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}$$

なので、極限を取らずにコーシーの平均値定理にすると、

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f'(c)-f'(a)}{2(c-a)}$$

となる c が存在する、となります。この右辺は平均値の定理の左辺の形をしているので、さらに

$$\frac{f'(c)-f'(a)}{2(c-a)}=\frac{1}{2}f''(d)$$

となる d が a と c の間に存在することが分かります。c は a と x の間のどこにあるのか分からないのですから、d も a と x の間のどこにあるのか分かりません。そのことを踏まえて $d=a+\theta(x-a)$ と表し、上の式の左辺と下の式の右辺をつないで分母を払って整理すると、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2$$

となる θ が 0 と 1 の間に存在することが分かります。これを**テイラーの定理**と呼びます。

さて、ここで a が極値の候補、つまり $f'(a)=0$ だとしてみましょう。すると、テイラーの定理は

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2$$

となります。ここで、x を a の近くに限定すると、**f'' が連続、すなわち f が C^2 級なら** $f''(a)$ と $f''(a+\theta(x-a))$ の正負は一致します。よって、

$$f''(a)>0 \text{ ならば } f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2>f(a)$$

すなわち $f(a)$ は極小値、

$$f''(a)<0 \text{ ならば } f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2<f(a)$$

すなわち $f(a)$ は極大値ということがキチンと証明できました。

問題 22. $f(x)=e^{x^3-3x}$ の極大極小、およびそれらの点での 2 次近似を求め、$f(x)$ とそれらの 2 次近似のグラフを（重ねて）書け。

問題 19 の解答

$h'(t)=3t^2$, $g'(t)=2t$ を入れて具体的に計算しましょう。

$$\frac{h(3)-h(0)}{3}=9=h'(c_1)=3c_1^2 \qquad 0<c_1<3$$

より $c_1=\sqrt{3}$ です。また

$$\frac{g(3)-g(0)}{3}=3=2c_2 \qquad 0<c_2<3$$

より $c_2 = \dfrac{3}{2}$ です。最後に

$$\frac{h(3)-h(0)}{g(3)-g(0)} = \frac{9}{3} = 3 = \frac{h'(c)}{g'(c)} = \frac{3c^2}{2c} = \frac{3}{2}c \quad 0 < c < 3$$

より $c = 2$ です。このように、c_1, c_2, c は一般に別の値になります。 □

問題 20 の解答

曲線 $(g(t), h(t))$ は単位円です。面倒なので、点 $(g(a), h(a))$ を A、点 $(g(b), h(b))$ を B と書くことにします。すると、O を原点として、角 AOB の二等分線は線分 AB と直交します。一方、その二等分線と単位円の交点 C における単位円の接線もやはりその二等分線に直交します。よって、線分 AB と点 C における単位円の接線は平行です。線分 AB の傾きは

$$\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)}$$

であり、点 C は $t = \dfrac{a+b}{2}$ の点です。よって、$c = \dfrac{a+b}{2}$ とすると、

$$\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{h'(c)}{g'(c)}$$

が成り立ちます。 □

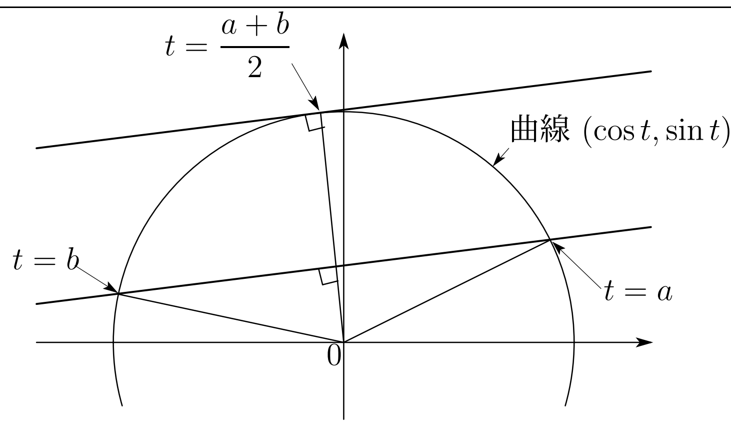

図 4: 円の割線と平行な接線。

問題 21 の解答

　そのまま $x \to 0$ とすると分子分母とも 0 になってしまうので、ロピタルの定理を使うために微分してみましょう。すると、

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

となります。しかし、これも $x \to 0$ とすると分子分母とも 0 になってしまうので、さらにロピタルの定理を使うためにもう一度微分してみましょう。すると、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

となります。また分子分母とも 0 になりますが、これで $x \to 0$ としたときの極限値はわかります。しかし、折角ですのでもう一度ロピタルの定理に訴えてみましょう。すると、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

となって極限値が確定します。以上をすべてつなぐと、ロピタルの定理を 3 回使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

となることがわかりました。 □

問題 22 の解答

　$f'(x) = (3x^2-3)e^{x^3-3x}$ なので、$f'(x) = 0$ を満たす x は ± 1 です。

　もう一度微分すると、$f''(x) = (6x + (3x^2-3)^2)e^{x^3-3x}$ となるので、$f''(-1) = -6e^2 < 0$ および $f''(1) = 6/e^2 > 0$ です。よって、f の極小点は $x = 1$ のみ、極大点は $x = -1$ のみであり、2 次近似式はそれぞれ

$$\frac{1}{e^2} + \frac{3}{e^2}(x-1)^2, \qquad e^2 - 3e^2(x+1)^2$$

となります。グラフは図 5 です。 □

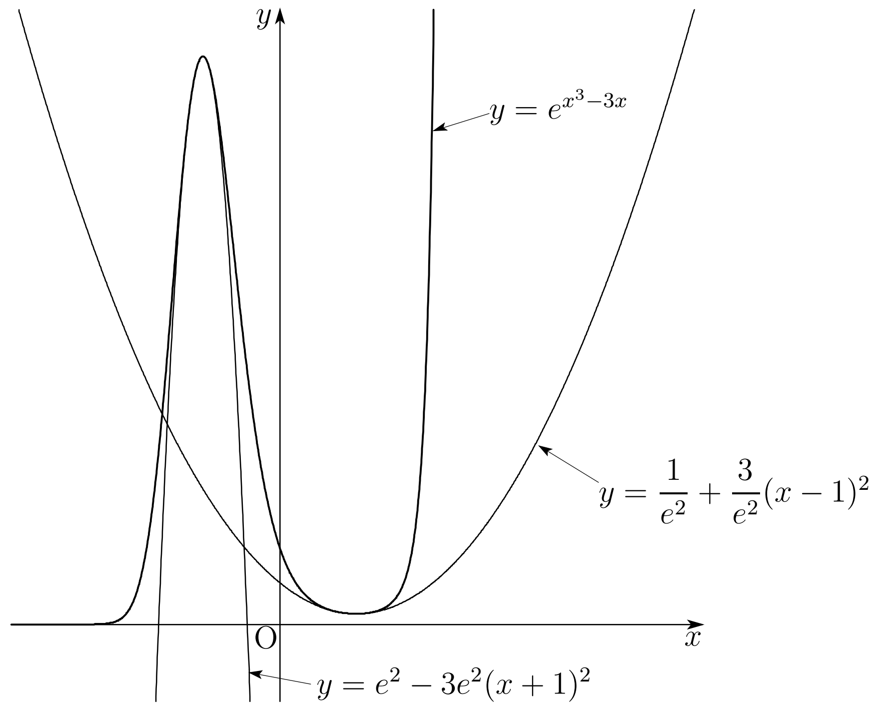

図 5: $y = f(x)$ と二つの 2 次近似曲線。