2008年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第4回

5月13日 清野和彦

4.3 方向微分の定義についての疑問

$\vec{u}$ 方向微分の定義について、かなり深刻な問題点に気づいた人もいるでしょう。それは、

> **直線 l の方向ベクトルは無数にあるので、方向微分の値は直線 l（と点 (a,b) ）だけでは一つに決まらない**

という問題です。そもそも「x 軸や y 軸がたまたま選ばれたものである場合、それらの軸とそれ以外の直線の重要性は同等であるはずなので、軸に平行な平面で切るだけでなく、任意の直線と z 軸に平行な平面でも切るべきである」と考えたわけですから、我々が欲しかった「微分の値」は xy 平面内の直線ごとに決まる値であるべきです。しかし、ここで定義した方向微分は xy 平面内の直線に対して値を与えるものではなく、xy 平面の**ベクトルごとに値を与えるもの**になってしまっています。このままで良いのでしょうか。それとも上手い修正方法があるでしょうか。

それを考えるために、偏微分は方向微分として見た場合どういうベクトルによる方向微分なのか調べてみましょう。偏微分の定義式は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cdot 1,b+t\cdot 0)-f(a,b)}{t}$$

と書き直せますので、x による偏微分は $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 方向微分です。同様に y による偏微分は $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 方向微分になっています。この $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ というベクトルの特徴は長さが1であること、つまり**単位ベクトル**であることでしょう。だから、直線 l を決めたとき、l の方向ベクトルとして長さが1のものを取ることに決めたらどうでしょうか。

ところがその方法も今ひとつなのです。というのは、例えば直線 l が $y=-x$ のとき、二つの単位ベクトル

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

のうちどちらを「直線 l の方向ベクトルの代表」として選ぶべきなのか、選択の基準がないからです。

もう少し詳しく状況を調べてみましょう。$\vec{u}$ と $\vec{v}$ がどちらも直線 l の方向ベクトルであるとします。すると、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行でどちらも $\vec{0}$ ではないので、0 でない実数 c によって $\vec{v} = c\vec{u}$ となっています。成分で書けば、$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ のとき $\vec{v} = \begin{bmatrix} cu \\ cv \end{bmatrix}$ です。この設定で $\vec{v}$ 方向微分を計算してみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a,b) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tcu, b+tcv) - f(a,b)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} c\frac{f(a+tcu, b+tcv) - f(a,b)}{ct} \\ &= c\lim_{s\to 0} \frac{f(a+su, b+sv) - f(a,b)}{s} = c\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) \end{aligned}$$

となります。（三つ目の等号で $s = ct$ と置き換えました。）つまり、ベクトルが c 倍なら方向微分の値も c 倍になるという関係があるわけです。だから、l の方向ベクトルで長さが 1 のもの二つについて、その方向微分の値は絶対値は同じで符号が逆なだけです。

「だったらどっちを選んでもいいことにしておけばどうかな」と思いますか? そう思うなら、方向微分の定義は前節でした定義 2 のままにしておけば十分です。なぜなら、直線 l の方向ベクトルとして選んだ $\vec{u}$ が単位ベクトルでない場合、l の方向ベクトルのうち単位ベクトルであるものは

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad と \quad -\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad ただし\ \vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\ として\ \|\vec{u}\| := \sqrt{u^2+v^2}$$

の二つですので[1]、単位ベクトルに対する方向微分の値は、$\vec{u}$ 方向微分の値 $f_{\vec{u}}(a,b)$ を用いて

$$\pm\frac{f_{\vec{u}}(a,b)}{\|\vec{u}\|}$$

と計算できてしまうからです。（前段落の計算の c に当たるのが $1/\|\vec{u}\|$ です。）結局 l の方向ベクトルとして長さ 1 のものを選ぼうが選ぶまいが、得られる情報量は同じだということです。だったら、定義はシンプルなままにしておいた方が良いですよね?

これでは納得できませんか? 実は、前節の定義 2 のままにしておくのにはもっと積極的な意味があるのです。それについては節を改めて考えることにしましょう。

[1]高校ではベクトル $\vec{u}$ の大きさ（長さ）は $|\vec{u}|$ というふうに数の絶対値と同じ記号で書いていたでしょう。しかし、これから先の数学では二重線を使って $\|\vec{u}\|$ と書くようになります。なぜそうするかというと、進んだ数学では関数をベクトルと見なすことが大変多くなるからです。関数 f をベクトルと思った場合、$|f|$ と書いてしまうと、x に $|f(x)|$ を対応させる関数と混乱しやすいので $\|f\|$ と書くのです、多分。

問題 11. 関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \sin(x + y)$ とし、ベクトル $\vec{u}$ を $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ とする。$\vec{v}_+ = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}_- = -\vec{v}_+$ として

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_+}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_-}(0,0)$$

をそれぞれ計算し、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_+}(0,0) = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_-}(0,0)$$

となっていることを確認せよ。

4.4 方向微分の値とは何か

前節の議論によって、方向微分の値は単なる「傾き」ではないということがはっきりしました。なぜなら l が同じでも $\vec{u}$ が違うと値が違ってしまうからです。それでは方向微分の値とは一体何なのでしょうか? そのことを知るために、方向微分の値が図形的に何を意味するのかをもっと詳しく探ってみましょう。

点 (a, b) を通り $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線を l とし、$z = f(x, y)$ のグラフを l を通り z 軸に平行な平面で切った断面図を、l を横軸 z 軸を縦軸とする平面に書いてみます。そして、その曲線に $(a, b, f(a, b))$ で接する接線を書き足します。このとき、方向微分の値 $f_{\vec{u}}(a, b)$ は

> $(a, b, f(a, b))$ における接線の、点 $(a+u, b+v)$ での z 座標から点 (a, b) での z 座標（$= f(a, b)$）を引いたもの

になっています。なぜなら、$\vec{u}$ 方向微分の定義式で極限を取る前の式

$$\frac{f(a + tu, b + tv) - f(a, b)}{t}$$

が

> 2 点 $(a, b, f(a, b))$ と $(a + tu, b + tv, f(a + tu, b + tv))$ を通る直線が点 $(a + u, b + v, c)$ を通るとしたときの $c - f(a, b)$

を与えているからです（図 1）。（なお、図 1 から、前小節で示した「$\vec{v} = c\vec{u}$ のとき $f_{\vec{v}}(a, b) = cf_{\vec{u}}(a, b)$」という関係が図形的に見て取れます。それぞれ、$\vec{v}$ を底辺とする三角形と $\vec{u}$ を底辺とする三角形の高さになっているからです。）

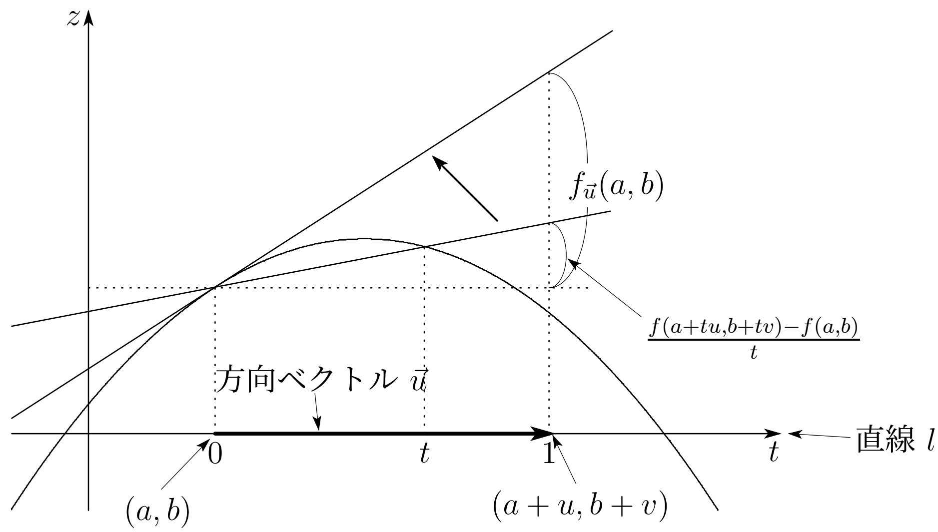

図 1: 直線 l を通り z 軸に平行な平面で $z = f(x, y)$ のグラフを切った断面図。

ということは、直線 l 上の任意の点 (a', b') を取ったとき、$\vec{u} = \begin{bmatrix} a' - a \\ b' - b \end{bmatrix}$ とすれば、点 $(a, b, f(a, b))$ における接線の点 (a', b') での z 座標は

$$f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)$$

で与えられるということになります。(a', b') は l 上の任意の点でしたので、方向微分によってこの接線上のすべての点の z 座標を表すことができる、つまり、この接線をグラフに持つ関数 $g(x, y)$ は

$$g(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) \qquad (x,y) \in l,\ \vec{u} = \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} \tag{1}$$

であるということになるわけです。(ただし、ゼロベクトル $\vec{0}$ に対しては $f_{\vec{0}}(a, b) = 0$ と定義します。) これが、同じ l の方向ベクトルなのに方向微分の値がそれぞれ違う理由です。方向微分は接線の傾きではなく、**接線の点の z 座標**(と $f(a, b)$ との差)を与えてくれているわけです。

さらに思い出してみると、直線 l は (a, b) を通る**任意の直線**でした。ということは、xy 平面上の任意の点 (x, y) に対して、点 (a, b) を中心にして l を回すことで l が (x, y) を通るように調整することができます。だから、この式(1) は直線 l とは無関係に、点 $(a, b, f(a, b))$ において $z = f(x, y)$ のグラフに接する**すべての接線に対して共通に成り立つ式**であるということになります。

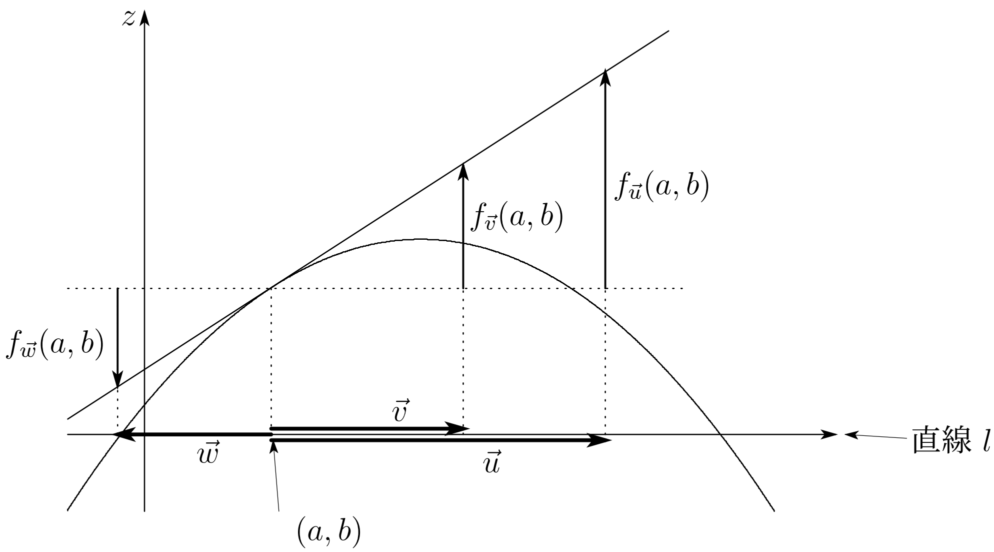

図 2: 直線 l の各方向ベクトルに対する方向微分の値。

4.5 変位と速度

「なんとかからなんとかを引いたもの」という言い方はいかにも冗長ですので、**変位**という言葉を使って話を整理してみましょう。変位とは、注目している点や値がはっきりしている場合、その注目点を始点とし他の点を終点とするベクトル、および注目している値を他の値から引いた差のことです。今の場合、独立変数の組が (a,b) である点に注目しているので、任意の独立変数の組 (x,y) に対して、

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

のことを独立変数の組の**変位ベクトル**あるいは**変位**と言います。また、(a,b) での従属変数の値（つまり関数の値）が $f(a,b)$ なので、任意の実数 z に対して $z-f(a,b)$ のことを、従属変数の**変位**と言います。要するに、今注目してる点 $(a,b,f(a,b))$ を原点 $(0,0,0)$ にずらしてしまいましょう、と言っているだけです。だから、(a,b) という一般の点を考える代わりにいつも $(0,0)$ を考え、さらに関数の値も $f(0,0)=0$ だと仮定して議論してしまえば、位置ベクトルと変位ベクトル、関数の値とその変位は全く同じになりますので、変位という考え方になじめないという方は $(a,b)=(0,0)$ かつ $f(0,0)=0$ で考えてもらえれば十分です。

さて、変位という言葉を使うと、前節の結論である「方向微分の値の意味」は

> 注目している点 $(a,b,f(a,b))$ における接線において、(a,b) からの**変位**が $\vec{u}$ である点における z 座標の**変位**が $\vec{u}$ 方向微分の値 $f_{\vec{u}}(a,b)$ である

と言い表すことができます。

微分は独立変数の変位を $\vec{0}$ にするときの極限を考えるわけですから、上のように変位そのものを大きさのあるベクトルと考えるのは余り微分とは相性がよくありません。それよりも、いわば「無限小変位」を大きさのあるベクトルとして実現してくれているものである**速度ベクトル**を使った方が微分との相性はよくなります。

起伏が $z = f(x, y)$ のグラフになっているような地面を考えます。その地面を上の方から眺めてみましょう。地図を眺めているような感じです。そうやって上から眺めたとき、平面上の直線 l に沿って自動車が速度 $\vec{u}$ で等速に走っているとします。しかし、本当は地面は平らではなく $z = f(x, y)$ のグラフ状の起伏を持っているので、水平方向の速度が等速度 $\vec{u}$ でも上下方向の速度は刻一刻と変わっているはずです。その自動車が地点 (a, b) を通過したときの上向き方向の速度が $\vec{u}$ 方向微分 $f_{\vec{u}}(a, b)$ になっているわけです。なぜなら、自動車が (a, b) を通過した瞬間にすべての力が消え去ったときに、そのあと自動車の描く軌跡が接線であり、上方向の速度とは、そのようなフィクションを考えたときに、自動車が単位時間で上にあがる距離のことだからです。

4.6 方向微分と「接平面」

さて、本題に戻りましょう。残された「考えるべきこと」は、

> $(a, b, f(a, b))$ において $z = f(x, y)$ のグラフに接するすべての接線を集めたもの

をもっとはっきりスッキリと捉えられないか、ということです。そこで、このようなものを考えることになった経緯を振り返ってみましょう。

方向微分がどうあるべきか考えたとき、

> $(a, b, f(a, b))$ を通り z 軸に平行な平面で $z = f(x, y)$ のグラフを切ることによってできる曲線の $(a, b, f(a, b))$ における接線

というものを考えました。今考えたいのは、考え得るすべての「切る平面」についてのこの接線を集めたものです。「切ってから集める」というのはいかにも回り道くさい気がします。「切ってから集める」前に既に図形的に意味を持ったものとして存在するのではないかと考えたくなります。つまり、

切ってから「接するもの」を作る

ということは

「接するもの」を作ってから切る

のと同じだろうというわけです。そう考えると、

切ってから「接するもの」を作ってそれを集めたもの

とは、

切る前に「接するもの」を作って、それを切らずにそのまま残したもの

だろうと考えられます。切る前に「接するもの」とは、$z = f(x, y)$ のグラフに点 $(a, b, f(a, b))$ で接する**接平面**のことでしょう。 これで結論にたどり着きました。

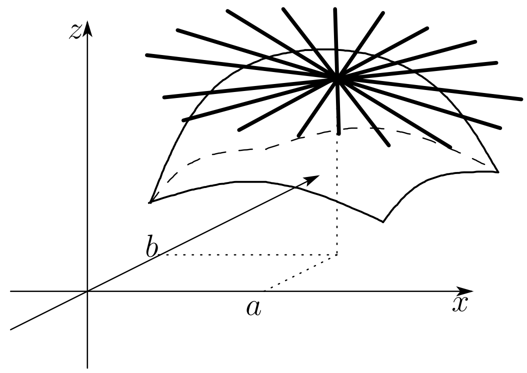

図 3: 接線をすべて集めると接平面になる…

$z = f(x, y)$ のグラフに点 $(a, b, f(a, b))$ で接する接平面をグラフに持つ関数を $g(x, y)$ とすると、

$$g(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$$

が成り立つ。ただし、

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

である。

です。

これで方向微分の本当の役割がわかったといってよいでしょう。その役割とは、

接平面上の点の座標を（変位という形で）与えること

だというわけです。

ところで、第 1.2.1 節でグラフが平面になる関数は 1 次関数と定数関数であることを既に見てあります。だから、接平面も 1 次関数か定数関数のグラフになっています。$z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ での接平面を考えているのですから、点

$(a,b,f(a,b))$ は接平面上の点です。つまり、その接平面をグラフに持つ 1 次以下の関数を $g(x,y)$ とすると、$g(a,b)=f(a,b)$ が成り立っているわけです。このことから、$g(x,y)$ は

$$g(x,y)=f(a,b)+p(x-a)+q(y-b)$$

という形をしていなければならないということまでは分かります。

さて、先ほどこの同じ $g(x,y)$ が

$$g(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) \qquad \vec{u}=\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

で与えられることを示しました。この二つが等しいという条件から、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)=p(x-a)+q(y-b)$$

という等式が得られます。ここで特に $\vec{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ （すなわち $(x,y)=(a+1,b)$）とすると、$\vec{u}$ 方向微分は x による偏微分になるので、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=p\cdot 1+q\cdot 0=p$$

が得られ、同様に、$\vec{u}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ （すなわち $(x,y)=(a,b+1)$）とすることで、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=q$$

が得られます。つまり、$z=f(a,b)$ のグラフの $(a,b,f(a,b))$ における接平面の式 $g(x,y)$ は、

$$g(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

であり、$\vec{u}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 方向微分の値は

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b)=u\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+v\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \tag{2}$$

で与えられる、という大変幸せな結論にたどり着きました。

問題 12. 2 変数関数

$$f(x,y)=e^{x+2y}$$

について、任意の点 (a,b) と任意のベクトル $\vec{u}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ に対して方向微分の値を計算し、関係式(2) を満たすことを確認せよ。

ところが、次のような「幸せな結論(2)」に反する例があるのです。このような例がある以上、ここまでの議論のどこかに間違いがあるということになってしまいます。どこに間違いがあるのでしょうか? 節を変えてその点を考えてみましょう。

問題 13. 2変数関数

$$f(x,y) = \frac{y(3x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{ただし } f(0,0) = 0$$

の原点 $(0,0)$ における二つの偏微分の値と $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向微分の値を計算せよ。

• 余裕があったら、$(0,0)$ における任意の方向微分の値を計算せよ。また、グラフの概形を考えて見よ。(グラフを考えるには極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を使うとよいでしょう。)

問題の解答

問題 11 の解答

$\vec{u} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ なので、

$$\vec{v}_+ = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_- = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

です。

$x = 3t,\ y = 4t$ を $f(x,y)$ に代入した関数を $\varphi(t)$ としたとき、

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$$

となるのでした。実際に計算すると、

$$\varphi(t) = f(3t, 4t) = \sin 7t$$

なので、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = 7\cos(7 \cdot 0) = 7$$

となります。

同様に、

$$\psi(t) = f\left(\frac{3}{5}t, \frac{4}{5}t\right) = \sin\frac{7}{5}t$$

なので、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_+}(0,0) = \psi'(0) = \frac{7}{5}\cos\left(\frac{7}{5}\cdot 0\right) = \frac{7}{5}$$

となり、

$$\chi(t) = f\left(-\frac{3}{5}t, -\frac{4}{5}t\right) = \sin\left(-\frac{7}{5}t\right) = -\sin\frac{7}{5}t$$

なので、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_-}(0,0) = \chi'(0) = -\frac{7}{5}\cos\left(\frac{7}{5}\cdot 0\right) = -\frac{7}{5}$$

となります。

$$\frac{7}{5} = \frac{1}{5}\times 7 = -\left(-\frac{7}{5}\right)$$

なので、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_+}(0,0) = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_-}(0,0)$$

が成り立っています。 □

問題 12 の解答

$x = a + tu, y = b + tv$ を $f(x,y)$ に代入してできる t の 1 変数関数を $\psi(t)$ とすると、

$$\psi(t) = f(a+tu, b+tv) = e^{(a+tu)+2(b+tv)} = e^{(a+2b)+t(u+2v)}$$

となります。よって、

$$\psi'(t) = (u+2v)e^{(a+2b)+t(u+2v)}$$

となり、$t = 0$ を代入して

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = (u+2v)e^{a+2b}$$

となります。x による偏微分は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 方向微分、y による偏微分は $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向微分なので、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = e^{a+2b}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2e^{a+2b}$$

です。よって、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = (u+2v)e^{a+2b} = u(e^{a+2b}) + v(2e^{a+2b}) = u\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

となっており、関係式(2) が成り立っています。 □

問題 13 の解答

$f(x,y)$ の定義が $(x,y)=(0,0)$ と $(x,y)\neq(0,0)$ で「切れて」いるので、具体的な 1 変数関数の導関数の公式は使えず、定義に従って計算するしかありません。

$f_x(0,0)$ を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

となります。

また、$f_y(0,0)$ を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\frac{-y^3}{y^2}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$$

となります。

最後に $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 方向微分を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t\,(3t^2-t^2)}{t^2+t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{2t^3}{2t^2}=\lim_{t\to 0}1=1\end{aligned}$$

となります。

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=1\neq -1=1\cdot 0+1\cdot(-1)=1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+1\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

となっているので、「幸せな結論(2)」は成り立っていません。

なお、一般の方向ベクトル $\vec{u}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\neq\vec{0}$ に対して計算してみると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu,tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{(tv)\,(3(tu)^2-(tv)^2)}{(tu)^2+(tv)^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^3v(3u^2-v^2)}{t^2(u^2+v^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{v(3u^2-v^2)}{u^2+v^2}=\frac{v(3u^2-v^2)}{u^2+v^2}\\&=f(u,v)\end{aligned}$$

となります。

$z=f(x,y)$ のグラフの概形を考えるために、$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入してみましょう。すると、

$$\begin{aligned}f(r\cos\theta,r\sin\theta)&=\frac{r^3\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}\\&=r\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+r2\sin\theta\cos^2\theta\\&=r\sin\theta\cos 2\theta+r\sin 2\theta\cos\theta\\&=r\sin 3\theta\end{aligned}$$

となります。これが何を意味するかというと、$z = f(x, y)$ のグラフを z 軸を中心にした半径 r_0 の円柱（表面のみ）で切り、その円柱を一本の母線で切って平らに開くと $z = r_0 \sin\theta$ という曲線が出てくるということです。つまり、$z = f(x, y)$ のグラフは、原点を通る直線を波打たせながらグルッと一周させたときにできる曲面になっているわけです。だから、$z = f(x, y)$ のグラフを原点を通る（z 軸に平行な）平面で切った断面は直線です。このことは、上で計算した方向微分が

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(u, v) = f(u, v)$$

というように微分する前の関数と一致していることからも分かります。なぜなら、方向微分とは変位が $\vec{u}$ の点の接線の z 座標の変位なので、原点における方向微分が元の関数に一致するということは、

元の関数のグラフは原点における接線をすべて含む

ということを意味するからです。

グラフより下の部分（$z \leq f(x, y)$）と単位円柱（中身あり）との共通部分の図を書いてみましたが、いかがでしょうか（図 4）？ □

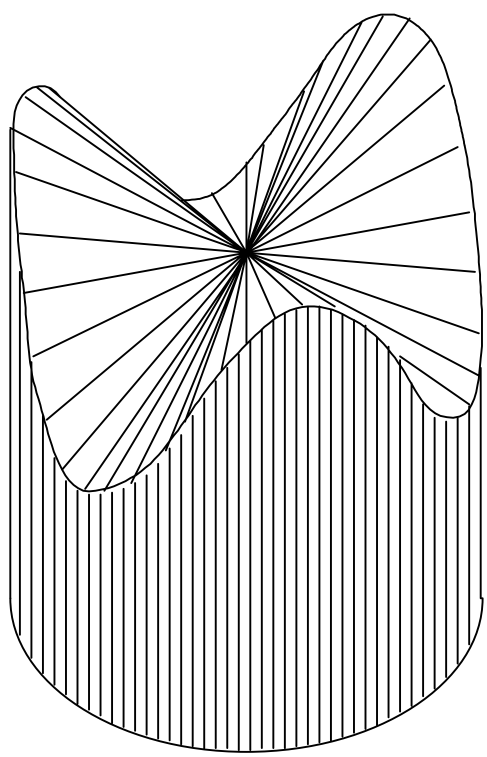

図 4: 頑張ってみましたが…見えますか?