2008 年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第 12 回

7 月 8 日 清野和彦

8 条件付き極値問題

8.1 条件付き極値問題とは

第 7 回から第 10 回にかけて説明した極値判定では、2 変数関数の定義域を暗黙のうちに $\mathbb{R}^2$ 全体と考えていました。しかし、実際に出会う関数は、考えている対象のさまざまな事情により定義域が狭まっていることがよくあります。例えば「原点からの距離が 1 以下の点しか意味を持たない」すなわち、定義域が $\mathbb{R}^2$ 全体ではなく $x^2+y^2 \leq 1$ という単位円板だけに制限されていたりするわけです。あるいは、もっと極端に円周上の点、すなわち $x^2+y^2=1$ を満たす (x,y) だけが意味を持つような場合もあるでしょう。

定義域が単位円板 $x^2+y^2 \leq 1$ の場合、$f(x,y)$ の極値を調べるには、定義域のことは忘れてとりあえず停留点を求めてしまったあと、$x^2+y^2 \leq 1$ を満たす停留点についてのみ以前学んだ判定法などを使って極大か極小かを判定すればよい、と思うかも知れませんが、これでは少し考察が足りません。定義域の境界である円周 $x^2+y^2=1$ 上では、定義域を忘れて考えた極値をとる点でなくても定義域を制限した上での極値をとっている可能性があるからです。これは、1 変数関数 $f(x)$ の定義域を $f(x)$ が意味を持ちうる範囲全体よりも狭い区間に制限した場合、極大極小（というより最大最小ですが）は $f'(x)=0$ を満たす点の他に区間の端も候補に入れて考えなければならなかったという事情の 2 変数の場合への一般化です。

1 変数関数の場合には定義域の端はいくつかの点でしかなかったので、そこでの関数の値を具体的に計算してみるだけで話は済んだのですが、上の例のように、2 変数関数の場合定義域の端（境界）は曲線になるので、関数の定義域を境界だけに制限してもそれについての極大極小を調べるのは 1 変数関数の極大極小を調べるのと同じくらいの手間が掛かることになります。

定義域が $x^2+y^2 \leq 1$ である場合、定義域の中での極値を判定法などで調べ、定義域の境界での極値を何らかの方法で調べ、最後にその結果を比較して極大極小を判定することになるでしょう。だから、この節では $f(x,y)$ の定義域を中身のない集合に制限した場合、つまり $x^2+y^2-1=0$ のように定義域がある 2 変数関数 $g(x,y)$ の**零点**、すなわち $g(x,y)=0$ を満たす点に限られている場合の極大極小を考えることにしましょう。定義域に対するこのような**条件**の下で**極大極小**を調べることを**条件付き極値問題**と言います。

このような問題は、2 変数関数の定義域を曲線に限る場合だけに発生するものではありません。例えば 3 変数関数の定義域を曲面や曲線に限る場合も考えられます

し、もっと変数の多い場合も同様に考えられます。2 変数関数の定義域を曲線に限ることは、以下で説明するように実質的には 1 変数関数の極大極小を調べることに当たっており多変数関数特有の現象が（全くないわけではありませんが）半減してしまいます。とは言え一般の多変数関数を扱うことは手に余ります。そこで、3 変数関数の定義域を曲面に限る場合、つまり、$f(x, y, z)$ という関数の $g(x, y, z) = 0$ という条件の下での極値問題もあわせて考えることにしましょう。

まず、2 変数関数の条件付き極大極小の定義をはっきりさせておきましょう。3 変数関数の条件付き極大極小の定義は改めて書きませんので、2 変数の場合から類推してください。

条件付き極大極小

2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で条件 $g(x, y) = 0$ の下での極小値を取るとは、$g(a, b) = 0$ であり、(a, b) を中心とした半径 r の円に属する (x, y) で $g(x, y) = 0$ を満たすものについては $f(x, y) \geq f(a, b)$ が成り立つことを言う。
不等号の向きを逆にしたものが極大値を取ることの定義である。

8.2 条件付き極値問題をどのように解くか

条件付き極値問題にどのようにアプローチするかを 2 変数関数の場合で考えてみましょう。どうすれば条件 $g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極大極小を見つけることができるでしょうか?

具体例で考えてみましょう。

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とします[1]。$f(x, y)$ が調べたい関数で $g(x, y) = 0$ が条件です。反対にならないようにくれぐれもご注意下さい。

まず思いつくのは

$g(x, y)$ の零点は単位円なのだからパラメタ付けしてしまえばよい

ということでしょう。実際、

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t$$

とすれば $g(x, y) = 0$ を満たすすべての点を表せます。だから、これを $f(x, y)$ の x と y に代入してできる t の関数の極大極小を調べればよいわけです。具体的には、

$$\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = 2\cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2 t + 1$$

[1]だんだんと簡単な例に取り替えていってこれにたどり着いたのですが、よく見ると（というかすぐ分かるように）、いきなり x^2 か y^2 を消去できる関数と条件の組み合わせになってしまっていました。もちろん、これを調べるだけならそうするのがもっとも良い方法ですが、ここでは一般の条件付き極値問題にどう対処するかということの例としてあげたものなので、このあとに説明する解法におつきあい下さい。

によって $\varphi(t)$ を定義して、これの極大極小を調べるわけです。これは普通の 1 変数関数なのですから極大極小をいつものように調べることができます。まず、

$$\varphi'(t) = -2\cos t \sin t = 0$$

を解いて

$$t = \frac{n}{2}\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

とし、あとは増減表を書くなり 2 階微分を考えるなりすれば極大と極小が判定できます。例えば、2 階微分の方法を使うと、

$$\varphi''(t) = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t$$

となるので、

$$\varphi''\left(\frac{2m}{2}\pi\right) = -2 < 0, \qquad \varphi''\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right) = 2 > 0$$

ですから、

n が偶数のところは極大、奇数のところは極小

と判定できます。これを (x, y) に戻せば、

$(\pm 1, 0)$ で極大、$(0, \pm 1)$ で極小

という結論が得られるわけです。

以上、これまでの知識で（というか高校までの知識で）条件付き極値問題があっさり解けてしまいました。それなのに、何でわざわざ条件付き極値問題のための節を立てて議論しなければならないのでしょうか? それは、普通 $g(x, y)$ の零点のなす曲線をパラメタ付けすることができないからです。上の問題は条件がたまたま単位円だったので三角関数でパラメタ付けすることができましたが、例えば、$g(x, y)$ をちょっと (?) 変えて

$$h(x, y) = x^4 + 2x^2 + y^2 - 3$$

としたらどうでしょうか? $h(x, y) = 0$ を満たす (x, y) を上のように見事にパラメタ付けすることができますか? 多分無理でしょう。しかし、ヘタクソにパラメタ付けすることならできます。例えば $h(x, y) = 0$ を y について解いてしまうのです。すると、

$$y = \pm\sqrt{3 - 2x^2 - x^4}$$

となります。$\pm$ の意味は、

> $h(x,y)$ の零点の一部分は $y = \sqrt{3-2x^2-x^4}$ で表され、他の部分は $y = -\sqrt{3-2x^2-x^4}$ で表される。

ということです。これは、パラメタ付けという視点からは「x をパラメタとして採用する」ということを意味しますが、むしろ、

$h(x,y)$ の零点を**いくつかの関数のグラフに分けた**

とみる方が自然でしょう。この二つの関数の定義域は、どちらも平方根の中身が 0 以上の範囲、つまり、

$$3-2x^2-x^4 = 4-(1+x^2)^2 \geq 0$$

の範囲、すなわち、

$$4 \geq (1+x^2)^2 \Leftrightarrow 2 \geq 1+x^2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

が定義域です。この二つの関数を $f(x,y)$ の y に代入してできる x の二つの 1 変数関数の $-1 \leq x \leq 1$ の範囲での極大極小を考えればよいわけです。実際にやってみると、$f(x,y)$ に y は二乗でしか登場していないのでどちらの関数を代入した場合も全く同じで、

$$\psi(x) = f\left(x, \pm\sqrt{3-2x^2-x^4}\right) = 3-x^4$$

となります。よって、$x=0$ で極大値 3 を取り、定義域の端の $x=\pm1$ で極小値 2 を取ることが分かります。(x,y) に戻すと、

$$(0,\pm\sqrt{3}) \text{ で極大、} (\pm1,0) \text{ で極小}$$

ということです。

これで解けはしましたが、疑問が残ります。まず第一に「こんなに都合よく条件式を y について解けるのか?」という問題です。もちろん、普通は解けません。解けないのにどうするのか、というのが条件付き極値問題の最大のポイントなので、この疑問についてはあとでゆっくりと説明することにします。もう一つ、小さな疑問があります。y を x の関数で表し $f(x,y)$ の y に代入したあと、x の定義域 $[-1,1]$ での極値を求める方法が「中身での極値と端での値を別々に考察する」という、このプリントの一番始めに紹介した問題（の 1 変数版）になっていることです。これでは条件付き極値問題を変数の一つ少ない条件付き極値問題に帰着しただけではないでしょうか。「変数が一つ減ってるのだからいいじゃないか」という考え方もあるでしょう。しかし、具体例ではなく一般論を展開するには不向きでしょう。少なくとも $h(x,y)$ の零点の中に特別扱いされる点ができるのはよくないように感じるでしょう。

要するに「端」ができないようにグラフ分けできればよいのです。「そんなこと言ったって $x=\pm1$ の点はどう見ても端じゃないか」と思いますか? それは y が

x の従属変数であると思いこんでいるからです。x が y の従属変数となるように $h(x,y)=0$ を x について解いてやれば、$x=\pm 1$ の点も定義域の端ではなくなります。実際に解いてみると、$x^2 \geq 0$ に注意して

$$x^2 = -1 + \sqrt{4-y^2} \qquad -\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$$

すなわち、

$$x = \pm\sqrt{-2+\sqrt{4-y^2}} \qquad -\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$$

となります。（定義域の端は考えないということを強調するために $y=\pm\sqrt{3}$ は定義域から抜いてあります。）この二つの関数もあわせて考えれば、$h(x,y)$ の零点は

$$y = \pm\sqrt{3-2x^2-x^4} \qquad -1 < x < 1$$
$$x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{4-y^2}} \qquad -\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$$

という四つの関数のグラフ（端点は除く）で尽くされることになります。このように考えれば、定義域の端だけ特別扱いせず、すべての点で普通の 1 変数関数の極値判定をすればよいことになります。これが、一般的な条件付き極値問題を解くための大雑把な方針です。

8.3　陰関数定理

さて、先ほど保留にした最大の問題点、

> $g(x,y)$ が具体的に与えられたからと言って $g(x,y)=0$ を y について解けるとは限らないし、ましてや $g(x,y)$ が抽象的にしか与えられていない一般論ではどうすればよいのか?

という疑問にお答えしましょう。その前に「$g(x,y)=0$ を y について解いた関数」というのはいかにも長ったらしい名前なので、このような関数にちゃんと名前が付けられています。それを紹介しましょう。

陰関数の定義

2 変数関数 $g(x,y)$ に対し、x の関数 $\eta(x)$ で恒等的に $g(x,\eta(x))$ を満たすもの、および y の関数 $\xi(y)$ で恒等的に $g(\xi(y),y)=0$ を満たすものを、$g(x,y)=0$ **によって定められた陰関数**という。
同様に、3 変数関数 $g(x,y,z)$ に対し、x,y の関数 $\zeta(x,y)$ で恒等的に $g(x,y,\zeta(x,y))=0$ を満たすもの、y,z の関数 $\xi(y,z)$ で恒等的に $g(\xi(y,z),y,z)=0$ を満たすもの、x,z の関数 $\eta(z,x)$ で恒等的に $g(x,\eta(z,x),z)=0$ を満たすものを $g(x,y,z)=0$ **によって定められた陰関数**という。

それぞれの陰関数の定義域はなるべく広く取りますが、前節の最後で説明したように端や境界は含めません。また、既に見たように、$g(x,y)=0$ によって定められる陰関数 $\eta(x)$ や $\xi(y)$ は一つずつではありません。例えば、$g(x,y)=x^2+y^2-1$ なら

$$\eta(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad \eta(x)=-\sqrt{1-x^2}$$

の二つとも $x^2+y^2-1=0$ から定められる陰関数です。なお、この場合どちらも定義域は $-1<x<1$ です。

さて、この用語を使うと、我々の疑問は

> $g(x,y)$ が勝手に与えられたとき、$g(x,y)=0$ を満たす任意の点 (a,b) に対して、陰関数 $\eta(x)$ または $\xi(y)$ で $\eta(a)=b$ や $\xi(b)=a$ を満たすものが必ず定められるのか。また、定められたとしても具体的にどういう関数かは分からないはずだが、それでどうやって条件付き極値問題に利用できるのか

となるでしょう。(2 変数で書いてしまいましたが 3 変数でも同様です。) これに答えてくれるのが陰関数の定理です。

結構複雑なので 2 変数の場合をまず説明し、そのあと 3 変数の場合を説明することにします。

8.3.1　2 変数の場合

あまり一般の $g(x,y)$ を考えたのでは難しくなるのは目に見えていますので、$g(x,y)$ の微分可能性は適宜仮定して行きます。

我々が解くべき問題の第一は、

> $g(x,y)$ と $g(a,b)=0$ を満たす (a,b) が与えられたとき、a の近くで定義された x の関数 $\eta(x)$ で
>
> $$g\big(x,\eta(x)\big)\equiv 0, \qquad h(a)=b$$
>
> を満たすものか、あるいは b の近くで定義された y の関数 $k(y)$ で
>
> $$g\big(\xi(y),y\big)\equiv 0, \qquad k(b)=a$$
>
> を満たすものはいつ存在するのか?

です。(「恒等的に等しい」ということを三本線 $\equiv$ で表すことにします。)

さて、図形的には $g(x,y)=0$ とは $z=g(x,y)$ と xy 平面との交わりです。そこで、$g(x,y)$ は全微分可能であるとしましょう。$z=g(x,y)$ というグラフに点 $(a,b,0)$ で接する接平面は、(a,b) における 1 次近似式のグラフですので、

$$z=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

となります。$z = g(x, y)$ を $z = 0$ という平面で切った図形を考えているのですから、この接平面も同じ平面で切ってみましょう。すると xy 平面上に

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b) \tag{1}$$

という図形ができます。

この図形は直線か xy 平面全体です。特に $g_x(a, b)$ と $g_y(a, b)$ の少なくとも一方が 0 でなければ直線になります。つまり (a, b) が $g(x, y)$ の停留点でなければ直線になるわけです。接平面の図形的意味から、この直線は $g(x, y) = 0$ の (a, b) における接線になっています。

そこで以降では $g_x(a, b)$ と $g_y(a, b)$ の少なくとも一方は 0 でないと仮定しましょう。計算を進めるために、例えば、$g_y(a, b) \neq 0$ としてみます。すると、直線(1) は

$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x - a) + b \tag{2}$$

と y について解けます。

$g(x, y) = 0$ という図形は (a, b) において式(2) という 1 次関数の**グラフを接線に持つ**ことがわかりました。よって、(a, b) に十分近いところでは、接線の式(2) を少し修正してやることで、$g(x, y) = 0$ をグラフに持つ関数 $y = \eta(x)$ を作ることができるでしょう。もちろんキッチリ証明しなければならないことですが、大変技術的ですのでここでは省略します。証明よりも、どのような近似から $y = \eta(x)$ がありそうだという気分をつかんだのかをよく味わってください。

この事実を陰関数の定理といいます。

陰関数の定理（2 変数の場合）

2 変数関数 $g(x, y)$ と $g(a, b) = 0$ を満たす (a, b) があったとき、$g_y(a, b) \neq 0$ ならば a の近くで定義された x の関数 $\eta(x)$ で

$$g\bigl(x, \eta(x)\bigr) \equiv 0, \qquad \eta(a) = b$$

を満たすものが存在する。この $\eta(x)$ は微分可能で、

$$\frac{d\eta}{dx}(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

となっている。

$g_x(a, b) \neq 0$ のときは、x と y の役割を取り替えたものが成り立つ。

「$g(x, y) = 0$ という方程式を y について解く」という視点から上の議論を見直すと、

> ある (a,b) がこの方程式の解であり、しかも $g_y(a,b)=0$ ならば、この方程式は $y=p(x-a)+b$ という 1 次式による「近似解」を持つので、それを修正して本当の解を得ることができる

というふうになっています。

さて、これで第一の疑問には答えられました。それでは第二の疑問である「条件付き極値問題にどう利用できるのか」に答えましょう。実はその答も陰関数定理の中に書いてあるのです。$g(x,y)=0$ によって $\eta(x)=y$ という陰関数が定められたら、極値を調べたい関数 $f(x,y)$ に $y=\eta(x)$ を代入して x の 1 変数関数として普通に極大極小を調べるのが手順でした。つまり、

$$\varphi(x)=f(x,\eta(x))$$

と定義して $\varphi'(x)=0$ を解いて云々…とやるわけです。だから $\eta(x)$ という関数が具体的に分からなくても、$\varphi'(x)$ を与えられた二つの関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ で表せればよいわけです。ここで**合成関数の微分公式**により

$$\varphi'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\eta}{dx}$$

となっていることに注意してください。必要なのは $\eta(x)$ そのものではなく $\eta'(x)$ です。そして**これは $\eta'(x)=-g_x/g_y$ というふうに $g(x,y)$ の偏微分によって表される**ことが陰関数定理に記されています。だから、$\eta(x)$ の存在が抽象的に分かるだけで条件付き極値問題を解くことができるのです。ただし、実際にどうやって条件付き極値問題を解くかというこのつづきに当たる話は次節（次回）に回します。

ところで、定理の中にある今言及したばかりの「$\eta(x)$ の微分を求める式」ですが、こんなものを暗記しようなんて思わないでください。定理を導いた議論を整理すれば次のように簡単に求められるのですから。まず、$g(x,y)=0$ が $y=\eta(x)$ と解けてしまったとしましょう。すると、

$$g\bigl(x,\eta(x)\bigr)=0$$

です。これを x で微分すると、合成関数の微分法により、

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d\eta}{dx}=0$$

となります。もちろん $dx/dx=1$ ですので、

$$\frac{d\eta}{dx}=-\frac{g_x}{g_y}$$

と求まりました。

具体例で考えればもっと簡単で、例えば $x^2+y^2-1=0$ を x で微分して $2x+2yy'=0$ より $y'=-x/y$ です。他にもいろいろ自分で考えて計算してみてください。

8.3.2 特異点での様子

以上の話（つまり陰関数定理）は $g_x(a,b)$ か $g_y(a,b)$ が 0 でないという、つまり (a,b) が $g(x,y)$ の停留点でないという仮定の下での話でした。それでは、停留点の近くでは $g(x,y)=0$ という図形はどのようになっているのでしょうか。

その前に例によって名前を付けましょう。$g(x,y)$ の停留点で $g(x,y)=0$ を満たすものを $g(x,y)=0$ の**特異点**と呼びます。前節の陰関数定理によって、$g(x,y)=0$ で決まる図形は特異点以外では微分可能な曲線であることが分かったわけです。

それでは特異点ではどのようなことが起こっているのでしょうか。「2 変数関数の極大極小」のところで見たように、$g(x,y)$ の停留点 (a,b) での関数の様子は $g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)-g_{xy}(a,b)^2 \neq 0$ なら 2 次近似でよく近似されます。(a,b) を $g(a,b)=0$ の特異点とすると定数項と 1 次の項がすべて 0 なのですから、$g(x,y)=0$ の (a,b) 付近での様子は

$$\frac{1}{2}g_{xx}(a,b)(x-a)^2+g_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}g_{yy}(a,b)(y-b)^2=0 \qquad (3)$$

によって決まる図形に近いはずです。

2 次近似を利用した極値判定法から、(a,b) は $g(x,y)$ の極大点か極小点か鞍点です。つまり、式(3) の表す図形の大体の形は

$$x^2+y^2=0, \quad -x^2-y^2=0, \quad x^2-y^2=0$$

の三つに分けられるわけです。最初の 2 つに対応する場合は (a,b) の近くには $g(x,y)=0$ を満たす点は他に存在しません。つまり (a,b) は $g(x,y)=0$ という図形の中で孤立した点になっています。もちろん (a,b) での接線は存在しませんし、関数のグラフにもなっていません。また、最後のものに対応する場合、$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ですので、(a,b) で交わる 2 直線がでてきます。つまり、(a,b) は $g(x,y)=0$ における「交差点」です。接線はない、あるいは「2 本ある」と言っても良いかも知れません。どちらにせよ、関数のグラフにはなっていません。

$g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)-g_{xy}(a,b)^2=0$ となっている場合は様々なことが起こり得、一口に「こうなる」とは言えません。例えば、

$$g(x,y)=(y-x)(y-2x)(y-3x)$$

なら $g(x,y)=0$ は $(0,0)$ で 3 本の直線が交わっています。また、

$$g(x,y)=x^3+y^3$$

なら、$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ で $x^2-xy+y^2=0$ は空集合なので、$g(x,y)=0$ は直線 $y=-x$ になります。この場合は $(0,0)$ が $g(x,y)$ の停留点であるにもかかわらず、$g(x,y)=0$ は $(0,0)$ においても滑らかな関数のグラフになっています。もう一つ印象的な場合として、

$$g(x,y)=x^3-y^2$$

があります。$g(x,y)=0$ は y について解けてしまって $y=\pm\sqrt{x}^3\ (x\geq 0)$ となりますが、この 2 本は $(0,0)$ で滑らかにつながっていず、尖っています（図 1）。

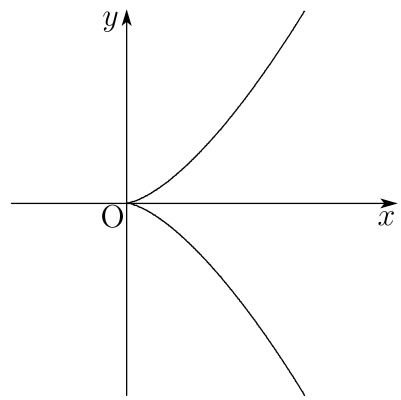

図 1: $x^3-y^2=0$ の特異点での様子

このように、2 次近似による極値判定法と同様、$g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)-g_{xy}(a,b)^2=0$ となっている停留点においては、$g(x,y)=0$ の様子は一つ一つ個別に調べる以外にはありません。

8.3.3 3 変数の場合

2 変数の場合で大体の様子は分かってもらえたと思うので、3 変数の場合の陰関数の定理を結果だけ述べておきましょう。

$g(x,y,z)=0$ で決まる $\mathbb{R}^3$ の部分集合（曲面）を M としましょう。すると、M は $w=g(x,y,z)$ のグラフ（「$xyzw$ 4 次元空間」にあります）の xyz 空間との交わりです。$g(x,y,z)$ を全微分可能とすれば、2 変数の場合と同様に (a,b,c) における $g(x,y,z)$ の 1 次近似式と xyz 空間との交わり

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c)(y-b)+\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)(z-c)=0$$

が xyz 空間全体にならずにちゃんと 2 次元の平面になっているなら、それは M に点 $(a,b,c,0)$ で接しています。これが平面を決めるための条件は、$g_x(a,b,c)$、$g_y(a,b,c)$、$g_z(a,b,c)$ のうち少なくとも一つは 0 でないこと、つまり、(a,b,c) が $g(x,y,z)$ の停留点でないことです。

例えば、$g_z(a,b,c)\neq 0$ としましょう。すると、全体をこれで割ることにより、M の点 $(a,b,c,0)$ における接平面が

$$z=-\frac{g_x(a,b,c)}{g_z(a,b,c)}(x-a)-\frac{g_y(a,b,c)}{g_z(a,b,c)}(y-b)+c$$

というふうに x, y についての 1 次関数のグラフで書けます。よって、これを少し修正することにより、M の (a, b, c) の近くが (x, y) の滑らかな関数 $\zeta(x, y)$ のグラフ $z = \zeta(x, y)$ で書けることになります。

定理としてまとめておきましょう。

陰関数定理（3 変数関数一つの場合）

$g(x, y, z) = 0$ を満たす点 (a, b, c) で $g_z(a, b, c) \neq 0$ ならば、(a, b) の近くで定義された微分可能な関数 $\zeta(x, y)$ で

$$g\bigl(x, y, \zeta(x, y)\bigr) \equiv 0$$

を満たすものが存在する。
$g_y(a, b, c) \neq 0$ の場合や $g_x(a, b, c) \neq 0$ の場合も同様である。

つまり、M の (a, b, c) 付近が

$$z = \zeta(x, y)$$

というグラフに一致するような ζ が存在する、ということです。

なお、陰関数 $\eta(x, y)$ の偏微分は、2 変数関数のときに陰関数の微分を計算したのと同様にして計算できます。問題にしておきましょう。

問題 34. $g(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$ とする。$\zeta(x, y)$ を $g(x, y, z) = 0$ によって決まる陰関数とするとき、$\zeta_x(x, y)$ と $\zeta_y(x, y)$ を計算せよ。

もう一つ、熱力学に関連した問題を出しておきましょう。

問題 35. $g(x, y, z)$ に対し、点 (a, b, c) が $g(a, b, c) = 0$ および $g_x(a, b, c) \neq 0$, $g_y(a, b, c) \neq 0$, $g_z(a, b, c) \neq 0$ を満たすとする。このとき $g(x, y, z) = 0$ によって決まる三つの陰関数

$$\begin{aligned} &\zeta(x, y), \qquad \zeta(a, b) = c \\ &\xi(y, z), \qquad \xi(b, c) = a \\ &\eta(x, z), \qquad \eta(a, c) = b \end{aligned}$$

が次の関係式を満たすことを証明せよ。

$$(1) \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \equiv 1 \qquad (2) \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \equiv -1$$

（なお、熱力学ではしばしば

$$(1) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \qquad (2) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

と書かれるようです。）

問題 34 の解答

$\zeta(x,y)$ は $g(x,y,\zeta(x,y)) \equiv 0$、すなわち

$$x^2 + y^3 + \zeta(x,y)^4 \equiv 0$$

を満たしています。この両辺を x で偏微分しましょう。右辺は定数関数なので 0 です。左辺の $g(x,y,\zeta(x,y))$ を x で偏微分すると、合成関数の微分公式により、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\zeta(x,y))\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\zeta(x,y))\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\zeta(x,y))\frac{\zeta}{\partial x}(x,y) \\
&= 2x + 4\zeta(x,y)^3\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x,y)
\end{aligned}$$

となります。これが恒等的に 0 なのですから、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{2\zeta(x,y)^3}$$

となります。

同様に $g(x,y,\zeta(x,y)) \equiv 0$ の両辺を y で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\zeta(x,y))\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\zeta(x,y))\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\zeta(x,y))\frac{\zeta}{\partial y}(x,y) \\
&= 3y^2 + 4\zeta(x,y)^3\frac{\partial \zeta}{\partial y}(x,y) \equiv 0
\end{aligned}$$

となります。よって、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y}(x,y) = -\frac{3y^2}{4\zeta(x,y)^3}$$

です。 □

「答に $\zeta(x,y)$ が残っていてよいのか」と思われるかも知れません。確かに、「x と y の関数として表せ」といわれているなら、$\zeta(x,y)$ を具体的に x と y の関数として書くところまでいかないと解けたとは言えないでしょう。しかし、ラグランジュの未定乗数法を目指している我々の立場からはこれで十分なことがあとで分かりますので、とりあえずこれでよいのだと思っておいてください。

問題 35 の解答

問題 1 の解答のように、例えば、$g(x,y,\zeta(x,y)) \equiv 0$ の両辺を x で偏微分することにより、

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\zeta(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\zeta(x,y))\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x,y) \equiv 0$$

が得られます。よって、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x,y) = -\frac{g_x(x,y,\zeta(x,y))}{g_z(x,y,\zeta(x,y))}$$

となります。全く同様に計算することにより、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y}(x,y) = -\frac{g_y(x,y,\zeta(x,y))}{g_z(x,y,\zeta(x,y))}$$

および、

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(y,z) = -\frac{g_y(\xi(x,y),y,z)}{g_x(\xi(x,y),y,z)}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z}(y,z) = -\frac{g_z(\xi(x,y),y,z)}{g_x(\xi(x,y),y,z)}$$

と

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(x,z) = -\frac{g_x(x,\eta(x,y),z)}{g_y(x,\eta(x,z),z)}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial z}(x,z) = -\frac{g_z(x,\eta(x,y),z)}{g_y(x,\eta(x,z),z)}$$

が得られます。

これらの式を (1) と (2) の左辺に代入してみましょう。

まず、(1) を考えます。すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial y}(y,z)\frac{\partial \eta}{\partial x}(x,z) &= \left(-\frac{g_y(\xi(x,y),y,z)}{g_x(\xi(x,y),y,z)}\right)\left(-\frac{g_x(x,\eta(x,z),z)}{g_y(x,\eta(x,z),z)}\right) \\ &= \frac{g_x(x,\eta(x,z),z)}{g_x(\xi(y,z),y,z)}\frac{g_y(\xi(x,y),y,z)}{g_y(x,\eta(x,z),z)} \qquad (4)\end{aligned}$$

となります。ここで、$x=\xi(y,z)$ のグラフも $y=\eta(x,z)$ のグラフも $g(x,y,z)=0$ の (a,b,c) の近くに一致することから、(x_0,y_0,z_0) が $x=\xi(y,z)$ のグラフと $y=\eta(x,z)$ のグラフの共通部分の点のとき、

$$x_0=\xi(y_0,z_0) \qquad \text{および} \qquad y_0=\eta(x_0,z_0)$$

が成り立ちます。つまり、

$$(\xi(y_0,z_0),y_0,z_0) = (x_0,\eta(x_0,z_0),z_0)$$

です。式(4) にこの関係を当てはめると分子と分母の**値**は等しくなります。よって値は常に 1 です。

(2) の方も全く同様の理由により、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \xi}{\partial y}(y,z)\frac{\partial \eta}{\partial z}(x,z)\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x,y) \\ &= \left(-\frac{g_y(\xi(y,z),y,z)}{g_x(\xi(y,z),y,z)}\right)\left(-\frac{g_z(x,\eta(x,z),z)}{g_y(x,\eta(x,z),z)}\right)\left(-\frac{g_x(x,y,\zeta(x,y))}{g_z(x,y,\zeta(x,y))}\right) \\ &= -\frac{g_x(x,y,\zeta(x,y))}{g_x(\xi(y,z),y,z)}\frac{g_y(\xi(y,z),y,z)}{g_y(x,\eta(x,z),z)}\frac{g_z(x,\eta(x,z),z)}{g_z(x,y,\zeta(x,y))} \\ &= -1\end{aligned}$$

となります。 □