2008年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第5回

5月20日 清野和彦

5 多変数関数の微分

5.1 接平面の定義と全微分可能性

前節では、「幸せな結論」

> $z = f(x, y)$ のグラフの $(a, b, f(a, b))$ における接平面をグラフに持つ1次関数 $g(x, y)$ は
>
> $$g(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \tag{1}$$
>
> と表される。また、これを接点からの変位で表したものが方向微分の意味である。つまり、任意のベクトル $\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ に対し、
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = u\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + v\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \tag{2}$$
>
> が成り立つ。

にたどり着いておきながら、結論の式(2)が成り立たない例を問題13で見てもらいました。（問題13の関数は、$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ としたとき、$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ なのに $f_{\vec{u}}(0, 0) \neq f_{\vec{e}_1}(0, 0) + f_{\vec{e}_2}(0, 0)$ となってしまっています。）支離滅裂です。一体何が起こっているのでしょうか?

前節の結論が「反例」を持ってしまうということは、推論のどこかに間違いがあるということです。しかし、$f(x, y)$ の定義域を直線 l に制限したときの接**線**の式が

$$g(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) \qquad (x, y) \in l,\ \vec{u} = \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} \tag{3}$$

であるということまでは正しいはずです。なぜなら、そこまでの議論では1変数関数の微分について既に確認されていることしか使っていないからです。一方、式(3)から「$(x, y) \in l$」という制限をはずして任意の (x, y) を変数としたものが接**平面**

を表しているなら関係式(1) が成り立つということも正しいでしょう。なぜなら、平面は 1 次（以下の）関数で表されるということは第 1 回ではっきり確認してあり、そのことだけを使って式(1) を導いたからです。

だから、間違っているのは、上の二つを結びつけるときに使った

接線をぐるぐる回すと接平面になる

という考えでなければなりません。実際、前回の問題 13 の関数のグラフでは、原点における接線をぐるっと回すと

$$z = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \frac{v(3u^2 - v^2)}{u^2 + v^2}$$

すなわち $z = f(x, y)$ そのものになり、平面にはなっていませんでした。図 1 を見て下さい。放射線状の直線一本一本が原点における接線です。

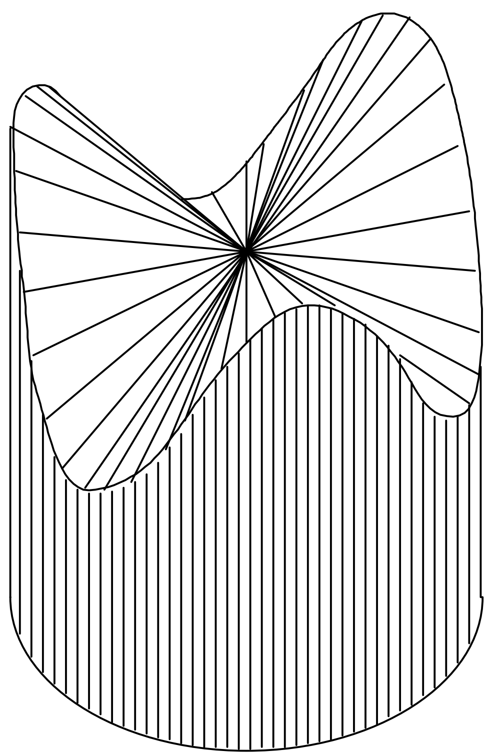

図 1: 第 4 回問題 13 の関数のグラフ再掲。

このような間違いを犯してしまった理由は

接平面の定義をしていない

からです。だから、「問題 13 の関数は原点で接平面を持たない」ということが成り立ち、しかも直観的な意味での接平面はやはり接平面である、というように「接

平面を持つ」ということを定義できれば、接平面を持つ関数に対しては幸せな結論が成り立つのではないか、と期待できるでしょう。そこで、この節では接平面とはいかに定義されるべきであるかを考え、その定義から図形的な言葉を取り除くことで最後（すなわち三つ目）の「多変数関数の微分」を定義しましょう。

5.1.1 図形的な考察

接平面というと、「接点の近くでは曲面との共有点が接点のみの平面」と思ってしまうかも知れません。しかし、例えば $z = x^2 - y^2$ という曲面の原点における接平面は xy 平面としか思えませんが、それは $z = x^2 - y^2$ と二直線を共有してしまっています。

1 変数のときにどう考えたかを参考にしたらどうか、と思うかも知れません。1 変数関数のグラフの接線とは「割線の極限」であると考えました。つまり、$y = f(x)$ のグラフに $\bigl(a, f(a)\bigr)$ で接する接線とは、$\bigl(a, f(a)\bigr)$ の近くに別の点 $\bigl(b, f(b)\bigr)$ を取り、その 2 点を通る直線（これを割線と言います）の $b \to a$ のときの「極限」のことだとしました。これを 2 変数関数のグラフでまねるとどうなるでしょうか。つまり、$z = f(x, y)$ のグラフの $\bigl(a, b, f(a, b)\bigr)$ における接平面とは、$\bigl(a, b, f(a, b)\bigr)$ 以外のグラフ上の 2 点で 3 点が一直線上に並ばないものを取り、その 2 点を $\bigl(a, b, f(a, b)\bigr)$ に近づけたときの、3 点が決める平面の「極限」としてみるわけです。

しかし、「二つの点をある点に近づけたときの極限」なんてとてもじゃないけど手に負えません。というのは、平面上で点を別の点に近づける近づけ方がいろいろありすぎるからです。直線的に近づくだけでなく、放物線を描いて近づくとか、渦を巻きながら近づくとか…。1 変数の場合には、x を a に近づける近づけ方が大きい方からと小さい方からの実質上二つしかなかったので接線を割線の極限としても平気だったわけで、2 変数になるともうダメです。視点を変える必要があります。

5.1.2 1 次近似として接平面を定義する

そこで、幾何学的にキチンと接平面を定義するのはあきらめて、1 変数関数の微分の定義式だけを参考にして接平面の式を定義してみましょう。それによって定義される式が（存在する場合）、前節で直観的に得た式(1) と一致しているなら、その定義は幾何学的に意味のある定義になっていると信じて良いのではないかと考えることにするわけです。

1 変数関数の微分の定義は

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

でした。つまり、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p$$

となる p が存在するとき微分可能と言い、p をその値と言うというわけです。この式で右辺の p を左辺に移項して分子にのせてやると

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - p(x - a)}{x - a} = 0$$

となります。分子の後半 $f(a)+p(x-a)$ は $x = a$ における $y = f(x)$ の接線の式になっています。一方、$x = a$ での値が $f(a)$ であるような 1 次関数 $P(x) = f(a)+q(x-a)$ が

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - q(x - a)}{x - a} = 0$$

を満たすとすると、上と逆の変形をこの式に施して

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = q$$

が得られますので、$q = f'(a)$ でなければならないことになります。結局、

> $x = a$ のときの値が $f(a)$ であるような 1 次関数 $P(x)$ について、$P(x)$ が $y = f(x)$ のグラフの $(a, f(a))$ における接線であることと
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = 0 \tag{4}$$
>
> を満たすことは同値である

ということがわかりました。これを 2 変数関数の場合に拡張することで、接平面の式を定義しようというわけです。

1 変数関数の場合の「$x \to a$」を「点 x が点 a に近づく」と読めば、2 変数関数の場合

点 (x, y) が点 (a, b) に近づく

ということ、つまり、

(x, y) と (a, b) との距離が 0 に近づく

と考えればよいでしょう。つまり、

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \to 0$$

のときの極限を考えようというわけです。

グラフが平面になる関数は 1 次（以下の）関数であることは第 1 節で示してあります。そこで、上で得た 1 変数関数の接線の場合の式をそのまま流用して次のように定義しましょう。

定義 3. 関数 $f(x,y)$ に対して $P(a,b)=f(a,b)$ をみたす 1 次式 $P(x,y)$ で

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-P(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \tag{5}$$

をみたすものが存在するとき、$f(x,y)$ は (a,b) で**微分可能**、あるいは**全微分可能**であると言い、$P(x,y)$ のことを $f(x,y)$ の (a,b) における **1 次近似**、$z=P(x,y)$ のグラフを $z=f(x,y)$ のグラフの点 $(a,b,f(a,b))$ における**接平面**と言う。

これで**偏微分とは関係なく**接平面の定義ができました。

5.2 全微分可能性と方向微分・偏微分

接平面（1 次近似、全微分可能性）の定義 3 で重要なことは、

> (x,y) を (a,b) に近づける**すべての近づけ方**について常に 0 に収束しなければならない

ということです。既に指摘したように、平面上である点を別な点に近づける近づけ方は無数にあるので、この条件はかなり厳しいものと言えるでしょう。それに対して、例えば x による偏微分は

$y=b$ にしてしまってから x を a に近づける

という近づけ方しか考えていないことになります。そのことに注意しながら、**偏微分とは無関係に定義された**全微分可能性、つまり 1 次近似と偏微分・方向微分との関係を調べましょう。

5.2.1 1 次近似の一意性

1 変数関数の場合、前節で示したように

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p \iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-p(x-a)}{x-a}=0$$

が成り立っています。左側は極限値なのですから存在するとしても一つだけです。ということは、右側が成立する 1 次関数、すなわち 1 次近似も同様に存在するとしても一つだけです。しかし、2 変数の場合の定義 3 では 1 次近似 $P(x,y)$ がひと

つしかあり得ないことはにわかには分かりません。一方、1 次近似 $P(x,y)$ が前節の式(1) しかあり得ないということが成り立たないなら、定義 3 を接平面の定義として認めるわけにはいかないでしょう。このことは次の定理で示すようにちゃんと成り立ちますので安心してください。

定理 1. $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能なとき、$f(x,y)$ は (a,b) で x でも y でも偏微分可能であり、1 次近似 $P(x,y)$ は

$$P(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

である。また、$f(x,y)$ は (a,b) であらゆる方向に方向微分可能であり、関係式(2) が成り立つ。

この定理から、前回の問題 13 の関数は原点で定義 3 の意味での接平面を持たないことがわかります。なぜならその関数は原点で関係式(2) が成り立たないからです。

証明. 記号がゴチャゴチャして見にくくなるのを避けるために、$(a,b)=(0,0), f(0,0)=0$ の場合で示します。

f が点 $(0,0)$ で 1 次近次 $P(x,y)$ を持つとしましょう。$P(x,y)$ は $P(0,0)=0$ を満たす 1 次関数ですので、

$$P(x,y) = px + qy \tag{6}$$

とおけます。すると、1 次近似の定義より、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - px - qy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

が成り立っています。

$(x,y)\to(0,0)$ での極限が存在するとは、(x,y) がどのように $(0,0)$ に近づこうとも同じ値に収束するということですから、$\vec{0}$ でない勝手なベクトル $\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ をとって、$t\to 0$ にともなって $(x,y)=(tu,tv)\to(0,0)$ となる場合でも 0 に収束しなければなりません。すると、

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - ptu - qtv}{|t|\sqrt{u^2+v^2}} = 0 \tag{7}$$

が得られます。ここで、分母にある $|t|$ の絶対値を取り除いても、$t\to +0$ の場合にはこのままだし、$t\to -0$ の場合には

$$-\lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - ptu - qtv}{t\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

というふうに左辺全体の符号が変わるだけで極限が 0 であることに変わりはないので、式(7) が成り立つことは、

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tu,tv)-ptu-qtv}{t\sqrt{u^2+v^2}}=0$$

が成り立つことと同値です。全体を $\sqrt{u^2+v^2}$ 倍することで、

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tu,tv)-ptu-qtv}{t}=0$$

が得られます。

極限を取る前の式で

$$\frac{f(tu,tv)-ptu-qtv}{t}=\frac{f(tu,tv)}{t}-pu-pv$$

と変形すると、右辺の最後の 2 項には t が関係していないので極限の外に出して右辺に移項することができます。すると、

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tu,tv)-f(0,0)}{t}=pu+qv \tag{8}$$

となります。この式の左辺は $(0,0)$ における $\vec{u}$ 方向微分 $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{u}}(0,0)$ の定義そのものです。これで、全微分可能な点ではあらゆる方向に方向微分可能でもあることが分かりました。

得られた式(8) で $\vec{u}$ として $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ をとることにより

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=p,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=q$$

となります。これを式(6) に代入して

$$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y$$

が得られ、式(8) に代入することで、

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}(0,0)=u\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+v\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

が得られます。これで示せました。 □

以上で、「全微分可能」「1 次近似（接平面）」「方向微分」「偏微分」がすべてつながりました。

問題 14. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とする。(グラフは単位球面の上半分です。)以下の問に答えよ。ただし、この関数が全微分可能であること(接平面を持つこと)は認めてよい。
(1) グラフ上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の法線ベクトルを、偏微分を使わずに図形的(直観的)な考察だけで一つ求めよ。(長さは 1 でなくてもよい。)
(2) 点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面をグラフに持つ関数(1 次近似)

$$f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

を計算せよ。
(3) (1) で求めたベクトルと (2) で求めた平面が直交していることを確認せよ。

問題 15. $g(x,y)=x^2-y^2$ とする。
(1) $g(x,y)$ が全微分可能であると仮定して、点 $(a,b,g(a,b))$ における接平面をグラフに持つ関数(1 次近似)を計算せよ。
(2) $g(x,y)$ が任意の点で全微分可能であることを証明せよ。

5.2.2 三つの微分の関係

定理 1 によってえられたつながりをはっきり表現するための記号を紹介しましょう。

定理 1 の証明で、$(a,b,f(a,b))$ を原点 $(0,0,0)$ にずらしたことは第 4.5 節で説明した**変位**で考えたということに当たります。1 次近似や接平面は**注目している点からの変位**で表す方が意味がとらえやすいのです。このことを行列の記法を使って説明しましょう。

全微分可能な関数 $f(x,y)$ を考えます。「変位としての」1 次近似式、つまり定義 3 の 1 次近似式 $P(x,y)$ から $f(a,b)$ を引いたものは、行列の積を利用して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)u+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$$

と書くことができます。このように、1 次近似式を

> 点 (a,b) からの変位のなすベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ から $f(a,b)$ からの変位のなすベクトル空間 $\mathbb{R}$ への関数(線型写像)

と見たものを

$$df_{(a,b)}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

と書きます。

「線型写像」などという難しい言い方をしてしまいましたが、要するに、

> 点 (a,b) からの変位のなす縦ベクトルに行列 $[f_x(a,b)\ f_y(a,b)]$ を左から掛けると 1 次近似の値の $f(a,b)$ からのズレが得られる

と言っているだけで、実質上は

$$df_{(a,b)} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]$$

という 1 行 2 列の行列だと思ってしまって全く問題ありません。
　結局、全微分可能な関数に関しては

- **1 次近似は 1 行 2 列の行列、**
- **偏微分はその成分、**
- **方向微分はその行列を方向ベクトルに掛けたときの値、**

という関係になっているわけです。

注意. ところで、よく

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{9}$$

という式を見かけますが、これは何でしょうか。それを知るには、dx や dy も df と同じように定義に従って解釈することが肝心です。$\varphi(x,y)$ と $\psi(x,y)$ をそれぞれ

$$\varphi(x,y) = x, \qquad \psi(x,y) = y$$

としましょう。すると、任意の点 (a,b) について

$$\begin{aligned} d\varphi_{(a,b)} &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b)\ \ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b)\right] = [1,0] \\ d\psi_{(a,b)} &= \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(a,b)\ \ \frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b)\right] = [0,1] \end{aligned}$$

となっています。よって、(a,b) で全微分可能な $f(x,y)$ に対して、

$$\begin{aligned} df_{(a,b)} &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)[1,0] + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)[0,1] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)d\varphi_{(a,b)} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)d\psi_{(a,b)} \end{aligned}$$

が成り立ちます。この表示から (a,b) を省略し φ を x と、ψ を y と書けば式(9) が得られるわけです。写像の言葉で言えば、

> $df_{(a,b)}$ という写像は $dx_{(a,b)}$ という写像の $f_x(a,b)$ 倍と $dy_{(a,b)}$ という写像の $f_y(a,b)$ 倍の和に一致する

ということを意味する式だということです。

もう一つよく見かけるのは「**全微分**」という用語です。実は、現代の数学用語としては全微分というものは**ありません**。あるのは**全微分可能性**だけです。古い本や物理の本をいくつか眺めてみた感じでは、**1 次近似を変位で表したもの**、つまり $df_{(a,b)}$（を左から掛ける写像）のことを全微分と呼んでいるようです。ただし、現代の数学用語としては、任意の (a, b) で全微分可能なとき、(a, b) まで変数として扱った df のことを**微分形式**と呼ぶのが普通で、やはり全微分とは言いません。★

5.3 接平面と勾配ベクトル

前節で

> 二つの偏微分の値を横に並べて 1 行 2 列の行列と見なし、それを縦ベクトルに左から掛けることによって写像と考える

などという難しげなことを言いましたが、縦に並べればただの平面ベクトルですからそのように考えたベクトル、つまり平面内の矢印には何か意味がないのか、という疑問が浮かぶでしょう。この節ではそれについて説明します。

関数 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能なとき、

$$\operatorname{grad} f(a,b) = \begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix}$$

を

$f(x, y)$ の (a, b) における**勾配ベクトル**

と言います[1]。なぜそう呼ぶかというと、

> $z = f(x, y)$ のグラフの点 (a, b) での傾きが最も大きい向きを向いたベクトル

だからです。ただし、「グラフが最も傾いている向き」とは「その点での接平面が最も傾いている向き」のことです。（今、全微分可能な関数を考えているので接平面があります。）そういうわけで、以下の考察はすべて $f(x, y)$ が 1 次（以下の）関数として行います。

「傾き方」だけが問題なので、原点を通る平面だけで考えましょう。つまり、

$$f(x, y) = px + qy$$

[1] grad という記号は、勾配に当たる英語の gradient（グレイディエント）から取られたものです。ただし、日本語としてはグラジエントと発音する人が多いようです。

とします。「一番傾いている方向」とは、例えば (x, y) を単位円上の点に限ったとき、その中で $f(x, y)$ の値が一番大きい (x, y) のことです。そこで、

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と内積で表してみましょう。p と q は定数ですから、x, y を動かすごとに $f(x, y)$ の値が増えたり減ったりするわけですが、内積の幾何学的意味から、$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の長さを例えば 1 に限ったとき、$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ のなす角が 0 のとき、つまり、$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ と同じ向きを向いているときに $f(x, y)$ の値が最大になります。結局、

平面 $z = px + qy$ はベクトル $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ の向きに一番上り坂がきつい

ということになります。

全微分可能な関数 $f(x, y)$ の (a, b) における接平面は

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

のグラフでした。これと平行で原点を通る平面とは

$$z = f_x(a,b)x + f_y(a,b)y$$

のグラフです。前段落の考察と比較すると $p = f_x(a, b), q = f_y(a, b)$ となっていますので、接平面が一番強く傾いている向きは $\operatorname{grad} f(a, b)$ の向きです。これで示せました。

注意. 上の考察では、なぜ $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 向きに一番上り坂がきついのか今ひとつよくわからないかも知れません。そのような人は**グラフの法線**を使って直接考えてみるとよいでしょう。

xy 平面の下向き法線は z 軸負の向きです。一方、$z = px + qy$ の下向き法線ベクトルとして、例えば

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} p \\ q \\ -1 \end{bmatrix}$$

が取れることを第 1 節で学びました。ここで、xy 平面を傾けて $z = px + qy$ と一致させようとしてみます。そのとき、平面そのもので考えるのではなく法線で考えます。傘を傾けるために傘の柄を動かすのをイメージしてみて下さい。すると、z 軸負の向きのベクトルを $\vec{n}$ に重なるように動かす（回す）わけですが、そのとき一番高く上がる向きはまさ

に $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ になっています。証明はしませんがイメージはできると思います。いかがでしょうか?

この方法でも今ひとつイメージがしっくり来ない人は、「一番傾いている方向」ではなく「全く傾いていない方向」を考えてみましょう。$z = px + qy$ のグラフで「全く傾いていない方向」とは xy 平面との交線と平行な方向です。この交線は $0 = px + qy$ を満たす (x, y) のことです。ここで、

$$0 = px + qy = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と内積で書いてみれば、「全く傾いていない方向」とは $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ と直交する方向であることが分かります。もちろん「最も傾いている方向」は「全く傾いていない方向」と直交しますので、結局 $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 向きかその逆向きに最も傾いていることになります。今「最も傾いている方向」という言葉で表しているのは $px + qy$ の値が「最も増える方向」ですので、この二つの向きのうち値が正になる方が求める方向です。これで $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 向きに最も傾いていることが分かりました。★

問題 14 の解答

(1) 北極点 $(0, 0, 1)$ における接平面は xy 平面に平行です。なぜなら、$z = f(x, y)$ のグラフは z 軸を中心に回転させても変わらないので、接平面も z 軸回りの回転で不変でなければならないからです。よって、法線ベクトルとしては例えば $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ をとることができます。

一般の点 $(a, b, \sqrt{1 - a^2 - b^2})$ においては、北極点がその点に重なるように原点を中心にしてグラフを回転させれば接平面も接平面に移り、法線も法線に移るので、例えば $\begin{bmatrix} a \\ b \\ \sqrt{1 - a^2 - b^2} \end{bmatrix}$ が取れます。

(2) 偏微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \left((1 - x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \right)' \Big|_{x=a} = \frac{1}{2}(1 - x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) \Big|_{x=a} \\ &= \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}} \end{aligned}$$

および、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{-b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}$$

となりますので、$(a, b, \sqrt{1-a^2-b^2})$ における接平面をグラフに持つ関数、つまり 1 次近似は

$$\sqrt{1-a^2-b^2} + \frac{-a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}(x-a) + \frac{-b}{\sqrt{1-a^2-b^2}}(y-b) = \frac{1-ax-by}{\sqrt{1-a^2-b^2}}$$

となります。

(3) (2) の関数のグラフの式

$$z = \frac{1-ax-by}{\sqrt{1-a^2-b^2}}$$

の分母を払って左辺に集めると、

$$ax + by + \sqrt{1-a^2-b^2}z - 1 = 0$$

となります。この平面は定数項を 0 にした平面

$$ax + by + \sqrt{1-a^2-b^2}z = 0$$

と平行ですから、この平面と (1) のベクトルが直交していることを示せばよいことになります。この式は内積を使って

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ \sqrt{1-a^2-b^2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

と書くことができます。すなわち、(x, y, z) が平面上の点であることは、$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ というベクトルが $\begin{bmatrix} a \\ b \\ \sqrt{1-a^2-b^2} \end{bmatrix}$ という (1) で求めたベクトルと直交していることが必要十分だと言っています。これで (1) のベクトルと (2) の平面が直交していることが示せました。 □

問題 15 の解答

(1) $g_x(x, y) = 2x,\ g_y(x, y) = -2y$ なので、$(a, b, a^2 - b^2)$ における接平面の式、すなわち 1 次近似は

$$a^2 - b^2 + 2a(x-a) - 2b(y-b) = -a^2 + b^2 + 2ax - 2by$$

です。

(2) この問題は、(1) で求めた 1 次近似を $P_{(a,b)}(x,y)$ としたとき、任意の (a,b) で

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y) - P_{(a,b)}(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \tag{10}$$

が成り立つことを証明せよ、というのと同じです。なぜなら、$g(x,y)$ が全微分可能なら 1 次近似は (1) で求めた $P_{(a,b)}(x,y)$ なのですから、式(10) を成り立たせる可能性のある 1 次関数は $P_{(a,b)}(x,y)$ しかないからです。

極限を計算するために分子を計算すると、

$$\begin{aligned} g(x,y) - P_{(a,b)}(x,y) &= \left(x^2 - y^2\right) - \left(a^2 - b^2 + 2a(x-a) - 2b(y-b)\right) \\ &= (x-a)^2 - (y-b)^2 \end{aligned}$$

となります。

さて、$(x,y) \to (a,b)$ のときの極限を考えたいわけですが、「x と y を無関係に $(x,y) \to (a,b)$ としたときの極限」とは、$x = a + r\cos\theta,\ y = a + r\sin\theta$ と置いたとき、

> θ がどのようになっていようとも $r \to 0$ としたとき同じ極限値に収束する

と言い換えることができます。そこで、$x = a + r\cos\theta,\ y = a + r\sin\theta$ を代入しましょう。すると、

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_{(a,b)}(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} &= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} r\cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$

となります。これで示せました。 □

問題 15 の (2) で体験してもらったように、関数が全微分可能であることを示すのは結構面倒です。問題 14 に全微分可能であることを示す問を付けなかったのはそのためです。興味のある人は問題 14 の関数が全微分可能であることを証明してみて下さい。

全微分可能であることが多変数関数の微分に最も相応しいということが納得できたとしても、具体的な関数が全微分可能であることを示すのがこんなに大変では使い物になりません。次回は、その点にもとてもありがたい救いがあることを説明します。