2008年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第9回

6月17日 清野和彦

前回の問題24の詳解

前回の解答で、

$$x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$$

が $\log(1+x+2y)$ の $(0,0)$ における2次近似であることを直接微分することなく求めました。しかし、なぜその計算の仕方で正しく2次近似が求められるのか、そのことの根拠を説明できなかったので、ここに説明つきで解答を再掲します。

まず、r を変数とする1変数関数 $\frac{1}{1+r}$ の $r=0$ における1次近似を求めます。

$$1 - r^2 = (1+r)(1-r) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{1+r} = 1 - r + \frac{r^2}{1+r}$$

であることから

$$\lim_{r \to 0} \frac{\frac{1}{1+r} - (1-r)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{\frac{r^2}{1+r}}{r} = 0$$

となり、$1-r$ が求める1次近似であることがわかります。

さて、一般に $g(r)$ の $r=a$ における2次近似

$$g(a) + g'(a)(r-a) + \frac{g''(a)}{2}(r-a)^2$$

を r で微分すると

$$g'(a) + g''(a)(r-a)$$

となりますが、$h(r) = g'(r)$ とおくと $h(a) = g'(a),\ h'(a) = g''(a)$ ですので

$$g'(a) + g''(a)(r-a) = h(a) + h'(a)(r-a)$$

すなわち、これは $h(r)$ の $x=a$ における1次近似です。ここで、$g(r) = \log(1+r)$ とおくと $h(r) = g'(r) = \frac{1}{1+r}$ であり、$h(r)$ の $r=0$ における1次近似が $1-r$ であることが分かっているので、

$$g'(0) + g''(0)r = 1 - r \quad \text{すなわち} \quad g'(0) = 1,\ \ g''(0) = -1$$

です。よって、$g(r) = \log(1+r)$ の 2 次近似は

$$g(0) + g'(0)r + \frac{g''(0)}{2}r^2 = \log(1+0) + 1 \cdot r + \frac{-1}{2}r^2 = r - \frac{r^2}{2}$$

であることが分かります。ということは、

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log(1+r) - r + \frac{r^2}{2}}{r^2} = 0$$

が成り立っています。

ここで $r = x + 2y$ を代入してみましょう。すると、

$$\lim_{x+2y \to 0} \frac{\log(1+x+2y) - (x+2y) + \frac{(x+2y)^2}{2}}{(x+2y)^2} = 0$$

が得られます。$(x, y) \to (0, 0)$ ならば $x + 2y \to 0$ となりますので、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x+2y) - \left(x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2\right)}{(x+2y)^2} = 0 \tag{1}$$

が成り立ちます。（分子の括弧を展開しました。）分母の $(x+2y)^2$ については、極座標変換することで、

$$\frac{x^2+y^2}{(x+2y)^2} = \frac{r^2}{r^2(\cos\theta + 2\sin\theta)^2} \geq \frac{1}{9}$$

が分かります。よって、式(1)、すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x+2y) - x - 2y + x^2/2 + 2xy + 2y^2}{x^2+y^2} \frac{x^2+y^2}{(x+2y)^2} = 0$$

が成り立つということは

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x+2y) - x - 2y + x^2/2 + 2xy + 2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

が成り立っていなければならないことになります。この式は

$$x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$$

が $\log(1+x+2y)$ の $(0,0)$ における 2 次近似であることを意味しています。 □

一般に次が成り立ちます（ここでは証明はしませんが）。1 変数関数 $g(r)$ に $r = f(x, y)$ を代入してできる合成関数を $F(x, y)$ とします。つまり、$F(x, y) = g(f(x, y))$ とします。また、$f(x, y)$ の (a, b) における 2 次近似を $p(x, y)$、$g(r)$ の

$c=f(a,b)$ における 2 次近似を $q(r)$ とします。このとき、$q(r)$ に $r=p(x,y)$ に代入してできる 4 次（以下の）式 $q(p(x,y))$ の（$x-a$ と $y-b$ の多項式としての）2 次までの部分を $Q(x,y)$ とすると、$Q(x,y)$ は $F(x,y)$ の (a,b) における 2 次近似になっているのです。上の解答では、$g(r)=\log(1+r)$, $f(x,y)=x+2y$, $F(x,y)=\log(1+x+2y)$, $(a,b)=(0,0)$, $p(x,y)=x+2y$, $c=0$, $q(r)=r-r^2/2$ なので、

$$q(p(x,y))=Q(x,y)=x+2y-\frac{x^2}{2}-2xy-2y^2$$

となる、というわけなのです。

6.3.2 C^2 級関数と偏微分の順序

前節で得られた結論のイヤなところは、仮定の「f, f_x, f_y がすべて全微分可能」という部分でしょう。そこで、「全微分可能」を「C^1 級」に強めて

$$f \text{ も } f_x \text{ も } f_y \text{ も } C^1 \text{ 級}$$

という仮定にしたらどうでしょうか。すると、f_x や f_y が C^1 級ということは f_x も f_y も全微分可能になり、ということは f_x も f_y も連続になるので、f は自然に C^1 級ということになります。さらに、f_x が C^1 級ということの定義は $(f_x)_x=f_{xx}$ と $(f_x)_y=f_{xy}$ が連続であるということ、f_y が C^1 級ということの定義は $(f_y)_x=f_{yx}$ と $(f_y)_y=f_{yy}$ が連続であるということなので、f_x と f_y が共に C^1 級ということは四つの 2 階偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} がすべて連続であるということと同値です。つまり、新しく強めた仮定は

四つの 2 階偏導関数がすべて連続である

と言い換えることができるわけです。ここで、2 つの（1 階）偏導関数が共に連続であることを C^1 級と呼んだこと、および 1 変数関数において 2 階導関数が連続であることを C^2 級と呼んだことを踏まえて、

定義 6. $f(x,y)$ の四つの偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ がすべて連続であるとき、$f(x,y)$ は $\boldsymbol{C^2}$ **級**であると言う。

と定義することにしましょう。そして、以下では $f(x,y)$ は C^2 級であると仮定します。

仮定を強めるというのはなんだかもったいないような気がするかも知れません。しかし、我々は C^2 級の 1 変数関数に対する極値判定法を 2 変数の場合に拡張しようとしているのですから、2 変数関数が C^2 級であるという仮定が結局は本質的に

効いてくるだろうという予感がするでしょう。(その予感の正しいことがあとで証明されます。) また、それ以外にも C^2 級にしておくとありがたいことがあるのです。それは、**2 階偏微分が偏微分する変数の順序によらない**ということ、式で書けば $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つということです。大変重要ですので、定理として書いておきましょう。

定理 8. f が C^2 級ならば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

が成り立つ。

証明. $f_{xy}(a,b)$ を定義で書くと、

$$\begin{aligned}
f_{xy}(a,b) &= \frac{\partial f_x}{\partial y}(a,b) \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{f_x(a,b+k) - f_x(a,b)}{k} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}}{k} \\
&= \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)}{hk}\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

となり、$f_{yx}(a,b)$ も同様に、

$$\begin{aligned}
f_{yx}(a,b) &= \frac{\partial f_y}{\partial x}(a,b) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(a+h,b) - f_y(a,b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle \lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k} - \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)}{hk}\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

となります。つまり、この二つは h と k を 0 に近づける順番だけが違うわけです。

この分子に似たようなものをどこかで見たことがあります。そう「C^1 級ならば全微分可能」ということの証明の中です。そのときと同じように 1 変数関数の平均値の定理を使って分子を「hk 掛ける何とか」という形に変形することを目指しましょう。それができれば分子と分母の hk が打ち消しあうからです。

k を一つ決めます。

$$\varphi(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$$

とおくと、$\varphi(x)$ は微分可能な関数ですので、平均値の定理により

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=\varphi'(a+\theta h)h \qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ のあることが分かります。(θ は h だけでなく k にも依存しています。) これを φ ではなく f での表記に戻すと、

$$\begin{aligned}&f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)\\&=\big(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a+\theta h,b)\big)h\end{aligned} \tag{4}$$

となります。さらに、h と θ も一つずつ固定し、

$$\psi(y)=f_x(a+\theta h,y)$$

とおいて平均値の定理をまた使うと、

$$\psi(b+k)-\psi(b)=\psi'(b+\omega k)k \qquad 0<\omega<1$$

を満たす ω があります。(この k は先ほど固定した k です。ω も k と h の両方に依存しています。) これを ψ ではなく f に戻して書くと、

$$f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a+\theta h,b)=f_{xy}(a+\theta h,b+\omega k)k$$

となります。これを式(4) に代入して、

$$\begin{aligned}&f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)\\&=f_{xy}(a+\theta h,b+\omega k)hk\end{aligned}$$

という目標の形に変形できました。以上により、$f_{xy}(a,b)$ の定義式(2) と $f_{yx}(a,b)$ の定義式(3) の lim の中身はどちらも

$$f_{xy}(a+\theta h,b+\omega k)$$

だということが分かりました。

今、$f_{xy}(x,y)$ は連続だと仮定しているのですから、h,k の 0 への近付き方によらずに、$f_{xy}(a+\theta h,b+\omega k)\to f_{xy}(a,b)$ です。特に、h と k のどちらを先に 0 にしても収束先は変わりません。すなわち、式(2) と式(3) の極限値は一致します。これで証明できました。 □

注意. C^2 級と仮定しましたが、使ったのは f_{xy} が連続であることだけでした。もちろん、x と y の役割を取り替えれば f_{yx} の連続性だけを仮定しても同じ結論の成り立つことが分かります。つまり、

$$f_{xy} \text{ と } f_{yx} \text{ のどちらか一方が連続なら } f_{xy}=f_{yx} \text{ が成り立つ}$$

わけで、特に

> f_{xx} と f_{yy} が連続で、さらに f_{xy} か f_{yx} のどちらか一方が連続ならば f は C^2 級である。

が成り立ちます。f が C^2 級であることを確認するのに四つの 2 階偏導関数すべての連続性を確認する必要はないのです。★

最後に、前節の結果を f が C^2 級であることを仮定して改めて書き直しておきましょう。

定理 9 (C^2 級関数の 2 次近似). $f(x,y)$ が C^2 級ならば、f は任意の点 (a,b) で 2 次近似を持ち、2 次近似は具体的には

$$\begin{aligned}&f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\end{aligned}$$

で与えられる。

6.3.3 停留点における 2 次近似との大体の関係

前節で 2 変数関数の 2 次近似がどういうものであるかが分かったので、この節と次の節でそれを使って各停留点が極値であるかどうか判定する方法を考えましょう。この節で大雑把に把握し、次節で正確な関係を述べます。言葉を換えていえば、**この節で結論の判定法を紹介し、次節でそれを証明する**というわけです。だから、（次節での証明も大切ですが、むしろ）この節で述べる結論を正しく把握することがまず重要です。

さて、2 次近似をどのように使うかというと、

2 次近似は近似した点の近くでは $f(x,y)$ によく似ている

ということを信じて、停留点 (a,b) が

2 次近似で極大なら f でも極大、2 次近似で極小なら f でも極小

と考えるわけです。1 変数のときと全く同じ考え方です。つまり、1 変数関数 $f(x)$ において $x=a$ が停留点、つまり $f'(a)=0$ を満たすとき、$x=a$ における 2 次近似が

$$f(a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

という放物線になることから、

$$f''(a) > 0 \text{ なら放物線は下に凸だから } f \text{ においても極小}$$
$$f''(a) < 0 \text{ なら放物線は上に凸だから } f \text{ においても極大}$$

と考えたのと同じように考えようというわけです。というわけで、この節でしなければならないことは停留点における 2 次近似のグラフの概形を調べることです。

(a,b) が f の停留点のとき、つまり $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立っているとき、f の (a,b) における 2 次近似は

$$f(a,b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2$$

となります。知りたいのはこの 2 次関数において (a,b) が極大や極小になるときの係数の満たすべき条件式です。ということは、定数 $f(a,b)$ はあってもなくても同じですし、全体を 2 倍して $1/2$ を消してしまってかまいません。また、$u = x-a$, $v = y-b$ と置き換えて（つまり変位で書き換えて）u と v の 2 次式として $(0,0)$ が極大や極小になる場合を考えればよいわけです。式がゴチャゴチャするのを避けるために、

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

と置きましょう。すると、結局我々が調べるべき 2 次式 $Q(u,v)$ は

$$Q(u,v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

となり、することは $z = Q(u,v)$ のグラフにおいて $(0,0,0)$ が極大か極小かどれでもないかを調べることです。

どうやって調べるのかというと、u と v の式に直してもまだ俄にはグラフの概形が思い描けないので、u や v の 2 次式と見て平方完成するのです。が、この作業は既に第 1.2.2 節（第 2 回）で済んでいます。（第 1.2.2 節は 2 次関数のグラフの概形を調べる節でした。）そこで、第 1.2.2 節の結果を引用するだけでこの節の目的は果たせます。以下、X と Y は u と v の適当な 1 次式による新しい変数です。つまり、X, Y は uv 空間における（直交していないかも知れない）新しい座標です。その上で、次が結論でした。

(1) $AC - B^2 > 0$ かつ $A > 0$（すなわち $C > 0$）のときは

$$z = X^2 + Y^2$$

(2) $AC - B^2 > 0$ かつ $A < 0$（すなわち $C < 0$）のときは

$$z = -X^2 - Y^2$$

(3) $AC - B^2 < 0$ のときは

$$z = X^2 - Y^2$$

(4) $AC - B^2 = 0$ のときは

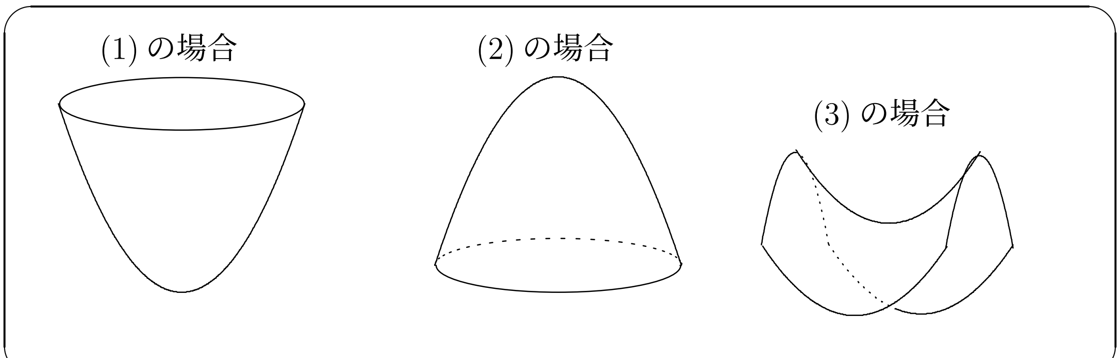
$$z = X^2 \qquad \text{または} \qquad z = -X^2$$

どの場合も停留点 (a, b) に当たるのは原点 $(X, Y) = (0, 0)$ であり、そこでの z の値は 0 です。というわけで、(a, b) の近くで $f(x, y)$ と $Q(x - a, y - b)$ が似ていることを信じるなら、上の (1)〜(4) に対応して次のような状況になっていることが分かります。（繰り返しますが、証明は次節で与えます。）

(1) の場合、$(X, Y) \neq (0, 0)$ なら $X^2 + Y^2 > 0$ なので $(0, 0)$ で最小です。だから $f(x, y)$ は (a, b) で極小です。

(2) の場合、$(X, Y) \neq (0, 0)$ なら $-X^2 - Y^2 < 0$ なので $(0, 0)$ で最大です。だから $f(x, y)$ は (a, b) で極大です。

(3) の場合、$(X, Y) \neq (0, 0)$ でも $X > Y$ なら $X^2 - Y^2 > 0$ であり $X < Y$ なら $X^2 - Y^2 < 0$ なので、$(0, 0)$ のどんなに近くにも値が正の点も負の点もあります。よって、この場合 $f(x, y)$ は (a, b) で**極大でも極小でもありません**。「極大か極小かどちらでもないか分からない」**のではなく**、極大でも極小でもないということが **2 次近似から分かる**のです。このような点を**鞍点**または**峠点**と言います。



(4) の場合、2 次近似が例えば $z = X^2$ になったとすると 2 次近似としては $(0,0)$ は最小点ですが、$(0,0)$ 以外にも $(0,Y)$ という点はすべて最小値 0 をとります。一方、2 次近似は関数そのものではなく「似ている」というだけのものですので、元の関数が $(0,Y)$ に当たる点で $(0,0)$ に当たる点（すなわち停留点 (a,b)）での値と同じ値なのか、大きい値なのか、小さい値なのかを **2 次近似だけから判定することはできません**。$(0,0)$ が極大でないことだけは分かりますが、極小なのか極値をとらないのかを 2 次近似から判断することはできないのです。実際、$f(x,y) = x^2 + y^4$, $g(x,y) = x^2 + y^3$ のどちらも $(0,0)$ における 2 次近似は x^2 ですが、f では極小点なのに g では極値をとりません。

以上をまとめると、次の判定法になります。

定理 10 (極値判定法). (a,b) が C^2 級関数 $f(x,y)$ の停留点のとき、

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

とおくと次が成り立つ。

(1) $AC - B^2 > 0$ かつ $A > 0$（すなわち $C > 0$）のとき (a,b) は極小点。

(2) $AC - B^2 > 0$ かつ $A < 0$（すなわち $C < 0$）のとき (a,b) は極大点。

(3) $AC - B^2 < 0$ のとき (a,b) は鞍点。

(4) $AC - B^2 = 0$ のとき、2 階微分の値だけから (a,b) で極値をとるかとらないかを判定することはできない。

6.3.4　正確な関係：テイラーの定理

この節では定理 10「極値判定法」を証明します。前節では、元の関数を 2 次近似で置き換えてしまったために $f(x,y)$ の本当の値からずれてしまっていることが問題でした。そこで、(a,b) に近い (x,y) での $f(x,y)$ の本当の値を、2 次近似の 2 次の係数を「ほんの少し」変えることできっちり実現する、という方法で証明します。要するに、1 変数のときと全く同様に証明するということです。実際、証明には 1 変数関数のテイラーの定理

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a + \theta(x-a))}{2}(x-a)^2 \qquad 0 < \exists\theta < 1$$

を使います。

使い方は「1 次近似が元の関数に似ている」ということを証明したときと同じです。点 (a,b) の近くに f の値を比較したい点 (x_0, y_0) を一つとります。その上で、

(a,b) と (x_0,y_0) の 2 点を通る直線を

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \end{bmatrix}$$

と t でパラメタ付けし、$f(x,y)$ をここに制限した関数を $\varphi(t)$ と置きます。つまり、

$$\varphi(t) = f(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))$$

と定義するわけです。

$$\varphi(0) = f(a,b), \qquad \varphi(1) = f(x_0, y_0)$$

となっていることに注意して下さい。この $\varphi(t)$ に $t=1$, $a=0$ でテイラーの定理を適用すると、

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)1 + \frac{\varphi''(\theta \cdot 1)}{2}1^2 = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(\theta)}{2} \tag{5}$$

を満たす θ が $(0,1)$ に存在するということが分かります。

$\varphi'(t)$ は $(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))$ における $\begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \end{bmatrix}$ 方向微分ですので、

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = &\frac{\partial f}{\partial x}(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))(x_0 - a) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))(y_0 - b) \end{aligned} \tag{6}$$

となります。特に、

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x_0 - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y_0 - b)$$

です。また、$\varphi''(t) = (\varphi')'(t)$ は関数(6) の $(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))$ における $\begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \end{bmatrix}$ 方向微分ですので、

$$\begin{aligned} \varphi''(t) = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))(x_0 - a)^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))(x_0 - a)(y_0 - b) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + t(x_0 - a), b + t(y_0 - b))(y_0 - b)^2 \end{aligned}$$

となります。ただし、f は C^2 級としているので、$f_{xy} = f_{yx}$ であることを使って式を整理してあります。

これらを 1 変数関数のテイラーの定理(5) に戻し、(x_0, y_0) を (x, y) と書き直したものが **2 変数関数のテイラーの定理**です。

定理 11 (2 変数関数のテイラーの定理). C^2 級の 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し、

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(y-b)^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

これでやっと前節の判定法（定理 10）を証明する準備が整いました。判定法のうち (4) の「極値をとるかどうか分からない」という場合については、$f(x, y) = x^2+y^4$ と $g(x, y) = x^2 + y^3$ という実例によって既に説明済みですので、証明しなければならないのは (1)(2)(3) の三つです。どの場合でもやり方は同じですので (1) だけ、つまり、

> (a, b) が C^2 級関数 $f(x, y)$ の停留点のとき、
>
> $$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$
>
> とおいた上で
>
> $$AC - B^2 > 0 \qquad \text{かつ} \qquad A > 0$$
>
> が成り立っているならば (a, b) は極小点である。

だけ証明しましょう。

(x, y) を固定します。すると、テイラーの定理の θ が決まります。そこで、

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \\ B' &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \\ C' &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \end{aligned}$$

と置きましょう。(a,b) は停留点なので $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ですから、テイラーの定理の式は

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{2}A'(x-a)^2+B'(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}C'(y-b)^2$$

となります。見難いので、例によって $u=x-a,\ v=y-b$ と置いて 2 次の部分（の 2 倍）を平方完成しましょう。f は C^2 級なので f_{xx} は連続です。よって $f_{xx}(a,b)=A>0$ であることから、(x,y) が (a,b) に十分近ければ（正確には、ある正実数 r_1 が取れて、(a,b) を中心とした半径 r_1 の円板の中に (x,y) が入っていれば）、$f_{xx}(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))=A'>0$ も成り立ちます。よって、A' で割ることができて、

$$A'u^2+2B'uv+C'v^2=A'\left(u+\frac{B'}{A'}v\right)^2+\frac{A'C'-B'^2}{A'}v^2$$

となります。再び f が C^2 級であることと、連続関数に四則演算を施したものは連続であることから、連続関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

と定義すると、$g(x,y)$ は連続関数になります。しかも、

$$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left(f_{xy}(a,b)\right)^2=AC-B^2>0$$

ですので、(x,y) が (a,b) に十分近ければ（正確には、ある正実数 r_2 が取れて、(a,b) を中心とした半径 r_2 の円板に (x,y) が入っていれば）、

$$g(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))=A'C'-B'^2>0$$

も成り立ちます。以上より、

$$A'u^2+2B'uv+C'v^2=\left(\sqrt{A'}\left(u+\frac{B'}{A'}v\right)\right)^2+\left(\sqrt{\frac{A'C'-B'^2}{A'}}v\right)^2$$

というふうに「二乗足す二乗」の形に整理できるので、$(u,v)\neq(0,0)$ なら 2 次の部分は正であることが分かりました。ということは $(x,y)\neq(a,b)$ で (x,y) が (a,b) に十分近ければ（正確には、上の二つの実数 r_1 と r_2 のうち小さい方を r としたとき、(a,b) を中心とした半径 r の円板に (x,y) が入っていれば）

$$f(x,y)=f(a,b)+\text{正実数}>f(a,b)$$

が成り立つことになります。これで $f(a,b)$ が極小値であることが証明できました。

問題 26. 関数

$$f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$

の停留点（$f_x = f_y = 0$ となる点）をすべて求め、そこが極大か極小か鞍点かどれでもないか調べよ。

問題 27. 関数

$$g(x,y) = x^3y + xy^3 - xy$$

の停留点をすべて求め, そこが極大か極小か鞍点かどれでもないか調べよ。

問題 26 の解答

まず停留点を求めましょう。

$$f_x(x,y) = 6x^2 + 6y, \qquad f_y(x,y) = 6y + 6x$$

なので、$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たすことは

$$y = -x \qquad \text{かつ} \qquad y = -x^2$$

が成り立つことと同値です。y を消去すると $x^2 = x$ となりますので、$x = 0$ または 1 です。$x = 0$ とすると $y = 0$、$x = 1$ とすると $y = -1$ とどちらの x の値に対しても y がただ一つ決まります。以上より、$f(x,y)$ の停留点は

$$(0,0) \qquad \text{と} \qquad (1,-1)$$

です。

次に判定法を使って極値かどうか判定するために f の 2 階微分を計算しましょう。

$$f_{xx}(x,y) = 12x, \qquad f_{xy}(x,y) = 6, \qquad f_{yy}(x,y) = 6$$

です。

停留点 $(0,0)$ においては

$$f_{xx}(0,0) = 0, \qquad f_{xy}(0,0) = 6, \qquad f_{yy}(0,0) = 6$$

なので、

$$f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = -36 < 0$$

ですから**鞍点**です。

停留点 $(1,-1)$ においては

$$f_{xx}(1,-1) = 12, \qquad f_{xy}(1,-1) = 6, \qquad f_{yy}(1,-1) = 6$$

なので、

$$f_{xx}(1,-1) = 12 > 0 \quad \text{かつ} \quad f_{xx}(1,-1)f_{yy}(1,-1) - (f_{xy}(1,-1))^2 = 36 > 0$$

ですから**極小点**です。 □

問題 27 の解答

$g(x,y)$ を偏微分すると、

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + y^3 - y, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^3 + 3xy^2 - x \tag{7}$$

となります。よって、$g_x(x,y) = 0$ を満たす点は

$$y = 0 \qquad \text{または} \qquad 3x^2 + y^2 = 1$$

を満たすもの、$g_y(x,y) = 0$ を満たす点は

$$x = 0 \qquad \text{または} \qquad x^2 + 3y^2 = 1$$

を満たすものです。この二条件を同時に満たす (x,y) は

$$(0,0),\ (1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

の 9 点です。

それぞれの点における 2 階微分の値を計算するために、式(7) をもう一度偏微分して 2 階偏導関数を求めておきましょう。

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 1, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 6xy$$

となります。

まず、$(0,0)$ について考えましょう。

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad B = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = -1, \quad C = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

ですので、

$$AC - B^2 = -1 < 0$$

です。よって $(0,0)$ は鞍点です。

次に $(\pm 1, 0)$ と $(0, \pm 1)$ の 4 点について考えましょう。どの点においても

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a,b) = 0, \quad B = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b) = 2, \quad C = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a,b) = 0$$

ですので、

$$AC - B^2 = -4 < 0$$

です。よって、この 4 点はすべて鞍点です。

次に $(1/2, 1/2)$ と $(-1/2, -1/2)$ について。どちらにおいても

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a, b) = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a, b) = \frac{3}{2}$$

ですので、

$$AC - B^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 > 0 \quad \text{かつ} \quad A > 0$$

です。よって、この 2 点ではどちらも極小です。

最後に $(1/2, -1/2)$ と $(-1/2, 1/2)$ について。どちらにおいても

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a, b) = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a, b) = -\frac{3}{2}$$

ですので、

$$AC - B^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 > 0 \quad \text{かつ} \quad A < 0$$

です。よって、この 2 点ではどちらも極大です。 □