2007年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第8回

5月29日 清野和彦

解答. (1) $\Rightarrow$ (2) 皆さんの答案の中に「変数」と「変数の値」の区別が付いていないために混乱しているものがたくさんありましたので、そこのところで混乱しないように注意して解答を書いてみます。

任意の点 (x_0, y_0) を選んで、そこで (2) の関係式が成り立つことを示しましょう。$\xi(x,y) = x + 2y$ とすると、(1) とは $\varphi(s)$ に $s = \xi(x,y)$ を合成した関数が $f(x,y)$ だということ、つまり、

$$f(x,y) = \varphi \circ \xi(x,y)$$

ということを意味しています。これに、(x_0, y_0) で合成関数の微分公式を使うと、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{d\varphi}{dt}(\xi(x_0,y_0))\frac{\partial \xi(x,y)}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{d\varphi}{dt}(\xi(x_0,y_0))$$

および、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{d\varphi}{dt}(\xi(x_0,y_0))\frac{\partial \xi(x,y)}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{d\varphi}{dt}(\xi(x_0,y_0)) \times 2$$

となります。（$\varphi(t)$ は t を変数とする1変数関数ですので、微分の記号は ∂ でなく d を使います。）よって、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2\frac{d\varphi}{dt}(\xi(x_0,y_0)) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

が成り立ちます。(x_0, y_0) は任意でしたので、この等式は導関数の間の関係式として成り立ちます。これで (2) が示せました。 □

(2) $\Longrightarrow$ (1) これは難問過ぎました。どうもすみません。

まず、キッチリした解答の前に、「何が起きているのか」が見えやすい解答（というか説明）から紹介します。(2) の関係式を右辺に移項すると、

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

となります。今 f は C^1 級と仮定しているので全微分可能であり、例の「幸せの関係式」が成り立ちます。ということは、この式の左辺は任意の点における $\vec{u} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 方向微分と一致します。つまり、(2) の関係式は

あらゆる点で $\vec{u}$ 方向微分が 0 である

という条件だったわけです。すると、

> $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線を一つ決めると、その直線上のすべての点で f の値が等しい

ということが平均値の定理を使って証明できます。が、それはやめて、このことを認めることにします。$\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線とは、実数 t を一つ決めるごとに

$$t = x + 2y$$

と表せます。この直線上のすべての点で f の値が同じだということは、f はこの t の関数になっている、すなわち $x+2y$ の関数になっている、というわけなのです。

以上の説明を皆さんが学んだ範囲でキチンとした証明にしたいのですが、$\vec{u}$ 方向が軸方向と無関係なのがネックでしょう。そこで、$\vec{u}$ 方向が軸方向になるような新しい座標を入れてしまうことを考えるわけです。具体的には、例えば

$$s = x, \qquad t = x + 2y$$

とします。なぜ、$t = x + 2y$ だけではいけないかというと、これを逆に解いた式

$$x = s =: \xi(s,t), \qquad y = \frac{-s+t}{2} =: \eta(s,t)$$

を $f(x,y)$ に合成することによって、s と t を変数とする関数 $g(s,t)$ を作りたいからです。つまり、

$$g(s,t) = f(\xi(s,t), \eta(s,t))$$

とするわけです。（$t = x + 2y$ としたのは s 軸が $\vec{u}$ 方向になるためで、s は $s = x$ でなくても x, y を s, t で表せさえすれば何でもよいのです。）これで、$g(s,t)$ が s によらない関数であれば、$\varphi(t) = g(s,t)$ とおくことにより、

$$f(x,y) = g(x, x+2y) = \varphi(x+2y)$$

となって (1) が示せます。では、$g(s,t)$ が s によらない関数であることはどのようにして示せばよいかというと、

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = 0$$

が任意の s, t について成り立てばよいというわけです。（ここのところに平均値の定理を使っています。詳しくは第 7 回の問の解答のあとの注意を参照してください。）実際に計算してみると、合成関数の微分公式により、

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(s,t),\eta(s,t))\frac{\partial \xi}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(s,t),\eta(s,t))\frac{\partial \eta}{\partial s}(s,t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(s,t),\eta(s,t)) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(\xi(s,t),\eta(s,t))\end{aligned}$$

となります。これは (2) の関係式により 0 です。これで示せました。 □

7.2 1 次近似という視点からの証明

前節で多変数関数における合成関数の微分公式を証明することができました。が、イマイチ結論の式の意味やそれにたどり着いた筋道がわからないというのが正直なところではないでしょうか。

> 1 変数関数の積の微分法と合成関数の微分法の証明の組み合わせっぽい

では、「なぜこのような公式になるのか」は良く分からなくて当然だと思います。

この節では、関数が全微分可能な場合、偏微分の値は「1 次近似（すなわち接平面の式）の係数である」という視点から証明し直してみましょう。証明のポイントは、

> **合成関数の 1 次近似は、それぞれの関数の 1 次近似の合成**

となっていることを証明することです。このことから、合成関数の 1 次近似を定義に従って直接求めなくても、それぞれの関数の 1 次近似を合成してやるという**簡単なこと**（だって、1 次式に 1 次式を入れるだけですから!）で求められてしまうことになり、合成関数の微分公式は、この「1 次式に 1 次式を入れる」という手続きを係数だけ取り出して書き下したものになっているということが結論されるわけです。

7.2.1 1 変数関数に 1 変数関数を入れた場合

すぐに多変数関数の場合を扱ってもよいのですが、概念としては新しいので、焦らずに 1 変数関数の場合から順番に示して行きましょう。

1 変数関数の場合、第 5.1 節（第 5 回 4 ページの一番下から 5 ページの中程まで[1]）で説明したように、a という数が $f'(x_0)$ と一致することは

$$p(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$$

という 1 次式が

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1}$$

を満たすことと**同値**でした。つまり、

> 関数 $f(x)$ と $x = x_0$ に対し、条件(1) を満たす 1 次近似は存在したとしても**一つだけ**であり、そのような $p(x)$ が存在することは f が x_0 で微分可能なことと同値で、そのとき
>
> $$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
>
> である。

[1] ただし、記号の使い方がちょっと違ってしまっています。第 5 節と同じ記号の使い方にしようとすると、合成する関数（中に入れる方の関数）についての記号がどうしても足りなくなってしまうのです。申し訳ありませんが、第 5 節を参照する場合には気を付けて読んで下さい。

ということが成り立ちます。そして、この $p(x)$ のことを $f(x)$ の $x = x_0$ における **1 次近似**と呼びました。ここでやりたいことは、上で説明したことのうち、特に

微分可能な関数と微分したい点を決めると 1 次近似は**ただ一つに定まる**

ということをに注目して合成関数の微分公式を証明することです。

さて、$f(x)$ に $x = \xi(s)$ を入れた関数 $f \circ \xi(s)$ の $s = s_0$ における 1 次近似を考えたいわけですが、もちろん、今 $f(x)$ は $x_0 = \xi(s_0)$ で、$\xi(s)$ は $s = s_0$ で微分可能と仮定するので、$f(x)$ の x_0 における 1 次近似

$$p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

と $\xi(s)$ の s_0 における 1 次近似

$$\varpi(s) = \xi'(s_0)(s - s_0) + x_0$$

がただ一つだけ存在しています[2]。一方、われわれが欲しいのは、$f \circ \xi$ の s_0 における 1 次近似です。もちろん、f が $x_0 = \xi(s_0)$ で、ξ が s_0 で微分可能であれば $f \circ \xi$ も s_0 で微分可能であることも証明しなければならないことであり、もちろんあとで証明しますが、そのことは認めることにすると、$f \circ \xi$ の s_0 における 1 次近似 $P(s)$ は

$$P(s) = (f \circ \xi)(s_0) + (f \circ \xi)'(s_0)(s - s_0)$$

となります。

ここで、$f \circ \xi(s) = f(\xi(s))$ という合成の定義と、1 次式に 1 次式を代入しても 1 次式のままであることに目を付けて、$p(x)$ に $x = \varpi(s)$ を入れてみることを試みてみましょう。つまり、

$p \circ \varpi(s)$ が $f \circ \xi(s)$ の s_0 における 1 次近似なのではないか

と考えてみようというわけです。実際に $p \circ \varpi(s)$ を具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned} p \circ \varpi(s) &= f'(x_0)(\varpi(s) - x_0) + f(x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + \xi'(s_0)(s - s_0) - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\xi'(s_0)(s - s_0) \end{aligned}$$

となりますので、もしも予想通り $f \circ \xi$ の 1 次近似 $P(s)$ が f の 1 次近似と ξ の 1 次近似の合成 $p \circ \xi(s)$ と一致するなら、

$$(f \circ \xi)'(s_0) = f'(x_0)\xi'(s_0)$$

[2] $p(x)$ の p は多項式を意味する ‘polynomial’ の頭文字を取りました。また ϖ は p に当たるギリシャ文字 π の異体字です。(だから ϖ もパイ) と読みます。) π だと円周率みたいになってしまうので異体字にしました。見たこともなくてイヤだと思いますが、結構慣れるものですのでちょっと我慢してみて下さい。

である、という欲しかった合成関数の微分公式が得られるわけです。

このことだけで、もはや「合成の 1 次近似はそれぞれの 1 次近似の合成」ということを証明なしで認めてもよいような気分になってしまいそうですが、数学ですから、やはり面倒でも証明しないわけにはいきません。

何をすれば証明したことになるのかというと、

$$\lim_{s\to s_0}\frac{f\circ\xi(s)-p\circ\varpi(s)}{s-s_0}=0 \tag{2}$$

を示すことです。なぜなら、これが成り立つことは $p\circ\varpi(s)$ が $f\circ\xi(s)$ の $s=s_0$ における 1 次近似であることを意味し、1 次近似がただ一つしか存在し得ないことから $P(s)=p\circ\varpi(s)$ が結論されるからです。

それでは、式(2) を示しましょう。実は、することは前節での証明とほとんど同じなのですが、重複をいとわず省略せずに書くことにします。

まず、

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0}\frac{f\circ\xi(s)-p\circ\varpi(s)}{s-s_0}&=\lim_{s\to s_0}\frac{f\circ\xi(s)-p\circ\xi(s)+p\circ\xi(s)-p\circ\varpi(s)}{s-s_0}\\&=\lim_{s\to s_0}\left(\frac{f(\xi(s))-p(\xi(s))}{s-s_0}+\frac{p(\xi(s))-p(\varpi(s))}{s-s_0}\right)\end{aligned}$$

と「分子の水増し」をします[3]。ここで、最後の式を第 1 項と第 2 項に分けて考えてみましょう。

まず、第 1 項について。極限を取る前の式を

$$\frac{f(\xi(s))-p(\xi(s))}{s-s_0}=\frac{f(\xi(s))-p(\xi(s))}{\xi(s)-\xi(s_0)}\frac{\xi(s)-\xi(s_0)}{s-s_0}$$

と変形しましょう。ξ は s_0 で微分可能と仮定しているので、

$$\lim_{s\to s_0}\frac{\xi(s)-\xi(s_0)}{s-s_0}=\frac{d\xi}{ds}(s_0)$$

です。また、微分可能とうことは連続、すなわち $\lim_{s\to s_0}\xi(s)=\xi(s_0)=x_0$ が成り立っているので、$x=\xi(s)$ と置き換えることにより、

$$\lim_{s\to s_0}\frac{f(\xi(s))-p(\xi(s))}{\xi(s)-\xi(s_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{x-x_0}=0$$

となります[4]。なぜ 0 になるかというと、$p(x)$ は $f(x)$ の x_0 における 1 次近似だ

[3] $-p\circ\xi(s)+p\circ\xi(s)$ を水増しする代わりに $-f\circ\varpi(s)+f\circ\varpi(s)$ を水増しして証明することももちろんできます。ただし、そうすると ϖ が ξ の 1 次近似であることを直接利用することができなくなってしまうという難点があります。興味のある方は考えてみて下さい。

[4] 前節での証明と同様、ここでも s_0 のどんなに近いところにも $\xi(s)=\xi(s_0)$ となる s が存在してしまう場合を考慮しませんでした。以前の注意を参照してください。

からです。以上より、第 1 項については

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to s_0}\frac{f(\xi(s))-p(\xi(s))}{s-s_0} &= \lim_{s\to s_0}\frac{f(\xi(s))-p(\xi(s))}{\xi(s)-\xi(s_0)}\frac{\xi(s)-\xi(s_0)}{s-s_0} \\
&= \left(\lim_{s\to s_0}\frac{f(\xi(s))-p(\xi(s))}{\xi(s)-\xi(s_0)}\right)\left(\lim_{s\to s_0}\frac{\xi(s)-\xi(s_0)}{s-s_0}\right) \\
&= 0\cdot\frac{d\xi}{ds}(s_0)=0
\end{aligned}
$$

となることがわかりました。

次に、第 2 項について。$p(x)$ は一次式なのですから、具体的に

$$p(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

と書いて計算してみましょう。すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{p(\xi(s))-p(\varpi(s))}{s-s_0} &= \frac{f(x_0)+f'(x_0)(\xi(s)-x_0)-f(x_0)-f'(x_0)(\varpi(s)-x_0)}{s-s_0} \\
&= f'(x_0)\frac{\xi(s)-\varpi(s)}{s-s_0}
\end{aligned}
$$

となります。そして、$\varpi(s)$ が $\xi(s)$ の s_0 における 1 次近似であることから、

$$\lim_{s\to s_0}\frac{p(\xi(s))-p(\varpi(s))}{s-s_0}=f'(x_0)\lim_{s\to s_0}\frac{\xi(s)-\varpi(s)}{s-s_0}=f'(x_0)\cdot 0=0$$

となります。

以上より、第 1 項も第 2 項も 0 に収束したので全体として 0 に収束します。これで式(2) が成り立つことが分かり、1 変数関数の合成関数の微分公式 $(f\circ\xi)'(s_0)=f'(x_0)\cdot\xi'(s_0)$ が証明できました。

証明の中身は前節と同じか、むしろゴチャゴチャしているという印象かも知れません。どこが違うかというと、前節では

$$\lim_{s\to s_0}\frac{f(\xi(s))-f(x_0))}{s-s_0}=f'(x_0)\xi'(s_0) \tag{3}$$

であることを証明したのに対し、ここでは、右辺を左辺に移項して分子に載せた

$$\lim_{s\to s_0}\frac{f(\xi(s))-f(x_0)-f'(x_0)\xi'(s_0)(s-s_0)}{s-s_0}=0 \tag{4}$$

を証明しただけです。全く同じ内容であり、しかも計算はより追いにくくなってしまっています。しかし、多変数になるとこの方法が途端に威力を発揮するのです。なぜなら、上の式(3) は多変数関数にそのまま拡張することができないので前小節のように一つ一つの偏微分を 1 変数関数の微分と見て適用する以外になかったのが、下の式(4) はそのまま多変数関数の場合に適用できて、多変数関数の微分にもっともふさわしい全微分可能性という概念になっているからです。

7.2.2 1 変数関数に 2 変数関数を入れた場合

この場合が 1 変数関数に 1 変数関数を入れる場合と本質的に違わないことは前節で強調したところですが、

- 2 変数関数でも 1 次近似は一つしかないことを確認する。
- 二つの偏微分が同時に求まってしまう場面を見る。

ということを簡単な場合で済ませておくのがよいと思うので、一足飛びに進むのはやめて、前節と同じようにゆっくりと証明して行くことにしましょう。

まず、2 変数関数における「**1 次近似の一意性**」について確認します。それは第 5.2 節の定理 1（第 5 回プリント 6 ページ）

> $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で全微分可能なとき、$f(x,y)$ は (x_0,y_0) で x でも y でも偏微分可能であり、1 次近似 $p(x,y)$ は
>
> $$p(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$
>
> である。

というものです。（ここでの記号に合わせて (a,b) を (x_0,y_0) に変えました。また、元の定理 1 には方向微分に関する部分もあるのですが、今は必要ないので省きました。）つまり、$f(x,y)$ が (x_0,y_0) で全微分可能なときは、2 変数の 1 次式 $p(x,y)$ が

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-p(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0 \tag{5}$$

を満たすことと

$$p(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

であることは同値であるというわけで、特に、式(5) を満たす 1 次式 $p(x,y)$ は**ただ一つしか存在しない**ということになります。このことを使って「1 変数関数に 2 変数関数を入れた場合」の合成関数の微分公式を証明しようというわけです。

$f(x)$ に $x=\xi(s,t)$ を合成した関数 $f\circ\xi(s,t)$ の (s_0,t_0) における偏微分の値を**両方同時に**計算します。$f(x)$ は $x_0=\xi(s_0,t_0)$ で微分可能、$\xi(s,t)$ は (s_0,t_0) で**全微分可能**と仮定します。そして、$f(x)$ の x_0 における 1 次近似を $p(x)$、$\xi(s,t)$ の (s_0,t_0) における 1 次近似を $\varpi(s,t)$ としましょう。具体的には、

$$p(x)=f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0) \tag{6}$$

および

$$\varpi(s,t)=x_0+\frac{\partial\xi}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0)+\frac{\partial\xi}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0) \tag{7}$$

です。（$\xi(s_0,t_0)=x_0$ であることに注意してください。）証明したいことは、

> $p(x)$ に $x = \varpi(s,t)$ を入れて得られる 1 次式 $p \circ \varpi(s,t)$ が $f \circ \xi(s,t)$ の (s_0, t_0) における 1 次近似になっている

ということ、つまり、

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{f \circ \xi(s,t) - p \circ \varpi(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} = 0 \tag{8}$$

が成り立つことです。

これが証明できたとします。すると、

$$p \circ \varpi(s,t) = f(x_0) + \frac{\partial(f \circ \xi)}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0) + \frac{\partial(f \circ \xi)}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0)$$

が成り立つことになります。なぜなら、1 次近似はこの式の右辺の関数**しかない**からです。一方、$p \circ \varpi(s,t)$ を式(6) に式(7) を代入することで具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned}
p \circ \varpi(s,t) &= f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(\varpi(s,t) - x_0) \\
&= f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)\left(x_0 + \frac{\partial\xi}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0) + \frac{\partial\xi}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0) - x_0\right) \\
&= f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)\frac{\partial\xi}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0) + \frac{df}{dx}(x_0)\frac{\partial\xi}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0)
\end{aligned}$$

となります。この二つを比較して、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f \circ \xi)}{\partial s}(s_0,t_0) &= \frac{df}{dx}(x_0)\frac{\partial\xi}{\partial s}(s_0,t_0) \\
\frac{\partial(f \circ \xi)}{\partial t}(s_0,t_0) &= \frac{df}{dx}(x_0)\frac{\partial\xi}{\partial t}(s_0,t_0)
\end{aligned}$$

という欲しかった合成関数の微分公式が二つ一遍に得られる、というわけです。

それでは式(8) を証明しましょう。

まず、この式の左辺の分母に前節と同様の「水増し」をすると、

$$\begin{aligned}
&\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{f \circ \xi(s,t) - p \circ \varpi(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} \\
&\quad = \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{f(\xi(s,t)) - p(\xi(s,t)) + p(\xi(s,t)) - p(\varpi(s,t))}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} \\
&\quad = \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \left(\frac{f(\xi(s,t)) - p(\xi(s,t))}{\xi(s,t) - \xi(s_0,t_0)} \frac{\xi(s,t) - \xi(s_0,t_0)}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{p(\xi(s,t)) - p(\varpi(s,t))}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} \right)
\end{aligned}$$

となります。

最後の式の第 1 項の第 1 因子は、$\xi(s,t)$ が (s_0,t_0) で**全微分可能だから連続**でもあることと、$p(x)$ が $f(x)$ の x_0 における 1 次近似であることから、

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{f(\xi(s,t)) - p(\xi(s,t))}{\xi(s,t) - \xi(s_0,t_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} = 0$$

となります。一方、第 2 因子は 1 変数関数同士の場合と違って極限値はありません。どのようになっているかというと、分子が

$$\xi(s,t) - \xi(s_0,t_0) = \xi(s,t) - \varpi(s,t) + \frac{\partial\xi}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0) + \frac{\partial\xi}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0)$$

となっているわけです。$\varpi(s,t)$ が $\xi(s,t)$ の 1 次近似であることから

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\xi(s,t) - \varpi(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} = 0$$

となることはわかっているので、問題は残りの部分の極限です。記号が長くてわかりにくいので、

$$\frac{\partial\xi}{\partial s}(s_0,t_0) = a, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t}(s_0,t_0) = b, \quad s - s_0 = h, \quad t - t_0 = k$$

とおくことにしましょう。調べたいのは、$(h,k) \to (0,0)$ のときの

$$\frac{ah + bk}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

の振る舞いです。収束しないことは、例えば $k = 0$ として $h \to +0$ とすると a になるのに、$h \to -0$ とすると $-a$ になり、また $h = 0$ として $k \to +0$ とすると b に、$k \to -0$ とすると $-b$ になる、つまり (h,k) の $(0,0)$ への値の近づけ方で極限値が変わってしまうことからわかります。しかし、$|h| \le \sqrt{h^2+k^2}$, $|k| \le \sqrt{h^2+k^2}$ であることから、$(0,0)$ でない任意の (h,k) に対して、

$$\left| \frac{ah + bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \le |a| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |b| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \le |a| + |b|$$

が成り立っています。よって、問題の極限の第 1 項は、全体としては

$$\begin{aligned}
&\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \left| \frac{f(\xi(s,t)) - p(\xi(s,t))}{\xi(s,t) - \xi(s_0,t_0)} \frac{\xi(s,t) - \xi(s_0,t_0)}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} \right| \\
&\le \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \left| \frac{f(\xi(s,t)) - p(\xi(s,t))}{\xi(s,t) - \xi(s_0,t_0)} (|a| + |b|) \right| = 0 \cdot (|a| + |b|) = 0
\end{aligned}$$

となって、はさみうちの原理により 0 に収束します。

一方、第 2 項の方は、分子が

$$
\begin{aligned}
&p(\xi(s,t)) - p(\varpi(s,t)) \\
&\quad = f(x_0) + f'(x_0)(\xi(s,t) - x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(\varpi(s,t) - x_0) \\
&\quad = f'(x_0)(\xi(s,t) - \varpi(s,t))
\end{aligned}
$$

と具体的に計算でき、$\varpi(s,t)$ が $\xi(s,t)$ の (s_0,t_0) における 1 次近似であることから、

$$
\begin{aligned}
\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{p(\xi(s,t)) - p(\varpi(s,t))}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} &= f'(x_0) \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\xi(s,t) - \varpi(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} \\
&= f'(x_0)\cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

となります。

以上により、式(8) の成り立つこと、つまり、$p\circ\varpi(s,t)$ が $f\circ\xi(s,t)$ の (s_0,t_0) における 1 次近似であることが証明できました。

7.2.3 2 変数関数に 1 変数関数を 2 つ入れた場合

次に、前節で一番苦労した場合を 1 次近似の方法で考えてみましょう。この場合は合成関数が 1 変数なので、「2 つの公式が一遍に得られる」という恩恵はありません。だから、前節より証明が見通しよく簡単になるかどうか、そこがポイントです。

$f(x,y)$ に $x=\xi(s)$ と $y=\eta(s)$ を入れた合成関数を、$\circ$ を使った記法では書けないので $\varphi(s)$ と書くことにしました。

$$\varphi(s) = f(\xi(s), \eta(s))$$

です。f は全微分可能、ξ と η も微分可能、$x_0=\xi(s_0), y_0=\eta(s_0)$ として、$f(x,y)$ の (x_0,y_0) での 1 次近似を $p(x,y)$、$\xi(s)$ の s_0 での 1 次近似を $\varpi(s)$、$\eta(s)$ の s_0 での 1 次近似を $\rho(s)$ とします[5]。具体的には、

$$p(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{9}$$

$$\varpi(s) = x_0 + \frac{d\xi}{ds}(s_0)(s-s_0) \tag{10}$$

$$\rho(s) = y_0 + \frac{d\eta}{ds}(s_0)(s-s_0) \tag{11}$$

[5] ρ はギリシャ語のアルファベットで ϖ の次の文字で、「ロー」と読みます。ローマ字の 'r' に当たる文字です。ギリシャ文字には q に当たる文字がないので、p の次の次の r に当たる文字を使うことにしました。

です。$p(x,y)$ に $x=\varpi(s), y=\rho(s)$ を入れた合成関数（s の 1 次式です）も $\circ$ を使った書き方では書けないので、

$$\psi(s)=p(\varpi(s),\rho(s))$$

とおくことにします。示したいことは、例によって $\psi(s)$ が $\varphi(s)$ の s_0 における 1 次近似であること、つまり、

$$\lim_{s\to s_0}\frac{\varphi(s)-\psi(s)}{|s-s_0|}=0 \tag{12}$$

が成り立つことです。（あとの式変形を楽にするために分母に絶対値を付けておきました。極限値が 0 の場合には絶対値がついていてもついていなくても同じなので大丈夫です。むしろ絶対値つきの方が 1 次近似の本来の定義であるとも言えます。）

これが証明できたとします。すると、

$$\psi(s)=f(x_0,y_0)+\frac{d\varphi}{ds}(s_0)(s-s_0)$$

が成り立つことになります。なぜなら $\varphi(s)$ の 1 次近似はこの式の右辺の関数**しかない**からです。一方、式(9) に式(10) と(11) を入れて $\psi(s)$ を具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned}\psi(s)&=p(\varpi(s),\rho(s))\\&=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\left(x_0+\frac{d\xi}{ds}(s_0)(s-s_0)-x_0\right)\\&\qquad+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\left(y_0+\frac{d\eta}{ds}(s_0)(s-s_0)-y_0\right)\\&=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{d\xi}{ds}(s_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{d\eta}{ds}(s_0)\right)(s-s_0)\end{aligned}$$

となります。この二つを比較して、

$$\frac{d\psi}{ds}(s_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{d\xi}{ds}(s_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{d\eta}{ds}(s_0)$$

という欲しかった合成関数の微分公式が得られる、というわけです。

それでは、式(12) を証明しましょう。

極限を取る前の式をいつものように「分子の水増し」をしてから変形して行くと、

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(s)-\psi(s)}{|s-s_0|}&=\frac{f(\xi(s),\eta(s))-p(\varpi(s),\rho(s))}{|s-s_0|}\\&=\frac{f(\xi(s),\eta(s))-p(\xi(s),\eta(s))+p(\xi(s),\eta(s))-p(\varpi(s),\rho(s))}{|s-s_0|}\\&=\frac{f(\xi(s),\eta(s))-p(\xi(s),\eta(s))}{\sqrt{(\xi(s)-x_0)^2+(\eta(s)-y_0)^2}}\frac{\sqrt{(\xi(s)-x_0)^2+(\eta(s)-y_0)^2}}{|s-s_0|}\\&\quad+\frac{p(\xi(s),\eta(s))-p(\varpi(s),\rho(s))}{|s-s_0|}\end{aligned}$$

となります。

最後の式の第 1 項の第 2 因子で $s \to s_0$ とすると、$\xi(s)$ と $\eta(s)$ が微分可能であることから、

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0}\frac{\sqrt{(\xi(s)-x_0)^2+(\eta(s)-y_0)^2}}{|s-s_0|} &= \lim_{s\to s_0}\sqrt{\frac{(\xi(s)-x_0)^2+(\eta(s)-y_0)^2}{(s-s_0)^2}}\\ &= \sqrt{\left(\lim_{s\to s_0}\frac{\xi(s)-x_0}{s-s_0}\right)^2+\left(\lim_{s\to s_0}\frac{\eta(s)-y_0}{s-s_0}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}(s_0)\right)^2+\left(\frac{d\eta}{ds}(s_0)\right)^2}\end{aligned}$$

となります。

第 1 項の第 1 因子について考えてみましょう。$\xi(s)$ と $\eta(s)$ が微分可能だから連続でもあるので、$s \to s_0$ のとき $(\xi(s), \eta(s))$ は (x_0, y_0) に収束します。今、$p(x, y)$ は $f(x, y)$ の (x_0, y_0) における 1 次近似なので、(x, y) がどのように (x_0, y_0) に近づこうとも

$$\frac{f(x,y)-p(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0$$

が成り立っています。よって、第 1 項の第 1 因子は

$$\lim_{s\to s_0}\frac{f(\xi(s),\eta(s))-p(\xi(s),\eta(s))}{\sqrt{(\xi(s)-x_0)^2+(\eta(s)-y_0)^2}} = 0$$

となります。

以上より、$s \to s_0$ のとき最後の式の第 1 項は 0 に収束することが分かりました。

次に、第 2 項について考えてみましょう。$p(x, y)$ は 1 次式(9) なのですから、分子を具体的に展開してしまいましょう。目がチカチカするのを防ぐために、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = b$$

とおくことにします。すると、

$$\begin{aligned}p(\xi(s),\eta(s)) - p(\varpi(s),\rho(s)) &= f(x_0,y_0) + a(\xi(s)-x_0) + b(\eta(s)-y_0)\\ &\qquad - f(x_0,y_0) - a(\varpi(s)-x_0) - b(\rho(s)-y_0)\\ &= a(\xi(s)-\varpi(s)) + b(\eta(s)-\rho(s))\end{aligned}$$

となります。$\varpi(s)$ は $\xi(s)$ の、$\rho(s)$ は $\eta(s)$ の s_0 における 1 次近似なので、結局、第 2 項で $s \to s_0$ とすると、

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0}\frac{p(\xi(s),\eta(s))-p(\varpi(s),\rho(s))}{|s-s_0|} &= a\lim_{s\to s_0}\frac{\xi(s)-\varpi(s)}{|s-s_0|} + b\lim_{s\to s_0}\frac{\eta(s)-\rho(s)}{|s-s_0|}\\ &= a\cdot 0 + b\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

となります。

以上で第1項も第2項も0に収束することが分かったので、証明したかった式(12)、つまり $\psi(s)$ が $\varphi(s)$ の s_0 における1次近似であることが証明できました。

7.2.4　2変数関数に2変数関数を2つ入れた場合

前々節「1変数関数に2変数関数を入れた場合」の議論と前節「2変数関数に1変数関数を2つ入れた場合」の議論をくっつけると「2変数関数に2変数関数を2つ入れた場合」の証明になるのですが、全く同じことを繰り返すのも能がないので、ここではもとの関数と1次近似との差である**剰余**にスポットを当てて証明してみましょう。もちろんやっていることは今までと同じなのですが、剰余という考え方に慣れることは1次近似を2次近似、3次近似と次数を上げた場合、すなわちテイラー近似について考える場合にとても有用です。

なお、偏微分の定義に従った証明と違って、ここでする証明は**そのまま**一般の場合に適用することができます。興味のある人は確認してみて下さい。

$f(x,y),\ \xi(s,t),\ \eta(s,t)$ をすべて全微分可能な関数とし、$x=\xi(s,t),\ y=\eta(s,t)$ を $f(x,y)$ に合成して得られる合成関数を $\varphi(s,t)$ としましょう。

$$\varphi(s,t)=f(\xi(s,t),\eta(s,t))$$

です。

$x_0=\xi(s_0,t_0), y_0=\eta(s_0,t_0)$ とし、$f(x,y)$ の (x_0,y_0) における1次近似を $p(x,y)$、$\xi(s,t)$ と $\eta(s,t)$ の (s_0,t_0) における1次近似をそれぞれ $\varpi(s,t),\rho(s,t)$ とします。また、$p(x,y),\varpi(s,t),\rho(s,t)$ を具体的な1次式として書いたときの見た目をスッキリさせるために、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)&=a, & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)&=b,\\
\frac{\partial \xi}{\partial s}(s_0,t_0)&=\alpha_1, & \frac{\partial \xi}{\partial t}(s_0,t_0)&=\alpha_2,\\
\frac{\partial \eta}{\partial s}(s_0,t_0)&=\beta_1, & \frac{\partial \eta}{\partial t}(s_0,t_0)&=\beta_2
\end{aligned}$$

と置くことにします。これを使うと、

$$p(x,y)=f(x_0,y_0)+a(x-x_0)+b(y-y_0) \tag{13}$$

$$\varpi(s,t)=x_0+\alpha_1(s-s_0)+\alpha_2(t-t_0) \tag{14}$$

$$\rho(s,t)=y_0+\beta_1(s-s_0)+\beta_2(t-t_0) \tag{15}$$

となります。

$p(x,y)$ に $x=\varpi(s,t)$ と $y=\rho(s,t)$ を合成してできる s,t の1次式も合成関数の記号で書くことができないので $\psi(s,t)$ と書くことにします。つまり、

$$\psi(s,t)=p(\varpi(s,t),\rho(s,t))$$

です。示したいことは、$\psi(s,t)$ が $\varphi(s,t)$ の (s_0,t_0) における 1 次近似であること、すなわち

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\varphi(s,t)-\psi(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} = 0 \tag{16}$$

が成り立つことです。

これが証明できたとします。すると、

$$\psi(s,t) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0)$$

が成り立つことになります。なぜなら、$\varphi(s,t)$ の 1 次近似はこの式の右辺**しかない**からです。一方、式(13) に式(14) と(15) を代入して $\psi(s,t)$ を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned}\psi(s,t) &= p(\varpi(s,t),\rho(s,t))\\ &= f(x_0,y_0) + a(x_0+\alpha_1(s-s_0)+\alpha_2(t-t_0)-x_0) + b(y_0+\beta_1(s-s_0)+\beta_2(t-t_0)-y_0)\\ &= f(x_0,y_0) + (a\alpha_1+b\beta_1)(s-s_0) + (a\alpha_2+b\beta_2)(t-t_0)\end{aligned}$$

となります。二つの式を比較して、$a,b,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ を元に戻すと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial\xi}{\partial s}(s_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial\eta}{\partial s}(s_0,t_0)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial\xi}{\partial t}(s_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial\eta}{\partial t}(s_0,t_0)\end{aligned}$$

という欲しかった合成関数の微分公式が二つ一遍に得られる、というわけです。

それでは、最後に式(16) を証明しましょう.

まず、$f(x,y),\ \xi(s,t),\ \eta(s,t)$ のそれぞれの**剰余**を $r(x,y),\sigma(s,t),\tau(s,t)$ とします。つまり、

$$\begin{aligned}r(x,y) &:= f(x,y)-p(x,y)\\ \sigma(s,t) &:= \xi(s,t)-\varpi(s,t)\\ \tau(s,t) &:= \eta(s,t)-\rho(s,t)\end{aligned}$$

と定義するということです。$p(x,y)$ が $f(x,y)$ の (x_0,y_0) における 1 次近似であり、$\varpi(s,t)$ が $\xi(s,t)$ の、$\rho(s,t)$ が $\eta(s,t)$ の (s_0,t_0) における 1 次近似であるということは、剰余を使って

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$
$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\sigma(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} = 0$$
$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\tau(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} = 0$$

が成り立つことと書き表すことができます。
これらの記号を使うと、

$$\begin{aligned}
&\varphi(s,t)\\
&= f(\xi(s,t),\eta(s,t))\\
&= p(\xi(s,t),\eta(s,t)) + r(\xi(s,t),\eta(s,t))\\
&= f(x_0,y_0) + a(\xi(s,t)-x_0) + b(\eta(s,t)-y_0) + r(\xi(s,t),\eta(s,t))\\
&= f(x_0,y_0) + a(\varpi(s,t)+\sigma(s,t)-x_0) + b(\rho(s,t)+\tau(s,t)-y_0)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + r(\xi(s,t),\eta(s,t))\\
&= f(x_0,y_0) + a(\alpha_1(s-s_0)+\alpha_2(t-t_0)+\sigma(s,t))\\
&\qquad\qquad\qquad + b(\beta_1(s-s_0)+\beta_2(t-t_0)+\tau(s,t)) + r(\xi(s,t),\eta(s,t))\\
&= f(x_0,y_0) + (a\alpha_1+b\beta_1)(s-s_0) + (a\alpha_2+b\beta_2)(t-t_0)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + a\sigma(s,t) + b\tau(s,t) + r(\xi(s,t),\eta(s,t))
\end{aligned}$$

となります。よって、1 次近似の合成

$$\begin{aligned}
\psi(s,t) &:= p(\varpi(s,t),\rho(s,t))\\
&= f(x_0,y_0) + (a\alpha_1+b\beta_1)(s-s_0) + (a\alpha_2+b\beta_2)(t-t_0)
\end{aligned}$$

を $\varphi(s,t)$ から引いて $\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}$ で割ると

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi(s,t)-\psi(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}}\\
&= \frac{a\sigma(s,t)+b\tau(s,t)+r(\xi(s,t),\eta(s,t))}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}}\\
&= a\frac{\sigma(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} + b\frac{\tau(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}}\\
&\qquad + \frac{r(\xi(s,t),\eta(s,t))}{\sqrt{(\xi(s,t)-x_0)^2+(\eta(s,t)-y_0)^2}}\frac{\sqrt{(\xi(s,t)-x_0)^2+(\eta(s,t)-y_0)^2}}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}}
\end{aligned}$$

となります。ここで、$\sigma(s,t)$ と $\tau(s,t)$ は 1 次近似の剰余なので、既に書いたとおり

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\sigma(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} = \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\tau(s,t)}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} = 0$$

が成り立っています。また、ξ も η も全微分可能であることから連続でもあるので、

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \xi(s,t) = x_0, \qquad \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \eta(s,t) = y_0$$

です。よって、前節と同様に、

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{r(\xi(s,t),\eta(s,t))}{\sqrt{(\xi(s,t)-x_0)^2+(\eta(s,t)-y_0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

が成り立ちます。問題は

$$\frac{\sqrt{(\xi(s,t)-x_0)^2+(\eta(s,t)-y_0)^2}}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}}$$

で $(s,t)\to(s_0,t_0)$ としたときどうなるかです。これは前々節でのときと同様に「収束はしないが有界」になります。キチンと証明しましょう。

証明. まず、任意の 2 実数 u,v に対して

$$\max\{|u|,|v|\} \le \sqrt{u^2+v^2} \le |u|+|v|$$

が成り立つことに注意しましょう。これと三角不等式を使うと、

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{(\xi(s,t)-x_0)^2+(\eta(s,t)-y_0)^2}}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} \\
&\le \frac{|\xi(s,t)-x_0|+|\eta(s,t)-y_0|}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} \\
&\le \frac{|a_1||s-s_0|+|a_2||t-t_0|+|\sigma(s,t)|+|b_1||s-s_0|+|b_2||t-t_0|+|\tau(s,t)|}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} \\
&\le (|a_1|+|b_1|)\frac{|s-s_0|}{|s-s_0|}+(|a_2|+|b_2|)\frac{|t-t_0|}{|t-t_0|} \\
&\qquad + \frac{|\sigma(s,t)|}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}} + \frac{|\tau(s,t)|}{\sqrt{(s-s_0)^2+(t-t_0)^2}}
\end{aligned}$$

となります。最後の二つの項は σ と τ が 1 次近似の剰余項であることから $(s,t)\to(s_0,t_0)$ のとき 0 に収束します。よって、全体としては $(s,t)\to(s_0,t_0)$ のとき収束はしないとしても 絶対値が $|a_1|+|a_2|+|b_1|+|b_2|$ を超えないので有界です。 □

以上より、証明したかった式(16)、すなわち $\psi(s,t)$ が $\varphi(s,t)$ の (s_0,t_0) における 1 次近似であることが証明できました。

問題. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $\xi(s)=e^s$, $\eta(s)=e^{-s}$ とする。
(1) 合成関数 $\varphi(s)=f(\xi(s),\eta(s))$ の $s=0$ における接線の傾きを幾何学的な考察から求めよ。
(2) パラメタ曲線 $(\xi(s),\eta(s))$ の $s=0$ における接線（すなわち $\xi(s)$ の $s=0$ における 1 次近似を x 成分、$\eta(s)$ の $s=0$ における 1 次近似を y 成分とする直線）を $f(x,y)$ の $(1,1)$ における接平面の式（つまり 1 次近似）に代入してできる直線の傾きを求めよ。
(2) 合成関数の微分公式を使って $\varphi(s)$ の $s=0$ における微分の値を求めよ。