2008 年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第 6 回

5 月 27 日 清野和彦

5.4 連続性と各種の微分可能性

前節の最後に「全微分可能なことを示す比較的簡単な方法がある」ということをほのめかしました。確かにそうなのですが、それを説明するには「2 変数関数が連続であるとはどういうことか」をまず説明しなければなりません。そこで、ちょうどよい機会なので、「全微分可能なことを示す比較的簡単な方法」の前に、各種の微分可能性と元の関数の連続性の間の関係を見ておきましょう。

1 変数関数では微分可能な関数は必然的に連続でした。2 変数関数では「微分可能」という概念に三種類あるので、これらの微分と連続性との関係を確認しておきましょう。連続性の定義は 1 変数関数のときと全く同じ**見た目**の式で定義されます。

定義 4. $f(x,y)$ が (a,b) で**連続**であるとは、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

が成り立つことをである。定義域全体で連続な関数のことを**連続関数**と言う。

見た目は 1 変数関数のときと全く同じで、多項式や三角関数など 1 変数関数として連続な関数を足したり掛けたり合成したりして作った 2 変数関数は皆連続なのですが[1]、割ってしまうと、分母が 0 になる（のに発散しなかった）ところでヘンなことが起こることがあります。(x,y) を (a,b) に近づける近づき方がいろいろあるために予想を裏切るような現象が起きてしまうのです。

問題 16. $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{ただし } (x,y)=(0,0) \text{ では } f(x,y)=0$$

と定義する。

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で不連続であることを示せ。

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で x でも y でも偏微分可能であることを示せ。

このような例があるので、偏微分可能だからといって連続とは限らないことが分かりました。

[1] このことの証明には所謂「ε-δ 論法」が必要なので、ここでは信じてもらうことにして証明は省略します。

ただし、この関数の場合、x 軸と y 軸の上では値が 0 の定数関数になっているので、原点で連続で偏微分も可能になってしまいます。しかし、偏微分以外の方向微分は全くできません。

それでは方向微分と連続性の間の関係はどうでしょうか。

問題 17. $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad \text{ただし } (x,y)=(0,0) \text{ では } f(x,y)=0$$

とする。

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で不連続であることを示せ。

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ であらゆる方向に方向微分可能であることを証明せよ。

この関数の場合、軸に沿ってのみならず直線的に (x,y) を $(0,0)$ に近づけると、つまり、$(x,y)=(tu,tv)$ として $t\to 0$ とすると

$$\lim_{t\to 0} f(tu,tv)=\lim_{t\to 0}\frac{(tu)^2tv}{(tu)^4+(tv)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{tu^2v}{t^2u^4+v^2}=\frac{0}{0+v^2}=0=f(0,0)$$

となっています。「(x,y) を $(0,0)$ に近づける」というとき、直線的な近づけ方だけを考えたのでは足りないことの例になっています。ところが、例えば「$y=x^2$ という放物線に沿った近づけ方」をすると 0（$=f(0,0)$）に収束しないのです。

こんな例を見せると、「多項式を多項式で割った関数の場合、分母が 0 になるところではいつでも不連続なんじゃ…」と思ってしまうかも知れませんが、そんなことはありません。例えば、第 4 節最後の問題 13 の関数

$$f(x,y)=\frac{y(3x^3-y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{ただし } (x,y)=(0,0) \text{ では } f(x,y)=0$$

は $(0,0)$ でも連続です。

問題 18. 上の $f(x,y)$ が $(0,0)$ で連続であることを証明せよ。

以上をまとめると、

- 偏微分可能でも連続とは限らない。
- 方向微分可能でも連続とは限らない。
- 方向微分可能で連続でも全微分可能とは限らない。

ということがわかりました。

注意. もちろん、連続だからといって偏微分可能とは限りません。例えば $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で連続ですが偏微分できません。（ということは方向微分も全微分も不可能です）なぜなら、例えば $y=0$ 代入すると、$f(x,0)=|x|$ となるからです。★

さて、以上のように 2 変数関数においては連続という概念も 1 変数のときのように単純でなく、偏微分と方向微分はあまり連続性と関係がないことを見てもらった上で、1 変数のときと同様に「微分可能なら連続」が成り立つことを証明しましょう。

定理 2. $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能ならば $f(x, y)$ は (a, b) で連続である。

証明. $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であるとは、$P(a, b) = f(a, b)$ を満たす 1 次（以下の）関数 $P(x, y)$ で

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

を満たすものが存在するということでした。この左辺の分母は連続関数ですので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = 0$$

が成り立ちます。この二つを掛けると、

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x, y) - P(x, y)) \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\
&= \left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right) \left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) \\
&= 0 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

となります。一方、多項式も連続ですので、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x, y) = P(a, b) = f(a, b)$$

が成り立っています。よって、

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x, y) - P(x, y) + P(x, y)) \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x, y) - P(x, y)) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x, y) \\
&= 0 + f(a, b) = f(a, b)
\end{aligned}$$

となります。これで $f(x, y)$ が (a, b) で連続であることが示せました。 □

このことから見ても、2 変数関数の微分の名にふさわしいのは全微分可能性だと言えるでしょう。

5.5 C^1 級関数と全微分可能性

全微分可能なとき、その接平面を決める係数は偏微分の値でした。つまり、全微分可能なことが分かっているときには、そのことから導かれる性質などはすべて偏微分によって記述されることになります。ここに至って偏微分がとうとう主役の座に座ったように見えます。しかし、具体的に関数が与えられても、それが全微分可能であるかどうかを定義に従って判定するのはかなり大変そうです。そこを克服しないと「多変数関数の微分は偏微分で十分」というステージにはたどり着けません。しかし、偏導関数に良い性質を要求すると、そこまでたどり着けることが証明できます。この節ではそのことを説明します。（それが、予告していた「全微分可能なことを示す比較的簡単な方法」です。）

1 変数関数の場合でも、導関数は連続になるとは限りませんでした。ましてや、多変数関数では偏微分可能でも元々の関数が不連続ということさえあることを上の問題 16 や問題 17 で見てもらいました。

導関数が連続な関数は、例えば導関数が有界閉区間で最大値を持つことからあまり急激な増減をしないといった、微分可能なだけよりも扱いやすい性質を持ちました。多変数関数の場合には、偏導関数が連続という条件は 1 変数関数の場合とは比べものにならないくらい「ありがたい性質」です。この節ではそれについて述べます。なお、あらゆる点で偏微分可能で、すべての偏導関数が連続であるような関数のことを $\boldsymbol{C^1}$ **級関数**といいます[2]。

C^1 級関数が持つ「ありがたい性質」を印象づけるために、今まで調べてきた多変数関数の微分たちについてまとめておきましょう。

微分が本当に役に立つ関数は、やはり定義域全体で微分可能な関数ですし、「C^1 級」とは元々そういう関数に対してしか意味を持たない言葉ですので、以下では「ある 1 点で云々」と考えるのはやめて、定義域全体での性質を問題にしましょう。

多変数関数の「微分」には、偏微分、方向微分、全微分の 3 種類がありました。これらの関係はどうなっているかと言うと、

$$\text{全微分可能} \;\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{方向微分可能} \;\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{偏微分可能}$$

でした。しかも、全微分可能なら方向微分は偏微分の 1 次式になるという「幸せな関係」が成り立ちます。また、全微分可能なら連続ですが（定理 2）、方向微分可能なだけでは連続とは限らないことも例で見てもらいました（問題 17）。ましてや偏微分可能なだけならなおさらです（問題 16）。

つまり、一口で言ってしまえば、「偏微分は全微分可能なときには役に立つものだけれど、全微分可能かどうかなんて簡単にはわからなそうだから、結局偏微分

[2]前節で触れたように、多項式や三角関数やその積や合成のように「常識的な式 1 本」で書ける関数は連続です。だから、二つの偏導関数がどちらも「式 1 本」なら C^1 級だと言えます。さらに、偏微分は実質上 1 変数関数の微分であり「式 1 本」の関数を微分しても「式 1 本」のままなので、元の関数が「式 1 本」で書けていれば C^1 級だと言うことになります。C^1 級でない関数の例は、問題 13 や問題 17、問題 18 の関数などです。

だけ計算できてもあんまり嬉しくない」というように見えます。ところが、偏導関数だけ見れば調べられる C^1 級という性質については、次の定理が成り立ってしまうのです。

定理 3. C^1 級関数は全微分可能である。

証明. どの (a,b) でも同じなので、「$f(x,y)$ が C^1 級なら $(0,0)$ で全微分可能である」ということを示しましょう。

$f(x,y)$ は偏微分可能なので、1 次式 $P(x,y)$ を

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + f(0,0)$$

とおきます。もし $f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能なら、そこでの 1 次近似式はこの $P(x,y)$ でなければならないので、示すべきことは、$f(x,y)$ が C^1 級であること仮定すると

$$\frac{f(x,y) - P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

が成り立つということです。

まず

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y) - P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{f(x,y) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{f(x,y) - f(0,y) - f_x(0,0)x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{f(0,y) - f(0,0) - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

と分解してみます。$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ から (x,y) によらずに

$$\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

となるので、第 2 項は

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(0,y) - f(0,0) - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \left|\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} - f_y(0,0)\right| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \left|\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} - f_y(0,0)\right| \\ &\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} |f_y(0,0) - f_y(0,0)| \\ &= 0\end{aligned}$$

となります。

第 1 項もよく似ているのですが、同じように整理すると、

$$\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}-f_x(0,0)$$

で $(x,y)\to(0,0)$ としなければならなくなります。はじめから $y=0$ なら第 2 項と全く同じなのですが、そうではないので、これが 0 に収束することは明らかではありません。しかし、任意の点で偏微分可能なのですから、y を定数だと思って x の関数 $f(x,y)$ に平均値の定理を使うことができて、

$$f(x,y)-f(0,y)=f_x(hx,y)x, \qquad 0<h<1$$

となる h が存在します。ただし h は x と y に依存します。とはいえ、hx は x と 0 の間の数ですので、$(x,y)\to(0,0)$ のとき $(hx,y)\to(0,0)$ となります。よって、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(hx,y)=f_x(0,0)$$

となります。なぜならば、**f が C^1 級だからです**。これで第 1 項も第 2 項と全く同じ計算で 0 に収束することが分かりました。 □

簡単に計算できる偏導関数というものが連続であれば、それだけで全微分可能なことが保証されてしまうのです。多変数関数が連続かどうかを調べるのは結構難しいと思うかも知れませんが、4 ページの脚注で説明したように、**定義域を場合分けしたりせず「式一本」で書けている関数はほとんど C^1 級**ですので、具体的な関数を調べる場合にはこの定理は大変有効です。

6 テイラーの定理と極大極小

これまで 2 変数関数の微分を三種類も考えてきましたが、微分を応用して関数の様子を調べることを全くしてきませんでした。この節では**微分を使って関数の増減の様子を調べる方法**について説明します。

6.1 微分（1 次近似）と増加減少の関係

6.1.1 1 変数関数の場合

高校で 1 変数関数の増減の様子を微分を使って調べる方法を学びました。いわゆる**増減表**です。どうやるのかを簡単な例で思い出してみましょう。

$$f(x)=x^3-6x^2+9x$$

とします。これを微分すると、

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

が得られます。よって、$x-1$ と $x-3$ が同符号のとき、つまり $x<1$ と $x>3$ のときは $f'(x)>0$ であり、$x-1$ と $x-3$ が異符号のとき、つまり $1<x<3$ のとき $f'(x)<0$ です。ここで、

このことから $f(x)$ は $x \leq 1$ と $x \geq 3$ では増加し、$1 \leq x \leq 3$ では減少することが分かる

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

となるわけですが、なぜ $f'(x)$ の符号が分かると元の関数 $f(x)$ の増加減少が分かるのでしょうか?

このことについては、次のように 2 段階に理解していることが重要です。

まず、第 1 段階として

a の近くでは $f(x)$ は 1 次近似 $f(a)+f'(a)(x-a)$ に似ている

つまり、

接点の近くでは関数のグラフは接線に似ている

という大雑把な理解が大切です。上の具体的な関数 $f(x)=3x^3-6x^2+9x$ で $x=2$ の場合、$f'(2)=-3$ なので、$y=f(x)$ のグラフの $x=2$ 付近の様子は傾きが -3 の直線に似ている、**だから減少している**という**イメージ**です。この関数の場合、$x=2$ に限らず $1<x<3$ のすべてについて $f'(x)<0$ なので、その区間のどこにおいても x の範囲が小さい部分に限れば傾きが負の直線に似ている、だから $1 \leq x \leq 3$ では $f(x)$ は減少している、というわけです。

このようにイメージ的に理解できたら、第 2 段階として**そのイメージをキチンと証明する**ことが欠かせません。証明することによってイメージ的な理解では気づかなかった「結論が成り立つための条件」が分かったり、実はイメージが根本的に間違っていることが判明したりするからです。今の場合「元の関数のグラフと接線が似ている」と解釈できることをキチンと表現できれば良さそうです。それに当たるのが**平均値の定理**です。

平均値の定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能なとき、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

を満たす c が (a,b) に存在する

証明はしません。図 1 でお許し下さい。 これを使うと、f' **が連続なら**、つまり f

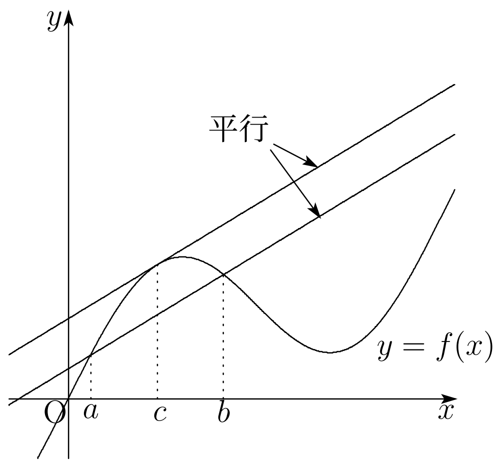

図 1: 平均値の定理の図形的意味。

が C^1 級なら我々の直観

$$f'(a) > 0 \text{ ならば } a \text{ の近くで } f \text{ は増加}$$
$$f'(a) < 0 \text{ ならば } a \text{ の近くで } f \text{ は減少}$$

の正しいことが証明できます。

証明. $f'(a) > 0$ としましょう。すると、f' が連続なら $\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a) > 0$ となっているのですから、$f'(x)$ は x が a に十分近いところでは正です。つまり、十分小さい正実数 r に対して $(a-r, a+r)$ に含まれるすべての x について $f'(x) > 0$ です。よって、$[a-r, a+r]$ に含まれる任意の二つの実数 $x_0 < x_1$ に対して平均値の定理を適用すると

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) \qquad a - r \leq x_0 < \exists c < x_1 \leq a + r$$

となり $f'(c) > 0$ ですので、$f(x_1) > f(x_0)$ となります。これで $[a-r, a+r]$ で f が増加していることが示せました。 □

このことから、(a, b) で f' が常に正なら f は $[a, b]$ で増加、常に負なら f は $[a, b]$ で減少ということになります。実際、例えば (a, b) で f' が常に正なら、(a, b) 内の任意の x の近くで増加なので、$[a, b]$ 全体で増加となるからです。

注意. 「$f'(a) > 0$ (< 0) ならば f は a の近くで増加（減少）」ということは f が C^1 級（少なくとも f' が a で連続）でないと成り立ちません。例えば

$$f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}, \qquad \text{ただし } f(0) = 0$$

とすると、$f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ ですが f は x のどんなに近いところでも増加関数ではありません。実際に計算してみれば分かりますが、$f'(x)$ が $x = 0$ で不連続であり、$x = 0$ どんなに近くにでも f' は正の値も負の値も取るという激しい振動をしているのです。

しかし、「f' が (a,b) 全体で常に正（負）ならば f は $[a,b]$ で増加（減少）」ということは f' が連続でなくても成り立ちます。なぜなら平均値の定理は f' が連続でなくても成り立つので、上の証明の後半部分は f' が連続でなくても成り立つからです。例えば f' が (a,b) で常に正だとすると、$[a,b]$ 内の任意の x_0 と x_1（ただし $x_0 < x_1$）に対して、

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c)$$

となる c が (x_0, x_1) にありますが、今 f' は (a,b) で常に正なのですからこの $f'(c)$ も正であり、$f(x_0) < f(x_1)$ が成り立つ、となります。だから、例えば、上の例の f をちょっと変えて、

$$g(x) = 2x + x^2 \sin\frac{1}{x}, \qquad \text{ただし } g(0) = 0$$

とすると、やはり g' は $x = 0$ で不連続ですが、$x = 0$ の近くでは $g' > 0$ であり、よって g は 0 の近くでは増加しています。★

平均値の定理の式は

$$\text{平均の変化率} = \text{瞬間の変化率}$$

という形になってしまっていますが、元の関数と 1 次近似を結びつけているように見える形になっていた方がより話の流れに沿うでしょう。（もちろん見た目の違いだけですが。）そこで b を x と書いて分母を払って整理した形に書き換えておきましょう。

平均値の定理

（ひとつながりの定義域を持つ）微分可能な関数 f と定義域内の a に対し、定義域内の x を任意にとると、

$$f(x) = f(a) + f'(a + \theta(x - a))(x - a)$$

を満たす θ で $0 < \theta < 1$ を満たすものが存在する。

「ひとつながり」と断ったのは、x と a の間に挟まれた部分がすべて f の定義域内に入っていなければならないからです。例えば $f(x) = 1/x$ で $a = 1$, $x = -1$ という設定では平均値の定理は成り立ちません。また、c の代わりに $a + \theta(x - a)$ という面倒な式に書き換えたのは、a と x の大小関係に煩わされないためです。c のまま書こうとすると、$a < x$ のときは $a < c < x$、$a > x$ のときは $a > c > x$ というふうに c の条件を a と x の大小関係に応じて書き分けなければならなくなり、結局は余計面倒なのです。また、c の代わりに $a + \theta(x - a)$ と書くことで、a が固定された値（注目している点）、x がその近くの任意の値であることを忘れないようにする意図もあります。つまり、$a + \theta(x - a)$ とは「a から $\theta(x - a)$ だけずれた値」というわけです。このように書くと、平均値の定理は

本物の 1 次近似

$$f(a) + f'(a)(x - a)$$

の傾きを修正することによって元の関数 $f(x)$ を表せる

といっているように見えて、まさに我々が第 1 段階で得たイメージにピッタリに見えます。ここで重要なのは、

傾き $f'(a)$ の修正を a を変えることで行える

ということです。1 次式というのは、傾きを好きなように変えて良ければ $x \neq a$ である任意の点 (x, y) を通るようにできますので、ただ単に「傾きを修正すればよい」というだけではなにも嬉しくありません。f' の中身の a を変えることで $(x, f(x))$ を通るようにできるということがミソです。しかも x が a に近ければ近いほど a の修正も少なくてすみます。なぜなら θ は 1 より小さい正の実数なので、修正分 $\theta(x - a)$ は $x - a$ より小さいからです。

6.1.2 2 変数関数の場合

前節で、1 変数関数の増減を調べるには微分の値の正負を調べれば良いことがわかりました。このことは 2 変数関数に拡張できるでしょうか?

「微分の値の正負」といわれた段階でもうそのままでは 2 変数関数に適用できなさそうだという感じがするでしょう。なぜなら「微分の値」に当たるものがないからです。また、1 変数関数の場合には変数 x の二つの値 x_0, x_1 の間に必ず大小関係（$x_0 < x_1$ または $x_0 > x_1$）があるので関数が増加しているとか減少しているとかという言葉が意味を持ったのであって、2 変数関数の場合には (x_0, y_0) と (x_1, y_1) の間に自然な大小関係がないのですからそもそも増加関数とか減少関数という言葉が定義できません。

というわけで、前節の話をそっくりそのまま 2 変数関数に持ち込むわけにはいかないことが分かりました。しかし、$f(x, y)$ が全微分可能なとき、

元の関数 $f(x, y)$ と 1 次近似 $f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ が似ているか否か

ということだけなら同様に議論することができるでしょう。

結論は 1 変数関数のときと同様

f が C^1 級なら似ていると言える

ということになります。数式で正確に書くと、まず f が C^1 級でなくても

定理 4. 全微分可能な $f(x,y)$ と定義域内の点 (a,b) に対し、定義域内の任意の (x,y) をとると、

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(y-b) \end{aligned}$$

の成り立つ θ で $0<\theta<1$ を満たすものが存在する。

が成り立ち（証明はあとでします）、その上 f が C^1 級なら 1 変数関数のときと同様に

本物の 1 次近似の $x-a$ や $y-b$ の係数からのずれが非常に小さい

ということが成り立つわけです。なぜなら、f が C^1 級なら f_x と f_y は連続なので、$x-a$ や $y-b$ が小さければ $f_x(a,b)$ と $f_x(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$ のずれや $f_y(a,b)$ と $f_y(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$ のずれも小さいからです。

注意. このことから、熱力学などの議論では、独立変数に当たる量（例えば温度と圧力）の変化が非常に小さい場合には、従属変数に当たる量（例えば内部エネルギー）を表す関数を、1 次近似に取り替えて議論してしまうわけです。

ただし、本当は積分と絡んだもっと「怪しくない」理由（「微分積分の基本定理」に当たる定理）があって 1 次近似で議論しても大丈夫であることが保証されるのですが、とりあえずは「元の関数と 1 次近似は狭い範囲ではよく似ているから」と思っておけば十分でしょう。★

定理 4 のことを「2 変数関数の平均値の定理」と呼ぶ人もいますが、これから証明をお見せするように、実際には 1 変数関数の平均値の定理なのであって、「2 変数関数における値の変化の平均値とは何か」というような視点とはあまり関係ありません。人によって考え方はいろいろだと思いますが、私は「2 変数関数の平均値の定理」という呼び方はセンスが悪いと思っているので、使わないようにしています。

それでは証明しましょう。

証明. (x_0,y_0) を定義域から任意に選びます。そして、方向微分のときと全く同様に、$t=0$ で (a,b)、$t=1$ で (x_0,y_0) になる t の 2 つの 1 次関数の組（つまり (a,b) と (x_0,y_0) を通る直線のパラメタ付け）

$$(x,y) = (a+t(x_0-a), b+t(y_0-b))$$

を $f(x,y)$ に入れた関数を $\varphi(t)$ としましょう。

$$\varphi(t) = f(a+t(x_0-a), b+t(y_0-b))$$

です。すると、$\varphi(t)$ を微分することは、f を $(a+t(x_0-a), b+t(y_0-b))$ において $\begin{bmatrix} x_0-a \\ y_0-b \end{bmatrix}$ 方向に方向微分することです。しかも、今 f は全微分可能ですので、結局

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}(t) =& \frac{\partial f}{\partial x}(a+t(x_0-a), b+t(y_0-b))(x_0-a) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(a+t(x_0-a), b+t(y_0-b))(y_0-b)\end{aligned}$$

となります。一方、平均値の定理によって

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{d\varphi}{dt}(0+\theta(1-0))(1-0) = \varphi(0) + \frac{d\varphi}{dt}(\theta)$$

となる θ で $0 < \theta < 1$ を満たすものが存在します。この式で φ をすべて f に戻せば、

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta(x_0-a), b+\theta(y_0-b))(x_0-a) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(a+\theta(x_0-a), b+\theta(y_0-b))(y_0-b)\end{aligned}$$

が得られます。 □

6.1.3　というわけで極大と極小に注目する

前節の議論により、関数の値の増減の様子については、1 変数の場合も 2 変数の場合も関数が C^1 級なら 1 次近似を見ることで十分良くわかるといってよいことが結論できました。しかし、1 変数関数の場合には微分の値の正負だけが問題なのでこの考え方で関数全体の増減の様子が十分分かる（増減表の「斜めの矢印」をつないだものが、まさに関数のグラフの大雑把な形になっています）のですが、2 変数関数になると 1 次近似は平面の式なので、「各点での 1 次近似を計算すれば関数の値の様子が分かる」と言われても、「各点での 1 次近似」と「関数全体の様子」を結びつけるのは容易ではありません。つまり、各点で「グラフが一番大きく傾いている向き」がすべて分かっても、それらを総合して全体としての形を把握するのはほとんど無理だということ、もっと有り体に言ってしまえば、

1 変数関数では増減表が書けるが 2 変数関数では書けない

ということです。

そこで、1 変数関数のグラフをもっと大雑把に眺めてみましょう。「$f'(a)$ が正なら a の近くでは増加」と言ってきましたが、このことにはもっと精密な情報も入っています。つまり $f'(a)$ が大きければ大きいほど関数の増加の具合も大きいとい

うことです。しかし、既に上の括弧の中で指摘したように、そのような細かい情報は気にしない本当に大雑把な増加減少の様子だけなら、増減表の矢印をつないだ折れ線で十分事足りているわけです。このように、折れ線程度の概形でよいなら、重要なのは増加区間と減少区間というより、むしろ

「山折り」や「谷折り」になっている場所

です。それさえ分かれば関数の増加と減少だけは完全につかむことができるわけです。しかも、この視点なら 2 変数関数にも適用できるでしょう。つまり、2 変数関数のグラフにおいて

「山頂」と「谷底」がどこか

という情報だけ得られればとりあえず満足としようじゃないか、というわけです。

そこで、以下では「山折り」や「山頂」および「谷折り」や「谷底」がどこであるかを、増加減少という視点を使わずに調べる方法を手に入れることが目標となります。目標物を「山折り」とか呼ぶのはちょっと恥ずかしいので、ちゃんとした名前が用意されています。それが**極大**と**極小**です。

高校で 1 変数関数の極大極小について学んでいますが、そこでの定義は

> 関数が増加から減少に転じるところを極大、減少から増加に転じるところを極小と呼ぶ

だったようです。しかし、この定義には「増加減少」というタブーが入ってしまっているので 2 変数関数に適用することはできません。そこで、1 変数でも 2 変数でも（一般の多変数でも）通じるように、次のように定義します。

定義 5. $x = a$ が 1 変数関数 f の**極大点**であるとは、区間 $(a-r, a+r)$ の範囲では $f(a)$ が最大値であるような正実数 r が存在することを言う。a が f の極大点であるとき $f(a)$ を**極大値**という。
同様に、$x = a$ が f の**極小点**であるとは、区間 $(a-r, a+r)$ の範囲では $f(a)$ が最小値であるような正実数 r が存在することを言う。a が f の極小点であるとき $f(a)$ を**極小値**という。

このように定義すれば 2 変数（や一般の多変数）での極大極小の定義も次のようにすればよいことがわかるでしょう。

定義 6. (a,b) が 2 変数関数 f の**極大点**であるとは、(a,b) を中心とした半径 r の円の内部では $f(a,b)$ が最大値であるような正実数 r が存在することを言う。(a,b) が f の極大点であるとき $f(a,b)$ を**極大値**という。
同様に、(a,b) が f の**極小点**であるとは、(a,b) を中心とした半径 r の円の内部では $f(a)$ が最小値であるような正実数 r が存在することを言う。(a,b) が f の極小点であるとき $f(a,b)$ を**極小値**という。

なお、極大か極小かを問題にしないときには「(a,b) で極値をとる」とか「$f(a,b)$ は極値である」とかと「大」や「小」を省略した言い方を使います。

さて、上の定義は関数 f が微分可能でなくても、それどころか連続でなくても意味をなす定義です。しかし、我々は微分を使って極大点や極小点を探そうとしているのですから、以下では f は微分可能であることを仮定します。本題の節に移る前に、1 変数関数の場合にはおなじみの事実をキチンと確認しておきましょう。

$x=a$ が f の極大点または極小点ならば $f'(a)=0$ である。

証明. どちらでも同じなので $x=a$ で極大であるとしましょう。つまり、$(a-r,a+r)$ においては $f(a)$ は $f(x)$ の最大値だということです。ということは、この範囲においては $f(x)-f(a)\leq 0$ です。よって、

$$a-r<x<a \Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$$
$$a<x<a+r \Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0$$

が成り立ちます。今 f は微分可能としているので、上の二つの式の左辺は $x\to a$ の極限においてどちらも $f'(a)$ に収束します。つまり、

$$f'(a)=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0\\ \displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0\end{cases}$$

となります。0 以上 0 以下の実数は 0 しかありませんので $f'(a)=0$ です。 $\square$

グラフで言えば、極大や極小の点では接線は傾き 0（x 軸に平行）になっているということを意味します。これに対応することを 2 変数関数のグラフで想像してみれば、**極大や極小の点では接平面は xy 平面に平行になっている**だろうと考えられるでしょう。確かにそのとおりです。

定理 5. 偏微分可能な 2 変数関数 f が (a,b) で極値をとるなら

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ。

証明. f が (a,b) で極値をとるなら、y に b を代入してできる x の 1 変数関数 $f(x,b)$ は $x=a$ で極値を取ります。よって、上で証明したように $f(x,b)$ の x での微分の値は $x=a$ で 0 です。すなわち $f_x(a,b)=0$ が成り立ちます。$f_y(a,b)=0$ も同様です。 □

このことは全微分可能でなくても（つまり、その点に接平面がなくても）偏微分可能だけで成り立つわけです。が、以下、我々が扱える関数は全微分可能ですので、「接平面が xy 平面に平行」というイメージの方がこの証明より大切です。

さて、これで「極値をとるなら微分が 0」ということが分かったわけですが、もちろん、$f(x)=x^3$ などでお馴染みのように、微分が 0 でも極値をとるとは限りません。そこで、次節の目標は、

> 微分が 0 の点のうちどれが極大点でどれが極小点でどれがどちらでもないのかを、**関数の増減という概念を使わずに判定する**

こととなります。

問題 16 の解答

(1) $x=y$ として $x\to 0$ とすると、

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{xx}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

となるので不連続です。

(2) $y=0$ を代入すると $f(x,0)=0$ という x の定数関数になりますので $(0,0)$ において x で偏微分可能で値は 0 です。全く同様に y でも偏微分可能で値はやはり 0 です。 □

問題 17 の解答

(1) $y=x^2$ として $x\to 0$ とすると、

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

となって不連続です。
(2) $(x,y)=(tu,tv)$ を代入すると、

$$f(tu,tv)=\frac{(tu)^2(tv)}{(tu)^4+(tv)^2}=\frac{tu^2v}{tu^4+v^2}$$

となって $v\neq 0$ なら $t=0$ まで（つまり原点まで）この式で表されます。よって、$t=0$ での微分は普通に 1 変数関数の商の微分公式で計算することができて、

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=\left.\frac{u^2v(tu^4+v^2)-tu^2v(u^4)}{(tu^4+v^2)^2}\right|_{t=0}=\frac{u^2v^3}{v^4}=\frac{u^2}{v}$$

となります。

$v=0$ のときは $f(tu,0)=0$ という常に値が 0 の定数関数なので方向微分可能で値は 0 です。 □

問題 18 の解答

三角不等式により、

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|y|(3x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

となります。さらに分子を大きくして

$$|f(x,y)-f(0,0)|\leq\frac{|y|(3x^2+3y^2)}{x^2+y^2}=3|y|$$

が得られます。$(x,y)\to(0,0)$ とすると $|y|\to 0$ ですので、この不等式の左辺は 0 に収束します。よって、はさみうちの原理により、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$$

となることが示せました。これは、$f(x,y)$ が $(0,0)$ で連続であることを意味しています。 □