2008年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第13回

7月15日 清野和彦

8.4 ラグランジュの未定乗数法：2変数の場合

条件付き極値問題に戻りましょう。

陰関数定理によって、開区間を定義域とする x のいくつかの関数 $\eta_1(x), \dots, \eta_m(x)$ とやはり開区間を定義域とする y のいくつかの関数 $\xi_1(y), \dots, \xi_n(y)$ があって、$g(x,y)=0$ を満たす点のうち $g(x,y)$ の停留点でない部分はすべて $y=\eta_i(x)$ のグラフか $x=\xi_j(y)$ のグラフで表せることが分かりました。だから、点 (a,b) が $g(x,y)=0$ 上の点でしかも停留点ではない場合、(a,b) で $f(x,y)$ が条件付き極値をとるなら、点 (a,b) をグラフに含む $\eta_i(x)$ か $\xi_j(y)$ があって、それらについて、x の1変数関数

$$\varphi_i(x) := f(x, \eta_i(x))$$

は $x=a$ を極値に持ち、また y の1変数関数

$$\psi_j(y) := f(\xi_j(y), y)$$

は $y=b$ を極値に持ちます。ということは

$$\varphi_i'(a)=0 \qquad \text{や} \qquad \psi_j'(b)=0$$

が**必要**です。

このように、条件 $g(x,y)=0$ の下での $f(x,y)$ の極値をとる点を探すには、$i=1,\dots,m$ と $j=1,\dots,n$ のすべてについて、$\varphi_i'(x)=0$ と $\psi_j'(x)=0$ を解かなければならないことになります。しかし、一つの $g(x,y)=0$ に対して、それをグラフに分けるのに関数 $\eta_i(x)$ や $\xi_i(y)$ がいくつ必要かさえ分からないのですから、「微分が0」という必要条件を得るだけでも結構面倒そうに見えます。ところが、これを突き詰めて非常にシンプルな条件に書き換えたものが**ラグランジュの未定乗数法**というものなのです。以下、我々も恐れずに考察を突き詰めてラグランジュの未定乗数法を「発見」しましょう。

注意. ラグランジュの未定乗数法で得られるのは、極値をとる点であるための**必要条件**です。具体的には、条件なしの極値問題における「微分が0」に当たる条件だけです。「2階微分の正負を見て極大極小を判定する」という十分条件に当たることも議論できるのですが、かなり複雑な上、どうしてそのような条件になるのか理由が分かりにくく、時間もありませんので割愛します。ご了承下さい。★

8.4.1 「極値をとるための必要条件」を f と g だけで表す

具体的な $g(x,y)$ が与えられれば $\eta_i(x)$ や $\xi_j(y)$ が具体的に沢山出てくるでしょうが、我々がやろうとしていることは一般論ですので、$\eta_i(x)$ や $\xi_j(y)$ が沢山ある可能性は忘れないようにしなければならないものの、どの $\eta_i(x)$ や $\xi_j(y)$ についても同じ議論になるはずです。だから、とりあえずここでは $g(x,y)=0$ の一部が $y=\eta(x)$ という関数のグラフで表されたとして、この部分にあるかも知れない極値だけを探してみましょう。目標は、

$$\varphi(x) := f(x,\eta(x))$$

とおいたときに、a が

$$\varphi'(a)=0$$

を満たすという条件を、$\varphi(x)$ はもちろんのこと $\eta(x)$ も使わずに $f(x,y)$ と $g(x,y)$ の微分だけを使って表すことです。それができれば、他の $y=\eta_i(x)$ のグラフや $x=\xi_j(y)$ のグラフで表されている部分にある極値をとる点の満たすべき必要条件がすべて一遍に得られるだろうという目論見です。

やりたいことは $\varphi'(a)=0$ という条件を言い換えることなのですから、まずは合成関数の微分公式を使って $\varphi(x)$ を微分してみるべきでしょう。すると、

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\eta(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta(x))\frac{d\eta}{dx}$$

すなわち、

$$\varphi'(x) = f_x(x,\eta(x)) + f_y(x,\eta(x))\eta'(x) \tag{1}$$

となります。これで φ の微分を f の偏微分と η の微分で表すところまで来ました。

あとは η の微分を消し去ることができればよいのですが、実は、それは既に陰関数定理を説明するときに出てきているのです。どうやって表したのか思い出しましょう。$\eta(x)$ は $g(x,y)=0$ によって決まる陰関数なので、

$$g(x,\eta(x)) \equiv 0$$

を満たすわけです。これの両辺を x で偏微分すれば、合成関数の微分法により、

$$g_x(x,\eta(x)) + g_y(x,\eta(x))\eta'(x) \equiv 0$$

が得られます。よって、

$$\eta'(x) = -\frac{g_x(x,\eta(x))}{g_y(x,\eta(x))}$$

というふうに $\eta'(x)$ は g の偏微分たちで表すことができるのです。(陰関数定理によって $g_y(x,\eta(x)) \neq 0$ です。)

これを $\varphi'(x)$ の式(1) に代入すると

$$\varphi'(x) = f_x(x,\eta(x)) - f_y(x,\eta(x))\frac{g_x(x,\eta(x))}{g_y(x,\eta(x))}$$

となります。「結局 $\eta(x)$ が残っちゃっててダメじゃん」と思われるでしょうか? しかし、実は**これで目的は達せられている**のです。

どうして「これで目的達成」なのかを説明しましょう。例えば、$g(x,y)=0$ のうち $g_y(x,y) \neq 0$ を満たす部分が二つのグラフ $y=\eta_1(x)$ と $y=\eta_2(x)$ ですべて表せていたとします。(具体例として単位円を想像してもらえるとよいでしょう。例えば $\eta_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\eta_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ です。) すると、上の $\varphi(x)$ に当たる関数が二つ

$$\varphi_1(x) = f(x,\eta_1(x)) \qquad \varphi_2(x) = f(x,\eta_2(x))$$

というふうにできあがります。それぞれに上の議論を適用すると、$y=\eta_1(x)$ にある極値をとる点の x 座標の満たすべき必要条件として

$$f_x(x,\eta_1(x)) - f_y(x,\eta_1(x))\frac{g_x(x,\eta_1(x))}{g_y(x,\eta_1(x))} = 0$$

が得られ、$y=\eta_2(x)$ にある極値をとる点の x 座標の満たすべき必要条件として

$$f_x(x,\eta_2(x)) - f_y(x,\eta_2(x))\frac{g_x(x,\eta_2(x))}{g_y(x,\eta_2(x))} = 0$$

が得られることになります。この二つは「または」の関係にあります。つまり、この二つの等式のうち少なくとも一方を満たす x を求めているわけです。そして、そのような x として a という値が得られたら、その a が一つ目の等式を満たすなら $(a,\eta_1(a))$ が極値をとる点の候補、二つ目の等式を満たすなら $(a,\eta_2(a))$ が極値をとる点の候補です。ところが、今 $g(x,y)$ の零点のうち $g_y(x,y) \neq 0$ を満たす点は $(x,\eta_1(x))$ と $(x,\eta_2(x))$ で尽くされている(つまり $y=\eta_1(x)$ のグラフと $y=\eta_2(x)$ のグラフで覆えている)のですから、

$x=a$ が上の等式のうち少なくともどちらか一方を満たす

ということと、

a に対し、$g(a,b)=0$ と $g_y(a,b) \neq 0$ と

$$f_x(a,b) - f_y(a,b)\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} = 0$$

の三つを満たす b が存在する。

ということは同値になるわけです。あとの方の条件からは $\eta_1(x)$ と $\eta_2(x)$ は姿を消して、f と g しか登場していません。

以上の事情は $\eta_j(x)$ がいくつあっても同じです。よって、次の条件を得ることができたことになります。

> $g(x,y)=0$ 上の点 (a,b) で $g_y(a,b)\neq 0$ を満たすものが $f(x,y)$ の条件付き極値をとる点ならば
>
> $$f_x(a,b)-f_y(a,b)\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}=0 \tag{2}$$
>
> を満たさなければならない。

このように、「微分が 0」に当たる条件を f と g の偏微分だけで表すという目的は達成されているのです。もちろん $x=\xi(y)$ のグラフ上の点についても全く同じ議論ができ、結論は x と y の役割を入れ替えたもの、つまり、

> $g(x,y)=0$ 上の点 (a,b) で $g_x(a,b)\neq 0$ を満たすものが $f(x,y)$ の条件付き極値をとる点ならば
>
> $$f_y(a,b)-f_x(a,b)\frac{g_y(a,b)}{g_x(a,b)}=0 \tag{3}$$
>
> を満たさなければならない。

が得られます。これで十分役に立つ（つまり、計算可能な）必要条件になりました。なぜって、($g(x,y)=0$ という元々課せられている逃れられない条件の他には) f_x, f_y, g_x, g_y の二つの方程式(2) と(3) を解けばよいことになったわけですから。

ところで、二つの条件式(2) と(3) は「または」であって、連立方程式ではありません。つまり、点 (a,b) がどちらか一方さえ満たせば、そこは極値の候補（つまり「微分 $=0$」に当たる条件を満たす）なわけです。しかし、点 (a,b) において $g_x(a,b)$ も $g_y(a,b)$ も 0 でないなら、この点 (a,b) は条件式(2) に入れても条件式(3) に入れても意味を持ちます。そのような点 (a,b) が条件式(2) は満たしているのに条件式(3) の方は満たさないということはあるのでしょうか? つまり $f(x,\eta(x))$ では極値の候補なのに $f(\xi(y),y)$ では極値の候補でないということがあるのか、ということです。これは、話の流れからしてあるはずがなさそうに思えます。((a,b) が本当に極値をとる点ならこういうことが絶対にないことはこれまでの推論からはっきりしていますが、(a,b) が極値をとる点でない場合のことは俄には分かりません。）もし、こういうことが本当にないのなら、$g_x(a,b)\neq 0$ かつ $g_y(a,b)\neq 0$ の点においては条件(2) と条件(3) は同値なはずです。そう思って二つの条件式をよく見てみると、何のことはない、分母を払ったら同じ式です。つまり、全く同じ条件式

$$f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0 \tag{4}$$

を、$g_y(a,b) \neq 0$ という制限を付けて $g_y(a,b)$ で割ったものと、$g_x(a,b) \neq 0$ という制限を付けて $g_x(a,b)$ で割ったものとの二つに分けて書いていたに過ぎないわけで、実際には何の制限もなく条件(4) 一つでよかったわけです。

以上をまとめると次のようになります。

> $g(x,y)$ の停留点でない点 (a,b) が $g(x,y)=0$ の条件の下での $f(x,y)$ の条件付き極値をとる点ならば、
>
> $$g(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0$$
>
> を満たさなければならない。

つまり、$g(x,y)=0$ という条件付きで $f(x,y)$ の極値をとる点の候補は、

$g(x,y)$ の特異点（つまり $g(x,y)=0$ を満たす $g(x,y)$ の停留点）

および、

> 連立方程式
>
> $$g(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0 \qquad (5)$$
>
> を満たす点

だというわけです。（もちろん、これは極値をとる点であるための**必要条件**に過ぎないので、これらの点がすべて求まったら、その点で本当に極値をとっているかどうかは個別に調べる必要があります。）

注意. 条件(5) には「特異点ではない」が必要だ、と思うかも知れませんが、「および」とは「または」という意味なのですから、条件(5) で特異点を捕まえてしまってもかまわないわけです。また、「すべての特異点は(5) の条件を満たす」ということに気づいた方もいるかも知れません。実際、特異点では $g_x(a,b)=g_y(a,b)=0$ なのですから、特異点はすべて条件(5) を満たします。だから、極値をとる点は特異点も含めてすべて条件(5) だけで捕まえられることになります。しかし、最終目標であるラグランジュの未定乗数法においては、結局特異点は別扱いしなければならなくなるので、「(a,b) は特異点である」という条件も付けたままにしておきます。★

以上で、十分実用に耐えうる「条件付き極値問題の解き方」が手に入ったのですが、この程度の整理では「ラグランジュの未定乗数法」なんていう偉そうな名前で呼んではもらえません。そこにたどり着くために図形的な考察をしてみましょう。

8.4.2 図形的には

非常に具体的に考えてみましょう。$f(x,y)$ として、

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

を考えてみます。$z=f(x,y)$ のグラフは $z=1/(x^2+1)$ の $x\geq 0$ の部分を z 軸回りに回転したものです。（葛飾北斎の描いた富士山を思い浮かべて下さい。）原点 $(0,0)$ では $z=f(x,y)$ のグラフは尖っていて微分不可能ですので、$g(0,0)\neq 0$ であるような条件 $g(x,y)=0$ を考えます。例えば $g(x,y)=xy-1$ を考えてみましょう。

この場合の「条件付き極大値」とは、地図上で（つまり上から見て）$g(x,y)=0$（つまり $xy=1$）になるような道が北斎の富士山（頂上が原点）に引かれていたとき、その道の中で一番標高が高い地点のことです。それはもちろん原点 $(0,0)$ に一番近い $(1,1)$ という点なのですが、このように静的に考えるのではなく、もっと動的にイメージしてみましょう。

北斎の富士の頂上目指して東の方から一直線にトライしてはみたものの、どんどんきつくなる傾斜に耐えきれず徐々に北の方にコースがそれて行き、結局力尽きて真北の方に下りてしまった、というようなイメージを持ってみて下さい。このとき、一番頂上に近づいた点の特徴は何でしょう? なるべく高く上ろうと頑張っている気分になってください。そうすると、富士山に同心円状の輪が見えてきませんか? 等高線です。そして、頑張ってなるべく上の方にある等高線まで行こうと思うわけです。そうすると、一番頂上に近づいた高さとは、あなたの走ったコースが**接した**等高線の高さになります。そうです、「一番頂上に近づいた点の特徴」は等高線「$f(x,y)=$一定」と条件の決める道「$g(x,y)=0$」が接する点です。空間において接しているということは、地図の上でも（つまり、真上から見ても）接しているからです。今考えている具体例では極大点は $(1,1)$ ですので、極大値は $f(1,1)=1/3$ です。よって、極大点では $f(x,y)=1/3$ という曲線と $g(x,y)=0$ という曲線が接しているというわけです（図 1）。

もちろん、上の（イメージ的な）考察は $f(x,y)$ や $g(x,y)$ が（ある程度の条件は付きそうですが）どのような関数であっても成り立つはずです。つまり、一般に、点 (a,b) が $f(x,y)$ の $g(x,y)=0$ という条件の下での極値をとる点のとき、$f(x,y)=f(a,b)$ という曲線と $g(x,y)=0$ という曲線は (a,b) で接することになります。だから、この条件を f や g の偏微分の値を使って書くことができれば、前節の計算による考察と結びつけることができるでしょう。

さて、$f(x,y)$ と $g(x,y)$ という二つの関数と点 (a,b) が与えられたとします。そして、点 (a,b) における関数の値を $f(a,b)=k$, $g(a,b)=l$ としましょう。このとき、二つの曲線 $f(x,y)=k$ と $g(x,y)=l$ が接するとはどういうことでしょうか? それは、

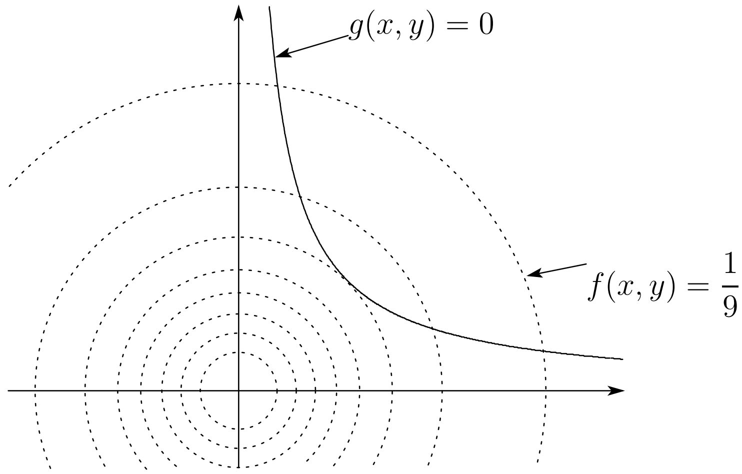

図 1: 真上から見た山（$z=f(x,y)$ のグラフ）と道（$g(x,y)=0$）。点線は山の等高線、すなわち $f(x,y)$ が一定値をとる曲線（1/9 刻み）。極値をとる点では山の等高線と道が接している。

> $f(x,y)=k$ も $g(x,y)=l$ も点 (a,b) で接線を持ち、しかもその二つの接線が一致する

ということです。もちろん接点 (a,b) は共有ですので、接線が一致するとは接線の傾きが一致することと同じです。

そこで、$f(x,y)=k$ や $g(x,y)=l$ の点 (a,b) における接線って何だったかという陰関数定理のときの議論を思い出すことになるわけです。すると、例えば $f(x,y)=k$ の (a,b) における接線とは、

> $z=f(x,y)$ のグラフの点 (a,b,k) における接平面と、xy 平面に平行な平面 $z=k$ との交線（の xy 平面への正射影）

でした。だから、$f(x,y)=k$ が点 (a,b) で接線を持つための一つの十分条件は点 (a,b) が f の停留点でないことであり、そのとき、接線は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)=k$$

で与えられるわけです。同様に、$g(x,y)=l$ が点 (a,b) で接線を持つための十分条件は点 (a,b) が g の停留点でないことであり、そのとき、接線は

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)=l$$

で与えられます。

この二本の直線が平行であるとは、二つのベクトル $\begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{bmatrix}$ が平行なことです。なぜなら、この二つのベクトルはそれぞれの直線の法ベクトルだからです。

注意. この二つのベクトルはそれぞれ f と g の点 (a,b) における**勾配ベクトル**、すなわち接平面の傾きが一番きつい向きを向いていました。一方、二つの接線は点 (a,b) における接平面において xy 平面に平行な方向、つまり**その平面の高さ変化のない方向**を向いています。一方、直線を $ax+by=0$ のような式で表す心は、「一番傾いている方向」と「高さ変化のない方向」が直交しているということでした。だから、上では「勾配ベクトルが平行」と書きましたが、その心は「高さ変化のない方向が平行」という意味です。これはまさに $f(x,y)=k$ という等高線と $g(x,y)=l$ という等高線が接しているという状況を言い表す条件なのです。★

ここで前節の最後の条件式

$$f_x(a,b)g_y(a,b) - f_y(a,b)g_y(a,b) = 0$$

を思い出してください。これはまさに

$$\text{二つのベクトル} \begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} \text{と} \begin{bmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{bmatrix} \text{が平行}$$

ということを意味する式です。計算と図形的イメージでちゃんと同じ結論にたどり着きました。ただ、前節の計算による推論の方がちょっとだけ優れているところがあります。この節の考察では $f(x,y)=k$ も (a,b) で接線を持つ、つまり (a,b) は f の停留点ではないと仮定しましたが、前節ではその仮定は使っていないということです。例えば、道 $g(x,y)=0$ が $f(x,y)$ の条件なしでの極大点を通っているとき、もちろん条件付きでもその点は極大ですが、この節の考察ではその場合を落としてしまっていたわけです。だから、「二つのベクトルが平行」という条件を

$$\begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{bmatrix} \text{となる } \lambda \text{ が存在する。}$$

と表現すればよいでしょう。λ として 0 も許すのです。そうすれば f の停留点、すなわち $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる (a,b) も含められます。((a,b) が g の停留点でないことは仮定していたので、右辺のベクトルは $\vec{0}$ でないことに注意してください。)

以上の考察により、前節の結論を次のように言い換えることができました。

> $g(x,y)=0$ という条件付きで $f(x,y)$ の極値をとる点の候補は、
>
> > $g(x,y)=0$ の特異点(つまり $g(x,y)=0$ を満たす $g(x,y)$ の停留点)

および、

$g(a,b)=0$ を満たし、しかも、

$$\begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{bmatrix}$$

を満たす λ が存在する点 (a,b)。

「λ なんていう今までなかった文字がでてきて余計汚くなった」と感じるかも知れませんが、この λ を導入したことで「条件付き極値問題」が「条件なし極値問題」に帰着されるのです。それが目標の「ラグランジュの未定乗数法」です。なお、この λ のことを**ラグランジュの未定乗数**と呼びます。

8.4.3　ラグランジュの未定乗数法

ここからは手品です。（つまり、「なぜそうなのか」が納得できる説明を私が持っていないということです。すみません。）

(a,b) が特異点でない場合の条件式を成分でばらして連立してみると、

$$\begin{aligned} g(x.y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

という連立方程式になります。ここで、第 2 式の左辺には x による偏微分しかでてきていないので x の 1 変数関数として不定積分してみたくなり、第 3 式の左辺には y による偏微分しかでてきていないので y の 1 変数関数として不定積分してみたくなります。（なるでしょう?）すると、積分定数を無視すればどちらの結果も同じ

$$f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

になります。（ただ $\partial/\partial x$ や $\partial/\partial y$ を消しただけです。）そして、驚いたことに、λ を第 3 の変数と見てこの式を λ で偏微分すると、第 1 式の左辺の符号を変えたもの、すなわち $-g(x,y)$ だけが残ります。ということは、3 変数関数 $F(x,y,\lambda)$ を

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

で定義すると、上の連立方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0$$

と書き換えることができるわけです。しかも、この連立方程式は

$$F(x, y, \lambda) \text{ の停留点を求めよ}$$

ということを意味します。

条件付き極値問題（の極値をとる点の候補探し）

が、変数を一つ増やすことによって

条件なし極値問題（の極値をとる点の候補探し）

に変身してしまったのです!

あんまりびっくりして (?) 特異点のことを忘れてしまうといけないので、それも付け加えてキチンとまとめておきましょう。

> 点 (a, b) が条件 $g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極値をとる点ならば、
>
> (a, b) は $g(x, y) = 0$ の特異点（すなわち $g(a, b) = 0$ を満たす $g(x, y)$ の停留点）
>
> または
>
> $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ と定義したとき、(a, b, λ_0) が $F(x, y, \lambda)$ の停留点となる λ_0 が存在する。
>
> の少なくとも一方が成り立つ。

なお、以上の条件によって極値をとる点の候補が見つかったら、それらが本当に極大点や極小点であることは個別に調べなければならないことです。上の条件はあくまでも**必要条件**であることに注意してください。

問題 36. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$、$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とする。条件 $g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極大点と極小点を**ラグランジュの未定乗数法を用いて**求めよ。

問題 37. xy 平面上の直線 $px + qy = 0$ と点 (a, b) との距離を**ラグランジュの未定乗数法を用いて**求めよ。

8.4.4 特異点がある場合の例

$g(x, y) = 0$ の決める図形が特異点を持つときには、そこも極値をとっているかどうか調べる必要があります。一つだけ例を見ておきましょう。

例 5. 条件

$$g(x, y) = y^2 - x^2(x - 1) = 0$$

の下で $f(x, y) = x$ の最小値を求めてみましょう。

まず、ラグランジュの未定乗数法を使います。すると、

$$F(x, y, \lambda) = x - \lambda(y^2 - x^3 + x^2)$$

ですので、$F_x = F_y = F_\lambda = 0$ は

$$1 + \lambda x(3x - 2) = 2\lambda y = y^2 - x^2(x - 1) = 0$$

となります。$F_y = 0$ から $y = 0$ または $\lambda = 0$ ですが、$\lambda = 0$ だと $F_x \neq 0$ となってしまうので、$y = 0$ です。すると $x^2(x-1) = 0$ となって $x = 0$ または 1 ですが、$x = 0$ だとまた $F_x \neq 0$ となってしまうので、$x = 1$ です。つまり、この方法からだと $g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ が極小値をとる可能性のある点として $(1, 0)$ が得られます。

条件式 $g(x, y) = 0$ は

$$y^2 = x^2(x - 1)$$

と変形でき、左辺は 0 以上なので x は負にはなり得ません。また、$x \to \infty$ とすると $f(x, y) = x$ も ∞ に発散します。よって、$(1, 0)$ で極小値を取ります。

ところが、さらに式変形を続けて $g(x, y) = 0$ を解いてみると、簡単に解けて、

$$y = \pm x\sqrt{x - 1} \quad (x > 1) \quad \text{および} \quad y = x = 0$$

となります（図 2）。$f(x, y) = x$ ですので、最小値は 0 で、最小値をとる点は $(0, 0)$ です。

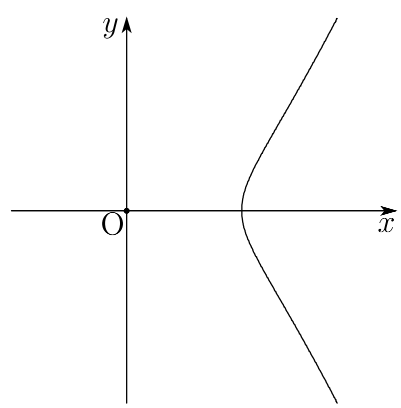

図 2: $g(x, y) = 0$ は孤立点を持つ。原点も「曲線」$g(x, y) = 0$ 上の点。

このように、ラグランジュの未定乗数法だけだと特異点で極値を取る可能性がすっぽりと抜け落ちてしまうことがあるので気をつけてください。

8.5 ラグランジュの未定乗数法：3 変数の場合

2 変数のときの考察を 3 変数関数に対してそのまま行ってみましょう。ただし、図形的な考察は無理なので、式による考察のところだけを利用して一気に結論を目指します。

(a,b,c) が $g(x,y,z)=0$ 上の特異点ではない点とします。特異点ではないのですから、(a,b,c) において g_x, g_y, g_z のうち少なくともどれか一つは 0 でないので、例えば $g_z(a,b,c)\neq 0$ としましょう。すると、陰関数定理により、(a,b) の近くで定義された滑らかな関数 $\zeta(x,y)$ で、

$$g\bigl(x,y,\zeta(x,y)\bigr)=0, \qquad \zeta(a,b)=c$$

を満たすものが存在します。よって、(a,b,c) が条件 $g(x,y,z)=0$ の条件の下で $f(x,y,z)$ の極値であるためには、2 変数 x,y の関数

$$\varphi(x,y)=f\bigl(x,y,\zeta(x,y)\bigr)$$

において (a,b) が停留点であることが必要です。その条件を合成関数の微分法を用いて書くと

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\frac{\partial\zeta}{\partial x}(a,b)=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\frac{\partial\zeta}{\partial y}(a,b)=0\end{aligned}$$

となります。$\zeta(x,y)$ の x や y による偏微分は、$g\bigl(x,y,\zeta(x,y)\bigr)\equiv 0$ という恒等式を偏微分することによって、

$$\zeta_x(x,y)=-\frac{g_x(x,y,\zeta(x,y))}{g_z(x,y,\zeta(x,y))}, \qquad \zeta_y(x,y)=-\frac{g_y(x,y,\zeta(x,y)}{g_z(x,y,\zeta(x,y))}$$

と求まりますので、結局、(a,b,c) で極値をとるためには

$$\begin{aligned}f_x(a,b,c)-f_z(a,b,c)\frac{g_x(a,b,c)}{g_z(a,b,c)}=0\\ f_y(a,b,c)-f_z(a,b,c)\frac{g_y(a,b,c)}{g_z(a,b,c)}=0\end{aligned}$$

でなけれなならないことなります。

今は $g_z(a,b,c)\neq 0$ で考えましたが、$g_x(a,b,c)\neq 0$ の場合と $g_y(a,b,c)\neq 0$ の場合もありますので、結局、$g(x,y,z)=0$ のもとで $f(x,y,z)$ の極値を取る点の候補

を探すには、

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= f_x(a,b,c) - f_z(a,b,c)\frac{g_x(a,b,c)}{g_z(a,b,c)} \\ &= f_y(a,b,c) - f_z(a,b,c)\frac{g_y(a,b,c)}{g_z(a,b,c)} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

または

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= f_y(a,b,c) - f_x(a,b,c)\frac{g_y(a,b,c)}{g_x(a,b,c)} \\ &= f_z(a,b,c) - f_x(a,b,c)\frac{g_z(a,b,c)}{g_x(a,b,c)} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

または

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= f_z(a,b,c) - f_y(a,b,c)\frac{g_z(a,b,c)}{g_y(a,b,c)} \\ &= f_x(a,b,c) - f_y(a,b,c)\frac{g_x(a,b,c)}{g_y(a,b,c)} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

の三組の連立方程式を解かなければならないことになります。

三組の連立方程式(6),(7),(8) とも当然「条件を満たす」という意味の式 $g(x,y,z) = 0$ が入っていますので、とりあえずそれはおいておいて、残りの部分で分母を払うと、それぞれ、

$$\begin{aligned} f_x g_z &= f_z g_x, & f_y g_z &= f_z g_y \\ f_y g_x &= f_x g_y, & f_z g_x &= f_x g_z \\ f_z g_y &= f_y g_z, & f_x g_y &= f_y g_x \end{aligned}$$

となります。（面倒なので (a,b,c) は省きました。）(a,b,c) は $g(x,y,z)$ の停留点ではないのですから、この式たち（と $g(a,b,c) = 0$ を合わせたもの）は式(6) と式(7) と式(8) を合わせたものと同値です。よく見ると、上の 6 つの式には同じものが入っていて、結局

$$f_x g_z = f_z g_x, \qquad f_y g_x = f_x g_y, \qquad f_z g_y = f_y g_z$$

の 3 つだけしかありません。これらの式はそれぞれ、

ベクトル $\begin{bmatrix} f_x \\ f_z \end{bmatrix}$ とベクトル $\begin{bmatrix} g_x \\ g_z \end{bmatrix}$ が平行。

ベクトル $\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ とベクトル $\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$ が平行。

ベクトル $\begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix}$ とベクトル $\begin{bmatrix} g_y \\ g_z \end{bmatrix}$ が平行。

を意味していますので、結局

$$\text{ベクトル} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \text{とベクトル} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} \text{が平行}$$

という一文で言い換えられます。

(a,b,c) が $g(x,y,z)$ の停留点でないことから、ベクトル $\begin{bmatrix} g_x(a,b,c) \\ g_y(a,b,c) \\ g_z(a,b,c) \end{bmatrix}$ は 0 ベクトルではありません。よって、上の条件は

$$\begin{bmatrix} f_x(a,b,c) \\ f_y(a,b,c) \\ f_z(a,b,c) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x(a,b,c) \\ g_y(a,b,c) \\ g_z(a,b,c) \end{bmatrix}$$

を満たす λ が存在する、と言いかえられます。

以上を成分で書くと、$g(x,y,z)=0$ の特異点でない (a,b,c) が $g(x,y,z)=0$ のもとでの $f(x,y,z)$ の極値をとる点であるためには、

$$\begin{aligned} g(a,b,c) &= 0 \\ f_x(a,b,c) - \lambda g_x(a,b,c) &= 0 \\ f_y(a,b,c) - \lambda g_y(a,b,c) &= 0 \\ f_z(a,b,c) - \lambda g_z(a,b,c) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす λ が存在しなければならないということになります。後の 3 つの式をそれぞれ x,y,z で積分してやると、同じ式

$$f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

がでてきます。さらにこの式を「第 4 の変数」λ で微分してやると、条件式 $g(x,y,z)=0$ もでてきます。これで、次の**ラグランジュの未定乗数法**が得られました。

> (a,b,c) が条件 $g(x,y,z)=0$ の下での $f(x,y,z)$ の極値をとる点ならば、
>
> (a,b,c) は $g(x,y,z)=0$ の特異点である。
>
> または
>
> $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ と定義すると、(a,b,c,λ_0) が F の停留点になるような λ_0 が存在する。
>
> が成り立つ。

もちろん、この場合も、これらの条件を満たす (a,b,c) がすべて求まったら、そこで極大や極小になっているかどうかは個別に調べなければなりません。

問題 38. xyz 空間内の平面 $px+qy+rz=0$ と点 (a,b,c) との距離を**ラグランジュの未定乗数法を用いて**求めよ。

8.6 付録：2 変数の場合の十分条件

以上は条件なしの場合の極値問題での「微分が 0」に当たる「**極値をとる点であるための必要条件**」を調べるための方法でした。しかし、条件なしの場合には 1 変数の場合も 2 変数の場合も 2 階微分の値を調べることで極大値をとるか極小値をとるかを判定できる場合がありました。例えば、1 変数関数の場合、

$x=a$ で $f(x)$ が極値をとるためには $f'(a)=0$ が**必要**である。

ということの他に、

$f'(a)=0$ を満たす点で $f''(a)>0$（$f''(a)<0$） ならば $x=a$ で極小値（極小値）をとる。

ということもありました。前節までの議論は上の条件に当たる部分だけだったわけです。それでは、条件付き極値問題において下の条件に当たる条件はどのようなものでしょうか。それを 2 変数の場合だけ調べてみましょう。ただし、図形的な意味づけを私が持っていないので、式変形だけの議論になります。あしからずご了承下さい。

条件 $g(x,y)=0$ が $y=\eta(x)$ と解けている範囲で考えましょう。前節までで議論したことは、$\varphi(x)=f(x,\eta(x))$ と定義したとき、

$$\varphi'(a)=0$$

という条件を f と g で書く方法でした。ここで、議論したいことは、この条件が満たされているところで、さらに

$$\varphi''(a)>0 \quad \text{や} \quad \varphi''(a)<0$$

という条件を f と g で書くことです。$\varphi''(a)>0$ なら極小、$\varphi''(a)<0$ なら極大です。

やるべきことは、合成関数の微分公式を使って $\varphi''(x)$ を計算することです。なお、面倒なので変数は極力省略して打ちます。混乱しそうな人は是非補って読んでください。

既に計算したことですが、1 階微分は

$$\varphi'=f_x+f_y\eta'$$

となります。ここで $\eta' = -g_x/g_y$ を代入してもよいのですが、とりあえずそのままにしてもう一度微分してみましょう。すると、

$$\begin{aligned}\varphi'' &= ((f_x)_x + (f_x)_y\eta') + ((f_y)_x + (f_y)_y\eta')\eta' + f_y\eta'' \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}\eta' + f_{yy}(\eta')^2 + f_y\eta''\end{aligned}$$

となります。(f は C^2 級とし、$f_{xy} = f_{yx}$ を使って整理しました。)一方、条件式 $g(x, \eta(x)) \equiv 0$ の方を一回微分して

$$g_x + g_y\eta' \equiv 0$$

もう一回微分して

$$g_{xx} + 2g_{xy}\eta' + g_{yy}(\eta')^2 + g_y\eta'' \equiv 0$$

が出ます。(g も C^2 級としました。φ'' の計算と全く同じです。)この二つから、

$$\eta' = -\frac{g_x}{g_y} \qquad \begin{aligned}\eta'' &= -\frac{1}{g_y}\left(g_{xx} + 2g_{xy}\eta' + g_{yy}(\eta')^2\right) \\ &= -\frac{g_{xx}}{g_y} + \frac{2g_{xy}g_x}{g_y^2} - \frac{g_{yy}g_x^2}{g_y^3}\end{aligned}$$

が得られます。これを φ'' の式に代入すると、

$$\varphi'' = f_{xx} - \frac{2f_{xy}g_x}{g_y} + \frac{f_{yy}g_x^2}{g_y^2} - \frac{f_y g_{xx}}{g_y} + \frac{2f_y g_{xy}g_x}{g_y^2} - \frac{f_y g_{yy}g_x^2}{g_y^3}$$

となります。

さて、我々の興味は φ'' の正負です。そして、今 $g_y \neq 0$ の範囲で議論しているのですから、式全体に g_y^2 を掛けても符号は変わりません。よって、

$$g_y^2\varphi'' = f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2 - \frac{f_y}{g_y}g_{xx}g_y^2 + 2\frac{f_y}{g_y}g_{xy}g_xg_y - \frac{f_y}{g_y}g_{yy}g_x^2$$

の正負を調べるのでも同じです。ここで、f_y/g_y をわざと残している理由は、これがラグランジュの未定乗数 λ、すなわち、点 (a, b) が極値をとる候補点ならば

$$\begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{bmatrix}$$

が成り立つ、その λ です。つまり、極値をとる候補点においては

$$g_y^2\varphi'' = f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2 - \lambda g_{xx}g_y^2 + 2\lambda g_{xy}g_xg_y - \lambda g_{yy}g_x^2 \tag{9}$$

が成り立つわけです。

ここで、ラグランジュの未定乗数法において

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

とおいたことを思い出しましょう。これの 2 階偏微分たちを計算すると、

$$\begin{aligned} &F_{xx}=f_{xx}-\lambda g_{xx} && F_{xy}=F_{yx}=f_{xy}-\lambda g_{xy} && F_{yy}=f_{yy}-\lambda g_{yy} \\ &F_{x\lambda}=F_{\lambda x}=-g_x && F_{y\lambda}=F_{\lambda y}=-g_y && F_{\lambda\lambda}=0 \end{aligned}$$

となります。これらを使って式(9) を整理すると、

$$g_y^2\varphi''=F_{xx}F_{y\lambda}^2-2F_{xy}F_{x\lambda}F_{y\lambda}+F_{yy}F_{x\lambda}^2=-\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{x\lambda} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{y\lambda} \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} & F_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$$

となります。この条件は x と y に関して対称なので、$g(x,y)=0$ の $x=\xi(y)$ のグラフになっている部分についても全く同じ式が得られます。

以上より次が得られました。

> 条件 $g(x,y)=0$ の特異点でない点 (a,b) で $f(x,y)$ が極値をとるなら、$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ と定義したとき、(a,b,λ_0) が $F(x,y,\lambda)$ の停留点となる λ_0 が存在する。その点において、行列式
>
> $$\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{x\lambda} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{y\lambda} \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} & F_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$$
>
> が負ならば極小値をとり、正ならば極大値をとる。

問題 39. 問題 36 をこの節の極大極小判定法を使って解け。

問題 36 の解答

$g(x,y)=x^2+y^2-1$ の偏微分は

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2x,\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2y$$

なので、$g(x,y)=0$ を満たす点（すなわち単位円上の点）は $g(x,y)$ の停留点ではありません。つまり、$g(x,y)=0$ は特異点を持ちません。よって、極値をとる点はすべてラグランジュの未定乗数法で見つけられるものの中にあります。

$F(x,y,\lambda)$ を

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=2x^2+y^2-x^2\lambda-y^2\lambda+\lambda$$

とします。これを偏微分すると、

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 4x - 2x\lambda = 2x(2-\lambda),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y - 2y\lambda = 2y(1-\lambda),$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + 1$$

となりますので、$F(x,y,\lambda)$ の停留点は

$$(0,\pm 1,1), \qquad (\pm 1,0,2)$$

の 4 点です。よって、$g(x,y)=0$ の下での $f(x,y)$ の極大点と極小点はすべて

$$(0,\pm 1), \qquad (\pm 1,0)$$

の 4 点に含まれます。

$g(x,y) = 0$、すなわち単位円を、例えば $(1,0)$ から反時計回りにたどるとき、$f(x,y)$ の値は、

$$f(1,0)=2, \quad f(0,1)=1, \quad f(-1,0)=2, \quad f(0,-1)=1, \quad f(1,0)=2$$

と変わります。4 点 $(\pm 1,0),(0,\pm 1)$ 以外に極値をとり得る点は存在しないのですから、1 変数関数の増減表を書くときと全く同じように、

$(1,0)$ から $(0,1)$ までと、$(-1,0)$ から $(0,-1)$ までは減少、
$(0,1)$ から $(-1,0)$ までと、$(0,-1)$ から $(1,0)$ までは増加

となります。よって、$(\pm 1,0)$ で極大で $(0,\pm 1)$ で極小です。 □

問題 37 の解答

この問題は、

関数 $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ の条件 $g(x,y) = px + qy = 0$ の下での最小値を求める

ということと言い換えられます。（二点間の距離は $\sqrt{f(x,y)}$ ですが、これが最小になることと $f(x,y)$ が最小になることは同値ですので、計算が楽になるように平方根は取らずに考えることにしました。）ここで、a,b,p,q は定数で x,y が変数です。

$f(x,y)$ は

$$f(x,y) \geq (x-a)^2, \qquad f(x,y) \geq (y-b)^2$$

を満たしますので、x か y が大きくなると $f(x,y)$ の値も大きくなります。一方、$g(x,y)=0$ は直線です。よって、直線の端に行くほど $f(x,y)$ の値は大きくなります。また、関数 $f(x,y)$ は連続関数です。この二つのことから、$g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ は必ず最小値をとります。最小値は極小値のうち一番値の小さい値ですので、極小値をすべて求めれば最小値が求まります。

$g(x,y)=0$ を偏微分すると $g_x(x,y)=p,\ g_y(x,y)=q$ となります。今、$g(x,y)=0$ は直線であると仮定しているので、p, q の少なくとも一方は 0 ではありません。よって、$g(x,y)=0$ は特異点を持たず、ラグランジュの未定乗数法で極値の候補点をすべて求めることができます。

$F(x,y,\lambda)$ を

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2-px\lambda-qy\lambda$$

とし、$F(x,y,\lambda)$ の停留点を探すわけです。

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)&=2(x-a)-p\lambda\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)&=2(y-b)-q\lambda\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)&=-px-qy\end{aligned}$$

ですので、$F(x,y,\lambda)$ の停留点は

$$\left(\frac{q^2a-pqb}{p^2+q^2},\ \frac{p^2b-pqa}{p^2+q^2},\ -2\frac{pa+qb}{p^2+q^2}\right)$$

ただ一つです。直線 $g(x,y)=0$ の端へ行くほど $f(x,y)$ の値が大きくなることは分かっているわけですから、ただ一つの極値の候補点

$$\left(\frac{q^2a-pqb}{p^2+q^2},\ \frac{p^2b-pqa}{p^2+q^2}\right)$$

は極小点であり、すなわち最小点です。

求める距離は、この点における f の値の平方根なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{f\left(\frac{q^2a-pqb}{p^2+q^2},\frac{p^2b-pqa}{p^2+q^2}\right)}&=\sqrt{\left(\frac{q^2a-pqb}{p^2+q^2}-a\right)^2+\left(\frac{p^2b-pqa}{p^2+q^2}-b\right)^2}\\&=\frac{|pa+qb|}{\sqrt{p^2+q^2}}\end{aligned}$$

となります。 □

問題 38 の解答

この問題は、

> 関数 $f(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ の条件 $g(x,y,z) = px + qy + rz = 0$ の下での最小値を求める

ということと言い換えられます。（二点間の距離は $\sqrt{f(x,y,z)}$ ですが、これが最小になることと $f(x,y,z)$ が最小になることは同値ですので、計算が楽になるように平方根は取らずに考えることにしました。）ここで、a,b,c,p,q,r は定数で x,y,z が変数です。

$f(x,y,z)$ は

$$f(x,y,z) \geq (x-a)^2, \quad f(x,y,z) \geq (y-b)^2, \quad f(x,y,z) \geq (z-c)^2$$

を満たしますので、x か y か z が大きくなると $f(x,y,z)$ の値も大きくなります。一方、$g(x,y,z)=0$ は平面です。よって、平面の端に行くほど $f(x,y,z)$ の値は大きくなります。また、関数 $f(x,y,z)$ は連続関数です。この二つのことから、$g(x,y,z)=0$ の下で $f(x,y,z)$ は必ず最小値をとります。最小値は極小値のうち一番値の小さい値ですので、極小値をすべて求めれば最小値が求まります。

$g(x,y,z)=0$ を偏微分すると $g_x(x,y,z)=p$, $g_y(x,y,z)=q$, $g_z(x,y,z)=r$ となります。今、$g(x,y,z)=0$ は平面であると仮定しているので、p, q, r の少なくともひとつは 0 ではありません。よって、$g(x,y,z)=0$ は特異点を持たず、ラグランジュの未定乗数法で極値の候補点をすべて求めることができます。

$F(x,y,z,\lambda)$ を

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) \\ &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - px\lambda - qy\lambda - rz\lambda \end{aligned}$$

とし、$F(x,y,z,\lambda)$ の停留点を探すわけです。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda) &= 2(x-a) - p\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda) &= 2(y-b) - q\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda) &= 2(z-c) - r\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) &= -px - qy - rz \end{aligned}$$

ですので、$F(x,y,z,\lambda)$ の停留点は

$$\left(\frac{(q^2+r^2)a - pqb - rpc}{p^2+q^2+r^2}, \ \frac{(r^2+p^2)b - qrc - pqa}{p^2+q^2+r^2}, \ \frac{(p^2+q^2)c - rpa - qrb}{p^2+q^2+r^2}, \ -2\frac{pa+qb+rc}{p^2+q^2+r^2} \right)$$

ただ一つです。平面 $g(x,y,z)=0$ の端へ行くほど $f(x,y,z)$ の値が大きくなることは分かっているわけですから、ただ一つの極値の候補点

$$\left(\frac{(q^2+r^2)a-pqb-rpc}{p^2+q^2+r^2},\ \frac{(r^2+p^2)b-qrc-pqa}{p^2+q^2+r^2},\ \frac{(p^2+q^2)c-rpa-qrb}{p^2+q^2+r^2}\right)$$

は極小点であり、すなわち最小点です。よって、求める距離は、この点における f の値の平方根なので、

$$\begin{aligned}
&\sqrt{f\left(\frac{(q^2+r^2)a-pqb-rpc}{p^2+q^2+r^2}, \frac{(r^2+p^2)b-qrc-pqa}{p^2+q^2+r^2}, \frac{(p^2+q^2)c-rpa-qrb}{p^2+q^2+r^2}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\tfrac{(q^2+r^2)a-pqb-rpc}{p^2+q^2+r^2}-a\right)^2+\left(\tfrac{(r^2+p^2)b-qrc-pqa}{p^2+q^2+r^2}-b\right)^2+\left(\tfrac{(p^2+q^2)c-rpa-qrb}{p^2+q^2+r^2}-c\right)^2} \\
&= \frac{|pa+qb+rc|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}
\end{aligned}$$

となります。 □

問題 39 の解答

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=2x^2+y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$ の停留点が $(0,\pm1,1)$ と $(\pm1,0,2)$ の 4 点であることまでは問題 36 の解答と同じです。

F の 2 階偏微分の作る行列を計算すると、

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{x\lambda} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{y\lambda} \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} & F_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2-\lambda) & 0 & -2x \\ 0 & 2(1-\lambda) & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{bmatrix}$$

となります。4 つの候補点でこの行列の行列式の正負を調べましょう。

$(0,\pm1,1)$ においては、

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp2 \\ 0 & \mp2 & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

なので極小です。一方、$(\pm1,0,2)$ では

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \mp2 \\ 0 & -2 & 0 \\ \mp2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

なので極大です。 □