2008年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第3回

5月1日 清野和彦

3.2 偏微分の意味

偏微分は実質的に1変数関数の微分なのですから、1変数関数の微分が持っているのと同様の意味を持つはずです。この節ではそのことについて考えて行きましょう。

まず、1変数関数の微分が「瞬間の変化率」として定義されたことを思い出しましょう。$y = f(x)$ の $x = a$ における微分の値 $f'(a)$ とは

> 従属変数 y の $x = a$ の「瞬間」における変化を独立変数 x が1増えた場合の変化に換算した値

でした。（もちろん、これは「標語」に過ぎません。正確な定義には極限を使うしかないことは前節で説明しました。）このことと偏微分の定義から、2変数関数 $z = f(x, y)$ と $(x, y) = (a, b)$ に対して、

$$(x, y) = (a, b) \text{ における } x \text{ による偏微分の値 } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

とは、

> $(x, y) = (a, b)$ の「瞬間」において二つの独立変数のうち x **だけ**を変化させた場合の従属変数 z の変化を x が1増えた場合の変化に換算した値

ということになります。また、この説明で x と y の役割を取り替えたものが $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ の意味です。

ということは、どちらの偏微分の値も x と y を**同時に**変化させたときの $f(x, y)$ の変化の具合は捉えていないということになってしまいます。しかし、2つの変数を持つ関数を考える以上、2つの変数を同時に変化させたときの関数の振る舞いを知ることができなければ、2変数関数の変化を調べられたとは言えないでしょう。それなら、偏微分というものはあまりにも安直すぎて2変数関数の微分としてはあまり意味を持たないものなのでしょうか? **実は、ある自然な制限を満たす2変数関数については、2つの偏微分の値だけで x と y を同時に変化させたときの関数の値の変化を知ることができます**。このことは、このゼミナールで学ぶ最初の主目標であって、これからいくつかの節を使ってゆっくりと学んで行きます。

しかし、その方向に話を進める前に、偏微分をそのような進んだ視点から解釈しなくても自然に意味を持ってくるような例を見ておきましょう。

例 1. 気体を容器に閉じこめて十分長い時間放置すると**平衡状態**と呼ばれる「全体としては時間が経っても変化しない状態」に達します[1]。このときエントロピーや内部エネルギーのような**状態量**といわれる量は温度 T と体積 V の二つの量だけで決まります[2]。つまり、内部エネルギーを例に取ると、温度 T と体積 V のすべての組み合わせてついて、その温度と体積を持つ平衡状態における内部エネルギー U が、$f(x, y)$ に $x = T$ と $y = V$ を代入した値に一致する、すなわち

$$U = f(T, V)$$

の成り立つ 2 変数関数 $f(x, y)$ が存在する、ということです。このとき、容器が固いものでできていて気体の体積が一定値 V_0 に固定されていたとすると、温度が T_0 の状態に少しずつ少しずつ熱を加えて温度が上がって行くとき[3]の内部エネルギーの変化率は、(T_0, V_0) における x による偏微分の値

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T_0, V_0)$$

になります。このように、熱力学では「ある物理量を一定に保ったまま別の物理量を変化させる」という考察を頻繁にするので、2 変数関数とその偏微分たちが大いに活躍するのです。

注意. 上の例では、とても神経質に

> 関数の変数は物理的な意味を持たないただの実数（の入る場所）であり、関数 $f(x, y)$ を上手く選ぶと、x のところに温度をある単位（例えばケルヴィン）で測ったときの値を入れ、y のところに体積をある単位（例えばリットル）で測ったときの値を入れたとき、関数 f の値が内部エネルギーをある単位（例えばジュール）で測ったときの値に一致する。

というふうに書きました。

いつでもこのように書けば概念の混乱は起きないのですが、その代わり、例えば「x での偏微分は温度 T を変化させたときの変化率」というように、文字 x と文字 T の間の関係をいつも覚えていなければならない、つまり、登場する文字が多いことによる面倒が起きてしまいます。そこで、普通は

> 温度 T と体積 V を独立変数とする 2 変数関数 f で、$U = f(T, V)$ の成り立つものがある。

というように、温度 T や体積 V を直接独立変数と考えてしまいます。（このことは、力学で時刻 t を独立変数と考えていたことと同じです。）この場合、体積を V_0 に保ったまま T を変化させたときの $T = T_0$ における内部エネルギーの変化率は

$$\frac{\partial f}{\partial T}(T_0, V_0)$$

[1] もちろん経験則です。

[2] 温度と圧力、あるいは圧力と体積の組み合わせでも決まります。正確なことは熱力学の授業や本で学んでください。

[3] 「常に平衡状態であるようにしながら熱を加えて行く」という理想化された変化を考えるということです。このような変化を「準静的な変化」といいます。詳しくは熱力学の講義や本で学んでください。

と書かれることになります。

これでも内部エネルギーの名前 U と関数の名前 f が違うので、f が U を表しているということを覚えておかなければなりません。これも面倒だというわけで、多くの場合 f のことを U と名付けてしまいます。つまり、内部エネルギーという物理量と、それを T と V で表す関数という別の概念に同じ名前 U を付けてしまうのです。式で書くと $U = U(T, V)$ となります。このように「物理量」と「それを表す関数」に同じ名前を付けるというのが熱力学（というか物理のほとんどの分野）では当たり前になっています。慣れれば混乱しなくなるのでしょうが、学び始めたばかりの頃は混乱して当たり前です。何が何を表しているのかわからなくなってしまう原因の多くはこの「同姓同名問題」だと思うので、そのような混乱に陥ってしまったときには、上の例 1 を参考にして「概念ごとに別の名前を付ける」ということをしてみるとよいと思います。★

例 2. 針金を一本用意します。太さを無視すれば、針金は数直線（の一部分）と見なせるので、針金の各点を実数で指定することができます。（例えば片方の端を 0 とし、そこからの長さ (cm) で指定します。）この針金のいろいろ場部分を火で炙ったり氷で冷やしたりして温度が一様でないようにしてから熱が針金の外に逃げて行かない環境に放置します。すると、時間が経つにつれて熱いところは冷え冷たいところは温まってきて全体が同じ温度に近づいて行きます。この変化の様子を偏微分を使って表すことができます。針金の各点 x の各時刻 t における温度は $f(x, t)$ という 2 変数関数を作ります。

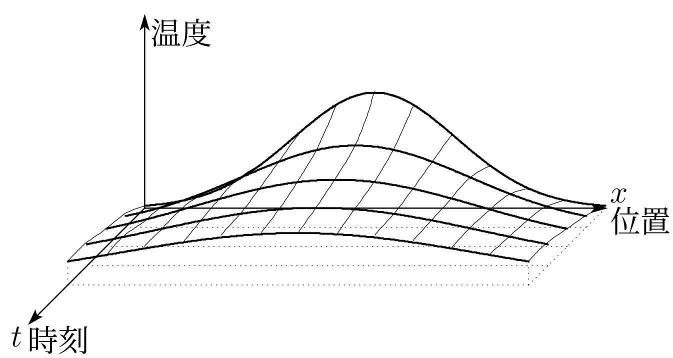

図 1: 時間がたつにつれて針金全体の温度が一様になって行く。

さて、偏導関数も 2 変数関数なので、その偏導関数を考えることができます。この「偏導関数の偏導関数」のことを元の関数の **2 階偏導関数**と呼びます。今必要なのは $f(x, t)$ の x による偏導関数の x による偏導関数で、1 変数関数のときと同様の記号

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, t)$$

によって表します。この 2 階偏導関数は t を定数とみなした x の 1 変数関数の 2 階微分のことです。実は、針金の温度 $f(x, t)$ の時刻 t に関する変化 $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ は、

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = C\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$$

という関係を満たすことが知られています。(C は針金の材料や考えている単位系などで決まる定数です。この等式のことを**熱伝導方程式**と言います。)両方の変数を同時に変化させたときの情報なしで温度変化が決定されてしまうのです。

問題 8. $t>0$ で定義された 2 変数関数

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}}$$

は、熱伝導方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=4\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

を満たすことを実際に計算して確かめよ。(図 1 はこの関数の $1\le t\le 5$ の部分のグラフです。)

例 3. 上の例と同様に針金を用意します。ただし、今度はピアノやギターの弦のようなものを想像してください。弦の端をしっかり固定し、途中をつまんで弦と垂直な方向に引っ張ります。その手を離すと弦は振動します。時間がたつにつれてどのように振動するかを 2 階偏導関数の間の等式によって表すことができます。(ただし、弦が伸びても張力が変わらないなどの単純化した状況で考えます。)この場合の 2 変数関数 $g(x,t)$ は弦の点 x の時刻 t における元の位置からの垂直方向のずれです。 このとき、

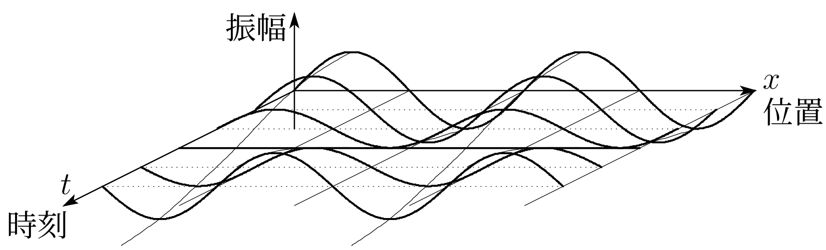

図 2: 弦の振動。

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)=c^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) \tag{1}$$

という等式が成り立つことが知られています。(c はやはり弦の材料や単位系などで決まる定数です。この等式は**波動方程式**と呼ばれます。)この場合も、二つの変数を同時に変化させたときの情報は使っていません。

問題 9. c を定数とする。2 変数関数

$$f(x,t)=\sin(x+ct)+\sin(x-ct)$$

は波動方程式(1) を満たすことを計算によって確かめよ。(図 2 はこの関数のグラフの一部です。)

さて、話を「偏微分の意味」に戻しましょう。ここまでは「変化率」という何を意味するのか今ひとつはっきりしない言葉を手がかりに偏微分が何を意味するか考えてきました。しかし、前節でも述べたように、1 変数関数の微分の値は幾何学的にはグラフの**接線の傾き**を意味し、皆さんも微分といえばこのイメージを思い浮かべることと思います。この視点から偏微分は何を意味するのか考えてみましょう。

偏微分は片方の変数を定数だと思って 1 変数関数として微分することでした。正確には、$f_x(a,b)$ とは

> $\varphi(x) := f(x,b)$ によって定義される x の 1 変数関数の $x=a$ における微分の値

でした。ということは、$f_x(a,b)$ は $\varphi(x)$ のグラフの点 $(a,\varphi(a))$ における接線の傾きを意味することになります。

ここで、$\varphi(x)$ のグラフとは何であるかを、$\varphi(x)$ という関数をあらわに使わずに $f(x,y)$ のままで考えてみましょう。$f(x,y)$ そのものをイメージするために、xyz 空間において $z=f(x,y)$ のグラフを思い浮かべて下さい。そのグラフにおいて $z=\varphi(x)$ のグラフはどこに現れてくるのでしょうか。$\varphi(x)$ は $f(x,b)$ によって定義されました。だから $z=\varphi(x)$ のグラフは $z=f(x,y)$ のグラフのうち、$y=b$ を満たす点の全体です。$y=b$ を満たす点は xyz 空間の中で

$y=b$ であって x と z は何でもよい

という部分、すなわち、もしも $b=0$ なら xz 平面であり、b が 0 でないときには xz 平面と平行で y 切片（y 軸との交わり）が b であるような平面のことです。なぜここで「y 切片が b」であるような平面が登場してきたかというと、注目している点 $\bigl(a,b,f(a,b)\bigr)$ を通る平面だからです。つまり、$\varphi(x)$ のグラフとは

> $z=f(x,y)$ のグラフを $\bigl(a,b,f(a,b)\bigr)$ を通り xz 平面に平行な平面で切った切り口に現れる曲線

であり、だから、$f_x(a,b)$ すなわち $\varphi'(a)$ とは

その「切り口曲線」の $\bigl(a,b,f(a,b)\bigr)$ における接線の傾き

のことだということになります（図 3）。

全く同様に、$f_y(a,b)$ とは

> $z=f(x,y)$ のグラフを $\bigl(a,b,f(a,b)\bigr)$ を通り yz 平面に平行な平面で切った切り口に現れる曲線の $\bigl(a,b,f(a,b)\bigr)$ における傾き

のことです。

以上をもう少し簡潔にまとめると次のようになるでしょう。

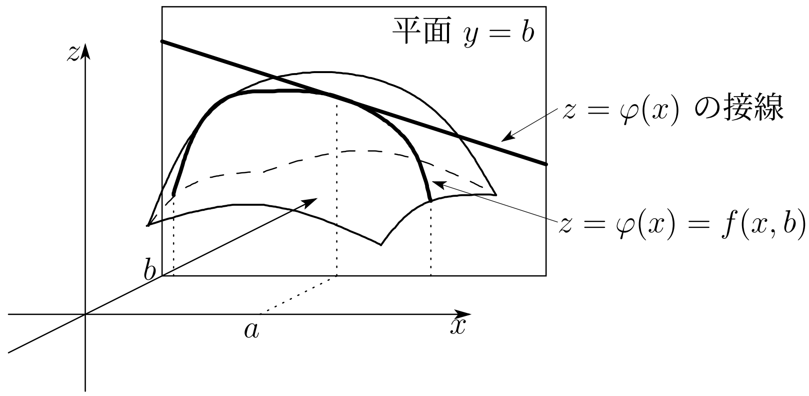

図 3: 「切り口曲線」とその接線。

> $f_x(a,b)$ の幾何学的な意味は、$z=f(a,b)$ のグラフの点 $(a,b,f(a,b))$ における x 軸（と平行な）方向の傾きであり、$f_y(a,b)$ は同じ点における y 軸（と平行な）方向の傾きである。

これが偏微分の値の幾何学的な意味です（図 4）。

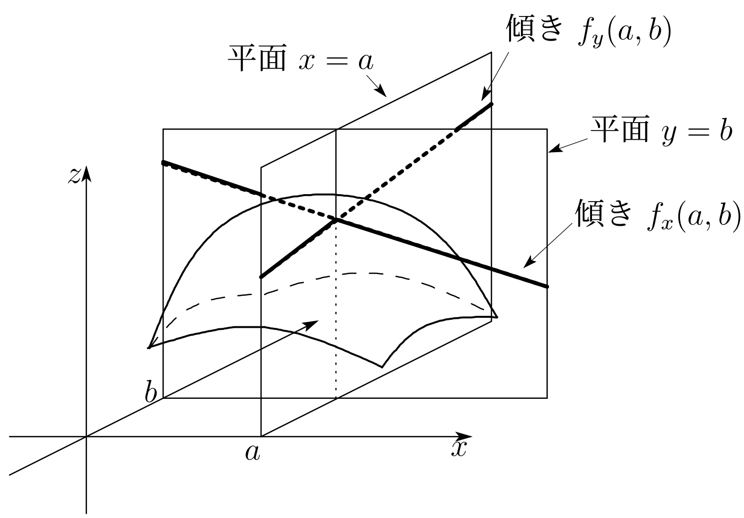

図 4: x 軸方向の傾きと y 軸方向の傾き。

4 方向微分

4.1 偏微分から方向微分へ

前節の三つの例のように、二つの独立変数が意味の上でも全く独立である場合には、片方の変数を定数とみなす偏微分でも役に立つことは結構自然に思えるでしょう。しかし、独立変数の組 (x, y) が、例えば地図のような平面に適当に決めた座標軸によって点の位置を表す座標に過ぎないような場合、その座標軸を使っているのはたまたまであって、別の座標軸にも同等の「権利」があると思えます。ということは、偏微分の幾何学的意味のところで使った「xz 平面や yz 平面に平行な平面」という座標軸に依存するものはたまたま選ばれただけであって、他の平面にも同等の「権利」があると考えるべきでしょう。

「他の平面」とはいっても、xyz 空間内のすべての平面に同等の権利があるというわけではありません。xyz 空間という x と y と z が対等であるような名前で呼んではいますが、実際には定義域を含む xy 平面と関数の値を表す z 直線を合わせたものです。今考えていることは

xy 平面の x 軸と y 軸はたまたま選ばれたものだ

ということなのですから、z 軸に平行な平面で切るという制限は必要です。

これだけの説明では納得しにくいかも知れないので、なぜ z 軸には平行に切らなければならないのかをもう少し詳しく考えてみましょう。$f_x(a, b)$ が

> $z = f(x, y)$ のグラフを xz 平面と平行な平面で切った断面に出てくる曲線の接線の傾き

である理由は、$z = \varphi(x) = f(x, b)$ のグラフが $z = f(x, y)$ のグラフの $y = b$ の部分だったからです。しかし、$z = f(x, y)$ のグラフを経由せずに直接考えてみると、$\varphi(x)$ という関数は $f(x, y)$ という 2 変数関数の**定義域を $y = b$、すなわち $\{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ という直線に制限したもの**になっており、$z = \varphi(x)$ のグラフは $\{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ という直線と z 軸のなす平面に描かれるものです。この「$\{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ という直線と z 軸のなす平面」が xz 平面に平行な平面なわけです。だから、今問題にしている「x 軸や y 軸はたまたま選ばれたもの」という視点とこの考えを合わせることによって得られる結論は、

> x 軸や y 軸がたまたま選ばれたものなら、$\{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ という直線や $\{(a, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ という直線のような x 軸や y 軸に平行な直線もたまたま選ばれたものなのだから、$f(x, y)$ の定義域をそのような直線にだけ制限する理由はない。xy 平面内の (a, b) を通る**任意の直線に定義域を制限したものを考えるべきである**。

ということになります。$f(x, y)$ の定義域を直線 l に制限した関数のグラフとはすなわち $z = f(x, y)$ のグラフを z **軸に平行で直線 l を通る平面**で切った断面に出てくる曲線のことですから、$z = f(x, y)$ のグラフを切る平面としては、

$$(a, b, f(a, b))\ \text{を通り}\ z\ \text{軸に平行な平面}$$

のみを考えるべきで、しかもそれらの平面はすべて同等の「権利」を持っているはずだということになります。

以上をまとめると、$f(x, y)$ の定義域を (a, b) を通る直線に制限したものの (a, b) における変化率、すなわち、

> $(a, b, f(a, b))$ を通り z 軸に平行な平面で $z = f(x, y)$ のグラフを切ることによって切り口にできる曲線の $(a, b, f(a, b))$ における接線の傾き

も、二つの偏微分係数 $f_x(a, b), f_y(a, b)$ と同等の意味を持つ値なのではないか、と考えたくなるという結論になるでしょう（図 5）。

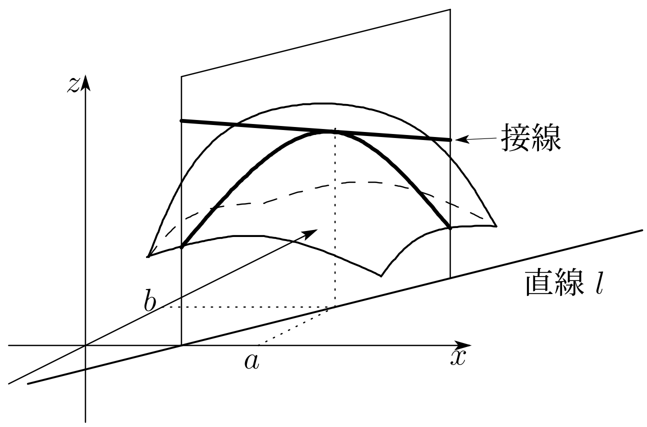

図 5: この接線の傾きも偏微分の値と同等の意味を持つはず。

4.2　方向微分の定義

さて、前節の結論で「したいこと」のイメージは理解してもらえたものと思います。このイメージをキチンとした定義にしなければなりません。

何をしなければならないかというと、(a, b) を通る直線 l を一つ決めたときに、$f(x, y)$ の定義域を l に制限したものを 1 変数関数として表示しなければならないわけです。この視点から見たとき、偏微分が何の苦もなく定義できた理由は、x 軸に平行な直線が $\{(x, b)\}$ というふうに二つの独立変数のうち x の方を自然に変数と思えたからです。もちろん y 軸に平行な直線の場合も同様に y を変数と思えば済むわけです。しかし、一般の直線 l についてはこのような上手い方法はありません。「l は y 軸に平行ではないのだから、$y = p(x - a) + b$ というふうに y を x で表してしまえば x だけを変数と見ることができるじゃないか」と思うかも知れません。つまり、定義域を l に制限するということは、$f(x, p(x - a) + b)$ という関

数を考えることだと。しかし、x と y は独立です。直線 l を表すときに y 座標を x 座標で表す理由がありません。$y = p(x-a)+b$ という表示が x 座標を y 座標で表した表示 $x = (y-b)/p + a$ より優位であるということは全くないわけです。l が x 軸や y 軸に平行なときは片方の独立変数が全く変化しなくなってしまうので、x と y を同等に扱うといった意識を持たなくても何の問題も起きなかっただけだというふうにこの視点からは解釈されるわけです。

さて、平面内の直線を x 座標と y 座標が同等な立場になるように表示する方法といえば、いわゆる**ベクトル表示**でしょう。l と平行な（$\vec{0}$ でない）ベクトル $\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ を一つ選ぶことにより、l 上の点を

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad (a+tu, b+tv) \qquad t \in \mathbb{R}$$

と表す方法のことです[4]。この方法を使えば、$f(x,y)$ の定義域を l に制限するということを、$x = a+tu, y = b+tv$ を代入することで実現でき、結果として t を変数とする 1 変数関数

$$\psi(t) := f(a+tu, b+tv)$$

が得られます。直線 l を通り z 軸に平行な平面は t 軸と z 軸によって座標付けされることになり、この tz 平面で $z = f(x,y)$ のグラフを切った断面に現れる曲線がまさに $z = \psi(t)$ のグラフです。傾きを知りたい点は $(a, b, f(a,b))$ ですが、これは tz 平面では $(0, \psi(0))$ に当たります。なぜなら、直線 l に対する上のベクトル表示で $t = 0$ に当たるのが点 (a,b) だからです。よって、我々の欲しかった傾きの値は $\psi'(0)$ であるといえるでしょう（図 6）。

上の説明から $\psi(t)$ を隠すことによって直接この値を定義しましょう。与えられているものは関数 $f(x,y)$ と点 (a,b) とベクトル $\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ です。

定義 2. 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu, b+tv) - f(a,b)}{t}$$

が存在するとき、$f(x,y)$ は点 (a,b) において $\vec{u}$ 方向に**方向微分可能**であると言い、この極限値を $f(x,y)$ の点 (a,b) における $\vec{u}$ **方向微分**（$\vec{u}$ **方向微分の値**、$\vec{u}$ **方向微分係数**）と言う。

[4]横表示と縦表示がゴッチャになって見難くてすみません。うるさく言えば、左の表示は**位置ベクトル**、右の表示は**座標**です。

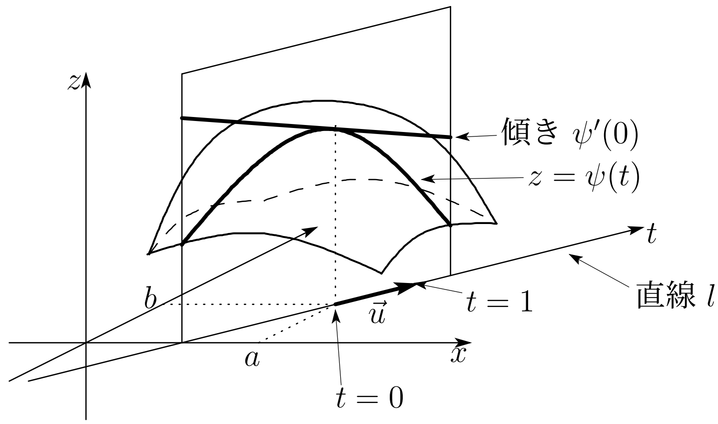

図 6: 方向ベクトル $\vec{u}$ を一つ取ることによって直線 l をパラメタ付ける。

$\vec{u}$ 方向微分の値を表す記号についてははっきりと決まったものはありません。ここでは、便宜上

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) \quad \text{とか} \quad f_{\vec{u}}(a,b)$$

などと書くことにします。

問題 10. 2 変数関数 $f(x,y)$ とベクトル $\vec{u}$ を

$$f(x,y)=x^3+2xy+3y^2, \qquad \vec{u}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

とする。偏微分 $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$ と方向微分 $f_{\vec{u}}(1,2)$ を計算せよ。

問題 8 の解答

1 変数関数の合成関数の微分法により、$f(x,t)$ の x による偏導関数が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\frac{2x}{t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}}$$

と求まります。1 変数関数の積の微分法と合成関数の微分法を使ってこの関数を x で偏微分することにより、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x}{t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}}\right)=-\frac{2}{t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}}-\frac{2x}{t\sqrt{t}}\frac{-2x}{t}e^{-\frac{x^2}{t}}=\frac{4x^2-2t}{t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}}$$

となります。一方、やはり 1 変数関数の積の微分法と合成関数の微分法を使って $f(x,t)$ の t による偏導関数を求めると、

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{x^2}{t^2}e^{-\frac{x^2}{t}}=\frac{2x^2-t}{2t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}}$$

となります。よって、確かに

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{4x^2-2t}{t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}} = 4\frac{2x^2-t}{2t^2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{t}} = 4\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

となっています。 □

問題 9 の解答

x で偏微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(x+ct) + \cos(x-ct)$$

となり、さらにこれを x で偏微分すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,t) = -\sin(x+ct) - \sin(x-ct) = -f(x,t)$$

となります。一方、$f(x,t)$ を t で偏微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = c\cos(x+ct) - c\cos(x-ct)$$

となり、さらにこれを t で偏微分すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(x,t) = -c^2\sin(x+ct) - c^2\sin(x-ct) = -c^2 f(x,t)$$

となります。よって、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = -c^2 f(x,t) = c^2(-f(x,t)) = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$$

となり、確かに波動方程式(1) を満たします。 □

問題 10 の解答

まず、二つの偏微分の値を計算しましょう。与えられた $f(x,y)$ は多項式ですので、偏微分の定義式は使わずに 1 変数多項式の導関数を求める公式によって二つの偏導関数が計算できてしまいます。具体的には、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 3y^2$$

となります。これらに $(x,y) = (1,2)$ を代入して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 7, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 14$$

が求める偏微分の値です。

方向微分の値の計算は二通りの方法で計算してみましょう。

「方向微分の定義 2 の極限を直接計算する方法」

新しく定義された概念ですので、一度はバカ正直に定義に従って計算してみましょう。その経験は、あとで方向微分の一般的な性質について考えるときに役に立ちます。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1-t,2+t)-f(1,2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1-t)^3+2(1-t)(2+t)+3(2+t)^2-(1^3+2\cdot 1\cdot 2+3\cdot 2^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{7t+4t^2-t^3}{t} = \lim_{t\to 0}(7+4t-t^2) = 7
\end{aligned}
$$

となります。

「t の関数 $\psi(t)$ を具体的に計算してしまう方法」

関数 $f(x,y)$ が具体的な式で与えられているので、方向微分の「公式な」定義である定義 2 を直接使わず、$f(x,y)$ に直線 l の点を代入してできる t の関数 $\psi(t)$ を具体的に計算してしまってから $\psi'(0)$ を計算することができます。

与えられた $f(x,y)$ に $(x,y)=(1+(-1)t,2+1t)=(1-t,2+t)$ を代入したものが $\psi(t)$ ですので、

$$
\begin{aligned}
\psi(t) = f(1-t,2+t) &= (1-t)^3+2(1-t)(2+t)+3(2+t)^2 \\
&= 17+7t+4t^2-t^3
\end{aligned}
$$

となります。（もちろん、展開する前の式のままにしておいても結構です。）よって、

$$
\psi'(t) = 7+8t-3t^2
$$

となり、

$$
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \psi'(0) = 7
$$

となります。 □

つまり、t の 1 変数多項式 $f(1-t,2+t)=17+7t+4t^2-t^3$ の $t=0$ における微分の値を、前者の方法では 1 変数関数の微分の定義に戻って計算し直したのに対し、後者の方法ではいつものように多項式の微分の公式で計算したということで、もちろんどちらの解法もやっていることは同じです。

なお、問題では特定の点における特定のベクトルによる方向微分を計算してもらいましたが、解答を見ればおわかりのとおり一般の点 (a, b) における一般のベクトル $\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ による方向微分も簡単に計算できます。やってみましょう。

$$\begin{aligned}\psi(t) &:= f(a+tu, b+tv) \\ &= (a+tu)^3 + 2(a+tu)(b+tv) + 3(b+tv)^2 \\ &= a^3 + 2ab + 3b^2 + \left(3a^2u + 2av + 2bu + 6bv\right) t \\ &\qquad\qquad + \left(3au^2 + 2uv + 3v^2\right) t^2 + u^3t^3\end{aligned}$$

ですので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) &= \psi'(0) \\ &= 3a^2u + 2av + 2bu + 6bv \\ &= (3a^2 + 2b)u + (2a + 6b)v\end{aligned}$$

となります。u と v の 1 次式になっていることと、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 3a^2 + 2b, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2a + 6b$$

であることを心に留めておいてください。