2008年度全学自由研究ゼミナール

多変数関数の微分：第2回

4月22日 清野和彦

1.2.2　2次関数のグラフ

次に2次関数の場合、すなわち x と y の2次式で表される関数の場合を考えましょう。2変数の2次式は

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r$$

という式で a,b,c のうち少なくとも一つは0でないもののことです。(xy の係数が b ではなく $2b$ となっているのは後の式変形のためです。)

グラフの大体の形を知るためには1次式の部分はあってもなくても変わりません。なぜなら、$z=f(x,y)$ のグラフは $z=ax^2+2bxy+cy^2$ のグラフに $z=px+qy+r$ のグラフを足したもの（各 (x,y) において二つのグラフの高さを足したもの）ですが、前節でみたように $z=px+qy+r$ のグラフは平面なので、それを足しても「全体が斜めになる」ような変化が起きるだけで「曲がり具合」は変わらないからです。もちろん、このような言葉による曖昧な説明では納得できないかも知れませんが、ここでは細かいことを追求するのはやめて、1変数の場合を思い出すことで納得して下さい。1変数の場合、例えば $y=x^2+x/2+1/2$ のグラフは $y=x^2$ のグラフに $y=x/2+1/2$ のグラフの高さを足したものですが、全体として下に凸な放物線であることに変わりありませんでした（図1)。 これと同じようなことが2変数でも起きるわけです。

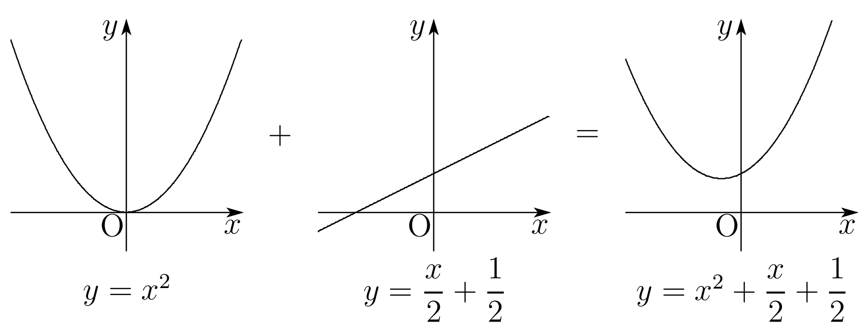

図 1: 放物線と直線を足しても放物線のまま。

上のことは納得してもらえたものとすると、2次関数のグラフの大体の形を知るには

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$$

だけ考えればよいことになりました。a, b, c のうち少なくとも一つは 0 でないのですから、とりあえず $a \neq 0$ としてみましょう。すると、

$$f(x,y) = a\left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2}y^2\right)$$

と変形できます。ここで、二つの 1 変数関数のグラフ $y = x^2$ と $y = 2x^2$ が「開き具合」こそ違うけれどもどちらも下に凸の放物線であったことを思い出してください。このように、全体を正の実数倍してもグラフの大体の形は変わりません。だから、今考えている $z = f(x,y)$ のグラフも、a が正なら

$$z = \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2}y^2$$

のグラフと同じ形、a が負なら

$$z = -\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \frac{ac-b^2}{a^2}y^2$$

のグラフと同じ形です。

　しかし、これでもまだ式がゴチャゴチャしていてグラフの形を思い浮かべることは難しいでしょう。そこで、座標変換をしましょう[1]。つまり、x と y の適当な 1 次式二つを新しい変数 X, Y と書いてしまおうというわけです。上の二つの式を見ると、まず

$$X = x + \frac{b}{a}y$$

と置きたくなるでしょう。すると、もう一つの変数 Y は、$ac - b^2$ が正なら

$$Y = \sqrt{\frac{ac-b^2}{a^2}}y$$

と置き、$ac - b^2$ が負なら

$$Y = \sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}y$$

と置くのが良さそうです。$ac - b^2 = 0$ のときは $Y = y$ のままにしておくことにします。

　以上をまとめると、

[1]座標変換なんて言う言葉を聞くと胃が痛くなる人もいるかも知れません。しかし、ここでは細かいことを追求したいのではなくだいたいのことを知りたいがためにやっているのですから、$z = f(x,y)$ のグラフを xy 平面に平行に回したり伸ばしたり縮めたりして見やすくしているのだな、くらいに思っていただければ結構です。

- $a > 0, ac - b^2 > 0$ のときは $z = X^2 + Y^2$
- $a > 0, ac - b^2 = 0$ のときは $z = X^2$
- $a > 0, ac - b^2 < 0$ のときは $z = X^2 - Y^2$
- $a < 0, ac - b^2 > 0$ のときは $z = -X^2 - Y^2$
- $a < 0, ac - b^2 = 0$ のときは $z = -X^2$
- $a < 0, ac - b^2 < 0$ のときは $z = -X^2 + Y^2$

となります。以上は、$a \neq 0$ の場合で考えましたが、$a = 0$ でも $c \neq 0$ なら x と y の役割を取り替えて全く同じ式変形ができますし、$a = c = 0$ のときは $b \neq 0$ なのですから、

$$2bxy = \frac{b}{2}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right)$$

と式変形すれば、b の正負に従って $z = X^2 - Y^2$ の場合か $z = -X^2 + Y^2$ の場合になりますので、グラフの大体の形を調べるだけなら $a \neq 0$ の場合の議論だけですべての場合が尽くされていることになります。

さて、ここまで式が簡単になればグラフの大体の形を思い浮かべられそうです。一番簡単なのは $z = X^2$ の場合でしょう。右辺の関数に Y が現れていないのですから、1 変数関数としてのグラフ、つまり下に凸の放物線を Y 軸に沿って滑らせたものです。紙を切り口が下に凸の放物線になるように曲げたものを思い浮かべてもらえればよいでしょう。$z = -X^2$ の場合は、$z = X^2$ のグラフの上下をひっくり返したもの、つまり上に凸の放物線をずらーっと並べた感じのものです。(図 2。)

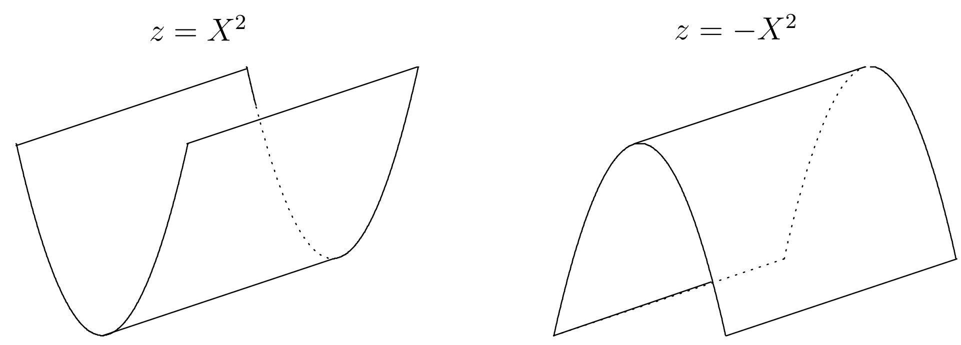

図 2: 放物線をずらーっと並べた曲面。

以上の二つは実質 1 変数関数のグラフでした。ここから先が本質的に 2 変数関数のグラフの話です。まず $z = X^2 + Y^2$ の場合を考えてみましょう。これのグラ

フと XY 平面に平行な平面との交わりは $(x,y)=(0,0)$ を中心とした円になります。実際、XY 平面に平行な平面とは $z=k$ という定数関数のグラフなので、この二つの交わりは

$$X^2+Y^2=k$$

という半径 $\sqrt{k}$ の円です。よって、$z=X^2+Y^2$ は 1 変数関数のグラフを z 軸を中心に回転したものになります。その 1 変数関数のグラフは Xz 平面との交わりに出てくる曲線です。Xz 平面とは $Y=0$ のことですから、結局、$z=X^2+Y^2$ のグラフは下に凸の放物線 $z=X^2$ を z 軸の回りに回転してできる曲面になります。同様に、$z=-X^2-Y^2$ は上に凸の放物線を回転してできる曲面です。(図 3)。

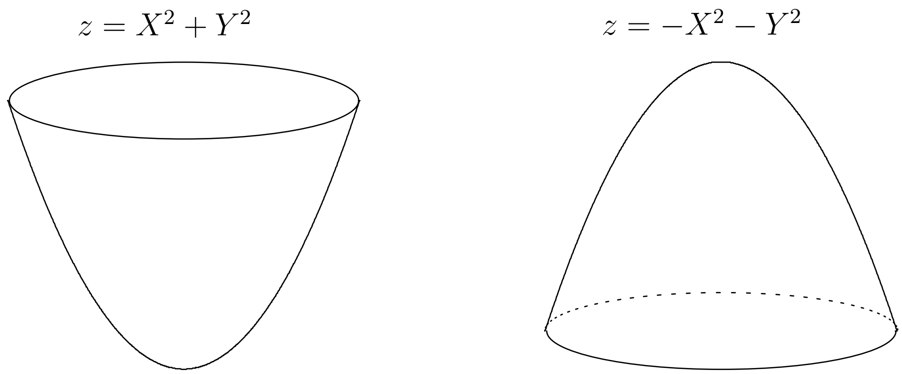

図 3: 回転放物面。

(これは X,Y という便宜上おいた変数での考察です。元々の変数 x,y については普通は回転体にはなりません。xy 平面との交わりは円ではなく楕円になります。ご注意下さい。)

最後に $z=X^2-Y^2$ と $z=-X^2+Y^2$ を考えましょう。この二つは X と Y を取り替えると一致しますから、グラフの形としては同じものです。そこで、$z=X^2-Y^2$ の方で考えることにします。上と同様にまず XY 平面と平行な平面との交わりを考えてみましょう。それは

$$X^2-Y^2=k$$

という曲線ですので、双曲線です。ただし、k が正のときは X 軸が双曲線の軸であり、k が負のときは Y 軸が双曲線の軸、$k=0$ のときは $Y=\pm X$ という二直線です。(図 4。) これだけで大体の形が思い浮かぶ人もいるかも知れませんが、慣れないとなかなか難しいので、別な見方もしてみましょう。XY 平面に平行な平面ではなく、Xz 平面に平行な平面、すなわち $Y=k$ で切ってみます。すると、

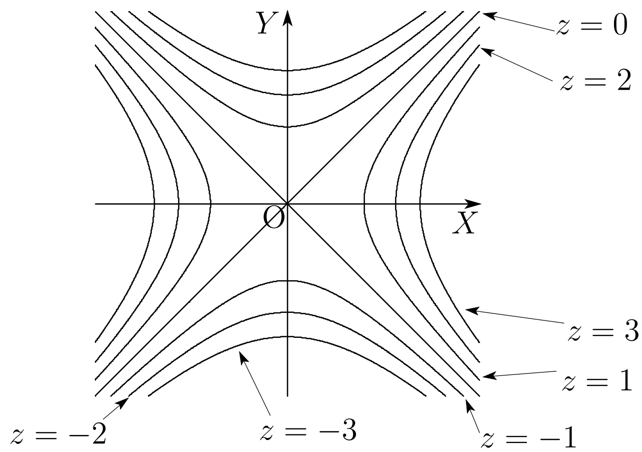

図 4: $z = X^2 - Y^2$ の「等高線」。

$z = X^2 - k^2$ という下に凸の放物線が出てきます。この放物線の頂点は $X = 0$ の点ですので、k を動かしたときの頂点の軌跡は $z = k^2$ という Yz 平面内の上に凸な放物線です。つまり、Xz 平面内の $z = X^2$ という放物線を Yz 平面内の $z = -Y^2$ という上に凸の放物線に頂点を乗せたまま滑らしたときにできる曲面が $z = X^2 - Y^2$ のグラフだというわけです。思い浮かべられましたか?（図 5 です。）

$z = X^2 - Y^2$

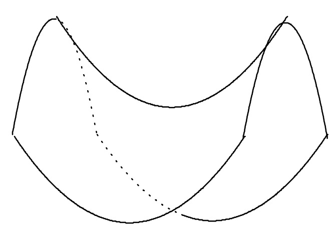

図 5: $z = X^2 - Y^2$ の概形。山と山の間の峠とか、馬の鞍などを思い浮かべてください。

問題 4. 次の関数のグラフは上のどの形か。

(1) $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x + 3y + 1$　　(2) $x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x + 3y + 1$

1.2.3　一般の場合

一般の関数 $f(x, y)$ が具体的に与えられたとき、$z = f(x, y)$ のグラフの概形を（これから学ぶ微分などのテクニックを使わずに）調べるには、前節でやったよう

に等高線、すなわち $z=$ 一定という平面での切り口の曲線を調べたり、$y=$ 一定や $x=$ 一定という平面での切り口の曲線を調べたりすることが有効な場合があります。また、$f(x,y)$ が 1 変数関数 $g(t)$ に $t=\sqrt{x^2+y^2}$ を代入した式になっている場合、$z=f(x,y)$ のグラフは $z=g(x)$ のグラフの $x\geq 0$ の部分を z 軸を中心に回転したものになっています。例えば前節の $z=X^2+Y^2$ は t^2 に $t=\sqrt{X^2+Y^2}$ を代入したものですので放物線を回転したものになっている、ということだったわけです。もちろん、このような方法では簡単な関数しか様子を調べられません。

だからこそこれから多変数関数の微分を学ぼうとしているわけです。実は、**微分を通じて一般の関数を 1 次関数や 2 次関数で近似しよう**というのがこれから学ぶ「多変数関数の微分」の中心思想なのです。そういう背景があるから、2 変数関数に慣れるなら 1 次関数と 2 次関数を調べるのがよいのです。なんだかとても特別な関数しか様子が調べられなくてがっかりしたかも知れませんが、微分を学べば、1 次関数や 2 次関数という特別な関数を通じてもっと一般の関数の様子が調べられるようになるのです。

さらに、3 変数以上になると、グラフは 4 次元以上の空間の部分になってしまって、1 次関数や 2 次関数でさえ上のような理解はできません。しかし、2 変数で直感的にイメージしたことをキチンと理屈で厳密に証明しておけば、その理屈を道具として直感の働かない 4 次元以上の図形の形について正しい考察を行うことができるようになります。これが数学を学ぶ上での一つの醍醐味といえるでしょう。このゼミでは直感の働く範囲の話しかしませんが、余裕ができたら、是非このゼミでの話を 3 変数、4 変数、一般の n 変数に拡張するとどうなるのか考えてみて下さい。

2　1 変数関数の微分の復習

次節で定義するように、多変数関数の微分の主役である偏微分は、1 変数関数の微分の「安直な」拡張であり、特に、計算は完全に 1 変数関数の微分として実行されるものです。そこで、まず 1 変数関数の微分の定義と計算の実際について復習しておきましょう。

2.1　1 変数関数の微分の定義

復習ですから、いきなり定義から入りましょう。

a を関数 $f(x)$ の定義域内の一つの実数とします。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{1}$$

が収束するとき、

$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**である

と言い、その極限値を

$f(x)$ の $x = a$ における**微分**（**微分の値**、**微分係数**、**微係数**、**導値**など）

と呼び、

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \frac{d}{dx}f(x)\bigg|_{x=a}$$

などの記号で表します。

$f(x)$ が定義域内のすべての a において微分可能なとき、単に $f(x)$ は微分可能であると言います。そして、このとき a に $f'(a)$ を対応させることによって $f(x)$ と同じ定義域を持つ新しい関数を作ることができます。その関数のことを**導関数**と呼び、微分の記号を流用して

$$f'(x), \qquad \frac{df}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}f(x)$$

などと書きます。

皆さんがこれまでに慣れ親しんできた計算方法からすると、上の説明は話の順序が逆なように見えるかも知れません。つまり、「$x = a$ における微分の値を計算するには、まず導関数を計算し、その後 x に a を代入する」のではないかと。例えば、$f(x) = x^2$ とすると、$f'(x) = 2x$ と計算してから $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ とするのが普通であって、

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3}(x + 3) = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

などとは計算しない、というわけです。しかし、そもそも x^2 の導関数が $2x$ であるという「公式」は、上の計算がすべての x の値について成り立つこと、つまり、$x = 3$ に限らず任意の実数 a について、

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a}(x + a) = a + a = 2a \end{aligned}$$

という a によらない共通の計算ができることから、$(x^2)' = 2x$ を「公式」にした結果です。そして、今まで出会ってきた計算は、このような公式を何度か使うことでできるものばかりだったので、微分するということは公式を使って導関数を計算すること、というふうに繋がってしまったわけです。

もちろん、どう思っていようと得られる計算結果は同じです。それなのに殊更にこんな注意をする理由は、多変数関数の微分においては導関数（に当たるもの）はあまり活躍せず、もっぱら注目したところでの微分の値が主役となるからです。

問題 5. 1 変数関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

の導関数を求めよ。

2.2 微分の意味

微分は何故式(1) という極限で定義されるのかということも思い出しておきましょう。

極限で定義されているのですから、まず、極限を取る前の式が何を意味するのかを考えてみます。分子 $f(x) - f(a)$ は

> $f(a)$ から見た $f(x)$ の「増分」

であり、分母の $x - a$ は

> a から見た x の「増分」

と見ることができます。(「増分」とカッコを付けたのは、「減っている場合には負の数とする」と約束をしていることを表したつもりです。)ということは、問題の式は従属変数の $f(a)$ からの増分を独立変数の a からの増分で割っているわけですから、いわゆる「平均の変化率」、つまり、

> 独立変数が a から x まで増えたときの従属変数の増え方を独立変数が 1 増えた場合に換算した値

です。これは、グラフでいうと

> 点 $(a, f(a))$ と点 $(x, f(x))$ を通る直線の傾き

ということもできます(図 6)。

このように理解した上で $x \to a$ の極限を取ることを考えると、その極限値は「**瞬間の変化率**」、つまり、

> $x = a$ における従属変数の「瞬間的変化」を独立変数が 1 増えた場合に換算した値、

図形的にはもっとわかりやすく

> $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾き

となる、と考えて良いでしょう(図 7)。

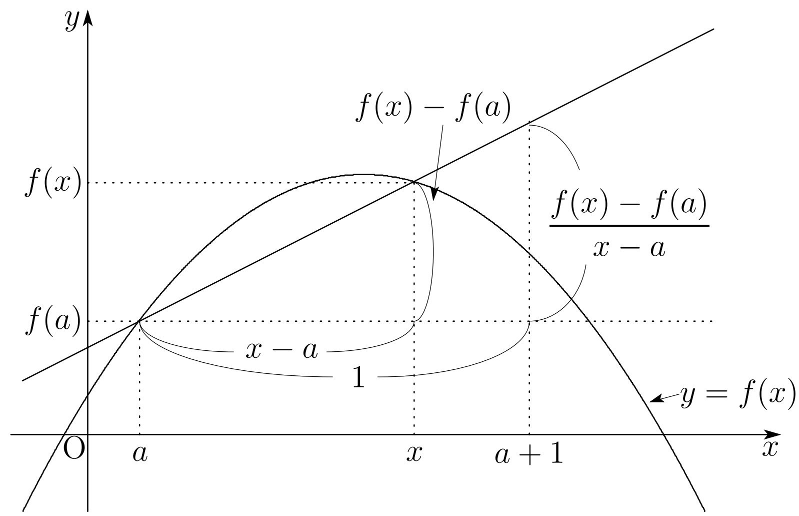

図 6: 平均の変化率。

2.3　具体的な 1 変数関数の微分

次節で定義する偏微分というものは、1 変数関数の微分を利用して定義されるものなので、偏微分の値の計算は 1 変数関数の微分の計算法によって計算されるものです。そこで、具体的に式で書かれた 1 変数関数の微分（導関数）の計算と、二つの関数の積や商や合成の微分（導関数）を計算する公式を復習しておきましょう。

　まず、**定数関数** $f(x)=c$ の微分は任意の $x=a$ について 0 です。なぜならば、極限を取る前から常に

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{c-c}{x-a}=0$$

だからです。よって、定数関数の導関数は常に値が 0 の定数関数です。

注意. 逆に、導関数が 0 になる関数は定数関数しかありません。このことの証明には平均値の定理を使います。平均値の定理の復習は、理論的に必要になったときに改めてすることにします。★

　次に、 n が自然数のとき x^n の微分は任意の $x=a$ について na^{n-1} となります。なぜなら、

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

なので、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}&=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})\\&=a^{n-1}+a^{n-2}a+\cdots+aa^{n-2}+a^{n-1}=na^{n-1}\end{aligned}$$

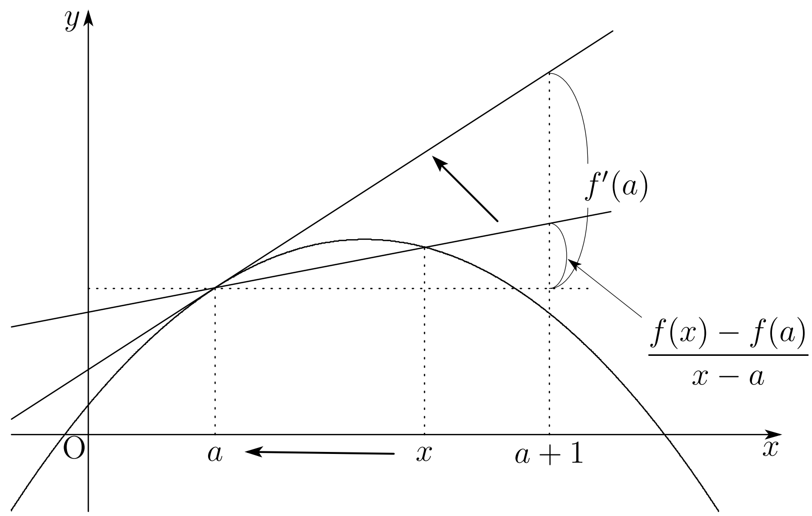

図 7: 「瞬間」の変化率。

となるからです。よって、x^n の導関数は nx^{n-1} です。

「微分する」という操作は定数倍や足し算という操作と入れ替えられますので、上の二つによってすべての多項式の導関数を計算できます。

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)' &= a_0(1)' + a_1(x)' + a_2(x^2)' + \cdots + a_n(x^n)' \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}\end{aligned}$$

です。

これ以外に知っておかなければならないのは、三角関数と指数関数の微分（というか導関数）です。それぞれの導関数を列挙すると、

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

となります。

注意. これらの公式の証明はここではしません。★

$\tan x$ と $\log x$ の微分がありませんが、それらについては、次に挙げる公式を使うことで計算できます。

まず一つ目の公式は、**ライブニッツ・ルール**と呼ばれる**積の微分法**

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

です。微分の定義式の分子を

$$\begin{aligned}f(x)g(x) - f(a)g(a) &= f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a) \\ &= (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))\end{aligned}$$

と水増しすることによって、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+\lim_{x\to a}f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

と証明できます。

積の次は**商の微分法**

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

です。これは何の工夫もなく定義式に入れることで、

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(x)}{x-a}\frac{1}{f(x)f(a)}=-f'(a)\frac{1}{f(a)f(a)}$$

と証明できてしまいます。

$\tan x$ の導関数は、$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ですので、積の微分法と商の微分法を使うと、

$$\begin{aligned}(\tan x)'&=\left(\sin x\frac{1}{\cos x}\right)'=(\sin x)'\frac{1}{\cos x}+\sin x\left(\frac{1}{\cos x}\right)'\\&=\cos x\frac{1}{\cos x}+\sin x\left(-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\right)=1+\sin x\left(-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\right)\\&=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\end{aligned}$$

と計算できます。もちろん、これは $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と等しくなっています。

$$\tan' x=1+\tan^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

です。

最後に、もっともよく使う公式である**合成関数の微分法**

$$(f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$$

があります。これについては「第 2 章：合成関数の微分」で証明します。

特に $g(x)$ が $f(x)$ の**逆関数**の場合、つまり、$f(g(x))=x$ がすべての x について成り立つ場合に合成関数の微分法を適用することで**逆関数の微分法**

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

が得られます。

これを使うと $\log x$ の導関数を計算できます。なぜなら $\log x$ は e^x の逆関数、すなわち $e^{\log x} = x$ が成り立ち、$(e^x)' = e^x$ ですので、

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

と計算できるからです。これは $x > 0$ の場合の計算ですが、$x < 0$ の場合もこの結果と合成関数の微分法を使うことで、

$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

となります。よって x の正負に拘わらず、

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

が成り立ちます。

この結果と合成関数の微分法を合わせると、r が自然数でない場合にも

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

という全く同じ公式の成り立つことがわかります。($x > 0$ です。)

$$x^r = e^{r \log x}$$

なので、

$$(x^r)' = (e^{r \log x})' = e^{r \log x}(r \log x)' = x^r \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

となるからです。

問題 6. 次の関数の導関数を求めよ。

$$f(x) = e^x \sin x \qquad g(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2x + 1} \qquad h(x) = \log(\cos x)$$

3 偏微分

n 個の独立変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を持つ関数 f があったとき、独立変数の変化に伴って f がどう変わるかを考えるときの安直だがもっとも基本的な考え方は、

> 一つの変数だけを本当に変数と考え、残りの $n-1$ 個の変数は定数と考える

という考え方です。このように考えたときに自然にでてくる「多変数関数の微分」が下に定義する**偏微分**です。

なお、ここまでと同様に以下すべて $n = 2$ の場合で説明します。図形的なイメージを持つのは $n = 2$ の場合が限界ですが、理屈をキチンと詰めておけば、それを頼りに $n \geq 3$ 以上でも正しい議論を展開することができるようになりますので、イメージと理屈と両方大切にして欲しいと思います。

3.1 偏微分の定義

微分を考えたい点が (a,b) のとき、$f(x,y)$ に $y=b$ を代入することによって出来上がる x のみを変数とする 1 変数関数

$$\varphi(x) := f(x,b)$$

の[2] $x=a$ における微分 $\varphi'(a)$ が

$f(x,y)$ の (a,b) における x による**偏微分（偏微分の値、偏微分係数）**

であり、$x=a$ を代入することによって出来上がる y のみを変数とする 1 変数関数

$$\psi(y) := f(a,y)$$

の $y=b$ における微分 $\psi'(b)$ が

$f(x,y)$ の (a,b) における y による**偏微分（偏微分の値、偏微分係数）**

です。ただし、「公式に」定義をする場合には、$\varphi(x)$ などのそのときしか使わない文字をなるべく使わないで済まそうとするので、次のようになります。

定義 1. f を二つの変数 (x,y) の関数とする。$(x,y)=(a,b)$ において f が x によって**偏微分可能**であるとは、極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

が存在することである。このとき、その極限値を f の (a,b) における**偏微分**（**偏微分の値、偏微分係数**）と言い、記号で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad とか \quad f_x(a,b) \quad とか \quad \partial_x f(a,b)$$

などと書く。(a,b) における f の y による偏微分も同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

によって定義する。

注意. 偏微分の記号 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ の読み方は人によってまちまちです。

[2] $\varphi(x) := f(x,b)$ とは「$\varphi(x)$ を $f(x,b)$ によって定義する」という意味です。コロンのついた等号「:=」や「=:」は、「コロンのついている側をついていない側によって定義する」という意味の記号です。

ディー エフ ディー エックス

というふうに 1 変数関数の微分と同じ読み方をする人も結構います。これでも文脈から誤解はあまり起こらないものです。偏微分であることをはっきりさせたい人の多くは

ラウンド ディー エフ ラウンド ディー エックス

と発音していると思います。∂ が d を「丸く」書いた文字だからです。偏微分であることをはっきりさせたいがこの読み方は長すぎる、と感じる人の中には

ラウンド エフ ラウンド エックス

と肝腎の「ディー」の方を省略してしまう人もいます。（私は結構これです。）また、日本人のごく一部に

デル エフ デル エックス

と発音する人がいますが、これは真似しない方が賢明だと思います。★

$f(x, y)$ の定義域内のあらゆる点で x で偏微分可能なとき、点 (a, b) における x による偏微分の値 $f_x(a, b)$ を (a, b) に対応させることで**偏導関数**という 2 変数関数が出来上がることも 1 変数関数のときと同じです。この場合、偏微分した点を (a, b) でなく変数らしく (x, y) で書いてしまうことも 1 変数関数のときと同じです。

偏微分とは、要するに

偏微分しない変数を定数だと思いこんで 1 変数関数の微分をすること

に過ぎないわけです。だから、具体的に与えられた多変数関数の偏微分や偏導関数を計算するには、1 変数関数の微分の計算しか必要ありません。例えば $f(x, y) = x^2y^3$ なら、x による偏導関数は $f_x(x, y) = 2xy^3$ という 2 変数関数、y による偏導関数は $f_y(x, y) = 3x^2y^2$ という 2 変数関数になります。

注意. 「x による偏微分は y を定数だと思っての微分だから、x による偏導関数は x だけを変数とする 1 変数関数だ」と誤解してしまうことがたまにあります。「y を定数だと思っての微分」というのは、あくまでも $f_x(a, b)$ の定義や計算のために思うのであって、各 (a, b) についてそのように思うことで $f_x(a, b)$ が出そろったら、その値を (a, b) に対応させることで、$f(x, y)$ と同じ定義域を定義域とする 2 変数関数 $f_x(x, y)$ が出来上がるわけです。★

注意. 時刻 t と位置 x に対して与えられる量 $f(t, x)$ と点の運動 $x(t)$ があったとき、点の運動に伴って変わる f の値を分析したい場合に考える関数は、$f(t, x)$ の x に $x(t)$ を代入した t のみによる 1 変数関数です。そこでいちいち $\varphi(t) = f\big(t, x(t)\big)$ と記号を変えれば誤解は起きないのですが、記号が増えたり f との関連が見えなくなったりするのを嫌って、$f\big(t, x(t)\big)$ と書いたままで議論することがよくあります。しかも x が t に依っていることが前提になっているので、$x(t)$ のことを t を省略して x とだけ書いてしまうことがしばしばです。このような状況のとき、

$$\frac{df}{dt}(t, x)$$

という記号で $\varphi'(t)$ のことを指すことが多いので、t と x に何の関係もない 2 変数関数としての t による偏微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$$

と「丸いディー」を使って書きます。これが偏微分と 1 変数関数の微分の記号が違う理由です、多分。★

問題 7. 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \sin\left(x^3y^2\right)$$

とする。二つの偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を計算せよ。

問題 4 の解答

1 次式の部分はだいたいの形には影響せず 2 次式の部分だけ考えればよいことは上で説明しました。

(1) の場合、a に当たる数は 1 で正。$ac-b^2$ に当たる数は $1\cdot 5-2^2=5-4=1$ でやはり正。よって。$z=X^2+Y^2$ の形です。

(2) の場合、a は同じく 1 で正ですが、$ac-b^2$ に当たる数は $1\cdot 5-3^2=5-9=-4$ で負です。よって、こちらは $z=X^2-Y^2$ の形です。 □

問題 5 の解答

「導関数を求めよ」という問題ですが、そもそも導関数が存在するかどうか、つまりすべての x について微分可能かどうかは明らかではありません。そのことも含めて考えましょう。

$x<0$ では $f(x)$ は x^2 という微分可能であることが分かっている関数と一致しているわけですから微分可能であり、導関数も同じで、

$$f'(x) = 2x \qquad x<0$$

となります。

同様に、$x>0$ では $f(x)$ は x^3 と一致しているので微分可能で、導関数は

$$f'(x) = 3x^2 \qquad x>0$$

となります。

問題は $x=0$ で微分可能かどうかです。ここでは $f(x)$ の定義式が「切れて」いるので、$x\neq 0$ でのようには行きません。微分の定義を直接使って計算しなければならないのです。$x=0$ における微分の定義式は

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

です。(まだこの極限が存在するかどうか分からないので $f'(0)$ とは書きませんでした。) この極限を計算するのですが、$f(x)$ の定義が x の正負で別の式になっているので、$x \to 0$ の極限を負の方から 0 に近づく極限 $x \to -0$ と正の方から 0 に近づく極限 $x \to +0$ に分けて計算しましょう。その二つの値が一致したら微分可能でその極限値が $f'(0)$ になるわけです。

$$\lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to -0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -0} x = 0$$

および、

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to +0} x^2 = 0$$

となって一致しました。よって $f'(0) = 0$ です。以上より、

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 3x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

となります。 □

もちろん、$x \leq 0$ で $f(x) = x^2$ なので $x \to -0$ による極限は x^2 の $x = 0$ における微分の値であり、$x \geq 0$ では $f(x) = x^3$ なので $x \to +0$ による極限は x^3 の $x = 0$ における微分の値になるだけの話ですが、定義式が切れているところでは、まずは定義に戻って考えてみる必要があるということだけは心に留めておいてください。

問題6の解答

積の微分法により、

$$f'(x) = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

となります。

商の微分法により、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^2)'(x^3 + 2x + 1) - x^2(x^3 + 2x + 1)'}{(x^3 + 2x + 1)^2} = \frac{2x^4 + 4x^2 + 2x - 3x^4 - 2x^2}{(x^3 + 2x + 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 2x^2 + 2x}{(x^3 + 2x + 1)^2} \end{aligned}$$

となります。

合成関数の微分法により、

$$h'(x) = \log'(\cos x) \times (\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$$

となります。 □

問題 7 の解答

まず x での偏導関数を計算しましょう。y を定数だと思いこんで x の 1 変数関数としていつものように微分すればよいだけです。問題の関数は三角関数と多項式の合成ですので、偏微分の定義式を直接使うことなく、具体的な 1 変数関数の導関数の公式を使っていきなり偏導関数を計算することができます。

y を定数扱いして $g(x) = x^3y^2$ と 1 変数関数のように書くことにすると、$f(x,y)$ は $\sin z$ に $z = g(x)$ を代入した合成関数ですので、合成関数の微分法を使って計算できます。

$$\sin' z = \cos z, \qquad g'(x) = \left(x^3\right)' y^2 = 3x^2y^2$$

ですので、合成関数の微分法により

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\sin' g(x))\, g'(x) = \left(\cos\left(x^3y^2\right)\right) 3x^2y^2 = 3x^2y^2\cos\left(x^3y^2\right)$$

となります。（最後の等号は、式を見やすくするために掛け算の順番を入れ替えただけです。）

同様に x を定数扱いして $h(y) = x^3y^2$ と y の 1 変数関数のように書くと、$f(x,y)$ は $\sin z$ に $z = h(y)$ を代入した合成関数です。よって、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\sin' h(y))\, h'(y) = \left(\cos\left(x^3y^2\right)\right) x^3 2y = 2x^3y\cos\left(x^3y^2\right)$$

となります。 □