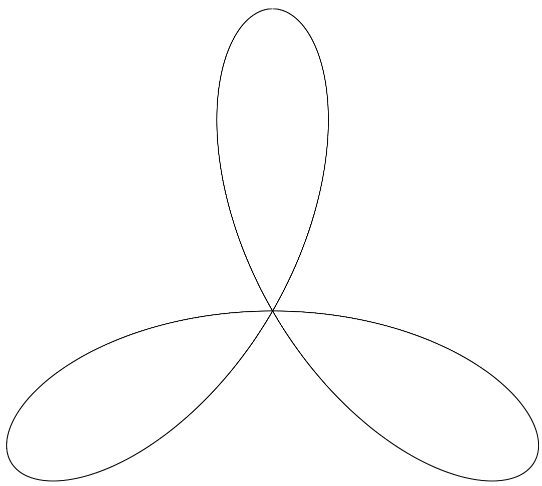
代数曲線の「かたち」*

今野 一宏

大阪大学大学院理学研究科



* これは，理学部低学年向け講義のために準備したノートに加筆, 修正を加えたものです．図の作成は WinTpic（堀井雅司さん作）で行ないました.

1. 比の空間（射影平面）

代数幾何学は，多変数の連立代数方程式の解として定まる図形を研究する学問です．従って本当は, いわゆる「幾何学」なのですが, 代数方程式を扱いますので日本では「代数学」に分類されています.

研究対象の図形には，中学校や高校で習った直線, 放物線, 楕円, 双曲線が含まれています．これらは皆, 多項式で定められているからです．そういう意味では, 代数幾何学は大学入学以前に親しんだ解析幾何と同じようなものです．でも, 違う点もあります．そのうちで最も顕著なのは

(1) 数の範囲を実数ではなくより広い複素数にする

(2) 図形を描く空間を閉じたものにする

という 2 点でしょう．どうしてわざわざそういう風にするのかという理由は, もちろんちゃんとあります．ひと言でいうと「場合分けの煩雑さをなるべく軽減したい」ということです.

まず，どうして (1) のように複素数にしなければならないのかを説明します．多変数の代数方程式を考えたいので, 一変数の代数方程式くらい解けないと困ります.「代数学の基本定理」として知られているように, 複素数で考えれば（理屈の上では）何次方程式でも必ず解け，重複を考慮に入れれば次数と同じ個数の解があります．例えば

問

3 次方程式 $x^3 - x^2 - 2 - k = 0$ の根の個数を k の値によって分類せよ

という問題は大学入試等でよく目にしますが, これを実数の範囲で解くのはなかなか大変で, ふつうにやると $y = x^3 - x^2 - 2$ のグラフと直線 $y = k$ の交点の数を調べなければなりません．交点は k の値に応じて，1 個から 3 個まで考えられますので複雑です．しかし, 複素数でなら分類しなくとも答えはいつも (重複を込めて) 3 です．別の例として，方程式 $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ を考えてみます．見かけはほとんど同じ 3 つの方程式ですが，それが表す平面図形を実数の範囲で考えると，最初のものは円，次は原点だけ，最後は空集合，というように随分違ったものになります．しかし，複素数で考えれば，これらはすべて「曲線」だと思えます.

つぎに (2) はどうしてかを説明します．平面に二つ直線を引きますと, 二つの場合が生じます.

- 二つの直線は 1 点で交わる
- 二つの直線は平行で, 交わらない

当たり前ですね． もちろん後者は非常に特殊な状況で, 普通は前者になります．でも, 交わったり交わらなかったりすると不便なので,

2直線が平行な時には，無限の彼方で交わっている

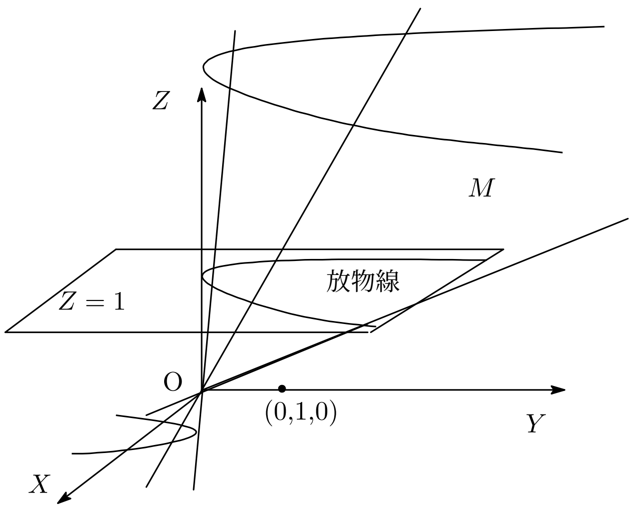
と考えることにしましょう．つまり，無限遠点を仮想的に考えて，これも点の仲間に加えます．すると，二つの直線は必ず交わるので, 無駄に場合分けをする必要がなくなりました．ただし, この「無限遠点」はひとつではありません．傾き 1 の直線を二つ, 傾き 2 の直線を二つ思い浮かべて下さい．傾き 1 の直線たちが交わる無限遠点と, 傾き 2 の直線たちが交わる無限遠点がもし同じなら, 傾き 1 の直線と傾き 2 の直線は，その無限遠点と普通の意味での交点との 2 点で交わってしまいますね．いくら無限遠点を考えると都合が良いからと言って, こんなデタラメな事は許されて良いはずがありません．ですから「無限遠点」は（少なくとも）直線の傾きの分だけ沢山用意しなければなりません．

では, 実際にどのような閉じた空間を考えるのか, また, 他にどういうメリットがあるのかを，具体的な例でもう少し説明します．ただし, 直感が働きやすいように実数の範囲で考えることにします．

まず，放物線 $y - x^2 = 0$ のグラフを xy 平面に書いておきます．天下り的ですが, 変数 X, Y, Z を用意し，$x = X/Z$, $y = Y/Z$ とします．すると $y - x^2 = Y/Z - (X/Z)^2$ になりますが, どうせこれが 0 になっている点を考えたいのだから, 分母を払って $YZ - X^2 = 0$ という方程式をみたす点の全体 M を考えることにします．つまり $M = \{(X, Y, Z) \mid YZ - X^2 = 0\}$ です．M がどんな図形なのかを少し調べてみましょう．$Z = 1$ とすると $x = X, y = Y$ なので，平面 $Z = 1$ による M の切り口として元の放物線が現れます．また, もし点 (a, b, c) が M 上にあれば $bc - a^2 = 0$ ですから，任意の t に対して $(tb)(tc) - (ta)^2 = t^2(bc - a^2) = 0$ となり，(ta, tb, tc) という形の点も M 上にあります．つまり，

ある点 P が M 上にあれば, 原点と P を結ぶ直線がすっぽり M に入ってしまいます.

最初考えていた放物線とは随分違う図形になってしまったようです.

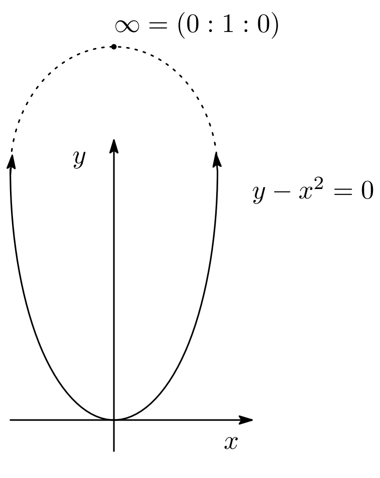


M を元の放物線に近い形に直すためには，空間全体を平面 $Z = 1$ に向かってグシャっとつぶしてやれば良さそうです．これを実現するために，先ほど述べた M の性質を逆手にとって,

(ta, tb, tc) **と** (a, b, c) **は同じ点だ**

と思い込んでみましょう．ただし，原点 $(0, 0, 0)$ まで仲間に入れてしまうと, $t = 0$ とすることで原点と任意の点が同じになってしまって具合が悪いですから, 原点はこの際考えないようにしましょう．このような見方で考えている事を強調するために, 記号を変えて座標 (a, b, c) を $(a : b : c)$ のように成分の比の形で書き, M を $\mathbf{M}$ と書くことにします． $t \neq 0$ なら $ta : tb : tc = a : b : c$ ですから，比を座標にするほうが便利だろう，ということです．この約束によると, 元の xy 平面の点は $(x : y : 1)$ だとみなして良いことになって，放物線は本来の形のまま実現され $\mathbf{M}$ の一部になりますので, M はやっと「正しい」姿になったと言えます.[*1]

xy 平面から見た「無限の彼方」は, $x = X/Z, y = Y/Z$ というおき方から解るように $Z = 0$ に対応します．実際，Z が0でなければ，$(X : Y : Z) = (X/Z : Y/Z : 1) = (x : y : 1)$ なので，xy 平面上の点を表しています．$\mathbf{M}$ を表す方程式 $ZY - X^2 = 0$ に $Z = 0$ を代入してみると $X = 0$ になりますから, 無限遠点の座標は $(0 : 1 : 0)$ です． (Y 座標は上の約束から 0 でなければ何でもいいので 1 にしました．) 以上から, 新しい空間の図形 $\mathbf{M}$ は元の放物線に1点 $(0 : 1 : 0)$ を付け加えたものになっていることが了解されるでしょう．しかし, ひとつ心配な点も出てきます．先ほど，元の xy 平面の点は $(x : y : 1)$ だと言いました．一方, 付け加えた無限遠点は $(0 : 1 : 0)$ なので, Z 座標が1から0に急にジャンプしていますから，$\mathbf{M}$ はつながっていない（連続曲線でない）のでは？という疑問が生じます．心配することはありません． $\mathbf{M}$ はちゃんとつながっています．これを確かめてみましょう．放物線上の点 (x, x^2) は $(x : x^2 : 1)$ に対応していて，約束から, $x \neq 0$ のときにはこれは $(1/x : 1 : 1/x^2)$ と同じでした．ここで x をどんどん大きくしていけば $(1/x : 1 : 1/x^2) \to (0 : 1 : 0)$ となってどんどん無限遠点 $(0 : 1 : 0)$ に近づいていきます． $x \to -\infty$ としても同様に $(0 : 1 : 0)$ に近づきます．ここまで来ると $\mathbf{M}$ の形が見えてくるでしょう．「わっか」のようになっていますね.

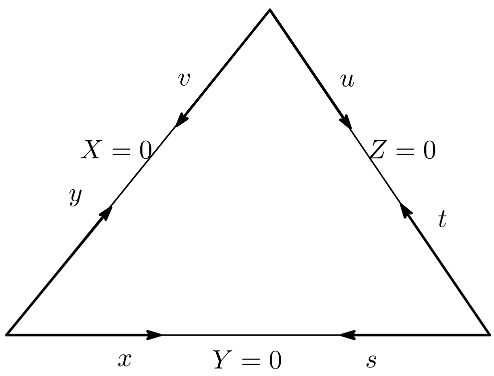


さて, これまでにやったことを反省してみると，元の平面座標として (x, y) ではなく $(X/Y, Z/Y)$ を考えても同じ図形 $\mathbf{M}$ に到達できるはずだ，という事に気が付くでしょう．実際, $u = X/Y, v = Z/Y$ とおいてみる

[*1] いまやったことは, 原点でない二つの点 $(a, b, c), (a', b', c')$ が同値であることを，ある0でない数 t によって $a' = ta$, $b' = tb$, $c' = tc$ となること, と定義し, 空間から原点を除いたものをこの同値関係で割った, ということです．この閉じた空間には「射影平面」という名前がついています.

と $ZY-X^2=Y^2(Z/Y-(X/Y)^2)=Y^2(v-u^2)$ と書き換えられますから, uv 平面の放物線 $v-u^2=0$ から始めても $\mathbf{M}$ に到達します. それでは, $(Y/X,Z/X)$ ではどうでしょうか? $t=Y/X$, $s=Z/X$ としてみればわかる通り, st 平面の双曲線 $st-1=0$ からスタートすれば $\mathbf{M}$ に行き着きます. つまり, 最初から $\mathbf{M}$ を知っている人の立場で見れば, 同じ図形 $\mathbf{M}$ のことを放物線だと言ったり, 双曲線だと言ったりしている様に思うはずで, 「一点が見えないばかりに, 同じ物に違う名前をつけているなんて!」ということになってしまいます.

比 $(a:b:c)$ を座標とする新しい空間は，どうやら知っている平面（xy 平面，uv 平面，st 平面）を３つくっつけて作ったもののようです．実際，u,v を x,y を用いて表すと，$u=X/Y=(X/Z)(Z/Y)=x/y$, $v=Z/Y=1/y$ となっていますので，xy 平面と uv 平面を規則 $u=x/y, v=1/y$ で貼り合わせています．同様に，xy 平面と st 平面は $s=1/x, t=y/x$ で貼り合わせたことになります．uv 平面と st 平面の貼り合わせ規則は $s=v/u, t=1/u$ ですので，結局３つの平面が矛盾なく貼り合わされて，ひとつの図形（多様体）を作っています．この図形には，射影平面という名前が付いていて，記号では，$\mathbb{P}^2$ と表します．無理やり座標軸の絵を描くと次のようになります．

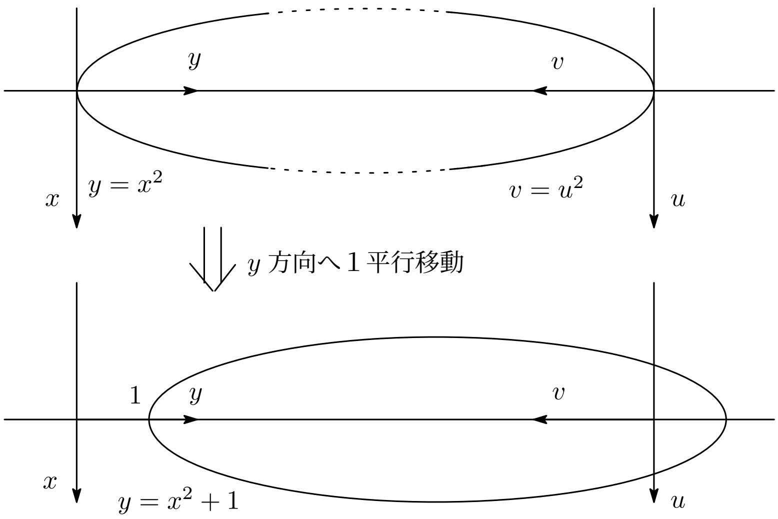


向かい合った矢印の座標（例えば x,s）は，互いに逆数の関係にあります．従って，xy 平面からは，u 軸（t 軸）になっている直線が無限の彼方にあって見えません．uv 平面からは，x 軸（s 軸）になっている直線が無限の彼方にあって見えません．st 平面からは，y 軸（v 軸）になっている直線が無限の彼方にあって見えません．

$\mathbf{M}$ が本当に「わっか」であることを確認するために，もうひとつ実験してみましょう．もともと考えていた放物線 $y=x^2$ を平行移動して $y=x^2+1$ を考えてみます．平行移動しただけですから，図形の形は変わらないはずです．$y=x^2+1$ に $x=X/Z, y=Y/Z$ を代入して分母をはらえば，$YZ=X^2+Z^2$ になります．次に両辺を Y^2 で割れば $Z/Y=(X/Y)^2+(Z/Y)^2$ です．従って，放物線 $y=x^2+1$ は，uv 座標では $v=u^2+v^2$ となりますから，これは円 $u^2+(v-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ です．（st 平面では $st=1+t^2$ となって双曲線 $s=t+t^{-1}$ です．）さっきは uv 平面で放物線に見えていたものが，ちょっと平行移動しただけで円に見えるようになりました．（ちなみに $y=x^2+\epsilon$ $(\epsilon>0)$ だと uv 平面では

$$\frac{u^2}{(2/\sqrt{\epsilon})^2}+\frac{(v-2/\epsilon)^2}{(2/\epsilon)^2}=1$$

という楕円です．）s 軸 t 軸を無視して平行移動 $y=x^2\to y=x^2+1$ の図を描くと次のようになります．



上の図では xy 平面で見ても，uv 平面で見ても放物線の上のほうは遠すぎて見えなくなっていますが，ちょっとずらした下の図なら，uv 平面では全体像が観察でき，ちゃんと「わっか」に見えます．結局，放物線, 双曲線, 楕円は見ている角度が違うだけで本当は同じものなのです．こうして無駄な分類をしなくても良くなりました．

ところで，我々はもともと二つの直線が必ず 1 点で交わるような空間を考えたかったのでした．射影平面では二つの直線は本当に必ず 1 点で交わっているでしょうか？ xy 平面で平行な 2 直線 $y = 2x$, $y = 2x - 1$ を調べましょう．X, Y, Z で書き直すとそれぞれ $Y = 2X$, $Y = 2X - Z$ となりますので，これを連立方程式だと思って解くと，λ を媒介変数として解 $X = \lambda$, $Y = 2\lambda$, $Z = 0$ が得られますから，$(X : Y : Z) = (\lambda : 2\lambda : 0) = (1 : 2 : 0)$ となって，交点 $(1 : 2 : 0)$ が見つかりました．同様にすると傾き m の 2 直線の交点は $(1 : m : 0)$ であることがわかります．傾きが無限大，つまり $x =$ 定数 の形の 2 直線の交点は $(0 : 1 : 0)$ です．（これらすべての Z 座標が 0 になっていることにも注意して下さい．xy 平面にとっては $Z = 0$ は無限の彼方にあるものでした．）従って「無限遠点」はちゃんと「直線の傾き」の分だけ用意できました．

以上で，射影平面が目的に適った空間であることが了解されたと思います．

2.　２次曲線のかたち

数の範囲を実数に限定していたときには「わっか」に見えていた２次曲線が，複素数まで許した世界ではどんな形をしているのかを調べてみます．どれでも同じなので，ここでは円 $x^2+y^2=1$ を考えます．

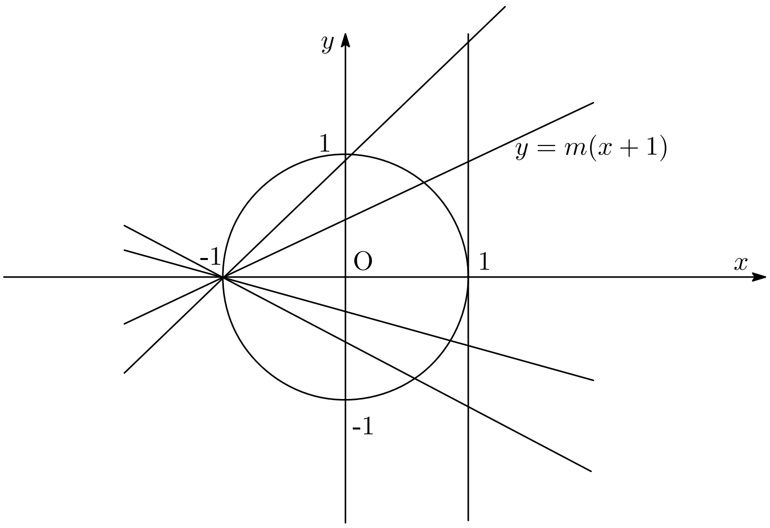
まず，実数の範囲で調べておきます．円周上の点 $(-1,0)$ を通り傾きが m の直線の方程式は

$$y=m(x+1)$$

で与えられます．この直線と円の交点は $(-1,0)$ 以外にもうひとつあって簡単な計算から

$$\left(\frac{1-m^2}{1+m^2},\ \frac{2m}{1+m^2}\right)$$

です． m を変化させるとこの点は円周上を $(-1,0)$ を除いて，くまなく動きます．このことから，円周から１点を除いたものと直線は１対１の対応がついていることがわかります．これをもう少しはっきり見るために直線 $x=1$ を考えてみます．



二直線 $y=m(x+1)$ と $x=1$ の交点は $(1,2m)$ ですから，円周から $(-1,0)$ を除いた部分と直線 $x=1$ が１対１に対応しています． $x=1$ 上を y 座標が増える方向にどんどん進めば，対応する円周上の点は x 軸より上の円周に沿って $(-1,0)$ にどんどん近づいていきます．逆に $x=1$ 上を y 座標が減る方向にどんどん進めば円周の下の部分に沿って $(-1,0)$ にどんどん近づきます． $m\to+\infty$, $m\to-\infty$ としているわけです．以上より，直線 $x=1$ の無限の彼方に二つの仮想点 $(1,+\infty)$ と $(1,-\infty)$ を考えて，それらをくっつけたものが円周であると了解されます．射影平面では $x=1$ は $X=Z$ となりますから，$(X:Y:X)=(X/Y:1:X/Y)$ において $Y\to\infty$ とすれば解るように，仮想的に考えた点 $(1,+\infty)$, $(1,-\infty)$ は１点 $(0:1:0)$ に対応します．

[方程式の対応]
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ y=m(x+1) \\ x=1 \end{array}\right\} \quad\longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} X^2+Y^2=Z^2 \\ Y=m(X+Z) \\ X=Z \end{array}\right.$$

射影平面で, $Y=m(X+Z)$ と $X^2+Y^2=Z^2$ の交点を求めてみます．最初の式を用いて Y を消去して

$$\begin{aligned}
&X^2+m^2(X^2+2XZ+Z^2)=Z^2\\
\Leftrightarrow\quad &(1+m^2)X^2+2m^2XZ+(m^2-1)Z^2=0\\
\Leftrightarrow\quad &(X+Z)\{(1+m^2)X+(m^2-1)Z\}=0\\
\Leftrightarrow\quad &X=-Z \quad \text{または} \quad (1+m^2)X=(1-m^2)Z\\
\Leftrightarrow\quad &X:Z=-1:1 \quad \text{または} \quad X:Z=1-m^2:1+m^2
\end{aligned}$$

ですから, 交点は $(X:Y:Z)=(-1:0:1)$, $(1-m^2:2m:1+m^2)$ となります．

[点の対応]
$$\left.\begin{array}{c}(-1,0)\\ \\ \left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2},\dfrac{2m}{1+m^2}\right)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(-1:0:1)\\ \\ (1-m^2:2m:1+m^2)\end{array}\right.$$

もし $(1-m^2:2m:1+m^2)=(1-n^2:2n:1+n^2)$ ならば $1-m^2=t(1-n^2)$, $2m=2tn$, $1+m^2=t(1+n^2)$ をみたす零でない数 t があるはずですが, これらの関係式から $t=1$ が得られますから，結局 $n=m$ です．つまり $m\mapsto(1-m^2:2m:1+m^2)$ は１対１写像です．また, $m\neq 0$ ならば

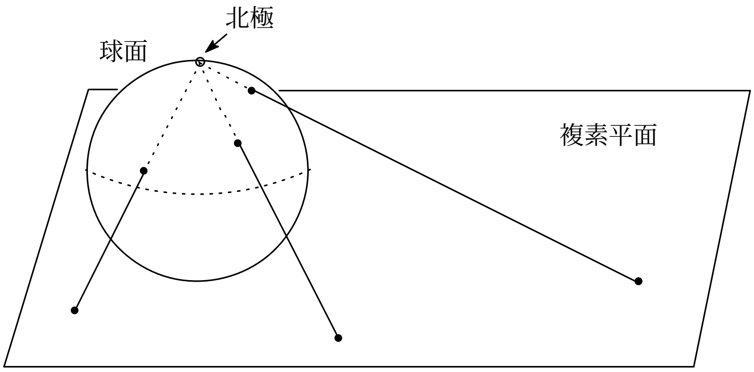
$$(1-m^2:2m:1+m^2)=\left(\frac{1}{m^2}-1:\frac{2}{m}:\frac{1}{m^2}+1\right)$$

なので, $|m|\to\infty$ のとき $(1-m^2:2m:1+m^2)$ は $(-1:0:1)$ に近づきます．

今やった計算では数の範囲が実数であることは，実は何も使っていません．従って, X, Y, Z, m すべてが複素数であると考えても全く同じ結論に到達するはずです．複素数 m には $(1-m^2:2m:1+m^2)$ を，∞ には $(-1:0:1)$ を対応させることによって１対１連続写像

$$(\text{複素平面})\cup\{\infty\}\xrightarrow{1:1}\{(X:Y:Z)|\ X^2+Y^2=Z^2\}\subset\mathbb{P}^2$$

が得られました．つまり，射影平面でみた２次曲線は，複素平面に１点を付け加えた図形とおなじものなのです．



北極以外の球面の点と複素平面の点が１：１に対応

一方，上図からも分かるように, 複素平面に１点 ∞ を付け加えたものは球面と同じ物と見なせますから,

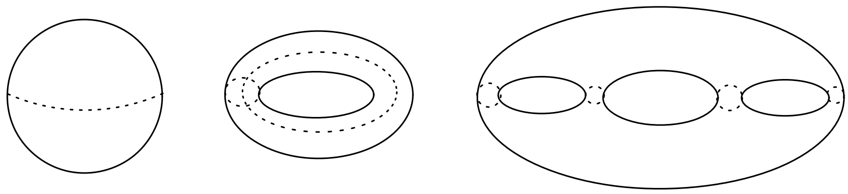
結論

複素数で考えると（既約）２次曲線は, 球面と同じ形をしている．

という答えが出てきました．「曲線」なのに「面」とは，何とも奇妙な印象を受けますが，そもそも実数は数直線と，複素数は複素平面と対応しますから，なんとなく了解できると思います．

ところで，最初に補助的に用いた直線 $x = 1$ はどうなのでしょう？射影平面では，この直線上の点は $(1 : y : 1)$ というふうに表され，$y \to \infty$ のときは $(0 : 1 : 0)$ に近づきます．つまり，複素数で考えれば，この直線は y を座標とする複素平面に１点を付け加えた図形になっていて，球面と同じ形をしています．２次曲線と同じ！

それでは，３次曲線，４次曲線... というふうに，どんどん難しい曲線を考えていっても，やはり球面に見えるのかというと，実はそうではなく，３次曲線はドーナッツ（の表面）のように見え，４次曲線だと３人乗りの浮き袋のように見えます．一般に，n 次曲線だと $(n-1)(n-2)/2$ 人乗りの浮き袋に見えるのです．[*2]



２次曲線　　３次曲線　　４次曲線

[*2] 正確には「非特異」な曲線です．