基本群に映る双曲的代数曲線の構造

望月新一

§1. 代数曲線とは何か

多項式の解の研究は古くから数学のもっとも中心的なテーマの一つである。例えば、フェルマの方程式 $x^n + y^n = 1$（ここで、$n \geq 3$ は整数）が「非自明」な有理数解を持たないという３５０年来の予想が、近年 Wiles によって最終的に解決されたことは記憶に新しい。もっと一般に、任意の整数係数の多項式 $f(x, y)$ が、いつ有理数解、つまり $f(x, y) = 0$ をみたす有理数 x, y を持つか、また持っているとして、解が多いか少ないか、あるいは、解の集合が、その全体像がより直観的に捉えやすくなるような何らかの面白い付加構造を持ち合わせているか、といったようなことを問うことができる。

ところが、有理数の加減乗除を中心とした初等数学の見地から直接このような問題に取り組もうとしても一般的な結果が余り期待できないことが、何世紀にもわたる試行錯誤によって明らかにされてきた。そこで、現代数学の大きな流れの一つとして、$f(x, y) = 0$ の有理数解そのものを直接考察するのをひとまず諦め、$f(x, y) = 0$ という式が表現している抽象的な数学的対象を定式化して、その抽象的対象の性質を究明しようとする、というものがある。そのようなアプローチを代表するものとして、「スキーム論」という、現代代数幾何や数論で用いられる非常に重要な道具がある。「スキーム」$\mathcal{X}$ とは、大雑把にいうと、加減乗という三つの演算が可能な任意の代数的対象 R—このような代数的対象 R を「環」と呼ぶのだが—に対して、集合 $\mathcal{X}(R)$ を対応させる代数的な対応 $\mathcal{X} : R \mapsto \mathcal{X}(R)$ のことである。例えば、先程の方程式 $f(x, y) = 0$ を例にとってみると、その式の定義する「スキーム」$\mathcal{F}$ は、任意の環 R に対して、$f(x, y) = 0$ をみたす R の元の組 (x, y) 全体のなす集合 $\mathcal{F}(R)$ を対応させるものである。つまり、R が有理数体 $\mathbf{Q}$ なら、$\mathcal{F}(\mathbf{Q})$ は $f(x, y) = 0$ の有理数解全体の集合になる。

ところで、今まで気にしなかったことだが、このスキーム $\mathcal{F}$ は、**二つ**の「自由度」x, y に対して**一つ**の「制約」$f(x, y) = 0$ を課しているものと見ることができる。 つまり、$\mathcal{F}$ 自身の「次元」は、[自由度の数] − [制約の数] $= 2 - 1 = 1$ という計算になる。このような一次元のスキームを**「代数曲線」**という。もっと一般に、n 個の変数に対して、$n - 1$ 個の連立（多項式型）方程式があったとき、 それぞれの方程式が表現している「制約」が互いに独立であれば、その連立方程式の任意の環 R における解を考えることによって、先程の例と同じように、一次元のスキーム、つまり「代数曲線」を定義することができる。

本稿では、先程の $\mathcal{F}$ のような「代数曲線」という一見抽象的でとっつきにくい対象が、（以下で説明する）「双曲性」という仮定の下では、「基本群」というトポロジーから借りた道具や、その基本群に数論的なひねりを施した「数論的基本群」といったようなものを通してより幾何的で視覚化に適した形に表現される様子を解説したい。

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

§2. リーマン面の観点

任意の代数曲線 $\mathcal{X}$ が与えられたとしよう。一般には、$\mathcal{X}$ には「尖った点」や「抜けている点」（つまり、「穴」）が有ったりするのだが、本稿では、簡単のため、$\mathcal{X}$ がそのような不都合なものを持たない、「滑らかで完備な代数曲線」であることを仮定する。 本節では、$\mathcal{X}$ の複素数体 $\mathbf{C}$ に値をとる解の集合 $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ を考察したい。複素数体 $\mathbf{C}$ とは、$a+b\,i$ （ただし、a と b は実数で、$i=\sqrt{-1}$）という形に書ける数の集合である。

ところが、上の段落では $\mathbf{C}$ をただの**環**（つまり、「加減乗」が定義されている集合）として扱ってきたが、実は、$\mathbf{C}$ には、この他にも「位相」という豊かな付加構造が入る。「位相」とは、その集合の任意の二つの点に対して、その二点が比較的遠いか、比較的近いかを判定させてくれる付加構造のことである。例えば、二つの複素数 $a_1+b_1\,i, a_2+b_2\,i$ が遠いか近いかは、$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$ という実数の大小によって判定できる。そのことによって、複素数体 $\mathbf{C}$ に位相が入ることが分かる。一方、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ だが、例えば、$\mathcal{X}=\mathcal{F}$ （ただし、$\mathcal{F}$ は、§1 の話のように、整数係数の二変数多項式 $f(x,y)$ で定義されるスキーム）のとき、二つの解 $\alpha=(x,y),\ \alpha'=(x',y')\in\mathcal{X}(\mathbf{C})$ が「近い」とは、x という複素数が x' に近く、y も y' に近い、というふうに定義すれば、$\mathcal{F}(\mathbf{C})$ に位相が入る。実は、技術的にはややこしくなるが、 $\mathcal{X}$ が別にこのような単純な $\mathcal{F}$ でなくても、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ に自然な位相を入れることができる。位相の入った集合を「位相空間」と呼ぶのだが、これで $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ がただの集合ではなく、自然な位相空間としての構造を併せ持っていることが分かる。

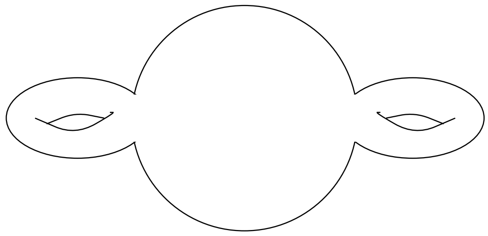

図１：種数２のリーマン面

実は、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ のような位相空間は、位相幾何学（トポロジー）では完全に分類されていて、図１のように、球面に有限個の「ハンドル（把手）」を取り付けたものと「同形」になることが知られている。付け加わるハンドルの個数は「$\mathcal{X}$ の種数 g」と呼ぶのだが、これで分かったことは：**位相空間 $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の形は、種数 $\mathbf{g}$ のみで完全に決まる。**例えば、$\mathcal{X}=\mathcal{F}$ のとき、多項式 $f(x,y)$ の次数が d なら、種数 $g=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ となる。 従って、同じ次数の多項式で定義された代数曲線 $\mathcal{F},\mathcal{F}'$ が二つ与えられたとき、位相空間 $\mathcal{F}(\mathbf{C})$ と $\mathcal{F}'(\mathbf{C})$ だけを見た限りでは、二つの代数曲線の区別が付かないということである。 区別するためには、もっと精密な付加構造「正則構造」（“holomorphic structure”）が必要になる。

$\mathcal{F}$ の正則構造を定義するためには、まず、‘x’ と ‘y’ という座標が（幾つかの例外的な点を除けば）$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ 上の、$\mathbf{C}$ に値をとる関数 X,Y を定義していることに注意しよう。例えば、X という関数は、(x,y) という解に対して x という複素数を対応させる関数である。もっと一般に、$\mathcal{F}(\mathbf{C})$ の任意の「開部分集合」$U\subseteq\mathcal{F}(\mathbf{C})$―つまり、各 $u\in U$ に対して u に十分に近い点を必ず含むような部分集合―に対して、U 上の「正則な関数」とは、U 上で定義された任意の $\mathbf{C}$ 値の関数 $\phi: U\to\mathbf{C}$ で、U の各点のそばで、X と Y に関する $\mathbf{C}$ 係数の収束巾級数として書けるもののことである。 実は、$\mathcal{X}$ が別に $\mathcal{F}$ のような単純なものでなくても、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の開部分集合上の「正則関数」という概念を定義することができ、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ という位相空間に、どの関数が正則関数かという情報を付け加えたものを、「リーマン面」と呼ぶ。先程見てきたように、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の、位相空

間としての構造は種数だけで決まるが、実は、リーマン面としての構造は元の代数曲線 $\mathcal{X}$ を完全に決定する。

§3. コンパクト双曲型リーマン面の一意化

$\mathcal{X}$ を滑らかで完備な代数曲線としよう。§2 では、$\mathcal{X}$ の「種数」を定義したが、種数が０か１か２以上かによって、代数曲線の理論が根本的に違ってくる。本稿で取り上げる理論は、種数が０か１の場合、成り立たなかったり、成り立っていても自明になったりするものなので、種数が２以上の場合―この場合、代数曲線 $\mathcal{X}$ を **「双曲的」** という―しか扱わないことにする。$\mathcal{X}$ が双曲的なら $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ は「コンパクトな双曲型リーマン面」になる。しかも、実は、任意のコンパクトな双曲型リーマン面は、必ず（複素数係数の多項式で定義される）双曲的代数曲線から生じる。本節では、コンパクトな双曲型リーマン面の、 自然で豊かな幾何的構造を持つ表示方法を紹介する。

まず、$\mathcal{H}$ を、上半平面、即ち $\{z = a + b\, i \in \mathbf{C} \mid b > 0\}$ として、$SL_2(\mathbf{R})$ を、行列式 $ad - bc$ が 1 となる実数成分の 2×2 行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

全体とする。次に、$SL_2(\mathbf{R})$ の各元 M が、$z \mapsto M(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{az+b}{cz+d}$ で $\mathcal{H}$ の自らへの全単射を引き起こすことに注意しよう。この事実を、「群 $SL_2(\mathbf{R})$ が上半平面 $\mathcal{H}$ に作用する」というふうに表現することが多い。ここで、「群」という用語を使ったが、群とは、任意の二つの元の（ある法則をみたす、一般に非可換な）「合成」と、各元の「逆元」が定義されている集合のことである。$SL_2(\mathbf{R})$ の場合、この「合成」という操作は、行列の掛け算に相当する。次に、$SL_2(\mathbf{R})$ の元 M で、成分が全部整数になる行列全体を $SL_2(\mathbf{Z})$ と書こう。即ち、$SL_2(\mathbf{R})$ の元の成分は、実数体 $\mathbf{R}$ という連続体を（殆んど）自由に動くのに対して、$SL_2(\mathbf{Z})$ の元の成分は、整数環 $\mathbf{Z}$ という「離散的」な（つまり、連続でない）ものの中で動く。このことから、$SL_2(\mathbf{Z})$ のようなものを、「不連続群」と呼ぶのである。実は、$SL_2(\mathbf{R})$ の中には、$SL_2(\mathbf{Z})$ の他にも、様々な種類の不連続群が入っているのである。

任意の不連続群 $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbf{R})$ が与えられたとしよう。すると、「$\mathcal{H}$ の Γ による商」$\mathcal{H}/\Gamma$ を次のように定義する：$\mathcal{H}$ の任意の二つの元 z, z' に対して、$z' = M(z)$ となるような Γ の元 M が存在するとき、z と z' を「同値」と見ることで、$\mathcal{H}$ に同値関係を入れる。$\mathcal{H}$ をその同値関係で割ったものを、$\mathcal{H}/\Gamma$ と書く。これで、$\mathcal{H}/\Gamma$ という集合の定義は完了するが、実は、（Γ がある条件をみたせば）$\mathcal{H}/\Gamma$ は集合だけではなく、コンパクトな双曲型リーマン面になるのである。しかも、それだけではなく、**任意の代数曲線 $\mathcal{X}$ に対して、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ がリーマン面として $\mathcal{H}/\Gamma$ と同形になるような不連続群 $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbf{R})$ が必ず存在する。** これは Köbe の一意化定理である。ここで、この群 Γ は、抽象的な群として種数 g だけで決まる弱い不変量だが、その Γ の $\mathcal{H}$ への作用は $\mathcal{X}$ の代数曲線としての構造を完全に決定する非常に強い不変量である。この群 Γ を「$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の基本群」といい、$\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$ と書く。従って、Köbe の一意化定理が次のことを主張していると見ることができる： 「代数曲線 $\mathcal{X}$ の構造は、

$$\{\text{ その基本群 } \pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))\} \ + \ \{\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C})) \text{ の } \mathcal{H} \text{ への作用 }\}$$

だけで完全に決定される。」 このように直すと、Köbe の定理が、（以下で紹介する）グロタンディーク予想にあらわれる数学的現象の原型であることがよく分かる。

最後に、代数曲線 $\mathcal{X}$ から出発して、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ を $\mathcal{H}/\Gamma$ として表したときに、$\mathcal{H}/\Gamma$ からどうやって代数曲線 $\mathcal{X}$ の代数的構造を復元するかについて少し説明しておきたい。まず、上半平面 $\mathcal{H}$ 上には、様々な（初等複素解析の意味での）正則関数 $\phi(z)$ が生息しているが、その中には、$\phi(z)$ に dz を掛けてできるもの $\phi(z)\ dz$—このように右に "dz" のついている関数を「微分形式」と呼ぶのだが—が、任意の Γ の元 M に対して、$z \mapsto M(z)$ という座標変換の下で不変となるような特別な $\phi(z)$ がある。このような $\phi(z)$ を「保型形式」と呼ぶ。保型形式の理論はとても歴史が長く、奥の深いものなので、 本稿ではとても立ち入る余裕はないが、ちょうどこのような保型形式を用いて $\mathcal{X}$ の代数構造を復元することができるのである。例えば、この手法の典型的な応用として、志村多様体の理論では、元々代数構造が入っているかどうか定かでない志村多様体に対して、保型形式を使って、代数構造が確かな「射影空間」という大きなユークリッド空間のような空間への埋め込み写像を構成することによってその志村多様体に自然な代数構造を入れるのである。

§4. 数論的基本群

前節では、$\mathcal{X}$ が双曲的代数曲線なら、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ を $\mathcal{H}/\Gamma$ として書けることを見てきたが、このことによって $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ と $\mathcal{H}/\Gamma$ を同一視するようにすると、$\mathcal{H}/\Gamma$ の定義から、$\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Gamma = \mathcal{X}(\mathbf{C})$ という写像ができることが分かる（図２を参照）。このような写像は様々な特別な性質を持っていて、位相幾何学では、「普遍被覆写像」と呼ぶ。実は、計算してみればすぐ分かるように、$\mathcal{H}/\Gamma = \mathcal{X}(\mathbf{C})$ の各点 x の上には、この被覆写像 ψ によって x に写される $\mathcal{H}$ の点が、必ず無限個あるのである。そのことから、この被覆写像 ψ を「無限次被覆写像」と呼ぶのである。

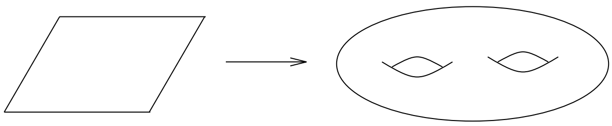

図２：普遍被覆写像

実は、ψ のように $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ を値域とする被覆写像は、他にも沢山有って、その中には、「有限次被覆写像 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}(\mathbf{C})$」、つまり、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の各点の上に有限個の点しか乗っていないようなものもある。ところが、普遍被覆写像 ψ の特別な性質の一つとして、先程の有限次被覆 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}(\mathbf{C})$ は、必ず $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}/\Gamma = \mathcal{X}(\mathbf{C})$ の間にくる「中間被覆」$\mathcal{H} \to \mathcal{Y} \to \mathcal{H}/\Gamma = \mathcal{X}(\mathbf{C})$ として実現できるのである。しかも、$\mathcal{Y} \to \mathcal{X}(\mathbf{C})$ のような有限次被覆の場合、$\mathcal{Y}$ が必ず**代数曲線** になることも知られている。 ただし、元々の $\mathcal{X}$ のように、$\mathcal{Y}$ を定義する定義多項式たちの係数が有理数になるとは限らず、一般には**代数的数**になるのである。

「代数的数」とは、複素数 $a + b\ i$ で、整数係数の一変数多項式の解となる数のことである。例えば、$\sqrt{2}$ や i のように、$X^2 - 2 = 0$ や $X^2 + 1 = 0$ のような多項式の解になる数は代数的数になるが、円周率の π は代数的数にはならない。代数的数の集合を $\overline{\mathbf{Q}} \subseteq \mathbf{C}$ と書くことにしよう。次に、有理数体 $\mathbf{Q}$ の**（絶対）ガロア群** $G_{\mathbf{Q}}$ というものを定義したい。 $G_{\mathbf{Q}}$ とは、代数的数の集合 $\overline{\mathbf{Q}}$ の自らへの写像で、1 を 1 に写し、足し算と掛け算を保つもの全体の集合である。このガロア群 $G_{\mathbf{Q}}$ は、代数的整数論では中心的な研究対象となっていて、一般にガロア群の理論には、何世紀にもわたり未解決問題だった「五次式の非可解性問題」の解決に利用される等、１９世紀

初頭に遡る長い歴史がある。実は、ガロア群の元を、先程 体 $\overline{\mathbf{Q}}$ の自らへの写像として定義したが、元々定義した数学者たちは、ガロア群を、むしろ一変数多項式の解たちの持つ対称性を記述するための道具とみなしていたに違いない。

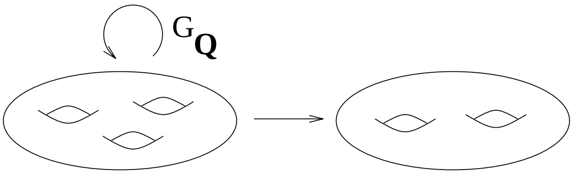

図３：有限次被覆とガロア群の作用

さて、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の有限次被覆の話に戻ろう。先程、任意の有限次被覆 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}(\mathbf{C})$ に対して、$\mathcal{Y}$ が必ず代数的数係数の多項式で定義される代数曲線になることを見てきた。従って、もし σ がガロア群 $G_{\mathbf{Q}}$ の元ならば、σ を、その $\mathcal{Y}$ の定義多項式たちの各係数に作用させることによって、新たな代数曲線 $\mathcal{Y}^{\sigma}$ と有限次被覆 $\mathcal{Y}^{\sigma} \to \mathcal{X}(\mathbf{C})$ が生まれる。例えば、もし σ という元が i を $-i$ に写すようなもので、$\mathcal{Y}$ の定義多項式の中に、$f(x,y) = x^2 + i \cdot xy + y^2$ があれば、$\mathcal{Y}^{\sigma}$ の定義多項式の中に $f^{\sigma}(x,y) = x^2 - i \cdot xy + y^2$ という式が出てくることになる。このように、ガロア群 $G_{\mathbf{Q}}$ が、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の有限次被覆たち全体の集合に「作用」していると見ることができる（図３を参照）。この事実を、現代数学の技術を援用して少し加工してみると、その作用の組合せ論的性質、対称性を記述するものとして、**「$\mathcal{X}$ の数論的基本群 $\pi_1(\mathcal{X})$」**という非常に大きくて複雑な群を定義することができる。 $\pi_1(\mathcal{X})$ 全体の構造はまだ解明されていないが、その構造論にそれほど深入りしなくても、 $\pi_1(\mathcal{X})$ が二つの「構成部分」から成り立っていることは直ちに証明できる。一つ目の構成部分は、$\mathbf{Q}$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbf{Q}}$ で、もう一つは、基本群 $\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$ から直接導かれる「副有限幾何的基本群 $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$」である。$\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ の方は、$\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$ が与えられれば定まるものだから、その構造は $\mathcal{X}$ の種数一つで完全に決まるわけである。ところが、$\mathcal{Y} \to \mathcal{X}(\mathbf{C})$ のような有限次被覆と違って、$\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$ の $\mathcal{H}$ への作用からくる普遍被覆 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Gamma = \mathcal{X}(\mathbf{C})$ の $\mathcal{H}$ は、スキームや代数曲線のような代数的な対象として実現できないものである。従って、$\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ は $\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$ の「最大の代数的部分」、または $\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$ の「代数版」と見ることもでき、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の有限次被覆たちの対称性を記述しているものと見ることもできる。

§5. グロタンディーク予想

前節では、代数曲線 $\mathcal{X}$ の重要な不変量として、数論的基本群 $\pi_1(\mathcal{X})$ を導入し、それが、$G_{\mathbf{Q}}$ と $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ という二つのもっと小さい群から構成されていることを説明した。$\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ の群としての構造は、$\mathcal{X}$ の種数だけで決まり、比較的単純である。一方、$G_{\mathbf{Q}}$ の方は、構造が複雑で、理解されているとはとてもいえない反面、どの代数曲線 $\mathcal{X}$ から出発したかには全くよらないものである。 そこで、$\mathcal{X}$ の数論的基本群 $\pi_1(\mathcal{X})$ のいわば醍醐味は、この二つの構成部分の $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ と $G_{\mathbf{Q}}$ がどのように絡まり合って $\pi_1(\mathcal{X})$ 全体を成り立たせているか、というところにある。この複雑な絡まり合い方は、前節で話題に上った $G_{\mathbf{Q}}$ の、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の有限次被覆たち (即ち、$\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$) への作用と、 実は同値なものであるが、この絡まり合い方にせよ、ガロア群の作用にせよ、いずれもまだ完全に解明されるには至っていない。そこで、その解明過程の途中段階における一種の道しるべとして、１９６０年代に数論的基本群を一番最初に定義したグロタンディーク氏は、１９８０年代初めに、次の予想を立てた：

[予想]： 双曲的代数曲線 $\mathcal{X}$ の構造は、その数論的基本群 $\pi_1(\mathcal{X})$、即ちガロア群 $G_{\mathbf{Q}}$ の副有限幾何的基本群 $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ への作用で完全に決まる。

まず、この予想と Köbe の一意化定理との類似性に注目したい。§3 でも指摘したように、Köbe の一意化定理と同様、この予想は、$\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$ や $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ のように、種数＝位相だけで決まる群と、その群に入る何らかの付加構造（つまり、$\pi_1(\mathcal{X}(\mathbf{C})) = \Gamma$ の $\mathcal{H}$ への作用や、ガロア群 $G_{\mathbf{Q}}$ の $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ への作用）で元の代数曲線の構造が完全に決定されることを主張しているのである。

上の予想を含むグロタンディークの代数曲線に関する「遠アーベル予想」（詳しくは、[2-3] を参照）は、中村博昭氏の先駆的な仕事 ([10]) によってはじめて特殊な場合に解かれ、続いて１９９５年に、玉川安騎男氏による新しい手法の導入を皮切りに、玉川氏と筆者のそれぞれの独自の視点による努力で最終解決の方向へと進み ([11],[6-7])、最後に、１９９６年の夏に元の予想より強い形で解決された ([8-9])。 次節では、筆者が与えた p 進幾何による証明について報告する。

§6. p 進幾何による解決

p 進幾何によるグロタンディーク予想の証明は、予想自体が§3 で紹介した Köbe の一意化定理と形が類似していることを反映して、議論も§3 の話に比較的心理的に近い筋書きで展開することに特徴がある。ただし、§3 では、議論が複素数体 $\mathbf{C}$ という体の上で行なわれるのに対して、こちらの「p 進幾何」による証明は、**「p 進体」**という違う種類の体を活動の拠点とするものである。実は、p 進体は、複素数体と同様、位相の入った「体」（＝０以外の元で割算ができる環のこと）ではあるが、入っている位相は複素数体の位相とは全く違う位相なのである。複素数体の場合、§2 でも解説したように、 $a_1 + b_1\ i$ と $a_2 + b_2\ i$ という二つの複素数の間の距離を、$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$ で定義するのに対して、p 進体の位相は次のように定義する：まず、p を素数として、固定する。 次に、a と b が有理数ならば、$a - b = \frac{c}{d}$ （ただし、ここで、c と d は、共通の約数を持たない整数とする）という形に書く。すると、c が p の高い巾で割り切れるときは、a と b が「近い」と見て、d の方が p の高い巾で割り切れるときは、a と b が「遠い」と見る。（注：c と d は共通の約数を持たないから、両方とも p で割り切れることはない。）この定義によって、有理数体 $\mathbf{Q}$ に p 進位相と呼ばれる位相が入り、この位相に関する有理数列の極限全体を有理数体に添加することによって得られる体を、$\mathbf{Q}_p$ と書く。この新しい体 $\mathbf{Q}_p$ は、**「p 進数体」**と呼ばれ、p 進幾何や p 進解析でもっとも基本的な体である。ちょうど、§3 の話では、複素数体が「基礎体」だったように、p 進幾何によるグロタンディーク予想の証明では、p 進数体 $\mathbf{Q}_p$ が基礎体として採用される。

実は、p 進体は、$\mathbf{Q}_p$ の他にも、様々な大きさや性質のものが有って、この証明では、L という記号で表される特別な p 進体が重要な役割を担う。この L という体は、大雑把にいうと、$\mathbf{Q}_p$ に対して、一つの幾何的な次元を添加することによって得られる体である。現代代数幾何では、任意の体に対して、自然なスキームを対応させることができるが、体 L に対応するスキームを $\mathrm{Spec}(L)$ と書く。 このスキーム $\mathrm{Spec}(L)$ から元の代数曲線への写像 $\theta : \mathrm{Spec}(L) \to \mathcal{X}$ がある。この写像 θ は、§3 や§4 の複素数体 $\mathbf{C}$ 上の話で $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Gamma = \mathcal{X}(\mathbf{C})$ という普遍被覆写像が果たしたのと類似的な役割を果たす。例えば、上半平面 $\mathcal{H}$ の構造が、代数曲線 $\mathcal{X}$ の構造には全くよらないものであるのと同じように、体 L やそれに付随する $\mathrm{Spec}(L)$ は、$\mathcal{X}$ がどんな代数曲線であろうと、完全に同じものになる。（事実、複素数体上の理論の場合、リーマン面 $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ には多種多様な可能性が有るのに対して、上半平面 $\mathcal{H}$ は「只一つ」ということが、「一意」化という名称の由来なのである。）そして、ちょうど複素数体上の理論では、（§3 の最後に指摘したよう

に）保型形式という特別な種類の $\mathcal{H}$ 上の微分形式を用いて、$\mathcal{X}(\mathbf{C})$ の代数構造を復元するのと同じように、[7,8] では、$\mathrm{Spec}(L)$ 上の微分形式を用いて射影空間への埋め込み写像を作り、元の代数曲線 $\mathcal{X}$ を復元するのである。これが、p 進幾何によるグロタンディーク予想の証明のあらすじである。

最後に、この証明が、現代数論幾何の中では決して孤立したものではなく、他の最近の研究とも密接な関係があることを指摘したい。特に、上でも説明したように、グロタンディーク予想は、位相＋ガロアと、多項式で定義された代数曲線（つまり、「代数幾何」）との間に一種の同値性が成り立っていることを主張しているが、このように、位相＋ガロアと代数幾何という二つの異質そうな世界の間の同値性を標榜する理論では、他にも「p 進ホッジ理論」（例えば、[1] を参照）というものが有る。[8] では、[1] の理論を用いて、（上の話に出てきた）微分形式を、$\pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{X}_{\mathbf{C}})$ へのガロアの作用から再構成するのである。つまり、遠く離れた複素数体上の双曲型リーマン面の一意化理論と、p 進幾何の世界の間に一種の類似性を見出だすのはいわば「夢の話」だが、その夢を叶える技術的な力を与えてくれるものは p 進ホッジ理論である。

参考文献

[1] G. Faltings, *p-adic Hodge Theory*, J. of the Amer. Math. Soc. **1** (1988), 255–299.

[2] A. Grothendieck, *Esquisse d'un Programme, 1984*, in [4] Vol. 1, 7–48.

[3] ———, *Letter to G.Faltings, June 1983*, in [4] Vol. 1, 49–58.

[4] P. Lochak, L. Schneps (eds.), *Geometric Galois Actions; 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme, 2. The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 242-243, Cambridge Univ. Press, 1997.

[5] 中村 博昭, 玉川 安騎男, 望月 新一, 代数曲線の基本群に関する *Grothendieck* 予想, 数学（掲載予定）.

[6] S. Mochizuki, *The Profinite Grothendieck Conjecture for Hyperbolic Curves over Number Fields*, J. Math. Sci., Univ. Tokyo **3** (1996), 571–627.

[7] ———, *The Local Pro-p Grothendieck Conjecture for Hyperbolic Curves*, RIMS Preprint 1045, Kyoto Univ. (1995).

[8] ———, *The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves*, RIMS Preprint 1097, Kyoto Univ. (1996).

[9] ———, *A Grothendieck Conjecture-type Result for Certain Hyperbolic Surfaces*, RIMS Preprint 1104, Kyoto Univ. (1996).

[10] H. Nakamura, *Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line*, J. reine angew. Math. **405** (1990), 117–130.

[11] A. Tamagawa, *The Grothendieck Conjecture for Affine Curves*, Compositio Math. **109** (1997), no. 2, 135–194.