ザリスキー幾何

板井　昌典
東海大学　理学部　情報数理学科

2005 年 3 月 15 日～3 月 17 日
講義ノート：暫定版（2005 年 3 月 10 日）

目 次

京都大学数理解析研究所
短期共同研究

ザリスキー幾何と数論幾何
2005 年 3 月 14 日～3 月 18 日

1　講義1：体の純粋性

豊富なザリスキー幾何では代数的閉体が定義される．しかし，ザリスキー幾何とザリスキー・タイプでは若干事情が異なるので初めに両者の違いを比べよう．

1.1　ザリスキー幾何とザリスキー・タイプの比較

ザリスキー幾何

定義 1 (ザリスキー幾何) D を無限集合とし，各 n について D^n にはネーター位相が入っている．次の 4 つの公理系が満たされるとき，D は**ザリスキー幾何**であるという．

(Z0) f_i は定数写像 $f_i(x_1, \cdots x_n) = c$，あるいは射影 $f_i(x_1, \cdots x_n) = x_j$ (j は $1, \cdots, n$ のどれか) とする．$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ とすると $f : D^n \longrightarrow D^m$ は連続写像である (n, m の大小関係に制限がないことに注意)．D^n の対角集合 $\Delta^n_{i,j} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i = x_j\}$ は閉集合である．

(Z1) C を D^n の既約閉集合，π を D^n から D^k への射影とする．このとき，$\overline{\pi C}$ の真部分閉集合 F で，$\pi C \supseteq (\overline{\pi C} - F)$ となるものが存在する．

(Z2) D は既約である．また次の意味で，一様に 1 次元的である：$C \subseteq D^n \times D$ が閉集合であるとき，ある自然数 m が存在して，任意の $\bar{a} \in D^n$ に対して，$C(\bar{a}) = D$ または $|C(\bar{a})| \leq m$ である．ただし，$C(\bar{a}) = \{x \in D : (\bar{a}, x) \in C\}$.

(Z3) (次元定理) $\dim(D^n) \leq n$, U を D^n の既約閉集合，$T_{ij} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i = x_j\}$ とする．このとき $U \cap T_{ij}$ の各成分の次元は，$\dim(U) - 1$ 以上である．

ザリスキー幾何ではまず位相の言葉で公理が与えられる．その後で既約閉集合に対して述語記号を導入してザリスキー幾何の理論 $\mathrm{Th}(D)$ を考える．基本的な性質は次の 2 つである．

定理 2　1. $\mathrm{Th}(D)$ は強極小である．

2. D の初等拡大もザリスキー幾何である．

注 3　1. 公理 (Z1) は，ザリスキー幾何 D にたいしてその理論 $\mathrm{Th}(D)$ が量記号を消去すること，すなわち論理式には $\forall$, $\exists$ が現れないと仮定してよいことを保証している．このことを代数の言葉で言いかえると,「構成可能集合の射影は構成可能である」という Chevalley の定理と同値である (“*Algebraic Geometry I　Complex Projective Varieties*”, D.Mumford, Springer 1976, Proposition 2.31, p.37 参照).

2. 公理 (Z2) は，ザリスキー幾何 D が強極小集合になっていることを保証している．

ザリスキータイプ

安定理論 T においても，Morley 階数をより一般化した階数の概念を定義することができる．Morley 階数 1 の定義可能集合に相当するものとして，極小タイプというものを考える．

定義 4 $\mathfrak{M}$ を T の万有モデルとする．p を完全タイプとする．$\mathfrak{M}$ のどんな定義可能部分集合 X に対しても，$p(\mathfrak{M}) \cap X$ が有限集合か補-有限集合であるとき，p を極小タイプと呼ぶ.

定義 5 (ザリスキータイプの公理) P を極小タイプ p の $\mathfrak{M}$ における解集合とする．量記号と否定記号が現れない論理式で定義される $X \subseteq P^n$ を基本閉集合系とする位相を各 P^n に導入する．次の性質が成り立つとき，タイプ p は**ザリスキータイプ**であるという.

(1) P^n の各閉集合は，有限個の既約閉部分集合の和集合である.

(2) $X \subset Y$ を P^n のそれぞれ閉集合とする．Y が既約ならば $\mathrm{RU}(X) < \mathrm{RU}(Y)$ である.

(3) X を P^n の既約閉部分集合とする．$\Delta^n_{i,j} = \{\bar{x} \in P^n : x_i = x_j\}$ とおく．$\mathrm{RU}(X) = m$ とすると，$X \cap \Delta^n_{i,j}$ の空でない既約成分 W について $\mathrm{RU}(W) \geq m - 1$ である.

1.2 どうやって体を作るか

技術的なポイントは「ランク 2 の群が，ランク 1 の集合に作用していると体が出来る」という標語としてまとめることが出来る.
G をランク 2（RM または RU）の群，X をランク 1 の集合とする.

1.3 代数的に閉じていること

1. ω-安定な体は代数的閉体である（Macintyre の定理).
2. 正標数の極小体は代数的閉体である.
3. ザリスキー幾何の弱完備性を応用する.

1.4 純粋性：$T_a = T_b$

2 つの方法がある．Zil'ber の問題意識は「Chow の定理のモデル理論的定式化」にある.

1. 弱完備性を用いて，Bézout の定理を導き，曲線に関して $T_a = T_b$ を示す．そのあと，高次元の定義可能集合について帰納的に証明する.
2. Hrushovski 流：

2　講義 2：内的被覆と外的被覆

豊富なザリスキー幾何から，代数的閉体が構成される．非常に豊富なザリスキー幾何ではどうなるかということが次に問題になる．

X を非常に豊富なザリスキー幾何とする．X が豊富であることから代数的閉体 K が構成される．ザリスキー幾何 X が非常に豊富だと X と K の間の関係は強くなり K-内的と呼ばれる関係になる．ここでは [HZ96] の 9 節を参照しながら,「内的，外的」という概念について考える．

設定：ω-安定理論の飽和モデル $\mathcal{M}$ で議論する．しかし安定理論の飽和モデルでの議論に一般化することが出来る．

応用するときは，X を非常に豊富なザリスキー幾何とし，言語は L_X，理論 $\mathrm{Th}(X)$ は強極小とする．また X は飽和モデルとして考える．

単にタイプといった場合，部分タイプを意味する（論理式の無矛盾な集合）．タイプ p に対して，p の $\mathcal{M}$ における解集合を $p(\mathcal{M})$ と書く．また C を定義可能集合としたとき，C を定義している論理式と C を特に区別しない．E を定義可能集合としたとき，E を完備化した完全タイプを考え，E に付随するタイプと呼ぶ.

2.1　外的写像，内的タイプ

定義 6 (外的写像，内的タイプ) A を有限集合とする．p, q を A 上のタイプとし，$f : p(\mathcal{M}) \longrightarrow q(\mathcal{M})$ を A-定義可能写像とする．また R を集合とする．

1. 写像 f はつぎの性質を持つとき R-外的写像という．$A \subsetneqq B$ となる任意の有限集合 B と，$a, a' \in p(\mathcal{M})$ に対して，
$$\Big(a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A B \wedge a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A B \wedge f(a) = f(a')\Big) \text{ ならば } a \equiv_{R \cup B \cup \{f(a)\}} a'$$
2. $A \subsetneqq B$ となる有限集合 B が存在して，どんな $b, b' \in q(\mathcal{M})$ に対しても $b \not\equiv_R b'$ であるとき，q は R-内的であるという．

注 7 内的性に関するつぎの 3 つの定義は同値である．

1. 定義 6 の 2 番
2. q が acl に関して閉じている集合上のタイプの場合．集合 B と $a \in q(\mathcal{M})$ が存在して，$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|} B$ かつ $a \in \mathrm{dcl}(B, R)$
3. ある有限集合 B に対して，$q(\mathcal{M}) \subsetneqq \mathrm{dcl}(B, R)$

補題 8 A を有限集合とする．p を A 上のタイプ，R を A-定義可能集合とする．このとき，A 上のタイプ p^* と，定義可能写像 $f : p(\mathcal{M}) \longrightarrow p^*(\mathcal{M})$ が存在して，

1. p^* は R-内的
2. f は R-外的

である．

証明：考えている理論が ω-安定なので，$a \in p(\mathcal{M})$ とすると，A 上 R-内的タイプ p^* と $a^* \in p^*(\mathcal{M}) \cap \mathrm{dcl}(a)$ が存在して

$$q \text{ が } A \text{ 上 } R\text{-内的タイプで } b \in q(\mathcal{M}) \cap \mathrm{dcl}(a) \text{ ならば } b \in \mathrm{dcl}(a^*) \tag{1}$$

が成り立つ．$a^* \in \mathrm{dcl}(a)$ なので，$a^* = f(a)$ となる定義可能写像 $f : P \longrightarrow P^*$ を考える．この f が R-内的であることを示す．$p(\mathcal{M})$ 上の同値関係 E_0, E, E^* を次のように定義する．

E$_0$: $aE_0a' \longleftrightarrow f(a) = f(a')$

E: $aEa' \longleftrightarrow \Big(f(a) = f(a')$ かつ任意の $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \{a, a'\}$ に対して，
$\mathrm{tp}(a/B \cup R \cup \{f(a)\}) = \mathrm{tp}(a'/B \cup R \cup \{f(a)\})\Big)$

E*: $aE^*a' \longleftrightarrow \Big(f(a) = f(a')$ かつ $\mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}(f(a))) = \mathrm{tp}(a'/\mathrm{acl}(f(a)))\Big)$

今理論は ω-安定だから同値関係 E^* は定義可能であり，E_0 の各同値類を有限個に細分している．ここで $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a$ ならば $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A \cup \{f(a)\}} B \cup R$ である．（議論が必要）よって，$f(a) = f(a')$ かつ $\mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}(f(a))) = \mathrm{tp}(a'/\mathrm{acl}(f(a')))$ ならば，$\mathrm{tp}(a/B \cup R \cup \{f(a)\}) = \mathrm{tp}(a'/b \cup R \cup \{f(a)\})$ である．したがって aE^*a' ならば aEa' である．これで 3 つの同値関係の間に

$$E^* \subseteqq E \subseteqq E_0$$

という関係が成り立っていることが分かった．E は定義可能であり，E_0 の各同値類を有限個に細分している．f を同値関係 E で考えた写像を f_E と書く．つまり aEa' のとき $f_E(a) = f_E(a')$ である．$a \in p(\mathcal{M})$ に対して $\mathrm{tp}(f_E(a)/A)$ を p_E と書く．

主張：タイプ p_E は R-内的である．まず E は E_0 の細分になっているので，$f = gf_E$ となる写像 g が存在する．$a_E \in p_E$ をひとつとる．$b = g(a_E)$ とおく．有限集合 B で

- $p^* \subseteqq \mathrm{dcl}(B, R)$, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B$
- $g(c) = b$ かつ $c \neq a_E$ ならば $\mathrm{tp}(c/B \cup R \cup \{b\}) \neq \mathrm{tp}(a_E/B \cup R \cup \{b\})$

を満たすものが存在する．ここで c の可能性は有限個あり，各々の c に対して上の性質を持つ B が存在することに注意しよう．よって，

$$b \in p^*(\mathcal{M}) \subseteqq \mathrm{dcl}(B, R) \text{ かつ } g^{-1}(b) \subseteqq \mathrm{acl}(b)$$

である．ゆえに，

$$b_1 \neq b_2 \in g^{-1}(b) \longrightarrow \mathrm{tp}(b_1/B \cup R \cup \{b\}) \neq \mathrm{tp}(b_2/B \cup R \cup \{b\})$$

である．したがって $g^{-1}(b)\mathrm{dcl}(B, R)$ であるので $a_E \in \mathrm{dcl}(B, R)$ である．よってタイプ p_E は R-内的である．

したがって性質 (1) より．$f_E(a) \in \mathrm{dcl}(f(a))$ である．したがって g は 1-1 であり，実は $E = E_0$ であることが分かる．よって f は R-外的である．

証明終

系 9 X を豊富なザリスキー幾何ととし，K を X-多様体としての代数的閉体とする．このときつぎの性質をみたす K-内的被覆 P が存在する．

$$\begin{array}{ccl} X & \xrightarrow{\text{ここは } K\text{-外的写像}} & P \\ & & \Big| \quad P \text{ は } K\text{-内的被覆} \\ & & K \end{array}$$

定義 10 P を A 上のタイプとする．$a_1, \cdots, a_n \in P(\mathcal{M})$ とする．

$$\mathrm{tp}(a_1/\mathrm{acl}(A)) = \cdots = \mathrm{tp}(a_n/\mathrm{acl}(A)),\ \text{かつ } a_1, \cdots, a_n \text{ は } A \text{ 上独立}$$

であるとき $(a_1, \cdots, a_n)$ の A 上のタイプを $[P]^n$ と書く．

補題 11 $f : P \longrightarrow Q$ を R-外的写像する．f によって定まる $[P]^n$ から $[Q]^n$ への写像を $f^{[n]}$ と書く．このとき $f^{[n]}$ は R-外的写像である．

証明： $n = 2$ のときを示す．$a = (a_1, a_2) \in [P]^2$ とし $A \subseteqq B$ を考える．ただし $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ とする．$f^{[2]}(a) = c = (c_1, c_2) \in [Q]^2$ とおく．$\mathrm{tp}(a/B \cup R)$ が c だけに依存することを示せばよい．

さて，f は R-外的写像だから $\mathrm{tp}(a_2/B \cup R \cup \{c_2\})$ は c_2 だけに依存する．$B' = B \cup \{a_2\}$ とおく．$a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B'$ だから $\mathrm{tp}(a_1/B')$ は c_1 だけで決まる．よって $\mathrm{tp}(a/B \cup R)$ は c だけで決まる．

一般の n についても同様に証明できる． **証明終**

2.2 外的写像の性質

外的写像に関するつぎの定理は基本的である．

定理 12 P, P^*, E, C を A 上の完全タイプ，$f : P \longrightarrow P^*$ を R-外的写像とする．つぎの 4 つの仮定が成り立っているとする．

1. $E \subseteqq \mathrm{acl}(R)$
2. $C \subseteqq E \times P$
3. 各 $e \in E$ に対して $C(e)$ は強極小
4. 各 $e \in E$ に対して $[P]^2 \cap C(e)^2 \neq \emptyset$

このとき，f は各 $C(e)$ 上で定数関数であるか，または有限 - 1 である．また各 $e \in E$ に対して

$$C(e) = f^{-1} f C(e)$$

である．

証明： $e \in E$ を任意の点とし f は $C(e)$ で定数関数でないとする．$C(e) \subseteqq P$ だから $x, y \in C(e)$ に対して，

$$x \sim y \ \longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

によって同値関係を定義すると，$C(e)/\sim$ は 2 つ以上の同値類を持つ．仮定 3 より $C(e)$ は強極小だから $C(e)/\sim$ は高々 1 個の無限同値類しか持てない．

さて $C(e)$ は e 上の完全タイプに拡張されるから，もし $C(e)/\sim$ に無限同値類があると $C(e)$ のすべての元はこの無限同値類に入ってしまうことになる．これは f が $C(e)$ で定数関数でないという仮定に反する．よって $C(e)/\sim$ のすべての同値類は有限でなければならない，よって f は $C(e)$ 上で有限 - 1 である．したがって f による $C(e)$ の像 $fC(e)$ も $C(e)$ 同様に強極小である．

各 $C(e)$ が強極小であることから，つぎの性質をもつ自然数 N が C だけに依存して決まる．任意の $e \neq e'$ に対して，

$$|C(e) \cap C(e')| \leqq N \text{ または } \Big(|C(e) - C(e')| \leqq N \text{ かつ } |C(e') - C(e)| \leqq N\Big)$$

ここで実は $|C(e) \cap C(e') \leqq N$ の場合だけを考えても一般性を失わないことを示そう．

同値関係 $e \sim e'$ を $|C(e) - C(e')| \leqq N$ かつ $|C(e') - C(e)| \leqq N$ によって定義する．$E^* = E/\sim$, $e^* = e/\sim$ とおく．このときタイプ $C^* \subsetneqq E^* \times P$ が存在して，集合 $C(e)$ と $C(e')$ は有限個の点を除いて一致する．集合 $C(e)$ のすべての点は e 上同一のタイプを持つので，$C(e) \subsetneqq C^*(e^*)$ である．よって各 $e \in E$ に対して $[P]^2 \cap C^*(e^*) \neq \emptyset$ が成り立つ．f は $C(e)$ 上で有限 - 1 なので，f は $C^*(e^*)$ 上有限 - 1 である．したがって $C^*(e^*) = f^{-1}C(e^*)$ であることが証明できれば，ほとんどすべての $b \in C(e)$ に対して $f^{-1}(fb) \subsetneqq C(e)$ であることが分かる．なぜなら $C(e)$ のすべての点は e 上同一タイプを持つので，任意の $b \in C(e)$ に対して $f^{-1}(fb) \subsetneqq C(e)$ となって $C(e) = f^{-1}fC(e)$ となるからである．

したがって C を C^* で置き換えることによって，常に

$$e \neq e' \longrightarrow |C(e) \cap C(e')| \leqq N$$

が成り立っているとしてよい．

集合 E 上の同値関係 $e \equiv_R e'$ を $\mathrm{tp}(e/R) = \mathrm{tp}(e'/R)$ によって定義する．仮定より $E\mathrm{acl}(R)$ だったので $\equiv_R$ の各同値類は有限である．$e_R = (e/\equiv_R)$ とおく．$fC(e)$ は e_R によって決まる．さらに $E_R = \{e_R : e \in E\} \subsetneqq \mathrm{dcl}(R)$ である．

主張：$C(e)$ の一般点 a に対して，$e \in \mathrm{dcl}(e_R, a)$ である．これを示すために，$a \in C(x)$ かつ $x_R = e_R$ ならば $x = e$ であることを示そう．いま $e'_R = e_R$ かつ $a \in C(e')$ とし $e \neq e'$ だったとする．$C(e) \cap c(e')$ は有限集合だから $a \in \mathrm{acl}(e, e') = \mathrm{acl}(e_R)$ となって a が $C(e)$ の一般点であることに反する．

写像 f は R-外的写像だから $\mathrm{tp}(a/f(a)) \vdash \mathrm{tp}(a/f(a), e_R)$ である．$a \in C(e)$ ならば，$a \in \mathrm{acl}(e, f(a)) = \mathrm{acl}(e_R, f(a))$ だから，$a \in \mathrm{acl}(f(a))$ である．したがって，f は $C(e)$ 上で有限 - 1 であったが，f は p 全体で有限 - 1 である．

集合 $f^{-1}fC(e)$ のモーレー階数は 1 であり，$C(e')$ の形の曲線を有限個しか含まない．$b, b' \in C(e)$ とし $(b, b') \in [p]^2$ とする．$b'' \in f^{-1}f(b')$ を $b'' \notin C(e)$ となるようにとる．$\mathrm{acl}(b')$ $\mathrm{acl}(b'')$ だから $(b, b'') \in [p]^2$ である．よって補題 11 より，$\mathrm{tp}(b, b'/e_R) = \mathrm{tp}(b, b''/e_R)$ である．よって $\mathrm{tp}(b'/b, e_R) = \mathrm{tp}(b''/b, e_R)$ が得られ，$\mathrm{tp}(b/e) = \mathrm{tp}(b''/e)$ となる．したがって $b'' \in C(e)$ であることがわかった．b'' は $f^{-1}f(b)$ の任意の点だから

$$f^{-1}f(b') \subsetneqq C(e)$$

である．$C(e)$ のすべての点 x に対して $\mathrm{tp}(x/e) = \mathrm{tp}(b'/e)$ だから

$$f^{-1}fC(e) \subsetneqq C(e)$$

である．

証明終

2.3 曲線による 2 点の識別

p 上任意の 2 点を通る曲線族があって，さらに p の各点は曲線によって識別されているとする．各点を識別する曲線は p^* への射影によって決まるということを主張するのが定理 12 の内容である．よって曲線族は p^*-内的である．したがって曲線族が p の各点を識別していれば p は R-内的である．

この結果を非常に豊富なザリスキー幾何に応用する場合もうすこし議論が必要である．というのは非常に豊富なザリスキー幾何において，各点を識別する曲線族の添字集合は既約閉集合であるが，定理 12 では完全タイプだからである．

非常に豊富なザリスキー幾何の性質

$$\text{任意の } a,b \in X^2 \text{ に対して } e \in E \text{ が存在して } C(e) \text{ は } a,b \text{ の一方だけを通る} \tag{2}$$

に対して，E^* を E から決まる完全タイプとしたとき，

$$\text{異なる一般点 } a,b \in X^2 \text{ に対して } e \in E^* \text{ が存在して } C(e) \text{ は } a,b \text{ の一方だけを通る} \tag{3}$$

が成り立っていることを確認しなければならない．

補題 13 D をザリスキー幾何とする．$X \subseteqq D^m, Y \subseteqq D^n$ とし $C \subseteqq X \times Y$ を既約閉集合とする．いま C の D^m への射影が X のなかで稠密であり，D^n への射影が Y で稠密であると仮定する．F を Y の真部分閉集合とする．このとき一般点 $a \in X$ に対して，$C(a)$ のどのような既約成分も F に含まれてしまうことはない．

証明： $a \in X$ を一般点とし，

$$U = \bigcup C_i,\ C_i \text{ は } C(a) \text{ の既約成分で } C_i \nsubseteqq F$$

とおく．C_i は有限個しかないから U は閉集合である．また $\sigma \in \mathrm{Aut}(D/a)$ に対して $\sigma C_i = C_i$ である．よってザリスキー幾何の性質から，$U = C^*(a)$ となる既約閉集合 $C^* \subseteqq D^m \times D^n$ が存在する．C^* を $C^* \cap C$ で置き換えて，一般点 a に対して，$C(a) \subseteqq C^*(a) \cup F$ だとする．よって

$$C \subseteqq C^* \cup (X \times F) \cup (F' \times Y)$$

となる閉集合 $F \subset X$ が存在する．C は既約だから，$C \subseteqq C^*, C \subseteqq X \times F$ または $C \subseteqq F' \times Y$ のどれか 1 つが成り立っている．仮定から C の X への射影と Y への射影はそれぞれ稠密な集合になっているから，$C \subseteqq C^*$ だけが成り立っていることが分かる．よって

$$C(a) = C^*(a) = U$$

である．よって $C(a)$ のどの既約成分も F に含まれてしまうことはない． **証明終**

補題 14 E を 0-定義可能な既約閉集合とし E^* を E によって決まる完全タイプとする．$C \subseteqq E \times Y$ を既約閉集合とする．このとき，異なる一般点 $a,b \in Y$ に対して $C(a) \neq C(b)$ とすると，$C(a) \cap E^* \neq C(b) \cap E^*$ である．

証明： 対偶を示す．$C(a) \cap E^* = C(b) \cap E^*$ となる一般点 $a, b \in Y$ があったとする．E の部分集合になっている 0-閉集合 F で $C(a) - F = C(b) - F$ となっているものが存在する．よって $C(a) \subsetneqq C(b) \cup F$ である．補題 13 より $C(a)$ の既約成分は F の部分集合になっていないから，$C(a)$ のすべての既約成分は $C(b)$ に含まれている．よって $C(a) \subsetneqq C(b)$ である．同様に $C(b) \subsetneqq C(a)$ も分かるから，$C(a) = C(b)$ である． **証明終**

補題 15 Y は既約閉集合で $\dim(Y) = 2$ とし $C \subsetneqq E \times Y$ はつぎの性質を持つ．

1. 各一般点 $e \in E$ に対して $C(e)$ は既約閉集合で $\dim C(e) = 1$
2. 異なる一般点 e, e' に対して $C(e) \neq C(e')$
3. 一般点 $(y_1, y_2) \in Y$ に対して $e \in E$ が存在して $y_1, y_2 \in C(e)$

このとき一般点 (y_1, y_2) に対して $e \in E^*$ が存在して $y_1, y_2 \in C(e)$ である．

証明： 仮定からまず $\dim(E) \geqq 2$ が分かる．なぜなら，もし $\dim(E) = 1$ とすると，$y_1, y_2 \in C(e)$ に対して $e \in \mathrm{acl}(y_1)$ だから

$$\mathrm{RM}(y_2) = \mathrm{RM}(y_2/y_1) \leqq \mathrm{RM}(y_2/e) \leqq 1$$

となって矛盾する．よって $\mathrm{RM}(E^*) \geqq 2$ である．矛盾を導くために，一般点 $(y_1, y_2) \in Y$ に対して，$y_1, y_2 \in C(e)$ となる $e \in E^*$ がなかったとする．そうすると $e \in E^*$ と一般点 $y_1 \in C(e)$ に対して，すべての $y_2 \in C(e)$ は

$$y_2 \in C_0(y_2) \subsetneqq Y$$

を満たす．ただし C_0 は 0-定義可能閉集合であうる．$\dim C_0(y_2) = 1$ だから $C(e')$ の形の異なる集合を有限個しか含まない．つまり $e \in \mathrm{acl}(y_2)$ ということになる．よって $\mathrm{RM}(e) + \mathrm{RM}(y/e) = \mathrm{RM}(y)$ となり $\mathrm{RM}(e) \leqq 1$ となって矛盾する． **証明終**

3　講義 3：定理 A

3.1　豊富なザリスキー幾何，非常に豊富なザリスキー幾何

豊富なザリスキー幾何には代数的閉体が入るが，さらに射影直線とも関係が深い．

定理 16　D を豊富なザリスキー幾何とする．このとき代数的閉体 K と D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上へのザリスキー写像 f が存在する．

3.2　正規化による特異点除去

代数曲線の特異点除去としては,「ブロー・アップ」が知られているが,「正規化」も有用である（ただし正規化によって特異点が除去されるのは多様体の次元が 1 すなわち曲線の場合だけである）.

3.3　滑らかな曲線としてのザリスキー幾何

定理 17　X を非常に豊富なザリスキー幾何とする．このとき代数的閉体 K と K 上の滑らかな代数曲線 D が存在して X と D はザリスキー幾何として同型である．

証明：第一段階：X が K-内的であること．ザリスキー幾何が非常に豊富であるということを用いて，X が K-内的であることを示す．系 9 より，まずつぎの図式が成り立つことを確認する．これは豊富なザリスキー幾何で成り立っている．豊富なザリスキー幾何の性質を用いて，X が K-内的であることを示す．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{X} & \xrightarrow{\text{ここは } K\text{-外的写像}} & \mathrm{P} \\
 & & \Big| \quad P \text{ は } K\text{-内的被覆} \\
 & & \mathrm{K}
\end{array}
$$

X が非常に豊富なザリスキー幾何であるので，X-多様体としての代数的閉体 K が存在する．また $C \subset E \times X^2$ となる C, E が存在する．E は既約閉集合で，C はつぎの 2 つの性質を持っている．

(i)　一般点 $a, b \in X^2$ に対して $e \in E$ が存在して，曲線 $C(e)$ は a, b を通る．

(ii)　任意の a, b に対して $e \in E$ が存在して，曲線 $C(e)$ は a, b の一方のみ通る．

講義 2 の結果から，既約閉集合 E に付随するタイプ E^* に対して，(ii) を

(ii')　異なる一般点 $a, b \in X^2$ に対して $e \in E^*$ が存在して，曲線 $C(e)$ は a, b の一方のみ通る．

の形にすることが出来る．また，ザリスキー幾何の仮想元消去を用いて次の

(iii)　$e \neq e' \in E$ ならば $C(e) \neq C(e')$

が成り立っていると仮定する．さて $f : X \longrightarrow P$ が K-外的だから，補題 11 より $f^{[2]} : X^{[2]} \longrightarrow P^{[2]}$ も K-外的である．C^* を C に付随するタイプとすると，

$$C^* \subset E^* \times [X]^2$$

である．さらに，$e \in E^*$ とすると $C(e)$ は $C^*(e)$ の閉包になっている．定理 12 より，

$$e \in E^* \text{ ならば } C^*(e) = f^{-1}fC^*(e)$$

なので，$e \neq e' \in E^*$ とすると，(iii) より

$$C(e) \neq C(e') \text{ よって } C^*(e) \neq C^*(e') \text{ したがって } fC^*(e) \neq fC^*(e')$$

これは e と e' が P 上共役でないことを意味する．なぜなら，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/P)$ とすると $fC^*(e) \subseteqq P$ だから

$$fC^*(e') = fC^*(\sigma e) = \sigma fC^*(e) = fC^*(e)$$

となるからである．したがって $E^* \subseteqq \mathrm{dcl}(P)$ となる．P は K-内的だから E^* も P-内的である．

$a \neq b \in X^2$ とする．性質 (ii') より，$a \in C(e)$ かつ $b \notin C(e)$ となる E^* が存在する．$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/P)$ に対して $\sigma e = e$ だから $\sigma a \neq b$ である．したがって任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/P)$ は X^2 の各点を動かさない．よって $X \subseteqq \mathrm{dcl}(P)$ となり，X が K-内的であることが分かる．

第二段階：X は K-内的だから，X の一般点 a に対して $b \in K^n$ となる b が存在する．ここで n は a によって決まる正整数である．よってザリスキー幾何 X の意味で 0-定義可能な関数 h が存在して $a = h(b)$ となる．K^n 上の同値関係 E を，

$$b\,E\,b' \;\longleftrightarrow\; h(b) = h(b')$$

によって定義する．h の性質から，E はザリスキー幾何 X の意味で構成的である．$T_a = T_b$ より K の意味，つまり代数幾何の意味でも構成的である．$b' = b/E \in K^{\mathrm{eq}}$ とおくと，$\mathrm{dcl}(a) = \mathrm{dcl}(b')$．$K$ に対する仮想元消去より，K-多様体，すなわち代数多様体 V と $b'' \in V$ が存在して，$\mathrm{dcl}(b') = \mathrm{dcl}(b'')$ である．ここで $\mathrm{rk}(b'') = \mathrm{rk}(a)$ に注意しよう．V における点 b'' の，$\mathrm{acl}(\emptyset)$ 上の軌跡，つまり b'' を含む既約閉集合を考えて $\dim(V) = 1$ とする．つまり b'' を通る既約な曲線として V を考えている．V は特異点を持っているかもしれないので，正規化して V は特異点の無い完備な曲線だとする．

点 $(a, b'') \in X \times V$ の $\mathrm{acl}(\emptyset)$ 上の軌跡を H とする．H は $X \times V$ の既約閉集合で，$\dim(H) = 1$ である．一般点 $x \in X$ に対して，$(x, v) \in H$ となる $v \in V$ がちょうど一個存在する．また，一般点 $v \in V$ に対して，$(x, v) \in H$ となる $x \in X$ がちょうど一個存在する．

一方，任意の $x \in X$ に対しては，$(x, v) \in H$ となる $v \in V$ は高々一個しか存在しない．また，任意の $v \in V$ に対して，$(x, v) \in H$ となる $x \in X$ も高々一個しか存在しない．多様体 V は $\mathbb{P}^3(K)$ に埋め込めるので，

$$H \subseteqq X \times V \subseteqq X \times \mathbb{P}^3(K)$$

である．ザリスキー幾何 X の弱完備性により H は X の上へ射影される．H の V への射影 $\pi_V(H)$ を D とおく．D は V の補−有限な部分集合になる．したがって H は X から D への射 (morphism) であり，写像としては全単射になっているもののグラフである．

証明終

4　今後への展望

今後どのような方向に進むことが可能かを考えてみる．

1. 高次元のザリスキー幾何

2. 解析的ザリスキー幾何

参考文献

[Hr96] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for the function fields*, J of the A.M.S., Vol. 9, No. 3, pp. 667-690, 1996

[HZ96] E. Hrushovski, B. Zil'ber, *Zariski Geometries*, J of the A.M.S., Vol.9, No.1, pp. 1-56, 1996

[It02] 板井　昌典,『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002

[It03] 板井　昌典, ザリスキータイプの幾何：豊富な幾何上での代数的閉体の構成, 京都大学数理解析研究所　**講究録 1344**, 1-6, 2003 年 10 月

[It04] 板井　昌典, ザリスキータイプの幾何 (2)：Bézout の定理, Chow の定理, そして主定理, 京都大学数理解析研究所　**講究録 1390**, 23-29, 2004 年 7 月

[Z04] B. Zil'ber, *Notes on Zariski Geometries*, Oxford 大学における講義のためのノート