第4章　コホモロジー環

15　双対加群

以下加群 R を固定する。あとで R として $\boldsymbol{Z}$ や $\boldsymbol{Z}_2$ をとるが, 代数的トポロジーでは, 有理数全体からなる群 $\boldsymbol{Q}$, 実数全体からなる群 $\boldsymbol{R}$ や位数 m の巡回群 $\boldsymbol{Z}_m$ をとることも多い。

加群 A に対して, その双対を

$$\mathrm{Hom}(A, R) = \{\ h\ ;\ h \text{ は } A \text{ から } R \text{ への準同型写像 } \}$$

と定義する。$\mathrm{Hom}(A, R)$ の任意の元 h_1, h_2 に対して, それらの和 $h_1 + h_2$ を

$$(h_1 + h_2)(a) = h_1(a) + h_2(a) \qquad (a \in A)$$

と定めることにより, $\mathrm{Hom}(A, R)$ は加群となる。零元は零写像で, $h \in \mathrm{hom}(A, R)$ の逆元は, $a \in A$ を $-h(a) \in R$ に移す準同型写像である。

例 15.1

(**1**) $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, R) \cong R$

(**2**) $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}_m, R) \cong \ker(R \xrightarrow{m\times} R)$ ここで $m\times$ は m 倍する写像。特に $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}_m, \boldsymbol{Z}) = 0$

実際, $\boldsymbol{Z}$ は 1 で生成される加群であるから, $\boldsymbol{Z}$ から R への準同型写像は 1 の行き先で決まってしまう。したがって $h \in \mathrm{Hom}(A, R)$ に対して $h(1) \in R$ を対応させせることにより (1) の同型を得る。

(2) の同型も同様である。ただし $\boldsymbol{Z}_m$ の生成元である 1 の剰余類 [1] は m 倍すると 0 であるから, $\boldsymbol{Z}_m$ から R への準同型写像による [1] の行き先である R の元も m 倍すると 0, つまり $\ker(R \xrightarrow{m\times} R)$ の元でなければばならない。

補題 15.2　加群 A, B に対して

$$\mathrm{Hom}(A \oplus B, R) \cong \mathrm{Hom}(A, R) \oplus \mathrm{Hom}(B, R)$$

証明　準同型写像 $f : A \oplus B \to R$ に対して, A への制限 $f|_A$ と B への制限 $f|_B$ の組を対応させせることにより補題の同型画得られる。□

有限生成加群 G の階数を $\mathrm{rk}\, G$, ねじれ群を $T(G)$ と表すと, 有限生成加群の構造定理より

$$G \ \cong\ \boldsymbol{Z}^{\mathrm{rk}\, G} \oplus T(G)$$

ここで, $T(G)$ は有限巡回群 $\boldsymbol{Z}_m$ たちの直和と同型である。したがって, 例 15.1 と補題 15.2 を合わせれば $\mathrm{Hom}(G, R)$ の計算が可能である。例えば

系 15.3　有限生成加群 G に対して $\mathrm{Hom}(G, \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}^{\mathrm{rk}\, G}$ である。

加群 A, B の間準同型写像 $f : A \to B$ に対し, 写像

$$f^\vee : \mathrm{Hom}(B, R) \to \mathrm{Hom}(A, R)$$

を $f^\vee(k) = k \cdot f$ と定める。$f^\vee$ を f の **双対写像** (***dual map***) という。次の補題は容易にチェックできるので読者にまかせる。

補題 15.4

(**1**) $f^\vee$ は準同型写像

(**2**) f が零写像なら $f^\vee$ も零写像

(**3**) f が恒等写像なら $f^\vee$ も恒等写像

(**4**) $g : B \to C$ を準同型写像とすると $(g \cdot f)^\vee = f^\vee \cdot g^\vee$

問題 15.5

補題 15.4 を示せ。

補題 15.6

準同型写像 $f : A \to B$ が全射ならば, $f^\vee : \mathrm{Hom}(B, R) \to \mathrm{Hom}(A, R)$ は単射である。

証明　$f^\vee(k) = 0$ とする。定義より $f^\vee(k) = k \cdot f$ であるから, $k \cdot f : A \to R$ は零写像である。したがって A のすべての元 a に対して $k(f(a)) = 0$ であるが, $f : A \to B$ は全射であるから, B のすべての元 b に対しても $k(b) = 0$ となる。つまり $k = 0$ となり $f^\vee$ の単射性が導かれる。□

上の補題に反して, f が単射の場合 $f^\vee$ が全射になるとは限らない。これは $f^\vee$ を以下のように解釈すれば驚くことではない。$\mathrm{Hom}(A, R)$ の元 h が $f^\vee : \mathrm{Hom}(B, R) \to \mathrm{Hom}(A, R)$ の像に入っているということは, 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, dashed] \\ & R \end{tikzcd}$$

を可換にするような点線の準同型写像が存在することである。f は単射としているから, 点線の写像は h の B への拡張と思える。そう思うと $f^\vee$ が全射というのは, 一般には期待できない気がする。実際 $f^\vee$ が全射でない例を作ることは容易である。

例 15.7

(**1**) $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ を m 倍写像 $(m \geq 2)$ とすると, f は単射であるが, $f^\vee : \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}) \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z})$ は全射ではない。

(**2**) $f : \boldsymbol{Z}_2 \to \boldsymbol{Z}_4$ を $f([a]) = [2a]$ と定めると, f は単射であるが, $f^\vee : \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}_4, \boldsymbol{Z}_2) \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)$ は全射ではない。

しかし, f が単射で $f^\vee$ が全射になることもある。$f^\vee$ が全射になることを保証する十分条件を与えよう。単射準同型写像 $f : A \to B$ が, $s \cdot f = 1_A$ (1_A は A の恒等写像) をみたす準同型写像 $s : B \to A$ をもつとき, f (正確には $0 \to A \xrightarrow{f} B$) は分解すると定めた (補題 4.12 参照), このとき s を **分解準同型写像** (***splitting homomorphism***) という。単射準同型写像 $f : A \to B$ がいつも分解するわけではない。例えば, 例 15.7 の (1) の写像 f は分解しない。

補題 15.8
単射準同型写像 $f : A \to B$ が分解すれば $f^\vee : \mathrm{Hom}(B,R) \to \mathrm{Hom}(A,R)$ は全射である。

証明　　分解準同型写像を $s : B \to A$ とすると, $s \cdot f = 1_A$ だから補題 15.4 の (3), (4) より $f^\vee \cdot s^\vee : \mathrm{Hom}(A,R) \to \mathrm{Hom}(B,R) \to \mathrm{Hom}(A,R)$ は恒等写像である。したがって $f^\vee$ は全射である。□

以上の考察を基にして, 以下の完全列の双対を考える。

補題 15.9　列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

が完全列ならば, 双対加群の列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,R) \xrightarrow{g^\vee} \mathrm{Hom}(B,R) \xrightarrow{f^\vee} \mathrm{Hom}(A,R)$$

も完全である。

証明　　g は全射なので, 補題 15.6 より $g^\vee$ は単射である。したがって, $\mathrm{Hom}(B,R)$ における完全性, $\ker f^\vee = \mathrm{im}\, g^\vee$ を示せばよい。

任意の $v \in \mathrm{Hom}(C,R)$ と任意の $a \in A$ に対して

$$(f^\vee g^\vee(v))(a) = v(g(f(a))) = 0$$

なので $\mathrm{im}\, g^\vee \subset \ker f^\vee$ が成り立つ。逆に, $k \in \ker f^\vee$ は $f^\vee(v) = 0$ より, 任意の $a \in A$ に対し, $k(f(a)) = (f^\vee(k))(a) = 0$ をみたす。このとき ℓ を $c \in C$ に対して $g(b) = c$ をみたす $b \in B$ を選び

$$\ell(c) = k(b)$$

により定めると, 次のように b の取り方の差は f の像に含まれるので, (b のとり方によらずに ℓ は well-defined で)

($b' \in B$ を $g(b') = c$ にとれば, $g(b'-b) = g(b') - g(b) = c - c = 0$ だから, $b' - b \in \ker g = \mathrm{im}\, f$ より, $f(a) = b' - b$ をみたす $a \in A$ が取れる。すると, $k(b') - k(b) = k(b'-b) = k(f(a)) = 0$ なので, $k(b') = k(b)$ となる。

$\mathrm{Hom}(C,R)$ の元として定まり, さらに $g^\vee(\ell)(b) = \ell(g(b)) = \ell(c) = k(b)$ なので, $g^\vee(\ell) = k$ をみたす。したがって $\mathrm{im}\, g^\vee \supset \ker f^\vee$ である。□

補題 15.8 と 補題 15.9 より次の系は成り立つ。

系 15.10
短完全列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

が分解しているならば, 双対加群の列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,R) \xrightarrow{g^\vee} \mathrm{Hom}(B,R) \xrightarrow{f^\vee} \mathrm{Hom}(A,R) \longrightarrow 0$$

も完全である。

加群 A に対して, 完全列

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0 \tag{15.1}$$

であって, F_0, F_1 が自由加群であるものを 加群 A の **自由分解** (***free resolution***) という。任意の自由加群 F を (15.1) の F_0, F_1 に直和して完全列

$$0 \longrightarrow F_1 \oplus F \xrightarrow{d \oplus 1_F} F_0 \oplus F \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}} A \longrightarrow 0$$

が得られる。ただし 1_F は F の恒等写像で $\widetilde{\varepsilon}(f_0, e) = \varepsilon(f_0)$ $(f_0 \in F_0, e \in F)$ である。したがって A の自由分解は唯１通りではない。

例 15.11

(**1**) m を自然数としたとき, $0 \to \boldsymbol{Z} \xrightarrow{m\times} \boldsymbol{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{Z}_m \to 0$ は $\boldsymbol{Z}_m$ の自由分解である。ただし $\varepsilon(n) = [n]$

(**2**) $0 \to 0 \to \boldsymbol{Z} \xrightarrow{1_{\boldsymbol{Z}}} \boldsymbol{Z} \to 0$ は $\boldsymbol{Z}$ の自由分解である。

加群 A と A' の自由分解の直和は $A \oplus A'$ の自由分解である。したがって 例 15.11 より, 任意の有限生成加群に対して自由分解が存在する。しかし有限生成でなくても, 任意の加群に対して次のように自由分解を構成することができる。加群 A のすべての元から生成される自由加群を $F(A)$ とすれば, 自然な全射準同型写像 $\varepsilon : F(A) \to A$ は存在する。また, $\ker \varepsilon$ を $E(A)$ と書くと, $E(A)$ は自由加群の部分加群であるから自由加群である[5]。したがって, $0 \to E(A) \to F(A) \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ は A の自由分解である。これを加群 A の **標準分解** (***canonical free resolution***) という。

補題 15.9 より, A の自由分解 (15.1) から完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, R) \xrightarrow{\varepsilon^\vee} \mathrm{Hom}(F_0, R) \xrightarrow{d^\vee} \mathrm{Hom}(F_1, R) \tag{15.2}$$

が得られる。これまでみてきたように, 写像 d が分解するならば $d^\vee$ は全射であるが (補題 15.8), 一般に $d^\vee$ は全射とは限らない。そこで, $d^\vee$ がどれほど全射でないかを測る量である商群

$$\mathrm{Ext}\,(A, R) = \mathrm{Hom}(F_1, R) \,/\, \mathrm{im}\, d^\vee$$

を考える。この定義は, A の自由分解のとり方に見かけ上依存しているが, 実は自由分解のとり方によらず, A と R のみによる[6]。$\mathrm{im}\, d^\vee$ の元は, F_1 から R への準同型写像で $F_0 (\subset F_1)$ からの準同型写像に拡張するものであった。したがって, 群 $\mathrm{Ext}\,(A, R)$ は, F_1 から R への準同型写像で, F_0 からの準同型写像に拡張 (extension) しないものがどれほどあるかを表す群と思ってもよい。$\mathrm{Ext}\,(A, R)$ の定義から明らかに, 列 (15.2) が右に延びて完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, R) \xrightarrow{\varepsilon^\vee} \mathrm{Hom}(F_0, R) \xrightarrow{d^\vee} \mathrm{Hom}(F_1, R) \longrightarrow \mathrm{Ext}\,(A, R) \longrightarrow 0 \tag{15.3}$$

を得る。

[5]例えば, 彌永昌吉, 有馬哲, 浅枝陽著「詳解代数入門」(東京図書) の定理 4.2.8 参照

[6]例えば, 河内明夫著「線型代数からホモロジーへ」(培風館) の 3.5 節をみよ。

補題 15.12 $\mathrm{Ext}\,(A, R)$ は次の性質をもつ。

(**1**) $\mathrm{Ext}\,(A \oplus A', R) \cong \mathrm{Ext}\,(A, R) \oplus \mathrm{Ext}\,(A', R)$ である。

(**2**) $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}, R) = 0$ である。

(**3**) $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}_m, R) \cong R \,/\, mR$ である。ここで $mR = \{mr\,;\,r \in R\}$ で, 特に $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}_m, \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}_m$, $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}_m, \boldsymbol{Z}_\ell) \cong \boldsymbol{Z}_d$ である。ここで d は m と ℓ の最大公約数である。

証明　(1) の証明は読者への問題とする。

(2)　$\boldsymbol{Z}$ の自由分解として 例 15.11 の (2) をとると, $F_1 = 0$ であるから $\mathrm{Hom}(F_1, R) = 0$ である。したがって $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}, R) = 0$ となる。

(3)　$\boldsymbol{Z}_m$ の自由分解として 例 15.11 の (1) をとると, $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}_m, R) = \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, R) \,/\, \mathrm{im}\, d^\vee$ である。ここで $d^\vee : \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, R) \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, R)$ は m 倍写像 $m\times : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ の双対写像で, 例 15.1 でみたように, $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, R)$ の元に対して $\boldsymbol{Z}$ の 1 の行き先を対応させることにより $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, R) \cong R$ であるが, この同型を通して $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, R)$ と R を同一視すると, $d^\vee : R \to R$ は m 倍写像に他ならない。したがって $\mathrm{im}\, d^\vee = mR$ となり $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}_m, R) \cong R \,/\, mR$ を得る。最後の同型 $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}_m, \boldsymbol{Z}_\ell) \cong \boldsymbol{Z}_d$ は, 今示した事実と第 2 章の章末問題 4.14 より示される。

問題 15.13
補題 15.12 の (1) を示せ。

上の補題より直ちに次を得る。

系 15.14
有限生成加群 G のねじれ群を $T(G)$ とすると, $\mathrm{Ext}\,(G, \boldsymbol{Z}) \cong T(G)$ である。

加群の準同型 $f : A \to B$ は, 標準自由分解の間の写像

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E(A) & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \longrightarrow & E(B) & \longrightarrow & F(B) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

を導くから, 双対をとって可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(A, R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F(A), R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(E(A), R) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}\,(A, R) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Hom}(B, R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F(B), R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(E(B), R) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}\,(B, R)
\end{array}$$

を得る。この図式における $\mathrm{Ext}\,(B, R)$ から $\mathrm{Ext}\,(A, R)$ への準同型写像を $\mathrm{Ext}\,(f)$ と書く。$g : B \to C$ をさらなる加群の準同型写像とすると,

$$\mathrm{Ext}\,(g \cdot f) = \mathrm{Ext}\,(f) \cdot \mathrm{Ext}\,(g)$$

であることは明らかであろう。

16 コチェイン群

ホモロジーの双対であるコホモロジーを定義し, ホモロジー群との関連を考察する。以後, 前節と同じく R を加群として固定しておく。

定義 16.1 (コチェイン複体)
次のような加群と準同型写像の列

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \longrightarrow 0$$

は, $0 \leq q \leq n$ に対し

$$\delta^q \delta^{q-1} = 0$$

をみたすとき **コチェイン複体** (*cochain complex*) という。C^q を q **次コチェイン群** (*cochain group*) あるいは q-**コチェイン群**, その元を q **次コチェイン** (*cochain*) あるいは q-**コチェイン** という。また δ^q を **コバウンダリー作用素** (*coboundary operator*) という。

チェイン複体の場合と同様に, δ^q を単に δ と書く。コチェイン複体は $(\mathbb{C}, \delta)$ とか $\mathbb{C} = \{C^q, \delta^q\}$ と記すこともある。

コチェイン複体

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \longrightarrow 0$$

において,

$$Z^q = \mathrm{Ker}\ \delta^q, \qquad B^q = \mathrm{Im}\ \delta^{q-1}$$

とおき, Z^q の元を q **次コサイクル** (*cocycle*) あるいは q-**コサイクル**, B^q の元を
q **次コバウンダリーサイクル** (*coboundary cycle*) あるいは q-**コバウンダリーサイクル** という。
$\delta^q \delta^{q-1} = 0$ であったから

$$B^q \subset Z^q$$

である。

定義 16.2 (コチェイン複体のコホモロジー群)
剰余加群 Z^q/B^q を, コチェイン複体 $\mathbb{C}$ の (q **次**) **コホモロジー群** (*cohomology group*) といい, $H^q(\mathbb{C})$ で表す。剰余類はとくに **コホモロジー類** (*cohomology class*) とよび, コサイクル $u \in Z^q$ が属するコホモロジー類を $[u]$ で表す。

例 16.3
$\mathbb{C}$ をチェイン複体とする。このとき

$$C^q = \mathrm{Hom}(C_q, R)$$

とおき, $\delta^q : C^q \to C^{q+1}$ を, $\delta = \partial^\vee$ と定め, すなわち, 任意の $u \in C^q$ と任意の $c \in C_{q+1}$ に対して

$$\delta(u) = \partial^\vee(u) = u \cdot \partial$$

と定義する。$c \in C_{q+2}$ と $u \in C^q$ を任意にとると, $(\delta^2(u))(c) = (\delta(u))(\partial c) = u(\partial^2(c)) = 0$ なので, $\delta^2 = 0$ である。したがって $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R) = \{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R), \delta\}$ はコチェイン複体になる。このようにチェイン複体 $\mathbb{C}$ の双対として得られる $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R)$ は自然にコチェイン複体になる。$\{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R), \delta)\}$ を $\mathbb{C}$ の **双対コチェイン複体** (***dual cochain complex***) という。そしてこのコチェイン複体のコホモロジー群 $H^q(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R))$ を $H^q(\mathbb{C}; R)$ と表す。

以下の３つの補題は簡単な演習問題として残し, 証明は省略する。双対が定めるコホモロジーにおいては, 誘導する写像の向きがホモロジーの場合の反対になることに注意しよう。

補題 16.4
$\varphi = \{\varphi_q\} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ をチェイン準同型写像とするとき, 各 φ_q の双対写像 $\varphi_q^\vee : \mathrm{Hom}(\mathbb{C}', R) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R)$ は $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}', R)$ から $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R)$ へのコチェイン準同型写像である。すなわち

$$\delta^q \varphi^q = \varphi^{q+1} \delta'^q$$

をみたす。チェイン写像がホモロジー群の間の準同型写像を導くのと同様に, コチェイン写像 $\varphi^\vee$ は, コホモロジー群の間の準同型写像

$$\varphi^* : H^q(\mathbb{C}'; R) \to H^q(\mathbb{C}; R)$$

を誘導する.

注 16.5
$\varphi_q^\vee : \mathrm{Hom}(C'_q, R) \to \mathrm{Hom}(C_q, R)$ は, 次のように定められる。$u \in \mathrm{Hom}(C'_q, R)$ に対して, $\varphi_q^\vee(u) \in \mathrm{Hom}(C_q, R)$ を $c \in C_q$ に対して, $\varphi_q(c)$ は C'_q の元であるから, $u(\varphi_q(c)) \in R$ がきまるので, $(\varphi_q^\vee(u))(c)$ を $u(\varphi_q(c))$ と定めることにより $\varphi_q^\vee(u)$ が定められる。

問題 16.6
補題 16.4 を示せ。

補題 16.7 (反変函手性)
$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$, $\varphi' : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}''$ をチェイン準同型写像とする。このとき
 (**1**) $(\varphi'\varphi)^* = \varphi^*\varphi'^* : H^q(\mathbb{C}''; R) \to H^q(\mathbb{C}; R)$
 (**2**) $id^* = id : H^q(\mathbb{C}; R) \to H^q(\mathbb{C}; R)$

問題 16.8
補題 16.7 を示せ。

補題 16.9
$\varphi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ がチェイン準同型写像で $\mathscr{D} = \{D_q\}$ がそれらを結ぶチェインホモトピーとするとき, D_q (正確には D_{q-1}) の双対写像 $D_q^\vee : \mathrm{Hom}(C'_q, R) \to \mathrm{Hom}(C_{q-1}, R)$ の組 $\{D_q^\vee\}$ は, $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}', R)$ から $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, R)$ への コチェインホモトピーである。すなわち

$$\delta^{q-1} D_q^\vee + D_{q+1}^\vee \delta'^q = \varphi^q - \psi^q$$

が成り立つ。

問題 16.10
補題 16.9 を示せ。

チェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{B} \xrightarrow{\psi} \mathscr{C} \longrightarrow 0 \tag{16.1}$$

からホモロジー群の完全列が得られたが, コホモロジー群の場合には条件が必要である。上の完全列が分解するとき (つまり 各 q 次の加群の完全列が分解するとき), 系 15.10 よりコチェイン複体の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{C}, R) \xrightarrow{\psi^\vee} \mathrm{Hom}(\mathscr{B}, R) \xrightarrow{\varphi^\vee} \mathrm{Hom}(\mathscr{A}, R) \longrightarrow 0$$

を得る。例えば $\mathscr{C}$ の各 q 次の加群が自由加群の場合がこのケースである (補題 4.13)。このとき, ホモロジー群の場合と同様の議論で次を得る。

定理 16.11
チェイン複体の短完全列 (16.1) が分解するならば, 列

$$\longrightarrow H^{q-1}(\mathscr{A}; R) \xrightarrow{\delta^*} H^q(\mathscr{C}; R) \xrightarrow{\psi^*} H^q(\mathscr{B}; R) \xrightarrow{\varphi^*} H^q(\mathscr{A}; R) \longrightarrow$$

は完全である。

ここで, コホモロジー完全列における連結準同型写像 $\delta^* : H^{q-1}(\mathscr{A}; R) \to H^q(\mathscr{C}; R)$ の定義を確認しておく。チェイン複体 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ の q 次の加群をそれぞれ A_q, B_q, C_q とすると, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(C_{q-1}, R) & \xrightarrow{\psi^\vee_{q-1}} & \mathrm{Hom}(B_{q-1}, R)\ \boxed{b} & \xrightarrow{\varphi^\vee_{q-1}} & \mathrm{Hom}(A_{q-1}, R)\ \boxed{a} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(C_q, R) & \xrightarrow{\psi^\vee_q} & \mathrm{Hom}(B_q, R) & \xrightarrow{\varphi^\vee_q} & \mathrm{Hom}(A_q, R) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \boxed{\mathrm{c}} & & \boxed{\delta(b)} & & \boxed{\delta(a) = 0} & &
\end{array}$$

を得る。ここで横の 2 列は完全である。$H^{q-1}(\mathscr{A}; R)$ の元は $\mathrm{Hom}(A_{q-1}, R)$ の元 a で $\delta(a) = 0$ となるもののコホモロジー類 $[a]$ であるが a に対し上の可換図式を追って得られる $\mathrm{Hom}(C_q, R)$ の元 c が表すコホモロジー類 $[c]$ を対応させる写像が δ^* である。
詳しく述べると,
$a \in \mathrm{Hom}(A_{q-1}, R)$ に対して, $\varphi^\vee_{q-1}$ は全射なので, $\varphi^\vee_{q-1}(b) = a$ をみたす 元 $b \in \mathrm{Hom}(B_{q-1}, R)$ が存在する。ここで $\delta(b)$ を考えると, $\varphi^\vee_q(\delta(b)) = \delta(\varphi^\vee_{q-1}(b)) = \delta(a) = 0$ なので, $\delta(b) \in \ker \varphi^\vee_q = \mathrm{Im}\, \psi^\vee_q$ より, $\psi^\vee_q(c) = \delta(b)$ をみたす元 $c \in \mathrm{Hom}(C_q, R)$ が存在する。ここで $\psi^\vee_{q+1}(\delta(c)) = \delta(\psi^\vee_q(c)) = \delta\delta(b) = 0$ で, $\psi^\vee_{q+1}$ は単射より $\delta(c) = 0$ すなわち c は コサイクルである。

以下 R 係数コホモロジー群 $H^q(\mathscr{C} : R)$ と ホモロジー群 $H_q(\mathscr{C})$ の関係を調べる。$\mathrm{Hom}(C_q, R)$ と C_q の対に対して自然な写像

$$\langle\ ,\ \rangle\ :\ \mathrm{Hom}(C_q, R) \times C_q \to R$$

が $\mathrm{Hom}(C_q, R)$ の元 u と C_q の元 c に対し $u(c) \in R$ を対応させることにより決まる。この写像は双線型写像である。すなわち, $u(c)$ を内積のように $\langle u, c\rangle$ と表すと

$$\langle u_1 + u_2, c\rangle = \langle u_1, c\rangle + \langle u_2, c\rangle \qquad \langle u, c_1 + c_2\rangle = \langle u, c_1\rangle + \langle u, c_2\rangle$$

が成立する。また $\delta = \partial^\vee$ より

$$\langle \delta(u), c\rangle = \langle u, \partial(c)\rangle$$

である。したがって双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle\ H^q(\mathscr{C}; R) \times H_q(\mathscr{C}) \to R$$

を導く。実際 $u, u' \in H^q(\mathscr{C}; R)$ を同じコホモロジー類に属するコサイクルとすると, 適当な $u'' \in \mathrm{Hom}(C_{q-1}, R)$ により $\delta(u'') = u - u'$ と表される。また同じホモロジー類に属するサイクル $c, c' \in C_q$ に対しては, 適当な $c'' \in C_{q+1}$ により $\partial(c'') = c - c'$ と表されるので

$$\begin{aligned}
\langle u, c\rangle - \langle u', c'\rangle &= \langle u - u', c\rangle + \langle u', c - c'\rangle \\
&= \langle \delta(u''), c\rangle + \langle u', \partial(c'')\rangle \\
&= \langle u, \partial(c)\rangle + \langle \delta(u'), c''\rangle = 0
\end{aligned}$$

となるので, 代表元のとり方によらずに値が決まる。

命題 16.12
$\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ をチェイン複体, $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ をチェイン写像とする。このとき, 任意の $[c] \in H_q(\mathbb{C})$ と $[u] \in H^q(\mathscr{C}'; R)$ に対して,

$$\langle [u], \varphi_*([c])\rangle = \langle \varphi^*([u]), [c]\rangle$$

が成り立つ。

証明　定義にもどり計算をすると,

$$\langle [u], \varphi_*([c])\rangle = u(\varphi_q(c)) = (\varphi_q^\vee(u))(c) = \langle \varphi^*([u]), [c]\rangle$$

である。□

さらに $w \in H^q(\mathbb{C}, R)$ に対して

$$\langle w,\ \rangle\ :\ H_q(\mathscr{C}) \to R$$

を対応させることにより, 準同型写像

$$\kappa : H^q(\mathscr{C}; R) \to \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}), R)$$

を得る。すると次の定理によりホモロジー群が分かればコホモロジー群がわかる。

定理 16.13 (普遍係数定理)
チェイン複体 $\mathscr{C} = \{C_q, \partial_q\}$ において, 各 C_q が自由加群ならば, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{q-1}(\mathscr{C}), R) \longrightarrow H^q(\mathscr{C}; R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}), R) \longrightarrow 0$$

が存在する。しかもこの完全列は分解する。したがって

$$H^q(\mathscr{C};R) \cong \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}),R) \oplus \mathrm{Ext}(H_{q-1}(\mathscr{C}),R)$$

となる。

<u>証明</u>

$Z_q = \ker(\partial_q : C_q \to C_{q-1})$, $B_q = \mathrm{im}(\partial_q : C_q \to C_{q-1})$ とおくと, 列

$$0 \longrightarrow Z_q \xrightarrow{\ i\ } C_q \xrightarrow{\ \partial\ } B_{q-1} \longrightarrow 0 \tag{16.2}$$

は完全である。ここに i は包含写像。仮定より C_{q-1} は自由加群であるから その部分加群である B_{q-1} も自由加群である。したがって 補題 4.13 より 列 (16.2) は分解する。そこで チェイン複体 $\mathscr{Z} = \{Z_q, 0\}$, $\overline{\mathscr{B}} = \{B_{q-1}, 0\}$ を考える。0 はバウンダリー作用素が零写像であることを意味し, $\overline{\mathscr{B}}$ の q 次の加群は B_{q-1} と 1 つ次数がずれたものである。(16.2) より得られるチェイン複体の列

$$0 \longrightarrow \mathscr{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathscr{C} \longrightarrow \overline{\mathscr{B}} \longrightarrow 0$$

は分解する完全列であるから, 定理 16.11 より列

$$\longrightarrow H^{q-1}(\mathscr{Z};R) \xrightarrow{\ \delta^*\ } H^q(\overline{\mathscr{B}};R) \xrightarrow{\ \partial^*\ } H^q(\mathscr{C};R) \xrightarrow{\ i^*\ } H^q(\mathscr{Z};R) \xrightarrow{\ \delta^*\ } H^{q+1}(\overline{\mathscr{B}};R) \longrightarrow$$

は完全である。これより完全列

$$0 \longrightarrow H^q(\overline{\mathscr{B}};R)/\mathrm{im}\,\delta^* \longrightarrow H^q(\mathscr{C};R) \xrightarrow{\ i^*\ } \ker\,\delta^* \longrightarrow 0 \tag{16.3}$$

を得る。この完全列が定理の完全列であることを示す。

そのために連結準同型写像 $\delta^* : H^r(\mathscr{Z};R) \to H^{r+1}(\overline{\mathscr{B}};R)$ を解析する。チェイン複体 $\mathscr{Z}$, $\overline{\mathscr{B}}$ のバウンダリー作用素は零写像であるから, その双対であるコバウンダリー作用素も零写像であるから, したがって

$$H^r(\mathscr{Z};R) = \mathrm{Hom}(Z_r,R) \qquad H^{r+1}(\overline{\mathscr{B}};R) = \mathrm{Hom}(B_r,R)$$

である。この同一視をすると

<u>主張</u>

$\delta^* : \mathrm{Hom}(Z_r,R) \to \mathrm{Hom}(B_r,R)$ は包含写像 $B_r \to Z_r$ の双対写像と一致する。

(主張の <u>証明</u>)

δ^* の定義における図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(B_{r-1},R) & \xrightarrow{\ \partial^\vee\ } & \mathrm{Hom}(C_r,R)\ \boxed{\hat{z}} & \xrightarrow{\ i^\vee\ } & \mathrm{Hom}(Z_r,R)\ \boxed{z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow \delta & & \big\downarrow \delta & & \big\downarrow \delta & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(B_r,R) & \xrightarrow{\ \partial^\vee\ } & \mathrm{Hom}(C_{r+1},R) & \xrightarrow{\ i^\vee\ } & \mathrm{Hom}(Z_{r+1},R) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \boxed{\mathrm{b}} & & \boxed{\delta(\hat{z}) = \partial^\vee(b)} & & \boxed{0} & &
\end{array}$$

において $z \in \mathrm{Hom}(Z_r,R)$ に対する元 $b \in \mathrm{Hom}(B_r,R)$ が z を B_r に制限したものであることをみればよい。

$\widehat{z}$ を $i^\vee(\widehat{z}) = z$ をみたす元 $\widehat{z} \in \mathrm{Hom}(C_r, R)$ とする。$i : Z_r \to C_r$ は 包含写像であるから, $i^\vee(\widehat{z}) = z$ は $\widehat{z}$ の Z_r への制限が z であることを意味している。これと $\delta(\widehat{z}) = \partial^\vee(b)$ であることから, $c \in C_{r+1}$ に対して

$$z(\partial(c)) = \widehat{z}(\partial(c)) = (\delta(\widehat{z}))(c) = (\partial^\vee(b))(c) = b(\partial(c))$$

である。したがって b は z への B_r への制限と一致する。主張の証明 $\square$

完全列 $0 \to B_r \to Z_r \to H_r(\mathscr{C})$ において, B_r, Z_r は 自由加群 C_r の部分加群であるから自由加群である。したがって, この完全列は $H_r(\mathscr{C})$ の自由分解であるから, 上の主張 (Claim) と (15.3) より完全列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_r(\mathscr{C}), R) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z_r, R) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(B_r, R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}\,(H_r(\mathscr{C}), R) \arrow[r] & 0 \\
 & & H^r(\mathscr{Z}; R) & H^{r+1}(\overline{\mathscr{B}}; R) & &
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで $r = q-1$ または $r = q$ ととれば (16.3) における完全列が定理の完全列となることが分かる。

なぜなら, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}), R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z_q, R) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Hom}(B_q, R)$$

より,

$$\ker \delta^* = \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}), R) \to \mathrm{Hom}(Z_q, R)) \cong \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}), R)$$

であることと, 完全列

$$\mathrm{Hom}(Z_{q-1}, R) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Hom}(B_{q-1}, R) \longrightarrow \mathrm{Ext}\,(H_{q-1}(\mathscr{C}), R) \longrightarrow 0$$

と, $\mathrm{Hom}(B_{q-1}, R) = H^q(\overline{\mathscr{B}}; R)$ より,

$$\mathrm{Ext}\,(H_{q-1}(\mathscr{C}), R) \cong \mathrm{Hom}(B_{q-1}, R)/\mathrm{im}\,\delta^* = H^q(\overline{\mathscr{B}}; R)/\mathrm{im}\,\delta^*$$

であるから。

そして (16.3) における i^* が κ と一致することは読者にまかせる。

最後に定理の完全列が分解することを示す。そのためには, 準同型写像

$$\lambda : \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}), R) \to H^q(\mathscr{C}; R)$$

で $\kappa \cdot \lambda$ が恒等写像となるものを構成すればよい。

完全列 (16.2) が分解するから 補題 4.12 より, 準同型写像 $s : C_q \to Z_q$ で $s \cdot i$ が恒等写像なるものが存在する。ここで i は 包含写像であるから, s の Z_q への制限は恒等写像である。したがって,

$$C_q = Z_q \oplus \ker s \tag{16.4}$$

と分解する。列

$$C_q \xrightarrow{s} Z_q \xrightarrow{\pi} H_q(\mathscr{C}) \qquad (\pi \text{ は商写像})$$

より導かれる列

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}),R) & \xrightarrow{\pi^\vee} & \mathrm{Hom}(Z_q,R) & \xrightarrow{s^\vee} & \mathrm{Hom}(C_q,R) \\ & & & & \Big\downarrow \delta \\ & & & & \mathrm{Hom}(C_{q+1},R) \end{array}$$

において 元 $a \in \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}),R)$ の $s^\vee \cdot \pi^\vee$ による像を見てみよう。(16.4) より C_q の元を $z+w$ $(z \in Z_q, w \in \ker s)$ と表すと, $s(z)=z$, $s(w)=0$ であるから,

$$((s^\vee \cdot \pi^\vee)(a))(z+w) = (\pi^\vee(a))(s(z)+s(w)) = (\pi^\vee(a))(z) = a(\pi(z))$$

$z \in B_q$ のとき $\pi(z)=0$ であるから, 上の式より $(s^\vee \cdot \pi^\vee)(a)$ は $B_q \oplus \ker s$ 上 零写像である。よって $a' = (s^\vee \cdot \pi^\vee)(a)$ とおくと $(\delta(a'))(c) = a'(\partial(c)) = 0$ $(c \in C_{q+1})$ となるから, $a' \in \ker\delta = Z^q(\mathbb{C};R)$ である。ゆえに $H^q(\mathscr{C};R)$ の元 $[a']$ が定まる。$a \in \mathrm{Hom}(H_q(\mathscr{C}),R)$ に $[a'] \in H^q(\mathscr{C};R)$ を対応させる写像が λ である。λ が 準同型写像であることと $\kappa \cdot \lambda$ が恒等写像であることは読者に任せる。以上より定理の完全列は分解する。□

問題 16.14
定理 16.13 の残った部分の証明を完成せよ。

上の証明をみれば, チェイン写像 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ があるとき, 図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}\,(H_{q-1}(\mathbb{C}),R) & \longrightarrow & H^q(\mathbb{C};R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H_q(\mathbb{C}),R) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\uparrow \mathrm{Ext}\,(\varphi_*) & & \Big\uparrow \varphi^* & & \Big\uparrow (\varphi_*)^\vee & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}\,(H_{q-1}(\mathbb{C}),R) & \longrightarrow & H^q(\mathbb{C};R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H_q(\mathbb{C}),R) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{16.5}$$

は可換となることがわかる。これと 5項補助定理 4.5 より次を得る。

定理 16.15
$\varphi_* : H_q(\mathbb{C}) \to H_q(\mathbb{C}')$ がすべての q に対して同型ならば, 任意の加群 R に対して $\varphi^* : H^q(\mathbb{C}';R) \to H^q(\mathbb{C};R)$ はすべての q に対して同型である。

17 位相空間のコホモロジー群

この節では位相空間や単体的複体から得られるコホモロジー群について考える。位相空間 X の特異チェイン複体 $\mathbb{S}(X)$ の R 係数コホモロジー群 $H^q(\mathbb{S}(X);R)$ を $H^q(X;R)$ と表し, $R=\boldsymbol{Z}$ の時は $H^q(X;\boldsymbol{Z})$ をしばしば $H^q(X)$ と略記する。$H^q(X;R)$ を 位相空間 X の q 次 R 係数 **特異コホモロジー群** (***singular cohomology group***) という。X が有限型のホモロジーをもつ (つまり 各 q に対して $H_q(X)$ が有限生成加群である) とする。$H_q(X)$ の階数 (X の q 次ベッチ数) を b_q, ねじれ群を T_q と書くと

$$H_q(X) \cong \boldsymbol{Z}^{b_q} \oplus T_q \tag{17.1}$$

である。この結果により次が成り立つ。

定理 17.1

$$H^q(X) \cong \boldsymbol{Z}^{b_q} \oplus T_{q-1}$$

<u>証明</u>　普遍係数定理 16.13 より

$$H^q(X) \cong \mathrm{Hom}(H_q(X), \boldsymbol{Z}) \oplus \mathrm{Ext}\,(H_{q-1}(X), \boldsymbol{Z})$$

であるが (17.1) に注意すれば, 右辺の第 1 項は 系 15.3 より $\boldsymbol{Z}^{b_q}$ と同型で, 第 2 項は 系 15.14 より T_{q-1} と同型である。よって定理を得る。□

例 17.2 (種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g)
種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g のホモロジー群は, 例 14.4 より

$$H_q(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0, 2 \\ \boldsymbol{Z}^{2g} & q = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であった。よってコホモロジー群は

$$H^q(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0, 2 \\ \boldsymbol{Z}^{2g} & q = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。

例 17.3 (実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$)
実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ のホモロジー群は 例 14.6 より n が奇数のとき,

$$H_q(\boldsymbol{R}P^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0, n \\ \boldsymbol{Z}_2 & q = 1, 3, \cdots, n-2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であった。よってコホモロジー群は

$$H^q(\boldsymbol{R}P^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0, n \\ \boldsymbol{Z}^{2g} & q = 2, 4, \cdots, n-1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。同様に, n が偶数のとき,

$$H_q(\boldsymbol{R}P^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0 \\ \boldsymbol{Z}_2 & q = 1, 3, \cdots, n-1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であった。よってコホモロジー群は

$$H^q(\boldsymbol{R}P) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0 \\ \boldsymbol{Z}^{2g} & q = 2, 4, \cdots, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。

例 17.4 (球面 S^n)
球面 S^n のホモロジー群は, 例 14.5 より

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であった。よってコホモロジー群は

$$H^q(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & q = 0, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。

ホモロジー群が分かっていれば, 普遍係数定理 16.13 より, 係数群 R が有限巡回群 $\boldsymbol{Z}_m$ のときもコホモロジー群が容易に計算できる。

例 17.5 (球面 S^n)
例 15.1 より $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ また補題 15.12 より $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2) = 0$ である。したがって 定理 9.1 と普遍係数定理 16.13 より $n \geq 1$ のとき

$$H^q(S^n, \boldsymbol{Z}_2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}_2 & q = 0, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。

例 17.6 (実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$)
例 15.1 より $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ また補題 15.12 より $\mathrm{Ext}\,(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ である。したがって 例 14.6 と普遍係数定理 16.13 より n の偶奇に関わらず

$$H^q(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{Z}_2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}_2 & q = 0, 1, 2, \cdots, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。

位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ は特異チェイン複体の間のチェイン写像 $f_\# : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$ を導くから, コホモロジー群の間の準同型写像 $f_\#^* : H^q(Y; R) \to H^q(X; R)$ を導く。この準同型写像を 単に f^* と表す。 f がホモトピー同値ならば f^* が同型になることは 定理 7.4 と定理 16.15 から分かる。

補題 17.7
連続写像 $f : S^n \to S^n$ $(n \geq 1)$ の写像度が偶数である必要十分条件は, $f^* : H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2)$ が零写像であることである。

<u>証明</u> $H_{n-1}(S^n)$ は $n = 1$ のとき $\boldsymbol{Z}$ と同型で, $n \geq 2$ のとき 0 である。したがって, 補題 15.12 よりいずれの場合も $\mathrm{Ext}\,(H_{n-1}(S^n), \boldsymbol{Z}_2) = 0$ となり, (16.5) より可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2) & \xrightarrow[\cong]{\kappa} & \mathrm{Hom}(H_n(S^n), \boldsymbol{Z}_2) \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (f_*)^\vee} \\ H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2) & \xrightarrow[\cong]{\kappa} & \mathrm{Hom}(H_n(S^n), \boldsymbol{Z}_2) \end{array}$$

を得る。これより, f^* が零写像であることと $(f_*)^\vee$ が零写像であることは同じである。一方, $H_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ であるから, $(f_*)^\vee$ が零写像である必要十分条件は, $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ が偶数倍写像 (下の問題参照)。つまり f の写像度が偶数であることである。よって補題が示される。□

問題 17.8
$\varphi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ に対して, $\boldsymbol{Z}_2$ におけるその双対写像 $\varphi^\vee : \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2) \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2)$ を考える。このとき $\varphi^\vee$ が零写像である必要十分条件は φ が偶数倍写像であることを証明せよ。

単体的複体 K から作られるチェイン複体 $\mathbb{C}(K)$ の R 係数コホモロジー群を $H^q(K;R)$ と表し, $R = \boldsymbol{Z}$ のときは $H^q(K;\boldsymbol{Z})$ をしばしば $H^q(K)$ と略記する。$H^q(K;R)$ を単体的複体 K の q 次 R 係数**単体的コホモロジー群** (***simplicial cohomology group***) という。

10 節においてチェイン写像 $\eta : C_q(K) \to S_q(|K|)$ がホモロジー群の同型を導くことをみたが (定理 10.1), 定理 16.15 より η は コホモロジー群の間の同型をも導く。

18　カップ積とコホモロジー環

以下 R は可換環とする。

位相空間 X のコホモロジー群 $H_q(X;R)$ を, すべての q にわたって直和した次数付き加群

$$H^*(X;R) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(X;R)$$

は, R が単位元をもつ可換環である場合, カップ積とよばれる積をもち, 単位元をもつ次数付き環となることを本節で述べる。環は加群より豊富な情報をもち, しばしば有効である。カップ積を具体的に決定することは一般に容易ではない。

$\mathrm{Hom}(S_q(X), R)$ を $S^q(X;R)$ と記す。$S^q(X;R)$ の元を (R に値をもつ) X の**特異コチェイン** (***singular q-cochain***) という。$u \in S^p(X;R)$, $v \in S^q(X;R)$ に対して, $u \cup v \in S^{p+q}(X;R)$ を

$$\langle u \cup v, \sigma \rangle = \langle u, \sigma \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \langle v, \sigma \cdot [E_p \cdots E_{p+q}] \rangle \tag{18.1}$$

によって定める。ここで $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ は X の特異 $p+q$ 単体, $[E_0 \cdots E_p] : \Delta_p \to \Delta_{p+q}$, $[E_p \cdots E_{p+q}] : \Delta_q \to \Delta_{p+q}$ は 5 節で定められた写像である。正確には, (18.1) によって $S_{p+q}(X)$ の基底である特異 $p+q$ 単体に対して $u \cup v$ の値を定め, 線形に拡張して $S_{p+q}(X)$ のすべての元に対して $u \cup v$ の値を定める。$u \cup v$ を特異コチェイン u, v の **カップ積** (***cup product***) という。

X のすべての特異 0 単体に対して R の単位元 1 をとる特異 0 コチェインを同じ 1 で表す。次の性質は, カップ積の定義 (18.1) よりすぐに確かめられる。

補題 18.1

(1) (分配法則) $(u + u') \cup v = u \cup v + u' \cup v$, $u \cup (v + v') = u \cup v + u \cup v'$

(2) (結合法則) $(u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w)$

(3) (単位元の存在) $u \cup 1 = 1 \cup u = u$

次の性質は, 関数の積の微分法の公式を思い起こさせる。

補題 18.2 $u \in S^p(X;R)$, $v \in S^q(X;R)$ に対して

$$\delta(u \cup v) = (\delta u) \cup v + (-1)^p u \cup (\delta v)$$

証明　任意の特異 $p+q+1$ 単体 $\rho : \Delta_{p+q+1} \to X$ に対して

$$\langle \delta(u \cup v), \rho \rangle = \langle (\delta u) \cup v, \rho \rangle + (-1)^p \langle u \cup (\delta v), \rho \rangle \tag{18.2}$$

を示せばよい。右辺の 2 つの項を定義にしたがって計算する。まず第 1 項は

$$\begin{aligned}
&\langle (\delta u) \cup v, \rho \rangle = \langle \delta u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_{p+1}] \rangle \langle v, \rho \cdot [E_{p+1} \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&= \langle u, \partial(\rho \cdot [E_0 \cdots E_{p+1}]) \rangle \langle v, \rho \cdot [E_{p+1} \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&= \left\langle u, \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \rho \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_{p+1}] \right\rangle \langle v, \rho \cdot [E_{p+1} \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_{p+1}] \rangle \langle v, \rho \cdot [E_{p+1} \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&\quad + (-1)^{p+1} \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \langle v, \rho \cdot [E_{p+1} \cdots E_{p+q+1}] \rangle
\end{aligned}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned}
&(-1)^p \langle u \cup (\delta v), \rho \rangle = (-1)^p \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \langle \delta v, \rho \cdot [E_p \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&= (-1)^p \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \langle v, \partial(\rho \cdot [E_p \cdots E_{p+q+1}]) \rangle \\
&= (-1)^p \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \left\langle v, \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \rho \cdot [E_p \cdots \widehat{E}_{p+j} \cdots E_{p+q+1}] \right\rangle \\
&= (-1)^p \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \langle v, \rho \cdot [E_{p+1} \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&\quad + \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \langle v, \rho \cdot [E_p \cdots \widehat{E}_i \cdots E_{p+q+1}] \rangle
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\langle (\delta u) \cup v, \rho \rangle + (-1)^p \langle u \cup (\delta v), \rho \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_{p+1}] \rangle \langle v, \rho \cdot [E_{p+1} \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&\quad + \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i \langle u, \rho \cdot [E_0 \cdots E_p] \rangle \langle v, \rho \cdot [E_p \cdots \widehat{E}_i \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \langle u \cup v, \rho \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_{p+q+1}] \rangle \\
&= \langle u \cup v, \partial(\rho) \rangle = \langle \delta(u \cup v), \rho \rangle
\end{aligned}$$

したがって, 等式 (18.2) が成り立つ。□

さらに記号

$$\begin{aligned}
Z^q(X;R) &= \ker(\delta : S^q(X;R) \to S^{q+1}(X;R)) \\
B^q(X;R) &= \mathrm{im}(\delta : S^{q-1}(X;R) \to S^q(X;R))
\end{aligned}$$

を導入する。$Z^q(X;R)$, $B^q(X;R)$ の元を, それぞれ X の (R に値を持つ) **特異 q コサイクル** (***singular q-cycle***), **特異 q コバウンダリー** (***singular q-cobaundary***) という。定義より $H^q(X;R) = Z^q(X;R)/B^q(X;R)$ である。補題 18.2 より, $u \in Z^p(X;R)$, $v \in Z^q(X;R)$ なら $u \cup v \in Z^{p+q}(X;R)$ となる。また, $u' \in Z^p(X;R)$, $v' \in Z^q(X;R)$ を $[u] = [u'] \in H^p(X;R)$, $[v] = [v'] \in H^q(X;R)$ をみたす元とすると, $u - u' = \delta a$, $v - v' = \delta b$ となる元 $a \in S^{p-1}(X;R)$, $b \in S^{q-1}(X;R)$ が存在するから

$$\begin{aligned} u \cup v - u' \cup v' &= (u - u') \cup v + u' \cup (v - v') \\ &= (\delta a) \cup v + u' \cup (\delta b) \\ &= \delta(a \cup v) + (-1)^p \delta(u' \cup b) \in B^{p+q}(X;R) \end{aligned}$$

を得る。ここで最後の等号は補題 18.2 と $\delta v = 0$, $\delta u' = 0$ から成り立つ。したがって $[u \cup v] = [u' \cup v'] \in H^{p+q}(X;R)$ となるから, $\alpha = [u] \in H^p(X;R)$ と $\beta = [v] \in H^q(X;R)$ に対して

$$\alpha \cup \beta = [u \cup v] \in H^{p+q}(X;R)$$

が代表元 u, v のとり方によらずに定まる。$\alpha \cup \beta$ をコホモロジー類 α, β の **カップ積** という。補題 18.1 はコチェインのカップ積に対して成立しているから, コホモロジー類におけるカップ積も同様の性質をみたす。また, 特異 0 コチェイン 1 は容易にわかるようにコサイクルであるからコホモロジー群 $H^0(X;R)$ の元を表す。したがって $H^*(X;R)$ は単位元をもつ次数付き環となる。それゆえ $H^*(X;R)$ を **コホモロジー環** (***cohomology ring***) という。

[**参考**]　コホモロジー環 $H^*(X;R)$ におけるカップ積の可換性に関しては

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha \qquad (\alpha \in H^P(X;R),\ \beta \in H^q(X;R)) \tag{18.3}$$

が成立することが知られている[7]。しかし, この事実の証明には工夫がいる。なぜならコチェインの段階では一般に $u \cup v = (-1)^{pq} v \cup u \quad (u \in S^p(X;R), v \in S^q(X;R))$ が成立しないからである。次数付き環の場合, 本当の意味で可換でなく, (18.3) をみたす場合がしばしばある。それゆえ (18.3) をみたす次数付き環を可換ということがある。

カップ積は連続写像 $f : X \to Y$ に対して都合よく振る舞う。f から導かれるチェイン写像 $f_\# : S_q(X) \to S_q(Y)$ の双対写像 $f_\#^\vee : S^q(Y;R) \to S^q(X;R)$ を $f^\#$ と表すと, 双対写像の定義から

$$\langle f^\#(u), c \rangle = \langle u, f_\#(c) \rangle \qquad (u \in S^q(Y;R), c \in S_q(X)) \tag{18.4}$$

が成り立つ。

補題 18.3

(**1**) $f^\#(1) = 1$

(**2**) $f^\#(u \cup v) = f^\#(u) \cup f^\#(v) \quad (u \in S^p(Y;R), v \in S^q(Y;R))$

[7] 中岡稔著「位相幾何学 (ホモロジー論)」(共立出版),1999 の 1.3 節を参照せよ。

<u>証明</u>　(1) は (18.4) より明らか。(2) を示す。$\sigma:\Delta_{p+q}\to X$ を X の特異 $p+q$ 単体とすると, $f_\#(\sigma)=f\cdot\sigma$ に注意して

$$
\begin{aligned}
&\langle f^\#(u\cup v),\sigma\rangle=\langle u\cup v,f_\#(\sigma)\rangle\\
&\quad=\ \langle u,f\cdot\sigma\cdot[E_0\cdots E_p]\rangle\langle v,f\cdot\sigma\cdot[E_p\cdots E_{p+q}]\rangle\\
&\quad=\ \langle f^\#(u),\sigma\cdot[E_0\cdots E_p]\rangle\langle f^\#(v),\sigma\cdot[E_p\cdots E_{p+q}]\rangle\\
&\quad=\ \langle f^\#(u)\cup f^\#(v),\sigma\rangle
\end{aligned}
$$

を得る。したがって, (2) を得る。□

上の補題より, $f^\#$ から導かれるコホモロジー環の間の群準同型写像

$$f^*:H^*(Y;R)\to H^*(X;R)$$

はカップ積を保つから, 環準同型写像である。

19　実射影空間のコホモロジー環

14 節において, 実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ のコホモロジー群を求めたが, 本節では $\boldsymbol{Z}_2$ 係数のコホモロジー環 $H^*(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ を決定し, その結果を用いて写像度に関して 補題 11.1 より詳しい性質を得る。

$\boldsymbol{R}P^n$ は S^n において原点対称な点を同一視して得られた空間であったから, $\pi:S^n\to\boldsymbol{R}P^n$ を商写像とすると, $\boldsymbol{R}P^n$ の任意の点 x に対して x を含む弧状連結な開集合 U を十分小さくとれば, $\pi^{-1}(U)$ は 2 つの弧状連結な開集合 $\widetilde{U}_j$ $(j=1,2)$ に分かれ, $\pi|_{\widetilde{U}_j}:\widetilde{U}_j\to U$ は同相写像である。つまり, 写像 π を通して S^n は $\boldsymbol{R}P^n$ を 2 重に覆っている。この例を一般化したものとして被覆空間という概念がある。弧状連結な位相空間の間の連続写像 $\pi:\widetilde{X}\to X$ が <u>**被覆写像** (***covering map***)</u> であるとは, 各点 $x\in X$ ごとに次の条件をみたす x を含む弧状連結な開集合 U があることである。

[**条件**] $\pi^{-1}(U)$ の弧状連結成分 $\widetilde{U}_j$ は $\widetilde{X}$ の開集合で, $\pi|_{\widetilde{U}_j}:\widetilde{U}_j\to U$ は同相写像

このとき, $\pi:\widetilde{X}\to X$ または単に $\widetilde{X}$ を X の <u>**被覆空間** (***covering space***)</u> といい, 上のような U を <u>**標準近傍**</u> という。

$\pi^{-1}(x)$ が有限集合であるとき, 上の条件より, $\pi^{-1}(x)$ の元の個数は x の近くで同じ値をとる, つまり局所的に定数である。しかし, X は弧状連結と仮定しているから, 局所的に定数であるならば X 全体で定数である。よって $\pi^{-1}(x)$ の元の個数は x によらず一定である。この個数を π の <u>**被覆度** (***covering degree***)</u> という。最初の例 $\pi:S^n\to\boldsymbol{R}P^n$ は写像度 2 である。一般に, $\pi^{-1}(x)$ は必ずしも有限集合とは限らない。例えば, $\pi:\boldsymbol{R}\to S^1$ を $\pi(\theta)=e^{2\pi i\theta}$ とすると, π は被覆写像であるが $\pi^{-1}(1)=\boldsymbol{Z}$ となり有限集合ではない。いくつか被覆空間の例をあげておく。

例 19.1
自然数 m に対して, $\pi_m:S^1\to S^1$ を $\pi_m(e^{i\theta})=e^{im\theta}$ とすると, π_m は被覆度 m の被覆写像である。

例 19.2
平面 $\boldsymbol{R}^2$ において, 点 (x,y) と 点 $(x+m,y+n)$ $(m,n\in\boldsymbol{Z})$ を同一視するとトーラス T^2 が得られるが, 商写像 $\pi:\boldsymbol{R}^2\to T^2$ は被覆写像である。T^2 を $S^1\times S^1$ と思うと, 被覆写像 π は $\pi(x,y)=(e^{2\pi ix},e^{2\pi iy})$ となる。

同様に, $\boldsymbol{R}^2$ において, 点 (x,y) と点 $(x+\frac{m}{2},(-1)^m y+n)$ $(m,n\in\boldsymbol{Z})$ を同一視するとクラインの壷 K^2 が得られるが, 商写像 $\boldsymbol{R}^2\to K^2$ はやはり被覆写像である。いずれも被覆度は有限でない。また, 自然な写像 $T^2\to K^2$ は 2 重被覆写像である。

例 19.3
m を 2 以上の自然数とし, $\zeta=e^{2\pi i/m}$ とすると, $1,\zeta,\cdots,\zeta^{m-1}$ は 1 の m 乗根である。S^{2n+1} を $\boldsymbol{C}^{n+1}$ の単位球面と思い, S^{2n+1} の各点 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})$ に対し, $\zeta^k z:=(\zeta^k z_1,\zeta^k z_2,\cdots,\zeta^k z_{n+1})$ と定め, m 個の点 $z,\zeta z,\cdots,\zeta^{m-1}z$ を同一視する。この同一視によって得られる商空間を $L(2n+1,m)$ と書き, **レンズ空間** (***lens space***) という。$L(2n+1,2)=\boldsymbol{R}P^{2n+1}$ であることに注意しておく。商写像 $S^{2n+1}\to L(2n+1,m)$ は 被覆度 m の被覆写像である。

[**参考**]　以上のような被覆空間の構成は統一的にみることができる。それを説明するための言葉を用意する。G を群, Y を集合とする。G は加法群とは限らず交換法則は要求しないので G の演算は積の形で書く。このとき, 写像 $\varphi: G\times Y\to Y$ が次の 2 つの性質

(**1**) e を G の単位元とすると, すべての $y\in Y$ に対して $\varphi(e,y)=y$

(**2**) すべての $g_1,g_2\in G$, $y\in Y$ に対して $\varphi(g_1,\varphi(g_2,y))=\varphi(g_1g_2,y)$

をみたすとき, 群 G の Y への **作用** (***action***) という。簡単のため, $\varphi(g,y)$ を gy と書くと上の条件はそれぞれ

(**1**) $ey=y$

(**2**) $g_1(g_2y))=(g_1g_2)y$

となり, みやすい。G の各元 g に対して, 対応 $y\mapsto gy$ は Y から Y への全単射となる。実際, g^{-1} を g の逆元とすると, 上の (1), (2) より対応 $y\mapsto g^{-1}y$ が逆写像であることがわかる。$y\in Y$ に対し, 集合

$$G_y:=\{\,gy\,;\,g\in G\}$$

を y の G **軌道** (***G-orbit***) といい, Y の G 軌道全体からなる集合 (つまり, すべての $g\in G$ に対して y と gy を同一視した商集合) を Y の G **軌道空間** (***G-orbit space***) といい, Y/G と書く。定義より商写像 $Y\to Y/G$ がある。

Y が位相空間であるとき, 群 G も位相空間であることと作用の写像 φ が連続写像であることを要求する。このとき, 作用は連続であるという。以下では, G に離散位相を考える。群 G の位相空間 Y への連続な作用が「Y の任意の点が, G の任意の異なる元 g,h に対して, $gV\cap hV=\emptyset$ となるような近傍 V をもつ」という条件をみたすとき, 商写像 $Y\to Y/G$ は被覆写像になる。上述の例はすべてこのようにして得られる。各自確かめておいてください。ただし, すべての被覆写像がこのようにして得られるわけではない。

$\pi:\widetilde{X}\to X$ を被覆写像とし, Y を位相空間とする。連続写像 $f:Y\to X$ に対して, $\pi\cdot\widetilde{f}=f$ となる連続写像 $\widetilde{f}:Y\to\widetilde{X}$ を f の **持ち上げ** (***lift***) という。

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

$f(Y)$ がある標準近傍に含まれているならば, 条件より持ち上げが存在することは容易にわかる。しかし, そうでなければ, 次の例にあるように持ち上げがいつも存在するというわけではない。

例 19.4
例 19.1 の写像 $\pi_m : S^1 = \widetilde{X} \to S^1 = X$ に対し, $Y = S^1$, $f =$ 恒等写像 とすると $m \geq 2$ のとき f の持ち上げは存在しない。なぜなら, f の持ち上げ $\widetilde{f}$ が存在したとすると $f = \pi \cdot \widetilde{f}$ であるが, 両辺の回転数 (写像度) をみると, 補題 11.1 (2), (4) と $\deg \pi_m = m$ より

$$1 = \deg f = \deg(\pi_m \cdot \widetilde{f}) = \deg \pi_m \deg \widetilde{f} = m \deg \widetilde{f}$$

しかし $m \geq 2$ のとき, これは不可能。したがって $m \geq 2$ のとき f の持ち上げは存在しない。

しかしながら次が成立する。

定理 19.5
Y が可縮ならば, 任意の連続写像 $f : Y \to X$ は持ち上げをもつ。もっと詳しく, $y_0 \in Y$ と $\widetilde{x}_0 \in \pi^{-1}(f(y_0))$ を任意にとると, f の持ち上げ $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ で $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$ をみたすものが唯 1 つ存在する。
証明は被覆空間に関する参考書を参照してください。

被覆写像 $\pi : \widetilde{X} \to X$ は準同型写像 $\pi^* : H^q(X; R) \to H^q(\widetilde{X}; R)$ を導くが, π の被覆度が有限値 m であるとき, π^* と逆向き準同型写像

$$\pi_! : H^q(\widetilde{X}; R) \to H^q(X; R)$$

で, $\pi_! \cdot \pi^* : H^q(X; R) \to H^q(X; R)$ が m 倍写像であるものが存在する。$\pi_!$ を **トランスファー写像 (*transfer map*)** という[8]。$\pi_!$ の定義は次のようになされる。
Δ_q は可縮であるから, 定理 19.5 より X の特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対し, σ の持ち上げがちょうど m 個存在する。これらを $\widetilde{\sigma}_j : \Delta_q \to \widetilde{X}$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ とし, 準同型写像 $\varpi : S_q(X) \to S_q(\widetilde{X})$ を

$$\varpi(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\sigma}_j$$

により定義すると, ϖ はチェイン写像である。したがって ϖ の 双対 $\varpi^\vee : S^q(\widetilde{X}; R) \to S^q(X; R)$ はコチェイン写像となり, 準同型写像 $\varpi^* : H^q(\widetilde{X}; R) \to H^q(X; R)$ を導く。これが $\pi_!$ である。
被覆写像 π は, 準同型写像 $\pi_\# : S_q(\widetilde{X}) \to S_q(X)$, $\pi^\# : S^q(X; R) \to S^q(\widetilde{X}; R)$ を導くが, 特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対して, $(\pi_\# \cdot \varpi)(\sigma) = \pi_\#(\sum_{j=1}^m \widetilde{\sigma}_j) = m\sigma$ であるから, $u \in S^q(X; R)$ に対して

$$\langle (\varpi^\vee \cdot \pi^\#)(u), \sigma \rangle = \langle u, (\pi_\# \cdot \varpi)(\sigma) \rangle = \langle u, m\sigma \rangle = \langle mu, \sigma \rangle$$

したがって $\varpi^\vee \cdot \pi^\# : S^q(X; R) \to S^q(X; R)$ は m 倍写像であるから, それが導くコホモロジー群の間の準同型写像 $\pi_! \cdot \pi^*$ も m 倍写像である。

$\pi_!$ は群準同型ではあるが環準同型ではない。カップ積に関して次が成り立つ。

[8] ホモロジー群に対してもトランスファー写像 $\pi^! : H_q(X) \to H_q(\widetilde{X})$ が定義でき, $\pi_* \cdot \pi^!$ はやはり m 倍写像である。

補題 19.6
$u \in S^p(X;R)$, $v \in S^q(\widetilde{X};R)$ に対して $\varpi^\vee(\pi^\#(u) \cup v) = u \cup \varpi^\vee(v)$。したがって $\alpha \in H^p(X;R)$, $\beta \in H^q(\widetilde{X};R)$ に対して

$$\pi_!(\pi^*(\alpha) \cup \beta) = \alpha \cup \pi_!(\beta)$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　特異単体 $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ に対し

$$\begin{aligned}
\langle \varpi^\vee(\pi^\#(u) \cup v), \sigma \rangle &= \textstyle\sum_{j=1}^m \langle \pi^\#(u), \widetilde{\sigma}_j \cdot [E_0, \cdots, E_p] \rangle \langle v, \widetilde{\sigma}_j \cdot [E_p, \cdots, E_{p+q}] \rangle \\
&= \langle u, \sigma \cdot [E_0, \cdots, E_p] \rangle \langle v, \textstyle\sum_{j=1}^m \widetilde{\sigma}_j \cdot [E_p, \cdots, E_{p+q}] \rangle \\
&= \langle u, \sigma \cdot [E_0, \cdots, E_p] \rangle \langle \varpi^\vee(v), \sigma \cdot [E_p, \cdots, E_{p+q}] \rangle \\
&= \langle u \cup \varpi^\vee(v), \sigma \rangle
\end{aligned}$$

したがって補題が示される。□

注意　$\pi^* : H^*(X;R) \to H^*(\widetilde{X};R)$ を通して $H^*(\widetilde{X};R)$ は $H^*(X;R)$ 加群と思える。つまり $\alpha \in H^*(X;R)$, $\beta \in H^*(\widetilde{X};R)$ に対して $H^*(X;R)$ 加群としての積 $\alpha\beta$ を $\pi^*(\alpha) \cup \beta$ として定義する。また, $H^*(X;R)$ は環であるから, $H^*(X;R)$ 加群とも思える。このように $H^*(\widetilde{X};R)$, $H^*(X;R)$ をそれぞれ $H^*(X;R)$ 加群と思うと, 補題 19.6 は, $\pi_!$ が $H^*(X;R)$ 加群の準同型写像であると主張していることになる。

以後 $\pi : \widetilde{X} \to X$ の被覆度は 2 とする。このとき列

$$0 \longrightarrow S^q(X;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^\#} S^q(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\varpi^\vee} S^q(X;\boldsymbol{Z}_2) \longrightarrow 0 \tag{19.1}$$

は完全となり (章末問題 19.14 参照), コホモロジー群の完全列

$$\longrightarrow H^q(X;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^q(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi_!} H^q(X;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X;\boldsymbol{Z}_2) \longrightarrow \tag{19.2}$$

を得る。ここで δ^* は連結準同型写像で, $\omega := \delta^*(1) \in H^1(X;\boldsymbol{Z}_2)$ $(1 \in H^0(X;\boldsymbol{Z}_2))$ を 2 重被覆空間 $\pi : \widetilde{X} \to X$ の <u>**特性類** (***characteristic class***)</u> という。次の性質は特性類 ω の <u>**自然性** (***naturality***)</u> とよばれる性質である。

定理 19.7　特性類の自然性
被覆度 2 の 2 つの被覆写像 $\pi : \widetilde{X} \to X$, $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ の間に図式

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{X}' \\
{\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi'}\big\downarrow \\
X & \xrightarrow{f} & X'
\end{array}$$

を可換にする連続写像 f, $\widetilde{f}$ が存在するならば, π の特性類 ω と π' の特性類 ω' の間の関係式 $f^*(\omega') = \omega$ が成り立つ。

<u>証明</u>　コチェイン複体の図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{S}(X';\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\pi'^{\#}"] \arrow[d, "f^{\#}"] & \mathcal{S}(\widetilde{X}';\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\varpi^{\vee}"] \arrow[d, "\widetilde{f}^{\#}"] & \mathcal{S}(X';\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "f^{\#}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}(X;\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\pi^{\#}"] & \mathcal{S}(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\varpi^{\vee}"] & \mathcal{S}(X;\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が可換であるから, 連結準同型写像 δ^* は $f^* : H^*(X';\boldsymbol{Z}_2) \to H^*(X;\boldsymbol{Z}_2)$ と可換である。また, $f^*(1) = 1$ であるから, $f^*(\omega') = f^*(\delta^*(1)) = \delta^*(f^*(1)) = \delta^*(1) = \omega$ となり定理が成り立つ。

注意　上の証明における図式の右側の可換性より $f^* \cdot \pi_! = \pi_! \cdot \widetilde{f}^*$ である。

次の補題も特性類の重要性を示すものである。

補題 19.8
$\alpha \in H^q(X;\boldsymbol{Z}_2)$ に対して $\delta^*(\alpha) = \alpha \cup \omega$
<u>証明</u>　連結準同型写像 $\delta^* : H^p(X;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{p+1}(X;\boldsymbol{Z}_2)$ の定義を思いだすと, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^p(X;\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\pi^{\#}"] \arrow[d, "\delta"] & S^p(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\varpi^{\vee}"] \arrow[d, "\delta"] & S^p(X;\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^{p+1}(X;\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\pi^{\#}"] & S^{p+1}(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r, "\varpi^{\vee}"] & S^{p+1}(X;\boldsymbol{Z}_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

において, $[u] \in H^p(X;\boldsymbol{Z}_2)$ $(u \in Z^p(X;\boldsymbol{Z}_2))$ に対して

$$\varpi^{\vee}(v) = u, \quad \delta(v) = \pi^{\#}(w) \tag{19.3}$$

をみたす $v \in S^p(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2)$, $w \in Z^{p+1}(X;\boldsymbol{Z}_2)$ が存在することがわかり, $\delta^*([u]) = [w]$ と定義した。これより, $u = 1 \in Z^0(X;\boldsymbol{Z}_2)$ ととると

$$\varpi^{\vee}(v_0) = 1, \quad \delta(v_0) = \pi^{\#}(w_0)$$

をみたす $v_0 \in S^0(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2)$, $w_0 \in Z^1(X;\boldsymbol{Z}_2)$ が存在し, $\omega = [w_0]$ となる。次に $u \in Z^q(X;\boldsymbol{Z}_2)$ とすると, 補題 19.6 より

$$\varpi^{\vee}(\pi^{\#}(u) \cup v_0) = u \cup \varpi^{\vee}(v_0) = \pi^{\#}(w) = u \cup 1 = u \tag{19.4}$$

一方, 補題 18.2 と $\delta(u) = 0$ より, ($\boldsymbol{Z}_2$ で考えていることに注意して)

$$\begin{aligned}
\delta(\pi^{\#}(u) \cup v_0) &= \delta(\pi^{\#}(u)) \cup v_0 + \pi^{\#}(u) \cup \delta(v_0) \\
&= \pi^{\#}(\delta(u)) \cup v_0 + \pi^{\#}(u) \cup \pi^{\#}(w_0) \\
&= \pi^{\#}(u) \cup \pi^{\#}(w_0) = \pi^{\#}(u \cup w_0)
\end{aligned} \tag{19.5}$$

なので, 補題が示される。□

上の補題より, 完全列 (19.2) において δ^* のところを $\cup\omega$ に変えて

$$\longrightarrow H^q(X;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^q(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi_!} H^q(X;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega} H^{q+1}(X;\boldsymbol{Z}_2) \longrightarrow \tag{19.6}$$

を得る。これを <u>**トム・ギシン完全列** (***Thom-Gysin exact sequence***)</u> という。この完全列を用いて $\boldsymbol{R}P^n$ のコホモロジー環 $H^*(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ を決定しよう。$\boldsymbol{R}P^0$ は1点であるから, 以下 $n \geq 1$ と仮定する。例 17.6 より, $0 \leq q \leq n$ に対しては $H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ は $\boldsymbol{Z}_2$ と同型で, その他の q に対しては 0 であった。一方 $\omega \in H^1(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ であるから, q 個の ω カップ積 $\omega^q := \omega \cup \cdots \cup \omega$ は $H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ の元である。

定理 19.9

$0 \leq q \leq n$ に対しては ω^q は $H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元である。したがって, 環として

$$H^*(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[\omega]/(\omega^{n+1})$$

である。ここで, $\boldsymbol{Z}_2[\omega]$ は ω で生成される $\boldsymbol{Z}_2$ 係数の多項式環で, (ω^{n+1}) は ω^{n+1} で生成される $\boldsymbol{Z}_2[\omega]$ のイデアルである。

<u>証明</u>　$0 \leq q \leq n-1$ に対して

$$\cup\omega : H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{q+1}(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \text{ が単射} \tag{19.7}$$

であることを示せば, $H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ $(0 \leq q \leq n)$ であるから同型となり定理が示される。

$\pi : S^n \to \boldsymbol{R}P^n$ に対する完全列 (19.6)

$$\longrightarrow H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^q(S^n;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi_!} H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega} H^{q+1}(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \longrightarrow \tag{19.8}$$

より, (19.7) を示すには $\pi_! : H^q(S^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^q(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ $(0 \leq q \leq n-1)$ が零写像であることを示せばよい。$1 \leq q \leq n-1$ の場合は $H^q(S^n;\boldsymbol{Z}_2) = 0$ であるからこれは自明で, $q = 0$ の場合は, $\pi^* : H^0(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^0(S^n;\boldsymbol{Z}_2)$ が同型である (章末問題 19.13 参照) ことから (19.6) の完全性より $\pi_! : H^0(\widetilde{X};\boldsymbol{Z}_2) \to H^0(X;\boldsymbol{Z}_2)$ は零写像となる。□

[**注意**]　$\cup\omega : H^{n-1}(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ が同型であるから, (19.6) の完全性より, $\pi^* : H^n(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(S^n;\boldsymbol{Z}_2)$ は零写像。このことと $H^{n+1}(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2) = 0$ に注意すれば, (19.6) の完全性より, $\pi_! : H^n(S^n;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型である。

写像度に関する基本的な性質を 11 節であげた (補題 11.1 参照) が, 更に次のような性質が, $\boldsymbol{R}P^n$ のコホモロジー環の決定 (定理 19.9) を用いて, 示すことができる。

補題 19.10

$f : S^n \to S^n$ を連続写像とする。

(**1**) すべての点 $x \in S^n$ に対して $f(-x) = -f(x)$ ならば $\deg f$ は奇数。

(**2**) すべての点 $x \in S^n$ に対して $f(-x) = f(x)$ ならば $\deg f$ は偶数。

<u>証明</u> (1) $f(-x) = -f(x)$ より f は図式

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \boldsymbol{R}P^n & \xrightarrow{\overline{f}} & \boldsymbol{R}P^n \end{array}$$

を可換にする連続写像 $\overline{f}$ を導く。したがって, 定理 19.7 より $\overline{f}^*(\omega) = \omega$。これと $\overline{f}^*$ が環準同型写像であることより $\overline{f}^*(\omega^n) = \omega^n$ を得るが, 定理 19.9 より $\omega^n \neq 0$ であるから $\overline{f}^* : H^n(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}_2)$ は零写像ではない。一方, 上の可換図式より, コホモロジーの可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2) & \xrightarrow{f^*} & H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2) \\ {\scriptstyle\pi_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_!} \\ H^n(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}_2) & \xrightarrow{\overline{f}^*} & H^n(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}_2) \end{array}$$

を得る。(定理 19.7 の証明の後の注意参照)。ここで, 定理 19.9 の証明の後の注意より $\pi_!$ は同型である。上でみたように $\overline{f}^*$ は零写像でないから, 図式の可換性より f^* も零写像ではない。したがって補題 17.7 より $\deg f$ は奇数。

(2) $f(-x) = f(x)$ であるから, $g([x]) := f(x)$ と定めることにより連続写像 $g : \boldsymbol{Z}P^n \to S^n$ が得られ, f は

$$S^n \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{R}P^n \xrightarrow{g} S^n$$

と分解し, これに応じて $f^* : H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2)$ も

$$H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{g^*} H^n(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^n(S^n; \boldsymbol{Z}_2)$$

と分解する。ここで定理 19.9 の証明の後の注意より π^* は 零写像であるから f^* も零写像となる。したがって 補題 17.7 より $\deg f$ は偶数。□

＝＝＝＝＝章 末 問 題＝＝＝＝＝

問題 19.11 定理 17.1 の仮定の下で, R が標数 0 の体[9] (例えば $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$) のとき $H^q(X; R) \cong R^{b_q}$ を示せ。

問題 19.12 自然数 m (≥ 3) に対して $H^q(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}_m)$ を求めよ。

問題 19.13 R を加群, X, Y を位相空間とする。次を示せ。

(**1**) X が弧状連結ならば, $H^0(X; R) \cong R$

(**2**) X, Y が共に弧状連結ならば, 任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対して, $f^* : H^0(Y; R) \to H^0(X; R)$ は同型である。

[9]標数 0 の体とは, $mx = 0$ ($m \in \boldsymbol{Z}, 0 \neq x \in R$) ならば $m = 0$ が成立している体のこと

問題 19.14 列 (19.1) が完全であることを示せ。また, $\pi : \widetilde{X} \to X$ の被覆度 m が 3 以上のとき, 列

$$0 \longrightarrow S^q(X; \boldsymbol{Z}_m) \xrightarrow{\pi^{\#}} S^q(\widetilde{X}; \boldsymbol{Z}_m) \xrightarrow{\omega^{\vee}} S^q(X; \boldsymbol{Z}_m) \longrightarrow 0$$

において $\operatorname{im}\pi^{\#} \supset \ker\omega^{\vee}$ が成り立たない (したがって完全でない) ことを示せ。

問題 19.15 $n \geq 2$ のとき, $H^*(S^n \vee \boldsymbol{R}P^{n-1}; \boldsymbol{Z}_2)$ と $H^*(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}_2)$ は環として同型でないことを示せ。(参考：第 3 章の章末問題 14.11 より, n が奇数のとき $S^n \vee \boldsymbol{R}P^{n-1}$ と $\boldsymbol{R}P^n$ はホモロジー群では区別できない。)