第 5 章　多様体と双対性

普遍係数定理 16.13 はホモロジー群とコホモロジー群の間の関係を与えている。特に定理 17.1 でみたように, 位相空間 X が有限生成のホモロジー群をもてば $\operatorname{rk} H^q(X) = \operatorname{rk} H_q(X)$ である。つまり $H^q(X)$ と $H_q(X)$ はねじれ群を無視すれば同型である。普遍係数定理の証明はまったく代数的であった。この意味で, 普遍係数定理はコホモロジー群とホモロジー群の間の「代数的な」双対定理といえる。本章の目的であるポアンカレの双対定理もコホモロジー群とホモロジー群の間の同型を与えるものであるが, ホモロジー多様体という (各点のまわりの様子が点によらず一様な) 位相空間に対して成立し, 証明は幾何的である。この意味で, ポアンカレ双対定理は「幾何的な」双対定理といえる。

20　位相空間のジョイン

X と Y を位相空間とする。$X \times Y \times [0,1]$ において, 各点 $x \in X$ ごとに $x \times Y \times 0$ を 1 点に, $y \in Y$ ごとに $X \times y \times 1$ を 1 点につぶした商空間を X と Y の **ジョイン (*join*)** といい, $X * Y$ と表す。明らかに $X * Y \approx Y * X$ である。便宜上, X または Y が空集合のときも考え, $\emptyset * Y = Y$, $X * \emptyset = X$ と約束しておく。ジョインは結びのことであるが, この定義からは X と Y の結びというイメージが沸いて来ない。いくつか具体例を通して, 「結び」というイメージを実感してみよう。

例 20.1
X が 1 点 pt からなるとき, $pt \times Y \times [0,1]$ を $Y \times [0,1]$ と同一視すると, $pt \times Y$ は $Y \times [0,1]$ において $Y \times 0$ を 1 点につぶした商空間である。これを Y の **錐 (*cone*)** といい, CY と表す。$pt \times Y = CY$ は, 1 点 pt と Y を線分で結んで得られる図形で, つぶした頂点に縮むから可縮な位相空間である。

X が 2 点 S^0 のときは, $S^0 * Y$ は 2 つの Y の錐 CY を Y で同一視したものとなる (図 18)。これを Y の **懸垂 (*suspension*)** といい SY と表す。懸垂 SY は, 2 点 S^0 と結んで得られる図形である。したがって, $SS^n = S^0 S^n \approx S^{n+1}$ をみるのは難しくないであろう。

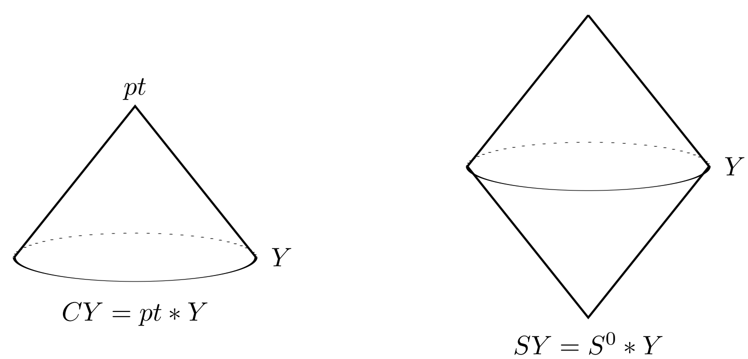

図 18:　懸垂

例 20.2
X と Y が閉区間であるとき, $X * Y$ は 3 角錐になる。実際, $X \times Y \times [0,1]$ は直方体であるが, 各点 $x \in X$

に対して $x \times Y \times 0$ を１点につぶし, さらに 各点 $y \in Y$ に対して $X \times y \times 1$ を１点につぶすと３角錐になる (図 19。

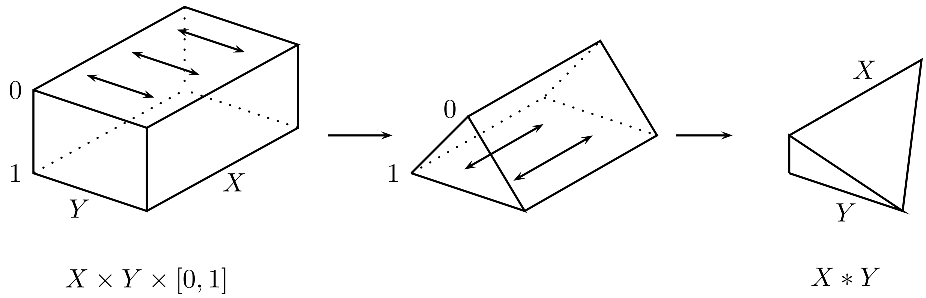

図 19:

３角錐 $X * Y$ の中に X が $X \times Y \times 0$ の像として, Y が $X \times Y \times 1$ の像として入っていると思うと, $X * Y$ はやはり X と Y を線分で結んで得られる図形である。

上の例 20.2 において, ３角錐は２つの閉区間 X と Y を空間の中でねじれの位置, つまり一般の位置におき, それらを線分で結んで得られる図形である。これは次のように一般化できる。

補題 20.3
$A_0, A_1, \cdots, A_q,\ B_0, B_1, \cdots, B_p$ を $\boldsymbol{R}^N$ の中の一般の位置にある $p+q+2$ 個の点とすると, $|A_0 \cdots A_q| * |B_0 \cdots B_p| \approx |A_0 \cdots A_q B_0 \cdots B_p|$ である。

証明　$X = |A_0 \cdots A_q|$, $Y = |B_0 \cdots B_p|$ とおく。$X \times Y \times [0,1]$ から $p+q+1$ 単体 $|A_0 \cdots A_q B_0 \cdots B_p|$ への写像 f を $f(x,y,t) = (1-t)x + ty$ と定めると, $x \times Y \times 0$ は１点 x に $X \times y \times 1$ は１点 y に移るから, f は $X * Y$ から $|A_0 \cdots A_q B_0 \cdots B_p|$ への連続写像 $\overline{f}$ を導く。$\overline{f}$ が全単射であることは容易にチェックできる。全単射連続写像は同相とは限らないが, 今の場合は同相となる。なぜなら, X, Y がコンパクト, 一方, $|A_0 \cdots A_q B_0 \cdots B_p|$ はハウスドルフ空間である。したがって $\overline{f}$ はコンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像であるから, 位相空間の一般論より同相写像となる。□

上の補題の証明にあるように, $|A_0 \cdots A_q| * |B_0 \cdots B_p|$ と $|A_0 \cdots A_q B_0 \cdots B_p|$ の間には自然な同相写像があるので, この同相写像を通して以後これらを同一視し, $\approx$ ではなく, $=$ で表す。

以上の例でみたように, $X * Y$ の点は X の点と Y の点とを結んだ線分から得られる位相空間と思えるから, $X \times Y \times [0,1]$ の点 (x,y,t) の $X * Y$ における像を $(1-t)x + ty$ と書く。連続写像 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ は

$$(f * g)((1-t)x + ty) := (1-t)f(x) + t\,g(y)$$

と定めることにより, 連続写像 $f * g : X * Y \to X' * Y'$ を導く。次の性質は明らかである。

(1) f, g が恒等写像ならば, $f * g$ も恒等写像である。

(2) $f \simeq \hat{f}$, $g \simeq \hat{g}$ ならば $f * g \simeq \hat{f} * \hat{g}$ である。

(3) $f' : X' \to X''$, $g' : Y' \to Y''$ を連続写像とすると, $(f' * g') \cdot (f * g) = (f' \cdot f) * (g' \cdot g)$ となる。

これらの性質から次を得る。

補題 20.4

(1) $X \approx X'$ かつ $Y \approx Y'$ ならば $X * Y \approx X' * Y'$ である。

(2) $X \simeq X'$ かつ $Y \simeq Y'$ ならば $X * Y \simeq X' * Y'$ である。

証明　(1) $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ を同相写像とし, それらの逆写像をそれぞれ f^{-1}, g^{-1} とすると, 上の性質 (1), (3) より

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} * g^{-1}) \cdot (f * g) &= (f^{-1} \cdot f) * (g^{-1} \cdot g) = 1_X * 1_Y = 1_{X*Y} \\
(f * g) \cdot (f^{-1} * g^{-1}) &= (f \cdot f^{-1}) * (g \cdot g^{-1}) = 1_{X'} * 1_{Y'} = 1_{X'*Y'}
\end{aligned}
$$

したがって, $f * g : X * Y \to X' * Y'$ は同相写像である。

(2) $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ をホモトピー同値写像とすると, $f * g : X * Y \to X' * Y'$ もホモトピー同値写像になる。証明は (1) とほぼ同じなので読者にまかせる。□

問題 20.5

補題 20.4 (2) を示せ。

系 20.6

X または Y が可縮ならば $X * Y$ も可縮である。

証明　X が可縮とすると $X \simeq pt$ であるから, 補題 20.4 の (2) より $X * Y \simeq pt * Y$ である。例 20.1 でみたように $pt * Y$ は可縮であるから $X * Y$ も可縮である。□

$X * Y$ のホモロジー群を X と Y のホモロジー群の言葉で記述されることが知られているが, ここでは簡単な場合のみを考える。

定理 20.7

$X \approx S^n$ ならば, $\widetilde{H}_q(X * Y) \cong \widetilde{H}_{q-n-1}(Y)$[10]

証明　証明は球面のホモロジー群を求めた定理 9.1 の証明と本質的に同様であるので方針のみ述べる。$X \approx S^n$ であるから $X * Y \approx S^n * Y$ である。したがって $X = S^n$ として定理を証明すればよい。以下 $n \geq 0$ とする。$D_\pm$ をそれぞれ S^n の北半球, 南半球とすると, $D_+ \cup D_- = S^n$, $D_+ \cap D_- = S^{n-1}$ であるから $D_+ * Y \cup D_- * Y = S^n * Y$, $D_+ * Y \cap D_- * Y = S^{n-1} * Y$ である。ここで $D_\pm$ は可縮であるから系 20.6 より $D_\pm * Y$ も可縮である。したがって, 対 $(S^n * Y, D_- * Y)$ の簡約ホモロジー完全列より

$$\widetilde{H}_q(S^n * Y) \cong H_q(S^n * Y, D_- * Y)$$

切除定理より ($\mathring{D}_- * Y$ の部分を切除して)

$$H_q(S^n * Y, D_- * Y) \cong H_q(D_+ * Y, S^{n-1} * Y)$$

[10] $\emptyset * Y = Y$ と約束してあるから, $S^{-1} = \emptyset$ と了解すれば, この同型は $n = -1$ のときも成立する。

$D_+ * Y$ は可縮だから, 対 $(D_+ * Y, S^{n-1} * Y)$ の簡約ホモロジー完全列より

$$H_q(D_+ * Y, S^{n-1} * Y) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1} * Y)$$

これらの 3 つの同型を合わせて $\widetilde{H}_q(S^n * Y) \cong \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1} * Y)$ となる。この同型を繰り返して用いれば

$$\widetilde{H}_q(S^n * Y) \cong \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1} * Y) \cong \cdots \cong \widetilde{H}_{q-n}(S^0 * Y) \cong \widetilde{H}_{q-n-1}(S^{-1} * Y) = \widetilde{H}_{q-n-1}(Y)$$

となるので, 定理が示される。□

最後に単体的複体から得られるジョインの例を挙げておく。単体的複体 K の単体 s に対して, s を面にもつ K の単体の合併を $\mathrm{St}(s, K)$, $\mathrm{St}(s, K)$ に含まれる K の単体のうち, s と共通部分をもたないものの合併を $\mathrm{lk}(s, K)$ と表し, それぞれ s の **星状体 (*star*)**, s の **リンク (*link*)** という。

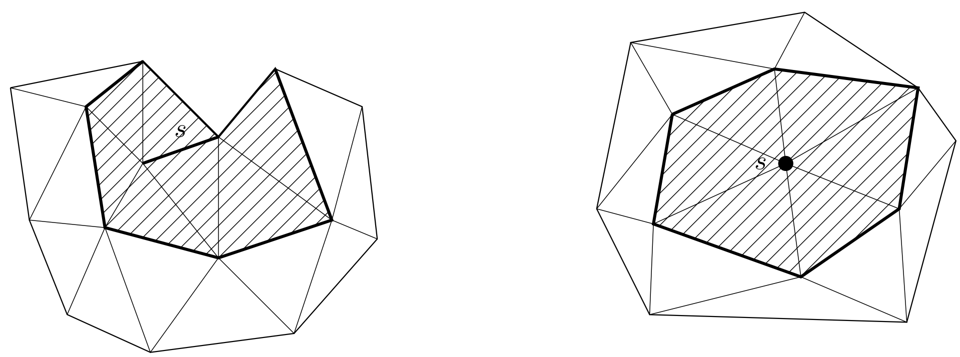

図 20: $\mathrm{St}(s, K)$ は斜線部, $\mathrm{lk}(s, K)$ は s 以外の太線

補題 20.8
s が 0 単体のとき, $\mathrm{St}(s, K) = s * \mathrm{lk}(s, K)$ である。

証明　$\mathrm{St}(s, K)$ に含まれる単体を t とすると, s は t の頂点であるから, $s = |A|$ とすると $t = |AA_1 \cdots A_p|$ と書け, $t' = |A_1 \cdots A_p|$ とおくと $t = s * t'$ である。$\mathrm{lk}(s, K)$ は, このような t' の合併であるから補題を得る。□

21　双対分割

単体的複体 K の多面体 $|K|$ を, 重心細分を用いて胞体分割のように分割することを考える。単体 s の重心を $\hat{s}$ と書き, 単体 t が s の面であって s 自身とは異なるとき $t \precneqq s$ と表す。単体の列 $s_0 \precneqq s_1 \precneqq \cdots \precneqq s_k$ があると, それらの重心 $\hat{s}_0, \hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_k$ は一般の位置にある。したがって, これらの点によって単体 $|\hat{s}_0 \hat{s}_1 \cdots \hat{s}_k|$ が定まる。

例 21.1

2 単体 $s = |A_0 A_1 A_2|$ の面の例として $|A_0| \lneqq |A_0 A_1| \lneqq |A_0 A_1 A_2|$ をとると, これらの重心から定まる 2 単体は図 21 の斜線部である。また例として $|A_1| \lneqq |A_0 A_1 A_2|$ をとると, 1 単体 $|A_1 \hat{s}|$ を得る。このようにして 2 単体 s の面の列すべてを考えると, それから定まる単体たちは 2 単体 s の重心細分を定める。

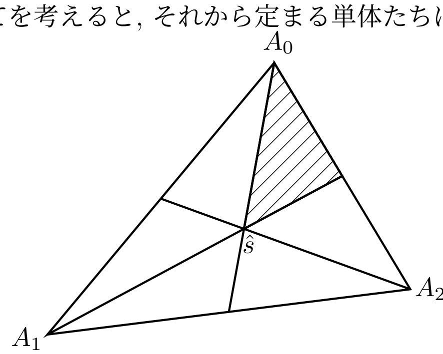

図 21: 重心細分

一般に, 単体的複体 K に対して K の単体の列 $s_0 \lneqq s_1 \lneqq \cdots \lneqq s_k$ をすべて考えると, それらから定まる単体からなる単体的複体は K の重心細分 $\mathrm{sd}K$ である。K の単体 s に対して, s から始まる K の単体の列 $s \lneqq s_1 \lneqq \cdots \lneqq s_k$ をすべて考え, それらから定まる単体たちの合併を s の **双対胞体** (***dual cell***) といい $D(s)$ で表す。(図 22)

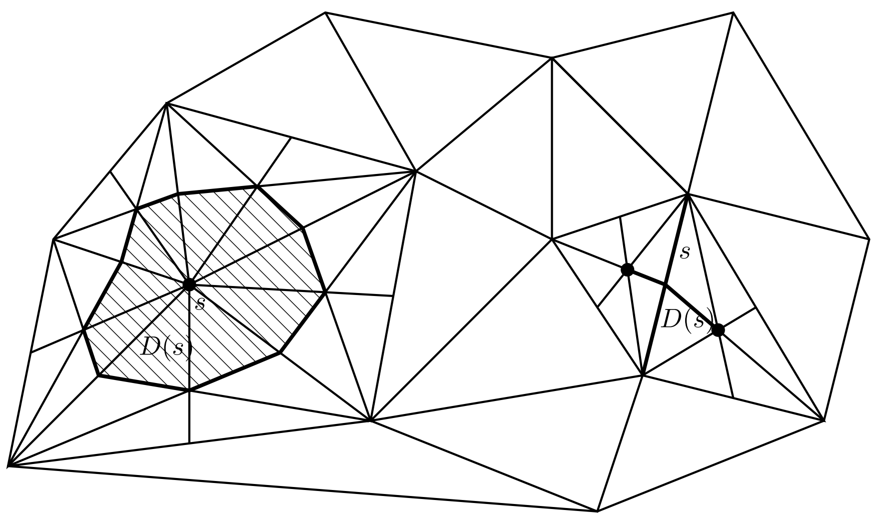

図 22: 双対胞体

$\dim K = n$ で, s が K のある n 単体の面ならば, s の双対胞体 $D(s)$ に現れる単体の最大次元は $n - \dim s$ である。図 22 からみてわかるように, $D(s)$ は s の補空間の補空間の方向にある。

s の重心 $\hat{s}$ は, K の重心細分 $\mathrm{sd}K$ の頂点であることに注意する。$D(s)$ に含まれる $\mathrm{sd}K$ の単体のうち, $\hat{s}$ を含まないもの (または s と交わらないもの) の合併を $\overset{\bullet}{D}(s)$ と書く。

補題 21.2

(**1**) $\overset{\bullet}{D}(s)=\bigcup_{s\precneqq t}D(t)$ となる。

(**2**) $D(s)=\hat{s}*\overset{\bullet}{D}(s)$ である。したがって $D(s)$ は可縮である。

<u>証明</u>　(1)　$D(s)$ に含まれる $\mathrm{sd}K$ の単体は, K の単体の列 $s_1\precneqq s_2\precneqq\cdots\precneqq s_k$ で $s\precneqq s_1$ であるものから定まる単体 $|\hat{s}_1\hat{s}_2\cdots\hat{s}_k|$ である。これより (1) が示される。

(2)　$D(s)$ に含まれている $\mathrm{sd}K$ の単体は, s から始まる K の単体の列 $s\precneqq s_1\precneqq\cdots\precneqq s_k$ から得られる単体 $|\hat{s}\hat{s}_1\cdots\hat{s}_k|$ である。ここで, $|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_k|$ は $\hat{s}$ を含まないから $\overset{\bullet}{D}(s)$ に含まれる。また (1) の証明で述べたように $\overset{\bullet}{D}(s)$ に含まれる $\mathrm{sd}K$ の単体はこのようなものに限る。一方, 補題 20.3 より $|\hat{s}\hat{s}_1\cdots\hat{s}_k|=\hat{s}*|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_k|$ であるから (2) が示される。□

補題 21.2 (2) より, $\overset{\bullet}{D}(s)$ は $D(s)$ のいわば「境界」であり, $E(s):=D(s)-\overset{\bullet}{D}(s)$ は $D(s)$ のいわば内部である。次の命題は $E(s)$ が $|K|$ の分割を与えていることを示している。

補題 21.3

(**1**) $\displaystyle\bigcup_{s\in K}E(s)=|K|$ である。

(**2**) $s\neq t$ ならば $E(s)\cap E(t)=\emptyset$ である。

<u>証明</u>　(1)　$|K|=|\mathrm{sd}K|$ であるから, $|K|$ の任意の点 x は $\mathrm{sd}K$ のある単体 Δ の内部 $\overset{\circ}{\Delta}$ に入っている。このような単体 Δ は x に対して唯 1 つに決まる。Δ を定める K の単体の列を $s\precneqq s_1\precneqq\cdots\precneqq s_k$ とすると $\Delta=|\hat{s}\hat{s}_1\cdots\hat{s}_k|$ であるが, $x\in\overset{\circ}{\Delta}$ より $x\notin|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_k|$ である。したがって $x\in E(s)$ となる。これより (1) が示される。

(2)　対偶を示す。$E(s)\cap E(t)\neq\emptyset$ とし, x を $E(s)\cap E(t)$ の点とする。x を内点として含む $\mathrm{sd}K$ の単体が唯 1 つあるが, $x\in E(s)$ より, その単体は K の単体の列 $s\precneqq s_1\precneqq\cdots\precneqq s_k$ から定まるものである。一方, $x\in E(t)$ より, その単体は K の単体の列 $t\precneqq t_1\precneqq\cdots\precneqq t_k$ から定まるものである。したがって $s=t$ でなければならない。□

補題 21.3 の (2) より $D(s)$ は可縮であるが, だからといって, その「境界」である $\overset{\bullet}{D}(s)$ が球面と同じホモロジー群をもつとは限らない。例えば, 任意の位相空間 Y に対して錘 CY は可縮であるが, その「境界」である Y は球面と異なるホモロジー群を持ち得る。$\overset{\bullet}{D}(s)$ について調べてみよう。まず次が成立する。

補題 21.4

$\mathrm{lk}(\hat{s},\mathrm{sd}K)=|\partial s|*\overset{\bullet}{D}(s)$ が成り立つ。

<u>証明</u>　$\mathrm{sd}K$ の単体で $\mathrm{St}(\hat{s},\mathrm{sd}K)$ に含まれるものは, s が現れる K の単体の列

$$s_1\precneqq\cdots\precneqq s_\ell\precneqq s\precneqq s_{\ell+1}\precneqq\cdots\precneqq s_m$$

から得られる単体 $|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_\ell\hat{s}\hat{s}_{\ell+1}\cdots\hat{s}_m|$ である。したがって $\mathrm{lk}(\hat{s},\mathrm{sd}K)$ に含まれる $\mathrm{sd}K$ の単体は, このような列から s を除いた列から得られる単体 $|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_\ell\hat{s}_{\ell+1}\cdots\hat{s}_m|$ である。補題 20.3 より, $|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_\ell\hat{s}_{\ell+1}\cdots\hat{s}_m|=|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_\ell|*|\hat{s}_{\ell+1}\cdots\hat{s}_m|$ であるが, $s_1\precneqq\cdots\precneqq s_\ell\precneqq s$ より $|\hat{s}_1\cdots\hat{s}_\ell|$ は s の境界 ∂s の重心細分に現れる単体であり, $s\precneqq s_{\ell+1}\precneqq\cdots\precneqq s_m$ より $|\hat{s}_{\ell+1}\cdots\hat{s}_m|$ は $\overset{\bullet}{D}(s)$ に含まれている $\mathrm{sd}K$ の単体である。これより補題が示される。□

$\overset{\bullet}{D}(s)$ のホモロジー群に関して次が成立する。

補題 21.5
$H_q(|K|, |K| - \hat{s}) \cong \widetilde{H}_{q-\dim s-1}(\overset{\bullet}{D}(s))$ である。

証明　$\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K)$ は $\hat{s}$ の開近傍で $\mathrm{lk}(\hat{s}, \mathrm{sd}K)$ は $\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K)$ の境界であるから, 切除定理 8.1 より ($\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K)$ の補集合を切除して)

$$H_q(|K|, |K| - \hat{s}) \cong H_q(\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K), \mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K) - \hat{s})$$

ここで, 補題 20.8 より, $\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K) = \hat{s} * \mathrm{lk}(\hat{s}, \mathrm{sd}K)$ だから, $\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K)$ は可縮で $\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K) - \hat{s} \simeq \mathrm{lk}(\hat{s}, \mathrm{sd}K)$ である。したがって, 対 $(\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K), \mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K) - \hat{s})$ の簡約ホモロジー完全列より

$$\begin{aligned} H_q(\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K), \mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K) - \hat{s}) &\cong \widetilde{H}_{q-1}(\mathrm{St}(\hat{s}, \mathrm{sd}K) - \hat{s}) \\ &\cong \widetilde{H}_{q-1}(\mathrm{lk}(\hat{s}, \mathrm{sd}K) \end{aligned}$$

最後の項は, 補題 21.4 より $\widetilde{H}_{q-1}(|\partial s| * \overset{\bullet}{D}(s))$ と同型であるが, $|\partial s| \approx S^{\dim s-1}$ ($\dim s - 1$ の球面) であるから定理 20.7 より $\widetilde{H}_{q-1}(|\partial s| * \overset{\bullet}{D}(s)) \cong \widetilde{H}_{q-\dim s-1}(\overset{\bullet}{D}(s))$ となる。これらの同型を合わせて補題の同型が示される。□

22　ホモロジー多様体

補題 21.5 によって, 次の対象を考える。

定義 22.1
位相空間 X において, 任意の点 $x \in X$ に対して

$$H_q(X, X - x) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (q = n) \\ 0 & (q \neq n) \end{cases}$$

が成立しているとき, X を n 次元 **ホモロジー多様体 (*homology manifold*)** という。

X の任意の点 x が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相な近傍をもつとき, X を n 次元 **位相多様体 (*toplogical manifold*)** という。位相多様体は第 2 章の章末問題 10.10 よりホモロジー多様体である。しかし逆は正しくないことが知られている。

[**参考**]　位相多様体でないホモロジー多様体を構成するには, 基本群という不変量を用いる。S^3 と同型なホモロジー群をもつ 3 次元位相多様体を **ホモロジー球面 (*homology 3-sphere*)** という。ポアンカレは, 基本群が自明でない (したがって S^3 と同相でない) ホモロジー 3 球面を一つみつけたが, 現在ではそのようなホモロジー 3 球面は無限に沢山存在することが知られている。M を基本群が自明でないホモロジー 3 球面とすると, M の懸垂 $SM = S^0 * M$ は 4 次元ホモロジー多様体であるが, SM においてつぶした 2 点の開近傍は $\boldsymbol{R}^4$ の開集合とは同相になり得ず, SM は位相多様体ではないことがわかる。しかし, 3 次元以下ではホモロジー多様体は位相多様体である

位相多様体は沢山ある。したがってホモロジー多様体も沢山ある。例えば, 閉曲面, 球面, 射影空間は位相多様体である。しかし, 位相多様体やホモロジー多様体でない位相空間も沢山ある。例えば, 8 の字の形をした位相空間 $S^1 \vee S^1$ はホモロジー多様体でない (章末問題 23.6 参照)。

n 次元ホモロジー多様体 X が単体分割 $t : |K| \to X$ をもつと仮定する。同相写像 t を通して X と $|K|$ を同一視する。補題 21.5 より $\overset{\bullet}{D}(s)$ は $n - \dim s - 1$ 次元球面と同じホモロジー群をもつ。$D(s)$ は可縮であったから, 対 $(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ の簡約ホモロジー完全列より

$$H_p(D(s), \overset{\bullet}{D}(s)) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (p = n - \dim s) \\ 0 & (p \neq n - \dim s) \end{cases} \tag{22.1}$$

となる。$D(s)$ に含まれる $\mathrm{sd}K$ の単体の集合は, $\mathrm{sd}K$ の部分複体となる。$\overset{\bullet}{D}(s)$ に対しても同様である。そこで, $(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ を単体的複体の対と思い, $H_p(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ を単体的ホモロジー群と思う。このとき, $H_{n-\dim s}(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ の生成元は, K の重心細分 $\mathrm{sd}K$ において, s から始まる K の単体の列で 1 つずつ次元が上がっていくもの (つまり, 列の長さが $n - \dim s + 1$ のもの) をすべてとり, そこから定まる $\mathrm{sd}K$ の $(n - \dim s)$ 単体たちに適当に向きをつけたものの和, それを $X(s)$ と表す[11], から定まるホモロジー類である。$(n - \dim s)$ を $D(s)$ の次元といい $\dim D(s)$ と表す。

一般に, $D(s)$ は $n - \dim s$ 次元円板 $D^{n-\dim s}$ と同相とは限らないが, (22.1) よりホモロジー群の観点からは同じである。また, 補題 21.3 より, それらは X の分割を与えている。第 3 章の胞体分割に対する議論をよくみると, $D(s)$ による X の分割に対しても同じ議論が成立することがわかる。特に, 定理 13.6 が我々の分割に対しても成立する。このことを正確に述べよう。$\dim D(s) \leq p$ なる $D(s)$ の合併を X_p と書き

$$D_p(X) := H_p(X_p, X_{p-1})$$

とおく。ただし, $p = 0$ のときは $X_{-1} = \emptyset$ と了解する。$\partial_* : D_p(X) \to D_{p-1}(X)$ を 3 対 (X_p, X_{p-1}, X_{p-2}) のホモロジー完全列における連結準同型写像とすると, $\mathcal{D}(X) := \{D_p(X), \partial_*\}$ はチェイン複体となり

$$H_p(\mathcal{D}(X)) \cong H_p(X) \tag{22.2}$$

となる。

チェイン複体 $\mathcal{D}(X)$ について少し観察しておく。補題 13.1 と同様に,

$$D_p(X) = H_p(X_p, X_{p-1}) \cong \bigoplus_{\dim s = n-p} H_p(D(s), \overset{\bullet}{D}(s)) \tag{22.3}$$

を得る。ここで, $\dim s = n$ (つまり $p = 0$) のとき, $D(s) = \hat{s}$, $\overset{\bullet}{D}(s) = \emptyset$ であるから, $D_0(X) = H_0(X_0)$ は 0 単体 $\langle \hat{s} \rangle$ $(\dim s = n)$ たちで生成された自由加群である。(22.1) の後で注意したように, $H_p(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ は s から始まる K の単体の列をすべてとり, それらから定まる $\mathrm{sd}K$ の単体たちに適当に向きをつけたものの和 $X(s)$ から定まるホモロジー類 $[X(s)]$ である。ホモロジー類 $[X(s)]$ を同型を通して $D_p(X)$ の元と思う。∂_* の定義より, $\partial_*([X(s)])$ はチェイン $X(s)$ の境界 $\partial(X(s))$ が定めるホモロジー類である。$\partial(X(s))$ に現れる各 $p-1$ 単体は $\overset{\bullet}{D}(s)$ に含まれるが, 補題 21.2 の (1) より $\overset{\bullet}{D}(s) = \bigcup_{s \precneqq t} D(t)$ で $\dim D(t) \leq p-1$ であるから, $\partial(X(s))$ に現れる各 $p-1$ 単体は X_{p-1} に含まれる。したがってチェイン $\partial(X(s))$ は $H_{p-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$ の元を定める。これが $\partial_*([X(s)])$ である。

[11] $X(s)$ は向きのとり方により 2 つの選び方がある。

以上のことから, 同型 (22.3) を通して $H_p(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ を $D_p(X)$ の部分群と思う。また, $H_p(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ の元 $[X(s)]$ とそれを表すサイクル $X(s)$ を同一視する。したがって, $D_p(X)$ は $X(s)$ $(\dim s = n-p)$ で生成されている自由加群と思う。このとき, 連結準同型写像 ∂_* は上でみたようにバウンダリー作用素 ∂ と思える。

単体分割をもつホモロジー多様体のホモロジー群が双対分割を用いて求めることができることをみたが, 単体分割をもつホモロジー多様体には, もう1つ際立った性質がある。

補題 22.2
$\dim s = n-1$ のとき, s を面にもつ K の n 単体はちょうど2つある[12]。

証明　s を面にもつ K の n 単体が r 個あり, それらを $t_1, t_2, \cdots, t_r$ とすると, $D(s)$ は r 個の 1 単体 $|\hat{s}\hat{t}_1|, \cdots, |\hat{s}\hat{t}_r|$ の合併で, $\overset{\bullet}{D}(s)$ は r 個の点 $\hat{t}_1, \cdots, \hat{t}_r$ からなる。一方, $\dim s = n-1$ であるから, 補題 21.5 と $X = |K|$ が n 次元ホモロジー多様体であるという仮定より, $\overset{\bullet}{D}(s)$ は2点 S^0 と同じホモロジー群をもつ。したがって $r = 2$ でなければならない。□

K の n 単体 s_i $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ とする。上の補題より, $n-1$ 単体はちょうど2つの n 単体の面であるから, 各 s_i に適当に向きを付けると, 向き付けられた n 単体 $\langle s_i \rangle$ の和 $\sum_{i=1}^{\ell} \langle s_i \rangle$ がサイクルになる可能性がある。そこで, 各 n 単体 s_i に適当に向きを付けて $\sum_{i=1}^{\ell} \langle s_i \rangle$ がサイクルになるとき, 単体分割されたホモロジー多様体 X は **向き付け可能** (***orientable***) であるといい, このサイクルが定める $H_n(X)$ の元を X の **基本類** (***fundamental class***) という。

単体分割をもつホモロジー多様体で向き付け可能なものは沢山あるが, そうでないものも沢山ある。次の定理は, 向き付け可能性に関するホモロジー群による特徴付けを与えている。

定理 22.3
単体分割をもつ n 次元ホモロジー多様体 X が連結であるとき, X が向き付け可能ならば $H_n(X) \cong \boldsymbol{Z}$, そうでないならば $H_n(X) = 0$ である。

証明　これまでと同様に, $t : |K| \to X$ を X の単体分割, s_i $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ を K の n 単体とすると, K の n チェインは $\sum_{i=1}^{\ell} a_i \langle s_i \rangle$ $(a_i \in BZ)$ と表される。ここで, 補題 22.2 と X が連結であるという仮定より, $\sum_{i=1}^{\ell} a_i \langle s_i \rangle$ がサイクルならば a_i の絶対値は i によらない。もし, X が向き付け可能ならば, 各 s_i に適当に向きを付けて $\sum_{i=1}^{\ell} \langle s_i \rangle$ がサイクルになるから, a_i 自身が i によらない。つまり, n サイクルは $\sum_{i=1}^{\ell} \langle s_i \rangle$ の整数倍であるから $H_n(X) \cong \boldsymbol{Z}$ となる。X が向き付け可能でないならば, $\sum_{i=1}^{\ell} \langle s_i \rangle$ がサイクルとなるように各 s_i を向き付けられないから, n サイクルは 0 以外にない。よって, このとき $H_n(X) = 0$ となる。□

例 22.4
例 10.6 および 章末問題 23.5 より, $\boldsymbol{R}P^n$ は単体分割をもつ n 次元ホモロジー多様体であるが, 例 14.6 より, $\boldsymbol{R}P^n$ が向き付け可能であるのは n が奇数のときである。

$\boldsymbol{Z}_2$ 係数では向き付け可能性に関係なく次がいえる。

[12] このような n 次元単体的複体を疑多様体 (pseudo-manifold) という。

定理 22.5
X が単体分割をもつ連結な n 次元ホモロジー多様体ならば $H_n(X;\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}_2$ である。

<u>証明</u>　定理 22.3 の証明と本質的に同じ。実際, K の $\boldsymbol{Z}_2$ 係数の n チェイン $\sum_{i=1}^{\ell} b_i s_i$ $(b_i \in \boldsymbol{Z}_2)$ がサイクルである必要十分条件は, b_i が i によらないことである。よって $\sum_{i=1}^{\ell} s_i$ が $H_n(X;\boldsymbol{Z}_2)$ で 0 でない元であり生成元となる。□

23　ポアンカレ双対定理

以上の準備の下に, 本章の目標であった次の定理を証明しよう。

定理 23.1 (ポアンカレ双対定理)
単体分割をもつ n 次元ホモロジー多様体 X が向き付け可能ならば, すべての q に対して

$$H^q(X) \cong H_{n-q}(X)$$

<u>証明</u>　$t : |K| \to X$ を単体分割とし, X と $|K|$ を同一視する。K のすべての単体に向きを付ける。ただし, n 単体 s_i $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ の向きは, $\sum_{i=1}^{\ell} \langle s_i \rangle$ がサイクルとなるようにとる。その他の単体の向きは自由にとる。K の向き付けられた q 単体 $\langle s \rangle$ に対して, K の q コチェイン群 $C^q(K) := \mathrm{Hom}(C_q(K), \boldsymbol{Z})$ の元 $\langle s \rangle^*$ を, $\langle s \rangle$ に対しては 1 を, K のその他の向き付けられた q 単体に対しては 0 を対応させるものとして定義する。明らかに $C^q(K)$ は $\{\, \langle s \rangle^* \,;\, s$ は K の q 単体$\,\}$ で生成された自由加群である。一方, 前節の最後でみたように, $D_{n-q}(X)$ は $\{\, X(s) \,;\, s$ は K の q 単体$\,\}$ で生成された自由加群である。したがって $C^q(K)$ と $D_{n-q}(X)$ は可群として同型である。これらの同型を与える写像は沢山あるが, 図式

$$\begin{array}{ccc} C^q(K) & \xrightarrow{\vartheta} & D_{n-q}(X) \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\partial} \\ C^{q-1}(K) & \xrightarrow{\vartheta} & D_{n-q+1}(X) \end{array} \tag{23.1}$$

が可換となる同型 $\vartheta : C^q(K) \to D_{n-q}(X)$ は, $H^q(K)$ と $H_{n-q}(\mathcal{D}(X))$ の同型を導く。17 節で注意したように $H^q(K) \cong H^q(X)$ であり, (22.2) より $H_{n-q}(\mathcal{D}(X)) \cong H_{n-q}(X)$ である。したがって, 図式 (23.1) を可換にする同型 ϑ が各 q に対して構成できれば, 定理が証明されたことになる。

以下, 同型 $\vartheta : C^q(K) \to D_{n-q}(X)$ を q に関して帰納的に構成する。証明をみればわかるように, $\vartheta(\langle s \rangle^*)$ は符号を除いて $X(s)$ である。

ステップ　1：　$q = n$ のとき, $\vartheta : C^n(K) \to D_0(X)$ を, K の n 単体 s_i に対して $\vartheta(\langle s_i \rangle^*) = \langle \hat{s}_i \rangle$ と定め線型に拡張する。前の節で注意したように, $D_0(X)$ は点 $\langle \hat{s}_i \rangle$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ で生成されているから $\vartheta : C^n \to D_0(X)$ は同型である。

ステップ　2：　$q = n - 1$ のとき, $\vartheta : C^{n-1}(K) \to D_1(X)$ を, $q = n$ とした図式 (23.1)

$$\begin{array}{ccc} C^n(K) & \xrightarrow{\vartheta} & D_0(X) \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\partial} \\ C^{n-1}(K) & \xrightarrow{\vartheta} & D_1(X) \end{array}$$

が可換になるように構成する。s を K の $n-1$ 単体とすると, $q=n$ とした図式 (23.1) を可換にするためには

$$\partial(\vartheta(\langle s\rangle^*)) = \vartheta(\delta(\langle s\rangle^*)) \tag{23.2}$$

をみたすように $\vartheta(\langle s\rangle^*)$ を定義すればよい。補題 22.2 より s は丁度 2 つの n 単体の面である。それらの n 単体を s_1, s_2 とすると, $\sum_{i=1}^{\ell}\langle s_i\rangle$ がサイクルであることより, $\partial(\langle s_1\rangle)+\partial(\langle s_2\rangle)$ の $\langle s\rangle$ における係数は 0 である。したがって, $\partial(\langle s_1\rangle)$ の $\langle s\rangle$ における係数を 1 とすると, $\partial(\langle s_2\rangle)$ の $\langle s\rangle$ における係数は -1 である。このとき, 簡単な考察により

$$\delta(\langle s\rangle^*) = \langle s_1\rangle^* - \langle s_2\rangle^* \tag{23.3}$$

となる[13]。したがって, ステップ 1 より

$$\vartheta(\delta(\langle s\rangle^*)) = \vartheta(\langle s_1\rangle^* - \langle s_2\rangle^*) = \langle \hat{s}_1\rangle - \langle \hat{s}_2\rangle \tag{23.4}$$

一方, $D(s)$ は 2 つの 1 単体 $|\hat{s}\hat{s}_1|$, $|\hat{s}\hat{s}_2|$ の合併で, $\overset{\bullet}{D}(s)$ は 2 点 $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$ からなっているから, $\mathrm{sd}K$ における 1 チェイン $\langle\hat{s}_2\hat{s}\rangle+\langle\hat{s}\hat{s}_1\rangle$ は $H_1(D(s),\overset{\bullet}{D}(s))$ の生成元を定める。サイクル $\langle\hat{s}_2\hat{s}\rangle+\langle\hat{s}\hat{s}_1\rangle$ は, (符号を除けば) 前の節で導入した $X(s)$ である。前の節の最後に約束したように, 同型 (22.3) を通して $H_1(D(s),\overset{\bullet}{D}(s))$ を $D_1(X)$ の部分群と思い, $H_1(D(s),\overset{\bullet}{D}(s))$ の元とそれを表すサイクルを同一視して $\vartheta(\langle s\rangle^*) := \langle\hat{s}_2\hat{s}\rangle+\langle\hat{s}\hat{s}_1\rangle \in D_1(X)$ と定めると

$$\partial(\vartheta(\langle s\rangle^*)) = \partial(\langle\hat{s}_2\hat{s}\rangle+\langle\hat{s}\hat{s}_1\rangle) = \langle\hat{s}_1\rangle - \langle\hat{s}_2\rangle$$

この式と (23.4) より, (23.2) がみたされている。

ステップ 3： $p \le n-1$ とし, $q \ge p$ なるすべての q に対して同型 $\vartheta : C^q(K) \to D_{n-q}(X)$ が, 図式 (23.1) を可換にし, しかも向き付けられた q 単体 $\langle t\rangle$ に対して $\vartheta(\langle t\rangle^*)$ が (符号を除いて) $X(t)$ であるように定義されているとする。s を K の $p-1$ 単体とし, $t_1, t_2, \cdots, t_k$ を s を面にもつ K の p 単体とする。$\partial(\langle t_i\rangle)$ における $\langle s\rangle$ の係数を a_i $(a_i=\pm 1)$ とおくと, (23.3) を得たのと同じ議論によって $\delta(\langle s\rangle^*) = \sum_{i=1}^{k} a_i\langle t_i\rangle^* \in C^q(K)$ を得る。これより

$$\vartheta(\delta(\langle s\rangle^*)) = \sum_{i=1}^{k} a_i\vartheta(\langle t_i\rangle^*) \in D_{n-p}(X)$$

帰納法の仮定より $\vartheta(\langle t_i\rangle^*)$ は (符号を除いて) $X(t_i)$ であるから, $\vartheta(\langle t_i\rangle^*)$ に現れる $\mathrm{sd}K$ の $n-p$ 単体は $D(t_i)$ に含まれている。また, 補題 21.2 の (1) より $\sum_{i=1}^{k} D(t_i) = \overset{\bullet}{D}(s)$ であるから, $\vartheta(\delta(\langle t_i\rangle^*))$ に現れる $\mathrm{sd}K$ の $n-p$ 単体は $\overset{\bullet}{D}(s)$ に含まれている。さらに, 帰納法の仮定より $\partial(\vartheta(\delta(\langle s\rangle^*))) = \vartheta(\delta(\delta(\langle s\rangle^*)))$ であるが, 後者は 0 であるから $\vartheta(\delta(\langle s\rangle^*))$ はサイクルである。したがって $H_{n-p}(\overset{\bullet}{D}(s))$ の元を定める。

$\dim s = p-1$ より, $\overset{\bullet}{D}(s)$ は $n-p$ 次元球面と同じホモロジー群をもつが, 初めの仮定より $p \le n-1$ であるから $n-p \ge 1$ となる。よって $H_{n-p}(\overset{\bullet}{D}(s)) \cong \boldsymbol{Z}$ である。$\vartheta(\delta(\langle s\rangle^*)) = \sum_{i=1}^{k} a_i\vartheta(\langle t_i\rangle^*)$ を $D(t_i)$ に制限したものは $a_i\vartheta(\langle t_i\rangle^*)$ であるが, $a_i=\pm 1$ で $\vartheta(\langle t_i\rangle^*)$ は (符号を除いて) $X(t_i)$ であるから, $H_{n-p}(D(t_i),\overset{\bullet}{D}(t_i)) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元である。したがって $\vartheta(\delta(\langle s\rangle^*))$ も $H_{n-p}(\overset{\bullet}{D}(s))$ の生成元でなければ

[13] $\delta(\langle s\rangle^*) \in C^n(K)$ であるから $\delta(\langle s\rangle^*) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i\langle s_i\rangle^*$ $(a_i \in \boldsymbol{Z})$ と書ける。ここで, $a_i = \langle\delta(\langle s\rangle^*), \langle s_i\rangle\rangle = \langle\langle s\rangle^*, \partial(\langle s_i\rangle)\rangle$ において, $\partial(\langle s_1\rangle)$ における $\langle s\rangle$ の係数は 1 で $\partial(\langle s_2\rangle)$ における $\langle s\rangle$ の係数は -1 であるから $a_1=1$, $a_2=-1$ である。また, $i \ne 1, 2$ のとき, $\partial(\langle s_i\rangle)$ に $\langle s\rangle$ は現れないから $a_i=0$ である。これより $\delta(\langle s\rangle^*) = \langle s_1\rangle^* - \langle s_2\rangle^*$ が示される。

ならない。一方, $D(s)$ は可縮であるから, $\partial_* : H_{n-p+1}(D(s), \overset{\bullet}{D}(s)) \cong H_{n-p}(\overset{\bullet}{D}(s))$ である。したがって $\vartheta(\langle s\rangle^*) \in H_{n-p+1}(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ を, ∂_* による像が $\vartheta(\delta(\langle s\rangle^*))$ となるものとして定義すると, $\vartheta(\langle s\rangle^*)$ は $H_{n-p+1}(D(s), \overset{\bullet}{D}(s))$ の生成元となる。つまり (符号を除いて) $X(s)$ と等しい。また, (23.2) が成立している。

以上より, 求める ϑ がすべての q に対して定義され, 定理の証明が完成する。□

定理 17.1 とポアンカレ双対定理 23.1 を合わせて次を得る。

系 23.2
X を単体分割をもつ向き付け可能な n 次元ホモロジー多様体, b_q を X の q 次ベッチ数, T_q を $H_q(X)$ のねじれ群とすると, $b_q = b_{n-q}$ かつ $T_{q-1} \cong T_{n-q}$ となる。特に, 単体分割をもつ向き付け可能な奇数次元ホモロジー多様体のオイラー数は 0 である[14]。

例 23.3
n が奇数のとき, 例 22.4 より $\boldsymbol{R}P^n$ は 系 23.2 の仮定をみたし, 例 14.6 をみると確かに 系 23.2 が成立している。

ポアンカレ双対定理 23.1 において, 「向き付け可能」という仮定は落せない。実際, 単体分割をもつ n 次元ホモロジー多様体 X が連結であるとき, $H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ であるが, 定理 22.3 より, X が向き付け不可能ならば $H_n(X) = 0$ である。したがって $b_0 \neq b_n$ であるから, 系 23.2 (よってポアンカレ双対定理 23.1) は「向き付け可能」の仮定がなければ成立しない。しかし係数を $\boldsymbol{Z}_2$ にとれば, 定理 23.1 と同様の証明で (実は $\boldsymbol{Z}_2$ 係数の方が易しい) 次が示せる。

定理 23.4 ($\boldsymbol{Z}_2$ 係数のポアンカレ双対定理)
X を単体分割をもつ n 次元ホモロジー多様体とすると, すべての q に対して

$$H^q(X; \boldsymbol{Z}_2) \cong H_{n-q}(X; \boldsymbol{Z}_2)$$

位相多様体に対するポアンカレ双対定理に関しては, 単体分割の存在を仮定しない証明が知られている。その証明は, 幾何学的ではないが, カップ積を求めるのに有効であるなどの利点がある。例えば, 第 4 章で求めた $\boldsymbol{R}P^n$ のコホモロジー環の構造も, その証明から分かる。

ポアンカレ双対定理は, 代数的トポロジーの中心に位置する重要な定理である。この定理の拡張, 応用などは,

中岡 稔「位相幾何学 (ホモロジー論)」, 共立出版, 1970 (1999 復刊)

服部 晶夫「位相幾何学」, 岩波書店,1991

を参照されたい。

[14] このオイラー数に関する主張は, 「向き付け可能」という仮定がなくても成立する。理由は以下の通り。X を 単体分割をもつ向き付け不可能な n 次元ホモロジー多様体としたとき, X の 2 重被覆 $\widetilde{X} \to X$ で, $\widetilde{X}$ は単体分割をもつ向き付け可能な n 次元ホモロジー多様体であるものが存在することが知られている。2 重被覆ということより $\chi(\widetilde{X}) = 2\chi(X)$ で, $\widetilde{X}$ は向き付け可能だから n が奇数のとき $\chi(\widetilde{X}) = 0$, したがって $\chi(X) = 0$ となる。

＝＝＝＝＝章 末 問 題＝＝＝＝＝

問題 23.5 S^n, $\boldsymbol{R}P^n$ が n 次元位相多様体であることを示せ。

問題 23.6 自然数 m, n に対して, $S^m \vee S^n$ はホモロジー多様体ではないことを示せ。

問題 23.7 全射準同型写像 $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_2$ は, チェイン複体 $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X; \boldsymbol{Z})$ から $\mathcal{S}(X; \boldsymbol{Z}_2)$ へのチェイン写像を導くから, ホモロジー群の間の準同型写像 : $H_q(X) = H_q(X; \boldsymbol{Z}) \to H_q(X; \boldsymbol{Z}_2)$ を導く。この了解の下に, X を単体分割をもつ連結な n 次元ホモロジー多様体とすると, 準同型写像 $\alpha : H_n(X; \boldsymbol{Z}) \to H_n(X; \boldsymbol{Z}_2)$ が全射である必要十分条件は X が向き付け可能であることを示せ。

問題 23.8 X, Y を単体分割をもつ連結な n 次元ホモロジー多様体とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする。もし, X が向き付け可能で Y が向き付け不可能ならば, $f_* : H_n(X; \boldsymbol{Z}) \to H_n(Y; \boldsymbol{Z}_2)$ は零写像であることを示せ。