

## 第3章 胞体複体

### 11 写像度

$n$  を負でない整数とすると, 定理 9.1 より  $\tilde{H}_q(S^n)$  は  $\mathbb{Z}$  と同型である。したがって, 連続写像  $f: S^n \rightarrow S^n$  に対して

$$f_*(u) = (\deg f) u \quad (u \in \tilde{H}_q(S^n))$$

となるような整数  $\deg f$  が定まる。この整数を  $f$  の 写像度 (mapping degree) という。

次の補題 (1) – (4) の性質が成り立つ。

補題 11.1

- (1)  $f \simeq g$  ならば  $\deg f = \deg g$  である。
- (2)  $f$  が恒等写像ならば  $\deg = 1$  である。
- (3)  $f$  が定値写像ならば  $\deg = 0$  である。
- (4)  $\deg(f \cdot g) = \deg f \deg g$  である。

証明 (1) は定理 7.3 より, (2), (4) は 命題 6.4 より示される。(3) を示そう。1 点からなる位相空間を  $pt$  と書くと, 定値写像  $f$  は次の 2 つの写像

$$S^n \rightarrow pt \rightarrow S^n$$

の合成である。ここで後者の写像は,  $pt$  を 1 点  $f(S^n)$  に移す写像である。したがって 準同型写像  $f_*: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$  は, 次の 2 つの準同型写像

$$\tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(pt) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$$

の合成であるが,  $\tilde{H}_n(pt) = 0$  であるから  $f_*$  は零写像である。したがって  $\deg f = 0$  となる。□

系 11.2

連続写像  $G: D^n \rightarrow S^{n-1}$  を  $\partial D^n = S^{n-1}$  に制限した写像を  $G|_{S^{n-1}}$  と書くと,  $\deg G|_{S^{n-1}} = 0$  である。

証明 写像  $F: S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$  を  $F(x, t) := G(tx)$  ( $x \in S^{n-1}, t \in [0, 1]$ ) と定義すると,  $G$  が連続写像であるから  $F$  も連続写像である。ここで  $F$  を  $S^{n-1} \times \{0\}$  に制限したものは  $S^{n-1}$  のすべての点を  $G(0)$  に移す定値写像であるから,  $G|_{S^{n-1}}$  と定値写像はホモトピックになり, 補題 11.1 (1), (3) より  $\deg G|_{S^{n-1}} = 0$  となる。□

補題 11.1 の (1) より, 対応

$$\deg: [S^{n-1}, S^{n-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$$

が定まる。ここに  $[S^{n-1}, S^{n-1}]$  は  $S^{n-1}$  から  $S^{n-1}$  への連続写像のホモトピー類を表す。

いくつかの基本的な写像に対して写像度を求めよう。

### 補題 11.3

$r : S^n \rightarrow S^n$  を

$$r(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) := (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

で定義される連続写像とすると,  $\deg r = -1$  である。

証明 次元  $n$  に関する数学的帰納法で示す。 $n = 0$  のとき,  $S^0$  は2点  $\{+1, -1\}$  からなり,  $\tilde{H}_0(S^0)$  の生成元は  $[+1] - [-1]$  で与えられる。 $r(\pm 1) = \mp 1$  より,  $r_*([+1] - [-1]) = [-1] - [+1] = -([+1] - [-1])$  となる。したがって,  $n = 0$  のとき補題は成立している。

$n - 1$  まで補題が正しいとして  $n$  のときを示す。 $S^n$  の赤道  $\{x_{n+1} = 0\}$  を  $S^{n-1}$  と同一視すると, 写像  $r : S^n \rightarrow S^n$  は  $S^{n-1}$  を  $S^{n-1}$  に移す。(9.2) より  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$  であるが, この同型対応の構成をみると  $r_*$  と可換であることが分かる。つまり図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ r_* \downarrow & & \downarrow r_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

は可換である。図式の右側の  $r_*$  は帰納法の仮定より  $-1$  倍であるから, 図式の左側の  $r_*$  も  $-1$  倍となる。□

### 補題 11.4

$T : S^n \rightarrow S^n$  を  $T(x) = -x$  で定義される連続写像とすると,  $\deg T = (-1)^{n+1}$  である。この写像  $T$  を対称写像 (*antipodal map*) という。

証明  $S^n$  の  $i$  番目の座標  $x_i$  を  $-x_i$  に移しその他の座標は動かさない連続写像を  $r_i : S^n \rightarrow S^n$  とすると, (座標の順番を取り換えてみれば) 補題 11.3 より  $\deg r_i = -1$  である。また  $T = r_1 \cdot r_2 \cdots r_{n+1}$  であるから, 補題 11.1 の (4) を繰り返し用いれば  $\deg T = (-1)^{n+1}$  を得る。□

対称写像  $T$  は不動点をもたない。次の命題は, ある意味でこの逆の命題である。

### 命題 11.5

連続写像  $f : S^n \rightarrow S^n$  が不動点をもたなければ,  $f \simeq T$  である。特に,  $\deg f = (-1)^{n+1}$  である。

証明 すべての  $x \in S^n$  に対して  $f(x) \neq x$  であるから,  $(1-t)f(x) - tx$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は 0 にならない。したがって写像  $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  が

$$F(x, t) := \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

によって定義できるが, これは連続写像で,  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = -x = T(x)$  であるから  $f$  と対称写像  $T$  のホモトピーを与えている。命題の後ろの主張は, この事実と補題 11.4 から示される。

## 12 胞体分割

位相空間  $X$  の部分集合  $e$  に対して, 連続写像  $\varphi : D^n \rightarrow X$  で  $\varphi(D^n) = \bar{e}$  かつ  $\varphi|_{\overset{\circ}{D}^n} : \overset{\circ}{D}^n \rightarrow e$  が同相であるものが存在するとき,  $e$  を  $X$  の胞体またはセル (*cell*) といい,  $\varphi$  を胞体  $e$  の特性写像 (*characteristic map*) という。 $\overset{\circ}{D}^n$  と  $\overset{\circ}{D}^m$  が同相ならば  $n = m$  であるから (第2章の章末問

題 10.9), 上の  $n$  は胞体  $e$  により唯 1 通りに決まる。この  $n$  を 胞体  $e$  の 次元 といい,  $\dim e$  と表す。また, 次元が  $n$  の胞体を  $n$  胞体といい,  $n$  を明記したいときは  $e$  を  $e^n$  と表す。 $n = 0$  のとき  $D^0 = \overset{\circ}{D}^0 = 1$  点であるから, 0 胞体は 1 点である。

$X$  の胞体の集合  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が次の 2 つの条件をみたしているとき,  $X$  の 胞体分割 (cell decomposition) という。

- (1)  $e_\lambda$  は互いに交わずに  $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$
- (2) 次元が  $r$  以下の  $e_\lambda$  全体の和集合を  $X^{(r)}$  と表すとき,  $\overline{e_\lambda} - e_\lambda \subset X^{(\dim e_\lambda - 1)}$  がすべての  $e_\lambda$  に対して成り立つ。

位相空間  $X$  と  $X$  の胞体分割  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の組  $(X, \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  を 胞体複体 (cell complex) という。胞体複体  $(A, \{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})$  が 部分複体 (subcomplex) であるとは,  $A$  が  $X$  の部分空間であり,  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  が  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の部分族であることとする。混乱のおそれがない場合は, 単に  $X$  を胞体複体,  $A$  を部分複体 という。 $X^{(r)}$  は胞体複体  $X$  の  $r$  切片 (skelton) とよばれ, 自然に  $X$  の部分複体となる。胞体の数が有限である胞体複体を 有限複体 (finite complex) という。簡単のため, 以後有限複体のみを扱う。 $X$  が有限複体ならば 胞体の次元の最大値があるが, これを  $X$  の 次元 といい  $\dim X$  と記す。

胞体分割の例をいくつか挙げよう。

#### 例 12.1

$s$  を  $q$  単体とすると  $(|K(s)|, |K(\partial s)|)$  と  $(D^n, S^{n-1})$  は空間対として同相である。したがって, 単体的複体  $K$  に対して  $\{|K(s)| - |K(\partial s)|; s \in K\}$  は  $|K|$  の胞体分割を与える。 $(K, t)$  が位相空間の単体分割であるとき,  $t: |K| \rightarrow X$  は同相写像であるから,  $\{t(|K(s)| - |K(\partial s)|); s \in K\}$  は  $X$  の胞体分割である。

上の例より, 単体分割は胞体分割を与えるが, 単体分割から得られない胞体分割は以下の例にあるようにたくさんある。

#### 例 12.2 グラフ

グラフ  $G$  の頂点を 0 胞体とし, 辺から端点を除いたものを 1 胞体とすると  $G$  の胞体分割が得られる。 $G$  にループがある場合や 2 つの頂点を端点に持つ辺が 2 つ以上ある場合には, この胞体分割は単体分割より得られない。

#### 例 12.3 2 次元凸多面体

2 次元凸多面体  $P$  は, 頂点を 0 胞体, 辺から端点を除いたものを 1 胞体, 面の内部を 2 胞体とした胞体分割を持つ。各面は 3 角形である必要はない。

#### 例 12.4 球面 $S^n$

$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}; x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  とし,  $S^n \cap \{x_{n+1} = 0\}$  を  $S^{n-1}$  と自然に同一視することができ,  $S^0 \subset S^1 \subset \dots \subset S^{n-1} \subset S^n$  と思える。そこで

$$\begin{aligned} e_+^q &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_{q+1}) \in S^q; x_{q+1} > 0\} \\ e_-^q &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_{q+1}) \in S^q; x_{q+1} < 0\} \end{aligned}$$

とおくと, これらは  $S^n$  の  $q$  胞体である。実際, 写像  $\varphi_\pm^q: D^q \rightarrow S^q \subset S^n$  を  $\varphi_\pm^q(u_1, u_2, \dots, u_q) := (u_1, u_2, \dots, u_q, \pm \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2 - \dots - u_q^2})$  と定めると,  $e_\pm^q$  の特性写像である。したがって  $\{e_+^0, e_-^0, e_+^1, e_-^1, \dots, e_+^n, e_-^n\}$  は  $S^n$  の胞体分割を与える。胞体の数は  $2n + 2$  個である。

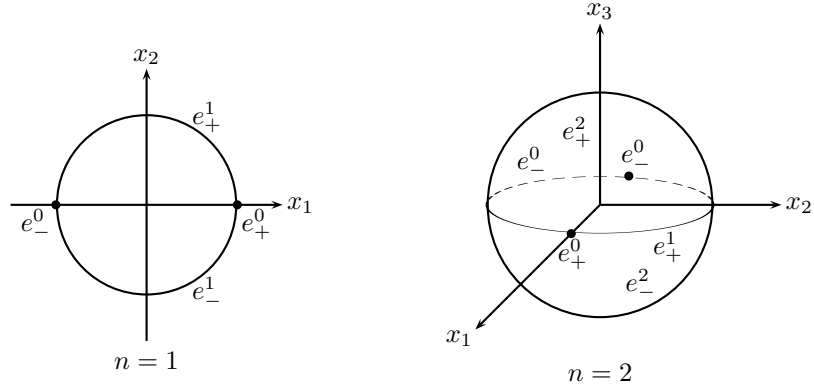


図 11:  $S^n$  の胞体分割 (1)

$s$  を  $n+1$  単体とすると, 同相写像  $t: |K(\partial(s))| \rightarrow S^n$  があり,  $(K(\partial(s)), t)$  が  $S^n$  の単体分割となる。この単体分割から得られる胞体の数は  $\sum_{q=0}^n \binom{n+2}{q+1} = 2^{n+2} - 2$  個である。これに比べて, 例 12.4 の分割は胞体の数がずっと少ない。しかしもっと胞体の数を少なくとることができる。

#### 例 12.5 球面 $S^n$ の違う胞体分割

$S^n$  を 2 個の胞体に分割することができる。 $D^n$  の境界  $S^{n-1}$  を 1 点につぶした商空間  $D^n/S^{n-1}$  が  $S^n$  に同相であることに注意する。同相写像を 1 つ固定して,  $D^n/S^{n-1}$  を  $S^n$  と同一視し,  $\pi: D^n \rightarrow D^n/S^{n-1} = S^n$  を射影とし,  $e^0 := \varphi(S^{n-1})$ ,  $e^n := S^n - e^0$  とおくと,  $\{e^0, e^n\}$  は  $S^{n-1}$  の胞体分割を与える。 $\varphi$  は  $e^n$  の特性関数である。

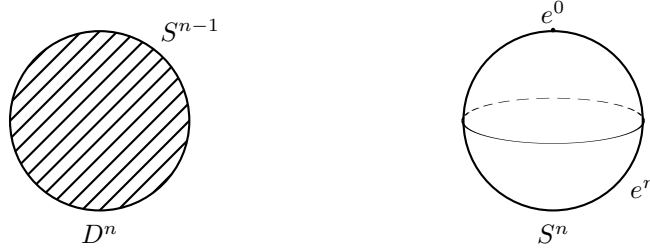


図 12:  $S^n$  の胞体分割 (2)

#### 例 12.6 トーラス

トーラス  $S^1 \times S^1$  の胞体分割を与えよう。 $p$  を  $S^1$  の 1 つの点とし,

$$\begin{aligned} e^0 &:= \{p\} \\ e_1^1 &:= S^1 \times \{p\} - e^0, & e_2^1 &:= \{p\} \times S^1 - e^0 \\ e^2 &:= S^1 \times S^1 - (e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1) \end{aligned}$$

とおくと, これらはトーラスの胞体分割を与える。実際これらが胞体であることをみるには, それぞれ特性関数が存在するのを見ることをみなければならない。 $e_1^1, e_2^1$  に特性関数が存在するのを見るのは容易であ

る。 $e^2$  の特性関数を見るには、トーラスを  $S^1 \times \{p\}$  と  $\{p\} \times S^1$  に沿って切り開き、トーラスが正方形から互いに向き合う辺を貼り合わせて (または同一視して) 得られることに注意する (図 13 参照)

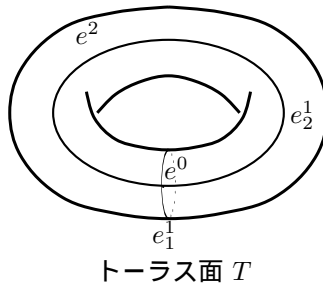
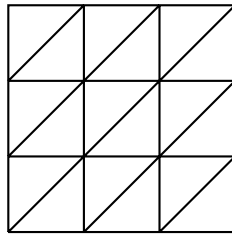


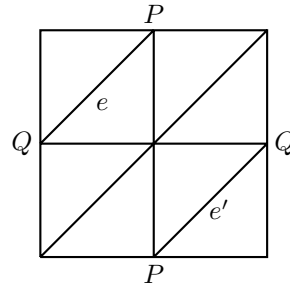
図 13: 図 : トーラス

正方形は  $D^2$  と同相であるから、正方形の辺を同一視する写像が  $D^2$  からトーラスへの写像を導くが、これが  $e^2$  の特性写像となる。

トーラスを単体分割しようとする、非常に沢山の単体を必要とする。例えば、正方形を図 14(1) のように分割し、向かい合う辺を貼り合わせればトーラスの単体分割を得るが、2 単体が 18 個、1 単体が 27 個、0 単体が 9 個ある。正方形を図 14(2) のように分割した場合、得られるトーラスの分割は胞体分割ではあるが単体分割ではない。なぜなら、図 14(2) の 1 胞体  $e, e'$  は共にトーラスの 2 点  $P, Q$  を端点にもつが、単体分割では 2 つの (決められた) 0 単体を端点にもつ 1 単体は、あれば一つでなければならない。



(1)



(2)

図 14: 図 : トーラスの単体分割

例 12.7 種数  $g$  の向き付け可能閉曲面  $\Sigma_g$  と種数  $k$  の向き付け不可能閉曲面  $N_k$

種数  $g$  ( $g \geq 0$ ) の向き付け可能閉曲面 辺を図 15 (1) のように貼り合わせて得られる。このとき 正  $4g$  角形の頂点はすべて同一視されて  $\Sigma_g$  の 1 点に、 $4g$  個の辺は 2 つずつ同一視されて  $2g$  個のループになる。したがって、0 胞体が 1 個、1 胞体が  $2g$  個、2 胞体が 1 個の胞体分割をもつ。同様に、種数  $k$  ( $k \geq 1$ ) の向き付け不可能閉曲面  $N_k$  は、図 15 (2) のように貼り合わせて得られるから、0 胞体が 1 個、1 胞体が  $k$  個、2 胞体が 1 個の胞体分割をもつ。

例 12.8  $n$  次元実射影空間  $RP^n$

$S^n$  において、点  $p$  と  $-p$  を同一視して得られる商空間が  $n$  次元実射影空間  $RP^n$  である。 $T : S^n \rightarrow S^n$

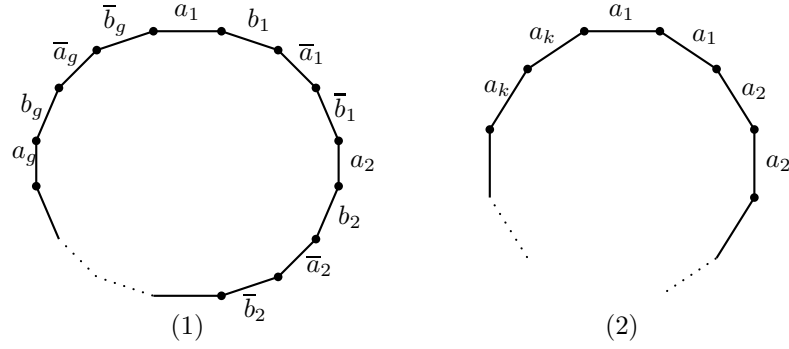


図 15: 図

を対称写像 (antipodal map)  $T(p) = -p$  とすると, 例 12.4 における  $S^n$  の胞体分割において,  $T(e_{\pm}^q) = e_{\mp}^q$  ( $q = 0, 1, \dots, n$ ) である。したがって  $\pi : S^n \rightarrow \mathbf{R}P^n = S^n/T$  を自然な射影とすると,  $\pi(e_{+}^q) = \pi(e_{-}^q)$  となり, これを  $e^q$  とおくと,  $\{e^0, e^1, \dots, e^n\}$  が  $\mathbf{R}P^n$  の胞体分割を与える。

例 12.9  $n$  次元複素射影空間  $CP^n$

$\mathbf{R}P^n = \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$  であった ( $\sim$  は同値関係)

この複素数版が  $CP^n$  である。すなわち  $CP^n = C^{n+1} - \{0\} / \sim$ , ここに  $\sim$  は  $z, w \in C^{n+1} - \{0\}$  に対して,  $z \sim w$  とは  $z = \alpha w$  をみたす  $\alpha \in C$  ( $\alpha \neq 0$ ) が存在するときと定める。位相は商位相を入れる。これを 複素射影空間 (complex projective space) という。 $\mathbf{R}P^n$  が球面の商空間と思えたのと同様に,  $CP^n$  も次のように球面の商空間と思える。 $C^{n+1}$  の原点を中心とした単位球面  $S^{2n+1}$  の 2 点  $z, z'$  が, 長さ 1 のある複素数  $\alpha$  に対して,  $z' = \alpha z$  の関係にあるとき  $z \sim z'$  と書くと, 関係  $\sim$  は同値関係となる。上の  $\sim$  と今の  $\sim$  は同じだから,  $CP^n = S^{2n+1} / \sim$  と思える。したがって, 自然な写像  $\pi : S^{2n+1} \rightarrow CP^n$  が存在する。 $CP^n$  の 1 点の  $\pi$  による原像 (または引き戻し) は, 単位円周  $S^1$  と同相である。

$S^{2n+1}$  の点  $(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in C^{n+1}$  の  $\pi$  による像 (つまり点  $(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$  を含む  $C^{n+1}$  の複素 1 次元部分ベクトル空間 (平面)) を  $[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}]$  と表す。長さ 1 の複素数  $\alpha$  に対して

$$[\alpha z_1, \alpha z_2, \dots, \alpha z_{n+1}] = [z_1, z_2, \dots, z_{n+1}]$$

である。このとき,  $q = 0, 1, \dots, n$  に対して

$$e^{2q} := \{[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}] \in CP^n; z_{q+1} \neq 0, z_{q+2} = \dots = z_{n+1} = 0\}$$

とおくと,  $\{e^0, e^2, \dots, e^{2n}\}$  は  $CP^n$  の胞体分割を与える。 $e^{2q}$  ( $q = 1, 2, \dots, n$ ) の特性写像  $\varphi_q : D^{2q} \rightarrow CP^n$  は

$$\varphi_q(w_1, w_2, \dots, w_q) = \left[ w_1, w_2, \dots, w_q, \sqrt{1 - \sum_{k=1}^q |w_k|^2}, 0, \dots, 0 \right]$$

で与えられる。

上の議論において, 複素数  $C$  の代わりに 4 元数  $H$  を用いれば, 4 元数射影空間 (quaternionic projective space)  $HP^n$  を得る。 $HP^n$  は  $\{e^0, e^4, \dots, e^{4n}\}$  の胞体分割をもつ。

$X$  を  $n$  次元有限 (胞体) 複体,  $e$  を  $X$  の  $n$  次元胞体とすると,  $X' = X - e$  も有限胞体となる。 $e$  の特性写像  $\varphi : D^n \rightarrow \bar{e} \subset X$  を,  $(D^n, S^{n-1})$  から  $(X, X')$  への写像とも思う。

**補題 12.10**

すべての  $q$  に対して  $\varphi_* : H_q(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_q(X, X')$  は同型である。したがって

$$H_q(X, X') \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = n) \\ 0 & (q \neq n) \end{cases}$$

証明 10 節の定理 10.1 と証明のアイデアは同じだが, 少し異なる。なぜなら特性写像  $\varphi : D^n \rightarrow \bar{e}$  が必ずしも同相写像でないからである。

0 を  $D^n$  の原点とし次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} H_q(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_q(X, X') \\ \downarrow i_* & & \downarrow i'_* \\ H_q(D^n, D^n - 0) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_q(X, X - \varphi(0)) \\ \uparrow j_* & & \uparrow j'_* \\ H_q(\mathring{D}^n, \mathring{D}^n - 0) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_q(e, e - \varphi(0)) \end{array}$$

縦の写像はすべて包含写像より導かれるものである。 $S^{n-1}$ ,  $X'$  はそれぞれ  $D^n - 0$ ,  $X - \varphi(0)$  の変位レトラクトであるから, 定理 7.9 より  $i_*$ ,  $i'_*$  は共に同型で, また  $j_*$ ,  $j'_*$  は切除定理 8.1 より同型である。 $\varphi$  は  $e$  の特性写像であるから,  $\varphi : (\mathring{D}^n, \mathring{D}^n - 0) \rightarrow (e, e - \varphi(0))$  は同相写像である。よって可換図式の下の方の  $\varphi_*$  は同型である。以上より図式の上の方の  $\varphi_*$  が同型であることが示され, 補題の前半が示された。補題の後半は, 補題の前半と系 9.2 より示される。□

10 節において, 単体的複体のオイラー数を拡張する形で位相空間のオイラー数を定義した。その定義を基に系 10.4 を眺めてみると, その意味するところは「位相空間  $X$  が単体分割  $(K, t)$  をもつとき,  $X$  のオイラー数が, 単体的複体のオイラー数, つまり  $K$  に含まれる単体の数を数えることによって求めることができる」となる。次の定理は, この事実を有限胞体分割に拡張したものである。

**定理 12.11**

$X$  を有限複体とし,  $\alpha_q$  を  $X$  の  $q$  胞体の数とする。このとき,  $X$  は有限生成のホモロジー群をもち

$$\chi(X) = \sum_{q=0}^{\dim X} (-1)^q \alpha_q$$

が成立する。

証明  $X$  の胞体の数  $\#X$  の数学的帰納法で証明する。

$\#X = 1$  のとき,  $X$  は 0 胞体 1 個からなるから, 例 5.5 より有限生成のホモロジー群をもち,  $\chi(X) = 1$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_q = 0$  ( $q > 0$ ) である。したがってこのとき定理は成立する。

$\#X = m$  とし,  $\#X' = m - 1$  である有限複体  $X'$  に対しては定理が成立していると仮定する。 $\dim X = n$  とし  $X$  の  $n$  胞体の 1 つを  $e$  とする。このとき  $X' = X - e$  も有限複体となり  $\#X' = m - 1$  である。したがって数学的帰納法の仮定より  $X'$  は有限生成のホモロジー群をもち

$$\chi(X') = \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \alpha_q + (-1)^n (\alpha_n - 1) \quad (12.1)$$

一方, 対  $(X, X')$  のホモロジー完全列をみると, 補題 12.10 と  $X'$  が有限生成のホモロジー群をもつことから,  $X$  が有限生成のホモロジー群をもつことがわかり, さらに補題 4.3 と補題 12.10 より

$$\chi(X) = \chi(X') + (-1)^n$$

を得る。これと (12.1) より定理の式が成立し数学的帰納法が完成する。□

#### 例 12.12

例 12.7 と定理 12.11 より, 種数  $g$  の向き付け可能閉曲面  $\Sigma_g$  のオイラー数は  $2 - 2g$ , 種数  $k$  の向き付け不可能曲面  $N_k$  のオイラー数は  $2 - k$  となる。

## 13 胞体複体のホモロジー

定理 10.1 より, 単体分割をもつ位相空間のホモロジー群は, 単体分割を与える単体的複体の組合せ構造を用いて求めることができる。この事実が有限胞体分割をもつ位相空間 (つまり有限複体) に拡張できることをこの節で述べる。幾何学的に言えば, 各胞体がどのように貼り合わさって有限複体ができているかをみることによってホモロジー群を求めることができるのである。

$X$  を有限複体,  $A$  を  $X$  の部分複体とし,  $X$  の  $r$  切片  $X^{(r)}$  と  $A$  との合併  $X^{(r)} \cup A$  を  $\hat{X}^{(r)}$  とおく。 $\hat{X}^{(r)}$  も  $X$  の有限部分複体である。 $X - A$  に含まれている各  $r$  胞体  $e_\lambda^r$  に対して, 特性写像  $\varphi_\lambda : D^r \rightarrow \hat{X}^{(r)} \subset X$  をとる。このとき 補題 12.10 と同様の議論によって次を得る。

#### 補題 13.1

$\sum_{\lambda} \varphi_{\lambda*} : \bigoplus_{\lambda} H_q(D^r, S^{r-q}) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(r)}, \hat{X}^{(r-1)})$  は同型である。特に,  $X - A$  に含まれている  $r$  胞体の数を  $a_r$  とすると

$$H_q(\hat{X}^{(r)}, \hat{X}^{(r-1)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{a_r} & (q = r) \\ 0 & (q \neq r) \end{cases}$$

上の補題と次の補題より, 胞体分割とホモロジー群の関係がかなりはっきりしてくる。

#### 補題 13.2

- (1)  $q > r$  のとき,  $H_q(\hat{X}^{(r)}, A) = 0$
- (2)  $q < r$  のとき,  $H_q(\hat{X}^{(r)}, A) \cong H_q(X, A)$  である。ここで同型は包含写像  $(\hat{X}^{(r)}, A) \rightarrow (X, A)$  より導かれる写像である。



### 証明

(1)  $r$  に関する数学的帰納法で証明する。

$r = 0$  のとき,  $\hat{X}^{(0)}$  は  $A$  と有限個の 0 胞体 (つまり 1 点) との合併であるから,  $A$  は  $\hat{X}^{(0)}$  のいくつかの連結成分の合併である。よって第 2 章の章末問題 10.11 より  $H_q(\hat{X}^{(0)}, A) \cong H_q(\hat{X}^{(0)} - A)$  である。ここで  $\hat{X}^{(0)} - A$  は有限個の点だから, 例 5.5 と定理 5.6 より  $H_q(\hat{X}^{(0)} - A) = 0$  ( $q > 0$ )。したがって,  $r = 0$  のときは (1) は正しい。

次に  $H_q(\hat{X}^{(r-1)}, A) = 0$  ( $q > r - 1$ ) が成り立っていると仮定する。3 対  $(\hat{X}^{(r)}, \hat{X}^{(r-1)}, A)$  のホモロジー完全列 (定理 5.12)

$$\rightarrow H_q(\hat{X}^{(r-1)}, A) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(r)}, A) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(r)}, \hat{X}^{(r-1)}) \rightarrow$$

において,  $q > r$  のとき左の群は帰納法の仮定より 0 で, 右の群は補題 13.1 より 0 である。したがって,  $H_q(\hat{X}^{(r)}, A) = 0$  となり, 数学的帰納法が完成する。

(2)  $r \geq \dim X$  のとき  $\hat{X}^{(r)} = X$  であるから, このとき補題の (2) の同型は自明である。以下  $r < \dim X$  とする。3 対  $(\hat{X}^{(r+1)}, \hat{X}^{(r)}, A)$  のホモロジー完全列

$$H_{q+1}(\hat{X}^{(r+1)}, \hat{X}^{(r)}) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(r)}, A) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(r+1)}, A) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(r+1)}, \hat{X}^{(r)})$$

において,  $q < r$  のとき両端の群は補題 13.1 より 0 であるから

$$H_q(\hat{X}^{(r)}, A) \cong H_q(\hat{X}^{(r+1)}, A) \quad (q < r)$$

である。この同型を繰り返して用いれば, すべての  $n \geq r$  に対して

$$H_q(\hat{X}^{(r)}, A) \cong H_q(\hat{X}^{(n)}, A) \quad (q < r)$$

を得るが,  $n = \dim X$  にとると  $\hat{X}^{(n)} = X$  であるから補題の (2) の同型を得る。□

以上の考察をもとに,

$$C_q(X, A) := H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)})$$

とおく。この群は  $H_q(D^q, S^{q-1})$  の生成元  $u_q$  を 1 つ固定すれば, 補題 13.1 より  $\{\varphi_{\lambda*}(u_q)\}$  で生成される自由加群である。 $\varphi_{\lambda*}(u_q)$  を向き付けられた胞体 といひ  $\langle e_\lambda \rangle$  で表すと,  $C_q(X, A)$  は向き付けられた  $q$  胞体  $\langle e_\lambda \rangle$  ( $e_\lambda \subset X - A$ ) によって生成される自由加群である。

#### 例 13.3

$X$  の胞体分割が単体分割  $(K, t)$  から得られているとする。 $X$  の部分複体  $A$  に対応する  $K$  の部分複体を  $L$  とすると,  $X - A$  に含まれる  $q$  胞体は  $K - L$  に属する  $q$  単体に対応している。したがって,  $C_q(X, A)$  と単体的複体に対して定義したチェイン群  $C(K, L)$  は同型である。

例 13.4  $n$  次元球面  $S^n$  に例 12.5 の胞体分割を考えると

$$C_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であるが,  $n$  次元球面  $S^n$  に 例 12.4 の胞体分割を考えると

$$C_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (q = 0, 1, 2, \dots, n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。

上の例にあるように,  $C_q(X, A)$  は  $(X, A)$  の胞体分割に依存している。これは  $C_q(X, A)$  の定義より明らかであるが, 重要なので注意しておく。

3 対  $(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$  のホモロジー完全列における連結準同型写像

$$C_q(X, A) = H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) \rightarrow C_{q-1} = H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$$

を  $\partial$  と書く。  $C_q(X, A)$  は  $X - A$  に含まれる向き付けられた  $q$  胞体  $\langle e_\lambda^q \rangle$  によって生成された自由加群であるが,  $\partial$  は  $e_\lambda^q$  の境界  $\bar{e}_\lambda^q - e_\lambda^q$  が  $X - A$  に含まれている  $(q-1)$  胞体たちにどのように貼り付いているかを記述していると考えられる。例えば  $(X, A)$  の胞体分割が単体的複体の対  $(K, L)$  から得られているとき, 例 13.3 にあるように  $C_q(X, A)$  と  $C_q(K, L)$  を同一視すると,  $\partial : C_q(X, A) \rightarrow C_{q-1}(X, A)$  は単体的複体の場合の境界作用素  $\partial : C_q(K, L) \rightarrow C_{q-1}(K, L)$  と一致する。したがって次の補題は単体的複体における結果の拡張と思える。

#### 補題 13.5

$\partial^2 = 0$ , つまり  $\mathbb{C}(X, A) := \{C_q(X, A), \partial\}$  はチェイン複体である。

証明 定理 5.12 の直後に注意したように  $\partial$  は対  $(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)})$  のホモロジー完全列の境界準同型写像  $\partial_* : H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) \rightarrow H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)})$  と包含写像から導かれる準同型写像  $j_* : H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}) \rightarrow H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$  との合成である。したがって次の図式は可換となる。

$$\begin{array}{ccccc} C_q(X, A) & & C_{q-1}(X, A) & & C_{q-2}(X, A) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)}) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-2}(\hat{X}^{(q-2)}, \hat{X}^{(q-3)}) \\ \searrow \partial_* & & \nearrow j_* & & \searrow \partial_* \\ & H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}) & & H_{q-2}(\hat{X}^{(q-2)}) & \nearrow j_* \end{array}$$

ここで上の図式の一部である列

$$H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)}) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-2}(\hat{X}^{(q-2)})$$

は対  $(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$  の完全列の一部であるから  $\partial_* j_* = 0$  である。これと上の図式の可換性より  $\partial^2 = 0$  を得る。□

補題 13.5 の前に注意したことから,  $(X, A)$  の胞体分割が単体的複体の対  $(K, L)$  から得られているとき, チェイン複体  $\mathbb{C}(X, A)$  の  $q$  次ホモロジー群

$$H_q(\mathbb{C}(X, A)) = Z_q(\mathbb{C}(X, A)) / B_q(\mathbb{C}(X, A))$$

は  $H_q(K, L)$  と同型である。したがって次の定理は定理 10.1 の拡張と思える。

**定理 13.6**

$(X, A)$  を胞体複体の対とすると, すべての  $q$  に対して同型対応

$$\rho : H_q(\mathbb{C}(X, A)) \cong H_q(X, A)$$

証明 次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_q(X, A) & & H_q(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)}) = 0 & & & & 0 \\
 \parallel & & \downarrow & & & & \parallel \\
 H_{q+1}(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q)}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-2)}) & \longrightarrow & H_q(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q-2)}) & \longrightarrow & H_q(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q)}) \\
 & \searrow \partial & \downarrow i_* & & & & \\
 & & H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) = C_q(X, A) & & & & \\
 & & \downarrow \partial & & & & \\
 & & H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)}) = C_{q-1}(X, A) & & & & 
 \end{array}$$

ここで横の列は3対  $(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-2)})$  のホモロジー完全列で, 縦の列は3対  $(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$  のホモロジー完全列である。また 補題 13.1 より  $H_q(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$  と  $H_q(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q)})$  は 0 である。縦の列の完全性より,  $i_*$  は単射で

$$\begin{aligned}
 Z_q(\mathbb{C}(X, A)) &= \ker(\partial : C_q(X, A) \rightarrow C_{q-1}(X, A)) \\
 &= \operatorname{im} i_* \cong H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-2)})
 \end{aligned}$$

もう一度  $i_*$  の単射性に注意すると,

$$B_q(\mathbb{C}(X, A)) = \operatorname{im}(\partial : C_{q+1}(X, A) \rightarrow C_q(X, A)) \cong \operatorname{im} \partial_*$$

したがって

$$H_q(\mathbb{C}(X, A)) \cong H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-2)}) / \operatorname{im} \partial_* \cong H_q(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q-2)}) \quad (13.1)$$

ここで後ろの同型は, 上の可換図式の横の列の完全性より示される。

一方, 3対  $(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q-2)}, A)$  のホモロジー完全列

$$H_q(\hat{X}^{(q-2)}, A) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(q+1)}, A) \rightarrow H_q(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q-2)}) \rightarrow H_{q-1}(\hat{X}^{(q-2)}, A)$$

において, 両端の群は 補題 13.2 の (1) より 共に 0 である。したがって

$$H_q(\hat{X}^{(q+1)}, A) \cong H_q(\hat{X}^{(q+1)}, \hat{X}^{(q-2)}) \quad (13.2)$$

また, 補題 13.2 の (2) より

$$H_q(\hat{X}^{(q+1)}, A) \cong H_q(X, A) \quad (13.3)$$

求める同型対応  $\rho$  は 3 つの同型 (13.1), (13.2), (13.3) の合成として得られる。□

胞体複体  $X, Y$  の間の連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が, すべての  $q \geq 0$  に対して  $f(X^{(q)}) \subset Y^{(q)}$  をみたしているとき 胞体写像 (cellular map) という。さらに  $A, B$  をそれぞれ  $X, Y$  の部分複体とし,  $f(A) \subset B$  であるとする。このとき, すべての  $q \geq 0$  に対して  $f(\hat{X}^{(q)}) \subset \hat{Y}^{(q)}$  であるから準同型写像

$$f_* : H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) = C_q(X, A) \rightarrow H_q(\hat{Y}^{(q)}, \hat{Y}^{(q-1)}) = C_q(Y, B)$$

が誘導される。チェイン複体  $\mathbb{C}(X, A), \mathbb{C}(Y, B)$  の境界作用素は連結準同型写像  $\partial_*$  であり,  $f_*$  はそれと可換であるので,  $f_*$  はチェイン写像である。したがって, これらのチェイン複体のホモロジー群の間の準同型写像  $H_q(\mathbb{C}(X, A)) \rightarrow H_q(\mathbb{C}(Y, B))$  を導くが, これも  $f_*$  と書くことにする。このことより次の定理が得られる。

### 定理 13.7

次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} H_q(\mathbb{C}(X, A)) & \xrightarrow{f_*} & H_q(\mathbb{C}(Y, B)) \\ \rho \downarrow \cong & & \rho \downarrow \cong \\ H_q(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y, B) \end{array}$$

証明 定理 13.6 の証明より,  $\rho$  は 3 つの同型 (13.1), (13.2), (13.3) の合成であったが, それらがすべて  $f$  が誘導する準同型写像と可換である。したがって定理の可換性が示される。□

8 節の最初に,  $H_q(X, A)$  は  $X - A$  にのみ依存しているように思われると述べたが, このことをもう少し正確に述べることができる。 $A$  を 1 点につぶすことにより 写像  $\pi: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  を得るが,  $X/A$  に商位相を入れると  $\pi$  は連続写像になる。したがって準同型写像

$$\pi_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X/A, A/A)$$

を得るが,  $A/A$  は 1 点であるから, 対  $(X/A, A/A)$  の簡約ホモロジー完全列において包含写像  $j: (X/A, \emptyset) \rightarrow (X/A, A/A)$  は同型写像  $j_*: \tilde{H}_q(X/A) \cong H_q(X/A, A/A)$  を導く。したがって準同型写像

$$j_*^{-1} \cdot \pi_* : H_q(X, A) \rightarrow \tilde{H}_q(X/A)$$

を得る。

### 定理 13.8

$X$  が有限複体で  $A$  が  $X$  の部分複体であるとき, すべての  $q$  に対して  $j_*^{-1} \cdot \pi_* : H_q(X, A) \cong \tilde{H}_q(X/A)$  である。

証明  $\pi_*$  が同型写像であることを示せばよい。容易にわかるように, 仮定より  $X/A$  も有限複体となり,  $\pi: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  は  $A$  に含まれない  $X$  の  $q$  胞体と  $A/A$  に含まれない  $X/A$  の  $q$  胞体の間の 1 対 1 対応を与える。したがって  $\pi$  はチェイン群  $\mathbb{C}(X, A)$  と  $\mathbb{C}(X/A, A/A)$  の間の同型写像を導き, 定理 13.6 と定理 13.7 より,  $\pi_* : H_q(X, A) \cong H_q(X/A, A/A)$  となる。□

注 13.9 定理 13.8 では  $A \neq \emptyset$  と思っているが,  $A = \emptyset$  のとき  $X/A$  を  $X$  に 1 点を付け加えた位相空間と思えば,  $A = \emptyset$  でも成立している。

例 13.10

$D^n$  の境界  $S^{n-1}$  から 1 点  $p$  をとり  $D^n$  を 3 つの胞体  $e^n := \overset{\circ}{D}^n$ ,  $e^{n-1} := S^{n-1} - p$ ,  $e^0 := p$  に分割すると,  $D^n$  は有限複体となり境界は  $S^{n-1}$  は部分複体となる。ここで  $D^n/S^{n-1}$  は  $S^n$  と同相であるから, 定理 13.8 より同型  $H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n)$  を得る。一方, 対  $(D^n, S^{n-1})$  に簡約ホモロジー完全列を用いると,  $D^n$  が可縮であることより  $H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$  である。これら 2 つの同型を合わせると, 定理 9.1 の証明において鍵となった事実  $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$  が再び得られる。

## 14 具体的計算

定理 13.6 を用いてホモロジー群  $H_q(X, A)$  を求めるためには

$$\partial : C_q(X, A) = H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) \rightarrow C_{q-1}(X, A) = H_q(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$$

を調べなければならない。 $C_q(X, A)$ ,  $C_{q-1}(X, A)$  は, それぞれ  $X - A$  に含まれる向き付けられた  $q$  胞体  $\langle e_\lambda \rangle$ ,  $q-1$  胞体  $\langle e_\mu \rangle$  で生成されている自由加群であるから

$$\partial(\langle e_\lambda \rangle) = \sum_{\mu} [\langle e_\lambda \rangle : \langle e_\mu \rangle] \langle e_\mu \rangle$$

によって整数  $[\langle e_\lambda \rangle : \langle e_\mu \rangle]$  が定まる。この整数を  $\langle e_\lambda \rangle$  と  $\langle e_\mu \rangle$  の 結合係数 という。これを求めるために,  $D^{q-1}/S^{q-2}$  と  $S^{q-1}$  の同一視の仕方を 1 つ決めておき, 次の写像を考える。

$$\psi_{\lambda, \mu} : S^{q-1} \xrightarrow{\varphi|_{S^{q-1}}} \hat{X}^{(q-1)} \xrightarrow{\pi_\mu} \hat{X}^{(q-1)} / (\hat{X}^{(q-1)} - e_\mu) \xrightarrow{\hat{\varphi}_\mu^{-1}} S^{q-1} \quad (14.1)$$

ここで,  $\varphi|_{S^{q-1}}$  は  $e_\lambda$  の特性写像  $\varphi_\lambda : (D^q, S^{q-1}) \rightarrow (\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)})$  の  $S^{q-1}$  への制限,  $\pi_\mu$  は商写像,  $\hat{\varphi}_\mu$  は  $e_\mu$  の特性写像  $\varphi_\mu : (D^{q-1}, S^{q-2}) \rightarrow (\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)})$  から導かれる  $S^{q-1} = D^{q-1}/S^{q-2}$  から  $\hat{X}^{(q-1)} / (\hat{X}^{(q-1)} - e_\mu)$  への同相写像である<sup>3</sup>。 $H_q(D^q, S^{q-1})$  の生成元  $u_q$  の  $\partial_* : H_q(D^q, S^{q-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1})$  による像を  $v_{q-1}$  と表す。次の補題は結合係数を求める方法を与えている。

補題 14.1

$\psi_{\lambda, \mu}(v_{q-1}) = \pm [\langle e_\lambda \rangle : \langle e_\mu \rangle] v_{q-1}$  である。(注意: 符号  $\pm$  は, 初めに決めた  $D^{q-1}/S^{q-2}$  と  $S^{q-1}$  との同一視の仕方による。)

<sup>3</sup> $q=1$  のとき,  $S^{-1} = \emptyset$  であるから,  $D^0/S^{-1}$  は  $D^0$  に 1 点を付け加えた位相空間であり, 同様に,  $\hat{X}^{(0)} - e_\mu = \emptyset$  のとき (このとき  $\hat{X}^{(0)} = e_\mu = 1$  点),  $\hat{X}^{(0)} / (\hat{X}^{(0)} - e_\mu)$  は  $\hat{X}^{(0)}$  に 1 点を付け加えた位相空間であるから,  $\hat{\varphi}_\mu$  は  $q=1$  のときも同様である。

証明 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\varphi_{\lambda*}} & H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) \\
 \partial_* \downarrow \cong & & \partial_* \downarrow \cong \\
 \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1}) & \xrightarrow{(\varphi_{\lambda}|_{S^{q-1}})*} & H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}) \\
 & & \downarrow \\
 H_{q-1}(D^{q-1}, S^{q-2}) & \xrightarrow{\varphi_{\mu*}} & H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \\
 \tilde{H}_{q-1}(D^{q-1}/S^{q-2}) & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{\mu*}} & \tilde{H}_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}/(\hat{X}^{(q-1)} - e_{\mu})) \\
 \parallel & & \\
 \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1}) & & 
 \end{array}$$

において, 補題 13.1 と  $\langle e_{\lambda} \rangle = \varphi_{\lambda*}(u_q) \in H_q(\hat{X}^{(q)}, \hat{X}^{(q-1)}) = C_q(X, A)$ ,  $\langle e_{\mu} \rangle = \varphi_{\mu*}(u_{q-1}) \in H_{q-1}(\hat{X}^{(q-1)}, \hat{X}^{(q-2)}) = C_{q-1}(X, A)$  であることに注意すればよい。□

補題 14.1 と定理 13.6 を用いてホモロジー群を求めてみよう。

例 14.2  $n$  次元球面  $S^n$

$S^n$  の胞体分割として例 12.5 の胞体分解  $\{e^0, e^n\}$  をとる。 $n > 1$  のとき,  $C_q(S^n) = 0$  ( $q \neq 0, n$ ) であるからすべてのバウンダリー作用素は明らかに零写像である。したがって,  $H_q(S^n) \cong C_q(S^n)$  となり, 定理 9.1 の結果

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, n) \\ 0 & (q \neq 0, n) \end{cases} \quad (14.2)$$

を得る。 $n = 1$  のとき,  $e^1$  の特性写像  $\varphi : D^1 \rightarrow S^1$  は  $\varphi(+1) = \varphi(-1) = e^0$  であるから,  $\varphi$  から定まる (14.1) の写像  $\psi : S^0 \rightarrow S^0$  は  $S^0$  の 2 点を  $S^0$  の同じ 1 点に移す。 $\tilde{H}_0(S^0)$  は  $[+1] - [-1]$  で生成されているから,  $\psi_* : \tilde{H}_0(S^0) \rightarrow \tilde{H}_0(S^0)$  は零写像となり, 補題 14.1 より  $[\langle e^1 \rangle : \langle e^0 \rangle] = 0$  である。よって  $\partial(\langle e^1 \rangle) = 0$  となる。したがって,  $n = 1$  のときもバウンダリー作用素はすべて零写像となり, (14.2) の同型が  $n = 1$  のときも成立する。

例 14.3 トーラス  $T^2$

トーラス  $T^2 = S^1 \times S^1$  の胞体分割として例 12.6 の分割  $\{e^0, e_1^1, e_2^1, e^2\}$  をとる。 $D^n$  から正方形への同相写像と正方形からトーラス  $T^2$  への射影を合成した写像  $\varphi : D^2 \rightarrow T^2$  は, 2 胞体  $e^2$  の特性写像である。この写像  $\varphi$  と  $e_{\mu}^1$  ( $\mu = 1, 2$ ) から定まる (14.1) の写像  $\psi_{\mu} : S^1 \rightarrow S^1$  をみると, 定義域の  $S^1$  を 1 周する間に,  $\psi_{\mu}$  による像は値域の  $S^1$  を 1 周した後, 逆向きに 1 周する。したがって,  $\psi_{\mu}$  の回転数 (写像度) は 0 であるから, 補題 14.1 より  $[\langle e^2 \rangle : \langle e_{\mu}^1 \rangle] = 0$  である。また,  $[\langle e_{\mu}^1 \rangle : \langle e^0 \rangle] = 0$  は例 14.2 の  $n = 1$  の場合と同様の議論で分かる。したがって, チェイン複体  $\mathbb{C}(T^2)$  のバウンダリー作用素は零写像となるから

$H_q(T^2) \cong C_q(T^2)$  となる。よって次を得る。

$$H_q(T^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0, 2) \\ \mathbf{Z}^2 & (q = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

例 14.4

種数  $g$  ( $g \geq 1$ ) の向き付け可能閉曲面  $\Sigma_g$  の胞体分割として、例 12.7 にある正  $4g$  角形から得られるものをとれば、トーラスの場合と同様の考察でチェイン複体  $\mathbb{C}(\Sigma_g)$  のバウンダリー作用素はすべて零写像であることが分かる。したがって次を得る。

$$H_q(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0, 2) \\ \mathbf{Z}^{2g} & (q = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

種数  $k$  ( $k \geq 1$ ) の向き付け不可能閉曲面  $N_k$  のホモロジー群も同様に求めることができるが、少し様子が異なる。簡単のため  $N_1 = \mathbf{R}P^2$  の場合を考える。 $\mathbf{R}P^2$  は単位円板において 2 つの半円周を図 16 の矢印に沿って貼り合わせて得られるから、 $\mathbf{R}P^2$  は  $\{e^0, e^1, e^2\}$  の胞体分割を持つ。 $\partial(\langle e^1 \rangle) = 0$  はこれまでと同様であるが、( $e^1$  の向きを適当にとると)  $\partial(\langle e^2 \rangle) = 2\langle e^1 \rangle$  となる。実際、射影  $\varphi: D^2 \rightarrow \mathbf{R}P^2$  は  $e^2$  の特性写像であるが、これから定まる (14.1) の写像  $\psi: S^1 \rightarrow S^1$  をみると、定義域の  $S^1$  を 1 周する間に  $\psi$  による像は値域の  $S^1$  を 2 周している。したがって、 $\psi$  の回転数 (写像度) は 2 であるから、( $e^1$  の向きを適当にとると) 補題 14.1 より  $[\langle e^2 \rangle: \langle e^1 \rangle] = 2$  となり  $\partial(\langle e^2 \rangle) = 2\langle e^1 \rangle$  を得る。一般の向き付け不可能閉曲面

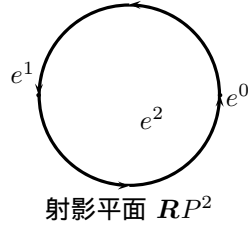


図 16:  $\mathbf{R}P^2$

$N_k$  の場合、 $N_k$  の胞体分割として例 12.7 にある正  $2k$  角形から得られるもの  $\{e^0, e_1^1, \dots, e_k^1, e^2\}$  をとれば、 $N_1 = \mathbf{R}P^2$  の場合と同様の考察で  $(e_1^1, \dots, e_k^1)$  に適当に向きを付けると

$$\partial(\langle e_\mu^1 \rangle) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k), \quad \partial(\langle e^2 \rangle) = 2(\langle e_1^1 \rangle + \dots + \langle e_k^1 \rangle)$$

を得る。以上より

$$\begin{aligned} Z_1(\mathbb{C}(N_k)) &= C_1(N_k), \quad Z_2(\mathbb{C}(N_k)) = 0 \\ B_1(\mathbb{C}(N_k)) &= \{2\ell(\langle e_1^1 \rangle + \dots + \langle e_k^1 \rangle); \ell \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z} \end{aligned}$$

このことと、 $Z_1(\mathbb{C}(N_k))$  の生成元として  $\langle e_1^1 \rangle, \dots, \langle e_{k-1}^1 \rangle, \langle e_1^1 \rangle + \dots + \langle e_k^1 \rangle$  がとれることに注意すれば

$$H_q(N_k) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0) \\ \mathbf{Z}^{k-1} \oplus \mathbf{Z}_2 & (q = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を得る。

例 14.5  $S^n$  のもう 1 つの胞体分割による

例 12.4 における  $S^n$  の胞体分割  $\{e_{\pm}^0, e_{\pm}^1, \dots, e_{\pm}^n\}$  を用いて  $S^n$  のホモロジー群を求めてみよう。例 12.4 における特性写像  $\varphi_{\pm}^q : D^q \rightarrow S^q \subset S^n$  によって  $\langle e_{\pm}^q \rangle$  を向き付けられた胞体と思う。我々の胞体分割における  $q$  切片は  $S^q$  であるから、 $C_q(S^n) = H_q(S^q, S^{q-1})$  であり、補題 13.1 より  $\langle e_{\pm}^q \rangle$  は  $C_q(S^n)$  の生成元である。 $T$  を対称写像 (antipodal map)  $T(p) = -p$  とすると、 $\varphi_{-}^q \cdot T = T \cdot \varphi_{+}^q$  であるから、可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_{q-1}(S^{q-1}) & \xrightarrow{T_*} & H_{q-1}(S^{q-1}) \\ \partial_* \uparrow \cong & & \cong \uparrow \partial_* \\ H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{T_*} & H_q(D^q, S^{q-1}) \\ (\varphi_{+}^q)_* \downarrow & & \downarrow (\varphi_{-}^q)_* \\ H_q(S^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{T_*} & H_q(S^q, S^{q-1}) \end{array}$$

を得る。ここで、上段の  $T_*$  は補題 11.4 より  $(-1)^q$  倍写像であるから、中段の  $T_*$  も  $(-1)^q$  倍写像である。したがって、

$$T_*(\langle e_{\pm}^q \rangle) = (-1)^q \langle e_{\pm}^q \rangle \quad (14.3)$$

以上の準備の下にチェイン複体  $\mathbb{C}(S^n)$  のバウンダリー作用素を求める。 $e_{\pm}$  の特性写像  $\varphi_{\pm}^q : D^q \rightarrow S^q \subset S^n$  は、 $\varphi_{+}^q|_{S^{q-1}} = \varphi_{-}^q|_{S^{q-1}}$  であるから、 $\varphi_{+}^q$  から定まる (14.1) の写像  $\psi_{+, \mu}^q$  と  $\varphi_{-}^q$  から定まる  $\psi_{-, \mu}^q$  は一致する。したがって補題 14.1 より  $\partial(\langle e_{+}^q \rangle) = \partial(\langle e_{-}^q \rangle)$  である。また、 $\psi_{\pm, \mu}^q : S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$  は  $S^{q-1}$  の北半球または南半球を 1 点につぶす写像であるからホモロジー群の同型を導く。これより、 $q \geq 1$  のとき

$$\partial(\langle e_{\pm}^q \rangle) = a \langle e_{+}^{q-1} \rangle + b \langle e_{-}^{q-1} \rangle \quad (14.4)$$

とおくと、補題 14.1 より  $a = \pm 1, b = \pm 1$  である。可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_q(S^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(S^{q-1}, S^{q-2}) \\ T_* \downarrow & & \downarrow T_* \\ H_q(S^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(S^{q-1}, S^{q-2}) \end{array}$$

と (14.3), (14.4) より

$$\begin{aligned} a \langle e_{+}^{q-1} \rangle + b \langle e_{-}^{q-1} \rangle &= \partial(\langle e_{+}^q \rangle) = (-1)^q \partial(T_*(\langle e_{-}^q \rangle)) = (-1)^q T_*(\partial(\langle e_{-}^q \rangle)) \\ &= (-1)^q T_*(a \langle e_{+}^{q-1} \rangle + b \langle e_{-}^{q-1} \rangle) = -a \langle e_{-}^{q-1} \rangle - b \langle e_{+}^{q-1} \rangle \end{aligned}$$

これより  $a = -b$  である。したがって

$$\partial(\langle e_{\pm}^q \rangle) = \varepsilon(\langle e_{+}^{q-1} \rangle - \langle e_{-}^{q-1} \rangle) \quad (14.5)$$

を得る。ここで、 $\varepsilon = +1$  または  $-1$  である。以上より、 $Z_q(\mathbb{C}(S^n)), B_q(\mathbb{C}(S^n))$  が決定でき  $H_q(S^n)$  が (14.2) の形であることが分かる。各自チェックせよ。



例 14.6

例 12.8 における  $RP^n$  の胞体分割  $\{e^0, e^1, \dots, e^n\}$  を用いて  $RP^n$  のホモロジー群を求めよう。 $\langle e_{\pm}^q \rangle$  を例 14.5 における  $S^n$  の向き付けられた  $q$  胞体とし, 自然な射影  $\pi : S^n \rightarrow RP^n$  を通して  $e_+^q$  の向きを  $e^q$  に入れる。したがって

$$\pi_*(\langle e_+^q \rangle) = \langle e^q \rangle \quad (14.6)$$

である。しかし,  $\pi_*(\langle e_-^q \rangle) = \langle e^q \rangle$  なるとは限らない。実際, (14.3) より  $\langle e_-^q \rangle = (-1)^q \pi_*(\langle e_+^q \rangle)$  であることと  $\pi \cdot T = \pi$  であることより

$$\pi_*(\langle e_-^q \rangle) = (-1)^q \pi_*(T_*(\langle e_+^q \rangle)) = (-1)^q \pi_*(\langle e_+^q \rangle) = (-1)^q \langle e^q \rangle$$

となる。この事実と (14.5), (14.6) より

$$\begin{aligned} \partial(\langle e^q \rangle) &= \partial(\pi_*(\langle e_+^q \rangle)) = \pi_*(\partial(\langle e_+^q \rangle)) = \pi_*(\varepsilon(\langle e_+^{q-1} \rangle - \langle e_-^{q-1} \rangle)) \\ &= \varepsilon \pi_*(\langle e_+^{q-1} \rangle - \langle e_-^{q-1} \rangle) = \varepsilon(\langle e^{q-1} \rangle - (-1)^{q-1} \langle e^{q-1} \rangle) = \varepsilon(1 + (-1)^q) \langle e^{q-1} \rangle \end{aligned}$$

以上より,  $1 \leq q \leq n$  に対して

$$\partial(\langle e^q \rangle) = \begin{cases} \pm 2 \langle e^{q-1} \rangle & (q : \text{偶数}) \\ 0 & (q : \text{奇数}) \end{cases}$$

したがって,  $n$  が奇数のとき

$$H_q(RP^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0, n) \\ \mathbf{Z}_2 & (q = 1, 3, \dots, n-2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$n$  が偶数のとき

$$H_q(RP^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0) \\ \mathbf{Z}_2 & (q = 1, 3, \dots, n-1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

例 14.7

例 12.9 にあるように,  $CP^n$  の胞体分割として偶数次元の胞体のみからなる分割  $\{e^0, e^2, \dots, e^{2n}\}$  がとれるから, チェイン複体  $\mathbb{C}(CP^n)$  のバウンダリー作用素はすべて零写像となり,

$$H_q(CP^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0, 2, \dots, 2n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

同様に

$$H_q(HP^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0, 4, \dots, 4n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

[補足—実射影空間のホモロジー群の求め方]

$RP^n$  は、例 12.8 における胞体分割  $\{e^0, e^1, \dots, e^n\}$  をもっている。 $RP^{n-1}$  の点  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  を  $RP^n$  の点  $[x_1, x_2, \dots, 0]$  と同一視することによって、 $RP^{n-1} \subset RP^n$  と考えられる。そして、 $e^q = RP^q - RP^{q-1}$  である。

補題 14.8 合成

$$\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\pi_*} H_n(RP^n, RP^{n-1})$$

( $j$  は包含写像) は、 $n$  が偶数ならば 0 で、奇数ならば同型写像  $\xi: \tilde{H}_n(S^n) \cong H_n(RP^n, RP^{n-1})$  が存在して  $2\xi$  と一致する ( $n \geq 0$ )。

証明  $E_+^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} \geq 0\}$ ,  $E_-^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} \leq 0\}$  とおき、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{H}_n(S^n) & & \\
 & \swarrow m_{1*} & \downarrow j_* & \searrow m_{2*} & \\
 H_n(S^n, E_-^n) & & H_n(S^n, S^{n-1}) & & H_n(S^n, E_+^n) \\
 \swarrow j_{1*} & & \downarrow \pi_* & & \swarrow j_{2*} \\
 H_n(E_+^n, S^{n-1}) & & H_n(RP^n, RP^{n-1}) & & H_n(E_-^n, S^{n-1}) \\
 \uparrow \ell_{1*} & \swarrow i_{1*} & \nwarrow i_{2*} & \searrow \ell_{2*} & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

ここに斜め 2 つは、3 対  $(S^n, E_+^n, S^{n-1})$ ,  $(S^n, E_-^n, S^{n-1})$  ホモロジー完全列,  $\ell_1, \ell_2, m_1, m_2$  は包含写像で、 $\pi_1, \pi_2$  は  $\pi$  によって定義される写像、明らかに各 3 角形は可換である。

$E_-^n$  は可縮であるから、 $(S^n, E_-^n)$  の被約ホモロジー完全列

$$\tilde{H}_n(E_-^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, E_-^n) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(E_-^n)$$

により、 $m_{1*}$  は同型写像である。 $\pi_1$  は  $e^n$  の特性写像であるから補題 12.10 により  $\pi_{1*}$  は同型写像である。また、 $\ell_1$  は  $e_+^n$  の特性写像であるから同様に  $\ell_{1*}$  も同型写像である。 $m_{2*}, \pi_{2*}, \ell_{2*}$  についても同様。

さて  $a \in H_n(S^n, S^{n-1})$  に対して、 $j_{1*}(a - i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a)) = j_{1*}(a) - j_{1*}i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a) = j_{1*}(a) - j_{1*}(a) = 0$  であるから、完全性より、 $a - i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a) \in \ker j_{1*} = \text{im } i_{2*}$  となる。よって、 $b \in H_n(E_-^n, S^{n-1})$  が存在して

$i_{2*}(b) = a - i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a)$  となる。このとき  $j_{1*} \cdot i_{1*} = 0$  より,  $\ell_{2*}(b) = j_{2*}i_{2*}(b) = j_{2*}(a - i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a)) = j_{2*}(a) - j_{2*}i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a) = j_{2*}(a)$  であるから,  $b = \ell_{2*}^{-1}j_{2*}(a)$  とかける。したがって

$$a = i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a) + i_{2*}(b) = i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a) + i_{2*}\ell_{2*}^{-1}j_{2*}(a)$$

となり  $c \in \tilde{H}_n(S^n)$  をとり  $a = j_*(c) \in H_n(S^n, S^{n-1})$  に上の結果を使うと,  $\pi_*j_*(c) = \pi_*(a) = \pi_*i_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}(a) + \pi_*i_{2*}\ell_{2*}^{-1}j_{2*}(a) = \pi_{1*}\ell_{1*}^{-1}j_{1*}j_*(c) + \pi_{2*}\ell_{2*}^{-1}j_{2*}j_*(c) = \pi_{1*}\ell_{1*}^{-1}m_{1*}(c) + \pi_{2*}\ell_{2*}^{-1}m_{2*}(c)$  であるから

$$\pi_* \cdot j_* = \pi_{1*} \cdot \ell_{1*}^{-1} \cdot m_{1*} + \pi_{2*} \cdot \ell_{2*}^{-1} \cdot m_{2*}$$

が成り立つ。

一方,  $T: S^n \rightarrow S^n$  を原点に関する対称写像とすると, 図式

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{m_{2*}} & H_n(S^n, E_+^n) & \xleftarrow{\ell_{2*}} & H_n(E_-^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\pi_{2*}} & H_n(\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1}) \\ \downarrow T_* & & \downarrow T_* & & \downarrow T_* & & \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{m_{1*}} & H_n(S^n, E_-^n) & \xleftarrow{\ell_{1*}} & H_n(E_+^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\pi_{1*}} & \end{array}$$

は可換であり, 補題 11.4 より左の  $T_*$  は  $(-1)^{n+1}$  倍写像であるから,

$$\pi_{2*} \cdot \ell_{2*}^{-1} \cdot m_{2*} = (-1)^{n+1} \pi_{1*} \cdot \ell_{1*}^{-1} \cdot m_{1*}$$

ゆえに

$$\pi_* \cdot j_* = (1 + (-1)^{n+1}) \pi_{1*} \cdot \ell_{1*}^{-1} \cdot m_{1*}$$

が得られ, 求める結果が成り立つ。□

[発展] 位相空間  $X$  のすべての点を 0 胞体とすることにより  $X$  の胞体分割が得られるが, このような分割は  $X$  とトポロジを反映しているとはいいいがたい。 $X$  のトポロジを反映するような分割を得るためには, 次の 2 条件

(C) (closure finite) 各点  $x \in X$  に対し  $x \in A$  となる有限部分複体  $A$  が存在する。

(W) (weak topology)  $X$  の位相は, 胞体の閉包による閉被覆  $\{\bar{e}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に関して弱位相をもつ。つまり,  $B \subset X$  が  $X$  の閉集合である必要十分条件は, すべての  $\lambda \in \Lambda$  に対して,  $B \cap \bar{e}_\lambda$  が閉集合であること。

を要請する。上の 2 条件をみたす胞体複体は, 上の名前を冠して CW 複体 (CW complex) と呼ばれている<sup>4</sup>。有限複体は上の 2 条件をみたすから, CW 複体である。したがって, CW 複体の概念が本質的に必要となるのは, 無限個の胞体による分割の場合である。球面の列  $S^0 \subset S^1 \subset \dots \subset S^n \subset S^{n+1} \subset \dots$  の帰納的極限  $S^\infty := \varinjlim S^n$  (集合としては  $\bigcup_{n=0}^\infty S^n$ ) は位相空間となるが, 有限複体とはならない。同様に,  $F = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$  としたとき,  $FP^\infty := \varinjlim FP^n$  も有限複体とはならない。しかし, このような位相空間は代数的トポロジでは重要な役割を果たし, 取り扱う必要がある。CW 複体の概念はこのような位相空間も含んだ都合のいいもので, 有限複体で成立する多くの事実が CW 複体でも成立する。

<sup>4</sup>通常,  $X$  がハウスドルフ空間であることを仮定する。

# ==== 章 末 問 題 =====

問題 14.9  $X$  を有限複体,  $\alpha_q$  を  $X$  の  $q$  胞体の数とする。このとき次を示せ。

- (1)  $q > \dim X$  ならば  $H_q(X) = 0$
- (2) すべての  $q$  に対して  $\text{rk } H_q(X) \leq \alpha_q$
- (3)  $\text{rk } H_q(X) = \alpha_q$  ならば  $H_q(X) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_q}$

問題 14.10 位相空間  $X$  と  $Y$  において,  $X$  のある 1 点  $x_0$  と  $Y$  のある 1 点  $y_0$  を決め,  $X$  と  $Y$  を点  $x_0, y_0$  でくっつけた位相空間を  $X$  と  $Y$  の ウエッジ (wedge) といい,  $X \vee Y$  と記す。例えば,  $S^1 \vee S^1$  は 8 の字をした位相空間である。 $S^m \vee S^n$  ( $m, n \geq 1$ ) を胞体分割してホモロジー群を求めよ。

問題 14.11 上の問題 14.10 において,  $X, Y$  を有限複体,  $x_0, y_0$  を  $X, Y$  の 0 胞体としたとき, 自然に  $X \vee Y$  は有限複体,  $X, Y$  は部分複体になる。このとき,  $\tilde{H}_q(X \vee Y) \cong \tilde{H}_q(X) \oplus \tilde{H}_q(Y)$  を示せ。これより,  $n$  が奇数のとき  $S^n \vee \mathbb{R}P^{n-1}$  は  $\mathbb{R}P^n$  と同型なホモロジー群をもつことを確認せよ。

問題 14.12 図 17 の正 8 角形の各辺を,  $S^1 \vee S^1$  の 2 つの円周に, 同じ文字が書いてあるものどうし矢印に沿って貼り合わせる。ただし, 正 8 角形の頂点は,  $S^1 \vee S^1$  において 2 つの  $S^1$  がくっついている点と同一視する。このようにして得られた位相空間  $X$  のホモロジー群を求めよ。

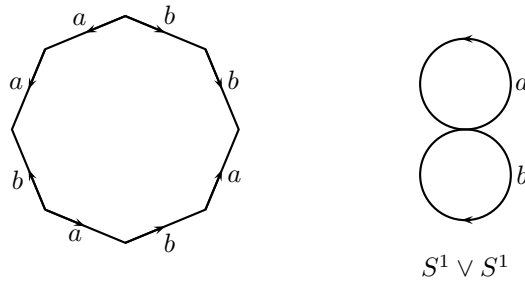


図 17: 問題 14.12