# 第 1 章　複体

## 1　単体

$n$ 次元ユークリッド空間 $R^n$ を定めておいて, $R^n$ の点 $P$ を

$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

で表す。直線 $\ell$ は, $\ell$ 上の相異なる 2 点 $P_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ によって定まる。$\ell$ 上の任意の点 $P = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ は

$$w_i = \lambda x_i + \mu y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \lambda + \mu = 1 \tag{1.1}$$

と表される。逆に 式 (1.1) で 表せる点 $P$ は $\ell$ 上にある。特に $P$ が線分 $P_0P_1$ 上にあるための条件は

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \qquad \lambda + \mu = 1 \tag{1.2}$$

である。

次に平面 $u$ は, $u$ 上の同一直線上にない 3 点 $P_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $P_2 = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ によって定まる。$u$ 上の点 $P = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ は

$$\left.\begin{array}{c} w_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \lambda + \mu + \nu = 1 \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

と表される。逆に 式 (1.3) で 表せる点 $P$ は $u$ 上にある。特に $P$ が三角形 $P_0P_1P_2$ に属するための条件は

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \qquad \lambda + \mu + \nu = 1 \tag{1.4}$$

である。(1.1)(1.3) の代わりに

$$P = \lambda P_0 + \mu P_1, \qquad \lambda + \mu = 1 \tag{1.1$'$}$$

$$P = \lambda P_0 + \mu P_1 + \nu P_2, \qquad \lambda + \mu + \nu = 1 \tag{1.3$'$}$$

と表し, $(\lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu, \nu)$ を $P$ の重心座標という。

一般に,

**定義 1.1**

$r+1$ 個の点 $P_0, P_1, \ldots, P_r$ が **独立である** とは $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 0$ をみたす $r+1$ 個の実数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ に対して ( O = (0,0, . . . ,0) で原点を表す。)

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r = O \tag{$*$}$$

が成り立つのは

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$$

のときに限るときをいう。

**命題 1.2**

(**1**) $r+1$ 個の点 $P_0, P_1, \ldots, P_r$ が 独立である必要十分条件は, ベクトル

$$\overrightarrow{P_0P_1}, \quad \overrightarrow{P_0P_2}, \quad \cdots, \quad \overrightarrow{P_0P_r} \quad \text{が一次独立}$$

であることである。

(**2**) 上の命題 1 において, $r+1$ 個の点 $P_0, P_1, \ldots, P_r$ が独立であることは $P_0$ の取り方によらない。

準備できたので, 単体を定義しよう。
1 点 $A$ のことを **0-単体 (simplex)**
線分 $P_0P_1$ のことを **1-単体 (simplex)**
三角形 $P_0P_1P_2$ のことを **2-単体 (simplex)**
という。
1-単体 $P_0P_1$ の 2 つの端点 $P_0$, $P_1$ を $P_0P_1$ の **頂点 (vertex)** という。2-単体 $P_0P_1P_2$ に対して, $P_0$, $P_1$, $P_2$ を $P_0P_1P_2$ の **頂点 (vertex)** という。

一般に,

**定義 1.3**
独立である $r+1$ 個の点 $P_0$, $P_1$, $\cdots$, $P_r$ に対して

$$\sigma = \{\ P \in R^n\ ;\ P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r\ ,\ \lambda_i \geq 0\ \ (0 \leq i \leq r), \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots \lambda_r = 1\ \}$$

を $P_0$, $P_1$, $\cdots$, $P_r$ によって張られる **$r$-単体 (simplex)** という。また 単体の **次元 (dimension)** は $r$ であるといい, $\dim\ \sigma = r$ と書く。$r$-単体 $\sigma = P_0P_1 \cdots P_r$ に対して, $P_0$, $P_1$, $\cdots$, $P_r$ を $\sigma$ の **頂点 (vertex)** という。また, $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ を ( $P$ の $\sigma$ に関する ) **重心座標 (barycentric coordinate)** という。

定義から容易に分かるように, 単体において頂点の順序は関係しない。すなわち $P_0P_1P_2$ と $P_1P_0P_2$ は同じものである。

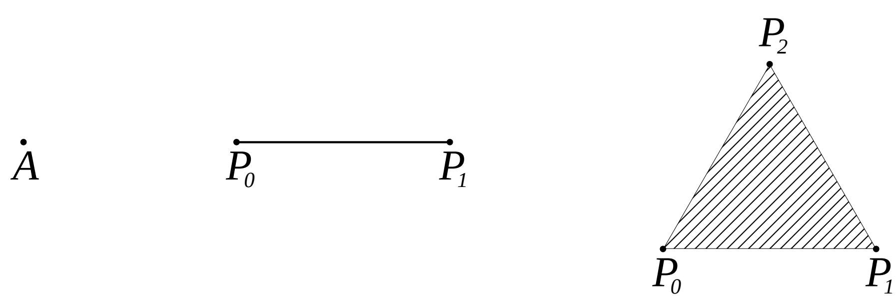



図 1: 単体

**定義 1.4** (辺, 面 (face))
2-単体 $P_0P_1P_2$ に対して, $P_0P_1$, $P_1P_2$, $P_2P_0$ のことを, **辺 (face)** あるいは **面** といい

$$P_0P_1P_2 \succ P_0P_1 \quad \text{等々}$$

と表す。2-単体 $P_0P_1P_2$ に対して, $P_0$, $P_1$, $P_2$ のことも, **辺 (face)** あるいは **面** といい

$$P_0P_1P_2 \succ P_0 \quad \text{等々}$$

と表す。また 1-単体 $P_0P_1$ に対して, $P_0$, $P_1$, $P_2$ のことも, **辺 (face)** あるいは **面** といい

$$P_0P_1 \succ P_0 \quad \text{等々}$$

と表す。

一般に,

独立である $r+1$ 個の点 $P_0, P_1, \cdots, P_r$ に対して, その部分集合 $P_{j_0}, P_{j_1}, \cdots, P_{j_k}$ $(k \leq r)$ も独立であるから

$$\Delta^k = \{ P \in R^n \; ; \; P = s_0P_{j_0} + s_1P_{j_1} + \cdots + s_kP_{j_k} \quad (s_{j_i} \geq 0, \quad s_0 + s_1 + \cdots s_k = 1) \}$$

も $k$-単体であるが, これを

$$\Delta^k \prec \Delta^r$$

と表し, $\Delta^k$ は $\Delta^r$ の **辺 (face)** あるいは **面** であるという。ここに $\Delta^r$ は $P_0, P_1\ , \cdots, P_r$ によって張られる $r$-単体である。face であって, $\Delta^r$ と等しくないとき

$$\Delta^k \precneqq \Delta^r$$

と表し, $\Delta^k$ は $\Delta^r$ の **真の辺 (proper face)** あるいは **真の面** であるという。

## 2 複体の定義

**定義 2.1**

$n$ 次元ユークリッド空間内の有限個の単体からなる集合 $K$ が次の性質をもつとき, $K$ を **単体的複体 (simplicial complex)**, または, 単に **複体 (complex)** という。

**(1)** $\sigma \in K, \quad \tau \prec \sigma$ ならば $\tau \in K$

**(2)** $\sigma, \tau \in K \quad \sigma \cap \tau \neq \emptyset$ ならば $\sigma \cap \tau \prec \sigma$ かつ $\sigma \cap \tau \prec \tau$

$K$ に含まれる 1 番大きい次元の単体の次元 $r$ を, 複体 $K$ の **次元 (dimension)** といい $dim\ K$ で表す。このとき $K$ を **$r$ 次元複体 ($r$-dimensional complex)** という。

**例 2.2**

単体 $\sigma$ に対して, $\sigma$ の face 全てからなる集合

$$\{ \tau \; ; \; \tau \prec \sigma \}$$

は明らかに 複体をなすが, これを $K(\sigma)$ と表す。また $\sigma$ の proper face 全てからなる集合

$$\{ \tau \; ; \; \tau \precneqq \sigma \} = K - \{ \sigma \}$$

も 複体をなすが, これを $K(\dot{\sigma})$ と表す。

**定義 2.3**
$n$ 次元複体 $K$ において, $i$ 単体の数を $\lambda_i$ とするとき,

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda_i$$

を $K$ の **オイラー標数 (Euler characteristic)** という。

**命題 2.4**
$\sigma$ を $r$-単体とすると,

$$\chi(K(\sigma)) = 1 \ , \ \chi(K(\dot{\sigma})) = 1 - (-1)^r$$

**記号 2.5**
$K$ の単体 $\sigma$ を点集合であることを強調したいとき, $|\sigma|$ と表す。
また 次の記号も用意しておく。$r$ 次元単体 $\sigma = a_0 a_1 \cdots a_r$ に対して

$$\mathring{\sigma} = \ \{ \ x \in R^n \ ; \ x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \quad \lambda_i > 0 \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1 \ \}$$

と表す。

複体 $K$ を点集合 ($R^n$ の部分空間) とみたとき, 次のようにいう。

**定義 2.6** 多面体 (polyhedron)

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$$

のことを, **多面体 (polyhedron)** という。また 点集合 $X = |K|$ は **三角形分割 (trianglulation)** $K$ をもつ という。あるいは $X$ は **三角形分割可能 (trianglable)** という。

ここで, よく使われる重要な補題を挙げておこう。

**補題 2.7**
$\forall x \in |K|$ に対して, $x \in \mathring{\sigma}$ をみたす $K$ の元 (単体) $\sigma \in K$ がただ一つ存在する。
すなわち, $\exists ! \sigma \in K \ ; \ x \in \mathring{\sigma}$ である。

さて, $r$-単体の向きを定義しておこう。今までは $r$-単体 $\sigma = a_0 a_1 \cdots a_r$ というときは, 頂点の順序は関係しなかった。2-単体 $\sigma = a_0 a_1 a_2$ と $a_1 a_0 a_2$ は同じ単体 $\sigma$ であった。ここで 2-単体なら裏表, 1-単体なら線分の向き, 3-単体なら四面体が右手系か左手系か, を表すものを定めよう。

**定義 2.8**
$r$-単体 $\sigma = a_0 a_1 \cdots a_r$ の **向き (orientation)** とは, 頂点の順列を定めることをいう。またこのとき $r+1$ 個の元の置換に対して偶置換で移った順列は同じ方向をもつと考える。奇置換で移った順列は反対の方向をもつと考える。これによって頂点の順列は二つに分かれる。向きの定まった単体のことを

**向きづけられた単体 (oriented simplex)** といい, $[a_0 a_1 \cdots a_r]$ と表す。向きづけられた単体も $\sigma$ で表すことが多い。また $[\sigma]$ と書くこともある。

複体 $K$ の全ての単体に向きがあたえられているとき, $K$ を **向きづけられた複体 (oriented complex)** という。

**例 2.9**
1-単体 $a_0a_1$ では 頂点の順列は $(a_0, a_1)$, $(a_1, a_0)$ で, $a_0a_1$ は二つの異なる向き $[a_0a_1]$, $[a_1a_0]$ をもつ。これは図形でいえば, 図 2 の矢印と考えられる。
2-単体 $a_0a_1a_2$ に対しては,
$(a_0, a_1, a_2) \quad \sim \quad (a_1, a_2, a_0) \quad \sim \quad (a_2, a_0, a_1)$,
$(a_0, a_2, a_1) \quad \sim \quad (a_1, a_0, a_2) \quad \sim \quad (a_2, a_1, a_0)$
で, $a_0a_1a_2$ は 二つの異なる向き $[a_0a_1a_2]$, $[a_0a_2a_1]$ をもつ。これは図形でいえば, 図 2 の矢印と考えられる。

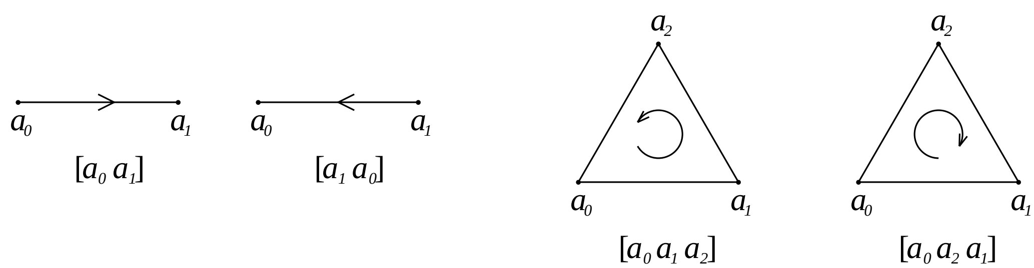



図 2: 単体の向き

# 3 部分複体, 抽象複体

**定義 3.1**
複体 $K$ に対して, その部分集合で複体をなすものを, **部分複体 (subcomplex)** という。

**命題 3.2**
複体 $K$ の部分集合 $L$ が $K$ の部分複体である必要十分条件は

$$\sigma \in L \text{ で } \quad \tau \prec \sigma \text{ ならば } \tau \in L \tag{3.1}$$

である。

**定義 3.3**
複体 $K$ において, $\sigma$ を proper face とする $K$ の単体が存在しないとき, $\sigma$ は **主な単体 (principal simplex)** という。

**命題 3.4**
$\sigma$ を, 複体 $K$ の principal な単体とするとき, $K - \{\ \sigma\ \}$ は $K$ の部分複体である。

**定義 3.5**
複体 $K$ の $m$ 次元以下の単体すべての集合は, 部分複体をなすが, これを <u>$m$-**骨格** (**skelton**)</u>, または <u>$m$-**切片**</u> といい, $K^{(m)}$ で表す。

**命題 3.6**
$L$ を 複体 $K$ の部分複体とするとき, $|L| = |\overset{\circ}{L}| = \bigcup_{\sigma \in L} \overset{\circ}{\sigma}$ は, $|K|$ で閉集合である。

ここで, 今まで考えてきた $R^n$ の中の図形である単体的複体を, 抽象化した複体を定義しよう。

**定義 3.7**
有限集合 $V$ があたえられたとき, $V$ の部分集合の族 (集まり) $\mathcal{K}$ で

**(0)** $v \in V \Rightarrow \{v\} \in \mathcal{K}$

**(1)** $A \in \mathcal{K}, B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{K}$

をみたすとき, $(\mathcal{K}, V)$ あるいは $\mathcal{K}$ を <u>**抽象複体** (**abstruct complex**)</u> といい, $V$ の元を ($\mathcal{K}$ の) 頂点, $\mathcal{K}$ の元を単体と言う。

単体的複体 $K$ は $K$ の頂点全ての集合を $V$, $K$ の単体 $\sigma$ の頂点の集合を $\mathcal{K}$ の元とすれば, ($\mathcal{K}$ は) 抽象複体である。この作り方を, <u>**単体的複体の抽象化**</u> という。

ここで 二つの抽象複体が同型ということを次のように定義する。

**定義 3.8**
$(\mathcal{K}, V)$, $(\mathcal{K}', V')$ を二つの抽象複体とするとき, $V$ から $V'$ への全単射 $\varphi : V \to V'$ が存在して,

$\{v_0, v_1, \cdots, v_s\} \in \mathcal{K}$ ならば, $\{\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_s)\} \in \mathcal{K}'$

$\{v'_0, v'_1, \cdots, v'_s\} \in \mathcal{K}'$ ならば, $\{\varphi^{-1}(v'_0), \varphi^{-1}(v'_1), \cdots, \varphi^{-1}(v'_s)\} \in \mathcal{K}$

であるとき, $(\mathcal{K}, V)$ と $(\mathcal{K}', V')$ は <u>**同型である**</u> という。

単体的複体 $K$ から抽象的複体 $\mathcal{K}$ は上のように作られるが, 逆に抽象的複体 $(\mathcal{K}, V)$ があたえられたとき, $\mathcal{K}$ に同型な単体的複体 $K$ ($R^n$ の図形) を実現することを考えよう。

$V$ の元の数を $t$ とするとき, $t$ より大きい $n$ をとり, $R^n$ に, (独立である) $t$ 個の点 $a_1, a_2, \cdots, a_t$ をとる。例えば, $i$ 番目だけ 1 である

$$a_i = (0, 0, \cdots, \overset{i\text{番目}}{1}, 0, \cdots, 0)$$

をとる。そして, $\mathcal{K}$ の元 $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_q}\}$ を, $R^n$ の $q$-単体 $a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_q}$ に対応させる。このようにして, $\mathcal{K}$ の元からえられる単体を全て集めたものを $K$ とすると, $K$ は (単体的) 複体である。
このようにして作られた複体 $K$ より, 再び抽象複体 $(\overline{\mathcal{K}}, \overline{V})$ を単体的複体の抽象化によって作ると, 明らかに, $(\mathcal{K}, V)$ と同型である。このように $(\mathcal{K}, V)$ と $(\overline{\mathcal{K}}, \overline{V})$ が同型である複体 $K$ を $(\mathcal{K}, V)$ の <u>**幾何学的実現** (**geometric representation**)</u> という。

# 4　星状体 (star)

**定義 4.1**
$\sigma$ を 複体 $K$ の単体 とするとき

$$\{\ \tau\ ;\ \sigma \prec \tau\ \}$$

を $St(\sigma)$ または $St\sigma$ と表し, $\sigma$ の $K$ における **星状体 (star)** という。また,

$$st(\sigma) = st\sigma = |St\sigma|, \qquad \overset{\circ}{st}(\sigma) = \overset{\circ}{st}\sigma = \bigcup_{\tau \in St(\sigma)} \overset{\circ}{\tau},$$

$$\overline{St}(\sigma) = \overline{St}\sigma = \{\ \tau\ ;\ \exists \eta \in K \quad \sigma \prec \eta \quad \tau \prec \eta\ \}$$

と表す。

**命題 4.2**
**(1)** $\overline{St}(\sigma)$ は $K$ の部分複体である。
**(2)** $r$ 次元複体 $K$ における $r$-単体 $\sigma$ に対して, $\overset{\circ}{\sigma}$ は $|K|$ で開集合である。
**(3)** $\overset{\circ}{st}(\sigma)$ は $|K|$ で開集合である。
**(4)** $\sigma \prec \tau \implies St(\sigma) \supset St(\tau) \implies st(\sigma) \supset st(\tau) \implies \overset{\circ}{st}(\sigma) \supset \overset{\circ}{st}(\tau)$ が成り立つ。

またよく使われる次の命題を上げておこう。

**命題 4.3**
複体 $K$ の頂点の集合を $V$ とおくと

$$|K| = \bigcup_{a \in V} \overset{\circ}{st}(a) \text{ で}, \quad \overset{\circ}{st}(a) \text{ は } |K| \text{ で開集合 である。}$$

そして $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} St(a_i) \neq \emptyset$ であることと, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が $K$ の単体 $\sigma$ を張ることは同値である。
そしてそのとき,

$$\bigcap_{i=1}^{n} St(a_i) = St(\sigma), \qquad \bigcap_{i=1}^{n} \overset{\circ}{st}(a_i) = \overset{\circ}{st}(\sigma)$$

が成り立つ。

ここで後で使われる重要な概念を定義をしておこう。

**定義 4.4**
$R^n$ のなかの 2 つの単体 $\sigma$ と $\tau$ が **可接合 (joinable)** とは,
$\sigma = a_0 a_1 \cdots a_r \qquad \tau = b_0 b_1 \cdots b_s$
としたとき, $a_0, a_1, \cdots, a_r, b_0, b_1, \cdots, b_s$ が独立であるときをいう。このとき $a_0, a_1, \cdots, a_r, b_0, b_1, \cdots, b_s$ は単体を張るが, この単体を $\sigma * \tau$ と表し, $\sigma$ と $\tau$ の **接合 (join)** という。この単体の次元は $r + s + 1$ である。

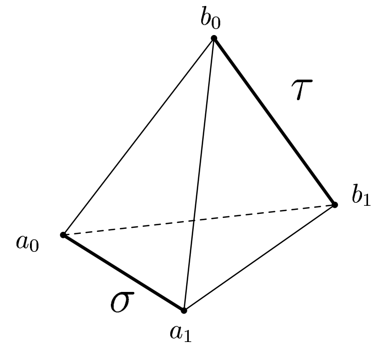
このとき

$\sigma{*}\tau = \{\ (1{-}t)a{+}tb\,;\ 0 \le t \le 1,\ a \in \sigma,\ b \in \tau\ \}$

と表され, $\sigma * \tau$ の元 $z$ は

$$z = (1-t)a + tb \quad (0 \le t \le 1,\ a \in \sigma,\ b \in \tau)$$

と一意に表される。




**問題 4.5** 次を示せ。

① $\sigma * \tau = \tau * \sigma$

② $(\sigma * \tau) * \eta = \sigma * (\tau * \eta)$

**定義 4.6**
二つの複体 $K$ と $L$ が **可接合** (*joinable*) であるとは,

(**1**) $\forall\sigma \in K$ と $\forall\tau \in L$ が可接合

(**2**) $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, $\tau_1$,$\tau_2 \in L$ に対して,

$$\sigma_1 * \tau_1 \cap \sigma_2 * \tau_2 = (\sigma_1 \cap \sigma_2) * (\tau_1 \cap \tau_2)$$

のときをいう。このとき

$$\{\ \sigma * \tau\ ;\ \sigma \in K,\ \tau \in L\ \}$$

は複体をなすが, これを $K * L$ と表し, $K$ と $L$ の **接合 (join)** という。

特に, $K = \{x\}$ (1 点のみ) のとき,

$$K * L = \{x\} * L$$

を $x$ を頂点, $L$ を底とする **錐複体 (cone complex)** といい, $x * L$ と表す。

**問題 4.7** 次を示せ。
単体 $\sigma, \tau$ に対して, $\sigma$ と $\tau$ が可接合ならば, $\eta = \sigma * \tau$ とおけば, $K(\eta) = K(\sigma) * K(\tau)$ である。

$\sigma = a_0 a_1 \cdots a_r$ のとき, $\tau = a_1 a_2 \cdots a_r$ を考えると, $a_0 * K(\tau) = k(\sigma)$ である。

**命題 4.8**
二つの複体 $K$ と $L$ が 可接合のとき, $K * L$ は複体である。

次に複体が与えられたとき, 複体において可接合という概念を定めよう。

**定義 4.9**
複体 $K$ において, $K$ の 2 つの単体 $\sigma$ と $\tau$ が **$K$ で可接合 (*joinable in K*)** とは, $\sigma$ と $\tau$ が可接合で, しかも, その接合 $\sigma * \tau$ がまた $K$ の単体であるときをいう。

**定義 4.10**
複体 $K$ の 2 つの部分複体 $L_1$ と $L_2$ が可接合とは, $L_1$ の任意の単体 $\sigma$ と $L_2$ の任意の単体 $\tau$ に対して, $\sigma$ と $\tau$ が $K$ で可接合であるときをいう。

**定義 4.11**
複体 $K$ の単体 $\sigma$ に対して,

$$\{\ \tau \in K\ ;\ \ \tau \text{ と } \sigma \text{ は } K \text{ で可接合 }\}$$

を, $lk(\sigma;K)$ あるいは, 単に $lk(\sigma)$ と表し, $\sigma$ の $K$ における **リンク (*link*)** という。

すると, 前に定義した星状体と次のような関係がある。

**命題 4.12**
(**1**) $lk(\sigma;K)$ は $K$ の部分複体である。
(**2**) $K$ の部分複体として, $K(\sigma)$ と $lk(\sigma;K)$ は可接合で, $K(\sigma) * lk(\sigma;K) = \overline{St}(\sigma)$ が成り立つ。

# 5 単体写像 (simplicial map)

複体 $K$ と $L$ が与えられたとき, $K$ から $L$ への写像は次のように定める。

**定義 5.1**
$K$ の頂点の集合 $V(K)$ から $L$ の頂点 $V(L)$ への写像 $f$ であって, 次の性質をみたすとする。
$K$ の単体 $\sigma = a_0a_1\cdots a_r$ に対して, $f(a_0)$, $f(a_1)$, $\cdots$, $f(a_r)$ が $L$ の単体をなす。もっと詳しくいうと, $f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_r)$ の内 同じものは 1 つにすると, それらが単体を張る。このとき, $f$ は $K$ から $L$ への **単体写像 (simplicial map)** といい, $f : K \to L$ と表す。

**注 5.2**
(**1**) 上でも述べたが $f(a_0)$, $f(a_1)$, $\cdots$, $f(a_r)$ が全て異なる点であることは要求していない。 すなわち同じ点があってもいいので, 張られる単体は $r$ 次元とは限らない。
(**2**) $f$ は $K$ から $L$ への写像ではないが, $K$ の単体 $\sigma = a_0a_1\cdots a_r$ に対して $f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_r)$ の内 同じものは 1 つにすると, $L$ の単体 $\tau$ を張るので, $\sigma$ が $\tau$ に対応していると思えるので, $f : K \to L$ という書き方をし, しかも

$$\sigma' \prec \sigma\ (\sigma \in K) \text{ ならば } f(\sigma') \prec f(\sigma)$$

をみたす。

**例 5.3** 単体写像の例として, $K = \{\ a_0a_1a_2, a_0a_1, a_1a_2, a_0a_2, a_2a_3, a_0, a_1, a_2, a_3\ \}$ と $L = \{\ b_0b_2, b_2b_3, b_0, b_2, b_3\ \}$ を考え, $f$ を

$$f(a_0) = f(a_1) = b_0, \quad f(a_2) = b_2, \quad f(a_3) = b_3$$

とすれば, $f : K \to L$ は単体写像である。そして $K$ の単体は

$$\begin{cases} a_0a_1a_2 & \to & b_0b_2, \\ a_0a_1 & \to & b_0, \\ a_0a_2 & \to & b_0b_2, \\ a_1a_2 & \to & b_0b_2, \\ a_2a_3 & \to & b_2b_3 \end{cases}$$

と移る。

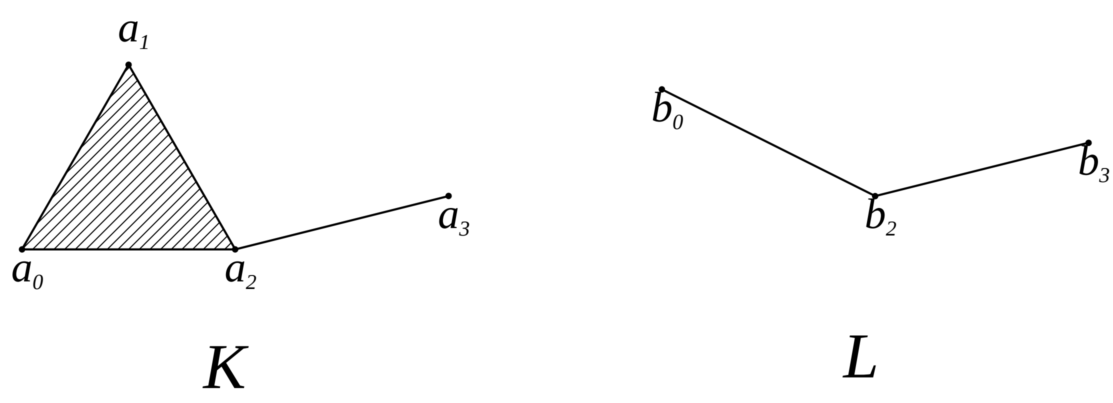



図 3: 単体写像

# 6 細分 (subdivision)

複体 $K$ に属する単体を細分して, 新しい複体を作ることを考えよう。細分について, きちんと述べると,

**定義 6.1**
二つの複体 $K_1, K_2$ において, $K_1$ が $K_2$ の細分であるとは,

(**1**) $K_2$ に属する単体は, $K_1$ に属するある単体に含まれる。
記号で書くと, $\forall \sigma \in K_2$ に対して, $\exists \tau \in K_1$ ; $\tau \subset \sigma$

(**2**) $K_1$ に属する単体は, $K_2$ に属する有限個の単体によって覆われる。
記号で書くと, $\forall \tau \in K_1$ に対して, $\exists \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m \in K_2$ ; $\tau = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$

をみたすときをいう。

**命題 6.2**
定義 6.1 における (**1**) + (**2**) と次の事は同値である。
(**1**) + (**2′**) $|K_1| = |K_2|$

ここで, 有名な細分をいくつか作ろう。

最初に, 導細分 (derived subdivision) と呼ばれている細分を作ってみよう。
まず次の補題が成り立つ。

**補題 6.3**
$s$-単体 $\sigma$ $(s > 0)$ に対して, $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ をとるとき, $x$ と $K(\overset{\bullet}{\sigma})$ は可接合である。

この補題によって, $x$ と $K(\overset{\bullet}{\sigma})$ から $x * K(\overset{\bullet}{\sigma})$ が作られ, これは $K(\sigma)$ の細分である。
ここまで準備が整ったので, 複体 $K$ に対して, 導細分とよばれている $K$ の細分を構成しよう。$K$ を $r$ 次元複体として, $m$-骨格 $K^{(m)}$ をとり, 帰納法によって, $K^{(m)}$ の細分を作っていく。まず $K^{(0)}$ について,

$$\mathfrak{sd}K^{(0)} = K^{(0)}$$

とおく。あきらかに $K^{(0)}$ の細分である。ここで $K^{(m-1)}$ の細分 $\mathfrak{sd}K^{(m-1)}$ が構成されたとする。このとき $K^{(m)}$ について, $\mathfrak{sd}K^{(m)}$ を次のように構成する。

$m$-単体 $\sigma \in K$ をとる。すると, $K(\overset{\bullet}{\sigma})$ は $K^{(m-1)}$ の部分複体なので, $K(\overset{\bullet}{\sigma})$ の細分 $\mathfrak{sd}K(\overset{\bullet}{\sigma})$ が構成されていて, $\mathfrak{sd}K^{(m-1)}$ の部分複体である。そして $\overset{\circ}{\sigma}$ に属する点 $x_\sigma$ と $K(\overset{\bullet}{\sigma})$ は, 補題 6.3 によって可接合だから, $x_\sigma * K(\overset{\bullet}{\sigma})$ が定義されるので, $K$ の全ての $m$-単体について, 同様のことをおこない,

$$\mathfrak{sd}K^{(m)} = \mathfrak{sd}K^{(m-1)} \cup \bigcup_{\sigma} \left( x_\sigma * K(\overset{\bullet}{\sigma}) \right)$$

とおくと, これは複体であり, $K^{(m)}$ の細分である。

帰納法によって, $\mathfrak{sd}K^{(r)}$ が定義され, $K = K^{(r)}$ の細分であるので, $K$ の細分 $\mathfrak{sd}K$ が構成される。これを $K$ の <u>**導細分 (derived subdivision)**</u> という。

複体 $K$ と単体 $\sigma \in K$ に対して, $b_\sigma$ で $\overset{\bullet}{\sigma}$ の点を表し,

$$K^b = \{ b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_s} \mid \sigma_0 \gneqq \sigma_1 \gneqq \sigma_2 \gneqq \cdots \gneqq \sigma_s \}$$

と表す。ここに, $\sigma_0 \gneqq \sigma_1 \gneqq \sigma_2 \gneqq \cdots \gneqq \sigma_s$ に対して, $b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_s}$ をとると, $b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}, b_{\sigma_2}, \cdots, b_{\sigma_s}$ は独立であるので, これらは単体をはる。そして

$$b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_s} \subset \sigma_1$$

をみたしている。

ここで次の定理が示される。

**定理 6.4**
$K^b = \mathfrak{sd}K$ である。すなわち, $K^b$ の元は $\mathfrak{sd}K$ の元であり, $\mathfrak{sd}K$ の元は, 上のように表せる。

<u>証明</u>　先ず <u>$K^b \subset \mathfrak{sd}K$</u> を示す。
複体の次元の帰納法によって示す。0 次元のとき明らか。
$r-1$ 次元までの複体まで成立するとして, $r$ 次元複体について示す。$K^b$ の元 $b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} \cdots b_{\sigma_s}$ をとる。
$\sigma_s$ の次元が $r-1$ 次元以下ならば, $K^{(r-1)}$ に入っているので仮定によって

$$b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_s} \text{ は } \mathfrak{sd}K \text{ に属する。}$$

$\sigma_s$ を $r$ 単体とする。$\sigma_s$ に対して $K(\overset{\bullet}{\sigma}_s)$ を考えると, $\sigma_{s-1} \gneqq \sigma_s$ より, $\sigma_{s-1}$ は $r-1$ 次元以下だから,

$$\sigma_{s-1} \in K(\overset{\bullet}{\sigma}_s) \subset K^{(r-1)}$$

である。よって, 帰納法の仮定によって, $\eta = b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_{s-1}}$ は $\mathfrak{sd}K(\overset{\bullet}{\sigma}_s)$ の元である。
よって, $\mathfrak{sd}K$ の定義によって, $b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_s} = \eta * b_{\sigma_s}$ は $\mathfrak{sd}K$ の元である。
したがって, 帰納法によって, $K^b \subset \mathfrak{sd}K$ が成り立つ。

次に, <u>$\mathfrak{sd}K \subset K^b$</u> を示す。
このときも, 複体の次元の帰納法によって示す。0 次元のとき明らか。

$\tau$ を $\mathfrak{sd}K$ の単体とする。
$\tau \in \mathfrak{sd}K^{(r-1)}$ なら, 帰納法の仮定により命題は成立する。
よって $\tau$ を $\mathfrak{sd}K^{(r-1)}$ から $\mathfrak{sd}K^{(r)}$ を作るときに新しくできる単体としてよい。すなわち $r$-単体 $\sigma$ が存在して, $\tau \in x_\sigma * \mathfrak{sd}K(\dot{\sigma})$ としてよい。このとき次のように場合分けをする。

**(i)** $\tau \in \mathfrak{sd}K(\dot{\sigma})$ のとき,
$\mathfrak{sd}K(\dot{\sigma}) \subset \mathfrak{sd}K^{(r-1)}$ より明らか。

**(ii)** $\tau = b_\sigma$ のとき, 明らか。

**(iii)** $\tau = b_\sigma * \tau'$ で, $\tau' \in \mathfrak{sd}K(\dot{\sigma})$ のとき,
$\tau'$ は帰納法の仮定により, $K(\dot{\sigma})$ の単体の列 $\sigma_0 \precneqq \sigma_1 \precneqq \sigma_2 \precneqq \cdots \precneqq \sigma_{s-1}$ が存在して, $\tau' = b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_{s-1}}$ と表される。そして $\sigma_{s-1}$ は $K(\dot{\sigma})$ の単体だから, $\sigma_{s-1} \precneqq \sigma$ である。
結局 $\sigma_0 \precneqq \sigma_1 \precneqq \sigma_2 \precneqq \cdots \precneqq \sigma_{s-1} \precneqq \sigma_s$ が存在して, $\tau = b_{\sigma_0} b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \cdots b_{\sigma_{s-1}} b_\sigma$ と表される。

よって, 帰納法によって $\mathfrak{sd}K \subset K^b$ が示される。 □

ここで $x_\sigma$ として $\sigma^r$ の重心 $\dfrac{1}{r+1}\Sigma_{i=0}^{r} a_i$ を選んだとき, 導細分は **重心細分** (***barycentric subdivision***) と呼ばれていて, ふつう $K'$ で表されることが多い。

さらに $\mathfrak{sd}K$ はまた複体であるので, $\mathfrak{sd}K$ の導細分 $\mathfrak{sd}(\mathfrak{sd}K)$ が考えられる。これを **２回目の導細分** といい, $\mathfrak{sd}^{(2)}K$ と表す。さらに次々に導細分を続けたものを, $n$ **回目の導細分** (***$n$-derived subdivision***) といい, $\mathfrak{sd}^{(n)}K$ と表する。重心細分についても, 同様に $n$ **回目の重心細分** (***$n$-barycentric subdivision***) といわれる。

もう一つの有名な細分として, starring による星状細分 (stellar subdivision) がある。それを紹介しよう。今度は複体 $K$ の単体 $\sigma$ を考え,

$$\begin{cases} P = lk(\sigma; K), \\ Q = K - \overset{\circ}{st}(\sigma) \end{cases}$$

とおくと,

$$\begin{cases} K = K(\sigma) * P \ \cup \ Q, \\ K(\sigma) * P \ \cap \ Q = K(\dot{\sigma}) * P \end{cases}$$

である。このとき, $x \in \dot{\sigma}$ をとり,

$$L = Q \ \cup x * K(\dot{\sigma}) * P$$

とおくと, $L$ も複体であり $|K| = |L|$ をみたす。このようにして作られた $L$ に $K$ を変えることを $K \xrightarrow{e.s.} L$ とかいて, $K$ の $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ における ***elementary starring*** という。$K$ から有限回の elementary starring によって $L$ がえられるとき, $L$ は $K$ の **星状細分** (***stellar subdivision***) であるという。

**命題 6.5**
複体 $K$ に対して, $K$ の単体を次元の大きい順に並べ, 各 $\sigma$ に対して, $x \in \dot{\sigma}$ を取り, 順々に elementary starring して得られた複体は, $K$ の導細分と同じである (単体を次元の大きい順に並べると elementary starring によっては $\overline{St}(\sigma)$ 以外は変化しないことに注意)。

ここで, 重要な単体写像の例をあげておこう。

**例 6.6**
$r+1$ 単体 $\sigma^{r+1} = a_0 a_1 \cdots a_{r+1}$ と $r$ 単体 $\sigma^r = a_0 a_1 \cdots a_r$ に対して,

$$\varphi(a_i) = a_i \ (i = 0, 1, \cdots, r), \quad \varphi(a_{r+1}) = a_r$$

とすることにより, 単体写像 $\varphi : K(\sigma^{r+1}) \longrightarrow K(\sigma^r)$ が定義される。

**例 6.7**
複体 $K$ にたいして $L = K'$ とすると, $L = K'$ の頂点は $b_\sigma$ ($\sigma \in K$ の重心 ) であるが, これを $\sigma$ の (勝手な) 頂点に対応させる写像 $f$ は単体写像である。

**例 6.8**
複体 $K$, $L$ と 単体写像 $f : K \to L$ に対して, $g : \mathfrak{sd}K \to \mathfrak{sd}L$ を次のように定める。
$\mathfrak{sd}K$ の頂点 $b_\sigma$ $(\sigma \in K)$ に対して, $f(\sigma)$ は $L$ の単体だから, $f(\sigma)$ の重心 $b_{f(\sigma)}$ を対応させる。すなわち $g(b_\sigma) = b_{f(\sigma)}$ とすると, $g : \mathfrak{sd}K \to \mathfrak{sd}L$ は単体写像である。この写像 $g$ は $\mathfrak{sd}f$ と表される。