第1章　単体的ホモロジー群とホモロジー理論

1　単体的ホモロジー群の復習

K を n 次元単体的複体とし, 各 q 単体に向きを与えておく (K は向きの付いた複体)。

定義 1.1　複体 K によって定まる次のような形式的表現 (有限和)

$$c^q = \alpha_1\sigma_1^q + \alpha_2\sigma_2^q + \cdots + \alpha_\lambda\sigma_\lambda^q \qquad (\alpha_i \text{ は整数}, \ \sigma_i^q \text{ は 向きの付いた } q \text{ 単体})$$

を K の <u>q **チェイン** (***q-chain***)</u> または <u>q **鎖**</u> と言う。そして q チェイン全体を

$$C_q(K)$$

と表し, K の <u>q **チェイン群** (***chain group***)</u> または <u>q **鎖群**</u> という。
これは 向きの付いた K の q 単体を生成元とする自由加群である。

定義 1.2　向きの付いた q 単体 $\sigma^q = [a_0 a_1 \cdots a_q]$ に対して

$$\partial_q \sigma^q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_q]$$

(ここで $[a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_q]$ とは $[a_0 a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_q]$ のこと，すなわち, $[a_0 a_1 \cdots a_i \cdots a_q]$ から a_i を取り除いたものを表す。) と定め, q チェイン

$$c = \sum_{j=0}^{\lambda} n_j \sigma_j^q \quad (n_j \in \boldsymbol{Z},\ \sigma_j^q \text{ は } q \text{ 単体})$$

に対して,

$$\partial_q c = \sum_{j=1}^{\lambda} n_j \partial \sigma_j^q$$

と定めると, $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ なる写像である。明らかに ∂_r は準同型写像である。この $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ を <u>**境界作用素** (***boundary operater***)</u> または <u>**バウンダリー作用素**</u> という。

定義 1.3　これによって, $\{C_r(K), \partial_r\}$ が定義されたが, これらすべてをまとめて, 次のように言う。
n 次元複体 K に対して,

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \to \cdots \to C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K) \to \cdots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

なるチェイン群 $C_q(K)$ と, 準同型写像 ∂_q からなる列ができる。
これを K に関する <u>**チェイン複体** (***chain complex***)</u> または <u>**鎖複体**</u> といい, $\mathbb{C}$ で表す。
また $\mathbb{C} = \{C_q(K), \partial_q\}$ あるいは ∂_q を略して $\mathbb{C} = \{C_q(K)\}$ と書くこともある。

このとき 次の重要な補題が成り立つ。

補題 1.4 任意の $q = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して, 次が成り立つ。

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0$$

定義 1.5
$\mathrm{ker}\partial_q = \partial_q^{-1}(0)$ を $Z_q = Z_q(K)$ とかいて q **輪体群** (***cycle group***) または q **サイクル群** といい, Z_q の元を q **輪体** (***cycle***) または q **サイクル** という。

$\mathrm{im}\partial_{q+1} = \partial_{q+1}(C_{q+1})$ を, $B_q = B_q(K)$ とかいて, q **境界輪体群** (***bounding cycle group***) または r **バウンダリーサイクル群** といい,
B_q の元を q **境界輪体** (***bounding cycle***) または q **バウンダリーサイクル** という。

このように定義すると, 補題 1.4 より, $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ だから $\mathrm{im}\partial_{q+1} \subset \mathrm{ker}\partial_q$ すなわち $B_q \subset Z_q$ である。

定義 1.6
そこで 商群 Z_q/B_q が考えられるが これを $H_q = H_q(K)$ とかいて,
K の (q **次**) **ホモロジー群** (***Homology group***) という。
$z^q \in Z_q(K)$ を含む類を $[z^q]$ とかいて, ホモロジー類といい, 同じホモロジー類に属する 2 つの輪体 z_1^q, z_2^q (すなわち $[z_1^q] = [z_2^q]$) を **ホモローグである** (***homologous***) といい, $z_1^q \sim z_2^q$ と表す。

定理 1.7
オイラー数 $\chi(K)$ は 単体的複体 K に対して,

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q \mathrm{rk} H_q(K)$$

が成り立つ。

複体 K からチェイン群 $C_q = C_q(K)$ を定め, チェイン複体 $\mathbb{C} = \{C_q(K)\}$ と定めてきたので, 複体 K を忘れて, チェイン複体 $\mathbb{C} = \{C_q\}$ から (C_q は加群) はじめると考えたとき, チェイン群 C_q を $C_q(\mathbb{C})$, Z_q を $Z_q(\mathbb{C})$, B_q を $B_q(\mathbb{C})$, H_q を $H_q(\mathbb{C})$ 等と書くこともある。

定義 1.8 チェイン複体

$$\mathbb{C} : \cdots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \cdots C_0 \to 0$$

と, 複体 K' から定まるチェイン複体

$$\mathbb{C}' : \cdots \to C'_{q+1} \xrightarrow{\partial'_{q+1}} C'_q \xrightarrow{\partial'_q} C'_{q-1} \to \cdots C'_0 \to 0$$

において, $\{\ f_q : C_q \to C'_q\ \}$ ($f_q : C_q \to C'_q$ は準同型写像) が定義されていて, 次の図式が可換であるとき,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle f_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_q} & & \downarrow{\scriptstyle f_{q-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \\
\longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

すなわち

$$f_{q-1}\ \partial_q = \partial'_q\ f_q$$

が成り立つ時, <u>**チェイン準同型写像** (***chain homomorphism***)</u> と言い

$$f = \{\ f_q\ \} : \{\ C_q \to C'_q\ \}$$

または

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{'}$$

とかく。

K_1, K_2 を複体, $f : K_1 \to K_2$ を単体写像とする。単体写像 f から次のようにチェイン準同型写像が定まる。

向きの付いた q-単体 $\sigma^q = a_0 a_1 \cdots a_q$ に対して, $f_{\#q}(\sigma^q)$ を

$$f_{\#q}(\sigma^q) = \begin{cases} f(a_0)f(a_1)\cdots f(a_q) & (\ f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q)\ \text{が全て異なる時}\ ) \\ 0 & (\ f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q)\ \text{に同じものがある時}\ ) \end{cases}$$

と定義し, $C_q(K_1)$ の元 $c^q = \sum_i n_i \sigma_i^q \quad (n_i \in \boldsymbol{Z})$ に対して,

$$f_{\#q}(c^q) = f_{\#q}\left(\sum_i n_i \sigma_i^q\right) = \sum_i n_i f_{\#q}(\sigma_i^q)$$

と定義すると, 準同型写像

$$f_{\#q} : C_q(K_1) \to C_q(K_2) \qquad (q = 0, 1, \cdots)$$

が定義されるので, これによりチェイン準同型写像

$$\{f_{\#q}\} : \{C_q(K_1)\} \to \{C_q(K_2)\}$$

すなわち, $\mathbb{C}_1 = \{C_q(K_1)\}$, $\mathbb{C}_2 = \{C_q(K_2)\}$ に対して,

$$f_\# : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$$

が得られる。

まとめると,

命題 1.9
K_1, K_2 を複体, $f : K_1 \to K_2$ を単体写像とする。このとき, チェイン準同型写像 $f_\# : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ が上のようにして 得られる。

さらに, 任意のチェイン準同型写像について,

定理 1.10
$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}'$ をチェイン準同型写像とすると, f は $\mathbb{C}$ のホモロジー群から $\mathbb{C}'$ のホモロジー群への準同型写像 $f_*:H_*(\mathbb{C})\to H_*(\mathbb{C}')$ をひきおこす。(詳しくは $f_{q*}:H_q(\mathbb{C})\to H_q(\mathbb{C}')$ である。)
$[x]\in H_q(\mathbb{C})$ に対して $f_q(x)\in Z_q(\mathbb{C}')$ だから, $[f_q(x)]\in H_q(\mathbb{C}')$ を対応させることによって,

$$f_{q*}:H_r(\mathbb{C})\to H_r(\mathbb{C}')$$

が構成できる。この写像が well-defined であることは, 明らかである。

系 1.11
K_1, K_2 を複体とする。$f:K_1\to K_2$ を単体写像に対して, f は $\mathbb{C}$ のホモロジー群から $\mathbb{C}'$ のホモロジー群への準同型写像 $f_*:H_*(\mathbb{C})\to H_*(\mathbb{C}')$ をひきおこす。

定義 1.12 $\mathbb{C}_1=\{C_q(K_1),\partial_q\}$, $\mathbb{C}_2=\{C_q(K_2),\partial'_q\}$ をチェイン複体とし, f, g を $\mathbb{C}_1$ から $\mathbb{C}_2$ への チェイン準同型写像とする。
いま各 q に対して定義された準同型写像

$$\Phi_q:C_q(K_1)\to C_{q+1}(K_2)$$

で条件

$$\partial'_{q+1}\Phi_q+\Phi_{q-1}\partial_q=g-f$$

をみたすものが存在する時, f と g は, **チェインホモトープ** (***chain homotopic***) または **鎖ホモトープ** であるといい $f\simeq g$ と表す。
Φ_q の集合 $\Phi=\{\Phi_q:C_q(K_1)\to C_{q+1}(K_2)\}$ のことを, **チェインホモトピー** (***chain homotopy***) または **鎖ホモトピー** といい, $\Phi:\mathbb{C}_1\to\mathbb{C}_2$ と表す。

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{r+1} \arrow[r, "\partial_{r+1}"] & C_r \arrow[r, "\partial_r"] \arrow[dl, "\Phi_r"'] & C_{r-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\Phi_{r-1}"'] & \cdots \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & 0 \\
{} \arrow[r] & C'_{r+1} \arrow[r, "\partial'_{r+1}"] & C'_r \arrow[r, "\partial'_r"] & C'_{r-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

命題 1.13
$\simeq$ は同値関係である

補題 1.14
チェインホモトープなチェイン準同型写像 f と g はホモロジー群の同じ準同型対応を引き起こす。すなわち f と g から引き起こされる ホモロジー群の準同型写像を, それぞれ

$$f_*,g_*;H_q(\mathbb{C}_1)\to H_q(\mathbb{C}_2)$$

と表せば, $f_*=g_*$ である。

定義 1.15 二つのチェイン複体 $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ に対して,

$$\exists f : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2 \;;\; \text{チェイン準同型}$$

$$\exists g : \mathbb{C}_2 \to \mathbb{C}_1 \;;\; \text{チェイン準同型}$$

$$s.t. \quad fg \simeq 1 \,, \qquad gf \simeq 1$$

であるとき, f は $\mathbb{C}_1$ から $\mathbb{C}_2$ への **チェイン同値写像** (***chain equivalence map***) という。

命題 1.16
$f : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ がチェイン同値写像ならば, $f_* : H_q(\mathbb{C}_1) \cong H_q(\mathbb{C}_2)$ が成り立つ。

さて, x と K が 可接合のとき,

$$x * K = K \cup \bigcup_{\sigma \in K} x * \sigma$$

であった。 K のチェイン c^q に対して, $x * c^q$ は $x * K$ の チェインであるが, このとき $c^q = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i^q$ とすると, $x * c^q = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} n_i (x * \sigma_i^q)$ だから, 境界作用素 ∂_{q+1} での像は,

補題 1.17

$$\begin{cases} \partial_{q+1}(x * c^q) &= \; c^q - x * \partial_q(c^q) \quad (q > 0) \\ \partial_1(x * c^0) &= \; c^0 - \varepsilon(c^0)\, x \end{cases}$$

となる。ここに, $\varepsilon : C_0(K) \to \boldsymbol{Z}$ は $c^0 = \sum_j n_j \sigma_j^0$ とすると, $\varepsilon(c^0) = \sum_j n_j$ と定めた写像である。

補題 1.18
K を弧状連結な複体とすると, $H_0(K) \cong \boldsymbol{Z}$ である。

単体的複体 K が弧状連結でないとき, 多面体 $|K|$ はいくつかの弧状連結な多面体に分かれるから, それに応じて単体的複体 K はいくつかの弧状連結な部分複体の和に分かれる。それを K の **弧状連結成分** という。

命題 1.19 $K_1, K_2, \cdots, K_r$ を K の弧状連結成分とすると, すべての q に対して, $H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \oplus \cdots \oplus H_q(K_r)$ が成立する。

命題 1.20
K の弧状連結成分を r とすると, $H_0(K) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}$ (r 個) である。

定理 1.21 σ を n 単体とすると,

$$K = K(\sigma), \quad \dot{K} = K(\dot{\sigma})$$

とおくと,

$$\begin{cases} H_q(K) &= \; 0 \quad (q \neq 0) \\ H_0(K) &\cong \; \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

また

$$\begin{cases} H_q(\overset{\bullet}{K}) & = & 0 \quad (q \neq n-1, 0) \\ H_{n-1}(\overset{\bullet}{K}) & \cong & H_0(\overset{\bullet}{K}) \quad \cong \quad \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

である。

$\partial_0 = 0$ (すなわち 0-map) であったがこれを次のように変える。
$C_0(K)$ の元 x は $\displaystyle\sum_{a \text{ は } K \text{ の頂点}} n_a a \quad (n_a \in \boldsymbol{Z})$ と表されるので, $\displaystyle\sum_{a \text{ は } K \text{ の頂点}} n_a$ によって $\boldsymbol{Z}$ の元に対応させて決まる写像

$$\varepsilon : C_0(K) \to \boldsymbol{Z}$$

を添加写像という (これは全射準同型)。
このとき

定義 1.22 $\widetilde{H}_q(K)$ を

$$\widetilde{H}_q(K) = \begin{cases} H_q(K) & (q > 0) \\ \ker \varepsilon / B_0(K) & (q = 0) \end{cases}$$

と定義し, 複体 K の <u>**簡約ホモロジー群** (***reduced homology group***)</u> という。
また ε から導かれる準同型写像を $\varepsilon_* : H_0(K) \to \boldsymbol{Z}$ とすると, $\widetilde{H}_0(K) = \ker \varepsilon_*$ であることが容易にわかる。よって, $H_0(K) \cong \widetilde{H}_0(K) \oplus \boldsymbol{Z}$ である。

2 相対ホモロジー群

L を単体的複体 K の部分複体とすると, L に含まれる単体は K に含まれるから, すべての q に対して

$$C_q(L) \subset C_q(K) \tag{2.1}$$

と思え, この包含関係はホモロジー群の間の準同型写像

$$i_* : H_q(L) \to H_q(K)$$

を導く。i_* は包含関係 (2.1) から導かれているが単射とは限らない。例えば $L = K(\partial s)$, $K = K(s)$ とすると, $\dim s = n \geq 2$ のとき, $H_{n-1}(K(\partial s)) \cong \boldsymbol{Z}$ であるが $H_{n-1}(K(s)) = 0$ であるから, i_* は単射ではない。一般に, i_* の核, 像を求めることは易しくないが, その情報を得るための一般論をこの節で解説する。
i_* は包含関係 (2.1) から導かれた写像であるから, i_* に関する情報はすべて (2.1) に含まれているはずである。そこで, (2.1) から得られる量として, 剰余群

$$C_q(K, L) = C_q(K)/C_q(L)$$

を考える。$C_q(K, L)$ の元は K のチェインであって L に含まれる単体の部分は無視したものと思えばよい。バウンダリー作用素 $\partial : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ は準同型で, $C_q(K)$ の部分加群 $C_q(L)$ を $C_{q-1}(K)$ の部分加群 $C_{q-1}(L)$ に移すから, 準同型写像

$$\partial : C_q(K, L) \to C_{q-1}(K, L)$$

を導く。具体的には, $C_q(K)$ の元 c が定める $C_q(K)/C_q(L)=C_q(K,L)$ の元 $c+C_q(L)$ に対し

$$\partial(c+C_q(L))=\partial(c)+C_{q-1}(L)\in C_{q-1}(K)/C_{q-1}(L)=C_{q-1}(K,L)$$

である。合成写像 $\partial^2:C_{q+1}(K)\to C_{q-1}(K)$ は零写像であるから, $\partial^2:C_{q+1}(K,L)\to C_{q-1}(K,L)$ も零写像である。したがって

$$\begin{aligned}Z_q(K,L) &= \ker\{\partial:C_q(K,L)\to C_{q-1}(K,L)\}\\ B_q(K,L) &= \mathrm{im}\{\partial:C_{q+1}(K,L)\to C_q(K,L)\}\end{aligned}$$

と定義すると, $B_q(K,L)\subset Z_q(K,L)$ となり, $H_q(K)$ のときと同様に,

$$H_q(K,L)=Z_q(K,L)/B_q(K,L)$$

と定義し, $Z_q(K,L)$ の元 $c+C_q(L)$ が定める $H_q(K,L)$ の元を $[c+C_q(L)]$ と表す。$H_q(K,L)$ を, 対 (K,L) の q 次 **相対ホモロジー群 (*relative homology group*)** という。

約束　便宜上 L が空集合 $\emptyset$ であることも許し $C_q(\emptyset)=0$ と思うと, $C_q(K,\emptyset)=C_q(K)$ であるから $H_q(K,\emptyset)=H_q(K)$ となる。

例 2.1
s を n 単体 $(n\geq 1)$ とし, $K=K(s)$, $L=K(\partial s)$ ととる。$K(s)$ の元で $K(\partial s)$ に含まれないのは s 自身だけであるから, $\langle s\rangle$ で生成される自由加群を $\boldsymbol{Z}\langle s\rangle$ と書くと

$$C_q(K(s),K(\partial s))=\begin{cases}\boldsymbol{Z}\langle s\rangle & (q=n)\\ 0 & (q\neq n)\end{cases}$$

したがって, すべての q に対してバウンダリー作用素 ∂ は零写像となるから

$$H_q(K(s),K(\partial s))=C_q(K(s),K(\partial s))\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & (q=n)\\ 0 & (q\neq n)\end{cases}$$

となる。$\langle s\rangle$ が定めるホモロジー類 $[\langle s\rangle]$ は $H_n(K(s),K(\partial s))$ の生成元を与えることに注意する。

$C_q(K,L)$ の元 $c+C_q(L)$ $(c\in C_q(K))$ が $Z_q(K,L)$ に属していれば

$$0=\partial(c+C_q(L))=\partial(c)+C_{q-1}(L)\in C_{q-1}(K,L)=C_{q-1}(K)/C_{q-1}(L)$$

より $\partial(c)$ は $C_{q-1}(L)$ の元であるが, $\partial^2(c)=0$ であるから, 実は $Z_{q-1}(L)$ の元である。(c は $C_q(K)$ の元であって $C_q(L)$ の元とは限らないから, $\partial(c)$ が $B_{q-1}(L)$ の元とは限らないことに注意せよ)。

補題 2.2
$[c_1+C_q(L)]=[c_2+C_q(L)]\in H_q(K,L)$ ならば, $[\partial(c_1)]=[\partial(c_2)]\in H_{q-1}(L)$ である。

証明

$[c_1+C_q(L)]=[c_2+C_q(L)]$ より $c_1-c_2+C_q(L)\in B_q(K,L)$ であるから, $C_{q+1}(L)$ の元 d で

$$c_1-c_2+C_q(L)=\partial(d)+C_q(L)\in C_q(K,L)=C_q(K)/C_q(L)$$

つまり $c_1 - c_2 - \partial(d) \in C_q(L)$ をみたすものがある。したがって

$$\partial(c_1) - \partial(c_2) = \partial(c_1 - c_2 - \partial(d)) \in B_{q-1}(L)$$

であるから, $[\partial(c_1)] = [\partial(c_2)] \in H_{q-1}(L)$ を得る。□

上の補題より, $[c + C_q(L)] = [c_2 + C_q(L)] \in H_q(K, L)$ に $[\partial(c)] \in H_{q-1}(L)$ を対応させる写像

$$\partial_* : H_q(K, L) \to H_{q-1}(L)$$

が, 代表元のとり方によらずに矛盾なく定義できる。容易にわかるように ∂_* は準同型写像である。∂_* を **連結準同型写像** (*connecting homomorphism*) という。

また, $C_q(K)$ から $C_q(K, L) = C_q(K)/C_q(L)$ への自然な写像はバウンダリー作用素と可換であるから, 準同型写像

$$j_* : H_q(K) \to H_q(K, L)$$

を導く。

定理 2.3 列

$$\xrightarrow{j_*} H_{q+1}(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L) \xrightarrow{i_*}$$

は完全である。この列を対 (K, L) の **ホモロジー完全列** (homology exact sequence) という。

証明

地道に定義を追っていけば証明できる (が, 自分で図を書きながら証明を追うと理解が深まるであろう)。

(1) $H_q(L)$ における完全性。 $H_{q+1}(K, L)$ の元を代表する $Z_{q+1}(K, L)$ の元を $c + C_{q+1}(L)$ $(c \in C_{q+1}(K))$ とすると, ∂_* の定義より

$$\partial_*([c + C_{q+1}(L)]) = [\partial(c)] \in H_q(L)$$

であるが, $\partial(c)$ は K のチェインと思えば $B_q(K)$ の元であるから

$$i_*\partial_*([c + C_{q+1}(L)]) = i_*([\partial(c)]) = 0 \in H_q(K)$$

である。よって $i_*\partial_*$ は零写像, つまり $\mathrm{im}\partial_* \subset \mathrm{ker}i_*$ である。

逆に $\mathrm{ker}i_* \subset \mathrm{im}\partial_*$ を示す。$[b] \in H_q(L)$ $(b \in Z_q(L))$ を $\mathrm{ker}i_*$ の元とする。$i_*([b]) = 0 \in H_q(K)$ より, b を K のチェインと思うと $b = \partial(c)$ となる $c \in C_{q+1}(K)$ が存在する。$\partial(c) = b$ は $C_q(L)$ の元であるから, $c + C_{q+1}(L) \in C_{q+1}(K, L)$ は実は $Z_{q+1}(K, L)$ の元である。よってこの元はホモロジー類 $[c + C_{q+1}(L)] \in H_{q+1}(K, L)$ を定めるが, ∂_* の定義より

$$\partial_*([c + C_{q+1}(L)]) = [\partial(c)] = [b] \in H_q(L)$$

であるから, $\mathrm{ker}i_* \subset \mathrm{ker}\partial_*$ である。つまり $H_q(L)$ において完全である。

(2) $H_q(K)$ における完全性。 $C_q(L)$ の元を $C_q(K)$ の元とみて, さらに $C_q(K)/C_q(L)$ の元とみると 0 であるから, j_*i_* は零写像, つまり $\mathrm{im}i_* \subset \mathrm{ker}j_*$ である。

逆に $\ker j_* \subset \mathrm{im} i_*$ を示す。$[c] \in H_q(K)$ $(c \in Z_q(K))$ を $\ker j_*$ の元とすると, $J_*([c]) = 0 \in H_q(K, L)$ より $c + C_q(L) \in B_q(K, L)$。したがって $c + C_q(L) = \partial(c') + C_q(L)$ となる元 $c' \in C_{q+1}(K)$ が存在する。これは $c - \partial(c')$ が $C_q(L)$ に属することを意味している。ここで, c は $Z_q(K)$ の元で ∂^2 は零写像であるから, $c - \partial(c')$ は実は $Z_q(L)$ の元である。よってこの元はホモロジー類 $[c - \partial(c')] \in H_q(L)$ を定めるが, $\partial(c')$ は $B_q(K)$ の元であるから, $i_*([c - \partial(c')]) = [c] \in H_q(K)$ となる。したがって $\ker j_* \subset \mathrm{im} i_*$ である。以上より $\mathrm{im} i_* = \ker j_*$, つまり $H_q(K)$ において完全である。

(3) $\underline{H_q(K, L) \text{ における完全性}}$。 $H_q(K)$ の元を代表する $Z_q(K)$ の元を c とすると, ∂_* の定義より $\partial_* j_*([c]) = [\partial(c)] \in H_{q-1}(L)$ であるが, c は $Z_q(K)$ の元だから $\partial(c) = 0$。したがって $\partial_* j_*$ は零写像, つまり $\mathrm{im} j_* \subset \ker \partial_*$ である。

逆に $\ker \partial_* \subset \mathrm{im} j_*$ を示す。$[c + C_q(L)] \in H_q(K, L)$ $(c \in C_q(K))$ を $\ker \partial_*$ の元とする。∂_* の定義より $\partial_*([c + C_q(L)]) = [\partial(c)] \in H_{q-1}(L)$ であるが, これが 0 より $\partial(c) \in B_{q-1}(L)$。したがって $\partial(c) = \partial(b)$ なる $C_q(L)$ の元 b が存在する (c は $C_q(K)$ の元であって $C_q(L)$ の元であるとは限らないことに注意)。b は L のチェインであるが, K のチェインとみると, 上の式より $c - b \in Z_q(K)$。したがってこの元はホモロジー類 $[c - b] \in H_q(K)$ を定めるが, $b \in C_q(L)$ より

$$c + C_q(L) = (c - b) + b + C_q(L) = (c - b) + C_q(L)$$

であるから $[c + C_q(L)] = j_*([c - b]) \in H_q(K, L)$ である。したがって $\ker \partial_* \subset \mathrm{im} j_*$ である。以上より $\mathrm{im} j_* = \ker \partial_*$, つまり $H_q(K, L)$ で完全である。□

定理 2.3 の列は, $H_q(L)$, $H_q(K)$ を簡約ホモロジー群 $\widetilde{H}_q(L)$, $\widetilde{H}_q(K)$ で置き換えても完全である。つまり次が成立する。

定理 2.4 列

$$\xrightarrow{j_*} H_{q+1}(K, L) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_q(L) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(L) \xrightarrow{i_*}$$

は完全である。この列を対 (K, L) の **簡約ホモロジー完全列** (reduced homology exact sequence) という。

$q \neq 0$ では $\widetilde{H}_q = H_q$ であるから, 上の定理は大部分定理 2.3 から成立する。チェックしなければならないのは, $\partial_* : H_1(K, L) \to H_0(L)$ の像が $\widetilde{H}_0(L)$ に入ること, $i_* : H_0(L) \to H_0(K)$ が $\widetilde{H}_0(L)$ を $\widetilde{H}_0(K)$ に移すこと, 列

$$H_1(K, L) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_0(L) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_0(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial_*} 0$$

が完全であることであるが, これらを示すのは難しくないので, 読者にまかせる。

問題 2.5
定理 2.4 を示せ。

定理 2.3 の完全列より簡約ホモロジーの完全列の方が, 0 次のホモロジー群のところを詳しく議論しなくてすむため使いやすいことがしばしばある。例えば

相対ホモロジー群 $H_q(K,L)$ は, K に含まれる単体のうち L に含まれるものは無視して作られるものである。言い換えれば, K の単体のうち L に含まれないもののみによっている。そう考えれば, 次の定理はもっともであろう。

定理 2.6 (切除定理))
2 つの単体的複体の対 (K,L), (K',L') が 2 条件
(**1**) K', L' はそれぞれ K, L の部分複体
(**2**) $|K'|-|L'|=|K|-|L|$
をみたしているならば, 包含写像から導かれる準同型写像 $H_q(K',L')\to H_q(K,L)$ は, すべての q に対して同型である。
証明
条件 (1) より, 包含写像 $C_q(K')\to C_q(K)$ があり $C_q(L')$ を $C_q(L)$ に移すから, 準同型写像

$$\varphi : C_q(K')/C_q(L')\to C_q(K)/C_q(L)$$

を得る。ここで, $C_q(K')/C_q(L')$, $C_q(K)/C_q(L)$ はそれぞれ L' に含まれない K' の q 単体, L に含まれない K の単体で生成される自由加群であるが, それら q 単体は条件 (2) より一致する。したがって上の写像 φ は同型である。さらに φ は明らかにバウンダリー作用素と可換であるから, ホモロジー群 $H_q(K',L')$ と $H_q(K,L)$ の間の同型を導く。□

3 ホモロジー理論

前の節では, 複体からチェイン複体を構成してホモロジー群を定義したが, この節では, 次のように, 複体を忘れて (幾何学的な図形を忘れて) 先ずチェイン複体を定義する。 このことから加群とその間の準同型写像のみから代数的にホモロジー理論を構成することができることを示していこう。

定義 3.1 (チェイン複体)
次数をもつ (次数つき) 加群と準同型写像の列

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

は, 任意の $1\le q\le n+1$ に対して

$$\partial_{q-1}\partial_q = 0$$

をみたすとき **チェイン複体** (***chain complex***) または **鎖複体** という。C_q を q **次チェイン群** (***chain group***) または q**-チェイン群**, その元を q **次チェイン** (***chain***) または q**-チェイン** という。
また ∂_q を **境界作用素** (***boundary operator***) または **バウンダリー作用素** という。

∂_{n+1} は 0 からの加群の準同型写像なので 0, また ∂_0 は 0 への加群の準同型写像なのでやはり 0 である。そのため, これらはいちいち記さないことにする。また混乱の恐れがない限り, ∂_q を単に ∂ と書く。チェイン複体は $(\mathbb{C},\partial)$ とか $\mathbb{C}$ と記すこともある。
チェイン複体

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

において,

$$Z_q = \mathrm{Ker}\partial_q, \qquad B_q = \mathrm{Im}\partial_{q+1}$$

とおき, Z_q の元を q-**輪体** (***cycle***), q-**サイクル** あるいは q **次サイクル** (***cycle***) , B_q の元を q-**境界輪体** (***boundary cycle***), q-**バウンダリーサイクル** あるいは q **次バウンダリーサイクル** (***boundary cycle***) という。$\partial_q\partial_{q+1} = 0$ であったから,

$$B_q \subset Z_q$$

である。

定義 3.2 (チェイン複体のホモロジー群)
剰余加群 Z_q/B_q を, チェイン複体 $\mathbb{C}$ の (q **次**) **ホモロジー群** (***homology group***) といい, $H_q(\mathbb{C})$ で表す。剰余類はとくに **ホモロジー類** (***homology class***) とよび, サイクル $c \in Z_q$ が属するホモロジー類を $[c]$ で表す.

$(\mathbb{C}, \partial)$, $(\mathbb{C}', \partial')$ をチェイン複体とする。各 q に対して加群の準同型写像 $\varphi_q : C_q \to C'_q$ が与えられ,

$$\partial'_q \varphi_q = \varphi_{q-1}\partial_q$$

をみたすとき, すなわち次の図式が可換のとき $\varphi = \{\varphi_q\}$ を **チェイン準同型写像** (***chain homomorphism***) という。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_q} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{q-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \\
\longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

バウンダリー作用素と同じように, φ_q を単に φ と書くことが多い。また $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ などとも記す。

補題 3.3
$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ をチェイン準同型写像とする。$\mathbb{C}$ の q 次サイクル c, c_0, c_1 に対し,

(1) $\varphi(c)$ は $\mathbb{C}'$ の q 次サイクルである。

(2) $[c_0] = [c_1]$ であれば, $[\varphi(c_0)] = [\varphi(c_1)]$ である。

証明　c はサイクルなので $\partial c = 0$ である。したがって

$$\partial'\varphi(c) = \varphi(\partial c) = \varphi(0) = 0$$

となり, $\varphi(c)$ もサイクルである。

$[c_0] = [c_1]$ より $c_0 - c_1$ はバウンダリーサイクルである。したがってあるチェイン $d \in C_{q+1}$ が, $\partial d = c_0 - c_1$ をみたす。そこで

$$\varphi(c_0) - \varphi(c_1) = \varphi(c_0 - c_1) = \varphi(\partial(d)) = \partial'\varphi(d)$$

これは $\varphi(c_0) - \varphi(c_1)$ が バウンダリーサイクルであることを示す。したがって $[\varphi(c_0)] = [\varphi(c_1)]$ である。□

$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ をチェイン準同型写像とする。$\gamma \in H_q(\mathbb{C})$ に対し, γ の属するサイクルを c とするとき, この補題 3.3 により $\varphi(c)$ のホモロジー類は, 代表 c の取り方によらず決まる。そこで

定義 3.4 (誘導準同型)
$\gamma = [c]$ に $[\varphi(c)]$ を対応させる写像を φ の **誘導準同型写像** (***induced homomorphism***) といい,

$$\varphi_* : H_q(\mathbb{C}) \to H_q(\mathbb{C}')$$

で表す。

ここでは ∂ と同様に, 任意の次数 q に対する q 次ホモロジー群の間の誘導準同型写像を, 1つの記号 φ_* で表した。このような略記を以降たびたび断らずに使う (混乱を生むことはまずないので)。

誘導準同型写像は共変函手性をもつ。

補題 3.5 (共変函手性)
$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$, $\varphi' : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}''$ を チェイン複体の間のチェイン準同型写像とする。
 (1) $(\varphi'\varphi)_* = \varphi'_*\varphi_* : H_q(\mathbb{C}) \to H_q(\mathbb{C}'')$
 (2) $id_* = id : H_q(\mathbb{C}) \to H_q(\mathbb{C})$

問題 3.6
補題 3.5 を示せ。

定義 3.7
$\varphi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ をチェイン準同型写像とする。加群の準同型写像 $D_q : C_q \to C'_{q+1}$ は, 各 q に対し,

$$\partial'_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = \varphi - \psi \tag{3.1}$$

をみたすとき, $D = \{D_q\}$ を, φ と ψ を結ぶ **チェインホモトピー** (***chain homotopy***) という。各 D_q を D と表すこともある。また, チェインホモトピーで結ばれる φ と ψ は **チェインホモトピック** (***chain homotopic***) であるという。

命題 3.8 (誘導準同型のホモトピー不変性)
$\varphi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ がチェインホモトピックなら, φ_* と ψ_* は写像として等しい。すなわち

$$\varphi_* = \psi_* : H_q(\mathbb{C}) \to H_q(\mathbb{C}')$$

である。

証明 D を φ と ψ を結ぶチェインホモトピーとする。$c \in C_q$ をサイクルとする。すなわち $\partial c = 0$ である。このときチェインホモトピーのみたす式 (3.1) より

$$\varphi(c) - \psi(c) = \partial' D(c)$$

である。したがって $[\varphi(c)] = [\psi(c)] \in H_q(\mathbb{C}')$ であり,

$$\varphi_*([c]) = [\varphi(c)] = [\psi(c)] = \psi_*([c])$$

である。すなわち $\varphi_* = \psi_*$ がわかる。□

4　ホモロジー代数

加群と準同型写像の列

$$\cdots \longrightarrow A_{q+1} \xrightarrow{h_{q+1}} A_q \xrightarrow{h_q} A_{q-1} \longrightarrow \cdots$$

に対し, Ker $h_q =$ Im h_{q+1} が成り立つとき, A_q で **完全 (*exact*) である** といい, すべての q について, A_q で完全であるとき, その列は **完全である** とか **完全列 (*exact sequence*)** という。

簡単な完全列の結果を挙げておく。

補題 4.1

(**1**) 列 $0 \to A \xrightarrow{f} B$ が完全である必要十分条件は, f が単射

(**2**) 列 $A \xrightarrow{g} B \to 0$ が完全である必要十分条件は, g が全射

(**3**) 列 $0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$ が完全である必要十分条件は, h が同型

問題 4.2　補題 4.1 を示せ。

補題 4.3

有限生成加群の完全列

$$\begin{aligned} 0 \to A_n \to B_n \to C_n \to A_{n-1} \to B_{n-1} \to C_{n-1} \to \\ \cdots \to A_1 \to B_1 \to C_1 \to A_0 \to B_0 \to C_0 \to 0 \end{aligned}$$

に対して

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \mathrm{rk}\, A_q + \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \mathrm{rk}\, C_q = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \mathrm{rk}\, B_q$$

が成立する。

問題 4.4　補題 4.3 を示せ。

３つの項からなる完全列

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

は，とくに **短完全列 (*short exact sequence*)** とよばれる。

ここで, よく使われる５項補助定理 (Five Lemma) と呼ばれている有名な定理をあげておこう。

定理 4.5　(５項補助定理 (Five Lemma))

加群と準同型写像からなる可換な図式

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & A_5 \arrow[d, "h_4"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

において, 図式の横方向は完全列であるとする。

このとき, h_1, h_2, h_4, h_5 が同型写像ならば, h_3 も同型写像である。

問題 4.6
定理 4.5 を示せ。

完全列の概念は，自然にチェイン複体にも拡張される。チェイン複体とチェイン準同型写像の列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}'' \longrightarrow 0$$

が，各次数 q において完全であるとき, チェイン複体の短完全列という。詳しく述べると, 次の図式において, 横向きは完全列で, 可換な図式であるということである。

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "\varphi_{q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\psi_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & C''_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_q \arrow[r, "\varphi_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & C_q \arrow[r, "\psi_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & C''_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r, "\varphi_{i-1}"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & C_{q-1} \arrow[r, "\psi_{i-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & C''_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

チェイン複体の短完分列が与えられると, $H_q(\mathbb{C}'')$ から $H_{q-1}(\mathbb{C})$ へのバウンタリー準同型写像

$$\partial_* : H_q(\mathbb{C}'') \to H_{q-1}(\mathbb{C})$$

が下の図式を右から左へ階段状にたどることにより定まる (**連結準同型写像** と呼ばれる)。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_q \arrow[r, "\varphi_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & C_q \arrow[r, "\psi_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & C''_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r, "\varphi_{q-1}"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & {}_{q-1} \arrow[r, "\psi_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & C''_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{q-2} \arrow[r, "\varphi_{q-2}"] & C_{q-2} \arrow[r, "\psi_{q-2}"] & C''_{q-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

すなわち $\alpha \in H_q(\mathbb{C}'')$ に対して α を代表するサイクル $c'' \in C''_q$ を 1 つ選ぶ。このとき上の列の完全性から, あるチェイン $c \in C_q$ が $\psi(c) = c''$ をみたす。 c は, 図式の右上の四角が可換なので $\psi(\partial c) = \partial'' c'' = 0$ である。したがって中間の列の完全性から, チェイン $c' \in C'_{q-1}$ が $\varphi(c') = \partial c$ をみたす。この c' はさらに下に延びる図式を見ると, $\varphi(\partial' c') = \partial\varphi(c') = \partial\partial c$ をみたすが, φ は単射なので, $\partial' c' = 0$ である。したがって c' はサイクルてある。そこでバウンダリー作用素 ∂_* を

$$\partial_*(\alpha) = [c']$$

により定義する。像として定めたホモロジー類は, 定義の過程で現れたいろいろな選択の自由度によらないことが確かめられる。

問題 4.7
上で述べられていることの (完全な) 証明を付けよ (特に選択の自由度によらないことを示せ。)

定理 4.8
チェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}'' \longrightarrow 0$$

に対して,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(\mathbb{C}') \xrightarrow{\varphi_*} H_q(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_*} H_q(\mathbb{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(\mathbb{C}') \xrightarrow{\varphi_*} \cdots$$

は完分列である.

証明　各時点での完全性を確かめればよいが, すべて定義にもどった議論でわかる。ここでは三分の一に相当する $H_q(\mathbb{C})$ での完全性, すなわち Ker $\psi_* =$ Im φ_* だけを示し, 後は読者の演習に残す。

Ker ψ_* の元を表すサイクル $c \in C_q$ を選ぶ。このとき $[\psi_*(c)] = [0]$ なので, $\psi(c)$ はバウンダリーサイクルとなり, 適当な $d'' \in C''_{q+1}$ をとれば, $\partial'' d'' = \psi(c)$ が成り立つ。一方, ψ は全射なので, $\psi(d) = d''$ をみたすチェイン $d \in C_{q+1}$ が存在する。c から ∂d を引いた $c - \partial d$ を考えると, ∂d はバウンダリーサイクルなので $c - \partial d$ と c は同じホモロジー類を表す。しかも $\psi(c-\partial d) = \psi(c) - \psi(\partial d) = \psi(c) - \partial''(\psi d)) = \psi(c) - \partial'' d'' = 0$ なので, 適当な $c' \in C'_q$ により, $\varphi(c') = c - \partial d$ と表せる。c がサイクルであることは容易に確かめられる。したがって包含関係 Ker $\psi_* \subset$ Im φ_* がわかった。

次に Im φ_* の元を表すサイクル $c \in C_q$ を選ぶ。$c \in$ Im φ_* なので, $c' \in C'_q$ が存在して, $[c] = \varphi_*([c']) = [\varphi(c')]$ なので, $c - \varphi(c')$ はバウンダリーサイクルとなるので, $\partial d = c - \varphi(c')$ をみたすチェイン $d \in C_{q+1}$ が存在する。チェイン複体の間の図式の可換性と列の完全性から, $\partial'' \psi(d) = \psi(c - \varphi(c')) = \psi(c)$ である。これは $\psi(c')$ がバウンダリーサイクルであることを示すので, Im $\varphi_* \subset$ Ker ψ_* がわかる。以上から, Im $\varphi_* =$ Ker ψ_* である。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\varphi_{q+1}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\psi_{q+1}} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{q+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{\varphi_q} & C_q & \xrightarrow{\psi_q} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_q} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & C_{q-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & C''_{q-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

問題 4.9
残りの完全性を示せ。

次の定理の証明も, 演習問題として読者に残す。

定理 4.10 (∂_* の自然性)
２つのチェイン複体の短完全列の間に以下の図式を可換にするチエイン準同型写像があるとする。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}' & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このときバウンダリー作用素 ∂_* は, 図式

$$\begin{array}{ccc} H_q(\mathbb{C}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(\mathbb{C}') \\ {\scriptstyle h_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_q(B'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(B') \end{array}$$

を可換にする.

問題 4.11
定理 4.10 を示せ。

補題 4.12

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

を加群の短完全列とする。このとき, 次の 2 つは同値である。
 (**1**) 準同型写像 $\overline{g} : A'' \to A$ が存在して $g\overline{g} = 1$ が成り立つ。
 (**2**) 準同型写像 $\overline{f} : A \to A'$ が存在して $\overline{f}f = 1$ が成り立つ。
上の条件 (1), (2) が成り立つとき, **分解 (*split*) する** 短完全列という。
なお このとき, 同型 $A \cong A' \oplus A''$ が成り立つ。
 証明
(1) から (2)
任意の A の元 a に対し, (1) より, $\overline{g}$ が存在するので, $\overline{g}g(a)$ はまた A の元で, $g(a - \overline{g}g(a)) = g(a) - g\overline{g}g(a) = g(a) - g(a) = 0$ である。よって, Ker g = Im f より, A' の元 a'_0 が存在して, $f(a'_0) = a - \overline{g}g(a)$ となる。そこで, $\overline{f}(a) = a'_0$ と定める (f は単射なので $a'_0 \in A'$ は一意)。すると, a' を A' の任意の元とし, $a = f(a')$ とおくと, 上のように $a'_0 \in A'$ があって, $f(a'_0) = a - \overline{g}g(a)$ であるから, 上の定めかたより $\overline{f}(a) = a'_0$ であるが $f(a'_0) = a - \overline{g}g(a) = f(a') - \overline{g}gf(a') = f(a')$ で f は単射より $a'_0 = a'$ となる。よって $\overline{f}f(a') = \overline{f}(a) = a'_0 = a'$ なので $\overline{f}f = 1$ をみたす。また $f\overline{f}(a) = f(a') = a - \overline{g}g(a)$ より $f\overline{f} + \overline{g}g = 1$ となる。
 (2) から (1)
任意の A'' の元 a'' に対し, g は全射なので, A の元 a が存在して $g(a) = a''$ である。このとき, (2) より $\overline{f}$ が存在するので, $a - f\overline{f}(a)$ は A の元であるから, $\overline{g}(a'') = a - f\overline{f}(a)$ と定める。$a_1 \in A$ が $g(a_1) = a''$ をみたす元とすると, $g(a - a_1) = a'' - a'' = 0$ より, $f(a') = a - a_1$ をみたす A' の元 a' が存在する。$a' = \overline{f}f(a') = \overline{f}(a - a_1) = \overline{f}(a) - \overline{f}(a_1)$ だから, $a - a_1 = f\overline{f}(a) - f\overline{f}(a_1)$, すなわち, $a - f\overline{f}(a) = a_1 - f\overline{f}(a_1)$ なので, $a \in A$ のとりかたに依らずに $\overline{g}(a'')$ が定まる (well-defined)。そして, $g\overline{g}(a'') = g(a - f\overline{f}(a)) =$

$g(a) - gf\overline{f}(a) = g(a) = a''$ なので $g\overline{g} = 1$ をみたす。さらに $\overline{g}(g(a)) = \overline{g}(a'') = a - f\overline{f}(a)$ より, $\overline{g}g + f\overline{f} = 1$ が分かる。

$\underline{A \cong A' \oplus A''(\text{ 直和 })\text{であること}}$　$f, \overline{g}$ は単射なので, つぎの 2 つを示せばよい。

(**1**) $\overline{g}(A'') + f(A') = A$

(**2**) $\overline{g}(A'') \cap f(A') = \{0\}$

(1) 任意の A の元 a に対して, $f\overline{f} + \overline{g}g = 1$ より, 任意の A の元 a は $a = f\overline{f}(a) + \overline{g}g(a)$ であり, $\overline{f}(a) \in A'$ かつ $g(a) \in A''$ なので $a \in f(A') + \overline{g}(A'')$ である。

(2) $a \in \overline{g}(A'') \cap f(A')$ をとる。$a \in f(A')$ より A' の元 a' が取れて $f(a') = a$ で, $a \in \overline{g}(A'')$ より A'' の元 a'' があって $\overline{g}(a'') = a$ である。このとき, $gf(a') = g(a)$ で, また $a'' = g\overline{g}(a'') = g(a) = gf(a')$ で $gf = 0$ だから, $a'' = 0$ である。よって $a = \overline{g}(a'') = 0$ となる。□

補題 4.13

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

を加群の短完全列とする。A'' が自由加群であれば, この短完全列は分解する。

<u>証明</u>　A'' が自由加群であるので, $\{a''_\lambda\}$ なる基底がある。g は全射なので, $a_\lambda \in A$ を $g(a_\lambda) = a''_\lambda$ なるものとして選び, $\overline{g} : A'' \to A$ を $\overline{g}(a''_\lambda) = a_\lambda$ で定めると, $\overline{g}g = 1$ なので, 補題 4.12 の (1) をみたすので 分解することが分かる。□

= = = = = 章 末 問 題 = = =

問題 4.14

ℓ, m を 自然数, $f : \boldsymbol{Z}_\ell \to \boldsymbol{Z}_\ell$ を m 倍写像 (つまり $f([a]) = [ma]$) とする。d を m と ℓ の最大公約数とし, $\ell' = l/d$ とおく。このとき次を示せ。

(**1**) $[a] \in \boldsymbol{Z}_\ell$ が $\ker f$ の元である必要十分条件は, a が ℓ' の倍数であること。

(**2**) $[b] \in \boldsymbol{Z}_\ell$ が $\operatorname{im} f$ の元である必要十分条件は, b が d の倍数であること。

(**3**) $\boldsymbol{Z}_\ell \,/\, \operatorname{im} f \cong \boldsymbol{Z}_d$ である。