第 2 章　特異ホモロジー

5　特異チェイン

特異ホモロジー群を定義し, 単体的ホモロジー群の基本的な結果に対応する結果を述べる。基本的なアイデア, 議論は本質的に同じである。特異ホモロジー群も単体的ホモロジー群と同様にチェイン複体を作って定義する。しかし, そのチェイン複体の作り方が異なる。単体的ホモロジー群 $H_q(K)$ の場合は, 単体的複体 K に含まれる q 単体に向きをつけ, それらの整数係数の１次結合として チェインを作ったが, 一般の位相空間 X には q 単体なるものはない。q 単体に代わるものとして, (１つ固定した) q 単体からXへの連続写像をとり, それらの整数係数の１次結合として X の q チェインを作る。違いはここだけである。後は単体的ホモロジーの場合と同じプロセスをたどる。このようにして得られるのが特異ホモロジー群である。以下詳しくこのことを述べよう。

まず, 整数 $q \geq 0$ に対し q 単体

$$\Delta_q = \{\ (x_0, \cdots, x_q) \in R^{n+1}\ ;\ x_0 \geq 0, \cdots, x_q \geq 0, x_0 + \cdots + x_q = 1\ \}$$

が上に述べた１つ固定した q 単体で, **標準 q 単体** (***standard q-simplex***) という。Δ_0, Δ_1, Δ_2 は図 1 のようになる。以後 Δ_q の $q+1$ 個の頂点を $E_0 = (1, 0, \cdots, 0)$, $E_1 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $E_q = (0, \cdots, 0, 1)$ と記す。このとき Δ_q の点は $\displaystyle\sum_{i=0}^{q} x_i E_i$ と書ける。

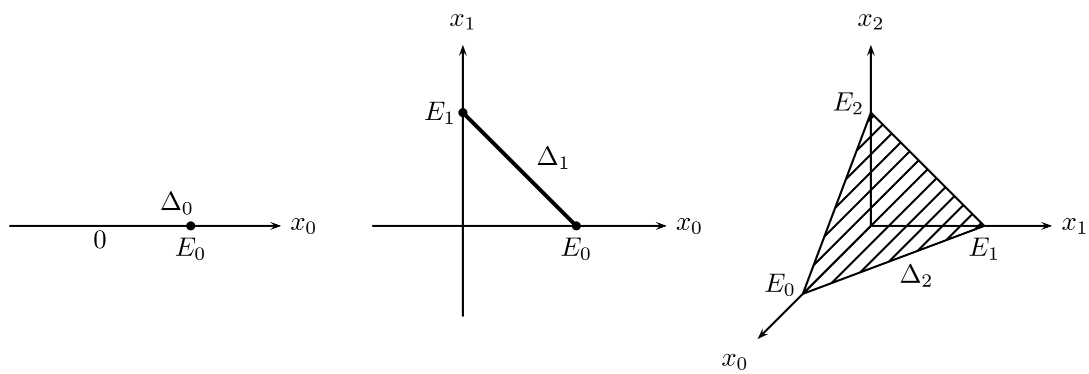


図 1:　標準単体

位相空間 X に対し, Δ_q から X への連続写像 $\sigma : \Delta_q \to X$ を X の **特異 q 単体** (***singular q-simplex***) という。σ が 単射であることは要請しない。Δ_q の像がつぶれていてもよい。極端な場合, 像が１点でもよい。したがって X が無限個の点からなるとき, X の特異 q 単体は無限にある。また X がどんな位相空間であっても, すべての $q \geq 0$ に対して X の特異 q 単体 が存在する。

例 5.1

Δ_0 は１点であるから, 位相空間 X の 特異０単体 $\sigma : \Delta_0 \to X$ は X の１点と思ってよい。また, Δ_1 は区間であるから, X の特異１単体 $\sigma : \Delta_1 \to X$ は X の連続な曲線である。σ は任意の連続写像であるから, 特異１単体の像は 自己交差をもってもよいし, １点につぶれていてもよいし, 閉曲線でもよい。

例 5.2
U をユークリッド空間の凸部分集合 (つまり U の任意の 2 点を結ぶ線分が U に含まれる) とする。U の $q+1$ 個の点 $A_0, A_1, \cdots, A_q$ に対し, Δ_q の $q+1$ 個の頂点 $E_0, \cdots, E_q$ をそれぞれ点 $A_0, \cdots, A_q$ へ移す連続写像

$$[A_0 \cdots A_q] : \Delta_q \to U$$

を $[A_0 \cdots A_q\left(\sum_{i=0}^{q} x_i E_i\right) = \sum_{i=0}^{q} x_i A_i$ と定める。この特異 q 単体を **アフィン q 単体 (*affine q-simplex*)** という。特に $U = \Delta_q$ のとき, $[E_0 \cdots E_q] : \Delta_q \to \Delta_q$ は恒等写像である。以後しばしば $[E_0 \cdots E_q]$ を ι_q または 単に ι と略記する。

位相空間 X の特異 q 単体によって生成される自由加群を, X の **特異 q チェイン群 (*singular q-chain group*)** といい $S_q(X)$ と記す。また, $S_q(X)$ の元を X の **特異 q チェイン (*singular q-chain*)** という。X の特異 q チェインは有限形式和[1]$\sum_\lambda a_\lambda \sigma_\lambda$ (a_λ は整数, σ_λ は X の特異 q 単体) である。$q \geq 0$ に対して X の特異 q 単体が存在するから, すべての $q \geq 0$ に対して $S_q(X)$ は 0 ではない。これは単体的複体の場合と異なる点である。$q < 0$ に対しては 便宜上 $S_q(X) = 0$ と定める。

次にバウンダリー作用素 $\partial : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ を定義する。そのアイデアは単純である。例えば $\sigma : \Delta_2 \to X$ が 図 1.2 のような 2 単体であるとき その境界 $\partial(\sigma)$ とよぶべきものは, σ を Δ_2 の境界 $\partial\Delta_2$ に制限したものであろう。

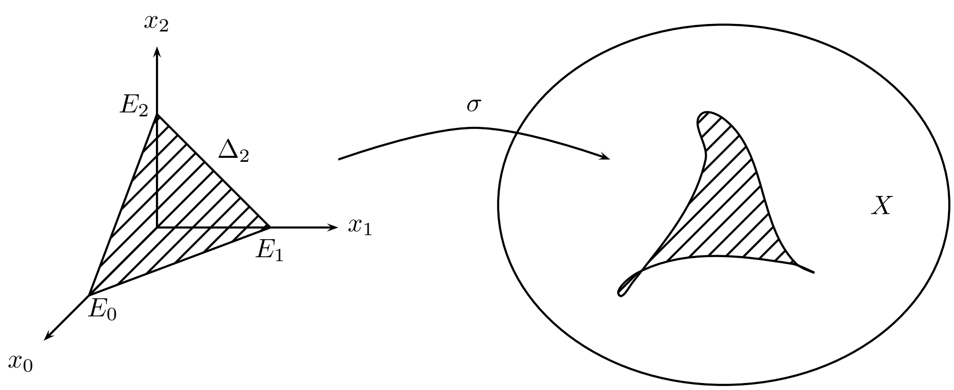


図 2: 特異単体

しかし, 我々は $\partial(\sigma)$ を $S_1(X)$ の元として定義したい。一方, $S_1(X)$ は Δ_1 から X への連続写像で生成されているから, $\partial(\sigma)$ を $S_1(X)$ の元として定義するためには, 単に σ を境界 $\partial\Delta_2$ に制限するだけでは駄目である。Δ_1 からの写像を得るためには, Δ_1 から $\partial\Delta_2$ にある 3 つの辺への写像をそれぞれ定めておく必要かある。一般に次のようにすればよい。

Δ_q はユークリッド空間の凸部分集合である。Δ_q には $q+1$ 個の $q-1$ 面があるが, $[E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_q]$:

[1] X が無限個の点からなる場合, X の特異 q 単体は無限に沢山ある。したがって 特異 q チェインとして特異 q 単体の無限和を考えることもできるが, 無限和 $\sum_\lambda a_\lambda \sigma_\lambda$ ($a_\lambda \neq 0$ となる λ が無限にある) に対しバウンダリー作用素を有限和の場合と同様に定めると, ある特異 $(q-1)$ 単体 ρ が無限に沢山の $\partial(\sigma_\lambda)$ に現れる場合, ρ の係数が整数の無限和になってしまい意味をもたなくなる。これが, 特異チェインとして有限和を考える理由である。逆にいえば, バウンダリー作用素が意味をもつように定められるならば, 無限和のチェインを扱うこともできる。

$\Delta_{q-1} \to \Delta_q$ は Δ_{q-1} を Δ_q の $q-1$ 面の 1 つに移し, i が 0 から q まで動けば Δ_q のすべての面をカバーする (図 3)。

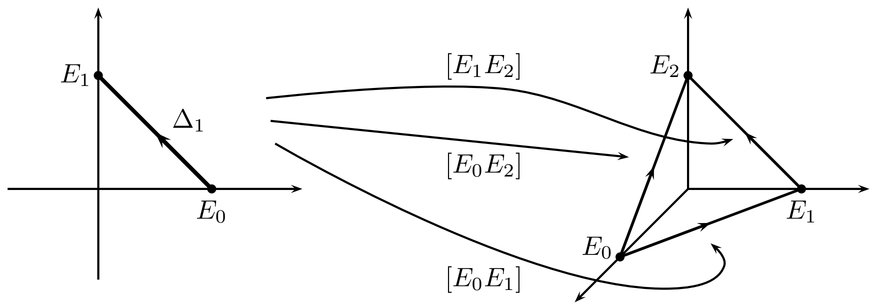


図 3: 面写像

そこで位相空間 X の特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対して

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_q] \tag{5.1}$$

と定める。ここで $\cdot$ は 写像の合成を表す。アフィン単体 $[A_0, \cdots, A_q]$ に対して

$$\partial([A_0 \cdots A_q]) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [A_0 \cdots \widehat{A}_i \cdots A_q]$$

であることをみるのは容易であろう。

(5.1) の定義を線形に拡張して 準同型写像 $\partial : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ を得る。これを **バウンダリー作用素 (*boundary operator*)** という。

補題 5.3
$\partial^2 : S_{q+1}(X) \to S_{q-1}(X)$ は零写像。

問題 5.4
補題 5.3 を示せ。

補題 5.3 より, $\mathcal{S}(X) = \{S_q(X), \partial\}$ はチェイン複体となり, そのホモロジー群

$$H_q(X) = H_q(\mathcal{S}(X))$$

を位相空間 X の **q 次特異ホモロジー群 (*qth singular homology group*)** または 単に X の **q 次ホモロジー群** という。単体的ホモロジーの場合と同様に

$$\begin{aligned} Z_q(X) &= \ker\,(\partial : S_q(X) \to S_{q-1}(X)) \\ B_q(X) &= \mathrm{im}\,(\partial : S_{q+1}(X) \to S_q(X)) \end{aligned}$$

いう記号を用い, $Z_q(X)$ の元 z が定める $H_q(X)$ の元を $[z]$ と表す。

例 5.5
1 点からなる位相空間 pt の特異ホモロジー群を求めてみよう。標準 q 単体 Δ_q から pt への写像は１つしかない。これを σ_q と書くと, $S_q(pt)$ は σ_q で生成される 無限巡回群 $\boldsymbol{Z}\langle\sigma_q\rangle$ である。バウンダリー作用素 ∂ の定義より

$$\partial(\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma_q \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_q]$$

であるが, $\sigma_q \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_q] = \sigma_{q-1}$ であるから

$$\partial(\sigma_q) = \begin{cases} 0 & (q : \text{奇数または } 0) \\ \sigma_{q-1} & (q : \text{偶数}) \end{cases}$$

したがって, $Z_q(pt) = B_q(pt)$ $(q \neq 0)$, $Z_0(pt) = S_0(pt) = \boldsymbol{Z}\langle\sigma_0\rangle \cong \boldsymbol{Z}$, $B_0(pt) = 0$ となるから

$$H_q(pt) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (q = 0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

この結果は, １つの 0 単体からなる単体的ホモロジー群と同じである (定理 1.21 参照)。しかし計算の過程は異なる。つまり, pt を１つの 0 単体からなる単体的複体とも思うと, q チェイシ群 $C_q(pt)$ は $q \neq 0$ のとき 0 であるが, 特異 q チェイン群 $S_q(pt)$ はすべての $q \geq 0$ に対して 0 ではない。

単体的ホモロジー群もそうであるが, 一般に特異ホモロジー群を求めることは易しくない。上の例 5.5 では位相空間が簡単なものであったから定義に従って特異ホモロジー群を求めることができたが, 定義に従って特異ホモロジー群を求めることは一般に困難である。そのために, 特異ホモロジー群がもっている性質をまず調べ, その性質を利用して計算を行うという方法を採る。これは, 行列式を求める際に, 行列式の性質をまず調べ, それらを利用して計算を行うのと同じ姿勢である。

位相空間 X のどの 2 点も X 内の連続な曲線で結ぶことができるとき, X は **弧状連結** (***pathwise connected***) であるという。定義より, 単体的複体 K が連結であるとは, その多面体 $|K|$ が弧状連結であることである。X が弧状連結でないとき, X は幾つかの弧状連結な位相空間 (これを弧状連結成分という) に分かれる。X の 特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ をみると, σ は連続写像で Δ_q は弧状連結であるから, Δ_q の σ による像はある弧状連結成分に含まれなければならない。したがって, X が d 個の弧状連結成分 $X_1, \cdots, X_d$ に分かれるとすると

$$S_q(X) = S_q(X_1) \oplus \cdots \oplus S_q(X_d)$$

となる。またバウンダリー作用素 $\partial : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ が各直和因子 $S_q(X_i)$ を $S_{q-1}(X_i)$ $(i = 1, \cdots, d)$ に移すことも容易にわかる。したがって 命題 1.20 と同様に次を得る。

定理 5.6
位相空間 X が d 個の弧状連結成分 $X_1, \cdots, X_d$ に分かれているとすると, すべての q に対して

$$H_q(X) = H_q(X_1) \oplus \cdots \oplus H_q(X_d)$$

がなりたつ。

単体的ホモロジー群において添加写像を定義したが, 特異ホモロジー群の場合も同様に添加写像

$$\varepsilon_* : H_0(X) \to \boldsymbol{Z}$$

を次のように定める。

任意の $z \in C_0(X)$ を $z = \sum_\lambda a_\lambda \sigma_\lambda$ (a_λ は整数, σ_λ は X の特異 0 単体) と表したとき, $\varepsilon(z) = \sum_\lambda a_\lambda$ と $\varepsilon : C_0(X) \to \boldsymbol{Z}$ を定める。すると添加写像 $\varepsilon_* : H_0(X) \to \boldsymbol{Z}$ が定義でき, 全射となる。そして 補題 1.18 と同様に次の定理が成り立つ。

定理 5.7
位相空間が弧状連結である必要十分条件は $H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ であることである。実際この同型対応は添加写像 ε_* で与えられる。

問題 5.8
定理 5.7 を示せ。

次に相対ホモロジーと簡約ホモロジーを述べる。単体的複体についての相対ホモロジーと簡約ホモロジーの復習をその前にやって下さい。

A を X の部分空間とするとき, 位相空間対 (X, A) に対して特異ホモロジー群を定義することができる。これもアイデアは単体的複体の対にホモロジー群を定義した場合と同じてある。A が X の部分空間であるから, 標準 q 単体 Δ_q から A への連続写像 (つまり A の特異 q 単体) は, 包含写像 $A \to X$ を通して Δ_q から X への連続写像 (つまり X の特異 q 単体) とみなすことができる。したがって, A の特異 q チェインは X の特異 q チェインと見なせ, $S_q(A)$ は $S_q(X)$ の部分加群となる。そこで

$$S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$$

とおくと, バウンダリー作用素 $\partial : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ は $S_q(A)$ を $S_{q-1}(A)$ に移すから, 準同型写像

$$\partial : S_q(X, A) \to S_{q-1}(X, A)$$

を導き, 補題 5.3 より $\partial^2 = 0$ である。よって $\mathcal{S}(X, A) = \{ S_q(X, A), \partial \}$ はチェイン複体となり, そのホモロジー群

$$H_q(X, A) = H_q(\mathcal{S}(X, A))$$

を位相空間対 (X, A) の <u>q **次特異ホモロジー群**</u> という。単体的ホモロジー群の場合と同様に, A が空集合 $\emptyset$ であることも許し $S_q(\emptyset) = 0$ と思うと, $S_q(X, \emptyset) = S_q(X)$ であるから $H_q(X, \emptyset) = H_q(X)$ である。

包含関係 $A \subset X$ と $(X, \emptyset) \subset (X, A)$ から準同型写像

$$i_* : H_q(A) \to H_q(X), \qquad j_* : H_q(X) = H_q(X, \emptyset) \to H_q(X, A)$$

が導かれるが, 各 q に対して 列

$$0 \to S_q(A) \to S_q(X) \to S_q(X)/S_q(A) \to 0$$

は完全であるから, 定理 4.8 より次を得る。

定理 5.9
位相空間対 (X, A) に対して, 列

$$\longrightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \longrightarrow$$

は完全である。この列を対 (X, A) の **ホモロジー完全列** という。

問題 5.10
定理 5.9 を示せ。

単体的ホモロジーの場合と同様に, **簡約特異ホモロジー群** (***reduced singular homology group***) $\widetilde{H}_q(X)$ を

$$\widetilde{H}_q(X) = \begin{cases} H_q(X) & (q \neq 0) \\ \ker(\varepsilon_* : H_0(X) \to \boldsymbol{Z}) & (q = 0) \end{cases}$$

と定めると次が成立する

定理 5.11
位相空間対 (X, A) に対して, 列

$$\longrightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \longrightarrow$$

は完全である。この列を対 (X, A) の **簡約ホモロジー完全列** という。

さらに B が A の部分空間であるとしよう。このとき各 q に対して列

$$0 \to S_q(A)/S_q(B) \to S_q(X)/S_q(B) \to S_q(X)/S_q(A) \to 0$$

は完全であるから, 定理 4.8 より次を得る.

定理 5.12
位相空間の 3 対 (X, A, B) に対して, 列

$$\longrightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A, B) \xrightarrow{i_*} H_q(X, B) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \longrightarrow$$

は完全である。ここで, i_*, j_* は包含写像から導かれた準同型写像である。

問題 5.13
定理 5.11 と 5.12 を示せ。

連結準同型写像の作り方からわかるように, 定理 5.12 の ∂_* は 定理 5.9 の ∂_* と包含写像より導かれる準同型写像 $H_q(A) \to H_q(A, B)$ の合成と一致する。また, 定理 5.12 において $B = \emptyset$ ととれば 定理 5.9 を得ることに注意する。

6 位相不変性

位相空間に対して特異ホモロジー群という代数的な量を対応させたが, その構成は, 位相空間の間の連続写像に対してうまく振る舞う。つまり, 位相空間の間の連続写像

$$f : X \to Y$$

は自然に準同型写像

$$f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$$

を導く。このように, 特異ホモロジーは, 位相空間とその間の連続写像というトポロジーの世界から, 群とその間の準同型写像という代数の世界への橋渡しをする。単に位相空間に対してホモロジー群を対応させるだけでなく, 連続写像に対してホモロジー群の間の準同型写像を対応させることがいかに有効であるかが徐々にわかるであろう。

以下, 連続写像 $f : X \to Y$ に対してどのように準同型写像 $f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ を対応させるかを述べる。まず, X の特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対し

$$f_\#(\sigma) = f \cdot \sigma : \Delta_q \to Y$$

と定める。σ, f は連続写像てあるからその合成 $f \cdot \sigma$ も連続写像となり, $f_\#(\sigma)$ は Y の特異 q 単体となる。$S_q(X)$ は X の特異 q 単体で生成される自由加群であるから, $f_\#$ を線形に拡張して準同型写像

$$f_\# : S_q(X) \to S_q(Y)$$

を得る。次の 2 つの補題は, この $f_\#$ の定義から容易に得られる。

補題 6.1
(**1**) $1 : X \to X$ を恒等写像とすると, $1_\# : S_q(X) \to S_q(X)$ も恒等写像。
(**2**) 連続写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し $(g \cdot f)_\# = g_\# \cdot f_\# : S_q(X) \to S_q(Z)$ である。
証明
(1)(2) とも, X の特異 q 単体に対してチェックすればよい。□

問題 6.2
補題 6.1 を示せ。

(5.1) で $\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma \cdot [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_q]$ と定義したが, 本節の記号を用いると右辺は $\sigma_\# \left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i [E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_q]\right)$ と書ける。さらに, 括弧の中は $\partial([E_0 \cdots E_q])$ であるから, 結局 Δ_q から Δ_q への恒等写像 $[E_0 \cdots E_q]$ を ι_q と書くと

$$\partial(\sigma) = \sigma_\#(\partial(\iota_q)) \tag{6.1}$$

とすっきり書ける。

補題 6.3
$S_q(X)$ の任意の元 c に対し $f_\#(\partial(c)) = \partial(f_\#(c))$ が成立する。つまり $f_\#$ はチェイン複体 $\mathcal{S}(X)$ から $\mathcal{S}(Y)$ へのチェイン写像である。

証明

∂, $f_\#$ は共に準同型写像だから, X の任意の特異 q 単体 σ に対して補題を示せばよいが, 式 (6.1) と 補題 6.1 の (2) より

$$\begin{aligned} f_\#(\partial(\sigma)) &= f_\#(\sigma_\#(\partial(\iota_q))) = (f\cdot\sigma)_\#(\partial(\iota_q)) \\ &= (f_\#(\sigma))_\#(\partial(\iota_q)) = \partial(f_\#(\sigma)) \end{aligned}$$

となり補題が示される。□

上の補題より, $f_\#$ は準同型写像 $f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$ を導く。具体的には, $z \in Z_q(X)$ に対し $f_*([z]) = [f_\#(z)]$ である。次の命題は補題 6.1 より示される。

命題 6.4

(**1**) $1: X \to X$ を恒等写像とすると, $1_*: H_q(X) \to H_q(X)$ も恒等写像。

(**2**) 連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対し, $(g\cdot f)_* = g_*\cdot f_*: H_q(X) \to H_q(Z)$ である。

次の命題が成り立つ。

命題 6.5 (特異ホモロジー群の位相不変性)

$f: X \to Y$ が同相写像ならば, すべての q に対して $f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$ は同型写像。したがって, $X \approx Y$ ならば, すべての q に対して $H_q(X) \cong H_q(Y)$ である。

証明

$f: X \to Y$ が同相写像とすると, $g\cdot f = 1_X$, $f\cdot g = 1_Y$ をみたす連続写像 $g: Y \to X$ が存在するから, 命題 6.1 より

$$\begin{aligned} g_*\cdot f_* &= (g\cdot f)_* = (1_X)_* : H_q(X) \to H_q(X) \\ f_*\cdot g_* &= (f\cdot g)_* = (1_Y)_* : H_q(Y) \to H_q(Y) \end{aligned}$$

は共に恒等写像。これより f_* は同型写像である。

また, $X \approx Y$ ならば, X と Y の間に同相写像が存在するから, 上より $H_q(X) \cong H_q(Y)$ となる。□

以上の議論はすべて位相空間対の間の連続写像 $f: (X, A) \to (Y, B)$ (つまり, f は X から Y への連続写像であって, $f(A) \subset B$ をみたす) に対しても成立する。列えば, f は準同型写像 $f_*: H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ を導き, f が同相写像 (つまり, $f: X \to Y$ と f の A における制限 $f|_A: A \to B$ が共に同相写像) であるとき, $f_*: H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ は同型写像となる。

また, 位相空間対の間の連続写像 $f: (X, A) \to (Y, B)$ に対し, 図式

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(A) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(A) \\ {\scriptstyle (f|_A)_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle (f|_A)_*}\downarrow \\ H_q(B) & \xrightarrow{i_*} & H_q(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_q(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(B) \end{array}$$

が可換であることは容易に示される。

問題 6.6
上の可換性を示せ。

7 ホモトピー不変性

前節で, 同相である位相空間は同型な特異ホモロジー群をもつこと (位相不変性) を示したが, その事実はまだホモロジー群の本質を捉えていない。実は「同相」よりも弱い「ホモトピー同値」でも 同型な特異ホモロジー群をもつという結果が成り立つ (ホモトピー不変性)。この事実をこの節では示そう。

一般に, 包含写像 $i : A \to X$ が導く準同型写像 $i_* : \widetilde{H}_q(A) \to \widetilde{H}_q(X)$ は必ずしも単射とは限らない。しかし次がいえる。

補題 7.1
A が X のレトラクトならば, すべての q に対して $i_* : \widetilde{H}_q(A) \to \widetilde{H}_q(X)$ は単射であり, しかも $\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_q(A) \oplus H_q(X, A)$

証明

$r : X \to A$ をレトラクションとすると, $r \cdot i : A \to A$ は恒等写像である。したがって, 合成

$$r_* \cdot i_* : \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{\ i_*\ } \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{\ r_*\ } \widetilde{H}_q(A)$$

も恒等写像であるから, i_* は単射 (かつ r_* は全射) であり

$$\widetilde{H}_q(X) = \operatorname{im} i_* \oplus \ker r_* \cong \widetilde{H}_q(A) \oplus \ker r_* \tag{7.1}$$

と分解する (各自チェックせよ)。一方, i_* が単射であることから, 対 (X, A) の簡約ホモロジー完全列は, 短完全列

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{\ i_*\ } \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{\ j_*\ } H_q(X, A) \longrightarrow 0$$

となる。この完全性と準同型定理 と (7.1) より

$$H_q(X, A) \cong \widetilde{H}_q(X)/\ker j_* = \widetilde{H}_q(X)/\operatorname{im} i_* \cong \ker r_*$$

これと再び (7.1) より求める同型を得る。□

問題 7.2
補題 7.1 の完全な証明を付けよ。

本節の目的は次の定理を示すことである.

定理 7.3 (連続写像に対するホモトピー不変性)
位相空間の間の 2 つの連続写像 $f, f' : X \to Y$ がホモトピック (つまり $f \simeq f'$) ならば, すべての q に対して $f_* = f'_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ である。

この定理を用いて, 命題 6.5 の改良である次の重要な定理を得る。

定理 7.4 (位相空間に対するホモトピー不変性)
位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ がホモトピー同値写像ならば, すべての q に対して $f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ は同型写像。したがって, X と Y がホモトピー同値 (つまり $X \simeq Y$) ならば, すべての q に対して $H_q(X) \cong H_q(Y)$ である。

証明

$f : X \to Y$ がホモトピー同値写像ならば, ホモトピー逆写像 $g : Y \to X$ が存在する。$g \cdot f \simeq l_X$ かつ $f \cdot g \simeq 1_Y$ であるから, 定理 7.3 より $(g \cdot f)_* = (1_X)_*$ かつ $(f \cdot g) = (1_Y)_*$ である。したがって, あと命題 6.5 の証明と同様の議論より定理の結論を得る。□

系 7.5
位相空間 X が可縮ならば

$$H_q(X) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (q = 0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

簡約ホモロジー群の言葉では，すべての q に対して $\widetilde{H}_q(X) = 0$

証明

仮定より $X \simeq pt$ であるから, 定理 7.4 より $H_q(X) \cong H_q(pt)$。したがって系を得る。□

定理 7.3 の証明に移ろう。 $i = 0, 1$ に対して, $h_i : X \to X \times [0,1]$ を $h_i(x) = (x, i)$ と定める。定理 7.3 の証明の鍵になるのは次の補題である。

補題 7.6
各整数 q に対し

$$\partial P_q + P_{q-1}\partial = h_{1\#} - h_{0\#} : S_q(X) \to S_q(X \times [0,1])$$

をみたす準同型写像 $P_q : S_q(X) \to S_{q+1}(X \times [0,1])$ が存在する。

P_q の構成は後程与えるが, プリズム $\Delta_q \times [0,1]$ の 3 角形分割を用いて構成するため **プリズム作用素** (***prism operator***) とよばれている。しばらく補題 7.6 を認め定理 7.3 の証明を完成させる。

証明　(定理 7.3)

$F : X \times [0,1] \to Y$ を f の f' へのホモトピーとし,

$$D_q = F_\# \cdot P_q \ : \ S_q(X) \to S_{q+1}(X \times [0,1]) \to S_{q+1}(Y)$$

とおく。$F_\#$ とバウンダリー作用素との可換性 (補題 6.3) および補題 7.6 より

$$\partial D_q + D_{q-1}\partial = F_\# \cdot h_{1\#} - F_\# \cdot h_{0\#}$$

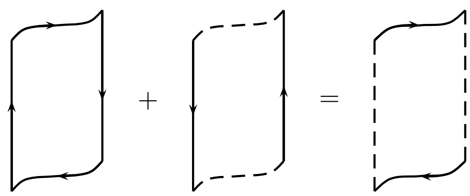
ここで補題 6.1 の (2) と, $F \cdot h_1 = f'$, $F \cdot h_0 = f$ であることに注意すれば

$$\partial D_q + D_{q-1}\partial = {f'}_\# - f_\#$$

これは, $D = \{ D_q \}$ が $f'_\#$ と $f_\#$ をつなぐチェインホモトピーであることを示している。したがって, $f'_* = f_*$ となる。□

残るは補題 7.6 の証明であるが, 正確な証明を与える前に幾何学的イメージを説明しよう。以後, P_q を P と略記する。幾何学的には P は X の特異チェインを $[0,1]$ 方向に引き延ばしたものである。例えば, $\sigma:\Delta_1\to X$ を図 の曲線とするとき, $P(\sigma)$ はそれを $[0,1]$ 方向に引き延ばした面で, $P(\partial(\sigma))$ は 2 点 $\partial(\sigma)$ を $[0,1]$ 方面に延ばした 2 本の線分であるが, 向きも込めて考えると

$$\partial P(\sigma)+P\partial(\sigma)=$$



$$=h_{1\#}(\sigma)-h_{0\#}(\sigma) \tag{7.2}$$

となり補題 7.6 の式をみたす。

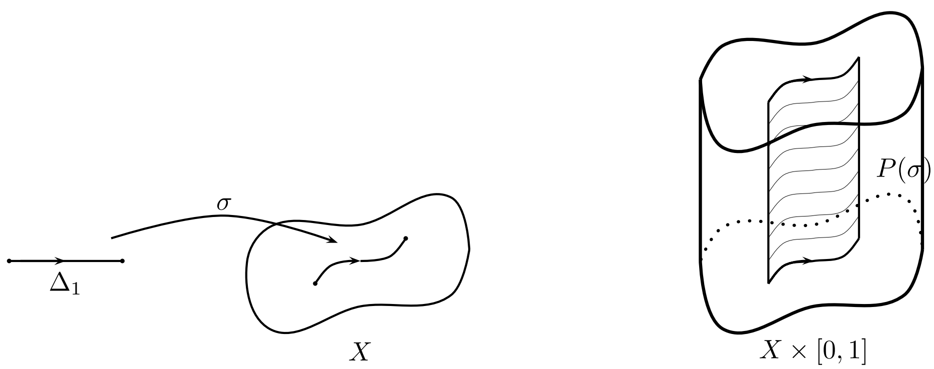


図 4: プリズム作用素

上記の幾何学的イメージを数学的に定式化するためには 2 つのことに留意する必要がある。1 つは 特異 q 単体 $\sigma:\Delta_q\to X$ を $[0,1]$ 方向に引き延ばしたものは

$$\sigma\times 1:\Delta_q\times[0,1]\to X\times 0,1$$

$(1:[0,1]\to[0,1]$ は恒等写像$)$ であるが, $\sigma\times[0,1]$ を $X\times[0,1]$ の $q+1$ チェインと思うためには $\Delta_q\times[0,1]$ を $q+1$ 単体に分割する必要がある。もう 1 つの留意点は, 向きの問題である。これらに留意して P を作成する。まず, $\Delta_q\times[0,1]$ の $q+1$ 単体への分割を考える。$\Delta_q\times[0,1]$ の $2q+2$ 個の 頂点 $E_i\times\{0\}$, $E_i\times\{1\}$ $(i=0,1,\cdots,q)$ をそれぞれ $\underline{E}_i$, $\overline{E}_i$ と表す。これらの頂点を用いて. $\Delta_q\times[0,1]$ を $q+1$ 個の $q+1$ 単体

$$|\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q|\qquad(j=0,1,\cdots,q)$$

に分割する。(図 5)。

そこで分割した $q+1$ 単体に向きを考慮して, まず恒等写像 $\iota_q=[E_0\cdots E_q]:\Delta_q\to\Delta_q$ に対して

$$P(\iota_q)=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q]\in S_{q+1}(\Delta_q\times[0,1])$$

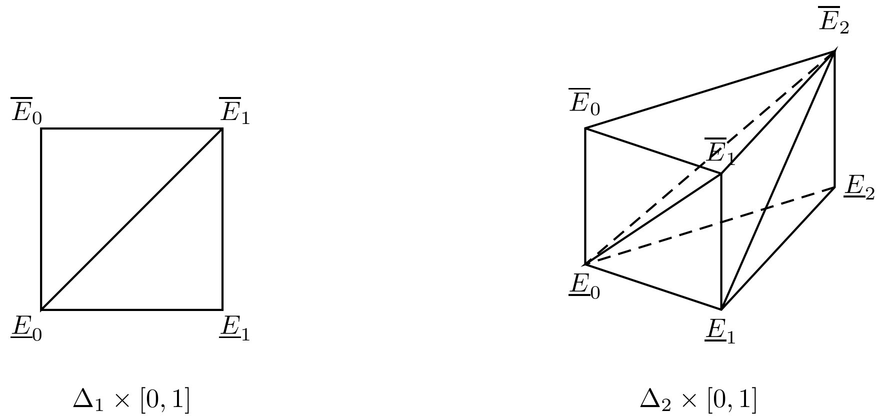


図 5: プリズム

と定め, これを用いて一般の特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対して

$$P(\sigma) = (\sigma \times 1)_{\#}(P(\iota_q)) \in S_{q+1}(X \times [0,1]) \tag{7.3}$$

と定める。いつものようにこれを線形に拡張して, 求めるプリズム作用素 $P : S_q(X) \to S_{q+1}(X \times [0,1])$ を得る。(7.3) より

$$\begin{aligned} P([E_0 \cdots \widehat{E}_i \cdots E_q]) = \ & \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [\underline{E}_0 \cdots \underline{E}_j \overline{E}_j \cdots \widehat{\overline{E}}_i \cdots \overline{E}_q] \\ & + \sum_{j=i+1}^{q} (-1)^{j-1} [\underline{E}_0 \cdots \widehat{\underline{E}}_i \cdots \underline{E}_j \overline{E}_j \cdots \overline{E}_q] \end{aligned} \tag{7.4}$$

となる。各自チェックせよ。

P が補題 7.6 の式をみたすことをみるために (7.2) における考察の高次元版である次の補題を示す。

補題 7.7 次の等式が成立する。

$$\partial(P(\iota_q)) + P(\partial(\iota_q)) = [\overline{E}_0 \cdots \overline{E}_q] - [\underline{E}_0 \cdots \underline{E}_q] \in S_q(\Delta_q \times [0,1])$$

証明

定義に従って補題の左辺を計算していけばよい。

$$
\begin{aligned}
\partial(P(\iota_q)) &= \partial\left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q]\right) \\
&= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j\partial\left([\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q]\right) \\
&= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^i[\underline{E}_0\cdots\widehat{\underline{E}}_i\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q]\right. \\
&\qquad \left.+\sum_{i=j}^{q}(-1)^{i+1}[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\widehat{\overline{E}}_i\cdots\overline{E}_q]\right) \\
&= \sum_{0\le i\le j\le q}(-1)^{i+j}[\underline{E}_0\cdots\widehat{\underline{E}}_i\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q] \\
&\quad +\sum_{0\le j\le i\le q}(-1)^{i+j+1}[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\widehat{\overline{E}}_i\cdots\overline{E}_q] \\
&= [\overline{E}_0\cdots\overline{E}_q]-[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_q] \\
&\quad +\sum_{0\le i<j\le q}(-1)^{i+j}[\underline{E}_0\cdots\widehat{\underline{E}}_i\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q] \\
&\quad +\sum_{0\le j<i\le q}(-1)^{i+j+1}[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\widehat{\overline{E}}_i\cdots\overline{E}_q]
\end{aligned}
$$

一方, (7.4) を用いて

$$
\begin{aligned}
P(\partial(\iota_q)) &= P\left([E_0\cdots\widehat{E}_i\cdots E_q]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^iP([E_0\cdots\widehat{E}_i\cdots E_q]) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\widehat{\overline{E}}_i\cdots\overline{E}_q]\right. \\
&\qquad \left.+\sum_{j=i+1}^{q}(-1)^{j-1}[\underline{E}_0\cdots\widehat{\underline{E}}_i\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q]\right) \\
&= \sum_{0\le j<i\le q}(-1)^{i+j}[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\widehat{\overline{E}}_i\cdots\overline{E}_q] \\
&\quad +\sum_{0\le i<j\le q}(-1)^{i+j-1}[\underline{E}_0\cdots\widehat{\underline{E}}_i\cdots\underline{E}_j\overline{E}_j\cdots\overline{E}_q]
\end{aligned}
$$

これらを加えると

$$[\overline{E}_0\cdots\overline{E}_q]-[\underline{E}_0\cdots\underline{E}_q]$$

となる。□

補題 7.8

位相空間の間の連続写像 $\varphi : X' \to X$ に対し, 次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc}
S_q(X') & \xrightarrow{P} & S_q(X' \times [0,1]) \\
{\scriptstyle \varphi_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi\times 1)_\#} \\
S_q(X) & \xrightarrow{P} & S_q(X \times [0,1])
\end{array}$$

<u>証明</u>　P, $\varphi_\#$, $(\varphi \times 1)_\#$ は線形であるから, X' の任意の特異 q 単体 σ に対して $(\varphi \times 1)_\#(P(\sigma)) = P(\varphi_\#(\sigma))$ を示せばよいが, P の定義 (7.3) に従えば

$$\begin{aligned}
(\varphi \times 1)_\#(P(\sigma)) &= (\varphi \times 1)_\#(\sigma \times 1)_\#(P(\iota_q)) = (P(\iota_q)) \\
&= (\varphi_\#(\sigma) \times 1)_\#(P(\iota_q)) = P(\varphi_\#(\sigma))
\end{aligned}$$

となり補題が成り立つ。□

これらの準備の下に補題 7.6 の式を証明しよう。

<u>証明</u>　(補題 7.6)

P およびバウンダリー作用素はともに線形であるから, X の任意の特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対して

$$\partial(P(\sigma)) + P(\partial(\sigma)) = h_{1\#}(\sigma) - h_{0\#}(\sigma)$$

を示せばよい。ここで

$$\partial(P(\sigma)) = \partial((\sigma \times 1)_\#(P(\iota_q))) = (\sigma \times 1)_\#(\partial(P(\iota_q)))$$

また, $\partial(\sigma) = \sigma_\#(\partial(\iota_q))$ に注意し ((6.1) をみよ。補題 7.8 を $X' = \Delta_q$, $\varphi = \sigma$ として用いれば

$$P(\partial(\sigma)) = P(\sigma_\#(\partial(\iota_q))) = (\sigma \times 1)_\#(P(\partial(\iota_q)))$$

一方

$$h_{1\#}(\sigma) = (\sigma \times 1)_\#([\overline{E}_0 \cdots \overline{E}_q]), \quad h_{0\#}(\sigma) = (\sigma \times 1)_\#([\underline{E}_0 \cdots \underline{E}_q])$$

であるから, 補題 7.7 の等式を $(\sigma \times 1)_\#$ で移せば補題 7.6 が得られる。□

位相空間対の間の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ とは X から Y への連続写像であって $f(A) \subset B$ をみたすものであった。定理 7.4 は，位相空間対に対して次のように拡張される。

定理 7.9

位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ において, $f : X \to Y$ および $f|_A : A \to B$ がともにホモトピー同値ならば, すべての q に対して $f_* : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ は同型写像。

<u>証明</u>

位相空間対 $(X, A), (Y, B)$ の完全列より, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X,A) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow & H_{q-1}(X) \\
{\scriptstyle (f|_A)_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle (f|_A)_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow \\
H_q(B) & \longrightarrow & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y,B) & \longrightarrow & H_{q-1}(B) & \longrightarrow & H_{q-1}(Y)
\end{array}$$

を得るが, 上段, 下段の横の列は完全で, 真中以外の縦の準同型写像は 定理 7.4 より同型である。したがって 5-補題により, 真中の準同型写像も同型となる。□

8　切除定理と重心細分

位相空間対 (X, A) の相対ホモロジー群 $H_q(X, A)$ は, A の特異チェインを 0 と思って (または無視して) 作ったものであるから, A の補空間 $X - A$ のみに依存しているように思える (実際 定理 2.6 にあるように単体的ホモロジーのときはそうであった)。そう思うと, A の部分集合 V に対して $(X - V) - (A - V) = X - A$ であるから, $H_q(X - V, A - V)$ と $H_q(X, A)$ は同型ではないかと推察できる。これはいつも正しいというわけではないが (問題 10.8 参照), 多くの場合正しいと保証するのが次の切除定理である。

定理 8.1 (切除定理)
(X, A) を位相空間対, U を A の部分集合とする。もし $\overline{V} \subset A^i$ ならば, 包含写像 $i : (X, A) \to (Y, B)$ は同型写像

$$i_* : H_q(X - V, A - V) \to H_q(X, A)$$

を導く。ここで $\overline{V}$ は V の X における閉包, A^i は A の X における内部を表す。

単対的ホモロジーにおける切除定理 2.6 と違って, 特異ホモロジーの切除定理の証明は易しくない。証明に入る前に, 証明のアイデアを簡単な例で説明しよう。X, A, V, σ を 図6 (1) にあるような位相空間および特異 1 単体とすると, $\partial(\sigma)$ は $S_0(A)$ に含まれるから σ は $Z_1(X, A)$ の元となり $H_1(X, A)$ の元 $[\sigma]$ を定める。しかし, σ の像は $X - V$ からはみ出しているから , 元 $[\sigma] \in H_1(X, A)$ が $i_* : H_1(X - V, A - V) \to H_1(X, A)$ の像に入っているかどうかはすぐにはわからない。この難点は次のように考えれば解消できる。σ を分割して小さな特異 1 単体に分ける。例えば, 図 6 (2) のように σ を 2 つの特異 1 単体 σ_1, σ_2 に分ける。

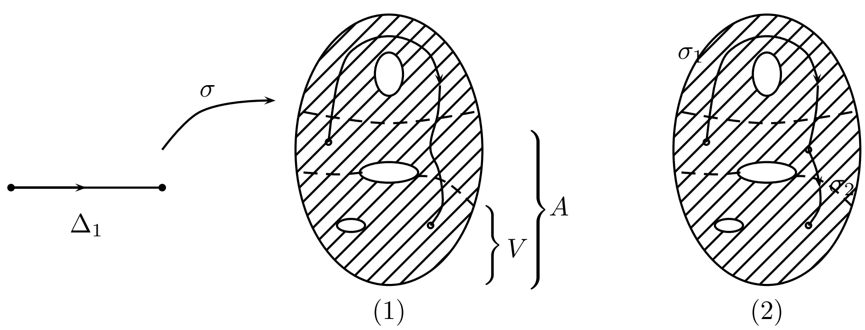


図 6:　切除

$\sigma_1 + \sigma_2$ と σ は特異チェインとしては異なっているが, それらの像として定まる曲線は同じであるから, ホモロジー群 $H_1(X, A)$ の元としては同じであろうと推察される。σ_2 は $S_1(A)$ に入っているから $S_1(X, A) = S_1(X)/S_1(A)$ の元と思うときは無視してよい。特に $[\sigma_1 + \sigma_2] = [\sigma_1] \in H_1(X, A)$ である。また σ_1 は $Z_1(X - V, A - V)$ の元とも思えるから, $H_1(X - V, A - V)$ の元を定める。この元を i_* で移したものは $[\sigma_1] = [\sigma_1 + \sigma_2] \in H_1(X, A)$ であって, これは上で推察したように多分 $[\sigma]$ と同じであろうから,

$[\sigma] \in H_1(X, A)$ は $[\sigma_1]$ の i_* による像であることが示せることになる。このアイデアを任意の特異 q 単体に対して行えば, $i_* : H_q(X - V, A - V) \to H_q(X, A)$ の全射性が示せるはずである。i_* の単射性に関しても同様である。

上の議論のアイデアである分割を一般次元に対してきちんと定義しよう。$S'_q(\Delta_n)$ を Δ_n のアフィン q 単体全体で生成される加群とする。$S'_q(\Delta_n)$ は $S_q(\Delta_n)$ の部分加群である。また, $\partial : S_q(\Delta_n) \to S_{q-1}(\Delta_n)$ は $S'_q(\Delta_n)$ を $S'_{q-1}(\Delta_n)$ に移す。Δ_n の点 B と Δ_n のアフィン q 単体 $[A_0 \cdots A_q]$ に対して

$$B * [A_0 \cdots A_q] = [BA_0 \cdots A_q]$$

と定める。幾何学的には $[BA_0 \cdots A_q]$ は $[A_0 \cdots A_q]$ と B を結んでできる錐であるが, 単対的複体の場合と違い, $B \in [A_0 \cdots A_q]$ であっても特異単体 $[BA_0 \cdots A_q]$ は 0 ではない。上の対応を線形に拡張して, 準同型写像 $B* : S'_q(\Delta_n) \to S'_{q+1}(\Delta_n)$ を得る。すると補題 1.17 と同様に次を得る。

補題 8.2
$q \geq 1$ のとき, 任意の $c \in S'_q(\Delta_n)$ に対して

$$\partial(B * c) = c - B * \partial(c)$$

問題 8.3
補題 8.2 を示せ。

以上の準備の下に, 準同型写像

$$\mathrm{sd}_q : S'_q(\Delta_n) \to S'_q(\Delta_n) \tag{8.1}$$

を q に関して帰納的に定義する。まず, $q = 0$ のとき sd_0 は恒等写像と定め, sd_{q-1} が定義されているとする。このとき, Δ_n のアフィン q 単体 $[A_0 \cdots A_q]$ に対して, その重心 $\frac{1}{q}(A_0 + \cdots A_q)$ を B にとり

$$\mathrm{sd}_q([A_0 \cdots A_q]) = B * (\mathrm{sd}_{q-1}(\partial([A_0 \cdots A_q]))) \tag{8.2}$$

と定め, これを線形に拡張して (8.1) を得る。sd_q を **重心細分作用素** (***barycentric subdivision operator***) という。sd_q の定義を具体的にみると, 重心細分作用素という気持がわかる。例えば B をアフィン 1 単体 $[A_0A_1]$ の重心 (この場合は中点) とし, sd_0 を恒等写像と定義したことに注意して計算すると

$$\begin{aligned} \mathrm{sd}_1([A_0A_1]) &= B * (\mathrm{sd}_0(\partial([A_0A_1]))) \\ &= B * ([A_1] - [A_0]) = [BA_1] - [BA_0] \end{aligned} \tag{8.3}$$

となる。したがって $\mathrm{sd}_1([A_0A_1])$ は, アフィン 1 単体 $[A_0A_1]$ を重心 B で区切って 2 つのアフィン 1 単体 $[BA_1]$ と $[BA_0]$ に分けたものである。$[BA_0]$ の前の符号のマイナスは, 向きを考えれば納得がいくであろう。

次に $\mathrm{sd}_2([A_0A_1A_2])$ をみてみよう。B を $[A_0A_1A_2]$ の重心, B_0, B_1, B_2 をそれぞれ $[A_1A_2], [A_2A_0], [A_0A_1]$ の重心とし, sd_2 の定義と上で計算した sd_1 の結果を用いて

$$\begin{aligned} &\mathrm{sd}_2([A_0A_1A_2]) = B * (\mathrm{sd}_1(\partial([A_0A_1a_2]))) = B * (\mathrm{sd}_1([A_1A_2] - [A_0A_2] + [A_0A_1])) \\ &= B * (([B_0A_2] - [B_0A_1]) - ([B_1A_2] - [B_1A_0]) + ([B_2A_1] - [B_2A_0])) \\ &= [BB_0A_2] - [BB_0A_1]) - [BB_1A_2] + [BB_1A_0]) + [BB_2A_1] - [BB_2A_0] \end{aligned}$$

となる。最後の 6 つのアフィン 2 単体は, 確かに $[A_0A_1A_2]$ を 6 つに分割したものを与えている。図 7 でチェックしてみなさい。

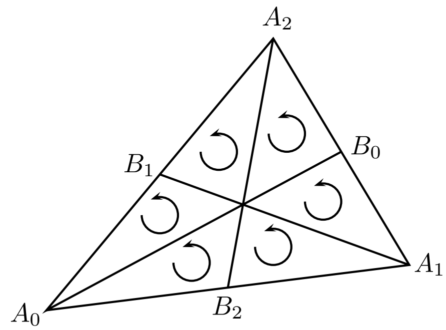


図 7: 重心細分

補題 8.4
すべての $c \in S'_q(\Delta_n)$ に対して $\partial(\mathrm{sd}_q(c)) = \mathrm{sd}_{q-1}(\partial(c))$
証明
バウンダリー作用素と重心細分作用素はともに準同型であるから, アフィン q 単体に対して補題の等式をチェックすれば十分である。
q に関する数学的帰納法で証明する。$q = 1$ のとき, (8.3) よりアフィン 1 単体 $[A_0A_1] : \Delta_1 \to \Delta_n$ に対して,

$$\begin{aligned}&\partial(\mathrm{sd}_1([A_0A_1])) = \partial([BA_1] - [BA_0])\\&\quad = ([A_1] - [B]) - ([A_0] - [B]) = [A_1] - [A_0] = \partial([A_0A_1])\end{aligned}$$

となるが, sd_0 は恒等写像であるから確かに成立している。
次に $q \geq 2$ とし, $q-1$ に対して補題が成立しているとする。アフィン q 単体 $\sigma : \Delta_q \to \Delta_n$ に対して, sd_q の定義 (8.2), 補題 8.2, 帰納法の仮定, および補題 5.3 を用いると

$$\begin{aligned}\partial(\mathrm{sd}_q(\sigma)) &= \partial(B * \mathrm{sd}_{q-1}(\partial(\sigma)))\\&= \mathrm{sd}_{q-1}(\partial(\sigma)) - B * \partial(\mathrm{sd}_{q-1}(\partial(\sigma)))\\&= \mathrm{sd}_{q-1}(\partial(\sigma)) - B * \mathrm{sd}_{q-2}(\partial(\partial(\sigma)))\\&= \mathrm{sd}_{q-1}(\partial(\sigma))\end{aligned}$$

となり, 求める式が成り立つ。□

さて, アフィン q 単体 $\sigma = [A_0 \cdots A_q] : \Delta_q \to \Delta_n$ に対して $\mathrm{sd}_q(\sigma) = \sigma_\#(\mathrm{sd}_q(\iota_q))$ であることをみるのは難しくない。ただし以前と同じく $\iota_q = [E_0 \cdots E_q]$ である。そこで, 一般の特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対して

$$\mathrm{sd}_q(\sigma) = \sigma_\#(\mathrm{sd}_q(\iota_q)) \tag{8.4}$$

と定める。$\mathrm{sd}_q(\iota_q)$ が Δ_q の (重心) 分割を与えているから, $\mathrm{sd}_q(\sigma)$ は σ の分割を与えていると考えられる。いつものように線形に拡張して準同型写像

$$\mathrm{sd}_q : S_q(X) \to S_q(X)$$

を得る。これも **重心細分作用素** という。A を X の部分空間とすると, $S_q(A) \subset S_q(X)$ であるが, sd_q の定義から明らかに $\mathrm{sd}_q(S_q(A)) \subset \mathrm{sd}_q(S_q(A))$ である。したがって, 上の sd_q は準同型写像

$$\mathrm{sd}_q : S_q(X, A) \to S_q(X, A)$$

を導く。補題 8.4, sd_q の定義 (8.2) および 補題 6.3 より, $\mathrm{sd} = \{\mathrm{sd}_q\}$ はチェイン複体 $\mathcal{S}(X, A) = \{\, S_q(X, A), \partial \,\}$ からそれ自身へのチェイン写像である。したがってホモロジー群の間の準同型写像

$$\mathrm{sd}_* : H_q(X, A) \to H_q(X, A)$$

を導く。次の事実は直観的にはもっともであるが, 証明はやや複雑である。

補題 8.5
sd_* は恒等写像である。

証明

$A = \emptyset$ の場合のみ証明する。$A \neq \emptyset$ の場合は読者に残す。
sd_* が恒等写像であることを示すには,

$$\partial T_q + T_{q-1}\partial = 1_\# - \mathrm{sd}_q \tag{8.5}$$

をみたすチェインホモトピー $\mathscr{T} = \{T_q\} : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X)$ を構成すればよい。ここで T_q は $S_q(X)$ から $S_{q+1}(X)$ への準同型写像である。

Δ_q からそれ自身への恒等写像 ι_q を ι, sd_q を sd と略記し, T_q を q に関して帰納的に定義する。まず T_0 は零写像と定め, T_{q-1} が (任意の位相空間 X に対して) 定義されているとする。このとき, X の特異 q 単体 $\sigma : \Delta_q \to X$ に対し

$$T_q(\sigma) = \sigma_\#(B * (\iota - \mathrm{sd}(\iota) - T_{q-1}(\partial(\iota)))) \in S_{q+1}(X) \tag{8.6}$$

と定め, あと線形に拡張して準同型写像 $T_q : S_q(X) \to S_{q+1}(X)$ を定める。ここで B は前と同じく Δ_q の重心である。位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ に対して

$$f_\# T_q = T_q f_\# \tag{8.7}$$

である。この事実は T_q の定義 (8.6) より容易にわかる。

さて (8.5) が成り立っていることを q に関する数学的帰納法で示す。まず $q = 0$ のときは, (8.5) の両辺は共に 0 となり等しい。$q \geq 1$ とし $q - 1$ に関して (8.5) が成り立っている。つまり,

$$\partial T_{q-1} = 1_\# - \mathrm{sd} - T_{q-2}\partial \tag{8.8}$$

と仮定する。T_q の定義 (8.6), 補題 8.2, 8.4, (8.8) および補題 5.3 より

$$\begin{aligned}
\partial(T_q(\iota)) &= \partial(B*(\iota-\mathrm{sd}(\iota)-T_{q-1}(\partial(\iota)))) \\
&= \iota-\mathrm{sd}-T_{q-1}(\partial(\iota))-B*\partial(\iota-\mathrm{sd}(\iota)-T_{q-1}(\partial(\iota))) \\
&= \iota-\mathrm{sd}-T_{q-1}(\partial(\iota))-B*(\partial(\iota)-\partial(\mathrm{sd}(\iota)))+B*\partial(T_{q-1}(\partial(\iota))) \\
&= \iota-\mathrm{sd}-T_{q-1}(\partial(\iota))-B*(\partial(\iota)-\partial(\mathrm{sd}(\iota))) \\
&\quad +B*(\partial(\iota)-\mathrm{sd}(\partial(\iota))-T_{q-2}(\partial(\partial(\iota)))) \\
&= \iota-\mathrm{sd}-T_{q-1}(\partial(\iota))
\end{aligned}$$

となるから, 結局 $\partial(T_q(\iota))+T_{q-1}(\partial(\iota))=\iota-\mathrm{sd}(\iota)$ を得る。X の特異 q 単体 $\sigma:\Delta_q\to X$ に対し, 上式の両辺を $\sigma_\#$ で移し, 補題 6.3 と $\mathrm{sd}(\sigma)$ の定義 (8.2) および (8.7) を用いると, (8.5) が X の特異 q 単体 σ に対して成立していることがわかる。最後に (8.5) に現れる写像はすべて準同型写像であることに注意すれば, X のすべての特異 q チェインに対して (8.5) が成立し, 数学的帰納法が完成する。□

問題 8.6
補題 8.5 の $A\neq\emptyset$ の場合の証明を与えよ。

重心細分作用素 sd を r 回合成したものを sd^r と書く。次の系は 補題8.5 と補題3.5 を使えば示される。

系 8.7
$(\mathrm{sd}^r)_*:H_q(X,A)\to H_q(X,A)$ は恒等写像である。

$\mathbb{U}=\{\,U_\mu\,\}_{\mu\in M}$ を X の部分集合族で,

$$\bigcup_{\mu\in M} {U_\mu}^i = X \tag{8.9}$$

をみたすものとする。このとき, $S_q(U_\mu)(\subset S_q(X))$ たちで生成された $S_q(X)$ の部分加群を $S_q^{\mathbb{U}}(X)$ と書く。

補題 8.8
任意の $c\in S_q(X)$ に対し, c に依存するある自然数 r_c があり, $r\geq r_c$ ならば $\mathrm{sd}^r(c)\in S_q^{\mathbb{U}}(X)$。

証明

c を X の特異 q 単体 σ_λ の有限和 $\sum_\lambda a_\lambda\sigma_\lambda$ $(a_\lambda\in\boldsymbol{Z})$ と表すと, $\mathrm{sd}^r(c)=\sum_\lambda a_\lambda\mathrm{sd}^r(\sigma_\lambda)$ である。各 $\sigma_\lambda:\Delta_q\to X$ の像は, ある U_μ の中に入っているとは限らないが, r を大きくとれば, Δ_q を r 回重心細分して得られる各々の q 単体はいくらでも小さくなり, (8.9) より $\mathrm{sd}^r(\sigma_\lambda)$ に現れる特異 q 単体の像はある U_μ に入る[2]。したがって, ある自然数 r_λ が存在し, $r\geq r_\lambda$ ならば $\mathrm{sd}^r(\sigma_\lambda)\in S_q^{\mathbb{U}}(X)$ である。$c=\sum_\lambda a_\lambda\sigma_\lambda$ に現れる σ_λ は有限個であるから, $\{r_\lambda\}$ の最大値があり, それを r_c とすればよい。□

バウンダリー作用素 $\partial:S_q(X)\to S_{q-1}(X)$ は, $S_q(U_\mu)$ を $S_{q-1}(U_\mu)$ へ移すから, $S_q^{\mathbb{U}}(X)$ を $S_{q-1}^{\mathbb{U}}(X)$ へ移す。したがって, $\mathbb{S}^{\mathbb{U}}(X)=\{\,S_q^{\mathbb{U}}(X),\partial\,\}$ はチェイン複体になり, これから定まるホモロジー群を $H_q^{\mathbb{U}}(X)$

[2] これは直観的には明らかであるが, 厳密には細分で得られた各 q 単体の直径が, $r\to\infty$ のとき 0 に近づくことをみなければならない。

と書く。定義から明らかに, 重心細分作用素 $\mathrm{sd}: S_q(X) \to S_q(X)$ は, $S_q^{\mathbb{U}}(X)$ を $S_q^{\mathbb{U}}(X)$ に移し, 上と同様な議論で

$$(\mathrm{sd}^r)_* : H_q^{\mathbb{U}}(X) \to H_q^{\mathbb{U}}(X) \quad \text{は恒等写像である。} \tag{8.10}$$

次の事実が, 切除定理 8.1 の成立の鍵となる。

定理 8.9
包含写像 $S_q^{\mathbb{U}}(X) \to S_q(X)$ から導かれる準同型写像 $H_q^{\mathbb{U}}(X) \to H_q(X)$ は同型。

証明　単射性 $[z] \in H_q^{\mathbb{U}}(X)$ が $H_q(X)$ では 0 とする。このとき, $z = \partial(e)$ となる $e \in S_{q+1}(X)$ が存在する。$z = \partial(e)$ の両辺の r 回の重心細分をとると, sd と ∂ は可換であるから $\mathrm{sd}^r(z) = \partial(\mathrm{sd}^r(e))$ である。ここで, (8.10) から $[\mathrm{sd}^r(z)] = [z] \in H_q^{\mathbb{U}}(X)$ であるが, r が十分大きければ補題 8.8 より $\mathrm{sd}^r(e) \in S_q^{\mathbb{U}}(X)$ であるから, 上の式は $[\mathrm{sd}^r(z)] = 0 \in H_q^{\mathbb{U}}(X)$ を意味する。よって $[z] = 0$ となり単射性が示された。

全射性 $[w] \in H_q^{\mathbb{U}}(X)$ とすると, 補題 8.8 より十分大きい r に対して $\mathrm{sd}^r(w) \in S_q^{\mathbb{U}}(X)$。系 8.7 より $[\mathrm{sd}^r(w)] = [w] \in H_q(X)$ であるから, 全射性が示される。□

上の定理は空間対に対しても成立する。まず, A が X の部分空間であるとき, A の被覆 $\mathbb{U} \cap A = \{\, U_\mu \cap A \,\}$ に対してチェイン群 $S_q^{\mathbb{U}\cap A}(A)$ が定義でき, 対 (X, A) に対しては $S_q^{\mathbb{U}}(X, A) = S_q^{\mathbb{U}}(X)/S_q^{\mathbb{U}\cap A}(A)$ と定める。これより チェイン複体 $\mathcal{S}^{\mathbb{U}\cap A}(A) = \{\, S_q^{\mathbb{U}\cap A}(A), \partial \,\}$, $\mathcal{S}^{\mathbb{U}}(X, A) = \{\, S_q^{\mathbb{U}}(X, A), \partial \,\}$ が定まり, これらの q 次ホモロジー群をそれぞれ $H_q^{\mathbb{U}\cap A}(A)$, $H_q^{\mathbb{U}}(X, A)$ と書く。

定理 8.10
包含写像 $S_q^{\mathbb{U}}(X, A) \to S_q(X, A)$ から導かれる準同型写像 $H_q^{\mathbb{U}}(H, A) \to H_q(X, A)$ は同型。

証明
チェイン複体の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_q^{\mathbb{U}\cap A}(A) & \longrightarrow & S_q^{\mathbb{U}}(X) & \longrightarrow & S_q^{\mathbb{U}}(X, A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_q(A) & \longrightarrow & S_q(X) & \longrightarrow & S_q(X, A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

よりホモロジー完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_q^{\mathbb{U}\cap A}(A) & \longrightarrow & H_q^{\mathbb{U}}(X) & \longrightarrow & H_q^{\mathbb{U}}(X, A) & \longrightarrow & H_{q-1}^{\mathbb{U}\cap A}(A) & \longrightarrow & H_{q-1}^{\mathbb{U}}(X) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow & H_{q-1}(X)
\end{array}$$

が得られるが, 5 つの縦の準同型のうち, 真中の準同型以外は 定理 8.9 より同型である。したがって, 5 項補助定理 4.5 より 真中の準同型も同型である。□

以上の準備の下に, 切除定理の証明を得る。

証明　(定理 8.1)
X の被覆として $\mathbb{U} = \{\, A, X - V \,\}$ をとる。$(X - V)^i = X - \overline{V}$ で, 仮定より $\overline{V} \subset A^i$ だから

$$A^i \cup (X - V)^i = A^i \cup (X - \overline{V}) = X$$

となり, (8.9) はみたされている。$S_q^{\mathbb{U}}(X)$ は $S_q(A)$ と $S_q(X-V)$ で生成される $S_q(X)$ の部分加群であるから, 包含写像から導かれる可換図式

$$\begin{array}{ccc} S_q(X-V)/S_q(A-V) & \xrightarrow{\varphi} & S_q^{\mathbb{U}}(X)/S_q(A) = S_q^{\mathbb{U}}(X)/S_q^{\mathbb{U}\cap A}(A) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ S_q(X)/S_q(A) & = & S_q(X)/S_q(A) \end{array}$$

であるが, $S_q(A-V) = S_q(A) \cap S_q(X-V)$ より φ は同型である。したがって, 上の可換図式から導かれるホモロジー群の可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_q(X-V, A-V) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_q^{\mathbb{U}}(X, A) \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} \\ H_q(X, A) & = & H_q(X, A) \end{array}$$

において φ_* は同型。さらに, 定理 8.10 より ψ_* も同型。したがって, i_* も同型となり定理が証明される。□

補足

定理 8.9 より得られるもう 1 つの重要な結果として, **マイヤー · ビートリスの完全列** (***Mayer-Vieroris exact sequence***) とよばれるものがある。

位相空間 X の部分集合 U_1, U_2 に対して, ただし 条件 $(U_1)^i \cup (U_2)^i = X$ をみたすとする。そして, $i_k : U_1 \cap U_2 \to U_k$, $j_k : U_k \to X$ $(k = 1, 2)$ を包含写像とする。

定理 8.11 (マイヤー · ビートリスの完全列) ホモロジー群の列

$$\longrightarrow H_q(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i_{1*} \oplus (-i_{2*})} H_q(U_1) \oplus H_q(U_2) \xrightarrow{j_{1*} + j_{2*}} H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow$$

は完全列である。

証明

包含写像 $i_k : U_1 \cap U_2 \to U_k$, $j_k : U_k \to X$ $(k = 1, 2)$ が導くチェイン複体の列

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i_{1\#} \oplus (-i_{2\#})} \mathcal{S}(U_1) \oplus \mathcal{S}(U_2) \xrightarrow{j_{1\#} + j_{2\#}} \mathcal{S}^{\mathbb{U}}(X) \longrightarrow 0$$

は完全であることが容易に分かる (各自チェックせよ)。したがって, これよりホモロジー群の完全列を得るが, $H_q(\mathcal{S}(U_1) \oplus \mathcal{S}(U_2)) = H_q(U_1) \oplus H_q(U_2)$ であり, $\mathbb{U} = \{U_1, U_2\}$ とおくと 仮定より $\mathbb{U}$ が (8.9) をみたしているので, 定理 8.9 より $H_q(\mathcal{S}^{\mathbb{U}}(X)) = H_q^{\mathbb{U}}(X)$ は $H_q(X)$ と同型である。したがって, 完全列

$$\longrightarrow H_q(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i_{1*} \oplus (-i_{2*})} H_q(U_1) \oplus H_q(U_2) \xrightarrow{j_{1*} + j_{2*}} H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow$$

が得られる。□

X の部分集合 U_1, U_2 および $U_1 \cap U_2$ のホモロジー群がわかっているとき, この完全列を用いて X のホモロジー群を求めることがしばしばできる。つまり, 「部分から全体へ」というのがマイヤー · ビートリス完全列の発想である。

9　球面のホモロジー群

ホモロジー群のホモトピー不変性と切除定理を併せると, 多くの位相空間のホモロジー群の計算が可能になる。まず, n 次元球面

$$S^n = \{\, (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \;;\; x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1 \,\}$$

のホモロジー群を求めてみよう。

定理 9.1　$n \geq 0$ に対して

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (q = n) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

証明

D を $x_{n+1} \leq 0$ である S^n の部分集合 (つまり S^n の南半球) とする。対 (S^n, D) の簡約ホモロジー完全列

$$\widetilde{H}_q(D) \longrightarrow \widetilde{H}_q(S^n) \longrightarrow H_q(S^n, D) \longrightarrow \widetilde{H}_{q-1}(D)$$

において, D は可縮な空間であるから両端の簡約ホモロジー群は 0 である (系 7.5)。したがって

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong H_q(S^n, D) \tag{9.1}$$

一方, V を $x_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$ である S^n の部分集合とすると, $\overline{V} = V$。また D^i は $x_{n+1} < 0$ である S^n の部分集合であるから, $\overline{V} \subset D^i$。よって切除定理 8.1 により

$$H_q(S^n, D) \cong H_q(S^n - V, D - V)$$

ここで, 対 $(S^n - V, D - V)$ の簡約ホモロジーの完全列

$$\widetilde{H}_q(S^n - V) \longrightarrow H_q(S^n - V, D - V) \longrightarrow \widetilde{H}_{q-1}(D - V) \longrightarrow \widetilde{H}_{q-1}(S^n - V)$$

において, $S^n - V$ が可縮な空間であることに注意すれば,(9.1) と同様の理由で

$$H_q(S^n - V, D - V) \cong \widetilde{H}_{q-1}(D - V)$$

最後に, S^{n-1} を S^n の赤道 $\{x_{n+1} = 0\}$ と思うと, 包含写像 $S^{n-1} \to D - V$ はホモトピー同値写像であるから

$$\widetilde{H}_{q-1}(D - V) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$$

以上の 4 つの同型を合わせて

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \tag{9.2}$$

$q \leq n$ のとき, 同型 (9.2) を繰り返し用いて

$$\widetilde{H}_q(S^n) \cong \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong \widetilde{H}_0(S^{n-q}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (q = n) \\ 0 & (q < n) \end{cases}$$

最後の同型は, S^{n-q} は $q=n$ のとき 2 点で $q<n$ のとき 弧状連結であるから定理 5.6 と 定理 5.7 により示される。$q>n$ のとき, やはり同型 (9.2) を繰り返し用いて

$$\widetilde{H}_q(S^n)\cong\widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1})\cong\cdots\cong\widetilde{H}_{q-n}(S^0)$$

を得るが, S^0 は 2 点で $q-n>0$ であるから, 例 5.5 と 定理 5.6 より最後の $\widetilde{H}_{q-n}(S^0)$ は 0 である。以上より定理が示された。□

系 9.2 $n\geq 0$ に対して

$$H_q(D^n,S^{n-1})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & (q=n)\\ 0 & (q\neq 0)\end{cases}$$

ただし, $n=0$ のとき $S^{-1}=\emptyset$ と理解する。

証明

D^n は可縮であるから, 対 (D^n,S^{n-1}) の簡約ホモロジー完全列より $H_q(D^n,S^{n-1})\cong\widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$ である。これと 定理 9.1 より系が示される。□

球面または球面のホモロジー群は代数的トポロジーで基本的な役割を演じる。実際, 球面のホモロジー群の結果から色々なことが分かる。一例として次の基本的な事実を示す。

定理 9.3

$R^m\approx R^n$ ならば $m=n$ である。

証明に入る前に一言。$m\geq 1$, $n\geq 1$ のとき, R^m, R^n は共に連続濃度をもつから集合としては 1 対 1 対応がある。したがって上の定理を示すには, 「同相」という位相の仮定を如何に使うかがポイントである。

証明

$R^m\approx R^n$ とし, $f:R^m\to R^n$ を同相写像とする。R^m から 1 点 p をとると, f は R^m-p と $R^n-f(p)$ の間の同相写像を与える。よって, 命題 6.5 により, すべての q に対して $\widetilde{H}_q(R^m-p)\cong\widetilde{H}_q(R^n-f(p))$ であるが, $R^m-p\simeq S^{m-1}$, $R^n-f(p)\simeq S^{n-1}$ であるから (問題 10.7), 定理 7.4 よりすべての q に対して $\widetilde{H}_q(S^{m-1})\cong\widetilde{H}_q(S^{n-1})$。ここで $q=m-1$ ととれば, 定理 9.1 より $m=n$ でなければならない。□

ホモトピー不変性と切除定理の応用をもう一つ与えておく。位相空間対 $(\Delta_n,\partial\Delta_n)$ は (Δ_n,S^{n-1}) と同相であるから, 系 9.2 より

$$H_q(\Delta_n,\partial\Delta_n)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & (q=n)\\ 0 & (q\neq n)\end{cases}\tag{9.3}$$

ただし $n=0$ のとき $\partial\Delta_0=\emptyset$ と了解する。$\iota_n=[E_0\cdots E_n]$ に対し

$$\partial(\iota_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[E_0\cdots\widehat{E}_i\cdots E_n]\in S_{n-1}(\partial\Delta_n)\subset S_{n-1}(\Delta_n)$$

であるから, ι_n は $H_n(\Delta_n,\partial\Delta_n)$ の元 $[\iota_n]$ を定める。

定理 9.4
$[\iota_n]$ は $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元である。

<u>証明</u>

$\Delta_n = \{\, \sum_{i=0}^n x_i E_i \;;\; x_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^n x_i = 1 \,\}$, $\Delta_{n-1} = \Delta_n \cap \{x_i = 0\}$ であるから, $\Delta_{n-1} \subset \partial\Delta_n$ である。そこで, $A = \overline{\partial\Delta_n - \Delta_{n-1}}$ とおくと A は可縮 (図 8)。

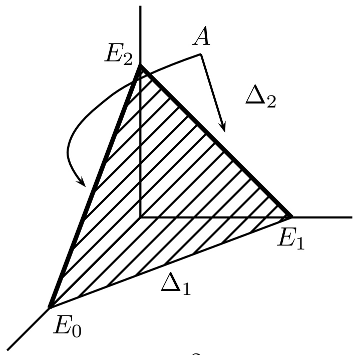


図 8: 生成元

$j : \partial\Delta_n = (\partial\Delta_n, \emptyset) \to (\partial\Delta_n, A)$, $k : (\Delta_{n-1}, \partial\Delta_{n-1}) \to (\partial\Delta_n, A)$ をそれぞれ包含写像とすると, 次の同型がある。

$$H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_{n-1}(\partial\Delta_n) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_{n-1}(\partial\Delta_n, A) \xleftarrow[\cong]{k_*} H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \partial\Delta_{n-1})$$

最初の同型は, 対 $(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ の簡約ホモロジー完全列と Δ_n が可縮であることから, 2 番目の同型も同様に対 $(\partial\Delta_n, A)$ の簡約ホモロジー完全列と A が可縮であることからわかる。最後の同型をみるには, 切除定理と特異ホモロジー群のホモトピー不変性を使えばよい (定理 9.1 の証明参照)。このとき

<u>Claim</u>。上の同型対応 $(k_*)^{-1} \cdot j_* \cdot \partial_*$ を通して $[\iota_n]$ が $(-1)^n[\iota_{n-1}]$ に移る。

なぜなら

$$\partial_*([\iota_n]) = \left[\sum_{i=0}^n (-1)^i [E_0 \cdots \widehat{E_i} \cdots E_n] \right] \in H_{n-1}(\partial\Delta_n)$$

であるが, $i \neq n$ のとき $[E_0 \cdots \widehat{E_i} \cdots E_n] \in S_{n-1}(A)$ であるから

$$j_* \left(\left[\sum_{i=0}^n (-1)^i [E_0 \cdots \widehat{E_i} \cdots E_n] \right] \right) = (-1)^n \, [[E_0 \cdots E_{n-1}]] \in H_{n-1}(\partial\Delta_n, A)$$

一方, $\iota_{n-1} = [E_0 \cdots E_{n-1}]$ であるから, 上の元は $k_*((-1)^n[\iota_{n-1}])$ と一致し主張が示される。

$\partial\Delta_0 = \emptyset$ であるから $H_0(\Delta_0, \partial\Delta_0) = H_0(\Delta_0)$ で, しかも Δ_0 は 1 点であるから, 例 5.5 により $[\iota_0] = [[E_0]]$ は $H_0(\Delta_0) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元である。したがって上の主張より帰納的に $[\iota_n]$ が $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元であることが分かる。□

系 9.5 $s = [A_0 A_1 \cdots A_n]$ を n 単体とする。このとき

(**1**) $H_q(|K(s)|, |K(\partial s)|) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (q = n) \\ 0 & (q \neq n) \end{cases}$

(**2**) $H_n(|K(s)|, |K(\partial s)|) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元は, アフィン n 単体 $[A_0 \cdots A_n] : \Delta_n \to |K(s)|$ によって与えられる。

証明

$[A_0 \cdots A_n] : \Delta_n \to |K(s)|$ は同相写像であるから, (9.3) と定理 9.4 より 系は示される。□

定理 9.1 より $H_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ である。この群の生成元を具体的にみてみよう。単位円周 S^1 上に k 個 $(k \geq 2)$ の点 $p_1, \cdots, p_k$ を, p_1 から出発して順に $p_2, p_3, \cdots, p_k$ と通り p_1 に戻ると S^1 を反時計回りに 1 周しているようにとる。$i = 1, 2, \cdots, k$ に対して, Δ_1 と p_i から p_{i+1} へ反時計回りに回る円弧との同相写像の 1 つを σ_i とし, それを S^1 の特異 1 単体 $\sigma_i : \Delta_1 \to S^1$ と思う。ただし $\sigma_i(E_0) = p_i$, $\sigma_i(E_1) = p_{i+1}$ で $p_{k+1} = p_1$ と了解する。このとき

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (p_{i+1} - p_i) = 0$$

であるから, 特異 q チェイン $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i$ は $H_1(S^1)$ の元 $\left[\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right]$ を定める。$H_1(S^1)$ の元

命題 9.6 $\left[\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right]$ は $H_1(S^1)$ の生成元である。

証明

まず次のことに注意する。p, q を S^1 上の相異なる 2 点とし, A を p から q へ反時計回りに回る円弧, B をもう一方の円弧とする。$\sigma : \Delta_1 \to A$ を, $\sigma(E_0) = p$, $\sigma(E_1) = q$ である同相写像とする。このとき, $\partial(\sigma) \in S_0(\partial A)$ であるから, σ は $Z_1(A \partial A)$ の元を, したがって $H_1(A, \partial A)$ の元を定める。σ を位相空間対 $(\Delta_1, \partial\Delta_1)$ から $(A, \partial A)$ への同相写像と思うと, 同型写像

$$\sigma_* : H_1(\Delta_1, \partial\Delta_1) \to H_1(A, \partial A)$$

を得るが, 定理 9.4 より $H_1(\Delta_1, \partial\Delta_1)$ の生成元は $[\iota_1]$ であり, $\sigma_*([\iota_1]) = [\sigma]$ であるから, $[\sigma]$ は $H_1(A, \partial A)$ の生成元である。一方, 包含写像から導かれる次の同型がある。

$$H_1(A, \partial A) \xrightarrow{\cong} H_1(S^1, B) \xleftarrow{\cong} H_1(S^1) \tag{9.4}$$

前者の同型は切除定理 8.1 より, 後者は B が可縮であることに注意すれば対 (S^1, B) のホモロジー完全列より容易にわかる。

この考察の下に命題を証明しよう。$\left[\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right]$ は $H_1(S^1)$ の元であるが, A_i を p_i から p_{i+1} へ反時計回りに回る円弧とすると, 同型 (9.4) を通して (ただし $A = A_i$ にとる), $\left[\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right]$ が移る $H_1(A_i, \partial A_i)$ の元は $[\sigma_i]$ である。しかし, この元は最初の考察により $H_1(A_i, \partial A_i)$ の生成元である。したがって $\left[\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right]$ が $H_1(S^1)$ の生成元であることが示される。□

注意 9.7

(**1**) $H_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ であるから $H_1(S^1)$ の生成元は 2 つある。我々は, 点 $p_1, \cdots, p_k$ および σ_i を反時計回りにとったが, これらをすべて時計回りにとれば, もう一つの生成元が得られる。

(**2**) 上の命題は, $k=1$ のときも成立する。つまり, 特異 1 単体 $\sigma:\Delta_1\to S^1$ が $\sigma(E_0)=\sigma(E_1)$ をみたし, σ から導かれる写像 $\Delta_1/\partial\Delta_1\to S^1$ が同相写像であるならば, $H_1(S^1)$ の生成元を与える。

問題 9.8
注意 9.7 で述べた事実を示せ。

10　単体的ホモロジー群との関係

K を単体的複体とするとき, K の頂点に番号をつけ $A_0,A_1,A_2,\cdots$ とする。このとき K の q 単体は $|A_{i_0}A_{i_1}\cdots A_{i_q}|$ $(i_0<i_1<\cdots<i_q)$ とただ一通りに表すことができる。この表示を用いて, K の向き付けられた q 単体 $\langle A_{i_0}A_{i_1}\cdots A_{i_q}\rangle$ に対して多面体 $|K|$ のアフィン q 単体 $[A_{i_0}A_{i_1}\cdots A_{i_q}]$ を対応させることにより, 準同型写像

$$\eta:C_q(K)\to S_q(|K|)$$

を得る。η はバウンダリー作用素と可換である。また, L が K の部分複体であるとき, η は $C_q(l)$ を $S_q(|L|)$ に移す。したがって η はホモロジー群の間の準同型

$$\eta_*:H_q(K,L)\to H_q(|K|,|L|)$$

を導く。本節の目的は次を示すことである。

定理 10.1　すべての q に対して, $\eta_*:H_q(K,L)\to H_q(|K|,|L|)$ は同型。
証明
ステップ 1．(K,L) が 1 つの n 単体 s から得られる単体的複体の対 $(K(s),K(\partial s))$ である場合。
$q\neq n$ のとき 定理 1.21 と 系 9.5 より, 定理のホモロジー群は共に自明であるから明らかに η_* は同型写像であり, $q=n$ のときホモロジー群は共に $\boldsymbol{Z}$ と同型であるから, η_* が生成元を生成元に移すことをみればよいが, 定理 1.21 の証明と 系 9.5 と η の定義から明らかである。
ステップ 2. K は任意の単体的複体で $L=\emptyset$ の場合。
K に含まれる単体の数 $\#K$ に関する数学的帰納法で $\eta_*:H_q(K)\to H_q(|K|)$ が同型であることを証明する。

$\#K=1$ の場合。このとき K は 1 つの 0 単体からなり, $|K|$ は 1 点である。したがって 定理 1.21 と 系 9.5 と η の定義より 明らかに η_* は同型。

$\#K=m$ とし, $\#K'=m-1$ であるすべての単体的複体 K' に対して定理が成立していると仮定する。$\dim K=n$ とし K から 1 つの n 単体 s を取り除いて得られる単体的複体を K' とし, 対 (K,K') と 対 $(|K|,|K'|)$ のホモロジー完全列から得られる次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{q+1}(K,K') & \longrightarrow & H_q(K') & \longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & H_q(K,K') & \longrightarrow & H_{q-1}(K') \\
{\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow \\
H_{q+1}(|K|,|K'|) & \longrightarrow & H_q(|K'|) & \longrightarrow & H_q(|K|) & \longrightarrow & H_q(|K|,|K'|) & \longrightarrow & H_{q-1}(|K'|)
\end{array}$$

ここで, $\#K'=m-1$ であるから K' には数学的帰納法の仮定が使え, すべての q に対して $\eta_*:H_q(K')\cong H_q(|K'|)$ である。したがって, すべての q に対して, $\eta_*:H_q(K,K')\to H_q(|K|,|K'|)$ が同型であることが示されれば 5 項補助定理 4.5 より $\eta_*:H_q(K)\to H_q(|K|)$ が同型であることがわかり帰納法が完成する。

以下, $\eta_*: H_q(K,K') \to H_q(|K|,|K'|)$ が同型であることを示す。$(K(s),K(\partial s))$ が (K,K') の部分複体であるから, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_q(K(s),K(\partial s)) & \longrightarrow & H_q(K,K') \\ {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow \\ H_q(|K(s)|,|K(\partial s)|) & \longrightarrow & H_q(|K|,|K'|) \end{array}$$

がある。ここで, 上の横の写像は単体的ホモロジーの切除定理 2.6 より同型, 左の縦の写像はステップ 1 より同型である。よって, 上の図式において下の横の写像が同型であることを示せばよい。V を $|K|$ における $|K(s)| = s$ の補集合とすれば, $|K| - V = |K(s)|$, $|K'| - V = |K(\partial s)|$ であるから切除定理 8.1 より求めるべき同型が示せるようにみえるが, $\overline{V} = |K'|$ であるから残念ながら切除定理の仮定 $\overline{V} \subset |K'|^i$ がみたされていない。この難点は次のようにすれば回避できる。$|K'|$ に含まれない $|K|$ の点 p を１つとり, 包含写像より導かれる次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} xsH_q(|K(s)|,|K(\partial s)|) & \longrightarrow & H_q(|K|,|K'|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(|K(s)|,|K(s)|-p) & \longrightarrow & H_q(|K|,|K|-p) \end{array} \tag{10.1}$$

対 $(|K|,|K|-p)$ と上の V に対しては切除定理 8.1 の仮定がみたされているから, 上の可換図式の下の横の写像は同型。また, ホモトピー理論より $|K(\partial s)|$ が $|K|-p$ の変位レトラクトであることが分かる。また, そこで得られる変位レトラクション $f_t: |K(s)|-p \to |K(s)|-p$ を用いて写像 $\hat{f}_t: |K|-p \to |K|-p$ を

$$\hat{f}_t = \begin{cases} x & (x \in |K'|) \\ f_t(x) & (x \in (|K|-p) - |K'|) \end{cases}$$

と定めると, $|K|-p$ の $|K'|$ への変位レトラクションとなっている。したがって特に $|K(s)|-p \simeq |K(\partial s)|$, $|K|-p \simeq |K'|$ であるから, 定理 7.9 より (10.1) の 2 つの縦の写像も同型。よって, (10.1) の上の横の写像も同型となり, 求める同型が得られた。

ステップ 3. (K,L) が一般の単体的複体の対である場合。
対 (K,L) と 対 $(|K|,|L|)$ のホモロジー完全列から得られる次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(L) & \longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & H_q(K,L) & \longrightarrow & H_{q-1}(L) & \longrightarrow & H_{q-1}(K) \\ {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_*}\downarrow \\ H_q(|L|) & \longrightarrow & H_q(|K|) & \longrightarrow & H_q(|K|,|L|) & \longrightarrow & H_{q-1}(|L|) & \longrightarrow & H_{q-1}(|K|) \end{array}$$

ステップ２より, 真中以外の縦の写像は同型である。したがって 5-補題により真中の縦の写像も同型となり, 定理が示される。□

定理 10.1 と定理 7.4 を合わせて次の重要な定理を得る。

系 10.2 $H_q(K)$ は 多面体 $|K|$ のホモトピー型のみによる。

発展 系 10.2 は, 特異ホモロジーを経由せずに単体的ホモロジーの範疇で証明できる。その際, 鍵となるのが次の単体近似定理である。

定理 10.3 (単体近似定理)
K, K' を単体的複体とする。このとき, 連続写像 $f : |K| \to |K'|$ に対して, 自然数 N と単体写像 $\psi : \mathrm{sd}^N K \to K'$ が存在して $|\psi| \simeq f$ となる。ここで, $\mathrm{sd}^N K$ は K を N 回重心細分して得られる単体的複体, $|\psi|$ は単体写像 ψ から定まる連続写像である。

この定理は応用の多い重要な定理である。単体近似定理を用いた系 10.2 の証明および近似定理の証明, 応用に関しては,
田村 一郎「トポロジー」岩波書店, 1972
服部 昌夫「位相幾何学」岩波書店, 1991
を参照のこと。
よって, オイラー数の定義と定理 1.7 と定理 7.4 より

系 10.4
オイラー数 $\chi(K)$ は多面体 $|K|$ のホモトピー型のみにより

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q \mathrm{rk} H_q(|K|)$$

である。

単体的複体に対して定義されたオイラー数を, 系 10.4 により位相空間に拡張することができる。

定義 10.5
すべての q に対して $H_q(X)$ が有限生成で, しかも十分大きな r に対して $H_r(X) = 0$ であるような位相空間は **有限生成のホモロジーをもつ** といい, そのような位相空間 X に対して

$$\chi(X) = \sum q = 0^{\infty} (-1)^q \mathrm{rk} H_q(X)$$

を X の **オイラー数** という。
位相空間 X が, ある単体的複体 K の多面体 $|K|$ と同相であるとき, K と同相写像 $t : |K| \to X$ の組 (K, t) を X の **単体分割** (***simplicial decomposition***) または **三角形分割** といい, X は **単体分割をもつ** または **単体分割可能** という。命題 6.5 と定理 10.1 より, X が単体分割 (K, t) をもてば $H_q(X) \cong H_q(K)$ である。したがって, 位相空間 X のホモロジー群が, 単体分割を与える単体的複体 K の組合せ構造を用いて計算できる。これは「原理」と呼ぶべきほどの重要な事実であるが, 次の例のように単体分割を与える単体的複体は多くの単体をもち, 計算を実行するのは容易ではない。実は, 単体的複体より効率的のよい胞体分割なるものがある。

例 10.6
S^n において, 各点 p と $-p$ を同一視して得られる商空間を n 次元実射影空間 (real projective space) といい, $\boldsymbol{R}P^n$ と書く。$\boldsymbol{R}P^2$ の場合と同じく, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の原点を通る直線は S^n と 2 点 p, $-p$ と交わるから, $\boldsymbol{R}P^n$ は S^n の原点対称な点を同一視するのであるから, S^n の単体分割で原点対称なものを構成し, 原点対称な単体を同一視することによって $\boldsymbol{R}P^n$ の単体分割を構成しよう。

自然に $\boldsymbol{R}^1 \subset \boldsymbol{R}^2 \subset \boldsymbol{R}^3 \subset \cdots$ と思えるから, それに応じて $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \cdots$ と思う。つまり $S^n = \{\,(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{n+1}^2\,\}$ とすると $S^{n-1} = S^n \cap \{x_{n+1} = 0\}$ である。まず, S^1 の単体分割として S^0 の 2 点と S^1 の 2 点 $(0, \pm 1)$ を線分で結んで得られる 1 次元単体的複体 (正方形) を K_1 とする (図 9(1))。$\boldsymbol{R}^2$ の原点に光源をおき, K_1 の各単体を S^1 に投影すれば, S^1 の原点対称な単体分割を得る。しかし, これは $\boldsymbol{R}P^1$ の単体分割を与えない。なぜなら, K_1 において原点対称な単体を同一視すると, 図 9 (1) において, $|A_1^+|$ と $|A_1^-|$, $|A_2^+|$ と $|A_2^-|$, $|A_1^+A_2^+|$ と $|A_1^-A_2^-|$, $|A_1^+A_2^-|$ と $|A_1^-A_2^+|$ がそれぞれ同一視され, 0 単体が 2 つで, それらを端点にもつ 1 単体が 2 つとなる。しかし, 単体的複体では, 決められた 2 個の点を頂点にもつ 1 単体は (あれば) 唯一つであるから, このように K_1 を同一視して得られる集合は単体的複体でない。この難点を回避するには, K_1 を重心細分して得られる単体的複体 $\mathrm{sd}K_1$ を考えればよい (図 9(2))。$\mathrm{sd}K_1$ において原点対称な単体を同一視して得られる集合 $\widetilde{K}_1$ は再び単体的複体となり, $\boldsymbol{R}P^1$ の単体分割を与える。

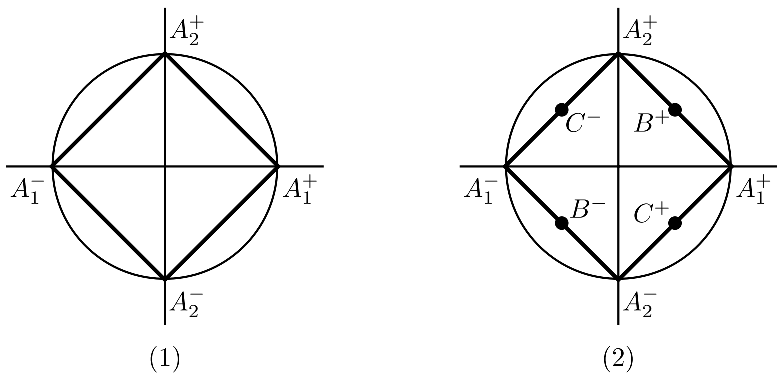


図 9: $\boldsymbol{R}P^1$ の単体分割

次に, K_1 を $\boldsymbol{R}^3$ 内にあると思い, K_1 と $\boldsymbol{R}^3$ の点 $A_3^+ = (0, 0, 1)$ との結び $A_3^+ * K_1$, および, 点 $A_3^- = (0, 0, -1)$ との結び $A_3^- * K_1$ をとり, それらの合併 $K_2 = (A_3^+ * K_1) \cup (A_3^- * K_1)$ を考える (図 10)。K_1 の場合と同様に, K_2 は S^2 の原点対称な単体分割を与えるが, K_2 において原点対称な単体を同一視して得られる集合は単体的複体にならない。この難点を回避するには, 前と同様に K_2 の各単体を重心細分して得られる単体的複体 $\mathrm{sd}K_2$ を考えればよい (図 10)。$\mathrm{sd}K_2$ において原点対称な単体を同一視して得られる単体の集合 $\widetilde{K}_2$ は単体的複体になり, $\boldsymbol{R}P^2$ の単体分割を与える。以下同様に考えれば, $\boldsymbol{R}P^n$ の単体分割が得られる。

= = = = = 章 末 問 題 = = = = =

問題 10.7

p を $\boldsymbol{R}^n$ の点とするとき, $\boldsymbol{R}^n - p \approx S^{n-1}$ を示せ。

問題 10.8

p を D^n の境界 S^{n-1} 上の点とする。このとき次を示せ。

(**1**) $D^n - p$, $S^{n-1} - p$ は共に可縮である。

(**2**) すべての q に対して $H_q(D^n - p, S^{n-1} - p) = 0$

(参考 : 系 9.2 より $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \boldsymbol{Z}$ であるから, (2) は 切除定理 8.1 の仮定 $\overline{V} \subset A^i$ が除けないことを意味する。実際, この問題では $(S^{n-1})^i = \emptyset$ である。)

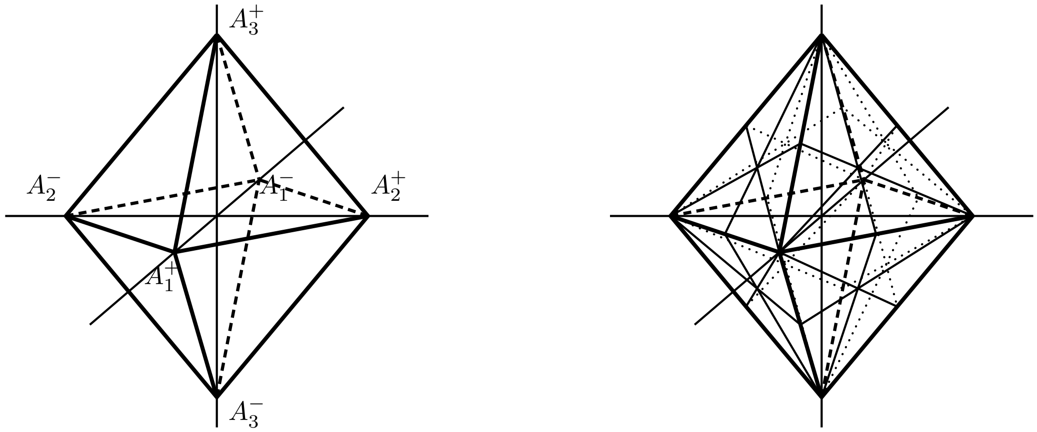


図 10: P^n の単体分割

問題 10.9 $\overset{\circ}{D}{}^{\mathrm{m}}$ と $\overset{\circ}{D}{}^{\mathrm{n}}$ が同相 または D^n と D^m が同相 ならば $m = n$ であることを示せ。

問題 10.10
位相空間 X の点 x が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相な開近傍をもてば

$$H_q(X, X - x) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (q = n) \\ 0 & (q \neq n) \end{cases}$$

であることを示せ。

問題 10.11
位相空間 X の部分空間 A が X の弧状連結成分の幾つかの合併ならば, すべての q に対して $H_q(X, A) \cong H_q(X - A)$ であることを示せ。