次の複体のホモロジー群の求めかた (表示行列を利用)。

例 9 (実) 射影平面 P^2

$C_2(K) = \langle a_0a_1a_3, a_1a_2a_3, a_4a_0a_3, a_4a_2a_0, a_3a_5a_4, a_2a_4a_1, a_1a_4a_5, a_2a_5a_3, a_2a_0a_5, a_0a_1a_5 \rangle \cong \mathbb{Z}^{10}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_2a_0, a_1a_2, a_0a_4, a_0a_3, a_1a_3, a_2a_3, a_2a_5, a_3a_4, a_3a_5, a_4a_5, a_1a_4, a_1a_5, a_0a_5, a_2a_4 \rangle \cong \mathbb{Z}^{15}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5 \rangle \cong \mathbb{Z}^6$ である。

$H_1(K)$ を求めるためにその表示を次のように求める。先ず, 極大 tree T を

$$\{\ a_0a_1, a_0a_2, a_2a_4, a_4a_5, a_0a_3\ \}$$

とすると, 群表示が

$$\left(\begin{array}{l|l} a_1a_2, a_0a_4, a_1a_3, a_2a_3, & a_1a_3, a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1, a_4a_0 + a_3a_4, \\ a_2a_5, a_3a_4, a_3a_5, a_1a_4, & a_0a_4, a_3a_5 + a_4a_2, a_4a_1 + a_1a_2, a_1a_4 + a_5a_1, \\ a_1a_5, a_0a_5 & a_2a_5 + a_5a_3 + a_3a_2, a_0a_5 + a_5a_2, a_1a_5 + a_5a_0 \end{array}\right)$$

となったとする。このときこの表示の行列表示は

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1a_2 & a_0a_4 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_2a_5 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1a_3 \\ a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \\ a_4a_0 + a_3a_4 \\ a_0a_4 \\ a_3a_5 + a_4a_3 \\ a_4a_1 + a_1a_2 \\ a_1a_4 + a_5a_1 \\ a_2a_5 + a_5a_3 + a_3a_2 \\ a_0a_5 + a_5a_2 \\ a_1a_5 + a_5a_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & & & \\ 1 & & -1 & 1 & & & & & & \\ & -1 & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & 1 & & & \\ 1 & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & & -1 & & & \\ & & & & -1 & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

である。

基本変形 (2 行目に 1 行目を加える) を施すと,

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1a_2 & a_0a_4 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_2a_5 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1a_3 \\ a_1a_2 + a_2a_3 \\ a_4a_0 + a_3a_4 \\ a_0a_4 \\ a_3a_5 + a_4a_3 \\ a_4a_1 + a_1a_2 \\ a_1a_4 + a_5a_1 \\ a_2a_5 + a_5a_3 + a_3a_2 \\ a_0a_5 + a_5a_2 \\ a_1a_5 + a_5a_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & & & \\ 1 & & 0 & 1 & & & & & & \\ & -1 & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & 1 & & & \\ 1 & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & & -1 & & & \\ & & & & -1 & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

同様に, 基本変形 (3 行目に 4 行目を加える) を施すと,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} a_1a_2 & a_0a_4 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_2a_5 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_1a_3 \\ a_1a_2+a_2a_3 \\ a_3a_4 \\ a_0a_4 \\ a_3a_5+a_4a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_2a_5+a_5a_3+a_3a_2 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & & 1 & & & & & & & \\
1 & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & 0 & & & & 1 & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & -1 & 1 & & & \\
1 & & & & & & & -1 & & \\
 & & & & & & & 1 & -1 & \\
 & & & -1 & 1 & & -1 & & & \\
 & & & & -1 & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

次に, 基本変形 (3 列目と 1 列目を入れ換える+4 行目と 2 行目を入れ換える) を施すと,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} a_1a_3 & a_0a_4 & a_1a_2 & a_2a_3 & a_2a_5 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_1a_3 \\ a_0a_4 \\ a_3a_4 \\ a_1a_2+a_2a_3 \\ a_3a_5+a_4a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_2a_5+a_5a_3+a_3a_2 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & -1 & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & & -1 & & \\
 & & & & & & & 1 & -1 & \\
 & & & -1 & 1 & & -1 & & & \\
 & & & & -1 & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

次に, 基本変形 (5 行目に 3 行目を加える) を施すと,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} a_1a_3 & a_0a_4 & a_1a_2 & a_2a_3 & a_2a_5 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_1a_3 \\ a_0a_4 \\ a_3a_4 \\ a_1a_2+a_2a_3 \\ a_3a_5 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_2a_5+a_5a_3+a_3a_2 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & & -1 & & \\
 & & & & & & & 1 & -1 & \\
 & & & -1 & 1 & & -1 & & & \\
 & & & & -1 & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

次に, 基本変形 (8 行目に 5 行目を加える) を施すと,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} a_1a_3 & a_0a_4 & a_1a_2 & a_2a_3 & a_2a_5 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1a_3 \\ a_0a_4 \\ a_3a_4 \\ a_1a_2+a_2a_3 \\ a_3a_5 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_2a_5+a_3a_2 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & & -1 & & \\
 & & & & & & & 1 & -1 & \\
 & & & -1 & 1 & & 0 & & & \\
 & & & & -1 & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

次に, 基本変形 (3 列目と 6 列目を入れ換える+4 列目と 7 列目を入れ換え, 4 行目と 5 行目を入れ換える) を施すと,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} a_1a_3 & a_0a_4 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_2a_5 & a_1a_2 & a_2a_3 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1a_3 \\ a_0a_4 \\ a_3a_4 \\ a_3a_5 \\ a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_2a_5+a_3a_2 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & -1 & & \\
 & & & & & & & 1 & -1 & \\
 & & & & 1 & & -1 & & & \\
 & & & & -1 & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

上から 4 行左から 4 列を書かないと

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} a_2a_5 & a_1a_2 & a_2a_3 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_2a_5+a_3a_2 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{array} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & & -1 & & \\
 & & & 1 & -1 & \\
1 & & -1 & & & \\
-1 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

基本変形 (4 行目に 1 行目を加える) を施すと,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} a_2a_5 & a_1a_2 & a_2a_3 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_1a_2+a_2a_5 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & & -1 & & \\
 & & & 1 & -1 & \\
1 & 1 & 0 & & & \\
-1 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

基本変形 (2 列目に 3 列目 $\times(-1)$ を加える) を施すと,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} a_2a_5 & a_1a_2 & \begin{gathered} a_1a_2 \\ +a_2a_3 \end{gathered} & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_1a_2+a_2a_5 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & 0 & 1 & & & \\
 & 1 & & -1 & & \\
 & & & 1 & -1 & \\
1 & 1 & 0 & & & \\
-1 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

基本変形 (3 列目と 1 列目を入れ換える) を施すと,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \begin{gathered} a_1a_2 \\ +a_2a_3 \end{gathered} & a_1a_2 & a_2a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ a_1a_2+a_2a_5 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
 & 1 & & -1 & & \\
 & & & 1 & -1 & \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & & -1 & & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

基本変形 (4 行目に 2 行目 $\times(-1)$ を加え, 4 列目に 2 列目を加える) を施すと,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \begin{gathered} a_1a_2 \\ +a_2a_3 \end{gathered} & \begin{gathered} a_1a_2 \\ -a_1a_4 \end{gathered} & a_2a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ -a_4a_1+a_2a_5 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & -1 & \\
 & & 1 & 1 & & \\
 & & -1 & & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

基本変形 (4 行目に 3 行目 $\times(-1)$ を加え, 5 列目に 4 列目を加える) を施すと,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \substack{a_1a_2\\+a_2a_3} & \substack{a_1a_2\\-a_1a_4} & a_2a_5 & \substack{a_1a_4\\-a_1a_5} & a_1a_5 & a_0a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ -a_5a_1+a_2a_5 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & \\
 & & -1 & & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}$$

基本変形 (4 列目と 3 列目を入れ換える) を施すと,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \substack{a_1a_2\\+a_2a_3} & \substack{a_1a_2\\-a_1a_4} & \substack{a_1a_4\\-a_1a_5} & a_2a_5 & a_1a_5 & a_0a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ -a_5a_1+a_2a_5 \\ a_0a_5+a_5a_2 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & \\
 & & & -1 & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}$$

基本変形 (6 行目に 5 行目を加え, 5 列目に 4 列目 $\times(-1)$ を加える) を施すと,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \substack{a_1a_2\\+a_2a_3} & \substack{a_1a_2\\-a_1a_4} & \substack{a_1a_4\\-a_1a_5} & \substack{a_2a_5\\+a_1a_5} & a_1a_5 & a_0a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ -a_5a_1+a_2a_5 \\ a_0a_5-a_4a_1 \\ a_1a_5+a_5a_0 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}$$

基本変形 (6 行目に 5 行目 $\times(-1)$ を加え, 5 列目に 4 列目 $\times(-1)$ を加える) を施すと,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \substack{a_1a_2\\+a_2a_3} & \substack{a_1a_2\\-a_1a_4} & \substack{a_1a_4\\-a_1a_5} & \substack{a_2a_5\\+a_1a_5} & \substack{a_1a_5\\-a_0a_5} & a_0a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1a_2+a_2a_3 \\ a_4a_1+a_1a_2 \\ a_1a_4+a_5a_1 \\ -a_5a_1+a_2a_5 \\ a_0a_5-a_5a_1 \\ -a_0a_5+a_5a_0 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & \\
 & & & & & -2
\end{array}\right]
\end{array}$$

よって, $H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2$ である。

あるいは直接 $\partial_1 : C_1(K) \to C_0(K)$ を行列表示すると

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_0a_1 \\ a_2a_1 \\ a_1a_2 \\ a_0a_4 \\ a_0a_3 \\ a_1a_3 \\ a_2a_3 \\ a_2a_5 \\ a_3a_4 \\ a_3a_5 \\ a_4a_5 \\ a_1a_4 \\ a_1a_5 \\ a_0a_5 \\ a_2a_4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & & & & \\
1 & & -1 & & & \\
 & -1 & 1 & & & \\
-1 & & & & 1 & \\
-1 & & & 1 & & \\
 & -1 & & 1 & & \\
 & & -1 & 1 & & \\
 & & -1 & & & 1 \\
 & & & -1 & 1 & \\
 & & & -1 & & 1 \\
 & & & & -1 & 1 \\
 & -1 & & & 1 & \\
 & -1 & & & & 1 \\
-1 & & & & & 1 \\
 & & -1 & & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

である。

これを基本変形を施すと

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

となる。

また $\partial_2 : C_2(K) \to C_{(}K)$ を行列表示すると

$$
\begin{array}{c}
 \\
a_0a_1a_3 \\ a_1a_2a_3 \\ a_4a_0a_3 \\ a_4a_2a_0 \\ a_3a_5a_4 \\ a_2a_4a_1 \\ a_1a_4a_5 \\ a_2a_5a_3 \\ a_2a_0a_5 \\ a_0a_1a_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_0a_1 & a_2a_0 & a_1a_2 & a_0a_4 & a_0a_3 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_2a_5 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_4a_5 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_0a_5 & a_2a_4
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & & & & -1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & -1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & -1 & 1 & & & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & & & & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & & -1 & 1 & -1 & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & -1 & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & -1 & & \\
 & & & & & & -1 & 1 & & -1 & & & & & \\
 & 1 & & & & & & -1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & & & 1 & -1 &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

である。

これを基本変形を施すと

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 1 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 1 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

である。

よって $\alpha_1 = 5, \beta_1 = 1\gamma_1 = 0, \delta_1 = 1, \varepsilon_1 = 9, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \varepsilon_2 = 0, \gamma_0 = 1, \delta_0 = 0, \varepsilon_0 = 5$ となるので,

$$H_2(K) = 0, H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2, H_0(K) \cong \mathbb{Z}$$

と計算できる。

例 11 クラインの壷 (Klein's bottle) K

$C_2(K) = \langle a_0a_3a_1, a_1a_3a_4, a_1a_4a_2, a_2a_4a_5, a_2a_5a_0, a_0a_5a_6, a_3a_6a_4, a_4a_6a_7, a_4a_7a_5, a_5a_7a_8,$
$a_5a_8a_6, a_6a_8a_3, a_6a_0a_7, a_7a_0a_1, a_7a_1a_8, a_8a_1a_2, a_8a_2a_3, a_3a_2a_0\rangle \cong \mathbb{Z}^{18}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_0, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_6, a_6a_7, a_7a_8, a_8a_3, a_0a_3, a_3a_6, a_6a_0, a_1a_4, a_4a_7, a_7a_1,$
$a_2a_5, a_5a_8, a_8a_2, a_3a_1, a_6a_4, a_4a_2, a_0a_7, a_7a_5, a_5a_0, a_1a_8, a_8a_6, a_2a_3\rangle \cong \mathbb{Z}^{27}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\rangle \cong \mathbb{Z}^9$ である。