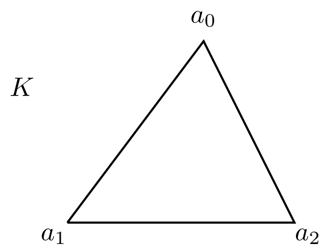
次の複体のホモロジー群を求めよ。

例 1 (円周) S^1



$C_1(K) = \{\alpha_1 a_0 a_1 + \alpha_2 a_1 a_2 + \alpha_3 a_2 a_0\ ;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}\ \} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で
$C_0(K) = \{\beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2\ ;\ \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}\ \} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

このとき $Z_1(K) = \{\alpha(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_0)\ ;\ \alpha \in \mathbb{Z}\}$ であることが分かる。なぜなら

示せ。

$C_2(K) = 0$ より $B_1(K) = \partial_2(C_2(K)) = 0$ なので

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$$

であり, $Z_0(K) = C_0(K)$ であり ($\partial_0(C_0(K)) = 0$ より), $B_0(K)$ の元は 0 とホモローグなので, $\partial_1(a_0 a_1), \partial_1(a_1 a_2), \partial_1(a_2 a_0) \in B_0(K)$ だから, $a_0 \sim a_1$, $a_1 \sim a_2$ で $a_2 \sim a_0$ である。すなわち $[a_0] = [a_1] = [a_2]$ であるから

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}$$

である。きちんと証明するには

$$\varphi : Z_0(K) \to \mathbb{Z}$$

を $c = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in Z_0(K)$ に対して, $\varphi(c) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ と定めると. φ は 全射準同型写像で, $\ker \varphi = B_0(K)$ であることが示される

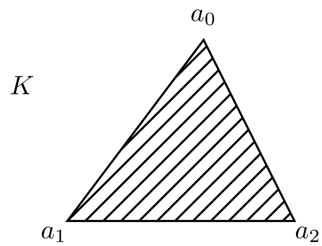
示せ。

ので準同型定理より

$$H_0(K) = Z_1(K)/B_1(K) \cong Z_1(K)/\ker \varphi \cong \mathbb{Z}$$

となる。

例 2 (円盤) D^2



$C_2(K) = \{\gamma a_0 a_1 a_2\ ;\ \gamma \in \mathbb{Z}\ \}$
$C_1(K) = \{\alpha_1 a_0 a_1 + \alpha_2 a_1 a_2 + \alpha_3 a_2 a_0\ ;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}\ \} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で
$C_0(K) = \{\beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2\ ;\ \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}\ \} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

$Z_2(K) = 0$ が分かるので

示せ。

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = 0$$

である。

また, 例 1と同様に

$Z_1(K) = \{\alpha(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_0)\ ;\ \alpha \in \mathbb{Z}\}$ であることが分かる。

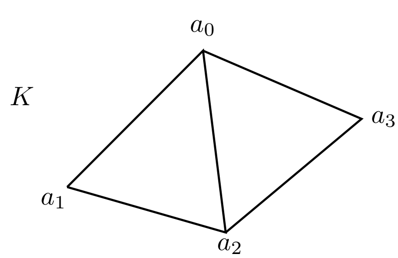
しかし $C_2(K)$ が 0 でないので $B_1(K)$ を求めると, $B_1(K) = \{\gamma(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_0)\ ;\ \gamma \in \mathbb{Z}\}$ なので

示せ。

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = 0$$

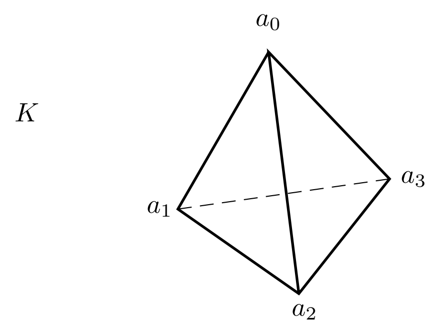
であり, $Z_0(K) = C_0(K)$ であり, $B_0(K)$ も例 1 と同様であるから, $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である。

例 3



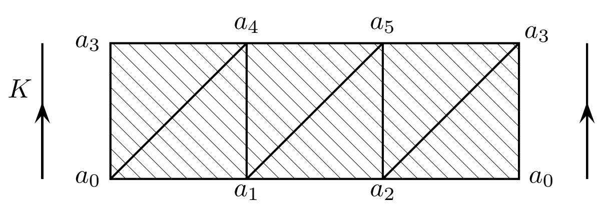
$C_1(K) = \langle a_0 a_1, a_1 a_2, a_2 a_0, a_3 a_0, a_2 a_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

例 4 球面 S^2



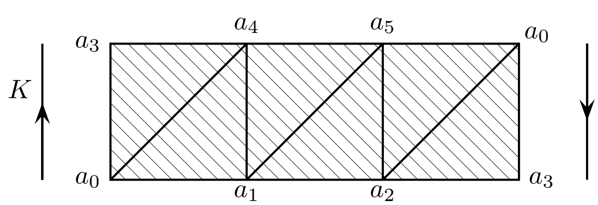
$C_2(K) = \langle a_0a_1a_2, a_0a_2a_3, a_0a_2a_1, a_1a_2a_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_0, a_3a_0, a_2a_3, a_3a_1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

例 5 アニュラス (Anulus) A



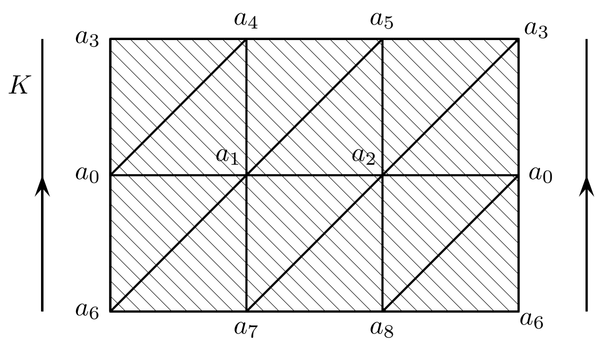
$C_2(K) = \langle a_3a_0a_4, a_4a_0a_1, a_4a_1a_5, a_5a_1a_2, a_5a_2a_3, a_3a_2a_0 \rangle \cong \mathbb{Z}^6$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_0, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_3, a_3a_0, a_4a_1, a_5a_2, a_0a_4, a_1a_5, a_2a_3 \rangle \cong \mathbb{Z}^{12}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5 \rangle \cong \mathbb{Z}^6$ である。

例 6 メビュスの帯 M



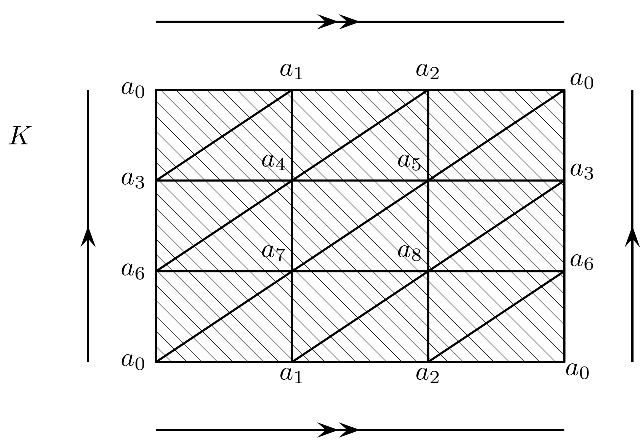
$C_2(K) = \langle a_3a_0a_4, a_4a_0a_1, a_4a_1a_5, a_5a_1a_2, a_5a_2a_0, a_0a_2a_3 \rangle \cong \mathbb{Z}^6$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_0, a_3a_0, a_4a_1, a_5a_2, a_0a_4, a_1a_5, a_2a_0 \rangle \cong \mathbb{Z}^{12}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5 \rangle \cong \mathbb{Z}^6$ である。

例 7 アニュラス (Anulus) A — 別の単体分解



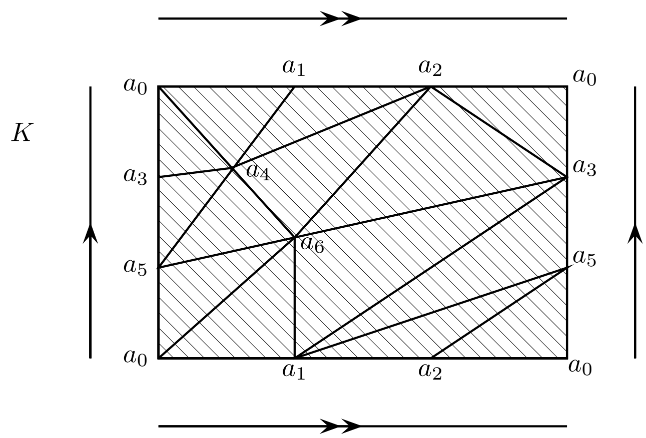
$C_2(K) = \langle a_3a_0a_4, a_4a_0a_1, a_4a_1a_5, a_5a_1a_2, a_5a_2a_3, a_3a_2a_0, a_0a_6a_1, a_1a_6a_7, a_1a_7a_2, a_2a_7a_8,$
$a_2a_8a_0, a_0a_8a_6\rangle \cong \mathbb{Z}^{12}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_0, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_3, a_6a_7, a_7a_8, a_8a_6, a_3a_0, a_0a_6, a_4a_1, a_1a_7, a_5a_2, a_2a_8,$
$a_0a_4, a_6a_1, a_1a_5, a_7a_2, a_2a_3, a_8a_0\rangle \cong \mathbb{Z}^{21}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\rangle \cong \mathbb{Z}^9$ である。

例 7 トーラス (Torus) T^2



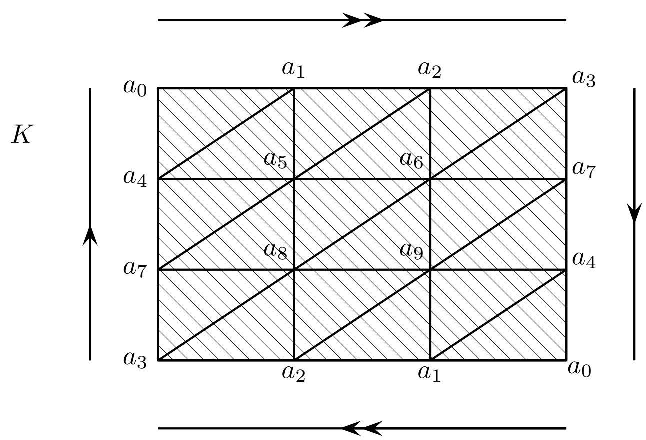
$C_2(K) = \langle a_0a_3a_1, a_1a_3a_4, a_1a_4a_2, a_2a_4a_5, a_2a_5a_0, a_0a_5a_3, a_3a_6a_4, a_4a_6a_7, a_4a_7a_5, a_5a_7a_8,$
$a_5a_8a_3, a_3a_8a_6, a_6a_0a_7, a_7a_0a_1, a_7a_1a_8, a_8a_1a_2, a_8a_2a_6, a_6a_2a_0\rangle \cong \mathbb{Z}^{18}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_0, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_3, a_6a_7, a_7a_8, a_8a_6, a_0a_3, a_3a_6, a_6a_0, a_1a_4, a_4a_7, a_7a_1,$
$a_2a_5, a_5a_8, a_8a_2, a_3a_1, a_6a_4, a_4a_2, a_0a_7, a_7a_5, a_5a_0, a_1a_8, a_8a_3, a_2a_6\rangle \cong \mathbb{Z}^{27}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\rangle \cong \mathbb{Z}^9$ である。

例 8 トーラス (Torus) T^2 — 別の単体分割



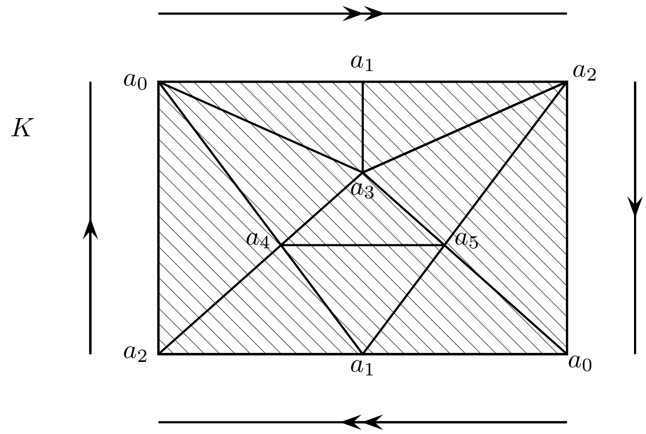
$C_2(K) = \langle a_0a_3a_4, a_0a_4a_1, a_1a_4a_2, a_3a_5a_4, a_4a_5a_6, a_2a_4a_6, a_2a_6a_3, a_2a_3a_0,$
$a_5a_0a_6, a_6a_0a_1, a_6a_1a_3, a_3a_1a_5, a_5a_1a_2, a_5a_2a_0\rangle \cong \mathbb{Z}^{14}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_0, a_0a_3, a_3a_5, a_5a_0, a_3a_4, a_4a_2, a_2a_3, a_0a_4, a_4a_6, a_5a_4, a_4a_1, a_5a_6, a_6a_3, a_0a_6,$
$a_6a_2, a_6a_1, a_1a_3, a_1a_5, a_2a_5\rangle \cong \mathbb{Z}^{21}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5, a_6\rangle \cong \mathbb{Z}^7$ である。

例 9 (実) 射影平面 P^2



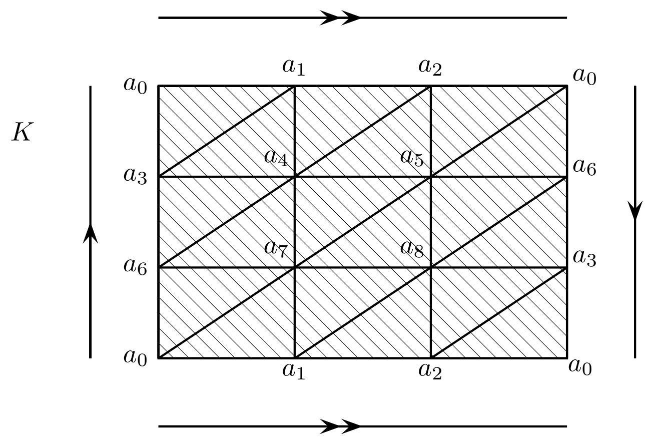
$C_2(K) = \langle a_0a_4a_1, a_1a_4a_5, a_1a_5a_2, a_2a_5a_6, a_2a_6a_3, a_3a_6a_7, a_4a_7a_5, a_5a_7a_8, a_5a_8a_6, a_6a_8a_9,$
$a_6a_9a_7, a_7a_9a_4, a_7a_3a_8, a_8a_3a_2, a_8a_2a_9, a_9a_2a_1, a_9a_1a_4, a_4a_1a_0\rangle \cong \mathbb{Z}^{18}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, a_4a_5, a_5a_6, a_6a_7, a_7a_8, a_8a_9, a_9a_4, a_0a_4, a_4a_7, a_7a_3, a_1a_5, a_5a_8, a_8a_2,$
$a_2a_6, a_6a_9, a_9a_1, a_4a_1, a_7a_5, a_5a_2, a_3a_8, a_8a_6, a_6a_3, a_2a_9, a_9a_7, a_1a_4\rangle \cong \mathbb{Z}^{27}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\rangle \cong \mathbb{Z}^{10}$ である。

例 10 (実) 射影平面 P^2 — 別の単体分割



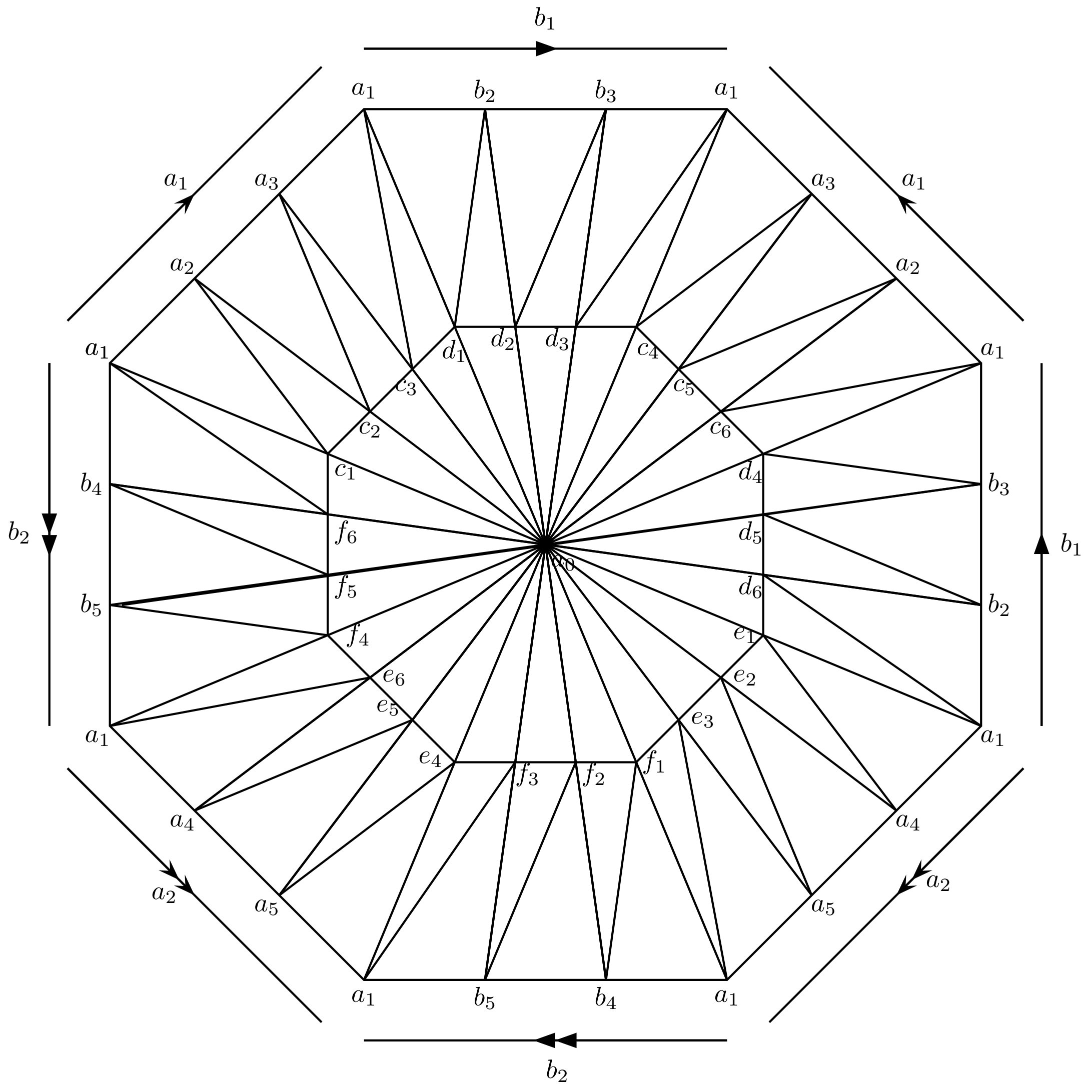
$C_2(K) = \langle a_0a_3a_1, a_1a_3a_2, a_0a_4a_3, a_0a_2a_4, a_3a_4a_5, a_3a_5a_2, a_2a_5a_0, a_4a_2a_1, a_4a_1a_5, a_5a_1a_0\rangle \cong \mathbb{Z}^{10}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_0a_2, a_0a_3, a_3a_2, a_1a_3, a_2a_4, a_4a_3, a_3a_5, a_5a_0, a_4a_5, a_0a_4, a_4a_1, a_1a_5, a_5a_2\rangle \cong \mathbb{Z}^{15}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5\rangle \cong \mathbb{Z}^6$ である。

例 11 クラインの壷 (Klein's bottle) K

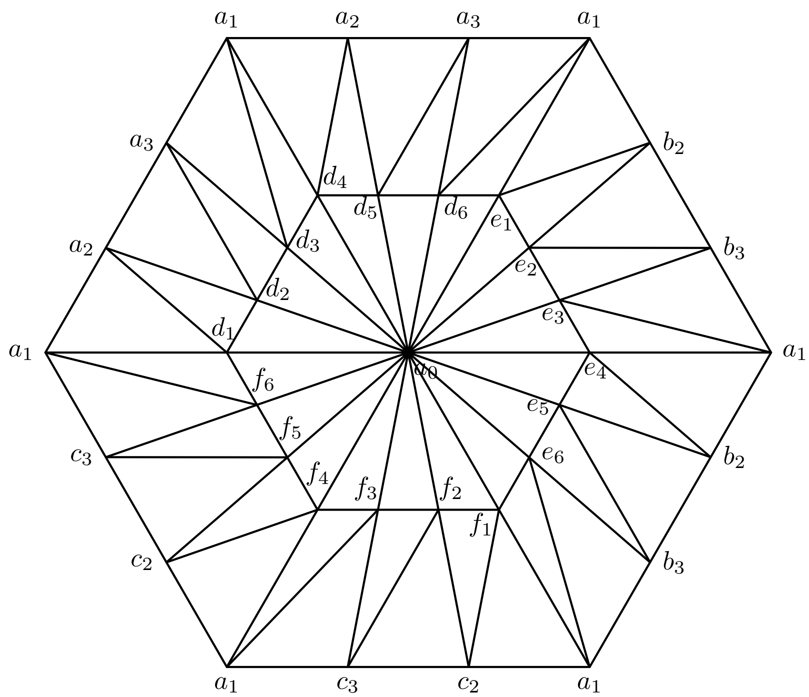


$C_2(K) = \langle a_0a_3a_1, a_1a_3a_4, a_1a_4a_2, a_2a_4a_5, a_2a_5a_0, a_0a_5a_6, a_3a_6a_4, a_4a_6a_7, a_4a_7a_5, a_5a_7a_8,$
$a_5a_8a_6, a_6a_8a_3, a_6a_0a_7, a_7a_0a_1, a_7a_1a_8, a_8a_1a_2, a_8a_2a_3, a_3a_2a_0\rangle \cong \mathbb{Z}^{18}$ で
$C_1(K) = \langle a_0a_1, a_1a_2, a_2a_0, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_6, a_6a_7, a_7a_8, a_8a_3, a_0a_3, a_3a_6, a_6a_0, a_1a_4, a_4a_7, a_7a_1,$
$a_2a_5, a_5a_8, a_8a_2, a_3a_1, a_6a_4, a_4a_2, a_0a_7, a_7a_5, a_5a_0, a_1a_8, a_8a_6, a_2a_3\rangle \cong \mathbb{Z}^{27}$ で
$C_0(K) = \langle a_0, a_1, a_2, a_3a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\rangle \cong \mathbb{Z}^9$ である。

例 12 種数 2 の向き付けられた閉曲面 K



例 13 種数 3 の向き付け不可能な閉曲面 K



例 14 種数 4 の向き付け不可能な閉曲面 K