第3章　ホモロジー群の計算

17　$H_1(K)$ の計算-基本群との関連で

定義 17.1 (グラフ)
1 次元複体を **グラフ (graph)** という。頂点全ての集合を V, 1-単体全ての集合を E とすると, グラフとは, V と E からなる集合で, 1-単体 e に対して, $\partial e = v_2 - v_1$ のとき, $e = v_1 v_2$ とかいて, v_1 と e あるいは, v_2 と e は ***adjacent* の関係にある** という。グラフ G を $=(V, E)$ と書くこともある。E の元のことを ***edge***, V の元のことを **点** ということもある。

定義 17.2
グラフ L 上の a と b を結ぶ **道 (path)** とは, つぎのような 1-単体の列 $a_0a_1, a_1a_2, \cdots, a_{s-1}a_s$ で $a_0 = a$, $a_s = b$ をみたすものである。
さらに, 1-単体が全て異なるとき, **半単純な道 (semi simple path)** といい, さらに, 頂点が全て異なるとき, **単純な道 (simple path)** という。特に, $a = b$ のとき, **サークル (circle)** あるいは **ループ (*loop*)** という。半単純, または単純なとき, それぞれ, 半単純な道, または単純な道等という。

定義 17.3 (木)
単純なサークルがないグラフ T を, **木 (tree)** であるという。

命題 17.4
次の 3 つの命題は同値である。

(**1**) グラフ G が, 連結な木である。
(**2**) G のどの 2 点をとってもそれらを結ぶ単純な道がただ 1 つ存在する。
(**3**) G は連結グラフで, $p = q + 1$ である。ここに, p は頂点の数, q は edge の数を表す。

断らないかぎり, 今後グラフは連結であると仮定して話を進める。

定義 17.5
グラフ L に対して, 部分グラフ T が **極大木 (maximum tree)** であるとは

(**1**) T が連結な木 (tree) である
(**2**) $L - T$ の任意の edge e に対して, $T \cup \{e\}$ は木 (tree) でない

をみたすときをいう。

命題 17.6
グラフ L に対して, 極大木 T が存在して T は L の全ての頂点を頂点として含む。

複体 K に対して, $L = K^{(1)}$ を考えると これはグラフである。よって L に対して 極大木 T をとる。これで準備ができたので, $Z_1(K)$ の生成元を次のように求めよう。
$\forall e \in L - T$ をとると $e = ab$ $(a, b; L$ の頂点) と表されるが b と a を結ぶ T 上の単純な道をとる。それを

$$a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, \cdots, a_{s-1}a_s \quad (a_0 = b, a_s = a)$$

とする。これに対して

$$ab + a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_{s-1}a_s$$

を考えると, これは $C_1(L) = C_1(K)$ の元であるが, これを $c(e)$ とかけば, $\partial_1(c(e)) = 0$ となるので,

$$c(e) \in Z_1(L) = Z_1(K)$$

ここで $L - T$ のすべての edges(1-単体) についてこの操作をおこなったものを

$$c(e_1), c(e_2), \ldots, c(e_s)$$

とすると, これらは $Z_1(K)$ で独立である。なぜなら,

$$\alpha_1 c(e_1) + \alpha_2 c(e_2) + \cdots \alpha_s c(e_s) = 0$$

とすると,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$$

であり, さらに $\forall z \in Z_1(K) = Z_1(L)$ をとると, $z = \displaystyle\sum_i^{\lambda} \alpha_i \sigma_i^1$ と表される (λ は K の 1-単体の数で, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, σ_i^1 ; K の 1-単体)。そこで, σ_i のなかで e_j に等しいものを $\sigma_{i(j)}$ とし, $z' = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \alpha_{i(j)} c(e_j)$ とおくと, $z - z' \in C_1(T)$ で, $\partial z' = 0$ で, $\partial z = 0$ (z はサイクル) だから, $\partial(z - z') = 0$ により, $z - z' = 0$ であるから, $z - z' \in Z_1(T)$ だから, $z - z' = 0$ より, $z = z' = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{i(j)} c(e_j)$ となり,

$$Z_1(K) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{s\text{ 個}}$$

であり, $c(e_1), c(e_2), \ldots, c(e_s)$ が生成元である。
次に $B_1(K)$ であるが, K の 2-単体 $\sigma^2 = abc$ に対して, $\partial\sigma^2 = ab + bc + ca$ であるので, $ab + bc + ca \sim 0$ である。このとき, ab, bc, ca のうち T に属していないもの e に対して, 前述の $c(e)$ を考える。すなわち

$$xy \quad \mapsto \quad \begin{cases} c(xy) & xy \quad \notin \quad T \quad \text{のとき,} \\ 0 & xy \quad \in \quad T \quad \text{のとき} \end{cases}$$

と対応させて, $c(ab) + c(bc) + c(ca)$ なる鎖 (cycle) を考えると,

$$c(ab) + c(bc) + c(ca) = ab + bc + ca$$

である。よって

$$r(abc) = c(ab) + c(bc) + c(ca) \sim 0$$

すべての K の 2-単体 $\sigma = abc$ に対して, $r(abc) = r(\sigma)$ を対応させたもので生成される加群が $B_1(K)$ だから

$$H_1(K) \cong Z_1(K)/B_1(K) \cong Z_1(K)/R, \qquad R = < r(\sigma)\ ;\ \sigma \text{ は } K \text{ の 2-単体} >$$

で求められる。但し, $< r(\sigma)\ ;\ \sigma$ は K の 2-単体 $>$ は, $\{\ r(\sigma)\ ;\ \sigma$ は K の 2-単体 $\}$ で生成される部分群である。

18　マイヤー・ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列

複体 K を考え, その部分複体 K_1, K_2 が $K = K_1 \cup K_2$ をみたすとすると,
$K_0 = K_1 \cap K_2$ は K_1, K_2 の部分複体となるが, このとき

$$\begin{tikzcd}
 & K_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
K_0 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & K \\
 & K_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

が, 可換な図式となる包含写像 i_1, i_2, j_1, j_2 が存在し, これらは単体写像とできる。
このとき

$$\begin{array}{lll}
\varphi_q & : & C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) \to C_q(K) \quad \text{を} \\
 & \varphi_q((c_1, c_2)) = j_{1\#}(c_1) + j_{2\#}(c_2) & , \\
\psi_q & : & C_q(K_0) \to C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) \quad \text{を} \\
 & & \psi_q(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c))
\end{array}$$

と定めると これらは鎖準同型である。

ここで, 繁雑さをさけるために, 誤解を生じない限り, 次のように書くことにする。
i_1, i_2, j_1, j_2 は 単射なので, これらで移ったものは同一視する。すなわち $i_1(c)$ を c と書く 等々とし,
また K の境界作用素を ∂_q で表し, その部分複体である K_1, K_2, K_0 の境界作用素も, 同じ記号 ∂_q で表すことにする。

ここで, 連結準同型を使って, 次のようにホモロジーの完全列が作られる。
まず $K_0 = K_1 \cap K_2$ の鎖複体は

$$C_q(K_0) = C_q(K_1 \cap K_2) = C_q(K_1) \cap C_q(K_2)$$

となり, $K = K_1 \cup K_2$ の鎖複体 $C_q(K)$ の元 c は

$$c = \sum_{i=1}^{\lambda_q} u_i \eta_i^q \quad (u_i \in \mathbb{Z},\ \eta_i^q; K \text{ の } q\text{-単体})$$

であるが,

$$c = \sum_i u_i \sigma_i^q + \sum_j u_j \tau_j^q \quad (u_i, u_j \in \mathbb{Z},\ \sigma_i^q; K_1 \text{ の } q\text{-単体},\ \tau_j^q; K_2 \text{ の } q\text{-単体})$$

と表現される (ユニークではない)。よって

$$C_q(K) = C_q(K_1 \cup K_2) = C_q(K_1) + C_q(K_2)$$

とみなせる。ここで $C'_q = C_q(K_1), \quad C_q{}'' = C_q(K_2)$ と表し,

$c \in C_q(K_0)$ に対して, ψ_q を $\psi_q(c) = (c, -c) \in C_q(K_1) \oplus C_q(K_2)$,

$(c_1, c_2) \in C_q(K_1) \oplus C_q(K_2)$ に対して, φ_q を $\varphi_q(c_1, c_2) = c_1 + c_2 \in C_q(K)$

と定義すると, $\varphi = \{\varphi_q\}$, $\psi = \{\psi_q\}$ は鎖準同型で,
$\mathbb{C}' = \{C'_q, \partial'_q\}, \quad \mathbb{C}'' = \{C''_q, \partial''_q\}$ とかけば,

$$0 \to \mathbb{C}' \cap \mathbb{C}'' \to \mathbb{C}' \oplus \mathbb{C}'' \to \mathbb{C}' + \mathbb{C}'' \to 0$$

は, 短完全列となる。

ここから連結準同型を使って作られるホモロジー群の次のような完全列が, マイヤー · ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列である。

φ_q, ψ_q から導かれる写像も,

$$\begin{aligned} \varphi_q &: H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \to H_q(K) \\ \psi_q &: H_q(K_0) \to H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \end{aligned}$$

と表すと, 次の列ができ,

$$\cdots \to H_q(K_0) \xrightarrow{\psi_q} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\varphi_q} H_q(K) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(K_0) \to \cdots$$

これは, 完全列になっていることがわかる。

これを, **マイヤー · ビートリス (*Mayer-Vietoris*) の完全列 (*exact sequence*)** という。

マイヤー · ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列の応用

例 18.1

r 個の m-単体 $\sigma_1^m, \sigma_2^m, \cdots, \sigma_r^m$ $(m \geq 2)$ が一つの頂点 a を共有していて, それ以外では共通点を持たない。すなわち $\sigma_i^m \cap \sigma_j^m = \{a\}$ $(i \neq j)$ であるとし (図 4 参照), $\sigma_1^m, \sigma_2^m, \cdots, \sigma_r^m$ の $m-1$ 次元以下の辺単体すべてからなる $m-1$ 次元複体を K_r とする。$K_1 = K(\partial\sigma_1^m)$ だから, 定理 12.6 によって,

$$H_q(K_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, m-1) \\ 0 & (q \neq 0, m-1) \end{cases}$$

である。

$$K_r = K_{r-1} \cup K(\partial\sigma_r^m), \qquad K_{r-1} \cap K(\partial\sigma_r^m) = \{a\}$$

であるから, $(K_r; K_{r-1}, K(\partial\sigma_r^m))$ に関するマイヤー · ビートリスの完全列

$$\cdots \to H_q(\{a\}) \xrightarrow{\psi_q} H_q(K_{r-1}) \oplus H_q(K(\partial\sigma_r^m)) \xrightarrow{\varphi_q} H_q(K_r) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(\{a\}) \to \cdots$$

を使えば, r に関する数学的帰納法によって,

$$H_q(K_r) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdot \oplus \mathbb{Z} \ (\mathbb{Z} \text{ の } r \text{ 個の直和}) & (q = m-1) \\ 0 & (q \neq 0, m-1) \end{cases}$$

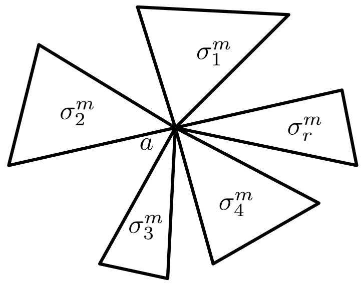

図 4: r-leafed rose

を得る。

マイヤー · ビートリスの完全列はホモロジー群を実際に計算するのにきわめて有効である。

19 複体対のホモロジー

複体 K とその部分複体 L に対して, $C_q(L)$ は $C_q(K)$ の部分加群なので, 商群

$$C_q(K)/C_q(L)$$

を考え, これを $C_q(K, L)$ で表すと,

$$0 \to C_q(L) \xrightarrow{i} C_q(K) \xrightarrow{j} C_q(K, L) \to 0$$

は簡単に分かるように, 短完全列であるので,

$$\cdots \to H_q(L) \to H_q(K) \to H_q(K, L) \to H_{q-1}(L) \to \cdots$$

は完全列である。これを複体対 (K, L) の完全列と言う。

この複体対のホモロジーの応用は多々あるがここでは述べない。各自学んでください。

20　マイヤー・ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列

複体 K を考え, その部分複体 K_1, K_2 が $K = K_1 \cup K_2$ をみたすとすると,
$K_0 = K_1 \cap K_2$ は K_1, K_2 の部分複体となるが, このとき

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ K_0 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & K \\ & K_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

が, 可換な図式となる包含写像 i_1, i_2, j_1, j_2 が存在し, これらは単体写像とできる。
このとき

$$\begin{array}{rcll} \varphi_q & : & C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) \to C_q(K) & \text{を} \\ & & \varphi_q((c_1, c_2)) = j_{1\#}(c_1) + j_{2\#}(c_2) & , \\ \psi_q & : & C_q(K_0) \to C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) & \text{を} \\ & & \psi_q(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c)) & \end{array}$$

と定めると これらは鎖準同型である。

ここで, 繁雑さをさけるために, 誤解を生じない限り, 次のように書くことにする。
i_1, i_2, j_1, j_2 は 単射なので, これらで移ったものは同一視する。すなわち $i_1(c)$ を c と書く 等々とし,
また K の境界作用素を ∂_q で表し, その部分複体である K_1, K_2, K_0 の境界作用素も, 同じ記号 ∂_q で表すことにする。

次に $\Delta_q : Z_q(K) \to Z_{q-1}(K_0)$ を次のように定める。
$\forall z \in Z_q(K)$ をとると,
z は $z = c_1 + c_2$ $(c_1 \in C_q(K_1), c_2 \in C_q(K_2))$ とかける。ただし, この表し方はユニークではないことに注意しておく。
このとき, $\partial_q z = 0$, すなわち $\partial_q(c_1) + \partial_q(c_2) = 0$ だから,
$\partial_q(c_1) = -\partial_q(c_2)$ である。そして,
$\partial_q(c_1) \in C_{q-1}(K_1)$ かつ $-\partial_q(c_2) \in C_{q-1}(K_2)$ で, $C_{q-1}(K_1) \cap C_{q-1}(K_2) = C_{q-1}(K_0)$ だから,
$\partial_q(c_1) = -\partial_q(c_2) \in C_{q-1}(K_0)$, すなわち $\exists c_0 \in C_{q-1}(K_0)$; $c_0 = \partial_q(c_1) = -\partial_q(c_2)$ となる。

このとき, $\partial_{q-1}(c_0) = \partial_{q-1}\partial_q(c_1)$ だから, $c_0 \in Z_{q-1}(K_0)$ である。
そこで, この c_0 によって, Δ_q を $\Delta_q(z) = c_0$ と定める。さらに, Δ_q から導かれる $H_q(K)$ から $H_{q-1}(K_0)$ への写像を

$$\Delta_q([z]) = [c_0]$$

と定める (同じ記号 Δ_q で表す)。(well-defined は後で示される。)

$\boxed{\text{参考図}}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & C_{q+1}(K_0) & \longrightarrow & C_q(K_0) & \longrightarrow & C_{q-1}(K_0) & \longrightarrow \\
 & i_1 \swarrow \quad \searrow i_2 & & i_1 \swarrow \quad \searrow i_2 & & i_1 \swarrow \quad \searrow i_2 & \\
\to & C_{q+1}(K_1) \oplus C_{q+1}(K_2) & \to & C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) & \to & C_{q-1}(K_1) \oplus C_{q-1}(K_2) & \to \\
 & j_1 \searrow \quad \swarrow j_2 & & j_1 \searrow \quad \swarrow j_2 & & j_1 \searrow \quad \swarrow j_2 & \\
\longrightarrow & C_{q+1}(K) & \longrightarrow & C_q(K) & \longrightarrow & C_{q-1}(K) & \longrightarrow
\end{array}
$$

また φ_q, ψ_q から導かれる写像も,

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_q & : & H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \to H_q(K) \\
\psi_q & : & H_q(K_0) \to H_q(K_1) \oplus H_q(K_2)
\end{array}
$$

と表すと, 次の列ができ,

$$\cdots \to H_q(K_0) \xrightarrow{\psi_q} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\varphi_q} H_q(K) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(K_0) \to \cdots$$

これは, 完全列になっていることがわかる。
これを, <u>**マイヤー · ビートリス** (***Mayer-Vietoris***) **の完全列** (***exact sequence***)</u> という。
<u>証明</u>　まず Δ_q の定義が well-defined であることを示す。これは, つぎの二つを示せばよい。
(1) <u>c_1, c_2 の取り方によらない</u>
z が次のように２つの表しかたがあったとする。
$z = c_1 + c_2 = c'_1 + c'_2 \quad (c_1, c'_1 \in C_q(K_1),\ c_2, c'_2 \in C_q(K_2))$
このとき, $c_1 - c'_1 = -c_2 + c'_2$ だから,
$c_1 - c'_1 \in C_q(K_1)$ かつ $-c_2 + c'_2 \in C_q(K_2)$ であって, $C_q(K_1) \cap C_q(K_2) = C_q(K_0)$ だから
$c_1 - c'_1 = -c_2 + c'_2 \in C_q(K_0)$ となる。よって,
$\partial_q(c_1) - \partial_q(c'_1) \in B_{q-1}(K_0)$, すなわち $\partial_q(c_1) \sim \partial_q(c'_1)$ であるから, $c_0 \sim c'_0$ である。
(2) <u>z の取り方によらない</u>
$\forall z' \in Z_q(K)$ を $z' \sim z$ であるようにとる。そして, z' もまた, $z' = c'_1 + c'_2, \quad (c'_1 \in C_q(K_1),\ c'_2 \in C_q(K_2))$ と表する。
仮定より, $z - z' \in B_q(K)$ であり, $z - z' = (c_1 - c'_1) + (c_2 - c'_2)$ だから,
$\exists \widetilde{c}_1 \in C_{q+1}(K_1),\ \exists \widetilde{c}_2 \in C_{q+1}(K_2)$; $z - z' = \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2)$ となる。
ここで $(c_1 + c_2) - (c'_1 + c'_2) = \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2) = \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1) + \partial_{q+1}(\widetilde{c}_2)$ より,
$c_1 - c'_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1) = -c_2 + c'_2 + \partial_{q+1}(\widetilde{c}_2)$ であって,
$c_1 - c'_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1) \in C_q(K_1), \quad -c_2 + c'_2 + \partial_{q+1}(\widetilde{c}_2) \in C_q(K_2)$ より,
$c_1 - c'_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1) = -c_2 + c'_2 + \partial_{q+1}(\widetilde{c}_2) \in C_q(K_0)$ で, これを ∂_q で写すと,

$$
\begin{array}{rcl}
\partial_q(c_1 - c'_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1)) & = & \partial_q(c_1) - \partial_q(c'_1) - \partial_q\partial_{q+1}(\widetilde{c}_1)) \\
 & = & \partial_q(c_1) - \partial_q(c'_1) \in B_q(K_0)
\end{array}
$$

となるから, K_0 において, $\partial_q(c_1) \sim \partial_q(c'_1)$ となる。よって z と z' から定まる c_0, c'_0 は同じである。

次に, この列が完全列であることを示す。

$\boxed{\text{参考図}}$

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1}(K) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} C_q(K_0) \xrightarrow{\psi_q} C_q(K_1) \oplus Cq(K_2) \xrightarrow{\varphi_q} C_q(K) \longrightarrow \cdots$$

$\underline{Im\ \psi_q = Ker\ \varphi_q}$ であること
$\forall[z_0] \in H_q(K_0)$ をとると, $\varphi_q\psi_q([z_0]) = \varphi_q(i_{1*}[z_0], -i_{2*}[z_0]) = (j_1 i_1)_*[z_0] - (j_2 i_2)_*[z_0] = 0$ だから,
$Im\ \psi_q \subset Ker\ \varphi_q$ である。
　また, $\forall([z_1],[z_2]) \in Ker\ \varphi_q$ をとると,
$\varphi_q([z_1],[z_2]) = j_{1*}[z_1] + j_{2*}[z_2] = 0$ だから,
$z_1 + z_2 \in Z_q(K)$ は, $H_q(K)$ のホモロジー類として, $[z_1 + z_2] = 0$ である。
よって, $\exists\widetilde{c} \in C_{q+1}(K)$; $\partial_{q+1}\widetilde{c} = z_1 + z_2$ となる。この $\widetilde{c}$ を,
$\widetilde{c} = \widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 \quad (\widetilde{c}_1 \in C_{q+1}(K_1),\ \widetilde{c}_2 \in C_{q+1}(K_2))$ と表し, $z_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1)$ を考えると,
$z_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1) = -z_2 + \partial_{q+1}(\widetilde{c}_2) \in C_q(K_1) \cap C_q(K_2) = C_q(K_0)$ であって,
$\partial_q(z_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1)) = 0$ だから, $z_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1) \in Z_q(K_0)$ であり, さらに,

$$\begin{aligned}\psi_q([z_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1)]) &= (i_{1*}([z_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1)]), -i_{2*}([-z_2 + \partial_{q+1}(\widetilde{c}_2)])) \\ &= (i_{1*}([z_1 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_1)]), i_{2*}([z_2 - \partial_{q+1}(\widetilde{c}_2)])) = ([z_1],[z_2])\end{aligned}$$

となるので, $([z_1],[z_2]) \in Im\ \psi_q$ となる。よって, $Ker\ \varphi_q \subset Im\ \psi_q$ が成り立つ。
　$\underline{Im\ \Delta_q = Ker\ \psi_{q-1}}$ であること
$\forall[z] \in H_q(K)$ をとると, $z = c_1 + c_2 \quad (c_1 \in C_q(K_1),\ c_2 \in C_q(K_2))$ と表されるので,
$\psi_{q-1}(\Delta_q[z]) = \psi_{q-1}([\partial_q(c_1)]) = (i_{1*}([\partial_q(c_1)]), -i_{2*}([\partial_q(c_1)]))$ であるが,
$i_{1\#}(\partial_q(c_1)) \in B_{q-1}(K_1), \quad i_{2\#}(\partial_q(c_1)) = -i_{2\#}(\partial_q(c_2)) \in B_{q-1}(K_2)$ だから, $\psi_{q-1}(\Delta_q([z])) = 0$ である。
したがって, $Im\ \Delta_q \subset Ker\ \psi_{q-1}$ となる。
　また, $\forall[z_0] \in Ker\ \psi_{q-1}$ をとると, $\psi_{q-1}([z_0]) = 0$ より, $i_{1*}([z_0]) = 0$, $i_{2*}([z_0]) = 0$ であるから,

$$\exists\widetilde{c}_1 \in C_q(K_1)\ ,\ \exists\widetilde{c}_2 \in C_q(K_2) \quad ; \quad \partial_q(\widetilde{c}_1) = z_0\ ,\ \partial_q(\widetilde{c}_2) = -z_0$$

となる。ここに, $\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 \in C_q(K)$ は $\partial_q(\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2) = z_0 - z_0 = 0$ だから, $\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 \in Z_q(K)$ であって,

$$\Delta_q([\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2]) = [\partial_q(\widetilde{c}_1)] = [z_0]$$

となるから, $[z_0] \in Im\ \Delta_q$ である。したがって, $Ker\ \psi_{q-1} \subset Im\ \Delta_q$ が成り立つ。
　$\underline{Im\ \varphi_q = Ker\ \Delta_q}$ であること
$\forall([z_1],[z_2]) \in H_q(K_1) \oplus H_q(K_2)$ をとると, Δ_q の定義より,
$\Delta_q\varphi_q([z_1],[z_2]) = \Delta_q([j_{1\#}(z_1) + j_{2\#}(z_2)]) = [\partial_q(j_{1\#}(z_1))] = 0$ だから, $Im\ \varphi_q \subset \Delta_q$ である。
　また, $\forall[z] \in Ker\ \Delta_q\ (q \geq 1)$ をとると, $z = c_1 + c_2\ (c_1 \in C_q(K_1),\ c_2 \in C_q(K_2))$ と表される。
すると, Δ_q の定義は, $\Delta_q([z]) = [c_0] = [\partial_q(c_1)]$ であり, $\Delta_q([z]) = 0$ より, $\partial_q(c_1)$ は, $H_{q-1}(K_0)$ のホモロジー類として, $[\partial_q(c_1)] = 0$ であるから, $c_0 \in C_q(K_0)$ で, $\partial_q(c_0) = \partial_q(c_1)$ となるものが存在する。
そこで, z を $z = (c_1 - c_0) + (c_2 + c_0) \quad (c_1 - c_0 \in C_q(K_1),\ c_2 + C_0 \in C_q(K_2))$ と分解すれば,

$\partial_q(c_1 - c_0) = \partial_q(c_1) - \partial_q(c_0) = 0$ だから, $c_1 - c_0 \in Z_q(K_1)$ であり,
$\partial(c_2 + c_0) = \partial_q(z) - \partial_q(c_1 - c_0) = 0$ だから, $c_2 + c_0 \in Z_q(K_2)$ であり,

$$\varphi_q([c_1 - c_0], [c_2 + c_0]) = [(c_1 - c_0) + (c_2 + c_0)] = [z]$$

となるから, $[z] \in Im\ \varphi_q$ である。よって, $Ker\ \Delta_q \subset Im\ \varphi_q$ が成り立つ。

$q = 0$ の場合には, φ_0 が上への写像であることは明らかであろう。 □

実は, 連結準同型を使っても同じことを証明できる。それを参考までに紹介しておこう。
まず $K_0 = K_1 \cap K_2$ の鎖複体は

$$C_q(K_0) = C_q(K_1 \cap K_2) = C_q(K_1) \cap C_q(K_2)$$

となり, $K = K_1 \cup K_2$ の鎖複体 $C_q(K)$ の元 c は

$$c = \sum_{i=1}^{\lambda_q} u_i \eta_i^q \quad (u_i \in \mathbb{Z},\ \eta_i^q; K \text{ の } q\text{-単体})$$

であるが,

$$c = \sum_i u_i \sigma_i^q + \sum_j u_j \tau_j^q \quad (u_i, u_j \in \mathbb{Z},\ \sigma_i^q; K_1 \text{ の } q\text{-単体},\ \tau_j^q; K_2 \text{ の } q\text{-単体})$$

と表現される (ユニークではない)。よって

$$C_q(K) = C_q(K_1 \cup K_2) = C_q(K_1) + C_q(K_2)$$

とみなせる。ここで $C_q' = C_q(K_1), \quad C_q'' = C_q(K_2)$ と表し,

$c \in C_q(K_0)$ に対して, ψ_q を $\psi_q(c) = (c, -c) \in C_q(K_1) \oplus C_q(K_2)$,

$(c_1, c_2) \in C_q(K_1) \oplus C_q(K_2)$ に対して, φ_q を $\varphi_q(c_1, c_2) = c_1 + c_2 \in C_q(K)$

と定義すると, $\varphi = \{\varphi_q\}$, $\psi = \{\psi_q\}$ は鎖準同型で,
$\mathbb{C}' = \{C_q', \partial_q'\}, \quad \mathbb{C}'' = \{C_q'', \partial_q''\}$ とかけば,

$$0 \to \mathbb{C}' \cap \mathbb{C}'' \to \mathbb{C}' \oplus \mathbb{C}'' \to \mathbb{C}' + \mathbb{C}'' \to 0$$

は, 短完全列となる。

ここから連結準同型を使って作られるホモロジー群の完全列が, マイヤー · ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列である。

21　マイヤー · ビートリス (Mayer-Vietoris) の完全列の応用

例 21.1

r 個の m-単体 $\sigma_1^m, \sigma_2^m, \cdots, \sigma_r^m$ $(m \geq 2)$ が一つの頂点 a を共有していて, それ以外では共通点を持たない。すなわち $\sigma_i^m \cap \sigma_j^m = \{a\}$ $(i \neq j)$ であるとし (図 4 参照), $\sigma_1^m, \sigma_2^m, \cdots, \sigma_r^m$ の $m-1$ 次元以下の辺単体すべてからなる $m-1$ 次元複体を K_r とする。$K_1 = K(\partial\sigma_1^m)$ だから, 定理 12.6 によって,

$$H_q(K_1) \quad = \quad \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, m-1) \\ 0 & (q \neq 0, m-1) \end{cases}$$

である。

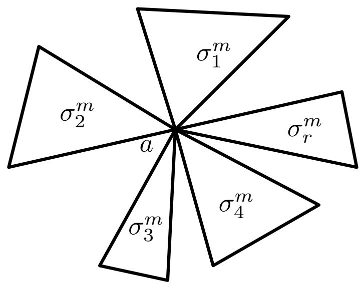

図 5:　r-leafed rose

$$K_r = K_{r-1} \cup K(\partial\sigma_r^m), \qquad K_{r-1} \cap K(\partial\sigma_r^m) = \{a\}$$

であるから, $(K_r; K_{r-1}, K(\partial\sigma_r^m))$ に関するマイヤー · ビートリスの完全列

$$\cdots \to H_q(\{a\}) \xrightarrow{\psi_q} H_q(K_{r-1}) \oplus H_q(K(\partial\sigma_r^m)) \xrightarrow{\varphi_q} H_q(K_r) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(\{a\}) \to \cdots$$

を使えば, r に関する数学的帰納法によって,

$$H_q(K_r) \quad = \quad \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdot \oplus \mathbb{Z} \ (\mathbb{Z} \text{ の } r \text{ 個の直和}) & (q = m-1) \\ 0 & (q \neq 0, m-1) \end{cases}$$

を得る。

マイヤー · ビートリスの完全列はホモロジー群を実際に計算するのにきわめて有効である。そればかりか、複体 K とその重心細分 K' のホモロジー群が同型であることを, 次のように, マイヤー · ビートリスの完全列を使って示せる。

K を複体, K' をその重心細分とする。K の鎖群 $\{C_q(K)\}$ より, K' の鎖群 $\{C_q(K')\}$ への鎖準同型

$$\{\mathfrak{sd}_q\} : \{C_q(K)\} \to \{C_q(K')\}$$

を, 例 6.7 であげておいたが, ここで詳しく示そう。すなわち, 次元 q に関する帰納法で次のように定義する。

$q=0$ の場合には, a_i を K の頂点とすれば, a_i はまた K' の頂点でもあることより,

$$\mathfrak{sd}_0 : C_0(K) \to C_0(K')$$

を自然な単射準同型, すなわち

$$\mathfrak{sd}(\sum_i \gamma_i a_i) = \sum_i \gamma_i a_i$$

と定義する。さらに, 準同型 $\mathfrak{sd}_{q-1} : C_{q-1}(K) \to C_{q-1}(K')$ が定義されていて,

$$\mathfrak{sd}(\sigma^{q-1}) \in C_{q-1}(K'(\sigma^{q-1})) \quad (q=1 \text{ のとき, この仮定は明らかにみたされている})$$

であるとして, q に関して帰納的に準同型

$$\mathfrak{sd}_q : C_q(K) \to C_q(K')$$

を, $\sigma^q = a_0 a_1 \cdots a_q$ に対して,

$$\mathfrak{sd}_q(a_0 a_1 \cdots a_q) = b_{\sigma^q} * (\mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(a_0 a_1 \cdots a_q))) \qquad (b_{\sigma^q} \text{ は } \sigma^q \text{ の重心を表す。})$$

と定義し (上述の仮定からこの右辺の結は確かに存在する)。
$\sum_i \gamma_i \sigma_i^q \in C_q(K)$ に対して,

$$\mathfrak{sd}_q(\sum_i \gamma_i \sigma_i^q) = \sum_i \gamma_i (\mathfrak{sd}_q(\sigma_i^q))$$

と定義する。
たとえば $q=1$ の場合は, $\sigma = \sigma^1 = a_0 a_1$ とすると,

$$\mathfrak{sd}_1(a_0 a_1) = b_{\sigma^1} a_1 - b_{\sigma^1} a_0$$

であり (図 6), $q=2$ の場合は, $\sigma = \sigma^2 = a_0 a_1 a_2$ とし, $\sigma_0 = a_1 a_2$, $\sigma_1 = a_0 a_2$, $\sigma_2 = a_0 a_1$ とおくと,
$\mathfrak{sd}_2(a_0 a_1 a_2)$

$$\begin{aligned}
&= b_\sigma * (\mathfrak{sd}_1(a_1 a_2 - a_0 a_2 + a_0 a_1)) \\
&= b_\sigma * (b_{\sigma_0} a_2 - b_{\sigma_0} a_1 - b_{\sigma_1} a_2 + b_{\sigma_1} a_0 + b_{\sigma_2} a_1 - b_{\sigma_2} a_0) \\
&= b_\sigma b_{\sigma_0} a_2 - b_\sigma b_{\sigma_0} a_1 - b_\sigma b_{\sigma_1} a_2 + b_\sigma b_{\sigma_1} a_0 + b_\sigma b_{\sigma_2} a_1 - b_\sigma b_{\sigma_2} a_0
\end{aligned}$$

である (図 6)。

一般に, $\mathfrak{sd}_q(\sigma^q)$ は, σ^q を重心細分してえられた各 q-単体に $[\sigma]$ の向きからきまる向きを定めたものの和である。したがって, $\mathfrak{sd}_q(\sigma^q) \in C_q(K'(\sigma^q))$ となっている。

$\{C_q(K')\}$ に関する境界準同型を

$$\partial'_q : C_q(K') \to C_{q-1}(K') \qquad (q = 0, 1, \cdots)$$

とする。

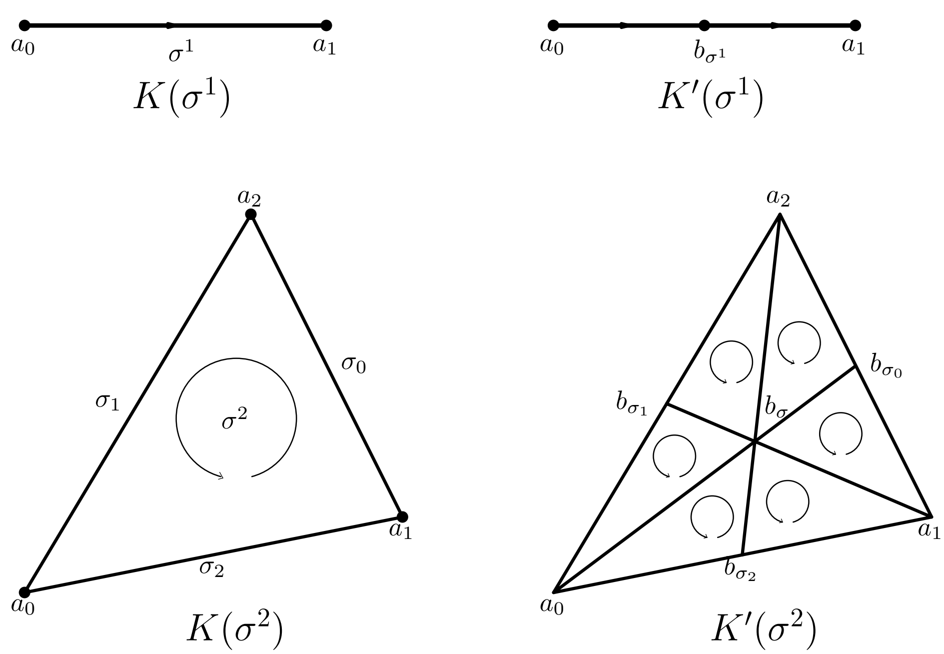

図 6: K から K' への鎖準同型

補題 21.2 $c \in C_q(K)$ $(q = 1, 2, \cdots))$ に対して,

$$\partial'_q(\mathfrak{sd}_q(c)) = \mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(c))$$

である。

<u>証明</u> $c = \sigma^q = a_0a_1\cdots a_q$ の場合について証明すればよいことは明らかであろう。
$c = \sigma = \sigma^1 = a_0a_1$ に対しては,

$$\partial'_1(\mathfrak{sd}_1(a_0a_1)) = \partial'_1(b_\sigma a_1 - b_\sigma a_0) = a_1 - a_0 = \mathfrak{sd}_0(\partial_1(a_0a_1))$$

だからよい。つぎに,

$$\partial'_{q-1}(\mathfrak{sd}_{q-1}(c)) = \mathfrak{sd}_{q-2}(\partial_{q-1}(c)) \quad (c \in C_{q-1}(K)$$

であると仮定すれば, $\sigma = \sigma^q = a_0a_1\cdots a_q$ とし, 補題 12.2 をつかうと,
$\partial'_q(\mathfrak{sd}_q(a_0a_1\cdots a_q))$

$$\begin{aligned}
&= \partial'_q(b_{\sigma^q} * \mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(a_0a_1\cdots a_q))) \\
&= \mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(a_0a_1\cdots a_q)) - b_\sigma * (\partial'_{q-1}(\mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(a_0a_1\cdots a_q)))) \\
&= \mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(a_0a_1\cdots a_q)) - b_\sigma * (\mathfrak{sd}_{q-2}(\partial_{q-1}\partial_q(a_0a_1\cdots a_q))) \\
&= \mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(a_0a_1\cdots a_q))
\end{aligned}$$

となるから, q に関する数学的帰納法によって補題が成り立つ。 $\square$

補題 21.2 によって, $\mathfrak{sd}_q : C_q(K) \to C_q(K')$ $(q = 0, 1,)$ は, 鎖準同型 $\mathfrak{sd}_q : C_q(K) \to C_q(K')$ を形成する。

定理 21.3
鎮準同型 $\mathfrak{sd}_q : C_q(k) \to C_q(K')$ からきまるホモロジー群の準同型

$$\mathfrak{sd}_{*q} : H_q(K) \to H_q(K')\ (q = 0, 1, \cdots)$$

は同型である。

<u>証明</u>　K が 0 次元複体の場合は, $K = K'$ で, $\mathfrak{sd}_0$ は恒等写像だから定理は明らかに成り立つ。したがって, K の次元に関する数学的帰納法によって定理を証明することとし, $(m-1)$ 次元複体に対して定理が成り立つと仮定して, m 次元複体 K に対して定理が成り立つことを証明しよう。
K の $(m-1)$ 次元切片を $K^{(m-1)}$, K の m-単体を $\sigma_1^m, \sigma_2^m, \cdots, \sigma_r^m$ とすると,

$$K = K^{(m-1)} \cup \sigma_1^m \cup \sigma_2^m \cup \cdots \cup \sigma_r^m$$

である。いま, $K_0 = K^{(m-1)}$, $K_i = K_0 \cup \sigma_1^m \cup \sigma_2^m \cup \cdots \cup \sigma_i^m\ (i = 1, 2, \cdots, r)$ とすると, K_0 および $K_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$ は K の部分複体である。
K_0 に対しては帰納法の仮定から定理が成り立つ。
次に K_{i-1} に対しては定理は成り立つと仮定して, $K_i\ (1 \leq i \leq r)$ について定理が成り立つことを証明しよう。
これが証明されれば, i についての数学的帰納法によって, $K = K_r$ について定理が成り立つことになる。
K_{i-1} と $K(\sigma_i^m)$ はともに K_i の部分複体で, $K_i = K_{i-1} \cup K(\sigma_i^m)$ である。
また K'_{i-1} と $K'(\sigma_i^m)$ はともに K'_i の部分複体で, $K'_i = K'_{i-1} \cup K'(\sigma_i^m)$ である。
$(K_i; K_{i-1}, K(\sigma_i^m))$ および $(K'_i; K'_{i-1}, K'(\sigma_i^m))$ に関するマイヤー・ビートリス完全列と, 準同型

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{sd}_* : H_*(K_i) \to H_*(K'_i),\\
&\mathfrak{sd}_* : H_*(K_{i-1} \cap K(\sigma_i^m)) \to H_*((K_{i-1} \cap K(\sigma_i^m))') = H_*(K'_{i-1}) \cap K'(\sigma_i^m)),\\
&\mathfrak{sd}_* \oplus \mathfrak{sd}_* : H_*(K_{i-1}) \oplus H_*(K) \to H_*(K'_{i-1}) \oplus H_*(K'(\sigma_i^m)),\\
&\qquad (\text{ ただし } (\mathfrak{sd}_* \oplus \mathfrak{sd}_*)([z_1], [z_2]) = (\mathfrak{sd}_*([z_1]), \mathfrak{sd}_*([z_2])) \text{ である。})
\end{aligned}$$

とから構成される図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(K_{i-1} \cap K(\sigma_i^m)) \arrow[r, "\psi_q"] \arrow[d, "\mathfrak{sd}_{*q}"] & H_q(K_{i-1}) \oplus H_q(K(\sigma_i^m)) \arrow[r, "\varphi_q"] \arrow[d, "\mathfrak{sd}_{*q} \oplus \mathfrak{sd}_{*q}"] & H_q(K_i) \arrow[r, "\Delta_q"] \arrow[d, "\mathfrak{sd}_{*q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(K'_{i-1} \cap K'(\sigma_i^m)) \arrow[r, "\psi_q"] & H_q(K'_{i-1}) \oplus H_q(K'(\sigma_i^m)) \arrow[r, "\varphi_q"] & H_q(K'_i) \arrow[r, "\Delta_q"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

は, マイヤー・ビートリス完全列の定義と $\mathfrak{sd}_q$ の定義から直ちにわかるように, 可換な図式である。たとえば, $H_q(K_i) \ni [z]$, $z = c_1 + c_2\ (c_1 \in C_q(K_{i-1}), c_2 \in C_q(K(\sigma_i^m)))$ とすると,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sd}_{*q}\Delta_q([z]) &= \mathfrak{sd}_{*q}([\partial_q(c_1)]) = [\mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(c_1))],\\
\Delta_q\mathfrak{sd}_{*q}([z]) &= \Delta_q([\mathfrak{sd}_q(z)]) = \Delta_q([\mathfrak{sd}_q(c_1) + \mathfrak{sd}_q(c_2)]) = [\partial'_q\mathfrak{sd}_q(c_1)] = [\mathfrak{sd}_{q-1}(\partial_q(c_1))]
\end{aligned}$$

だから,

$$\mathfrak{sd}_{*q}\Delta_q = \Delta_q\mathfrak{sd}_{*q}$$

である。その他の場合はほとんど自明であろう。

ここで, 帰納法の仮定から,

$$\mathfrak{sd}_{*q} : H_q(K_{i-1}) \to H_q(K'_{i-1}) \ (q = 0, 1, \cdots, m)$$

は同型であり, $K_{i-1} \cap K(\sigma_i^m)$ は $(m-1)$ 次元複体であるから帰納法の仮定により,

$$\mathfrak{sd}_{*q} : H_q(K_{i-1} \cap K(\sigma_i^m)) \to H_q(K'_{i-1} \cap K'(\sigma_i^m)) \quad (q = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

は同型である。また, $K(\sigma_i^m)$, $K'(\sigma_i^m)$ は非輪状であるから (定理 12.6),

$$\mathfrak{sd}_{*q} : H_q(K(\sigma_i^m)) \to H_q(K'(\sigma_i^m)) \ (q = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

は同型である。したがって上記の図式に 5 項補助定理 (定理 15.1) を適用すれば,

$$\mathfrak{sd}_{*q} : H_q(K_i) \to H_q(K'_i) \ (q = 0, 1, 2, \cdots)$$

は同型である。 □

22 複体対のホモロジー

複体 K とその部分複体 L に対して, $C_q(L)$ は $C_q(K)$ の部分加群なので, 商群

$$C_q(K)/C_q(L)$$

を考え, これを $C_q(K, L)$ で表すと,

$$0 \to C_q(L) \xrightarrow{i} C_q(K) \xrightarrow{j} C_q(K, L) \to 0$$

は簡単に分かるように, 短完全列であるので,

$$\cdots \to H_q(L) \to H_q(K) \to H_q(K, L) \to H_{q-1}(L) \to \cdots$$

は完全列である。これを複体対 (K, L) の完全列と言う。

この複体対のホモロジーの応用は多々あるがここでは述べない。各自学んでください。