第2章　ホモロジー群とBetti数

7　鎖(chain)

いくつかの向きの付いた r-単体の集まりを表すために, r-鎖 (chain) と呼ばれているものを, 次のように定義しよう。
K を n 次元単体的複体とし, 各 r-単体に向きを与えておく (K は向きの付いた複体)。
向きづけられた単体をもとにして 複体 K における chain(鎖) の定義を次のように与える。

定義 7.1 複体 K によって定まる次のような形式的な表現

$$c^r = \alpha_1\sigma_1^r + \alpha_2\sigma_2^r + \cdots + \alpha_\lambda\sigma_\lambda^r \qquad (\alpha_i \text{ は整数}, \ \sigma_i^r \text{ は } r \text{ 単体})$$

を K の <u>r-**鎖** (**r-chain**)</u> と言う。ただし 2 つの r-鎖

$$c_1^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\alpha_i\sigma_i^r \quad (\alpha_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i^r \text{ は } r \text{ 単体})$$
$$c_2^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\beta_i\sigma_i^r \quad (\beta_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i^r \text{ は } r \text{ 単体})$$

が等しいとは,

$$\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_i = \beta_i, \cdots, \alpha_\lambda = \beta_\lambda$$

を意味するとする。

次に 2 つの r-鎖 $c_1^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\alpha_i\sigma_i^r$, $c_2^r = \sum_{i=1}^{\lambda}\beta_i\sigma_i^r$ $(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}, \ \sigma_i^r \text{ は } r\text{-単体})$ と, 整数 s に対して, 和, 差, 整数倍を

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} c_1^r + c_2^r & = & \sum_{i=1}^{\lambda}(\alpha_i + \beta_i)\sigma_i^r \\ c_1^r - c_2^r & = & \sum_{i=1}^{\lambda}(\alpha_i - \beta_i)\sigma_i^r \\ sc_1^r & = & \sum_{i=1}^{\lambda}(s\alpha_i)\sigma_i^r \end{array} \right.$$

と定義する。

これらの演算に関して通常の加法, 減法の公式が成り立つ事は明らかであろう。

特に, ただ 1 つの α_i は 1 で, 他の $\alpha_j = 0$ $(j \neq i)$ の場合, c^r を σ_i^r で表すものとする。すなわち

$$\sigma_i^r = 0\sigma_1^r + \cdots + 0\sigma_{i-1}^r + 1 \cdot \sigma_i^r + 0\sigma_{i+1}^r + \cdots + 0\sigma_\lambda^r$$

そうすれば

$$c^r = \alpha_1\sigma_1^r + \alpha_2\sigma_2^r + \cdots + \alpha_\lambda\sigma_\lambda^r$$

は $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_\lambda^r$ なる r-鎖 に $(*)$ の演算を行ったものとみなすものとができる。
特に,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\lambda = 0 \text{ の時,} \quad c^r = 0$$

とおく。そして r-鎖全体を

$$C_r(K)$$

と表し, K の **r-鎖群 (chain group)** という。

これは (1 年のとき習った) 線形空間の概念と類似していることにきづかれたであろう。すなわち, 体 K 上の n 次元線形空間 V の元 v は, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ を V の基底 (base) とすると,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \qquad (\lambda_i \in K)$$

と一意に書け, その和, 差, スカラー倍は, $v' = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i v_i \quad (\lambda'_i \in K)$ とすると

$$\begin{cases} v + v' &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda'_i) v_i \\ v - v' &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda'_i) v_i \\ sv &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (s\lambda_i) v_i \end{cases}$$

であった。そしてこの V を $v_1, v_2, \cdots, v_n$ を 基底 (base) とする n 次元線形空間といった。これと同様に $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_\lambda^r$ が 複体 K の全ての r-単体とすると, K の r-鎖全体は, $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \cdots, \sigma_\lambda^r$ を基底とする $\mathbb{Z}$ 上の線形空間のように思える[1]。唯一の違いは, $\mathbb{Z}$ は体でない (割算ができない) ことである。後程この違いは鮮明になってくる。

8 境界作用素 ∂

向き付けられた 2-単体 $\alpha = [A_0A_1A_2]$ に対して, その境界 $\partial_2\alpha$ $(\in C_1(K))$ を

$$\partial_2\alpha = [A_1A_2] + [A_2A_0] + [A_0A_1]$$

と定義する。
向き付けられた 1-単体 $a = [A_0A_1]$ に対して, その境界 $\partial_1 a$ $(\in C_0(K))$ を

$$\partial_1 a = A_1 - A_0$$

と定義する。

[1] この様なものは $\mathbb{Z}$-自由加群 (free module) と呼ばれている。

2-鎖 $c^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\lambda} n_j \alpha_j \quad (n_j \in \mathbb{Z},\ \alpha_j$ は 2-単体) と, 1-鎖 $c^1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\mu} m_j a_j \quad (n_j \in \mathbb{Z},\ a_j$ は 1-単体) に対して,

$$\partial c^2 = \sum_{j=1}^{\lambda} n_j \partial \alpha_j$$
$$\partial c^1 = \sum_{j=1}^{\mu} m_j \partial a_j$$

によって, 鎖の境界を定義すると,

$$\begin{aligned}
\partial_1 \partial_2 \alpha^2 &= \partial_1 \partial_2 [A_0 A_1 A_2] \\
&= \partial_1([A_1 A_2] + [A_2 A_0] + [A_0 A_1]) \\
&= \partial_1([A_1 A_2]) + \partial([A_2 A_0]) + \partial([A_0 A_1]) \\
&= A_2 - A_1 + A_0 - A_2 + A_1 - A_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。

一般に, r-単体 $\sigma^r = a_0 a_1 \cdots a_r$ に対して

$$\partial_r \sigma^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a_i} \cdots a_r$$

(ここで $a_0 a_1 \cdots \hat{a_i} \cdots a_r$ とは $a_0 a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_r$ のこと, すなわち, $a_0 a_1 \cdots a_i \cdots a_r$ から a_i を取り除いたものを表す。) と定め, r-鎖

$$c = \sum_{j=0}^{\lambda} n_j \sigma_j^r \quad (n_j \in \mathbb{Z},\ \sigma_j^r \text{ は } r\text{-単体})$$

に対して,

$$\partial_r c = \sum_{j=1}^{\lambda} n_j \partial \sigma_j^r$$

と定めると, $\partial_r : C_r \to C_{r-1}$ なる写像である。さらに明らかに, c_1, c_2 を 2 つの r-鎖とするとき,

$$\partial_r(c + c') = \partial_r(c_1) + \partial_r(c_2)$$

が成り立つ。(∂_r は準同型であるという。)
これによって, $\{C_r(K), \partial_r\}$ が定義されたが, これらすべてをまとめて, 次のように言う。
n 次元複体 K に対して,

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \to \cdots \to C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K) \to \cdots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

なる鎖群 $C_r(K)$ と, 準同型 ∂_r からなる列ができる。これを K に関する **鎖複体 (chain complex)** といい, $\mathbb{C}$ で表す。また $\mathbb{C} = \{C_r(K), \partial_r\}$ あるいは ∂_r を略して $\mathbb{C} = \{C_r(K)\}$ と書くこともある。

このとき 次の重要な補題が成り立つ。

補題 8.1 任意の $r = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して, 次が成り立つ。

$$\partial_r \partial_{r+1} = 0$$

証明　$(r+1)$-単体 $\sigma^{r+1} = a_0 a_1 \cdots a_{r+1}$ に対して示せば十分である。

$$\begin{aligned}
&\partial_r \partial_{r+1} \sigma^{r+1} = \partial_r \left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{r+1} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{a}_i \cdots a_{r+1} \right) + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} \left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_{r+1} \right) \\
&= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} a_0 a_1 \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{a}_i \cdots a_{r+1} + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_{r+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

さて, いよいよ本来の目的であるホモロジー群の定義に取りかかろう。そのために輪体 (cycle) と, 境界輪体 (bounding cycle) という概念を定めなければならない。

輪体 (cycle) とは, 境界を持たない鎖のことである。これは次のように数学的に述べられる。

定義 8.2
輪体とは $\partial_r : C_r \to C_{r-1}$ という写像で 0 に移される鎖 (chain) と定義される。すなわち $ker\ \partial_r = \partial_r^{-1}(0)$ を $Z_r = Z_r(K)$ とかいて **r-輪体群 (cycle group)** といい, Z_r の元を **r-輪体 (cycle)** という。

また 境界輪体 (bounding cycle) は, 輪体が 1 つ上の chain の境界になっている (0 にホモローグである) ことを, 数学的に述べるために必要である。これは数学的には次のように述べられる。

定義 8.3
$\partial_{r+1} : C_{r+1} \to C_r$ という写像で C_{r+1} の元の像になっている鎖 (chain) と定義される。すなわち $Im\ \partial_{r+1} = \partial_{r+1}(C_{r+1})$ を, $B_r = B_r(K)$ とかいて, **r-境界輪体群 (bounding cycle group)** といい,
B_r の元を **r-境界輪体 (bounding cycle)** という。

このように定義すると, 補題 8.1 より, $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ だから $Im\ \partial_{r+1} \subset ker\ \partial_r$ すなわち $B_r \subset Z_r$ である。

定義 8.4
そこで 商群 Z_r/B_r が考えられるが これを $H_r = H_r(K)$ とかいて,
K の **ホモロジー群 (Homology group)** という。
$z^r \in Z_r(K)$ を含むクラスを $[z^r]$ とかいて, ホモロジークラスといい, 同じホモロジークラスに属する 2 つの輪体 z_1^r, z_2^r (すなわち $[z_1^r] = [z_2^r]$) を **ホモローグである (homologous)** といい, $z_1^r \sim z_2^r$ と表す。

ここで, 群論の解説, すなわち 群, 準同型を説明 (復習) をしておこう。

定義 8.5
集合 G の任意の 2 つの元 x, y に対して G の元 $x \circ y$ を定める演算 (すなわち, $(x, y) \mapsto x \circ y$ により対

応づけられる写像 $G \times G \to G$) がつぎの (1), (2), (3) をみたすとき, 集合 G とこの演算 $\circ$ の対 $(G, \circ)$ を **群** (***group***) という。単に G は **群** である ということもある。

(**1**) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \quad (x, y, z \in G)$ (結合法則)

(**2**) $e \in G$ が存在して, 任意の $x \in G$ に対して次をみたす。
$e \circ x = x \circ e = x$ (単位元の存在)

(**3**) 任意の $x \in G$ に対して, $y \in G$ が存在して次をみたす。
$x \circ y = y \circ x = e$ (逆元の存在)

さらに, 次の (4) が成り立つとき, G を **可換群** (***commutative group***) または **アーベル群** (***Abelian group***) という。

(**4**) 任意の 2 つの元 $x, y \in G$ に対して,
$x \circ y = y \circ x$ (交換法則)

(2) の e を **単位元** (***unit element***) といい, (3) の y を x の **逆元** (***inverse element***) といい, x^{-1} と表す。可換群の場合, 演算 $\circ$ は多くの場合 $+$ の記号で表される。$+$ の記号が使われる場合は, $x + y$ を x と y の **和** (***sum***), G を **加群** (***additive group, module***) といい, 単位元を 0 と表し **零元** (***zero elememt***) という。x の逆元を $-x$ と表す。

定義 8.6
加群 R に, 和 $+$ の他に **積** (***product***) とよばれる演算 $\cdot$ (すなわち $(x, y) \mapsto x \cdot y$ により対応づけられる写像 $G \times G \to G$) が定義されていて, 次の条件をみたすとき, R を **環** (***ring***) という。

(**5**) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (x, y, z \in R)$ (結合法則)

(**6**) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (分配法則)

さらに次の条件がみたされるとき, R を **単位元** (***unit elelmemt***) 1 **をもつ環** という。

(**7**) $1 \in R - \{0\}$ が存在して, 任意の $x \in R - \{0\}$ に対して次の条件をみたす。
$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (単位元の存在)

また, 環 R が次の条件をみたすとき, R を **可換環** (***commutative ring***) という。

(**8**) $x \cdot y = y \cdot x \quad (x, y \in R)$ (交換法則)

例えば, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は和と積に関して, 単位元をもつ可換環である。

定義 8.7
単位元をもつ可換環 K がさらに次の条件をみたすとき, **体** (***field***) という。

(**9**) 零でない K の元 x に対して, 次の式をみたす K の元 x^{-1} が存在する。
$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (逆元の存在)

命題 8.8 $C_r(K)$ は アーベル群をなす。

定義 8.9
群 G の部分集合 H が G における演算に関して 群をなすとき, H を G の **部分群** (***subgroup***) という。

命題 8.10 $Z_r(K)$, $B_r(K)$ は $C_r(K)$ の部分群をなす。

これからは G をアーベル群とする。

定義 8.11
部分群 H によって作られる商集合 G/H を考える。このとき, G の H による類 (クラス) $[a]$, $[b]$ は, $[a]\cdot[b]=[ab]$ と演算 $\cdot$ を定めると, G/H は群をなすので, G/H を **商群** (***quotient group***) という。

ホモロジー群 $H_r(K)$ は 商群 $Z_r(K)/B_r(K)$ である。

定義 8.12
群 G から 群 G' への写像 $f:G\to G'$ が次の条件

$$f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2) \qquad \text{演算を } + \text{ でかくときは } f(g_1+g_2)=f(g_1)+f(g_2)$$

をみたすとき, f を G から G' への **準同型** (***homomorphism***) という。

命題 8.13 $\partial_r : C_r(K)\to C_{r-1}$ は準同型である。

定義 8.14
準同型 $f:G\to G'$ に対して, G' の単位元を 0 とかくと, $f^{-1}(0)$ を f の **核** (***kernel***) といい, $ker\ f$ とかく。

定義 8.15
A と 単位元をもつ可換環 R が与えられたとき, A がアーベル群をなし, この演算を $+$ でかく とすると, スカラー倍と言われている $R\times A$ から A への演算 $\cdot$ が 次の条件

(**1**) $r\cdot(x+y)=r\cdot x+r\cdot y$
(**2**) $(r_1+r_2)\cdot x=r_1\cdot x+r_2\cdot x$
(**3**) $(r_1r_2)\cdot x=r_1(r_2\cdot x)$
(**4**) $1\cdot x=x$

(r, r_1 r_2 は R の元, x, y は A の元)
をみたすとき, A を 環 R 上の (**左**) **加群** (***module***) という。
特に R が体であるとき, A を 体 R 上の **ベクトル空間** (***vector space***) という。

命題 8.16 $C_r(K)$ は, $\mathbb{Z}$ 上の加群をなす。

9 チェイン準同型 (chain homomorphism)

複体 K から鎖群 $C_r=C_r(K)$ を定め, 鎖複体 $\mathbb{C}=\{C_r(K)\}$ と定めたので, 複体 K を忘れて, 鎖複体 $\mathbb{C}=\{C_r\}$ から (C_r は加群) 始まると考えたとき, 鎖群 C_r を $C_r(\mathbb{C})$, Z_r を $Z_r(\mathbb{C})$, B_r を $B_r(\mathbb{C})$, H_r を $H_r(\mathbb{C})$ 等と書くこともある。
鎖複体

$$\mathbb{C}:\cdots\to C_{r+1}\xrightarrow{\partial_{r+1}}C_r\xrightarrow{\partial_r}C_{r-1}\to\cdots C_0\to 0$$

と, 複体 K' から定まる鎖複体

$$\mathbb{C}':\cdots\to C'_{r+1}\xrightarrow{\partial'_{r+1}}C'_r\xrightarrow{\partial'_r}C'_{r-1}\to\cdots C'_0\to 0$$

において, $\{ f_r : C_r \to C'_r \}$ ($f_r : C_r \to C'_r$ は準同型) が定義されていて, 次の図式が可換であるとき,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & C_{r+1} & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r & \xrightarrow{\partial_r} & C_{r-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle f_{r+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_r} & & \downarrow{\scriptstyle f_{r-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & \\
\longrightarrow & C'_{r+1} & \xrightarrow{\partial'_{r+1}} & C'_r & \xrightarrow{\partial'_r} & C'_{r-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

すなわち

$$f_{r-1}\,\partial_r = \partial'_r\,f_r$$

が成り立つ時, **鎖準同型 (chain homomorphism)** と言い

$$f = \{ f_r \} : \{ C_r \to C'_r \}$$

または

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$$

とかく。

以前定義した単体写像から, 次のように鎖準同型が定まる。
K_1, K_2 を複体, $f : K_1 \to K_2$ を単体写像とする。単体写像 f から次のように鎖準同型が定まる。
向きの付いた q-単体 $\sigma^q = a_0 a_1 \cdots a_q$ に対して, $f_{\#q}(\sigma^q)$ を

$$f_{\#q}(\sigma^q) = \begin{cases} f(a_0)f(a_1)\cdots f(a_q) & (\ f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q) \text{ が全て異なる時 }) \\ 0 & (\ f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q) \text{ に同じものがある時 }) \end{cases}$$

と定義し, $C_q(K_1)$ の元 $c^q = \displaystyle\sum_i n_i \sigma_i^q \quad (n_i \in \mathbb{Z})$ に対して,

$$f_{\#q}(c^q) = f_{\#q}\left(\sum_i n_i \sigma_i^q\right) = \sum_i n_i f_{\#q}(\sigma_i^q)$$

と定義すると, 準同型

$$f_{\#q} : C_q(K_1) \to C_q(K_2) \qquad (q = 0, 1, \cdots)$$

が定義されるので, これより鎖準同型

$$\{f_{\#q}\} : \{C_q(K_1)\} \to \{C_q(K_2)\}$$

すなわち, $\mathbb{C}_1 = \{C_q(K_1)\}$, $\mathbb{C}_2 = \{C_q(K_2)\}$ に対して,

$$f_\# : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$$

が得られる。

問題 9.1　これを示せ。

また, 鎖準同型について,

定理 9.2
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ を鎖準同型とすると, f は $\mathbb{C}$ のホモロジー群から $\mathbb{C}'$ のホモロジー群への準同型
$f_* : H_*(\mathbb{C}) \to H_*(\mathbb{C}')$ をひきおこす。(詳しくは $f_{*r} : H_r(\mathbb{C}) \to H_r(\mathbb{C}')$ である。)
証明
(1) $f_r(Z_r(\mathbb{C})) \subset Z_r(\mathbb{C}')$ の証明

$\forall z \in Z_r(\mathbb{C})$ なら $\partial_r(z) = 0$
条件 $\partial'_r f_r = f_{r-1}\partial_r$ より
$\partial'_r f_r(z) = f_{r-1}\partial_r(z) = 0$
ゆえに, $f_r(z) \in Z_r(\mathbb{C}')$

(2) $f_r(B_r(\mathbb{C})) \subset B_r(\mathbb{C}')$ の証明

$x \in B_r(\mathbb{C})$ ならば
$\exists a \in C_{r+1}(\mathbb{C})$; $\partial_{r+1}(a) = x$ より
$\partial'_{r+1} f_{r+1}(a) = f_r\partial_{r+1}(a) = f_r(x)$
ゆえに, $f_r(x) \in B_r(\mathbb{C}')$

この 2 つのことより $[x] \in H_r(\mathbb{C})$ に対して $f_r(x) \in Z_r(\mathbb{C}')$ だから, $[f_r(x)] \in H_r(\mathbb{C}')$ を対応させることによって,

$$f_{r*} : H_r(\mathbb{C}) \to H_r(\mathbb{C}')$$

が構成できる。この写像が well-defined であることは, (2) により, 明らかであるが, 念のため 証明をきちんとかいておこう。
仮定より, $z - z' \in B_r(\mathbb{C})$ である。このことより, $\exists a \in C_{r+1}(\mathbb{C})$; $\partial_{r+1}(a) = z - z'$ である。よって, $\partial'_{r+1} f_{r+1}(a) = f_r\partial_{r+1}(a) = f_r(z - z') = f_r(z) - f_r(z')$ となる。ゆえに, $f_r(z) - f_r(z') \in B_r(\mathbb{C}')$ すなわち $[f_r(z)] = [f_r(z')]$ である。 □

10 $C_q(\mathbb{C})$ の生成系

K を n 次元複体とし, q-鎖群 $C_q = C_q(K)$ は生成元 $x_i^q (1 \leq i \leq \lambda_q)$ をもつ自由加群とし,
$\mathbb{C} = \sum_{q=0}^{n} C_q$ において, $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ を,

$$\partial x_i^q = \sum_j g_{ij} x_j^{q-1} \quad (g_{ij} \in \mathbb{Z})$$

とする。もちろん 行列 $\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix}$ は, $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ を満たさねばならない。さらに (g_{ij}) は, $(\lambda_q \times \lambda_{q-1})$ 行列である。
このとき,

定理 10.1
$q \in \mathbb{Z}$ に対して C_q の自由生成系をうまくとることによって次のようにできる。すなわち C_q の生成元として, $a_i^q, b_j^q, c_k^q, d_\ell^q, e_m^q \quad (1 \leq i \leq \alpha_q,\ 1 \leq j \leq \beta_q,\ 1 \leq k \leq \gamma_q,\ 1 \leq \ell \leq \delta_q,\ 1 \leq m \leq \varepsilon_q)$ をとり

$$\begin{cases} \lambda_q = \alpha_q + \beta_q + \gamma_q + \delta_q + \varepsilon_q \\ \partial a_i^q = e_i^{q-1} \quad (1 \leq i \leq \alpha_q) \\ \partial b_j^q = t_j^{q-1} d_j^{q-1} \quad (1 \leq j \leq \beta_q,\ t_j^{q-1} \text{ は 1 より大きい自然数}) \\ \partial c_k^q = 0 \quad (1 \leq k \leq \gamma_q) \\ \partial d_\ell^q = 0 \quad (1 \leq \ell \leq \delta_q = \beta_{q+1}) \\ \partial e_m^q = 0 \quad (1 \leq m \leq \varepsilon_q = \alpha_{q+1}) \end{cases}$$

で, さらに t_j^{q-1} は t_{j+1}^{q-1} を割る $(1 \leq j \leq \beta_q - 1)$

をみたすようにできる。これを, 鎖複体 $\mathbb{C} = \{C_q, \partial_q\}$ の基本基底という。ただし $\partial = \partial_q$ である。

<u>証明</u>

(g_{ij}) は $(\lambda_q \times \lambda_{q-1})$ 型の整係数行列である。

整数行列の基本変形は, 次の (1) - (6) である。

(1) i 行を -1 倍する。

(2) i 行と j 行を入れ換える。

(3) j 行の k 倍を i 行に加える。$(k \in \mathbb{Z})$

(4) i 列を -1 倍する。

(5) i 列と j 列を入れ換える。

(6) i 列の k 倍を j 列に加える。$(k \in \mathbb{Z})$

$$P(i) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$P(i)$ を行列 A に左から掛けることにより, 上の (1) を実現できる。生成元の変化で述べれば, x_i^q を $-x_i^q$ に変えることに対応する。$P(i)$ を行列 A に右から掛けることにより, 上の (4) を実現できる。生成元の変化で述べれば, x_i^{q-1} を $-x_i^{q-1}$ に変えることに対応する。

$$Q(i,j) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$Q(i,j)$ を行列 A に左から掛けることにより, 上の (2) を実現できる。生成元の変化で述べれば, x_i^q と x_j^q の交換に対応する。$Q(i,j)$ を行列 A に右から掛けることにより, 上の (5) を実現できる。生成元の変化で

述べれば, x_i^{q-1} と x_j^{q-1} の交換に対応する。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
R(i,j;k) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & k & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$R(i,j;k)$ を行列 A に左から掛けることにより, 上の (3) を実現できる。生成元の変化で述べれば,

$$
\begin{cases}
x_i^q & \to \quad x_i^q + kx_j^q \\
x_j^q & \to \quad x_j^q
\end{cases}
$$

$R(i,j;k)$ を行列 A に右から掛けることにより, 上の (6) を実現できる。生成元の変化で述べれば,

$$
\begin{cases}
x_i^{q-1} & \to \quad x_i^{q-1} - kx_j^{q-1} \\
x_j^{q-1} & \to \quad x_j^{q-1}
\end{cases}
$$

基本変形によって

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \varepsilon_{q-1} & \delta_{q-1} & \end{array} \\
\begin{array}{c} \alpha_q \\ \\ \beta_q \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
1 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & t_1^{q-1} & & & & & & & \\
 & & & & & t_2^{q-1} & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & t_{\delta_{q-1}}^{q-1} & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & &
\end{array}\right)
\end{array}
$$

このとき,

$x \in C_q$ を,

$$x = \sum_{i=1}^{\alpha_q} r_i a_i^q + \sum_{j=1}^{\beta_q} s_j b_j^q + \sum_{k=1}^{\gamma_q} t_k c_k^q + \sum_{\ell=1}^{\delta_q} u_\ell d_\ell^q + \sum_{m=1}^{\varepsilon_q} v_m e_m^q \quad (r_i, s_j, t_k, u_\ell, v_m \in \mathbb{Z})$$

と表せば,

$$\partial x = \sum_{i=1}^{\alpha_q} r_i e_i^{q-1} + \sum_{j=1}^{\beta_q} t_j^{q-1} s_j d_j^{q-1}$$

と表される。

したがって, $\mathbb{Z}[x]$ で x を生成元とする加群 $\mathbb{Z}$ を表すと,

$$\begin{array}{rcccccc} Z_q(\mathbb{C}) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\gamma_q} \mathbb{Z}[C_k^q] & + & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{\delta_q} \mathbb{Z}[d_\ell^q] & + & \displaystyle\sum_{m=1}^{\varepsilon_q} \mathbb{Z}[e_m^q] \\ B_q(\mathbb{C}) & = & & & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{\delta_q} \mathbb{Z}[t_\ell^q d_\ell^q] & + & \displaystyle\sum_{m=1}^{\varepsilon_q} \mathbb{Z}[e_m^q] \end{array}$$

すると,

$$H_q(\mathbb{C}) = B_q(\mathbb{C}) / Z_q(\mathbb{C}) \;\cong\; \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\gamma_q} \oplus \mathbb{Z}/t_1^q\mathbb{Z} \;\oplus \cdots \oplus\; \mathbb{Z}/t_{\delta_q}^q\mathbb{Z}$$

となる。 □

q 次元ホモロジー群 $H_q(\mathbb{C})$ の有限位数の元全体からなる部分群を, $\mathbb{C}$ の q 次元 **ねじれ群** (***torsion group***) と呼び $T_q(\mathbb{C})$ と書く。

$$T_q \cong \mathbb{Z}/t_1^q\mathbb{Z} \;\oplus \cdots \oplus\; \mathbb{Z}/t_{\delta_q}^q\mathbb{Z}$$

となる。$t_1^q, t_2^q, \cdots, t_{\delta_q}^q$ を, $\mathbb{C}$ の q 次元 **ねじれ係数** (***torsion number***) という。
また q 次元ホモロジー群の階数 γ_q を $\mathbb{C}$ の q 次元 ***Betti* 数** (***Betti number***) という。

定理 10.2
q 次元ホモロジー群 $H_q(\mathbb{C})$ は, $\mathbb{C}$ の q 次元 Betti 数と q 次元ねじれ係数によって (一意に) きまる。
また,

$$\lambda_q = \alpha_q + \beta_q + \gamma_q + \delta_q + \varepsilon_q = \alpha_q + \beta_q + \gamma_q + \beta_{q+1} + \alpha_{q+1}$$

より,

$$\boxed{\sum_{q=0}^{n} (-1)^q \lambda_q = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \gamma_q}$$

なぜならば,

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_0 &=& \alpha_0+\beta_0+\gamma_0+\beta_1+\alpha_1 \\
-\lambda_1 &=& -\alpha_1-\beta_1-\gamma_1-\beta_2-\alpha_2 \\
\vdots && \\
(-1)^{q-1}\lambda_{q-1} &=& (-1)^{q-1}\alpha_{q-1}+(-1)^{q-1}\beta_{q-1}+(-1)^{q-1}\gamma_{q-1}+(-1)^{q-1}\beta_q+(_1)^{q-1}\alpha_q \\
(-1)^q\lambda_q &=& (-1)^q\alpha_q+(-1)^q\beta_q+(-1)^q\gamma_q+(-1)^q\beta_{q+1}+(-1)^q\alpha_{q+1} \\
(-1)^{q+1}\lambda_{q+1} &=& (-1)^{q+1}\alpha_{q+1}+(-1)^{q+1}\beta_{q+1}+(-1)^{q+1}\gamma_{q+1}+(-1)^{q+1}\beta_{q+2}+(-1)^{q+1}\alpha_{q+2} \\
\vdots && \\
+) \quad (-1)^n\lambda_n &=& (-1)^n\alpha_n+(-1)^n\beta_n+(-1)^n\gamma_n+(-1)^n\beta_{n+1}+(-1)^n\alpha_{n+1} \\
\hline
\end{array}
$$

を考えると, $(n+1)$-単体は存在しないので, $\beta_{n+1}=\alpha_{n+1}=0$ である。
また $\partial a_0=e_{-1}$, $\partial b_0=d_{-1}$ だが, e_{-1}, d_{-1} はないので, $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$ である。
よって, 上の式が成り立つ。 □

11 鎖ホモトピー (chain homotopy)

$\mathbb{C}_1=\{C_r(K_1),\partial_r\}$, $\mathbb{C}_2=\{C_r(K_2),\partial'_r\}$ を鎖複体とし, f, g を $\mathbb{C}_1$ から $\mathbb{C}_2$ への 鎖準同型とする。
いま各 r に対して定義された準同型写像

$$\Phi_r : C_r(K_1)\to C_{r+1}(K_2)$$

で条件

$$\partial'_{r+1}\Phi_r+\Phi_{r-1}\partial_r=g-f$$

をみたすものが存在する時, f と g は, **鎖ホモトープ (*chain homotopic*)** であるといい $f\simeq g$ と表す。Φ_r の集合 $\Phi=\{\Phi_r : C_r(K_1)\to C_{r+1}(K_2)\}$ のことを, **鎖ホモトピー (*chain homotopy*)** といい, $\Phi:\mathbb{C}_1\to\mathbb{C}_2$ と表す。

命題 11.1
$\simeq$ は同値関係である

例 11.2
K_1, K_2 を単体的複体, $\phi,\psi : K_1\to K_2$ を単体写像とする。
K_1 の (各) 単体 σ^r に対し, K_2 の単体 τ^s が存在して, σ^r の $\phi_\#,\psi_\#$ による像が τ^s の face になっている時, 単体写像 ϕ,ψ は **隣接 (*contiguous*)** するといわれる。
このとき, $\phi_\#,\psi_\# : \mathbb{C}_1\to\mathbb{C}_2$ は, 鎖ホモトープである。

$$\Phi_r(a_0a_1\cdots a_r)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^r\phi(a_0)\cdots\phi(a_i)\psi(a_i)\cdots\psi(a_r)$$

が求める鎖ホモトピーである。

補題 11.3
鎖ホモトープな鎖準同型 f と g はホモロジー群の同じ準同型対応を引き起こす。すなわち

$$f_*, g_*; H_r(\mathbb{C}_1) \to H_r(\mathbb{C}_2)$$

と表せば, $f_* = g_*$ である。
<u>証明</u>　$[x] \in H_r(\mathbb{C}_1)$ に対して, $f_{*r}([x]) = [f_r(x)]$ であった。このとき, $x \in Z_r(\mathbb{C}_1)$ をとると, $\partial_r(x) = 0$ である。
f と g は 鎖ホモトープ (chain homotopic) だから, $\Phi = \{\Phi_r\}$ を f と g の 鎖ホモトピー (chain homotopy) とすると,

$$\partial'_{r+1}\Phi_r(x) + \Phi_{r-1}\partial_r(x) = g(x) - f(x)$$

だから, $g(x) - f(x) = \partial'_{r+1}\Phi_r(x)$ である。
ここで, $\Phi_r(x) \in C_{r+1}(\mathbb{C}_2)$ だから, $\partial'_{r+1}\Phi_r(x) \in B_r(\mathbb{C}_2)$ となる。

$$\text{よって } g(x) \sim f(x), \quad \text{ゆえに, } g_*(x) = f_*(x)$$

である。 □

定義 11.4
二つの鎖複体 $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ に対して,

$$\exists f : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2\ ;\ \text{鎖準同型}$$

$$\exists g : \mathbb{C}_2 \to \mathbb{C}_1\ ;\ \text{鎖準同型}$$

$$s.t. \quad fg \simeq 1\ , \qquad gf \simeq 1$$

であるとき, f は $\mathbb{C}_1$ から $\mathbb{C}_2$ への <u>**鎖同値写像 (*chain equivalence map*)**</u> という。

命題 11.5
$f : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ と $g : \mathbb{C}_2 \to \mathbb{C}_3$ が鎖同値写像ならば, 合成写像 $gf : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_3$ も鎖同値写像である。

命題 11.6
$f : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ が鎖同値写像ならば, $f_* : H_r(\mathbb{C}_1) \cong H_r(\mathbb{C}_2)$ が成り立つ。
<u>証明</u>　$\exists g : \mathbb{C}_2 \to \mathbb{C}_1$ で, $fg \simeq 1, gf \simeq 1$ だから, $f_*g_* = 1_*$ かつ , $g_*f_* = 1_*$ である。
よって, g_*, f_* は全単射である。 □

12　鎖ホモトピーの応用

K を複体とする。多面体 $|K|$ に対して $\boldsymbol{I} = [0, 1]$ との積空間 $|K| \times \boldsymbol{I}$ を作る。このとき $|K| \times \boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}^N$ は次の定理に示すように多面体になる。

複体 K の頂点全体の集合に 1 つの順序を決めて, その順序を $<$ で示すことにする。
K の各単体 σ に対して, $\boxed{K(\sigma \times \boldsymbol{I})}$ を作る。

σ の頂点を $<$ の順に並べて, $\sigma = b_0 b_1 \cdots b_q, \quad b_0 < b_1 < \cdots < b_q$ と書き表す。$|K| \times \boldsymbol{I}$ の部分集合 $\sigma \times \boldsymbol{I}$ の点 $(b_i, 0), (b_i, 1)$ $(i = 0, 1, \cdots, q)$ を簡単のため, それぞれ

$$\underline{b}_i = (b_i, 0),\ \overline{b}_i = (b_i, 1)$$

と書くと (図 4 参照), $\sigma \times \boldsymbol{I}$ の $q+2$ 個 の点

$$\underline{b}_0, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_{j-1}, \underline{b}_j, \overline{b}_j, \overline{b}_{j+1}, \cdots, \overline{b}_q$$

は $\mathbb{R}^N$ の中で 独立である。なぜなら,
$\overrightarrow{\underline{b}_0\overline{b}_k} = \overrightarrow{\underline{b}_0\underline{b}_k} + \overrightarrow{\underline{b}_k\overline{b}_k} \qquad (k = j, j+1, \cdots, q)$
より, 明らかに $q+1$ 個のベクトル

$$\overrightarrow{\underline{b}_0\underline{b}_1}, \overrightarrow{\underline{b}_0\underline{b}_2}, \cdots, \overrightarrow{\underline{b}_0\underline{b}_j}, \overrightarrow{\underline{b}_0\overline{b}_j}, \cdots, \overrightarrow{\underline{b}_0\overline{b}_q}$$

は 1 次独立である。つまり $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \cdots, \underline{b}_{j-1}, \underline{b}_j, \overline{b}_j, \overline{b}_{j+1}, \cdots, \overline{b}_q$ は独立である。

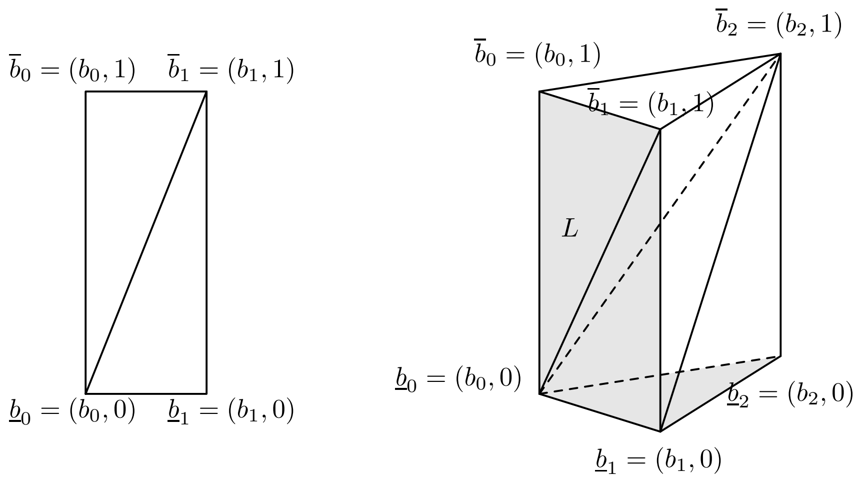

図 4: 積複体

したがって,

$$\underline{b}_0 \underline{b}_1 \cdots \underline{b}_j \overline{b}_j \cdots \overline{b}_q$$

は $q+1$-単体をなす。そこで,
$q+1$ 個の $q+1$-単体 $\underline{b}_0 \underline{b}_1 \cdots \underline{b}_j \overline{b}_j \cdots \overline{b}_q \quad (j = 0, 1, \cdots, q)$ 及び, それらの辺単体の集合を $K(\sigma \times \boldsymbol{I})$ とする。

補題 12.1
$K(\sigma \times \boldsymbol{I})$ は複体で, $|K(\sigma \times I)| = \sigma \times \boldsymbol{I}$ である。
証明　次元 q に関する数学的帰納法で証明する。
(**1**) $q = 1$ の時, 図 4 より明らかに正しい。
(**2**) $q - 1$ の時, 成立すると仮定する。

σ が q-単体の時, $K(\sigma\times\boldsymbol{I})$ が複体の条件 (1) を満たすことは, 定義から明らかである。
条件 (2) について考える。今

$$L=K(b_0b_1\cdots b_{q-1}\times\boldsymbol{I})\cup K(\underline{b}_0\underline{b}_1\cdots\underline{b}_q)$$

とおくと, L は $(q-1)$ 次元であるから, 帰納法の仮定により, L は複体であって, 容易に確かめられるように,

$$\overline{b}_q*|L|=\sigma\times\boldsymbol{I}$$

である。そこで, τ,τ' を $K(\sigma\times\boldsymbol{I})$ の二つの単体とする。そこで場合に分けて示そう。
少なくとも 一方が L に属する時
このときは, $\tau\cap\tau'$ が $\emptyset$ あるいは L (したがって $K(\sigma\times\boldsymbol{I})$) の単体であるから,
複体の条件 (2) をみたす。
共に L に属さない時
このとき, $\tau=b'_0b'_1\cdots b'_r\overline{b}_q,\ \tau'=b''_0b''_1\cdots b''_s\overline{b}_q$ とすると,

$$\tau\cap\tau'=\overline{b}_q*(b'_0b'_1\cdots b'_r\cap b''_0b''_1\cdots b''_s)$$

で, $b'_0b'_1\cdots b'_r$, $b''_0b''_1\cdots b''_s$ は L の単体であるので, 帰納法の仮定により, $b'_0b'_1\cdots b'_r\cap b''_0b''_1\cdots b''_s$ は L の単体である。よって, $\tau\cap\tau'$ は, $K(\sigma\times\boldsymbol{I})$ の単体であることが分かる。よって, 複体の条件 (2) をみたす。
どちらの場合でも複体の条件 (2) をみたすので $K(\sigma\times\boldsymbol{I})$ は複体であると分かった。
次に $K(\sigma\times\boldsymbol{I})=\sigma\times\boldsymbol{I}$ を示す。
$\overline{b}_q*|L|=\sigma\times\boldsymbol{I}$ より

$$|K(\sigma\times\boldsymbol{I})|=\bigcup_{j=0}^{q}|\underline{b}_0\underline{b}_1\cdots\underline{b}_j\overline{b}_j\cdots\overline{b}_q|=\overline{b}_q*|L|=\sigma\times\boldsymbol{I}$$

である。 □

また, $K\ni\sigma,\ \sigma'$ で, $\sigma'\prec\sigma$ ならば, $K(\sigma'\times\boldsymbol{I})$ は $K(\sigma\times\boldsymbol{I})$ の部分複体 だから,

$\boxed{K\times\boldsymbol{I}=\bigcup_{\sigma\in K}K(\sigma\times\boldsymbol{I})}$ である。よって明らかに次の定理が成り立つ。

定理 12.2
$K\times\boldsymbol{I}$ は複体で, $|K\times\boldsymbol{I}|=|K|\times I$ である。
証明　次の式より明らか。

$$|K\times\boldsymbol{I}|=|\bigcup_{\sigma\in K}K(\sigma\times\boldsymbol{I})|=\bigcup_{\sigma\in K}|K(\sigma\times\boldsymbol{I})|=\bigcup_{\sigma\in K}\sigma\times\boldsymbol{I}=|K|\times I$$ □

定義 12.3
複体 $K\times I$ を K と I との **積複体** と言う。
$K\times I$ の単体で, $K\times\{0\}$ 上にあるもの全体の集合を K_0, $K\times\{1\}$ 上にあるもの全体の集合を K_1 とすると, K_0, K_1 は $K\times I$ の部分複体で, 対応 $\underline{b}_i\to b_i$, $\overline{b}_i\to b_i$ によって, 共に K に同型である。

定理 12.4
K, L を複体, 閉区間 $[0,1]$ を I で表すとする。
さらに, $K \times I$ から L への単体写像 $\Phi : K \times I \to L$ が存在するとする。
このとき, $\varphi = \Phi|_{K_0}$, $\varphi' = \Phi|_{K_1}$ とおき, K_0, K_1 を K と同一視すると, 単体写像 $\varphi, \varphi' : K \to L$ から導かれるホモロジー群の準同型
$\varphi_*, \varphi'_* : H_*(K) \to H_*(L)$ は

$$\varphi_* = \varphi'_*$$

である。

<u>証明</u>　$D_q : C_q(K) \to C_{q+1}(K \times I)$ を以下のように定義する。
K の q-単体 $\sigma^q = a_0 a_1 \cdots a_q$ に対して,

$$D_q(a_0 a_1 \cdots a_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \underline{a}_0 \underline{a}_1 \cdots \underline{a}_j \overline{a}_j \cdots \overline{a}_q$$

と定め, $C_q(K)$ の元 $c = \sum_i \gamma_i \, \sigma_i^q$ $(\gamma_i \in \mathbb{Z}, \sigma_q^i$ は K の q-単体$)$ に対して,

$$D_q(c) = \sum_i \gamma_i \, D_q(\sigma_i^q)$$

と定めると,

$$D_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q+1}(K \times I) \quad (q = 0, 1, \cdots)$$

は明らかに準同型である。
$\{C_q(K \times I)\}$ に関する境界準同型を $\overline{\partial}_q$, $\{C_q(K)\}$ に関する境界準同型を ∂_q, $\{C_q(L)\}$ に関する境界準同型を ∂'_q と表すと,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_{q+1} D_q(a_0 a_1 \cdots a_q) \quad &= \quad \sum_{i=0}^{q} (-1)^j \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \underline{a}_0 \cdots \hat{\underline{a}}_j \cdots \underline{a}_i \overline{a}_i \cdots \overline{a}_q \right. \\
&\qquad + (-1)^i \underline{a}_0 \cdots \underline{a}_{i-1} \overline{a}_i \cdots \overline{a}_q \\
&\qquad + (-1)^{i+1} \underline{a}_0 \cdots \underline{a}_i \overline{a}_{i+1} \cdots \overline{a}_q \\
&\qquad \left. + \sum_{j=i+1}^{q} (-1)^{j+1} \underline{a}_0 \cdots \underline{a}_i \overline{a}_i \cdots \hat{\overline{a}}_j \cdots \overline{a}_q \right\}
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
D_{q-1} \partial_q \, (a_0 a_1 \cdots a_q) \quad &= \quad D_{q-1} \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j a_0 \cdots \hat{a}_j \cdots a_q \right) \\
&= \quad \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \left\{ \sum_{i<j} (-1)^i \underline{a}_0 \cdots \underline{a}_i \overline{a}_i \cdots \hat{\overline{a}}_j \cdots \overline{a}_q \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j<i} (-1)^{i-1} \underline{a}_0 \cdots \hat{\underline{a}}_j \cdots \underline{a}_i \overline{a}_i \cdots \overline{a}_q \right\}
\end{aligned}$$

だから,

$$(\overline{\partial}_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q)(a_0a_1\cdots a_q) = \overline{a}_0\overline{a}_1\cdots\overline{a}_q - \underline{a}_0\underline{a}_1\cdots\underline{a}_q \in C_q(K\times I)$$

となる。そこで, $C_q(K)$ の元 c を $c=\sum_i \gamma_i\sigma_i^q$ $(\gamma_i\in\mathbb{Z},\ \sigma_i^q$ は q-単体) とすると,

$$(\overline{\partial}_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q)(c) = \overline{c} - \underline{c}$$

で, 特に $z\in Z_q(K)$ の時は,

$$(\overline{\partial}_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q)(z) = \overline{\partial}_{q+1}D_q(z) = \overline{z} - \underline{z} \in C_q(K\times I)$$

である。そこで, この両辺の準同型 $\Phi_{\#q} : C_q(K\times I) \longrightarrow C_q(K')$ による像を考えると,

$$\Phi_{\#q}(\overline{\partial}_{q+1}D_q(z)) = \Phi_{\#q}(\overline{z}) - \Phi_{\#q}(\underline{z}) = \varphi'_{\#q}(z) - \varphi_{\#q}(z)$$

であり, また,

$$\Phi_{\#q}(\overline{\partial}_{q+1}D_q(z)) = \partial'_{q+1}\Phi_{\#q+1}(D_q(z))$$

であるから,

$$\varphi'_{\#q}(z) - \varphi_{\#q}(z) \in B_q(K')$$

となる。よって, $\varphi_{\#q}(z)\sim\varphi'_{\#q}(z)$ である。
従って, $H_q(K)$ のホモロジー類 $[z]$ に対して,

$$\varphi_{*q}([z]) = [\varphi_{\#q}(z)] = [\varphi'_{\#q}(z)] = \varphi'_{*q}([z])$$

となり, $\varphi_* = \varphi'_*$ が示される。 □

13 群と図式, 完全列

群 G_1, G_2, H_1, H_2 と 準同型 $\varphi : G_1 \to G_2,\ \psi : H_1 \to H_2,\ h_1 : G_1 \to H_1,\ h_2 : G_2 \to H_2$ が $h_2\varphi = \psi h_1$ をみたす時

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h_1"'] & G_2 \arrow[d, "h_2"'] \\ H_1 \arrow[r, "\psi"] & H_2 \end{tikzcd}$$

と書いて, **可換な図式** (***commutative diagram***) という。
図式

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & G_{i+1} \arrow[r, "\varphi_{i+1}"] \arrow[d, "h_{i+1}"'] & G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "h_i"'] & G_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{i-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{i+1} \arrow[r, "\psi_{i+1}"] & G_i \arrow[r, "\psi_i"] & H_{i-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

において, すべての i について $h_i\varphi_{i+1} = \psi_{i+1}h_{i+1}$ が成り立つとき, この図式は **可換である** (***commutative***) または **可換な図式** (***commutative diagram***) という。

また, 群と準同型の列

$$\cdots \to G_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i-1} \to \cdots$$

において, $ker\ \varphi_i = Im\ \varphi_{i+1}$ である時, G_i で **完全である (*exact*)** といい, 各 G_i で完全である時, この列は **完全である** または **完全列 (*exact sequence*)** であるという。

ここで, よく使われる 5 項補助定理 (Five Lemma) と呼ばれている有名な定理をあげておこう。

定理 13.1 (5 項補助定理 (Five Lemma))
可換な図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_3} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} \\
B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5
\end{array}$$

において, 図式の横方向は完全列であるとする。
このとき, h_1, h_2, h_4, h_5 が同型ならば, h_3 も同型である。

問題 13.2
定理 13.1 を示せ。

特に, 完全である列

$$0 \to H \to G \to K \to 0$$

を **短完全列 (*short exact sequence*)** という。

これらの概念を鎖複体に応用しよう。
鎖複体 $\mathbb{C} = \{C_q(K), \partial_q\}$, $\mathbb{C}' = \{C_q(K'), \partial'_q\}$, $\mathbb{C} = \{C_q(K''), \partial''_q\}$ において, 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{q+1}(K') & \xrightarrow{\psi_{q+1}} & C_{q+1}(K) & \xrightarrow{\varphi_{q+1}} & C_{q+1}(K'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{q+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C_q(K') & \xrightarrow{\psi_q} & C_q(K) & \xrightarrow{\varphi_q} & C_q(K'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_q} & & \\
0 & \longrightarrow & C_{q-1}(K') & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & C_{q-1}(K) & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & C_{q-1}(K'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{q-1}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

この図式において, 横向きは完全列で, 可換な図式のとき,

$$0 \to \mathbb{C}' \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}'' \to 0$$

とかいて, 鎖複体の短完全列という。

14　添加複体, 被約ホモロジー群

n 次元複体 K に対して, $C_q(K)$ は $0 \leq q \leq n$ のみ定めていたが, ここで便宜上 $q < 0$, $q > n$ は $C_q(K) = 0$ と考える (ていた)。また 鎖複体は

$$\cdots \to 0 \to C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \to \cdots \to C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K) \to \cdots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

であった。
$C_q(K)$ は q-単体の 1 次結合 $(0 \leq q \leq n)$ であった。ここでは さらに $q = -1$ に対しても, $\emptyset$ の 1 次結合と考える。すなわち $c \in C_{-1}(K)$ の元は, $c = n\,\emptyset = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ と考える。
そして $\partial_0 = 0$ (すなわち 0-map) であったがこれを次のように変える。
$C_0(K)$ の元 x は

$$\sum_{a\ \text{は}\ K\ \text{の頂点}} n_a a \qquad (n_a \in \mathbb{Z})$$

と表されるので,

$$\sum_{a\ \text{は}\ K\ \text{の頂点}} n_a$$

によって $\mathbb{Z}$ の元に対応させて決まる写像

$$\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$$

を添加写像という (これは全射準同型)。
すると 1-単体 $\sigma^1 = a_0 a_1$ に対しては,

$$\varepsilon\partial_1(a_0 a_1) = \varepsilon(a_1 - a_0) = \varepsilon(a_1) - \varepsilon(a_0) = 0$$

である。そこで

$$C_{-1}(K) = \mathbb{Z}, \qquad \varepsilon : C_0(K) \to C_{-1}(K)$$

とし, $\mathbb{C} = \{C_q(K), \partial_q\}$ に, $C_{-1}(K)$ と ε を加えたものを **添加複体** という。すなわち $\mathbb{C} = \{C_q(K), \partial_q\}$ に対して,

$$\begin{array}{ll} \widetilde{C}_q(K) = C_q(K)\ (q > 0), & \widetilde{C}_0(K) = ker\ \varepsilon, \\ \widetilde{\partial}_q = \partial_q\ \ (q > 0), & \widetilde{\partial}_0 = \varepsilon \end{array}$$

とおくと

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathbb{C}} & : & \cdots \to 0 \to \widetilde{C}_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \widetilde{C}_{n-1}(K) \to \cdots \to \widetilde{C}_q(K) \xrightarrow{\partial_q} \widetilde{C}_{q-1}(K) \to \\ & & \cdots \to \widetilde{C}_1(K) \xrightarrow{\partial_1} \widetilde{C}_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} \widetilde{C}_{-1}(K) \to 0 \end{array}$$

ができる。これを, 添加複体の **被約鎖複体** (***reduced chain complex***) と言い, $\widetilde{\mathbb{C}} = \{\widetilde{C}_q(K), \widetilde{\partial}_q\}$ と表す。

この $\widetilde{\mathbb{C}}$ に対して, ホモロジー群が前と同じように,

$$\begin{array}{lll} q \geq 1 \text{ のとき} & H_q(\widetilde{\mathbb{C}}) = Z_q(\widetilde{\mathbb{C}})/B_q(\widetilde{\mathbb{C}}) & (\ = Z_q(\mathbb{C})/B_q(\mathbb{C}) = H_q(\mathbb{C})\ ), \\ q = 0 \text{ のとき} & Z_0(\widetilde{\mathbb{C}}) = ker\ \varepsilon, & \\ & B_0(\widetilde{\mathbb{C}}) = Im\ \partial_1, & \\ & H_0(\widetilde{\mathbb{C}}) = Z_0(\widetilde{\mathbb{C}})/B_0(\widetilde{\mathbb{C}}) & \end{array}$$

と定義できる。このとき, この $H_q(\widetilde{\mathbb{C}})$ のことを $\widetilde{H}_q(K)$ と表し,
被約ホモロジー群 (***reduced Homology group***) という。

$$H_0(\mathbb{C}) = Z_0(\mathbb{C})/B_0(\mathbb{C}) = C_0(\mathbb{C})/B_0(\mathbb{C})$$

だから, $g : \mathbb{Z} \to C_0(\mathbb{C})$ を K の頂点 a_0 を勝手にとって,

$$g(\sum_i n_i) = \sum_i n_i a_0$$

と定義すると, $\varepsilon g = 1$ となるので,

$$0 \to H_0(\widetilde{\mathbb{C}}) \to H_0(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z} \to 0$$

は完全列である。よって,

$$H_0(K) \cong \widetilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$$

である。
また直接同型写像を次のように定めることもできる。$\mathbb{Z}$ の生成元を 1 とすると $\exists a_0 \in H_0(K)\ ;\ \varepsilon(a_0) = 1$ だから $a \in H_0(K)$ を $(a - \varepsilon(a)a_0, \varepsilon(a))$ に移せばこの写像は同型である。なぜなら, $\forall (c, z) \in \widetilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$ に対して, $c + za_0 \in H_0(K)$ をとると, (c, z) に写像されるので全射である。
その他は各自示せ。

普通の鎖複体の時と同じように, 被約複体の時も鎖準同型が定義される。すなわち, $\widetilde{\mathbb{C}} = \{\widetilde{C}_q, \widetilde{\partial}_q\}$, $\widetilde{\mathbb{C}}' = \{\widetilde{C}'_q, \widetilde{\partial}'_q\}$ を二つの被約複体とし,

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\mathbb{C}} & : & \cdots \to 0 \to \widetilde{C}_n \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} \widetilde{C}_{n-1} \to \cdots \to \widetilde{C}_q \xrightarrow{\widetilde{\partial}_q} \widetilde{C}_{q-1} \to \cdots\cdots \to \widetilde{C}_1 \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} \widetilde{C}_0 \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} \widetilde{C}_{-1} \to 0 \\ \widetilde{\mathbb{C}}' & : & \cdots \to 0 \to \widetilde{C}'_n \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_n} \widetilde{C}'_{n-1} \to \cdots \to \widetilde{C}'_q \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_q} \widetilde{C}'_{q-1} \to \cdots\cdots \to \widetilde{C}'_1 \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_1} \widetilde{C}'_0 \xrightarrow{\widetilde{\partial}'_0} \widetilde{C}'_{-1} \to 0 \end{array}$$

とする。このとき $\{\ \widetilde{f}_r : \widetilde{C}_r \to \widetilde{C}'_r\ \}$ が定義されていて, 次の図式が可換であるとき,

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \widetilde{C}_{r+1} \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{r+1}"] \arrow[d, "\widetilde{f}_{r+1}"] & \widetilde{C}_r \arrow[r, "\widetilde{\partial}_r"] \arrow[d, "\widetilde{f}_r"] & \widetilde{C}_{r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}_{r-1}"] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{C}_0 \arrow[r, "\widetilde{\partial}_0"] \arrow[d, "\widetilde{f}_0"] & \widetilde{C}_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}_{-1}"] & 0 \\ {} \arrow[r] & \widetilde{C}'_{r+1} \arrow[r, "\widetilde{\partial}'_{r+1}"] & \widetilde{C}'_r \arrow[r, "\widetilde{\partial}'_r"] & \widetilde{C}'_{r-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{C}'_0 \arrow[r, "\widetilde{\partial}'_0"] & \widetilde{C}'_{-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

すなわち

$$\widetilde{f}_{r-1}\ \widetilde{\partial}_r = \widetilde{\partial}'_r\ \widetilde{f}_r$$

が成り立つ時 (被約複体の) **鎖準同型 (chain homomorphism)** と言う。

　このときも単体写像から, 同様に (被約複体の) 鎖準同型が定まる。
この時定まる準同型を

$$\widetilde{f}_{\#q}:\ \widetilde{C}_q(K_1)\to\widetilde{C}_q(K_2)\qquad(q=0,1,\cdots)$$

と表し,

$$\{\widetilde{f}_{\#q}\}:\{\widetilde{C}_q(K_1)\}\to\{\widetilde{C}_q(K_2)\}$$

すなわち

$$\widetilde{f}_{\#}:\widetilde{\mathbb{C}}_1\to\widetilde{\mathbb{C}}_2$$

が得られる。

　また, 被約複体の鎖準同型からも同様に

定理 14.1
$\widetilde{f}$ を $\widetilde{\mathbb{C}}\to\widetilde{\mathbb{C}}'$; 被約複体の鎖準同型とすると,
$\widetilde{f}$ は $\widetilde{\mathbb{C}}$ の (被約) ホモロジー群から $\widetilde{\mathbb{C}}'$ の (被約) ホモロジー群への準同型

$$\widetilde{f}_*:H_*(\widetilde{\mathbb{C}})\to H_*(\widetilde{\mathbb{C}}')$$

をひきおこす。($\widetilde{f}_{*r}:H_r(\widetilde{\mathbb{C}})\to H_r(\widetilde{\mathbb{C}}')$ である)

15　非輪状な複体 (acyclic complex)

　まず 複体 K が 非輪状であるを定義しよう。

定義 15.1
複体 K が ***非輪状 (acyclic) である*** とは

$$\begin{array}{lrcl} & \widetilde{H}_q(K) & = & 0\ (\forall q\in\mathbb{Z}) \\ \text{すなわち} & & & \\ & H_q(K) & = & 0\ (q\neq 0) \\ & H_0(K) & \cong & \mathbb{Z} \end{array}$$

のときをいう。

　さて, x と K が 可接合のとき,

$$x*K=K\cup\bigcup_{\sigma\in K}x*\sigma$$

であった。 K の鎖 c^r に対して, $x*c^r$ は $x*K$ の 鎖であるが, このとき $c^r=\sum_{i=1}^{s}n_i\sigma_i^r$ とすると, $x*c^r=\sum_{i=1}^{s}n_i(x*\sigma_i^r)$ だから, 境界作用素 ∂_{r+1} での像は,

補題 15.2

$$\begin{cases} \partial_{r+1}(x * c^r) & = & c^r - x * \partial_r(c^r) \quad (r > 0) \\ \partial_1(x * c^0) & = & c^0 - \varepsilon(c^0)\, x \end{cases}$$

となる。

<u>証明</u>　r-単体 $\sigma^r = a_0 a_1$ については, $x * \sigma^r = x a_0 a_1 \cdots a_r$ だから,

$$\partial_{r+1}(x * \sigma^r) = a_0 a_1 \cdots a_r + \sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+1} x a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_r$$

であり, $\partial_r \sigma^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_r$ だから,

$$\partial_{r+1}(x * \sigma^r) = \sigma^r - x * \partial_r \sigma^r$$

である。

r-鎖 $c^r = \sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i^r$ については,

$$\begin{aligned} &\partial_{r+1}(x * c^r) = \sum_{i=1}^{s} n_i \partial_{r+1}(x * \sigma^r) = \sum_{i=1}^{s} n_i(\sigma_i^r - x * \partial_r \sigma^r) \\ &= \sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i^r - \sum_{i=1}^{s} n_i(x * \partial_r \sigma^r) = \sum_{i=1}^{s} n_i \sigma_i^r - x * \sum_{i=1}^{s} n_i \partial_r \sigma^r = c^r - x * \partial_r c^r \end{aligned}$$

となる。

0-単体 $\sigma_0 = a$ については,

$\partial_1(x * \sigma^0) = \sigma^0 - x$ であって,

0-鎖 $c^0 = \sum n_a a$ については,

$$\begin{aligned} &\partial_1(x * c^0) = \partial_1\left(\sum n_a x a\right) = \sum n_a \partial(xa) = \sum n_a (a - x) \\ &= \sum n_a a - \sum n_a x = c^0 - \varepsilon(c^0) x \end{aligned}$$

となる。 □

定理 15.3

$$K = K(\sigma^r), \quad \dot{K} = K(\dot{\sigma}^r)$$

とおくと,

$$\begin{cases} H_s(K) & = & 0 \quad (s \neq 0) \qquad \widetilde{H}_s(K) \;=\; 0 \\ H_0(K) & \cong & \mathbb{Z} \end{cases}$$

すなわち, K は非輪状な複体である。また,

$$\begin{cases} H_s(\dot{K}) & = & 0 \quad (s \neq r-1, 0) & \widetilde{H}_s(\dot{K}) & = & 0 \quad (s \neq r-1) \\ H_{r-1}(\dot{K}) & \cong & H_0(\dot{K}) \;\cong\; \mathbb{Z} & \widetilde{H}_{r-1}(\dot{K}) & \cong & \mathbb{Z} \end{cases}$$

である。

<u>証明</u>　$\sigma^r = a_0 a_1 \cdots a_r$ とし, $K = K(\sigma)$ に可接合な x をとる[2]。
このとき, 単射な写像 $f : K \to x * K$, $g : x * K \to K$ を次のように定める。

$$\begin{cases} f(a_i) = a_i & (0 \leq i \leq r) \\ g(x) = a_0, \quad g(a_i) = a_i & (0 \leq i \leq r) \end{cases}$$

明らかに f, g は単射写像で, そして, $gf = 1_K$ だから,

$$g_* f_* = 1_*, \qquad \widetilde{g}_* \widetilde{f}_* = \widetilde{1}_*$$

である。また準同型 $D_s(c^s) : \widetilde{C}_s(K) \to \widetilde{C}_{s+1}(x * K)$ を,

$$\begin{cases} D_s(c^s) &=& x\ c^s & (c^s \in \widetilde{C}_s(K), s \geqq 0) \\ D_s(1) &=& x & (\text{ただし } 1 \text{ は } \widetilde{C}_{-1}(K) = \mathbb{Z} \text{ の生成元}) \end{cases}$$

と定めれば,

$$\begin{aligned} &\partial D_s(c^s) + D_s \partial(c^s) = \partial(x * c^s) + D_s \partial(c^s) \\ &= \begin{cases} c^s - x * \partial(c^s) + x * \partial c^s = c^s & (s > 1 \text{ のとき}) \\ c^1 - \varepsilon(c^0)\ x = c^1 & (s = 1 \text{ のとき}) \\ t \cdot 1 + 0 = t\ 1 \quad (c^{-1} = t\ 1 \text{ とすると}) & (s = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

で, D_s は $\tilde{f}_s$ と 0 の鎖ホモトピーとなる。よって,

$$\widetilde{f}_* = 0$$

である。すなわち,

$$\begin{cases} \widetilde{1}_* &=& 0 \\ \widetilde{H}_s(K) &=& 0 \end{cases}$$

となる。
$s < r$ については, $C_s(K) = C_s(\dot{K})$ だから

$$H_s(K) = H_s(\dot{K}) \quad (s < r - 1)$$

である。また, $s = r - 1$ の時は, 同型写像　$\theta : \mathbb{Z} \to C_r(K)$ を

$$\theta(n) = n\sigma^r \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

と定義し, $\partial_r \theta\ :\ \mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K)$ を考えると,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta} & C_r(K) & \xrightarrow{\partial^r} & C_{r-1}(K) \\ n & \longmapsto & n\sigma^r & \longmapsto & n \displaystyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_0 a_2 \cdots \hat{a}_i \cdots a_r \end{array}$$

[2] $K \subset \mathbb{R}^N$ ならば, $x \in \mathbb{R}^{N+1} - \mathbb{R}^N$ にとれば 可接合である。

なので, $\partial_r\theta(n)=0$ ならば, $\sigma_i^{r-1}=a_0a_1\cdots\hat{a}_ia_r$ と表わせば,

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i n\sigma_i^{r-1}=0$$

となり, $n=0$ となるので, $\partial_r\theta$ は単射である[3]。
したがって θ が全射であることに注意すれば, $\partial_r\theta$ によって, $\partial_r\theta(\mathbb{Z})=\partial_r(C_r(K))=B_{r-1}(K)$ となる。
すると, $H_{r-1}(\overset{\bullet}{K})=Z_{r-1}(\overset{\bullet}{K})\Big/B_{r-1}(\overset{\bullet}{K})$ であって, $B_{r-1}(\overset{\bullet}{K})=Im\,\partial_r=0$ なので,

$$H_{r-1}(\overset{\bullet}{K})=Z_{r-1}(\overset{\bullet}{K})=Z_{r-1}(K)$$

となる。ところが, $H_{r-1}(K)=0$ $(r\geq 2)$ で, $H_{r-1}(K)=Z_{r-1}\Big/B_{r-1}(K)$ だから,

$$Z_{r-1}(K)=B_{r-1}(K)$$

である。よって,

$$H_{r-1}(\overset{\bullet}{K})=B_{r-1}(K)$$

となる。したがって,

$$H_{r-1}(\overset{\bullet}{K})\cong\mathbb{Z}$$

で, その元は, サイクル $\partial_r(n\cdot\sigma^r)=\displaystyle\sum_{i=0}^{r}(-1)^i n\sigma_i^{r-1}$ で代表される。
また 生成元は $\displaystyle\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\sigma_i^{r-1}$ である。 □

[3] $\mathbb{Z}, C_r(K)$ はどちらも自由加群だから, いつでも単射は言えるのでこの証明は実はいらない