数列と級数の収束

3E 2004.1.20-27.

1. 級数収束の必要条件

実数列 sequence$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ が実数 α に $n \to \infty$ で近付くとき, 即ち

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha - x_n| = 0$$

が成り立つとき,「数列 $\{x_n\}$ は α に収束する」と表現して

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \text{又は}\ x_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$$

と書き,「数列 $\{x_n\}$ の極限は α である」, とも言った. 極限に関して第 2 学年で学んだ下の事柄は基本的である:

Lemma 1. $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$ である収束数列と定数 γ について:

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \alpha \pm \beta$

b) $\lim_{n\to\infty} \gamma x_n = \gamma\alpha$

c) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \alpha\beta$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

教科書で示された次の事柄は基本的だから, その証明も含めて再現する.

例題 2 数列 $\{a_n = x^n |\ n = 1, 2, \cdots\}$ の収束発散を調べなさい.

(解) a) $|x| > 1$ の場合, $|x| = 1 + h,\ h > 0$ と置く事ができる. 2 項定理から

$$|x|^n = (1+h)^n > 1 + nh > nh$$

だから $\lim_{n\to\infty} |x|^n > \lim_{n\to\infty} nh = \infty$, 発散である.

b) $x = 1$ の場合は $x^n = 1$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, 極限 1 に収束する. また $x = -1$ の場合は $(-1)^n = \pm 1$, 振動し収束しない (発散である).

c) $|x| < 1$ なら $a = 1/|x| > 1$ で

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

収束で $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. **(例題終り)**

数列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

を (無限) 級数 series と言う. この級数は簡略して $\sum x_n$ と書く事もある. 始めの n 項の和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

を (無限) 級数の「第 n 部分和 partial sum」と言う. 級数の収束, 発散はこれら部分和の作る数列 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots\}$ の収束, 発散で定義される. 即ち収束 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = S$ が成り立つとき, 級数は収束する, 収束級数であると定義し, 発散のとき級数は発散すると言う.

Lemma 3. (級数収束の必要条件) 級数 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ が収束するための必要条件は $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ の成立である.

(証明) 部分和 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ について

$$\begin{aligned} & S_n - S_{n-1} \\ &\quad = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \\ &\quad = x_n \end{aligned}$$

であり, 数列 $\{S_n\}$ が S に収束すれば,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= S - S = 0 \end{aligned}$$

となる. 故に $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ は級数収束の必要条件である. ■

例題 4. (無限) 等比級数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

について次を示しなさい:

a) $|x| \geqq 1$ の時級数は発散する.
b) $|x| < 1$ の時級数は $1/(1-x)$ に収束する.

(証明) a) 例題 2. の結果によれば, $n \to \infty$ のとき x^n が 0 に収束するのは $|x| < 1$ の場合だけで,

$|x| \geqq 1$では等比級数は収束の必要条件を満たさず発散する.

b) 任意の x で次の部分和の公式が成り立つ:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

故に**例題 2.** の $|x| < 1$ での結果 $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ から, 等比級数は $1/(1-x)$ に収束する. ■

級数収束の必要条件はこのように発散の判定には簡単便利だが, 収束の判定 (上の等比級数では部分和公式のおかげで可能だったが) には力が足りない; 確定判断には収束の十分条件を用いなければならない. それらについて明快な見通しは, 初めて聞くと意外だろうが, 「実数の連続性」が与える. 節を変えよう.

2. 実数の連続性と収束の十分条件

定義 6. 実数の集合 (組)A, B が

- **a)** 任意の実数は A, B のどちらかの組に必ず入り,
- **b)** A 組の任意数 a と B 組の任意数 b は不等式 $a < b$ を満たす,

の 2 つの性質を持つとき, 対 $\{A, B\}$ を 実数の切断(デデキント[1]) と名付ける. **(定義 6. 終り)**

実数直線を鋭い刃物で二つに切れば, 上の実数の組が B であり, 下の実数の組が A である. 刃の先はある実数 x に当るはずで空を切る事はなく, 切断は具体的には自明な

$$A = \{a |\ a \leqq x\}, \quad B = \{b |\ b > x\}$$
$$A = \{a |\ a < x\}, \quad B = \{b |\ b \geqq x\} \tag{1}$$

のどちらかの実数切り分けである. この事の正しさの直感的納得に不自由はないだろうから, これを次の「連続の公理」, より詳しくは (有理数から切断で構成できると示された) 実数で成り立つ「デデキントの定理[2]」, としてこれ以上の論議はせず受け入れて進もう:

公理 7.(実数の連続性) 実数の切断 $\{A, B\}$ はその境目として必ず 1 つの実数 x を定める. 具体的には x は下組 A の最大数であり上組 B には最小数がないか, 或いは下組 A には最大数がなく, 上組 B の最小数が x であるか, の二者択一である. **(公理 7. 終り)**

具体応用例で**公理 7.** の有用さを見よう.

定理 8. (有界な単調数列の収束) 実数列 $\{x_n\}$ が単調増大列即ち $x_n \leqq x_{n+1}$ で, かつすべての n に対して $x_n < M$ となる実数 M が存在するとき, 「(上に) 有界 bounded from above な (単調) 増大列」と言う. 同様に $\{x_n\}$ が単調減少列即ち $x_n \geqq x_{n+1}$ で, すべての n で $x_n > M$ となる実数 M が存在する場合, 「$\{x_n\}$ は (下に) 有界 bounded from below な (単調) 減少列」と言う. 有界な単調増大列或いは単調減少列, まとめて有界な単調列, は収束する.

(証明) 上を抑えられた増大列で考える. 実数を A, B の 2 組に分ける; A 組はある番号 n に対して $a \leqq x_n$ が成り立つ数 a の全体とし, B 組は A 組には入らない残りのすべての数を集める. 明らかに, A 組は増大列のすべての数 $\{x_n\}$ を含み, B 組には例えば M 以上のすべての数が含まれる. 任意の実数 c に対しては $c \leqq x_n$ となる番号 n があって $c \in A$ であるか, 或いはそれがなくすべての番号 n に対して $c > x_n$ で $c \in B$ か, の二者択一だから, A, B は実数を余す所なく 2 組に分け, A 組の任意数 a と B 組の任意数 b とは $a < b$ を満たす; 実際 $a \in A$ には $a \leqq x_n$ となる番号 n があり, $x_n < b \in B$ だから, である. 故に A, B は実数の切断で, **公理 7.** により境界に実数 x を定める. 任意の (小さい) 正の数 $\epsilon > 0$ を取ると, $x - \epsilon$ は A 組の数なのである番号 n 以上のすべての番号 $k \geqq n$ に対し $x_n \leqq x_k$ より

$$x - \epsilon \leqq x_k \leqq x, \quad k \geqq n,$$

即ち $0 \leqq x - x_k \leqq \epsilon$ が成り立つ. $\epsilon > 0$ は任意だ

[1] デデキントの思想は 実数の組分け ではなく, 各実数を有理数の組分け (切断) である, と構成し, 収束などの論理すべてをそれで貫く事だろう. 事柄の深い内容については松本幸夫:「数学的な『点』をめぐって」数理科学第 39 巻 9 号 (2001) pp. 11-18, 宇野利雄, 洪姙植: 「級数入門」(新数学シリーズ, 培風館, 1965) pp. 23-25 等参照. 当然想像される通りこの立場の議論は複雑難解になる. 結果として得られた実数で考えれば切断はある実数 x を境界とする実数全体の上下の組への明らかな組分け (1) であり, 論理の純粋さと共に論議の簡明も大いに大切だから, この平易な構造の方を収束の理解に利用するのが文献 [2] の立場だろう. ここではこれに従う.

[2] 高木貞治: 「解析概論」pp. 3-4.

から $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 以外にはない. 減少列の場合にも証明は全く同様である. ■

直ちに, 級数の収束の重要な十分条件がいくつか得られる:

定理 9.(正項級数) 級数 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ の各項がすべて正の数の場合 <u>正項級数</u> と呼ぶ. 部分和

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

が (上に) 有界な[3]正項級数は収束する.

(証明) 正項級数の部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ は単調増大列で, 仮定によって上に有界である. ゆえに $\{S_n\}$ は収束する. ■

定理 10. (級数の絶対収束: 十分条件) 級数 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ に対して正項級数

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + \cdots$$

が収束すれば, もとの級数は収束する. このとき <u>級数 $x_1 + x_2 + \cdots$ は絶対収束する</u> と言う.

(証明) 証明のため $P_0 := 0, n \geqq 1$ に対し

$$P_n := \begin{cases} P_{n-1} + x_n & (x_n \geqq 0) \\ P_{n-1} & (x_n < 0) \end{cases}$$

となる列 $\{P_n\}$ と, $N_0 := 0, n \geqq 1$ に対し

$$N_n := \begin{cases} N_{n-1} & (x_n \geqq 0) \\ N_{n-1} + |x_n| & (x_n < 0) \end{cases}$$

となる列 $\{N_n\}$ を定義する; $\{P_n\}$ は正の x_n だけを集める, $\{N_n\}$ は負の x_n の絶対値だけを加える, 各正項級数の部分和列, 共に増大列で

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = P_n - N_n$$

を満たす. さて

$$0 \leqq P_n \leqq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| =: M,$$

$$0 \leqq N_n \leqq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| =: M,$$

だから増大列 $\{P_n\}, \{N_n\}$ は有界で収束し,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = P_n - N_n$$

も $n \to \infty$ で収束する. ■

次の収束発散の十分条件も応用が広い.

定理 11. (ダランベールの比判定法) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ において $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \rho$ が <u>存在する場合</u>,

a) $|\rho| > 1$ のとき級数は発散する.

b) $|\rho| = 1$ のとき発散収束は不明.

c) $|\rho| < 1$ のとき級数は絶対収束する.

(証明) a) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \rho > 1$ だから, 任意の $1 < c < \rho$ となる c に対してある番号 N があって $n \geqq N$ なら $|x_{n+1}| > c|x_n|$ である. 級数の始めの N 項は取り去っても収束に関係ないから, 全ての n について

$$|x_2| > c|x_1|, \ \ |x_3| > c|x_2| > c^2|x_1|, \ \ \cdots,$$

$$|x_n| > c^{n-1}|x_1|, \quad |x_1| > 0$$

が成り立つとしてよい. これは $\lim_{n\to\infty} |x_n| \neq 0$ を意味し, 収束の必要条件を満たさないから級数は発散する.

b) 収束も発散もあり得る事は例で見る.

c) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \rho < 1$ だから, $\rho < c < 1$ となる任意の c に対しある番号 N があって $n \geqq N$ なら $|x_{n+1} < c|x_n|$ である. 級数の始めの N 項は取り去っても収束に関係ないから, 全ての n について

$$|x_2| < c|x_1|, \ \ |x_3| < c|x_2| < c^2|x_1|, \ \ \cdots,$$

$$|a_n| < c^{n-1}|a_1|$$

として考えてよい. 故に

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| < |x_1| \sum_{l=0}^{\infty} c^l = \frac{|x_1|}{1-c}$$

であり, 級数 $x_1 + x_2 + \cdots$ は絶対収束する. ■

無限等比級数の公比 $c < 1$ での収束からより一般の級数の収束への言及を可能にするこの判定は強力である. しかし $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1}/x_n| = \rho$ の存在の仮定はきつい適用限界ではあるが.

---

[3] $S_n < M$ となる定数 M が存在するような.

3. べき (整) 級数と関数の展開

変数 x のべき (冪, 巾) を項とする級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{2}$$

をべき級数, 或いは整級数という. 定数 a はべき展開の中心と呼ばれる,

以下では

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \rho$$

が存在するべき級数に話を限る. 次が成り立つ:

定理 12. 数 $0 \leqq R \leqq \infty$ を

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

で定めて, べき級数 (2) の収束半径[4]と呼ぶ. 次が成り立つ (アーベルの定理):

a) $|x-a| < R$ では (2) 収束[5]する.
b) $|x-a| > R$ では (2) は発散する.

(証明) 任意の x について

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right|$$

$$= |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{|x-a|}{R}$$

だから, ダランベールの判定によって (2) は

$$\frac{|x-a|}{R} < 1 \text{ なら収束,}$$

$$\frac{|x-a|}{R} > 1 \text{ なら発散}$$

である. ■

本来アーベルの定理は, $\lim_{n\to\infty} |c_{n+1}/c_n|$ が存在するか否かに関係なく, すべてのべき級数にはある 0, 正, 又は ∞ の数 R が必ず存在する事, そして **a),b)** が成り立つ事, を示すもので, R がべき級数の収束半径である. この詳細は第 4 学年数学概論 I,II に期待しよう.

問 13. 次のべき級数の収束半径を求めなさい.

a) $e^x := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

c)[6] $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)(n+2)} x^{2n}$

べき級数の大特徴は, 収束半径内では何回でも微分可能な関数である事, そしてその導関数はべき級数の各項を微分 (「項別微分」) して得られる, という所, にある. この事柄の深い内容は第 4 学年数学概論 II で「複素解析」から学ぶ. 証明は難しくはないが長いので, ここでは次の事柄だけを指摘しておく:

定理 14. べき級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ に伴われる 2 つのべき級数

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

を定義する.

a) べき級数 $f_1(x)$ の収束半径 R_1 は $f(x)$ の収束半径 R と同じである.
b) べき級数 $f_2(x)$ の収束半径 R_2 も $f(x)$ の収束半径 R と同じである.
c) 収束円内で $f(x)$ の各階数の導関数は存在してべき級数の同回数項別微分べき級数で表される. 特に $f'(x) = f_1(x)$ である. また $f(x)$ の展開係数は

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

である.
d) 同様に収束円内で $f(x)$ は何回でも積分可能で, べき級数の同回数の項別積分のべき級数で与えられる. 特に $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx = f_2(x)$ である.

(証明) a) $f_1(x)$ の収束半径 R_1 は

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

故に $R_1 = R$ である. これから直ちにべき級数は項別に何回微分しても収束半径が変らない事, 元

---

[4] Radius of convergence.
[5] 絶対収束.
[6] $t = x^2$ のべき級数としての収束半径 R' を求め, $R = \sqrt{R'}$ を答としよう.

のべき級数と同じ収束半径内で収束する事がわかる. この事実は冪級数が同一収束半径内で何回でも微分できる関数を表す事を強く示唆し, 実際その直感通りで, それが **c)** に述べられている内容である.

b) 同様に $f_2(x)$ の収束半径 R_2 も

$$R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{c_{n+1}}{n+2}\right)\Big/\left(\frac{c_n}{n+1}\right)\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot\frac{n+1}{n+2} = R.$$

c,d) べき級数が表す関数 $f(x)$ の微積分可能性とその結果が項別微積分されたべき級数 $f_1(x)$ および $f_2(x)$ である事の証明は難しくはないが技術的で長く, 読解の魅力に乏しい. **a,b)** の結果から納得に不自由はないと思われるので省略し, $f(x)$ 及び導関数の a での値と冪級数の係数との関係 (3) だけを見よう. 次は明らかである:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a-a)^n = c_0$$
$$f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(a-a)^{n-1} = 1\cdot c_1$$
$$f''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(a-a)^{n-2} = 2\cdot 1\cdot c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}c_n(a-a)^{n-k}$$
$$= k!c_k$$

これらは直ちに

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

を与える. ■

　べき級数が収束径内で表す関数 $f(x)$ とべき級数の係数とには常に関係 (3) が成り立つ. この関係を満たす係数を持つべき級数は $f(x)$ のテイラー級数, テイラー展開, 特に $a=0$ の場合はマクローリン級数, マクローリン展開, と呼ばれる. だから**定理 13c)** の内容は, べき級数は収束半径内では常に, それが表す関数のテイラー, マクローリン展開である, という明瞭な視野にまとめられる. 証明の省略から幾分もどかしさがあろうが, この展望とべき級数の項別微積分を自由に操る計算力とを身に付けて欲しい. 完全な透視は, 特に, 数学概論 II の複素解析の学習を楽しみに待とう.

例題 15. (p.17, **例**) 等比級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots$$

の項別微積分で次を示しなさい:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$
$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

問 16. (p.17, **問 3**) 次の等式を導きなさい:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$
$$\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

問 17. (p.18, **例**, p.19, **例題 1.**, **問 4.**) 次の関数のマクローリン展開を求めなさい.

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 　　**2)** $f(x) = e^x$

3) $f(x) = \sin x$ 　　**4)** $f(x) = \cos x$

問 18. (p.19, **問 5**) 次の関数のマクローリン展開の x^3 の項までを求めなさい.

1) $\sqrt{1+x}$ 　　**2)** $e^x \sin x$

問 19. (p.20, **例題 2, 問 6**) 次の関数の (　) 内の点でのテイラー展開を求めなさい.

1) $f(x) = \log x \quad (x=1)$

2) $f(x) = e^x \quad (x=1)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \quad (x=2)$

(以上)