基礎数理　室田

コンパクト集合上の連続関数

一様収束は，何のため？

▼　連続関数の　各点収束　極限は，連続関数とは限らない
◎　連続関数の　一様収束　極限は，連続関数である（→定理２）

コンパクト集合上の連続関数　の有り難さを３つ挙げると …

コンパクト集合 K 上の連続関数は,

◎　最大値と最小値をもつ（→定理１）　$\longrightarrow$ 最適化ができる
◎　一様連続である（→定理４）　$\longrightarrow$ 近似ができる
◎　その全体 $\mathcal{C}(K)$ が一様ノルムに関して完備距離空間をなす（→定理３）
$\longrightarrow$ 距離空間の枠組みが利用できる

例えば,　（復習：開区間 $(0,1)$ はコンパクトでない）

・$f(x)=x(1-x)$ は，開区間 $(0,1)$ において最小値をもたない.
・$f(x)=\tan x$ は，開区間 $(-\pi/2,\pi/2)$ において最大値も最小値ももたない.
・$f(x)=1/x$ は，開区間 $(0,1)$ において連続であるが一様連続でない.

数学的に正確に述べると …

(X,d): 距離空間,　K: 距離空間 X のコンパクト部分集合,
$f:K\to\mathbf{R}$　連続関数,　$\mathcal{C}(K)$: K 上の連続関数の全体

定理１：コンパクト集合上の連続関数は，最大値と最小値をもつ.

証明：　まず，作戦を練る.
◇値域　$R=\{f(x)\mid x\in K\}$　を考えるのは自然である.
◇最大値 (max) について証明すればよい.
　$\Longrightarrow$ max の存在はまだ分かっていないから，とりあえず，$b=\sup R$（R の上限）とおく.
◇ $b\in R$ ならば　$\exists a\in K$: $f(a)=b$ となって証明が終わるから，$b\in R$ を示せばよい.
　$\Longrightarrow$ R が有界閉集合であることを示せばよい.
　$\Longrightarrow$ R が点列コンパクトであることを示せばよい.

………という訳で，以下，R の点列コンパクト性を示す.

R に含まれる任意の点列 $(y_n)_n$ をとる (→これが R の点に収束する部分列をもつことを示したい)．$f(x_n)=y_n$ となる点列 $(x_n)_n\subseteq K$ が存在する．K の点列コンパクト性より，ある収束部分列 $(x_{n(k)})_k$ と $a\in K$ が存在して，$x_{n(k)}\to a$ $(k\to\infty)$. すると，f の連続性より $f(x_{n(k)})\to f(a)$ $(k\to\infty)$. $y_{n(k)}=f(x_{n(k)})$ とおくと，$(y_{n(k)})_k$ は $(y_n)_n$ の収束部分列であり，その極限値は $f(a)\in R$.　（証終）

定義（一様ノルム）：　$\displaystyle ||f||_\infty=\sup_{x\in K}|f(x)|$　　f の 一様ノルム

★定理１により，$f \in \mathcal{C}(K)$ に対して，$\sup_{x\in K}|f(x)|$ は有限値なので，
２つの関数 f と g の距離 $d(f,g) = ||f-g||_\infty$ が有限値になってくれる．
★コンパクト集合 K 上の連続関数の全体 $(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ は距離空間をなす．

定理２：連続関数の一様収束極限は，連続関数（定義域 K のコンパクト性は無関係）．

証明：まず，作戦タイム．
◇連続関数列 $(f_n)_n$ の一様収束極限を g として，点 a における g の連続性を考える．
示したいのは g の連続性であって一様連続性ではないから，a は固定しておけばよい．
◇連続性とは，$x \simeq a$ のとき，$g(x) \simeq g(a)$ となることである．g は f_n の極限だから，$f_n(x) \simeq f_n(a)$ を経由して評価すればよい．つまり，図式

$$\begin{array}{rccc} n=\infty: & g(x) & & g(a) \\ & \uparrow & & \uparrow \\ n: & f_n(x) & \longleftrightarrow & f_n(a) \end{array}$$

を念頭において，

$$\begin{aligned} |g(x)-g(a)| &\le |f_n(x)-f_n(a)| + |f_n(x)-g(x)| + |f_n(a)-g(a)| \\ &\le |f_n(x)-f_n(a)| + 2||f_n-g||_\infty \end{aligned} \tag{1}$$

の右辺の各項を不等式評価すればよさそう．

………以上の考察を踏まえて，証明をはじめる．

連続関数列 $(f_n)_n$ の一様収束極限を g とする．１点 $a \in K$ を固定する．示したいことは，a における g の連続性，すなわち，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0: \quad \forall x\in K,\ d(x,a)<\delta \Rightarrow |g(x)-g(a)|<\varepsilon \tag{2}$$

である．$\varepsilon>0$ を任意に固定する．
　一様収束の定義により，

$$\forall\varepsilon'>0,\ \exists n_0,\ \forall n:\ n\ge n_0 \Rightarrow ||f_n-g||_\infty < \varepsilon' \tag{3}$$

であるから，$\varepsilon' = \varepsilon/3$ とすると，ある n (例えば $n=n_0$）が存在して，

$$||f_n-g||_\infty < \varepsilon/3. \tag{4}$$

　上で固定した n について，f_n は a で連続だから，

$$\forall\varepsilon'>0,\ \exists\delta>0: \quad \forall x\in K,\ d(x,a)<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(a)|<\varepsilon' \tag{5}$$

である．$\varepsilon'=\varepsilon/3$ に対する $\delta>0$ を考えると，(4) と (5) を用いて (1) の右辺を抑えると，

$$\forall x\in K,\ d(x,a)<\delta \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon/3 + 2(\varepsilon/3) = \varepsilon$$

となる．これで (2) が示された． （証終）

定理３：コンパクト集合 K 上の連続関数の全体 $(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ は完備な距離空間.

証明：　まず，状況を整理して，作戦を練る．
◇ $(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ が距離空間になることは，既知だから，問題なのは完備性だけ.
◇完備性とは，任意のコーシー列が収束することをいう．ここでの収束は一様収束の意味である．
◇ $(f_n)_n$ が一様収束する行き先（極限）を見出す必要があるが，それは，多分，$(f_n)_n$ の各点収束極限である．　問題点は３つある．
　(A) 各点収束極限 g は存在するのか．(B) 収束 $f_n \to g$ は一様か．(C) g は連続か.

………以上の状況分析をもとに，証明をはじめる．

$(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ における任意のコーシー列 $(f_n)_n$ を考える．コーシー列の定義により，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall m, n:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow ||f_m - f_n||_\infty < \varepsilon/2 \tag{6}$$

が成り立っている．
　(A) 各 $x \in K$ に対して，$|f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||_\infty$ が成り立つので，(6) より，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall m, n:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2. \tag{7}$$

したがって，数列 $(f_n(x))_n$ は $\mathbf{R}$ におけるコーシー列である．$\mathbf{R}$ の完備性より，この数列は，ある値 $g(x)$ に収束する．
★これで，各点収束極限 g の存在が示された．
　(B) g が $(f_n)_n$ の各点収束極限であることを式でかくと，

$$\forall x \in K,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 = n_1(x, \varepsilon),\ \forall m:\ m \geq n_1 \Rightarrow |f_m(x) - g(x)| < \varepsilon/2. \tag{8}$$

(7) と (8) において，$m = \max(n_0, n_1)$ と選んで，

$$|f_n(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

を用いると，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall n:\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \tag{9}$$

となる．ここで n_0 は x に依存していないので，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall n:\ n \geq n_0 \Rightarrow ||f_n - g||_\infty < \varepsilon. \tag{10}$$

すなわち，$(f_n)_n$ は g に一様収束する．
　(C) (B) により，g は連続関数の一様収束極限である．したがって，定理２により，g は連続関数. （証終）

定理４：コンパクト集合上の連続関数は，一様連続.

証明：　まず，作戦を練る.
◇示したいこと (一様連続性) は,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \hat{\delta} = \hat{\delta}_\varepsilon > 0: \quad \forall x, y \in K,\ d(x,y) < \hat{\delta}_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{11}$$

◇仮定より，f は各点 $x \in K$ で連続だから,

$$\forall x \in K,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta_{x,\varepsilon} > 0: \quad \forall y \in K,\ d(x,y) < \delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \tag{12}$$

が成り立っている.
◇ x に依らない δ をつくるには　$\hat{\delta}_\varepsilon = \inf_{x \in K} \delta_{x,\varepsilon}$　を考えればよい気がする.
　$\Longrightarrow$ x は無限個あるから，この下限が 0 になってしまう心配がある.
　$\Longrightarrow$ 有限個の下限に持ち込みたい.
　$\Longrightarrow$ コンパクト性（＝有限開被覆性）を使って，無限を有限に落とそう.

………では，上の作戦に従って，証明をはじめる.

$\varepsilon > 0$ を固定する．各 $x \in K$ に対して，(12) にある $\delta_{x,\varepsilon}$ をとる.
$U_x = \{y \in X \mid d(x,y) < \frac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon}\}$ とおくと，$\bigcup_{x \in K} U_x \supseteq K$　は開被覆である.
K のコンパクト性により，有限個の $x_1, \ldots, x_m$ が存在して,

$$\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \supseteq K. \tag{13}$$

$\hat{\delta}_\varepsilon = \frac{1}{2}\min(\delta_{x_1,\varepsilon}, \ldots, \delta_{x_m,\varepsilon})$　とおくと，　$\hat{\delta}_\varepsilon > 0$　である.
$x, y \in K$ が (11) の条件　$d(x,y) < \hat{\delta}_\varepsilon$　を満たすとする.
被覆性 (13) により，ある i が存在して，$x \in U_{x_i}$．したがって　$d(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i,\varepsilon}$.
これと (12) より

$$|f(x_i) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{14}$$

また,

$$d(y, x_i) \le d(y,x) + d(x, x_i) < \hat{\delta}_\varepsilon + \frac{1}{2}\delta_{x_i,\varepsilon} \le \delta_{x_i,\varepsilon}$$

となるので，(12) より

$$|f(x_i) - f(y)| < \varepsilon/2. \tag{15}$$

(14) と (15) を足し合わせて

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x_i) - f(x)| + |f(x_i) - f(y)| < \varepsilon. \tag{16}$$

以上で (11) が示された.　（証終）

以上