

## 幾何学I 演習 7 正則値と臨界値

1. 次の関数の臨界点を求め、それが非退化かどうかを調べよ。また、非退化な臨界点について、その指数を求めよ。

$$(1) f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

$$(2) f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

$$(3) f(x, y) = x^2y^2$$

2.  $\mathbf{R}P^n$  の斉次座標を  $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$  として、 $f : \mathbf{R}P^n \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2} \sum_{k=1}^{n+1} kx_k^2$$

で定める。 $f$  の臨界点はすべて非退化であることを示し、指数をそれぞれ求めよ。

3. 写像  $h : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$h((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

で定める。 $h$  の微分の階数および、一点の逆像の変化する状況を調べよ。

3.  $M, N$  を連結な可微分多様体、 $f : M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  写像とする。ここでは、 $M$  はコンパクトで  $m = n$  とする。 $f$  がはめ込みであるとき、以下を証明せよ。

(1)  $f$  は全射である。

(2)  $y \in N$  に対して  $f^{-1}(y)$  は有限集合で、その個数は  $y$  によらない。