

幾何学I演習 8 Sard の定理 , 写像度

1. $f : S^n \rightarrow S^n$ を

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

で定める . f の写像度を求めよ .

2. $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ をはめ込みとする . f の回転量 $rot(f)$ を $x \in S^1$ の対して

$$f'(x)/\|f'(x)\|$$

を対応させることによって定義される写像 $g : S^1 \rightarrow S^1$ の写像度として定義する .

(1) 整数 n に対して , $rot(f) = n$ となるような f の例を挙げよ .

(2) 回転量が互いに異なるはめ込み $f_0, f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は , はめ込みのなめらかな族によって互いに変形することができないことを示せ .

3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする .

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

が Morse 関数となるような $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ .