# 幾何学 I 演習　1．多様体の基礎概念

1. $n$ 次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

について，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分集合としての相対位相を入れる．$p^{\pm} = (0, \cdots, 0, \pm 1)$, $S^n - \{p^-\} = U^+$, $S^n - \{p^+\} = U^-$ とおいて，写像 $\varphi^{\pm} : U^{\pm} \to \mathbf{R}^n$ を第 $j$ 成分が

$$\varphi_j^{\pm} = \frac{x_j}{1 \pm x_{n+1}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

で表される写像とする．

(1) $\varphi^+$, $\varphi^-$ はともに同相写像 (homeomorphism) であることを示せ.

(2) $\varphi^+$ の $U^+ \cap U^-$ への制限 $\varphi^+|_{U^+ \cap U^-}$ は $U^+ \cap U^-$ と $\mathbf{R}^n - \{0\}$ の同相を与えることを示せ.

(3) 写像の合成 $\varphi^-|_{U^+ \cap U^-} \circ (\varphi^+|_{U^+ \cap U^-})^{-1}$ は，微分同相 (diffeomorphism) であることを示せ.

2. $S^n$ 上の関数を，座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ を用いて

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{1 \le i, j \le n+1} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbf{R}, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

で定める．関数 $f : S^n \to \mathbf{R}$ の最大，最小と，対称行列 $A = (a_{ij})$ の固有値との関係を述べよ.

3. $q$ は $0$ でない複素数とする．$\mathbf{C} - \{0\}$ の同値関係 $z \sim w$ を，ある整数 $n$ が存在して $z = q^n w$ となることとして定義する．商空間 $X = (\mathbf{C} - \{0\})/\sim$ がコンパクトになるための $q$ の条件を求めよ．また, $X$ が Hausdorff 空間になるための $q$ の条件を求めよ.