幾何学　　演習の解説（1/14）

1

鎖複体の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(S(X), G_1) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(S(X), G_2) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Hom}(S(X), G_3) \longrightarrow 0$$

が存在することをいえばよいわけです．写像 i_*, j_* はそれぞれ次のように定義します：

$$\begin{aligned} i_*(f) &= i \circ f, \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(S(X), G_1), \\ j_*(g) &= j \circ g, \quad \forall g \in \mathrm{Hom}(S(X), G_2). \end{aligned}$$

これらが鎖準同型になることは次のようにしてわかります．特異単体 $\sigma : \Delta \to X$ に対し

$$\begin{aligned} (\delta(i_* f))(\sigma) &= i_* f(\partial\sigma) = (i \circ f)(\partial\sigma) = i(f(\partial\sigma)) \\ &= i(\delta f(\sigma)) = i_*(\delta f)(\sigma) \end{aligned}$$

よって $\delta i_* = i_* \delta$ です．j_* についても全く同様です．

以下，上記の列が完全になることを確かめます．

(i) i_* の単射性．$i_*(f) = 0$ と仮定すると，任意の $x \in S(X)$ について $i(f(x)) = 0 \in G_2$ です．もとのアーベル群の列の完全性から i は単射だったので，任意の $x \in S(X)$ について $f(x) = 0$ ということになります．これは $f = 0$ を意味します．

(ii) $\ker j_* = \mathrm{im}\, i_*$ であること．まず $j \circ i = 0$ でしたから

$$j_* i_*(f) = j \circ i \circ f = 0$$

つまり $\mathrm{im}\, i_* \subset \ker j_*$ です．逆に $g \in \ker j_*$ とすると $j_*(g) = 0$，つまり任意の $x \in S(X)$ について $j(g(x)) = 0 \in G_3$ です．$\ker j = \mathrm{im}\, i$ で i は単射でしたから，$g(x) = i(y)$ となる $y \in G_1$ がただひとつ存在します．そこで，$f \in \mathrm{Hom}(S(X), G_1)$ を

$$f(x) = y$$

で定義します．これが準同型 $f: S(X) \to G_1$ を定めることはすぐにわかり，作り方から

$$i_*(f)(x) = i(f(x)) = g(x)$$

つまり $g = i_*(f)$，従って $g \in \operatorname{im} i_*$ となり，$\ker j_* \subset \operatorname{im} i_*$ がいえました．
(iii) j_* の全射性．任意に $h \in \operatorname{Hom}(S(X), G_3)$ を取ります．任意の $x \in S(X)$ に対して $h(x) \in G_3$ ですが，j は全射でしたから

$$j(y) = h(x)$$

となる $y \in G_2$ を取ることができます．そこで，$g \in \operatorname{Hom}(S(X), G_2)$ を

$$g(x) = y$$

で定義します．この g は準同型であることがすぐにわかり，作り方から $j_*(g) = h$ です．よって j_* は全射です．h に対して g はただ一つには定まらないことに注意しましょう．

2

(1) m と n の最大公約数を $(m, n) = d$ と書きます．次の $\mathbb{Z}$ 準同型を考えます：

$$f: A \otimes B \longrightarrow \mathbb{Z}_d, \quad f([x] \otimes [y]) := [xy].$$

まず，この写像は well-defined です．実際

$$[(x + km)(y + ln)] = [xy] + [xln + ykm + klmn]$$

ですが，この第 2 項は d で割り切れるので $\mathbb{Z}_d$ において 0 です．

次に単射性を見ます．まず，$A \otimes B$ の任意の元は $\sum([x] \otimes [y])$ の形で書かれますが，これを

$$\begin{aligned}\sum([x] \otimes [y]) &= \sum([x] \otimes y \cdot [1]) \\ &= \sum(y \cdot [x] \otimes [1]) \\ &= \sum([xy] \otimes [1]) = \Bigl(\sum [xy]\Bigr) \otimes [1]\end{aligned}$$

の形に書くことで，最初から単項式 $[x] \otimes [y]$ の形のものについて考えれば十分です．ここで $y \cdot [x]$ などは，$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Z}_m$ に対する $\mathbb{Z}$ の作用を表わします．

$[xy] = 0 \in \mathbb{Z}_d$ とすると，ある $k \in \mathbb{Z}$ について $xy = kd$ です．ここで，$am + bn = d$ を満たす $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在したことを思い出すと，$akm + bkn =$

$kd = xy$ です．よって，$A \otimes B$ において

$$\begin{aligned}[x] \otimes [y] &= [x] \otimes y \cdot [1] = y \cdot [x] \otimes [1] = [xy] \otimes [1] \\ &= [akm + bkn] \otimes [1] = [bkn] \otimes [1] \\ &= bkn \cdot [1] \otimes [1] = [1] \otimes bkn \cdot [1] = [1] \otimes [bkn] \\ &= 0.\end{aligned}$$

全射性は容易で，任意の $[z] \in \mathbb{Z}_d$ に対し $f([z] \otimes [1]) = [z]$ です．以上により

$$A \otimes B \cong \mathbb{Z}_d.$$

次の問題のために，$\mathbb{Z}$ も含めて Tor および Ext を計算しておきましょう．結論は以下のとおりです：

補題 1

i) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = 0$.

ii) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = 0$.

iii) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0$, $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_d$.

iv) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_d$.

証明　i) $\mathbb{Z}$ の自由分解としては

$$0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

を取れます．(1) に $\mathbb{Z}$ をテンソルすると，$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ から

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

となり，$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \ker 0 = 0$ です．

また (1) に $\mathbb{Z}_n$ をテンソルすると

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{id} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

となるので，やはり $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = \ker 0 = 0$ です．

ii) まず $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ に注意します．実際，この同型は

$$(f : f(1) = k) \longmapsto k$$

で与えられます．よって，(1) の $\mathrm{Hom}(\ ,\mathbb{Z})$ を取ると

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$$

です．このことから $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathrm{coker}\, id = \mathbb{Z}/\mathrm{im}\, id = 0$ です．

次に，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)\cong\mathbb{Z}_n$ に注意します．この同型も上と同様です．よって (1) の $\mathrm{Hom}(\ ,\mathbb{Z}_n)$ を取ると

$$0\longrightarrow 0\longrightarrow \mathbb{Z}_n\xrightarrow{id}\mathbb{Z}_n$$

となり，$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)=\mathrm{coker}\,id=\mathbb{Z}_n/\mathrm{im}\,id=0$ です．

iii) $A=\mathbb{Z}_m$ の自由分解として

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{i}\mathbb{Z}\xrightarrow{j}\mathbb{Z}_m\longrightarrow 0 \tag{2}$$

を取ります．i は m 倍写像，j は商写像です．これに $\mathbb{Z}$ をテンソルすると

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{i}\mathbb{Z}\xrightarrow{j}\mathbb{Z}_m\longrightarrow 0$$

です．やはり i は m 倍写像，j は商写像になります．よって

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})=\ker i=0.$$

また，(2) に $B=\mathbb{Z}_n$ をテンソルすると

$$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_n\xrightarrow{i\otimes 1}\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_n\xrightarrow{j\otimes 1}\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n\longrightarrow 0$$

を得ます．$\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_d$ でしたから

$$\mathbb{Z}_n\xrightarrow{i'}\mathbb{Z}_n\xrightarrow{j'}\mathbb{Z}_d\longrightarrow 0$$

の形になります．$i'([k])=[mk]$ です．$\mathrm{Tor}(A,B)=\ker i'$ を求めましょう．$i'([k])=[0]\in\mathbb{Z}_n$ とすると，ある整数 l に対して $[mk]=[ln]$ です．$d=(m,n)$ で割ると $m'k=ln'$（m', n' は互いに素）となります．このような (k,l) は

$$(k,l)=(pn',pm')\quad p=0,\pm1,\pm2,\dots$$

に限られますから，特に

$$\ker i'=\{[0],[n'],[2n'],\dots,[(d-1)n']\}\subset\mathbb{Z}_n$$

です（$dn'=n$）．これは $\mathbb{Z}_n$ の部分群を成し，$\mathbb{Z}_d$ と同型ですから

$$\mathrm{Tor}(A,B)\cong\mathbb{Z}_d.$$

iv) (2) の $\mathrm{Hom}(\ ,\mathbb{Z})$ を取ると

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})\xrightarrow{j^*}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\xrightarrow{i^*}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$$

です．ここで $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})=0$ に注意します．何故なら，$f:\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}$, $f([1])=k$ とすると，$0=f([0])=f([m])=mf([1])=mk$ より $k=0$，従って $f=0$ だからです．よって上の完全列は

$$0\longrightarrow 0\xrightarrow{j^*}\mathbb{Z}\xrightarrow{i^*}\mathbb{Z}$$

となります．ここでも i^* は m 倍写像になります．実際，$i^* : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ は

$$i^*(f) = f \circ i : 1 \longmapsto f(i(1)) = f(m) = mf(1)$$

だからです．よって

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\mathrm{im}\, i^* \cong \mathbb{Z}_m$$

です．

最後に，(2) から

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)$$

を考えます．ii) で見たように $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$ でしたから，i^* は

$$i^* : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad i^*([1]) = [m]$$

と見なせます．よって i^* の像は

$$\mathrm{im}\, i^* = \{[km],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

最初に $[km] = [0] \in \mathbb{Z}_n$ となるのは $km = (m$ と n の最小公倍数$)$ となるときで，そのとき $k = n'$ です（$dn' = n$ ）．よって $\mathrm{im}\, i^* \cong \mathbb{Z}_{n'}$ となり

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_m/\mathrm{im}\, i^* \cong \mathbb{Z}_d$$

です． ∎

上の証明の中で，次のことも示しているので，まとめておきます；

補題 2

i) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$,

ii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$,

iii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}) \cong 0.$ ∎

(2) 普遍係数定理において，特に $G = \mathbb{Z}$ とすれば

$$H^n(X) \cong \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(H_n(X),\mathbb{Z})$$

を得ます．但し，標準的な同型ではないことに注意しましょう．ホモロジー群を自由部分（$\mathbb{Z}$ の直和）とねじれ部分（$\mathbb{Z}_n$ の形のものの直和）に分けて

$$\begin{aligned} H_{n-1}(X) &\cong F_{n-1} \oplus T_{n-1}, \\ H_n(X) &\cong F_n \oplus T_n \end{aligned}$$

と書きます．F が自由部分，T がねじれ部分です．補題 1 を用いて普遍係数定理の式を書き直すと

$$\begin{aligned} H^n(X) &\cong \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(H_n(X),\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathrm{Ext}(F_{n-1} \oplus T_{n-1},\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(F_n \oplus T_n,\mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{3}$$

です．ここで Ext および Hom が直和に関して「分配的に」ふるまうことを用います．即ち

補題 3

i) $\mathrm{Ext}(F \oplus T,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(F,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(T,\mathbb{Z})$,

ii) $\mathrm{Hom}(F \oplus T,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(F,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(T,\mathbb{Z})$.

証明　Ext に関しては，F および T の自由分解

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} F \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{j'} T \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

の「直和」

$$0 \longrightarrow A \oplus A' \xrightarrow{i \oplus i'} B \oplus B' \xrightarrow{j \oplus j'} F \oplus T \longrightarrow 0$$

が $F \oplus T$ の自由分解ですから，これに $\mathbb{Z}$ をテンソルしたものを考えておいて

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}(F \oplus T,\mathbb{Z}) &= \ker(i \oplus i') \otimes id \\ &\cong \ker(i \otimes id) \oplus \ker(i' \otimes id) \\ &\cong \mathrm{Ext}(F,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(T,\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Hom に関しては明らかでしょう． ∎

補題 1, 2, 3 を (3) に対して用いると

$$\begin{aligned} H^n(X) &= (\mathrm{Ext}(F_{n-1},\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(T_{n-1},\mathbb{Z})) \oplus (\mathrm{Hom}(F_n,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(T_n,\mathbb{Z})) \\ &= \mathrm{Ext}(T_{n-1},\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(F_n,\mathbb{Z}) \\ &= (H_{n-1}\text{のねじれ部分}) \oplus (H_n\text{の自由部分}) \end{aligned}$$

となっています．最後の等式は，補題 1 iv) と補題 3 i) から $\mathrm{Ext}(T_{n-1},\mathbb{Z}) \cong T_{n-1}$，また補題 2 i) と補題 3 ii) から $\mathrm{Hom}(F_n,\mathbb{Z}) \cong F_n$ となることによります．

(3) $\mathbb{R}P^n$ の $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群は

$$H_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \text{ または } k=n \text{ が奇数}, \\ \mathbb{Z}_2 & 1 \le k \le n-1 \text{ かつ } k \text{ が奇数}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

でした．これと (2) を用いると

$$H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \text{ または } k=n \text{ が奇数}, \\ \mathbb{Z}_2 & 1 \le k \le n \text{ かつ } k \text{ が偶数}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

です．

3

(1) Δ^n は標準的な n 単体を表すものとします．まず，$\sigma \in S_n(X \times Y)$ は写像 $\sigma : \Delta^n \to X \times Y$ ですから，

$$\sigma = (\sigma_X, \sigma_Y) : \Delta^n \longrightarrow X \times Y, \quad \sigma_X \in S_n(X),\ \sigma_Y \in S_n(Y)$$

と成分ごとに書けることに注意しておきます．

以下，いくつかの段階に分けて証明しましょう．

Step 1

鎖準同型 $\varphi : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ を，次の図式を可換にするように構成します．まず鎖写像であることから

$$\begin{array}{ccc} S_n(X \times Y) & \xrightarrow{\varphi_n} & (S(X) \otimes S(Y))_n \\ \partial \big\downarrow & & \big\downarrow \partial \\ S_{n-1}(X \times Y) & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & (S(X) \otimes S(Y))_{n-1}. \end{array}$$

を満たす必要があります．ここで $(S(X) \otimes S(Y))_n = \sum_{p+q=n} S_p(X) \otimes S_q(Y)$ です．

次に，連続写像 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ が鎖群に導く写像 $f_* : S(X) \to S(X')$, $g_* : S(Y) \to S(Y')$ についての自然性

$$\begin{array}{ccc} S_n(X \times Y) & \xrightarrow{\varphi_n} & (S(X) \otimes S(Y))_n \\ {\scriptstyle (f\times g)_*} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle f_* \otimes g_*} \\ S_n(X' \times Y') & \xrightarrow{\varphi_n} & (S(X') \otimes S(Y'))_n. \end{array}$$

も満たすようにします．式で書けば

$$(*)_n \qquad \partial \varphi_n = \varphi_{n-1} \partial, \quad (f_* \otimes g_*)\varphi_n = \varphi_n (f \times g)_*$$

です．以下，このような φ_n を作っていきます．

次数ごとに帰納的に考えます．まず $\varphi_0 : S_0(X \times Y) \to (S(X) \otimes S(Y))_0 = S_0(X) \otimes S_0(Y)$ は

$$\varphi_0(\sigma_X, \sigma_Y) := \sigma_X \otimes \sigma_Y$$

で定義します．$S_{-1}=\mathbb{Z}$ と考え，$\partial_{-1}=0$ とすれば，条件 $(*)_0$ は満たされます．

次に $r \leq n-1$ までについて φ_r が定義されたと仮定して φ_n を構成しましょう．そのために，対角写像

$$d_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n \times \Delta^n, \quad d_n(x)=(x,x)$$

を考えます．$d_n \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$ と考えられます．このとき，$\varphi_{n-1}\partial d_n \in (S(\Delta^n)\otimes S(\Delta^n))_{n-1}$ を考えると，φ_{n-1} が $(*)_{n-1}$ を満たすことから

$$\partial(\varphi_{n-1}\partial d_n)=\varphi_{n-2}\partial^2 d_n=0, \quad n>1,$$
$$\epsilon(\varphi_0\partial d_1)=0, \quad n=1$$

がわかります．$\epsilon : (S(\Delta^n)\otimes S(\Delta^n))_0 \to \mathbb{Z}$ は添加写像です．つまり $\varphi_{n-1}\partial d_n$ は被約ホモロジー群 $\tilde{H}_{n-1}(S(\Delta^n)\otimes S(\Delta^n))$ の元です．

ところが Δ^n が可縮であることから，$S(\Delta^n)\otimes S(\Delta^n)$ の被約ホモロジー群は全ての次数で 0 になることがわかります．従って $\varphi_{n-1}\partial d_n$ はホモロジーの元として 0 ですから

$$\varphi_{n-1}\partial d_n=\partial y$$

と表されるはずです．この y を $\varphi_n d_n$ と書きます．

d_n に対しては φ_n が定義されました．これを用いて一般の $\sigma=(\sigma_X,\sigma_Y)\in S_n(X\times Y)$ に対して φ_n の値を定めましょう．σ は，合成写像

$$\Delta^n \xrightarrow{d_n} \Delta^n \times \Delta^n \xrightarrow{\sigma_X\times\sigma_Y} X\times Y$$

と考えられます．つまり $\sigma=(\sigma_X\times\sigma_Y)\circ d_n=(\sigma_X\times\sigma_Y)_* d_n$ です．そこで

$$\varphi_n(\sigma_X,\sigma_Y):=((\sigma_X)_*\otimes(\sigma_Y)_*)(\varphi_n d_n)$$

で定義します．これが $(*)_n$ を満たすことを確かめます．まず

$$\begin{aligned}
\partial\varphi_n(\sigma_X,\sigma_Y) &= \partial((\sigma_X)_*\otimes(\sigma_Y)_*)(\varphi_n d_n)\\
&= ((\sigma_X)_*\otimes(\sigma_Y)_*)(\partial\varphi_n d_n)\\
&= ((\sigma_X)_*\otimes(\sigma_Y)_*)(\varphi_{n-1}\partial d_n)\\
&= \varphi_{n-1}(\sigma_X\times\sigma_Y)_*(\partial d_n)\\
&= \varphi_{n-1}\partial(\sigma_X\times\sigma_Y)_*(d_n)\\
&= \varphi_{n-1}\partial(\sigma_X,\sigma_Y)
\end{aligned}$$

2 番目と 5 番目の等号で，$(\sigma_X)_*$ などが鎖準同型であることを用いました．また 3 番目の等号で d_n に対する φ_n の定義を，4 番目で $(*)_{n-1}$ を使いました．

次に

$$\begin{aligned}
(f_*\otimes g_*)\varphi_n(\sigma_X,\sigma_Y) &= (f_*\otimes g_*)((\sigma_X)_*\otimes(\sigma_Y)_*)(\varphi_n d_n)\\
&= ((f\circ\sigma_X)_*\otimes(g\circ\sigma_Y)_*)(\varphi_n d_n)
\end{aligned}$$

最後の式は，特異単体 $(f\times g)_*(\sigma_X,\sigma_Y)=(f\sigma_X,g\sigma_Y)$ に対する φ_n の定義式に他ならないので

$$(f_*\otimes g_*)\varphi_n(\sigma_X,\sigma_Y)=\varphi_n(f\times g)_*(\sigma_X,\sigma_Y)$$

となり，$(*)_n$ が成立することが確かめられました．

Step 2
鎖準同型 $\psi: S(X)\otimes S(Y)\to S(X\times Y)$ を構成します．

Step 1 を振り返ってみると，Δ^n が可縮であることから被約ホモロジー群が消えることがポイントでした．逆写像 ψ も同様のアイデアに基づいて構成します．ここでのポイントは

- $\Delta^p\times\Delta^q$ が可縮で，従って $\tilde{H}_*(\Delta^p\times\Delta^q)=0$ であること，
- $id_{\Delta^p}\otimes id_{\Delta^q}\in S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q)$ を Step 1 の d_n の代わりに使うこと

の二つです．

$$\psi_0:(S(X)\otimes S(Y))_0\to S_0(X\times Y)_0,\quad \psi_0(\sigma_X\otimes\sigma_Y)=(\sigma_X,\sigma_Y)$$

から出発して，Step 1 と全く同様の議論で鎖準同型 $\psi: S(X)\otimes S(Y)\to S(X\times Y)$ を構成することができます．

Step 3
$\psi\circ\varphi: S(X\times Y)\to S(X\times Y)$ が id とチェインホモトピー同値であることを示します．まず，φ_0 と ψ_0 の定義から $(\psi\circ\varphi)_0=id_{S_0(X\times Y)}$ であることに注意します．

より一般に，鎖準同型 $F: S(X\times Y)\to S(X\times Y)$ で $F_0=id$ を満たすものがあるとき，F は id とチェインホモトピー同値であることを示します．つまり，鎖準同型 $G_n: S_n(X\times Y)\to S_{n+1}(X\times Y)$ で

$$\begin{aligned}F_n-id&=\partial G_n+G_{n-1}\partial,\quad n>0\\ F_0-id&=\partial G_0+G_{-1}\epsilon,\quad n=0\end{aligned}\tag{4}$$

を満たすものがある，ということです．このような G を帰納的に構成しましょう．

まず $G_{-1}=0,\ G_0=0$ とすれば $n=0$ に対しては (1) が満たされます．$n-1$ まで構成されたとして G_n を構成しましょう．$d_n\in S_n(X\times Y))$ を Step 1 で考えた対角写像とします．このとき

$$(-G_{n-1}\partial+F_n-id)(d_n)\in S_n(X\times Y)$$

はホモロジーの元を定めます．実際

$$\begin{aligned}\partial((-G_{n-1}\partial+F_n-id)(d_n))&=(-(\partial G_{n-1})\partial+\partial F_n-\partial)(d_n)\\&=(G_{n-2}\partial-F_{n-1}+id)\partial(d_n)+\partial F_n(d_n)\\&\qquad-\partial(d_n)\\&=(-F_{n-1}\partial+\partial F_n)(d_n)=0.\end{aligned}$$

2 番目の等号は (1) を利用しており，また最後の等式は F_n が鎖準同型であることによります．これで

$$(-G_{n-1}\partial + F_n - id)(d_n) \in \tilde{H}_n(\Delta^n \times \Delta^n)$$

がわかりましたが，このホモロジー群は 0 です．よって

$$(-G_{n-1}\partial + F_n - id)(d_n) = G_n(d_n)$$

と書けることになります．これで d_n に対して G_n が構成されました．一般に $\sigma = (\sigma_X, \sigma_Y) \in S_n(X \times Y)$ に対しては

$$G_n(\sigma) := (\sigma_X \times \sigma_Y) G_n(d_n)$$

とおけば，G_n は (1) を満たすことがわかります．これでチェインホモトピー G_n が得られ，$F \sim id$ であることがわかりました．特に $\psi \circ \varphi \sim id$ です．

Step 4
$\varphi\circ\psi : S(X)\otimes S(Y) \to S(X)\otimes S(Y)$ が id とチェインホモトピー同値であることを示します．Step 2 が Step 1 と全く同様に示されたのと同じで，Step 3 と同様の議論で示せます．ここでも Δ^n が可縮であることがポイントになります．ここでも d_n の代わりに，Step 2 で述べた $id \otimes id$ を使います．$(\varphi \circ \psi)_0 = id$ から始めて，帰納的にチェインホモトピーを構成してみて下さい．

以上によりチェインホモトピー同値 $S(X \times Y) \sim S(X) \otimes S(Y)$ が示されました．

注意　ここで構成したチェインホモトピーは一意ではありませんが，具体的に次のようなものを取ることができます：

$$\varphi_n(\sigma_X, \sigma_Y) := \sum_{0 \le i \le n} L_{n-i}\sigma_X \otimes F_i \sigma_Y.$$

ここで $F_i\sigma$ は，σ の最初の $i+1$ 個の頂点で張られる i 単体（first i face），また $L_i\sigma$ は σ の最後の $i+1$ 個の頂点で張られる i 単体（last i face）を表します（この写像が鎖準同型であることを確認してみて下さい）．これは $\varphi_0(\sigma_X, \sigma_Y)_0 = \sigma_X \otimes \sigma_Y$ を満たしているので，Step 2 で構成した（任意の）ψ をチェインホモトピー逆写像に持ちます．この φ を Alexander-Whitney 写像と呼びます．

(2) (1) により

$$H_k(X \times Y) \cong H_k(S(X) \otimes S(Y))$$

ですから，より一般に次を示せば十分です：

定理 1 (Künneth)
$\{C_*, \partial\}$, $\{C'_*, \partial'\}$ を $\mathbf{Z}$ 上の自由鎖複体とする．このとき次の短完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}\,(H_p(C_*),\ H_q(C'_*)) \longrightarrow 0.$$

証明 $Z_* = (Z_n,\ 0\text{−map})$, $B_* = (B_{n-1},\ 0\text{−map})$ を（自明な）鎖複体とします．ただし

$$Z_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker(\partial : C_n \to C_{n-1}), \quad B_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{im}\,(\partial : C_{n+1} \to C_n)$$

です．このとき、鎖複体の完全系列

$$0 \longrightarrow Z_* \xrightarrow{i} C_* \xrightarrow{\partial} B_* \longrightarrow 0 \tag{5}$$

が存在します．B_n は自由 $\mathbb{Z}$ 加群 C_n の部分加群なので，やはり自由 $\mathbb{Z}$ 加群です．このことと補題 1 から $\mathrm{Tor}\,(B_n, C'_*) = 0$ です．よって (5) に C'_* をテンソルすると，短完全列

$$0 \longrightarrow Z_p \otimes C'_q \xrightarrow{i \otimes 1} C_p \otimes C'_q \xrightarrow{\partial \otimes 1} B_{p-1} \otimes C'_q \longrightarrow 0 \tag{6}$$

が得られます．(6) は鎖群の完全列を与えており，従って次のホモロジー完全列が得られます:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(B_* \otimes C'_*) \xrightarrow{\partial^{(n+1)}{}_*} H_n(Z_* \otimes C'_*) \xrightarrow{(i\otimes 1)_*} H_n(C_* \otimes C'_*) \xrightarrow{(\partial \otimes 1)_*} H_n(B_* \otimes C'_*) \xrightarrow{\partial^{(n)}{}_*} \cdots \tag{7}$$

以下，$H_*(B_* \otimes C'_*)$ と $H_*(Z_* \otimes C'_*)$ について考えます．まず

$$\partial|_{Z_p \otimes C'_*} = (-1)^p \otimes \partial'$$

です．なぜなら，$z \in Z_p$ に対して $\partial z = 0$ なので

$$\partial(z \otimes c') = (\partial z) \otimes c' + (-1)^p \otimes (\partial' c') = (-1)^p \otimes (\partial' c')$$

だからです．よって

$$\begin{aligned} B_n(Z_* \otimes C'_*) &= \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes B'_q \\ Z_n(Z_* \otimes C'_*) &= \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes Z'_q \end{aligned} \tag{8}$$

となります．一方，短完全列

$$0 \longrightarrow B'_q \longrightarrow Z'_q \longrightarrow H_q(C'_*) \longrightarrow 0$$

より ((6) を得たのと同じ理由で）

$$0 \longrightarrow Z_p \otimes {B'}_q \longrightarrow Z_p \otimes {Z'}_q \longrightarrow Z_p \otimes H_q({C'}_*) \longrightarrow 0$$

は完全です．この短完全列及び (8) より

$$H_n(Z_* \otimes {C'}_*) = \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes H_q({C'}_*) \tag{9}$$

を得ます．以上の議論と全く同様にすると

$$H_n(B_* \otimes {C'}_*) = \bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes H_q({C'}_*) \tag{10}$$

が示されます．

(7) の ${\partial^{(n)}}_* : H_{n+1}(B_* \otimes {C'}_*) \to H_n(Z_* \otimes {C'}_*)$ は，(9), (10) および連結準同型の定義から

$$\partial^{(n)}{}_* = j \otimes 1 :\ B_p \otimes H_q({C'}_*) \longrightarrow Z_p \otimes H_q({C'}_*)$$

です．ここで $j :\ B_p \hookrightarrow Z_p$ は包含写像です．よって

$$\operatorname{coker} \partial^{(n)}{}_* = \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q({C'}_*). \tag{11}$$

さらに，$0 \to B_p \xrightarrow{j} Z_p \to H_p(C_*) \to 0$ が $H_p(C_*)$ の自由分解であることから，Tor の定義を思い出すと

$$\ker \partial^{(n)}{}_* = \ker(j \otimes 1) = \bigoplus_{p+q=n} \operatorname{Tor}\left(H_p(C_*), H_q({C'}_*)\right). \tag{12}$$

(7), (11), (12) より結論を得ます． ∎

この定理で，特に C' として

$$C'_0 = G,\ C'_n = 0\ (n > 0),\ \partial' = 0$$

とおくと，普遍係数定理を得ます．

もし，先に普遍係数定理を仮定すれば，群 G として $H_q(Y)$ を取ることによって証明することもできます．どちらを先に仮定するかは流儀によると思います．