

幾何学I演習 4. 群作用と商多様体

1. 前回の問題3のように \mathbf{R}^n の一次独立なベクトル e_1, \dots, e_n に対して

$$\Gamma = \{m_1 e_1 + \dots + m_n e_n \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}\}$$

とおくと, Γ は \mathbf{R}^n に, 平行移動として作用する. 商空間を $T^n = \mathbf{R}^n / \Gamma$ とする.

- (1) 射影を $p: \mathbf{R}^n \rightarrow T^n$ として, $x, y \in T^n$ に対して, $p(x_0) = x, p(y_0) = y$ となる $x_0, y_0 \in \mathbf{R}^n$ をとり,

$$d(x, y) = \min_{g \in \Gamma} \|x_0 - gy_0\|$$

と定義する. d によって, T^n は距離空間となることを示せ.

- (2) 上の距離によって, T^n は局所的にユークリッド空間の開球と合同であることを示せ.

2. $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ に同値関係 \sim を以下のように定義する $x \sim y$ とは, 0 でない複素数 λ があって, $y = \lambda x$ となることとする. この同値関係による商空間を CP^n で表し, 複素射影空間とよぶ.

- (1) CP^n は $2n$ 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ.

- (2) CP^1 は S^2 と微分同相であることを示せ.

- (3) CP^n を S^{2n+1} に対する S^1 の作用による商多様体として表せ.

3. 行列式が1の $n+1$ 次の直交行列全体 $SO(n+1)$ の S^n への自然な作用を考える.

- (1) S^n の点 x における固定部分群 G_x を決定せよ.

- (2) 商空間 $SO(n+1)/G_x$ は, S^n と微分同相であることを示せ.