

幾何学I演習 9 リーマン計量, 曲線の長さ

1. 3次元ユークリッド空間内のトーラス

$$x = (a \cos \theta + b) \cos \phi, \quad y = (a \cos \theta + b) \sin \phi, \quad z = a \sin \theta$$

$0 < a < b, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ について, 3次元ユークリッドから誘導されるトーラスのリーマン計量を θ, ϕ で表せ.

2. $f: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を標準的な埋め込みとすると, f によってユークリッド計量から S^n に誘導されるリーマン計量を S^n の局所座標を用いて表せ.

3. 双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上の点 $(1, 0, 0)$ と $(-1, 0, 0)$ を結ぶ曲線の長さの最小値を求めよ.

4. ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の C^1 級曲線 $c: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対して,

$$\int_0^1 \|c'(t)\| dt = \sup_{0=t_0 < \dots < t_m=1} \sum_{k=1}^m \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|$$

を示せ.