

幾何学 I 演習 5

1. 整数全体のなす群 \mathbb{Z} が, 平行移動によって実数全体 \mathbb{R} に作用しているとき, 商空間 \mathbb{R}/\mathbb{Z} は, S^1 と微分同相であることを示せ.

2. 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は, n が奇数のとき向き付け可能であることを示せ.

3. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

に対して,

$$M_n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0, \|\mathbf{v}\| = 1\}$$

とおく. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^{n+1} のユークリッド内積を表す.

(1) M_n はコンパクト $2n - 1$ 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ.

(2) M_2 は実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ と微分同相であることを示せ.

4. p, q を互いに素な自然数とし, $\xi = e^{2\pi i/p}$ とおく. 3 次元球面 S^3 を

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

で与え, S^3 への p 次の巡回群 $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の作用を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の生成元に対して

$$(z_1, z_2) \mapsto (\xi z_1, \xi^q z_2)$$

を対応させることにより定める. 商空間 S^3/G はコンパクト 3 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ.