

幾何学I演習 6 接ベクトル束と多様体の向き

1. S^1 の接ベクトル束 TS^1 は, 直積 $S^1 \times \mathbf{R}$ と微分同相であることを示せ.
2. (1) 実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は, n が奇数のとき向き付け可能であることを示せ.
(2) 複素射影空間 CP^n は, 常に向き付け可能であることを示せ.
4. n 次元可微分多様体 M の接ベクトル束 TM は $2n$ 次元可微分多様体として向き付け可能であることを示せ.

5. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

に対して,

$$M_n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in S^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0, \|\mathbf{v}\| = 1\}$$

とおく.

- (1) M_n はコンパクト $2n - 1$ 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ.
- (2) 以下の多様体は互いに微分同相であることを示せ.

$$M_2, \quad \mathbf{R}P^3, \quad SO(3)$$