幾何学II演習
9. 特異ホモロジー論 (II)

1 被約ホモロジー群

(1) X を可縮な位相空間とする．X の被約ホモロジー群 $\widetilde{H}_q(X)$ は，すべての q に対して 0 であることを示せ.

(2) X を位相空間 Y をその部分空間とする．被約ホモロジー群の完全列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(X) \longrightarrow H_q(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{q-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

が存在することを示せ.

2 可縮な位相空間の例

(1) 次の位相空間は可縮であることを示せ.
$\mathbf{R}^n$　(n 次元ユークリッド空間)
$\mathbf{D}^n$　(n 次元球体)

(2) 位相空間 X について，単位区間 $[0,1]$ との直積 $X \times I$ に積位相を入れる．さらに，$X \times I$ に次のように同値関係 $\sim$ を入れる.
$(x,s) \sim (y,t)$ とは，$x=y$, $s=t$ が成立するか，または，$t=s=1$ であることとする.
この同値関係による商空間を CX と表す．CX は可縮であることを示せ.

(3) K を 1 次元単体的複体で tree であるものとする（第 3 回の演習を参照）．$|K|$ は可縮であることを示せ.