幾何学II　演習の解説 (10/8)

平成 15 年 10 月 24 日

1

1.

(i)$K(\sigma)^1$

σ の頂点を a_0, a_1, a_2, a_3 とすると、鎖群は

$$\begin{aligned} C_0(K(\sigma)^1) &= \mathbb{Z}[a_0] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[a_3] \cong \mathbb{Z}^{\oplus 4}, \\ C_1(K(\sigma)^1) &= \bigoplus_{0 \le i < j \le 3} \mathbb{Z}[a_i a_j] \cong \mathbb{Z}^{\oplus 6}, \\ C_i(K(\sigma)^1) &= 0 \quad (i \geq 2) \end{aligned}$$

です。鎖複体は

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1((K(\sigma)^1)) \xrightarrow{\partial_1} C_0((K(\sigma)^1)) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

という形になります。境界作用素 ∂_1 は

$$\partial_1([a_i a_j]) = [a_j] - [a_i] \quad (0 \leq i < j \leq 3)$$

ですから、$\ker \partial_1$ は次の 4 つの元で生成されます：

$$x_1 = [a_0 a_1] + [a_1 a_2] + [a_2 a_0],\ x_2 = [a_1 a_2] + [a_2 a_3] + [a_3 a_1],$$

$$x_3 = [a_0 a_2] + [a_2 a_3] + [a_3 a_0],\ x_4 = [a_0 a_1] + [a_1 a_3] + [a_3 a_0].$$

このうち独立なものは 3 つです（例えば、$x_4 = x_1 - x_2 + x_3$ です）。従って

$$\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}x_1 \oplus \mathbb{Z}x_2 \oplus \mathbb{Z}x_3 \cong \mathbb{Z}^{\oplus 3}.$$

また $\operatorname{im} \partial_1$ は次の 6 つの元で生成されます：

$$y_{ij} = [a_i] - [a_j], \quad 0 \leq i < j \leq 3.$$

このうち独立なものは 3 つです。たとえば

$$y_{12} = y_{02} - y_{01},\quad y_{13} = y_{03} - y_{01},\quad y_{23} = y_{03} - y_{02}$$

となるので

$$\operatorname{im}\partial_1 \cong \mathbb{Z}y_{01} \oplus \mathbb{Z}y_{02} \oplus \mathbb{Z}y_{03} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 3}$$

です。また明らかに

$$\operatorname{im}\partial_2 = 0,\quad \ker\partial_0 = C_0(K(\sigma)^1) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 4}$$

です。以上から

$$H_0(K(\sigma)^1) = \ker\partial_0/\operatorname{im}\partial_1 \cong \mathbb{Z},$$

$$H_1(K(\sigma)^1) = \ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2 \cong \mathbb{Z}^{\oplus 3},$$

$$H_i(K(\sigma)^1) \cong 0 \quad (i \geq 2)$$

となります。$H_0(K(\sigma)^1)$ と $H_1(K(\sigma)^1)$ の基底を一つ選べば

$$H_0(K(\sigma)^1) \cong \mathbb{Z}[a_0],$$

$$H_1(K(\sigma)^1) \cong \mathbb{Z}[x_1] \oplus \mathbb{Z}[x_2] \oplus \mathbb{Z}[x_3]$$

と書けます。

(ii)$K(\sigma)^2$

(i) に加えて、2 次の鎖群が現れます。その生成元は $[a_i a_j a_k]$ $(0 \leq i < j < k \leq 3)$ の 4 つです。鎖複体は

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K(\sigma)^1) \xrightarrow{\partial_2} C_1((K(\sigma)^1)) \xrightarrow{\partial_1} C_0((K(\sigma)^1)) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

となります。また境界作用素 ∂_2 は

$$\partial_2([a_i a_j a_k]) = [a_j a_k] - [a_i a_k] + [a_i a_j]$$

であることから、まず

$$\ker\partial_2 \cong \mathbb{Z}([a_0 a_1 a_2] - [a_1 a_2 a_3] + [a_0 a_2 a_3] - [a_0 a_1 a_3]) \cong \mathbb{Z}$$

がわかります。また $\partial_2([a_i a_j a_k])$ は、(i) で出てきた x_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ に他ならないので

$$\operatorname{im}\partial_2 \cong \mathbb{Z}x_1 \oplus \mathbb{Z}x_2 \oplus \mathbb{Z}x_3 \cong \ker\partial_1$$

がわかります。∂_0, ∂_1 については (i) と同様です。以上から

$$H_0(K(\sigma)^2) \cong \mathbb{Z},$$

$$H_1(K(\sigma)^2) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2 \cong \ker \partial_1 / \ker \partial_1 = 0,$$

$$H_2(K(\sigma)^2) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_i(K(\sigma)^2) = 0 \quad (i \geq 3)$$

となります。$H_2(K(\sigma)^2)$ の基底として

$$x = [a_0a_1a_2] - [a_1a_2a_3] + [a_0a_2a_3] - [a_0a_1a_3]$$

を取ることができます。

(iii)$K(\sigma)^3 = K(\sigma)$

3 次の鎖群 $C_3(K(\sigma)) = \mathbb{Z}[a_0a_1a_2a_3]$ が現れます。鎖複体は

$$0 \xrightarrow{\partial_4} C_3(K(\sigma)) \xrightarrow{\partial_3} C_2(K(\sigma)^1) \xrightarrow{\partial_2} C_1((K(\sigma)^1)) \xrightarrow{\partial_1} C_0((K(\sigma)^1)) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

となります。境界作用素 ∂_3 は

$$\partial_3([a_0a_1a_2a_3]) = [a_1a_2a_3] - [a_0a_2a_3] + [a_0a_1a_3] - [a_0a_1a_2] = x$$

ですから

$$\ker \partial_3 = 0, \quad \operatorname{im} \partial_4 \cong \mathbb{Z}x$$

です。0 次と 1 次のホモロジー群の計算は (ii) と全く同様で、結果が変わるのは 2 次と 3 次です。それぞれ

$$H_2(K(\sigma)) \cong \mathbb{Z}x/\mathbb{Z}x = 0,$$

$$H_3(K(\sigma)) = 0.$$

まとめると

$$H_i(K(\sigma)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0) \\ 0 & (i \geq 1) \end{cases}$$

です。

2.

(i)$K(\sigma)^1$

定義に従って計算すればよいのですが、一般にはとても大変です。そこで、次のような工夫をしましょう。

σ の頂点を $a_0, \ldots, a_n$ とします。0 単体は $[a_0], \ldots, [a_n]$ の $(n+1)$ 個あります。また 1 単体は $\{[a_i a_j]\}_{0 \le i < j \le n}$ の $\binom{n+1}{2}$ 個です。まず $H_0(K(\sigma)^1)$ について

$$H_0(K(\sigma)^1) \cong \mathbb{Z}$$

を示しましょう（これは $K(\sigma)^1$ が連結であることの帰結です)。

∂_0 は 0 写像ですから $\ker \partial_0 = C_0(K(\sigma)^1)$ であり、従って $H_0 \cong C_0/\operatorname{im}\partial_1$ です。つまり H_0 は C_0 の商加群なので、その基底は $[a_0], \ldots, [a_n]$（の同値類）の中からいくつか選べるはずです。ところが、任意の $0 \le i, j \le n$ について

$$\partial_1([a_j a_i]) = [a_i] - [a_j]$$

つまり $[a_i] - [a_j] \in \operatorname{im}\partial_1$ ですから、商加群 H_0 の元として $[a_i] = [a_j]$ です。従って H_0 の基底として特に $[a_0]$ を選べます（$[a_1]$ や $[a_2]$ 等でも構いません)。よって

$$H_0 \cong \mathbb{Z}[a_0]$$

です。

次に H_1 について考えます。$\operatorname{im}\partial_2 = 0$ ですから

$$H_1 \cong \ker \partial_1$$

です。これは有限生成自由加群 C_2 の部分加群ですから、やはり自由加群です。ところで $\partial_1 : C_1 \to C_0$ に対し、準同型定理から

$$C_1/\ker \partial_1 \cong \operatorname{im}\partial_1$$

です。$\operatorname{im}\partial_1$ を考えてみると

$$\partial_1([a_i a_j]) = [a_j] - [a_i]$$

ですから、特に

$$\partial_1([a_i a_j] - [a_i a_0]) = [a_j] - [a_0] \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

を得ます。これらが $\operatorname{im}\partial_1$ の基底をなします。従って準同型定理の式は

$$\left(\bigoplus_{0 \le i < j \le n} \mathbb{Z}[a_i a_j] \right) \Big/ \ker \partial_1 \cong \bigoplus_{1 \le i \le n} \mathbb{Z}([a_i] - [a_0])$$

となります。この同型は $\partial_1 : [a_i a_j] \mapsto [a_j] - [a_i]$ が誘導する準同型により与えられることから、$\ker \partial_1$ は階数 $\binom{n+1}{2} - n = \binom{n}{2}$ の自由加群になります。つまり

$$H_1 \cong \ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}^{\oplus \binom{n}{2}}.$$

以上から

$$H_i(K(\sigma)^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ \mathbb{Z}^{\oplus \binom{n}{2}} & i = 1, \\ 0 & i \geq 2. \end{cases}$$

となります。H_1 の基底としては、例えば

$$[a_0 a_i] + [a_i a_j] + [a_j a_0] \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

を取ることができます。

(ii)$K(\sigma)^2$

(i) と全く同様にして $H_0 \cong \mathbb{Z}$ がわかります。また H_1 の生成元として (i) と同じ

$$[a_0 a_i] + [a_i a_j] + [a_j a_0] \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

を取れる訳ですが、実はこれらは $H_1 = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2$ の元として全て 0 になります。何故なら

$$\partial_2([a_0 a_i a_j]) = [a_0 a_i] + [a_i a_j] + [a_j a_0]$$

となり、$[a_0 a_i] + [a_i a_j] + [a_j a_0] \in \operatorname{im} \partial_2$ だからです。よって

$$H_1(K(\sigma)^2) = 0.$$

次に H_2 を考えます。まず $\operatorname{im} \partial_3 = 0$ より

$$H_2 \cong \ker \partial_2$$

です。境界作用素 $\partial_2 : C_2 \to C_1$ に対して準同型定理を用いると

$$C_2 / \ker \partial_2 \cong \operatorname{im} \partial_2$$

です。ところで、$H_1 = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2 = 0$ ですから $\ker \partial_1 = \operatorname{im} \partial_2$ が従い、特に $\operatorname{im} \partial_2 \cong \mathbb{Z}^{\oplus \binom{n}{2}}$ です。よって準同型定理の式は

$$\left(\bigoplus_{0 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{Z}[a_i a_j a_k] \right) \Big/ \ker \partial_2 \cong \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{Z}([a_0 a_i] + [a_i a_j] + [a_j a_0])$$

と書けます。この同型は $\partial_2 : [a_i a_j a_k] \mapsto [a_i a_j] + [a_j a_k] + [a_k a_i]$ が誘導する準同型で与えられていますから、$\ker \partial_2$ は階数

$$\binom{n+1}{3} - \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \ \left(= \binom{n}{3} \right)$$

の自由加群です。以上から

$$H_i(K(\sigma)^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ \mathbb{Z}^{\oplus \binom{n}{3}} & i = 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

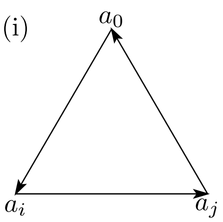
H_2 の基底としては、例えば

$$[a_0 a_i a_j a_k], \quad 1 \leq i < j < k \leq n$$

を取ることができます。

幾何学的には次のように考えられます。まず (i)$K(\sigma)^1$ で、H_1 の生成元 $[a_0 a_i] + [a_i a_j] + [a_j a_0]$ は、下の図のような 1 次元のグラフで与えられます。これは 1 次元の「穴」を表わしていると解釈できます。ホモロジーとは、このような「穴」の数を数えるものと考えることができます。

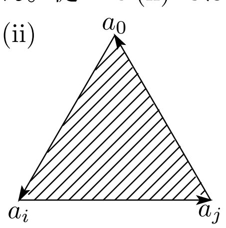
(i)



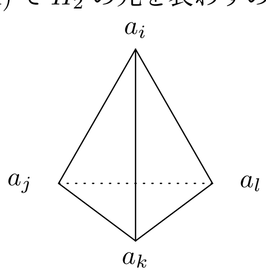
$(\simeq S^1)$

(ii)$K(\sigma)^2$ でも上のグラフはある意味で「穴」なのですが、このグラフを辺に持つような三角形（2 単体）があるので、これは本質的な「穴」とは呼べません。従って (ii) ではホモロジーの元にならないのです。

(ii)



(ii) で H_2 の元を表わすのは、下の図のような 2 次元の「穴」です。



$(\simeq S^2)$

以上の結果から、$0 \le k \le n-1$ について

$$H_i(K(\sigma)^k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0, \\ \mathbb{Z}^{\oplus\binom{n}{k+1}} & i=k, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

という予想が立ちます。ぜひ考えてみて下さい。

3.

まず $K(\sigma)$ のオイラー数 $\chi(K(\sigma))$ を考えます。$K(\sigma)$ の i 単体が α_i 個あるとき

$$\chi(K(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i$$

でした。i 単体とは、$(i+1)$ 個の頂点 $[a_{k_0}], [a_{k_1}], \ldots, [a_{k_i}]$ で張られる凸集合でしたから、その数は $\binom{n+1}{i+1}$ です。よって

$$\chi(K(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i+1}$$

です。ところで、よく知られているように

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} = (1-x)^{n+1}|_{x=1} = 0$$

ですから

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \binom{n+1}{j} \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$K(\sigma)^{n-1}$ は、これより n 単体一つぶんだけ少ないので

$$\chi(K(\sigma)^{n-1}) = 1 - (-1)^n$$

です。

ホモロジー群について、概略を述べておきます。まず $K(\sigma)$ について考えます。$K(\sigma)$ は連結ですから、2. で考えたのと全く同様にして

$$H_0(K(\sigma)) \cong \mathbb{Z}$$

です。次に H_1 を考えます。2. で考えたのと同様に、$\ker\{\partial_1 : C_1 \to C_0\}$ は

$$[a_i a_j] + [a_j a_k] + [a_k a_i], \quad 0 \le i < j < k \le n$$

のような、2 単体の「辺」で生成されます。「辺」と言ったのは、これが文字通り 2 単体の境界だからで

$$\partial_2([a_i a_j a_k]) = [a_i a_j] + [a_j a_k] + [a_k a_i]$$

です（2.(ii) の図を参照)。これは $\ker \partial_1 \cong \mathrm{im}\, \partial_2$ を意味し、従って

$$H_1(K(\sigma)) \cong 0$$

です。同じように、$Ker\, \partial_2$ は

$$[a_i a_j a_k] + [a_j a_k a_l] + [a_l a_i a_k] + [a_l a_i a_j], \quad 0 \leq i < j < k < l \leq n$$

で生成されますが、これも 3 単体の境界になっています：

$$\partial_3([a_i a_j a_k a_l]) = [a_j a_k a_l] + [a_l a_i a_k] + [a_l a_i a_j] + [a_i a_j a_k].$$

従って $\ker \partial_2 \cong \mathrm{im}\, \partial_3$ となり

$$H_2(K(\sigma)) \cong 0$$

です。H_{n-1} までは全く同様に進みます。H_n については、n 単体が $[a_0 a_1 \cdots a_n]$ の一つしかないので $\ker \partial_n = 0$ であり、従ってやはり $H_n(K(\sigma)) = 0$ です。まとめると

$$H_i(K(\sigma)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ 0 & i \geq 1, \end{cases}$$

です。

$K(\sigma)^{n-1}$ の場合もほぼ同様ですが、H_{n-1} だけが違います。$\ker \partial_{n-1}$ の生成元は

$$[a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n] - [a_0 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n] + [a_0 a_1 a_2 a_4 \cdots a_n] - \cdots$$

の一つだけです。これは n 単体の「境界」になっていて、$K(\sigma)$ のときは実際に n 単体 $[a_0 a_1 \cdots a_n]$ の境界になっていました：

$$\partial_n([a_0 a_1 \cdots a_n]) = [a_1 a_2 a_3 \cdots a_n] + [a_0 a_2 a_3 \cdots a_n] - \cdots .$$

しかし $K(\sigma)^{n-1}$ の場合は n 単体がないのでこのようにはならず、特に $\mathrm{im}\, \partial_n = 0$ です。従って

$$H_{n-1} \cong \mathbb{Z}([a_1 a_2 \cdots a_n] - [a_0 a_2 \cdots a_n] + \cdots)/\{0\} \cong \mathbb{Z}$$

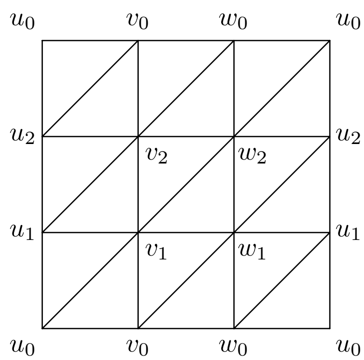
です。まとめると

$$H_i(K(\sigma)^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \text{ または } n-1, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

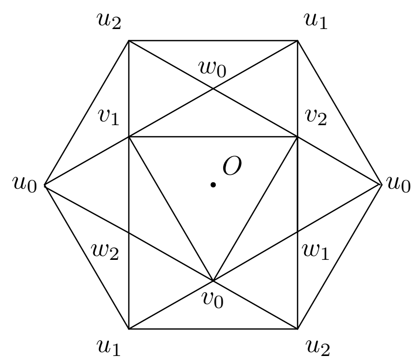
どちらの場合も、オイラー数 $\chi = \sum_i (-1)^i \mathrm{rank}\, H_i$ となっていることがわかります。

2

1. まず、2 次元球面 S^2 は 3 単体 σ が与える単体複体の 2 骨格 $K(\sigma)^2$ により単体分割されます（問題 1 の 2.(ii) の図を参照）。また、2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ および 2 次元射影空間 $\mathbb{R}P^2$ は次のようにして単体分割されます：



$S^1 \times S^1$



$\mathbb{R}P^2$

ただし、$S^1 \times S^1$ では外周の向かい合う辺を同じ向きに同一視し、$\mathbb{R}P^2$ では外周の点で中心 O に関して対称な位置にある点を同一視しています。

2.
i) S^2: S^2 の単体分割は前の設問 1-1 の $K(\sigma)^2$ と同じくなりますので, ここでは割愛します.
ii) $S^1 \times S^1$: 上図のように単体分割を入れます. このとき, chain は次のようになります.

$$
\begin{aligned}
C_0(S^1 \times S^1) &= \mathbb{Z}\langle [u_i], [v_i], [w_i] \rangle_{i=0,1,2} \cong \mathbb{Z}^9 \\
C_1(S^1 \times S^1) &= \mathbb{Z}\langle [u_i v_i], [v_i w_i], [w_i u_i] \rangle_{i=0,1,2} \\
&\qquad \oplus \mathbb{Z}\langle [u_i u_{i+1}], [v_i v_{i+1}], [w_i w_{i+1}] \rangle_{i=0,1,2} \\
&\qquad \oplus \mathbb{Z}\langle [u_i v_{i+1}], [v_i w_{i+1}], [w_i u_{i+1}] \rangle_{i=0,1,2} \cong \mathbb{Z}^{27} \\
C_2(S^1 \times S^1) &= \mathbb{Z}\langle [u_i v_i v_{i+1}], [u_i v_{i+1} u_{i+1}] \rangle_{i=0,1,2} \\
&\qquad \oplus \mathbb{Z}\langle [v_i w_i w_{i+1}], [v_i w_{i+1} v_{i+1}] \rangle_{i=0,1,2} \\
&\qquad \oplus \mathbb{Z}\langle [w_i u_i u_{i+1}], [w_i u_{i+1} w_{i+1}] \rangle_{i=0,1,2} \cong \mathbb{Z}^{18}
\end{aligned}
$$

$$
0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\partial_2} C_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\partial_0} 0
$$

ただし, index はすべて modulo 3 で考えます. (たとえば $u_3 = u_0$ など)
まず $H_0(S^1 \times S^1)$ を求めましょう. 前の設問の解説にもあったとおり, 商加群 $H_0 = \ker \partial_0 / \operatorname{im} \partial_1$ の元として

$$
u_i = v_i = w_k \text{ ただし } i, j, k = 0, 1, 2
$$

でしたから, $H_0(S^1\times S^1)$ の生成元として $[u_0]$ を取ってくることができます. ですから

$$H_0(S^1\times S^1)=\mathbb{Z}[u_0]\cong\mathbb{Z}$$

がわかります.

次に $H_1(S^1\times S^1)$ を求めます. まず, 前の設問と同様にして

$$\mathrm{im}\,\partial_1=\mathbb{Z}\langle([u_i]-[u_0]),([v_j]-[u_0]),([w_j]-[u_0])\rangle_{i=1,2\ j=0,1,2}\cong\mathbb{Z}^8$$

が得られます. よって準同型定理から

$$C_1/\ker\partial_1\cong\mathrm{im}\,\partial_1\cong\mathbb{Z}^8$$

です. このとき, $\mathrm{im}\,\partial_1$ の各生成元は

$$[x]-[u_0]=\begin{cases}\partial_1[xu_0]\ x\neq v_2,w_1\ \text{のとき}\\ \partial_1([v_1u_0]+[v_2v_1])\ x=v_2\ \text{のとき}\\ \partial_1([w_1v_1]+[v_1u_0])\end{cases}$$

によって適当な 1-chain の 1 次結合によって表されるので

$$\ker\partial_1\cong\mathbb{Z}^{27-8}=\mathbb{Z}^{19}$$

になります. 次に $\ker\partial_1$ の独立な生成元を 19 個見つけてきましょう. 前の設問の考察を元にして考えると, $\ker\partial_1$ の生成元として次のようなものが取れることがわかります.

$$\begin{aligned}a_x&:=[x_0x_1]+[x_1x_2]+[x_2x_0]\ (x=u,v,w)\\ b_i&:=[u_iv_i]+[v_iw_i]+[w_iu_i]\\ c_i&:=[u_iv_{i+1}]+[v_{i+1}w_{i+2}]+[w_{i+2}u_i]\\ d_i^1&:=[u_iv_i]+[v_iv_{i+1}]+[v_{i+1}u_i]\\ d_i^2&:=[u_iv_{i+1}]+[v_{i+1}u_{i+1}]+[u_{i+1}u_i]\\ e_i^1&:=[v_iw_i]+[w_iw_{i+1}]+[w_{i+1}v_i]\\ e_i^2&:=[v_iw_{i+1}]+[w_{i+1}v_{i+1}]+[v_{i+1}v_i]\\ f_i^1&:=[w_iu_i]+[u_iu_{i+1}]+[u_{i+1}w_i]\\ f_i^2&:=[w_iu_{i+1}]+[u_{i+1}w_{i+1}]+[w_{i+1}w_i]\ (i=0,1,2)\end{aligned}$$

(1-chain $c\neq0$ に対して $\partial_1c=0$ となるための必要十分条件は c がある頂点を始点とする closed loop になっていることです. この場合は closed loop の頂点が 4 つ以上であればそれは 3 頂点からなる closed loop に対応する 1-chain の和としてかけますから, $\ker\partial_1$ の生成元としてとして 3 頂点からなるもの

だけを集めてくればよいことになります．で，すべて列挙すると上の 27 通りです．)

このとき次のことがわかります．

(1). $a_u \sim a_v \sim a_w$
prf: $a_u + \sum_{i=0}^2 \partial_2([u_i v_i v_{i+1}] + [u_i v_{i+1} u_{i+1}]) = a_v$ etc.
同じようにして次の事がわかります．

(2). $b_0 \sim b_1 \sim b_2$

(3). $c_i \sim a_u + b_i \ (i = 0, 1, 2)$

これで生成元が 20 個まで減りました．よってあと 1 つ減ることを見れば十分ですが，

(4). $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^2 (d_i^j + e_i^j + f_i^j) = 0$

が計算によって確かめられます．

以上により，

$$\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}\langle a_u, b_0, d_i^j, e_i^j, f_k^j \rangle_{i=0,1,2 \ \ j,k=1,2}$$

をとることができます．さらに $a_u, b_0, d_i^j \cdots$ etc. は互いにホモローグでないこともわかります．

一方 $C_2(S^1 \times S^1)$ の各生成元について

$$\partial_2 [u_i v_i v_{i+1}] = [u_i v_i] + [v_i v_{i+1}] + [v_{i+1} u_i] = d_i^1$$

などにより，

$$\mathrm{im}\, \partial_2 \cong \mathbb{Z}\langle d_i^j, e_i^j, f_k^j \rangle_{i=0,1,2 \ \ j,k=1,2} \cong \mathbb{Z}^{17}$$

がわかります．これにより，

$$H_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}\langle a_u, b_0 \rangle \cong \mathbb{Z}^2$$

となります．

最後に $H_2(S^1 \times S^1)$ を調べましょう．まず，$\mathrm{im}\, \partial_3 = 0$ ですから

$$H_2(S^1 \times S^1) = \ker \partial_2$$

を調べれば十分です．一方で準同型定理から

$$C_2(S^1 \times S^1) / \ker \partial_2 \cong \mathrm{im}\, \partial_2 \cong \mathbb{Z}^{17}$$

で，上で見たとおり $\mathrm{im}\, \partial_2$ の各生成元に写す $C_2(S^1 \times S^1)$ の元が存在しますから，

$$H_2(S^1 \times S^1) = \ker \partial_2 \cong \mathbb{Z}^{18-17} = \mathbb{Z}$$

がわかります．$H_2(S^1 \times S^1)$ の生成元としては

$$\sum_{i=0}^{2}([u_iv_iv_{i+1}] + [u_iv_{i+1}u_{i+1}] + [v_iw_iw_{i+1}] + [v_iw_{i+1}v_{i+1}] \\ + [w_iu_iu_{i+1}] + [w_iu_{i+1}w_{i+1}])$$

をとることができます．まとめると次の通りです．

$$H_q(S^1 \times S^1) \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, 2 \text{ のとき}) \\ \mathbb{Z}^2 & (q = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

iii) $\mathbb{R}P^2$: これも上記のとおりに単体分割を入れます．このとき chain は以下のとおりです．

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{R}P^2) &= \mathbb{Z}\langle [u_i], [v_i], [w_i] \rangle_{i=0,1,2} \cong \mathbb{Z}^9 \\ C_1(\mathbb{R}P^2) &= \mathbb{Z}\langle [u_iu_{i+1}], [v_iv_{i+1}], [u_iv_{i+1}], [v_iu_{i+1}] \rangle_{i=0,1,2} \\ &\quad \oplus \mathbb{Z}\langle [u_iw_{i+1}], [w_iu_{i+1}], [v_iw_{i+1}], [w_iv_{i+1}] \rangle_{i=0,1,2} \cong \mathbb{Z}^{24} \\ C_2(\mathbb{R}P^2) &= \mathbb{Z}\langle [u_iu_{i+1}v_{i+2}], [u_iu_{i+1}w_{i+2}], [v_iv_{i+1}w_{i+2}] \rangle_{i=0,1,2} \\ &\quad \oplus \mathbb{Z}\langle [u_{i+2}v_{i+1}w_i], [w_{i+2}v_{i+1}u_i], [v_2v_1v_0] \rangle_{i=0,1,2} \cong \mathbb{Z}^{16} \end{aligned}$$

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

まず $H_0(\mathbb{R}P^2)$ を求めましょう．先ほどと同じ構成の仕方により，

$$\begin{aligned} \ker \partial_0 &= C_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}^9 \\ \operatorname{im} \partial_1 &= \mathbb{Z}\langle ([u_i] - [u_0]), [v_j] - [u_0], [w_j] - [u_0] \rangle_{i=1,2\ j=0,1,2} \cong \mathbb{Z}^8 \end{aligned}$$

ですから

$$H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}[u_0] \cong \mathbb{Z}$$

がわかります．

次に $H_1(\mathbb{R}P^2)$ を求めましょう．準同型定理から

$$C_1(\mathbb{R}P^2)/\ker \partial_1 \cong \operatorname{im} \partial_1 \cong \mathbb{Z}^8$$

です．先ほどと同様, ∂_1 によって $\operatorname{im} \partial_1$ の各生成元に写る $C_1(\mathbb{R}P^2)$ の元が存在しますから，

$$\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}^{24-8} = \mathbb{Z}^{16}$$

であることがわかります．それでは, 先ほどと同様にして $\ker\partial_1$ の独立な生成元 16 個を取り出してみましょう．

まず, $\ker\partial_1$ の生成元として次のものが取れます．

$$
\begin{aligned}
a_i &:= [u_i u_{i+1}] + [u_{i+1} v_{i+2}] + [v_{i+2} u_i] \\
b_i &:= [u_i u_{i+1}] + [u_{i+1} w_{i+2}] + [w_{i+2} u_i] \\
c_i &:= [u_{i+2} v_{i+1}] + [v_{i+1} w_i] + [w_i u_{i+2}] \\
d_i &:= [w_{i+2} v_{i+1}] + [v_{i+1} u_i] + [u_i w_{i+2}] \\
e_i &:= [v_i v_{i+1}] + [v_{i+1} w_{i+2}] + [w_{i+2} v_i] \ (i = 0, 1, 2) \\
f &:= [u_0 u_1] + [u_1 u_2] + [u_2 u_3] \\
g &:= [v_2 v_1] + [v_1 v_0] + [v_0 v_2]
\end{aligned}
$$

以上で 17 個上がりましたから, あと 1 つ関係式を見つければ独立な生成元を取り出すことができます．このとき, 次の関係式 (重要!!) が成立します．

$$g = 2f - \sum_{i=0}^{2}(a_i + b_i + c_i + d_i + e_i)$$

ですから, $\ker\partial_1$ の自由生成元として $a_i \cdots e_i, f$ を取ることができます．

次に $\operatorname{im}\partial_2$ を調べましょう．まず, 次のことがわかります．

(1) $a_i, \cdots, e_i, g \in \operatorname{im}\partial_2$

これは $C_2(\mathbb{R}P^2)$ の生成元を境界作用素 ∂_2 で写せばすぐにわかります．

このことと先ほどの関係式を合わせると次の事がわかります．

(2) $a_i, \cdots, e_i, g$ は $2f$ にホモローグ

つまり, どのような $C_2(\mathbb{R}P^2)$ の元を取ってきても ∂_2 に代入すると f に関する成分は偶数になってしまいます．このことから

$$\operatorname{im}\partial_2 \cong \mathbb{Z}\langle a_i, b_i, c_i, d_i, e_i\rangle_{i=0,1,2} \oplus 2\mathbb{Z}\langle f\rangle \cong \mathbb{Z}^{15} \oplus 2\mathbb{Z}$$

が成立します．以上により,

$$H_1(C_1(\mathbb{R}P^2)) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\langle f\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

がわかりました．

最後に $H_2(\mathbb{R}P^2)$ ですが, これは準同型定理から

$$C_2(\mathbb{R}P^2)/\ker\partial_2 \cong \operatorname{im}\partial_2 \cong \mathbb{Z}^{16}$$

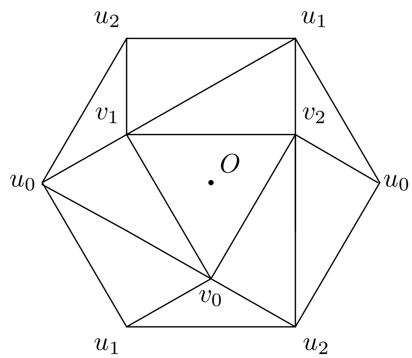
ですが, $C_2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}^{16}$ で, さらに $\operatorname{im}\partial_2$ の各生成元 $(a_i, \cdots, e_i, 2f)$ に写す $C_2(\mathbb{R}P^2)$ の元が存在しますから

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$$

になります．まとめると次の通りです．

$$H_q(\mathbb{R}P^2)\begin{cases} \mathbb{Z} & (q=0\text{ のとき}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (q=1\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\mathbb{R}P^2$ の別の単体分割を示しておきます：



$\mathbb{R}P^2$