14. ポアンカレ双対定理

1　ホモロジー多様体とその向き付け

位相空間 M が，n 次元**ホモロジー多様体**であるとは，M が単体分割可能で，M の各点 x について

$$H_q(M, M-x) = \begin{cases} 0 & q \neq n \\ \mathbf{Z} & q = n \end{cases}$$

が成立することである．

M を連結な n 次元ホモロジー多様体とする．以下，M は単体的複体 K により単体分割が与えられているとする．K の 2 つの n 次元単体 σ, σ' が $n-1$ 次元単体 τ で隣接しているとき，それぞれの単体の向きについての結合係数が $\varepsilon(\sigma, \tau) = -\varepsilon(\sigma', \tau)$ を満たすならば，σ と σ' の向きは同調している (compatible) という．M のある単体分割 K について，隣接する n 次元単体の向きをすべて同調するようにできるとき，M は**向き付け可能** (orientable) であるという．そうでないとき，M は**向き付け不可能** (non-orientable) であるという．

定理 1. M をコンパクトで連結な n 次元ホモロジー多様体とする．M が向き付け可能であるための必要十分条件は $H_n(M;\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ である．M が向き付け不可能であるための必要十分条件は $H_n(M;\mathbf{Z}) \cong 0$ である．

コンパクトで連結な n 次元ホモロジー多様体 M が向き付け可能であるとき，向きを指定する $H_n(M;\mathbf{Z})$ の生成元を $[M]$ で表し，M の**基本ホモロジー類**とよぶ.

2　ポアンカレ双対定理

第 3 回と同様に，単体 $\sigma = [a_0 a_1 \cdots a_n]$ の重心を $b(\sigma)$ とする．また，単体的複体 K の重心細分を $\mathrm{Sd}K$ で表す．K の単体 σ に対し，

$$\widehat{\sigma} = \bigcup_{\sigma_0 = \sigma} [b(\sigma_0) b(\sigma_1) \cdots b(\sigma_k)]$$

とおく．ここで，和は $\sigma = \sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_k$ （K の face の狭義の増大列）となるような $\mathrm{Sd}K$ の単体 $[b(\sigma_0)b(\sigma_1)\cdots b(\sigma_k)]$ 全体をわたるものとする．このような $\widehat{\sigma}$ 全体により定まる $C(\mathrm{Sd}K)$ の部分加群を $C(\widehat{K})$ で表す．準同型写像 $\theta : C^q(K) \to C_{n-q}(\widehat{K})$ を q 次元単体 $\sigma \in K$ の双対コチェイン $\sigma^* \in C^q(K)$ に対して，$\theta(\sigma^*) = \widehat{\sigma}$ で定義すると，次の**ポアンカレ双対定理** (Poincaré duality) が導かれる．

定理 2. M をコンパクトで向き付け可能な n 次元ホモロジー多様体とする．次の同型が成立する．

$$H^q(M; \mathbf{Z}) \cong H_{n-q}(M; \mathbf{Z})$$

普遍係数定理とあわせると，ベッチ数について $b_q(M) = b_{n-q}(M)$ が成立することがわかる．また，$H_q(M; \mathbf{Z})$ の捩れ部分は $H_{n-q-1}(M; \mathbf{Z})$ の捩れ部分と同型になる．

ポアンカレ双対定理は，M がコンパクトで向き付け可能な可微分多様体であるという仮定の下で成立する．このとき，M には基本ホモロジー $[M] \in H_n(M; \mathbf{Z})$ をとることができて，ポアンカレ双対同型写像は $\theta(v) = v \cap [M]$, $u \in H^q(M; \mathbf{Z})$ で表される．ここで，$v \cap [M]$ は，すべての $u \in H^{n-q}(M; \mathbf{Z})$ に対して

$$\langle u, v \cap [M] \rangle = \langle u \cup v, [M] \rangle$$

を満たすことで特徴付けられる．

M のホモロジー類の交叉数

$$I : H_q(M) \times H_{n-q}(M) \to \mathbf{Z}$$

が，$I(\alpha, \beta) = \langle \widehat{\alpha} \cup \widehat{\beta}, [M] \rangle$ により定義される．ここで，$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ は，それぞれ，α, β のポアンカレ双対を表す．M の向き付けられた部分多様体 N_1, N_2 が横断的に交わっているとき，N_1, N_2 の基本ホモロジー類の交叉数は

$$I([N_1], [N_2]) = \sum_{x \in N_1 \cap N_2} I_x(N_1, N_2)$$

と表される．ここで，$I_x(N_1, N_2)$ は N_1, N_2 の交点 x における局所的な交叉数で，接空間 T_xN_1, T_xN_2 向きが T_xM の向きと同調しているときは 1 そうでないときは -1 と定める．