6. CW複体

1　CW複体の定義

位相空間 X は Hausdorff であるとする．X の部分集合の族 $\{e_\lambda\}$ で次の条件を満たすものが与えられたとする．

(1) $X = \bigcup_\lambda e_\lambda$ （共通部分のない和集合）
(2) それぞれの e_λ に対して，n 次元球体 D^n から e_λ の閉包 $\overline{e}_\lambda$ への連続写像 φ_λ があって，φ_λ を D^n の内点集合に制限すると，e_λ への同相写像である．(e_λ を n 次元セルとよぶ．)
(3) k 次元以下のセルの和集合を X^k で表すと，n 次元セル e_λ について，$\overline{e}_\lambda \setminus e_\lambda \subset X^{n-1}$ が成り立つ．

このとき，X を**セル複体** (cell complex), 表示 $X = \bigcup_\lambda e_\lambda$ を X のセル分割という．また，X^k を X の k-skeleton とよぶ．X の部分集合 Y が X のセルの和集合で表されていて，Y のセル e_λ に対して $\overline{e}_\lambda \subset Y$ が成り立つとき Y を X の部分複体という．X のセルの個数が有限個のとき X を有限セル複体という．

次の条件 (C), (W) を満たすセル複体 X を **CW 複体** (CW complex) とよぶ．C, W はそれぞれ，closure finite, weak topology の略である．
(C) 各点 $x \in X$ に対して $x \in Y$ であるような有限部分複体 Y が存在する．
(W) X の部分集合 N は，X のすべてのセル e_λ について $\overline{e}_\lambda \cap N$ が閉集合のとき，閉集合となる．

2　CW 複体の例

　単体的複体 K の多面体は，それぞれの単体の内点集合をセルとする CW 複体である．以下，セルの次元を上付きの添字で表す．

　n 次元球面 S^n はセル分割

$$S^n = e^0 \cup e^n$$

をもつ．実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は，増大列

$$\mathbf{R}P^0 \subset \mathbf{R}P^1 \subset \cdots \subset \mathbf{R}P^n$$

を用いて，セル分割

$$\mathbf{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$$

をもつことがわかる．同様に複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ は，セル分割

$$\mathbf{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$$

をもつ．