

幾何学II演習

3. 単体的複体とそのホモロジー (2)

1 積複体

(1) K, L を単体的複体とする. K, L の頂点に全順序を与えておく. このとき, $|K| \times |L|$ の単体分割で, 次の性質を満たすものがただ一つ存在することを示せ.

1. 単体分割による $|K| \times |L|$ の頂点の集合は, K, L の頂点の集合の直積集合となる.
2. 射影 $p: |K| \times |L| \rightarrow |K|, p': |K| \times |L| \rightarrow |L|$ は, とともに頂点の順序を保つ単体写像である.

(2) 上の方法を用いて, $S^2 \times S^2$ の単体分割を一つ与えよ.

(3) $|K| \times I$ の単体分割を求め, そのホモロジー群は $H_*(K)$ と同型であることを示せ.

2 有限グラフのホモロジー群

K を連結な有限 1 次元単体的複体とする.

1. K が tree であるとは, 任意の 1 次元単体 $\sigma \in K$ に対して, $|K|$ から σ の内点集合を除いたグラフが連結でないことである. K が tree のとき,

$$H_q(K) \cong 0, q \neq 0, \quad H_0(K) \cong \mathbf{Z}$$

を示せ.

2. $|K|$ から残りのグラフが連結であるように取り除ける開 1 次元単体の最大個数を d とする. $H_1(K)$ は階数 d の自由加群であることを示せ. また, K のオイラー数を d で表せ.