幾何学 III 演習問題２

1. $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ とする．k を整数として $\gamma_k : [0,1] \to M$ を

$$\gamma_k(t) = (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt)$$

で定める．また M 上の 1 次微分形式 ω を

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

で定義する．微分形式の引き戻し $\gamma_k^*\omega$ を求め積分

$$\int_0^1 \gamma_k^*\omega$$

を計算せよ．

2. M を直積 $[0,1] \times \mathbf{R}$ において $(0,x)$ と $(1,-x)$ を同一視して得られる商空間とする．

(1) 自然な射影 $\pi : M \to S^1$ により M は S^1 上のベクトルバンドルの構造を持つことを示せ．

(2) $\pi : M \to S^1$ は自明なバンドル $S^1 \times \mathbf{R}$ とは同型でないことを示せ．

(3) S^1 上のファイバーが $\mathbf{R}$ のベクトルバンドルを同型をのぞいて分類せよ．

３． n が奇数のとき実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は向き付け可能であることを示せ．n が偶数の場合はどうか．

4. f, g を可微分多様体 M から N へのなめらかな写像とする．なめらかな写像 $F : M \times [0,1] \to N$ が存在して

$$F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x)$$

であるとする．このとき，de Rham コホモロジー群に誘導される写像

$$f^*, g^* : H_{DR}^*(N) \to H_{DR}^*(M)$$

について $f^* = g^*$ が成立することを示せ．