幾何学II　演習の解説（1/7）

1

(1) 連続写像 f を universal cover $\mathbb{R}$ にリフトした写像

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \theta \mapsto \arg f(e^{2\pi i\theta})$$

を適当に 1 つ取ってきます．このとき

$$f(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\tilde{f}(\theta)}$$

と表わすことが出来ます．ここで f の写像度は

$$\deg f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$$

と表わせることに注意しましょう．このとき $f(-x) = -f(x)$ ですから

$$f(-e^{2\pi i\theta}) = f(e^{2\pi i(\theta+\frac{1}{2})}) = e^{2\pi i\tilde{f}(\theta+\frac{1}{2})} = -f(e^{2\pi i\theta}) = -e^{2\pi i\tilde{f}(\theta)}$$

よってこのときある奇数 p が存在して

$$\tilde{f}(\theta + \frac{1}{2}) = \tilde{f}(\theta) + \frac{p}{2}$$

となることがわかります．これを用いますと

$$\begin{aligned}\deg f &= \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)\\ &= \tilde{f}(1) - \tilde{f}(\frac{1}{2}) + \tilde{f}(\frac{1}{2}) - \tilde{f}(0)\\ &= \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p\end{aligned}$$

となり, 写像度は必ず奇数になることが分かります．よってこのような写像は存在しません.

(2)D_+ および D_- を

$$D_+ := \{x \in S^{n+1} | x_{n+1} \geq 0\} \quad D_- := \{x \in S^{n+1} | x_{n+1} \leq 0\}$$

と定義します．このとき

$$D_+ \cup D_- = S^{n+1}, \quad D_+ \cap D_- = S^n$$

ですから, $H_q(D_\pm)=0$ $(q>0)$ を用いると Mayer-Vietoris 完全系列により, 同型写像

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{\delta} H_n(S^n) \longrightarrow 0$$

が導かれます. ここで δ は境界準同型写像です. まず次の補題を示します.
Lemma: $\delta\circ(Sf)_* = f_*\circ\delta$
Outline of proof: $H_n(S^n)$ の生成元を τ_n とおくと $H_{n+1}(S^{n+1})$ の生成元 τ_{n+1} は

$$\tau_{n+1} = p_+ * \tau_n - p_- * \tau_n \quad (p_\pm = (0,\ldots,0,\pm 1))$$

と表わせます. ここで, $p_\pm * \tau_n$ は $p_\pm$ を頂点とする錐をとったものとします. このとき $\delta(\tau_{n+1})=\tau_n$ が分かります. 一方 $p_\pm * \tau_n$ は $D_\pm$ の単体とみなせ, $Sf(D_\pm)\subset D_\pm$, $Sf(S^n)\subset S^n$ ですから,

$$\begin{aligned}
\delta\circ(Sf)_*(\tau_{n+1}) &= i^{-1}\circ\partial\circ(Sf|_{D_+}\oplus Sf|_{D_-})_*(p_+ * \tau_n, -p_- * \tau_n)\\
&= i^{-1}\circ(Sf|_{D_+}\oplus Sf|_{D_-})\circ\partial(p_+ * \tau_n, -p_- * \tau_n)\\
&= i^{-1}\circ(Sf|_{D_+}\oplus Sf|_{D_-})(\tau_n, -\tau_n)\\
&= Sf|_{S^n}\tau_n = f(\tau_n) = f\circ\delta(\tau_{n+1})
\end{aligned}$$

となります. (ただし $i: C_n(S^n)\to C_n(D_+)\oplus C_n(D_-)$ は Mayer-Vietoris 完全系列にでてくる単射写像です), これにより Lemma が示されました. (q.e.d)
(注意): 本当は $f: S^n\to S^n$ の単体近似 $f': K\to L$ $(|K|=|L|=S^n)$ を用いて証明します. f' が f の単体近似であれば Sf' も Sf の単体近似になり, かつ単体写像は境界写像 ∂ と可換ですから, 上の議論が成り立つわけです. 詳しい証明は自分で補ってください.

この Lemma により

$$\delta\circ(Sf)_*(\tau_{n+1}) = (\deg Sf)\delta(\tau_{n+1}) = (\deg Sf)\tau_n$$

$$f_*\circ\delta(\tau_{n+1}) = f_*(\tau_n) = (\deg f)\tau_n$$

ですからそれぞれを比べることで $\deg f = \deg Sf$ が分かります.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{n+1}(S^{n+1}) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & 0\\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H_{n+1}(S^{n+1}) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(3) 証明は田村一郎の「トポロジー」第 4 章 §17(p.132-) を参照してください. ただし, ここで出されている問題は上の教科書の主張と少しだけ異なっているのでどのように修正すればこの問題の答えが得られるかを述べたいと思います.

多面体 $|L|$ は N 次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の部分空間であるとします．このとき L の単体 σ に対してその直径 $d(\sigma)$ を

$$d(\sigma) = sup_{x,y\in|\sigma|}|x-y|$$

とします．このとき $|x-y|$ は $\mathbb{R}^N$ におけるベクトル $x-y$ の大きさを表わします．このとき

$$mesh(L) := sup_{\sigma\in L} d(\sigma)$$

とします．これは各単体の直径の最大を表わすものです．実は

$$mesh(SdL) \leq \frac{N}{N+1} mesh(L)$$

となることが分かりますので (同書 p. 60), 重心細分を取るごとに $mesh$ は単調減少していきます．そこで n を

$$mesh(Sd^n L) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

となるようにとり, 同書 p. 138 の単体近似定理を用いるとこの問題を証明することが出来ます．(つまり任意の $x \in |L|$ に対して x を含み, n 次元球体と同相でかつ x を中心として半径 ε の n 次元球体に含まれるような $|L|$ の部分複体が必ず存在するように, 重心細分を細かく取っておくということです．)
(4)$f' : K \to L$ を f の単体近似とします．($|K| = S^m$, $|L| = S^n$) f' は単体写像で $m < n$ ですから $f'(K)$ は L の m-skelton に入っていなければなりません．よって L の任意の n 単体の内点 v をとると

$$f'(K) \subset L^m \subset S^n \setminus v$$

が分かります．$S^n \setminus v$ は可縮ですから f' は 1 点への写像にホモトピー同値です．よって f も 1 点への写像にホモトピー同値になります．

(5) これも田村一郎「トポロジー」§22 (p. 161-) を参照してください．以下証明のアウトラインを述べていきます．

1. S^1 に関して Hopf の定理を示します．これは授業でもやったと思います．

2. S^n まで Hopf の定理が証明されたと仮定します．まず次の Lemma を示します．
   Lemma: 任意の連続写像 $f : S^{n+1} \to S^{n+1}$ に関してある連続写像 $f' : S^n \to S^n$ が存在して $f \simeq Sf'$.
   証明は同書 p. 165(補助定理 5.5) をみてください．

3. $f, g : S^{n+1} \to S^{n+1}$ が $\deg f = \deg g$ ならば $f \simeq g$ が成立することを証明します．上の Lemma からある $f', g' : S^n \to S^n$ で $f \simeq Sf'$, $g \simeq Sg'$ が存在します．このとき (2) を用いて

$$\deg f' = \deg Sf' = \deg f = \deg g = \deg Sg' = \deg g'$$

ですから $\deg f' = \deg g'$ です．よって帰納法の仮定から $f' \simeq g'$ です．これにより $Sf' \simeq Sg'$ が分かります．よって $f \simeq g$ が証明できたことになります．

尚この証明では連続写像を近似した単体写像を用いて証明しています．つまり単体近似定理 (3) はこの証明の至るところに使われています．

2

(1)G の Y への作用が自由かつ不連続になることを確かめます．そうすれば誘導される商写像 $Y \to Y/G$ が Galois 被覆写像になりますからこの問の前半が示されたことになります．

ここで $|r| > 1$ として一般性を失わないことに注意しましょう．まず作用が自由であることですが

$$x = r^m x \Leftrightarrow x(r^m - 1) = 0$$

ですが, $r \neq 0, \pm 1$ で $r \in \mathbb{Z}$ ですから結局 $x = 0$ が得られ, 作用が自由であることが確かめられます．

一方作用の不連続性については次のようにして示すことが出来ます．まず $r > 1$ の場合ですが, $x \in Y$ に対して $B(x, r)$ で中心 x, 半径 r の開球とします．このとき, 任意の $x \in Y$ に対して x の開近傍として $B(x, \frac{|r-1|}{2(r+1)}|x|)$ をとりましょう．するとこの開近傍への $\mathbb{Z}$-作用は

$$m.B(x, \frac{|r-1|}{2(r+1)}|x|) = B(r^m x, \frac{|r^m||r-1|}{2(r+1)}|x|)$$

となります．まず $m \geq 1$ を作用させた場合

$$B(x, \frac{|r-1|}{2(r+1)}|x|) \cap m.B(x, \frac{|r-1|}{2(r+1)}|x|) \neq \emptyset$$

とすると中心間の距離と半径の関係から

$$|r^m - 1| \leq \frac{(|r^m| + 1)|r-1|}{2(r+1)}$$

とならなければいけません．整理すると

$$\frac{2(r+1)|r^m - 1| - (r^m + 1)|r-1|}{2(r+1)} \leq 0$$

となります．ところが $m \geq 1$, の場合,

$$\text{L.H.S} = \frac{(r^{m+1} - 1) + 3r(r^{m-1} - 1)}{2(r+1)},$$

$m \leq -1$ の場合,

$$\text{L.H.S} = \frac{3r(1-r^{m-1}) + (1-r^{m+1})}{2(1+r)}$$

ですから, 各々正となり上の不等式は矛盾します.

次に $r < -1$ の場合は次のようにして示すことが出来ます. 任意の $x \in Y$ に対して x の開近傍を上と同様にして $B(x, \frac{|r-1|}{2(r+1)}|x|)$ ととります. 上の式から

$$1 > \frac{|r-1|}{2(r+1)}$$

ですから, m が奇数の場合の作用については

$$B(x, \frac{|r-1|}{2(r+1)}|x|) \cap m.B(x, \frac{|r-1|}{2(r+1)}|x|) = \emptyset$$

がすぐに分かります. 残りは m が偶数の場合ですが, 結局これは $r > 1$ の場合と全く同様にして作用の不連続性を示すことが出来ます. 以上で $Y \to Y/G$ が Galois 被覆であることが分かりました.

次に Y/G のホモロジー群について調べます. いま

$$U_1 = \{x \in Y | \frac{2r+1}{3r} < |x| < \frac{2r+1}{3}\},$$
$$U_2 = \{x \in Y | \frac{r+2}{3r} r < |x| < \frac{r+2}{3} r\}$$

とおきます. このとき

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (m.U_1 \cup m.U_2) = Y$$

ですから $m.U$, $m.V$ たちは Y の開被覆になり, $p(U_i) \cong U_i$, $(i = 1, 2)$ となることが分かります. 一方

$$V_1 = \{x \in Y | \frac{2r+1}{3r} < |x| < \frac{r+2}{3}\}$$
$$V_2 = \{x \in Y | \frac{r+2}{3} < |x| < \frac{2r+1}{3}\}$$

とすると $p(V_i) \cong V_i$ $(i = 1, 2)$ で

$$p(U_1) \cup p(U_2) = Y/G, \quad p(U_1) \cap p(U_2) = p(V_1) \cup p(V_2)$$

が分かります. 以下 $p(U_i), p(V_i)$ を U_i, V_i と書く事にします. また $U_i, V_i \sim S^{n-1}$ であることに注意しましょう. このとき Mayer-Vietoris 完全系列により

$$\cdots \to H_q(V_1) \oplus H_q(V_2) \to H_q(U_1) \oplus H_q(U_2) \to H_q(Y/G) \to \cdots$$

が得られます. 以下次のように場合分けしていきます.

(i)$n \geq 3$ の場合. まず, $q \neq 0, n-1$ のときは $H_q(S^{n-1}) = 0$ ですから

$$H_q(Y/G) = 0 \quad (q \neq 0, 1, n-1, n)$$

が分かります. $q=0,1$ については次の完全系列が得られます.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(Y/G) & \longrightarrow & H_0(V_1)\oplus H_0(V_2) \\ & \xrightarrow{\iota} & H_0(U_1)\oplus H_0(U_2) & \longrightarrow & H_0(Y/G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このとき, Y/G は連結なので $H_0(Y/G)=\mathbb{Z}$, さらに ι の像の階数は 1 なので $H_1(Y/G)=\mathbb{Z}$ も分かります.

$q=n,n-1$ については r の正負により結果が異なってきます. まず, 得られる Mayer-Vietoris 完全系列は以下のとおりです.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(Y/G) & \longrightarrow & H_{n-1}(V_1)\oplus H_{n-1}(V_2) \\ & \xrightarrow{\iota} & H_{n-1}(U_1)\oplus H_{n-1}(U_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y/G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ここで $r>0$ ならば ι の表現行列は

$$\iota=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられることが分かります. よって $\mathrm{im}\iota\cong\mathbb{Z}$ が分かりますから

$$H_n(Y/G)\cong H_{n-1}(Y/G)\cong\mathbb{Z}$$

が得られます.

一方 $r<0$ の場合ですが, $1\in\mathbb{Z}$ を Y に作用させるとこの作用は対蹠点写像にホモトピックなので, これに気を付けると ι の表現行列は

$$\iota=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

で与えられることが分かります. よって n が偶数の場合は $r>0$ の場合と同じ結果になります, 一方 n が奇数の場合は

$$H_n(Y/G)\cong 0,\quad H_n(Y/G)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となります.

以上の結果をまとめると次のようになります.
n が偶数, または $r>0$ の場合

$$H_q(Y/G)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (q=0,1,n-1,n)\\ 0 \text{ otherwise.}\end{cases}$$

n が奇数かつ $r<0$ の場合

$$H_q(Y/G)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (q=0,1)\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (q=n-1)\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

(ii)$n=2$ の場合．やり方は上と同様ですので, 結果だけかきます．この場合は対蹠点写像は恒等写像にホモトピックなので, r の正負に関係なく

$$H_q(Y/G)=\begin{cases}\mathbb{Z} \quad (q=0,2)\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \quad (q=1)\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

が得られます.

(iii)$n=1$ の場合, $r>0$ なら $Y/G\cong S^1\sqcup S^1$, $r<0$ なら $Y/G\cong S^1$ ですから, 次のようになります.

$r>0$ の場合

$$H_q(Y/G)=\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \quad (q=0,1)\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

$r<0$ の場合

$$H_q(Y/G)=\begin{cases}\mathbb{Z} \quad (q=0,1)\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}$$

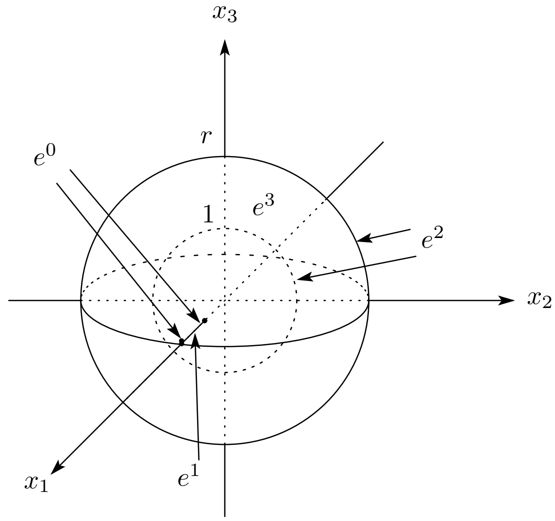
注意　別解として，セル分割を用いる方法について簡単に述べておきます．以下では $n\geq 2,\ r>1$ の場合を考えます．基本領域

$$X=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 1\leq x_1^2+\cdots+x_n^2\leq r^2\}$$

を考えます．求める空間 Y/G は，$\partial X=\{x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}\cup\{x_1^2+\cdots+x_n^2=r^2\}$ を G の作用による同一視で張り合わせた空間です．この空間のセル分割として，

- 0 セル：点 $(1,0,\ldots,0)$．この点は $(r,0,\ldots,0)$ と同一視されています．
- 1 セル：x_1 軸上の線分 $\{(x_1,0,\ldots,0)\mid 1\leq x_1\leq r\}$．これは上記の 2 点を結ぶような線分です．
- $(n-1)$ セル：∂X に現れる球面 $\{x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$ および $\{x_1^2+\cdots+x_n^2=r^2\}$（$G$ の作用により同一視される）から，上の 2 点 $(1,0,\ldots,0)$ と $(r,0,\ldots,0)$（やはり G の作用により同一視される）を除いた部分．これは D^{n-1} の内部と同相です．
- n セル：残った部分 $\{1<x_1^2+\cdots+x_n^2<r^2\}-\{1\leq x_1\leq r,\ x_2=\cdots=x_n=0\}$．ややわかりにくいかもしれませんが，これは D^n の内部と同相です．

$n=3$ の場合は次のようになります：



境界準同型を考えると，$\partial e^{n-1}=0$, $\partial e^1=0$ は明らかでしょう．∂e^n が問題になります．今は $r>0$ の場合ですから，2 箇所に見えている e^{n-1} の向きは同じで，e^n から見たときの法線の向きが逆になります．このことから $\partial e^n = e^{n-1}-e^{n-1}=0$ です．従ってホモロジー群は

$$H_q(Y/G)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (q=0,1,n-1,n)\\ 0 \text{ otherwise.}\end{cases}$$

$r<0$ の場合，まず e^1 の取り方を少し変えます．$(1,0,\ldots,0)$ と同一視される点は $(-r,0,\ldots,0)$ ですから，この 2 点を結ぶ道を X の内部で適当に取ります．他は同様にでき，e^0, e^1, e^{n-1}, e^n をセルに持つようなセル複体になります．

境界準同型は、∂e^n に注意が要ります．境界には e^{n-1} が二つ現れますが，その向きは n が偶数のとき一致し，奇数のときは逆向きになります．これは S^n の対蹠点写像の写像度が $(-1)^{n+1}$ だったことと同じ理由です．従って

$$\partial e^n = e^{n-1}+(-1)^{n+1}e^{n-1}$$

となります．他は $r>0$ のときと同じです．これらから結果が出ます．

$n=2$ のときも同様のセル分割がありますが，これはトーラスの標準的なセル分割に一致します．

(2)$S^1=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\}$ とします．S^1 の $\mathbb{Z}$-作用を

$$m.z=e^{m\pi i}z$$

定めます．このときこの作用に関して $S^1/Z=S^1$ です．この作用に関する商

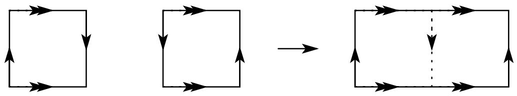
射は

$$f : S^1 \to S^1 \quad z \mapsto z^2$$

で与えられ, これは 2 重被覆写像になっています.

しかし S^1 の $\mathbb{Z}$-作用は不連続でも, 自由でもありません.

(3) 図のように Klein Bottle を 2 枚張り合わせればよいです.



2 枚の K　　　　T^2

正確に言うと, Klein Bottele K を

$$K = [0,1] \times [0,1]/\sim$$

とします. このとき, $p : T^2 \to K$ を

$$p(s,t) = \begin{cases} (s, 2t) \quad 0 \le t \le 1/2 \text{ のとき} \\ (1-s, 2t-1) \quad 1/2 \le t \le 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すればこれは T^2 から K への 2 重被覆になっています.

一方で群 $\mathbb{R}^2$ の被覆変換群 H を

$$H = \langle s,\ t \rangle, \quad s : (x,y) \mapsto (x+1, y), \quad t : (x,y) \mapsto (-x, y+1)$$

とおきます.

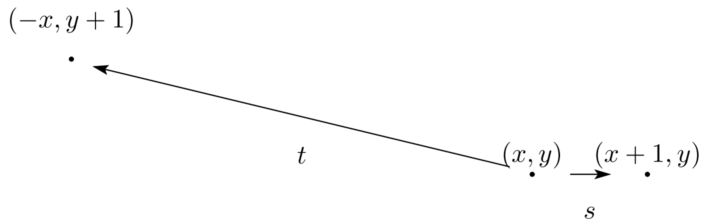
Claim 1: H は K の基本群を定める.

proof: s, t の作用はそれぞれ自由かつ不連続なので, 商写像 $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/H$ は Galois 被覆になります. よって, $\pi_1(\mathbb{R}^2/H) = H$ ですが, $\mathbb{R}^2/H = K$ になることが簡単に確かめられますから (例えば基本領域を見つけてみましょう) $H = \pi_1(K)$ がわかります.

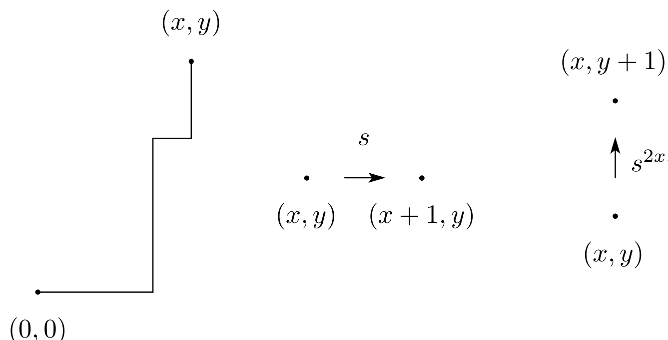
Claim 2: $H = \langle s,\ t | ts = st^{-1} \rangle$.

proof: 原点 $O = (0,0)$ をとり, $b_0 := \rho(0,0)$ とおきます. このとき $\pi_1(K)$ の元は O から $p \in \rho^{-1}(b_0)$ までの点の道のホモトピー類に対応します. つまり任意の基本群の元 $\gamma \in \pi_1(K)$ に対してある $p(\gamma) \in \rho^{-1}(K)$ と原点を結ぶ道のホモトピー類が対応してその対応は全単射になっています. 対応は $\gamma \in \pi_1(K)$ をとったらその被覆空間への持ち上げを構成し, その終点を対応させることによって得られたことを思い出しましょう.

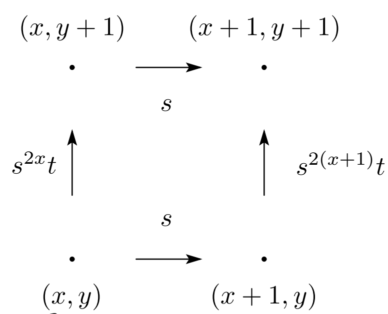
このとき, $s \in H$ に対応する $\pi_1(K)$ の元は (x,y) と $(x+1,y)$ を結ぶ道のホモトピー類に, $t \in H$ に対応する $\pi_1(K)$ の元は (x,y) と $(-x,y)$ を結ぶ道のホモトピー類に対応しています.



1. まず $\pi_1(K)$ が s, t で生成されることを見ておきましょう.
$\rho^{-1}(b_0)$ の元は $\mathbb{R}^2$ 上の格子点 (つまり各座標が整数であるような点) と 1 対 1 に対応します. ここで $\gamma \in \pi_1(K)$ の $\mathbb{R}^2$ への持ち上げを (x, y) と $(x+1, y)$ または (x, y) と $(x, y+1)$ を結ぶ直線をつなげた道にホモトピーで変形してあげることができます.



このとき $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ に対応する道は s が対応し, $(x, y) \mapsto (x, y+1)$ に対応する道は $s^{2x}t$ が対応しますから $\pi_1(K)$ は s および t で生成されることがわかります.
2. 最後に $\pi_1(K)$ の関係式についてみておきましょう.
$\pi_1(K)$ の元は原点から $p \in \rho^{-1}(b_0)$ の道のホモトピー類に対応しますから, 点 (x, y) から点 $(x+1, y+1)$ まで通るのに右回りでも左回りでも up to homotopy で元としては等しくなります.



よって上の図を見ることによって

$$s^{2(x+1)}ts = s^{2x+1}t$$

を得ることができます. これを変形すると

$$ts = st^{-1}$$

が得られます. 以上により $\pi_1(K)$ の表示を得ることができました.