幾何学　　演習の解説（11/12）

1

(1) S_1, S_2 を適当に単体分割しておきます．これらの連結和は

1. S_1, S_2 から一つの 2 単体およびその辺単体を取り除き（Euler 数はそれぞれ $3-3+1=1$ だけ減る），
2. 円柱で繋ぐ

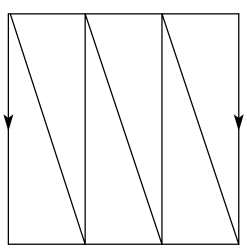
というふうに得られます．この円柱の Euler 数への寄与は，下の図より

$$6-12+6=0$$

ですから、結局

$$\chi(S_1\sharp S_2)=(\chi(S_1)-1)+(\chi(S_2)-1)+0=\chi(S_1)+\chi(S_1)-2$$

です．



円柱部分の単体分割．

頂点 6 個，辺 12 本，面 6 個

(2) 取り除いた k 個の円板を $D_1,\ldots,D_k$ とすると，$X\cup(\sqcup_i D_i)=F_g$, $X\cap(\sqcup_i D_i)=S^1\sqcup\ldots\sqcup S^1$（$k$ 個の S^1 の非交和）です．X 以外のホモロジーは

$$H_l(D_1\sqcup\ldots\sqcup D_k)=\begin{cases}\mathbb{Z}^k & l=0\\ 0 & l\geq 1\end{cases}$$

$$H_l(F_g)=\begin{cases}\mathbb{Z} & l=0,2\\ \mathbb{Z}^{2g} & l=1\\ 0 & l\geq 3\end{cases}$$

$$H_l\left(S^1\sqcup\ldots\sqcup S^1\right)=\begin{cases}\mathbb{Z}^k & l=0,1\\ 0 & l\geq 2\end{cases}$$

です．この分解について Mayer-Vietoris 完全列を書くと

$$\begin{gathered}\longrightarrow 0 \longrightarrow H_2(X) \oplus 0 \xrightarrow{j_2} \mathbb{Z} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{i_1} H_1(X) \oplus 0 \xrightarrow{j_1} \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{i_0} H_0(X) \oplus \mathbb{Z}^k \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0\end{gathered}$$

となります．

まず，定義に従って ∂_1 を見てみます．$z \in C_2(F_g)$ をサイクルとしましょう．このとき $y \in C_2(X) \oplus C_2(\sqcup_i D_i)$ で $j_2(y) = z$ となるものがありました．この y は $j_1(\partial y) = 0$ を満たしており，よってサイクル $x \in C_1(\sqcup S^1)$ で $i_0(x) = y$ を満たすものが存在しました．この x が $\partial_2(z) = x$ を定めるのでした．

この問題の場合，$z \in H_2(F_g) = \mathbb{Z}$ を生成元とすると，∂y は $X \cap D_1, \ldots, X \cap D_k$ で表される X の 1 次元サイクルになり，よって $\partial_2(z) = x \in H_1(\sqcup S^1)$ は k 個の S^1 自身で表されるサイクルです．従って $\partial_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^k$ は

$$\partial_2(1) = (1, 1, \ldots, 1)$$

と書けることになり，特に単射です．列の完全性から j_2 が 0 写像であることが従います．よって 1 行目から

$$0 \longrightarrow H_2(X) \xrightarrow{j_2} 0$$

が完全列になります．これにより $H_2(X) = 0$ です．

X は連結なので $H_0(X) = \mathbb{Z}$ です．$i_0 : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^k$ を見てみると

$$i_0(a_1, \ldots, a_k) = (a_1 + \cdots + a_k) \oplus (a_1, \ldots, a_k) \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

ですから i_0 は単射です．列の完全性から ∂_0 が 0 写像であることになります．0 写像 j_2 のところから始めると

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{i_1} H_1(X) \xrightarrow{j_1} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

が完全列です．∂_1 は単射ですから特に $\operatorname{im} \partial_1 \cong \mathbb{Z}$ であり，列の完全性から $\ker i_1 \cong \mathbb{Z}$ です．よって，i_1 の定義域 $H_1(\sqcup S^1) \cong \mathbb{Z}^k$ を $\ker i_1 \cong \mathbb{Z}$ で割っておけば，短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^k/\mathbb{Z} \xrightarrow{i_1} H_1(X) \xrightarrow{j_1} \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow 0$$

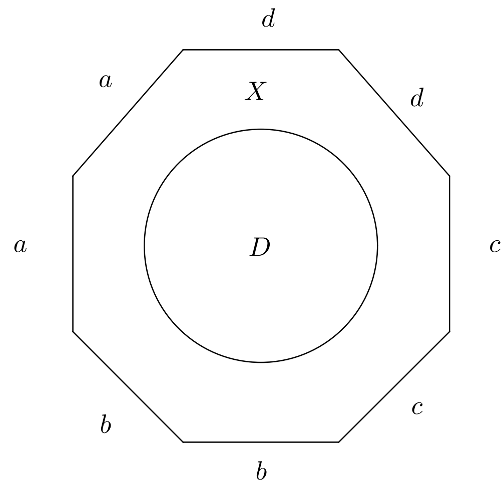
を得ます．$\mathbb{Z}^{2g}$ は自由加群ですからこの短完全列は分裂し

$$H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}^{2g} \cong \mathbb{Z}^{2g+k-1}$$

です．まとめると次のようになります．

$$H_l(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & l = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g+k-1} & l = 1 \\ 0 & l \geq 2. \end{cases}$$

(3) 次のように，内側の円板 D と外側 X とに分割しましょう（図は $g=4$）：



$D \cup X = N_g$, $D \cap X = S^1$ です．円板 D は $\mathbb{Z}_2$ 係数でも自明なホモロジーを持ちます．X のホモロジーについては，ホモロジー群のホモトピー不変性を使ってもよければ，X を外側の円周に「押しつぶす」ことにより g 個の S^1 の 1 点和になることから

$$H_l(X;\mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & l=0 \\ (\mathbb{Z}_2)^g & l=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

です．これを用いて Mayer-Vietoris 完全列を書くと

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_1} 0 \oplus (\mathbb{Z}_2)^g \longrightarrow H_1(N_g) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_0} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H_0(N_g) \longrightarrow 0.$$

まず i_1 を見てみます．$H_1(S^1;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ は，この場合は $D \cap X = S^1$ で表わされるサイクルで生成されます．i_1 による $H_1(D;\mathbb{Z}_2)$ への像はもちろん 0 です．このサイクルは X においては外周 $aabbccdd\ldots$ とホモローグですから，$H_1(X;\mathbb{Z}_2)$ への像は $2a+2b+2c+2d+\cdots$ となり，$\mathbb{Z}_2$ 係数では 0 です．従って i_1 は 0 写像で，列の完全性から ∂_1 は全射です．一方，やはり列の完全性から単射であることもわかり，従って

$$H_2(N_g;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

がわかります．次に i_0 を見ると

$$i_0(1) = (1,1)$$

ですから単射で，列の完全性から ∂_0 は 0 写像です．i_1 も 0 写像でしたから

$$0 \xrightarrow{i_1} 0 \oplus (\mathbb{Z}_2)^g \longrightarrow H_1(N_g) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

が完全になります．よって $H_1(N_g;\mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^g$ です．

$\mathbb{Z}$ 係数の場合と同様に，N_g が連結であることから $H_0(N_g;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ となります．以上から

$$H_l(N_g;\mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & l = 0, 2 \\ (\mathbb{Z}_2)^g & l = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2

(1) この曲面を X_n と書きます．まず $X_1 = aa^{-1}$ は球面ですから種数 0，また $X_2 = a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}$ はトーラスで，種数は 1 です．

以下では $n \geq 3$ とします．$b = a_2a_3 \ldots a_n$ とおくと $a_n^{-1} = b^{-1}a_2 \ldots a_{n-1}$ ですから

$$a_1a_2 \ldots a_na_1^{-1} \ldots a_n^{-1} = a_1ba_1^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1}(b^{-1}a_2 \ldots a_{n-1})$$

さらに $a_1^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} = c$ とおくと，$a_1 = a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1}c^{-1}$ なので，上の式は

$$\begin{aligned} &= (a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1}c^{-1})bcb^{-1}a_2 \ldots a_{n-1} \\ &= c^{-1}bcb^{-1}a_2 \ldots a_{n-1}a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} \end{aligned}$$

です．$c^{-1}bcb^{-1}$ の部分はトーラス，$a_2 \ldots a_{n-1}a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1}$ の部分は X_{n-2} と同じ表示になっていますから

$$X_n = T\sharp X_{n-2}$$

を得たことになります．これにより，帰納的に

$$X_n = F_{[\frac{n}{2}]}$$

です．

(2) Euler 数が -2 以上の閉曲面は

- 向き付け可能なもの：$F_0 = S^2$, $F_1 = T^2$, F_2
- 向き付け不可能なもの：$N_1 = \mathbb{R}P^2$, $N_2 =$Klein bottle, N_3, N_4

で全てです．N_3 以外については，これらを標準形で表し，必要に応じて各辺を二等分ないしは四等分すれば，八角形の辺を二つずつ同一視したものとして表せます．N_3 についても，標準形 $aabbcc$ について，例えば aa の部分の二辺だけを二等分すれば条件を満たす表示が得られます．

3

S^2 が条件のような cell 分割を持つと仮定します．二つの 2-cell が高々一つの辺を共有するという条件から，各頂点に集まる辺の数は 3 以上であることが従います．

まず次の補題を示します：

補題 1 0-cell, 1-cell, 2-cell の数をそれぞれ a, b, c とすると，Euler 数は $a-b+c$.

[証明] 六角形の内部に頂点を取り、これと六角形の各頂点を結べば単体分割になります．六角形の中には新たに頂点が 1 個，辺が 6 本，面が 6 個現れますから，0 単体，1 単体，2 単体の総数はそれぞれ $a+c, b+6c, 6c$ となります．よって

$$\chi = (a+c) - (b+6c) + 6c = a - b + c$$

つまり，六角形の 2-cell をあたかも 2 単体の様に考えて Euler 数を数えることが出来る訳です． ■

この cell 分割で，2-cell が x 個だとしてみます．2-cell 毎に辺は 6 本ある訳ですが、各辺は二つの 2-cell で共有されますから，辺の数は $6x/2 = 3x$ 本です．また，2-cell 毎に頂点は 6 個ありますが，各々は 3 本以上の辺で共有されますから，頂点の数は最大でも $6x/3 = 2x$ を超えません．これと上の補題から，Euler 数 χ について

$$\chi \leq 2x - 3x + x = 0$$

でなければなりません．ところが

$$H_k(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ですから Euler 数は $1 - 0 + 1 = 2$ で矛盾します．以上により，条件のような cell 分割は存在しないことが判りました．