

幾何学I演習 2. 多様体の定義と例

1. 実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ について, 以下を示せ.

- (1) $\mathbf{R}P^1$ は S^1 と同相である.
- (2) $\mathbf{R}P^n$ はコンパクトである.

2. $f: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ を C^∞ 級関数として, M を $f = 0$ で定義される集合とする. $M \neq \emptyset$ で, M の各点で $\text{grad } f \neq 0$ となるとき, M は, n 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ.

3. $a_j, 1 \leq j \leq n+1$ を $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ を満たす実数とする. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

上の関数 f を

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j^2$$

で定める. $(df)_p = 0$ となる $p \in S^n$ をすべて求めよ.

4. $k \leq n$ とする. \mathbf{R}^n の k 個のベクトルで、長さが1で互いに直交するもの全体の集合を $V_{n,k}$ で表す. $V_{n,k}$ にコンパクト可微分多様体の構造が入ることを示し、その次元を求めよ.