11. CW複体のホモロジー

1 特異ホモロジーによるCW複体のホモロジーの記述

X を CW 複体，X^n をその n-skeleton とする．

命題 1. *1.* $H_q(X^n, X^{n-1}) = 0, \quad q \neq n$

2. X の各 n セル e_λ に対して，$\varphi_{\lambda*} : D^n \to \overline{e}_\lambda$ をとり，$\varphi_{\lambda*} : H_n(D^n, S^{n-1}) \to H_n(X^n, X^{n-1})$ を考えると，$H_n(X^n, X^{n-1})$ は $H_n(D^n, S^{n-1})$ の生成元の $\varphi_{\lambda*}$ による像によって生成される自由加群である．

CW 複体 X について $C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ とおく．また境界作用素 $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ を (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) のホモロジー完全列の準同型写像 $\partial_* : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ として定める．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 1. *CW複体 X について，上のように定まるチェイン複体 $C_n(X)$ のホモロジー群は，X の特異ホモロジー群 $H_*(X)$ と同型である．*

CW 複体 X について $C_n(X)$ は n 次元セル $\{e_\lambda\}$ で生成される自由加群と同型である．境界作用素 $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ は e_λ に対応する基底を $[e_\lambda]$ で表すと

$$\partial[e_\lambda] = \sum_\mu \varepsilon(e_\lambda, e_\mu)[e_\mu], \quad \varepsilon(e_\lambda, e_\mu) \in \mathbf{Z}$$

という形に表される．整数 $\varepsilon(e_\lambda, e_\mu)$ を結合係数 (incidence number) とよぶ．

さらに，これを用いると次の定理を証明することができる．

定理 2. *単体的複体 K のホモロジー群は，多面体 $|K|$ の特異ホモロジー群 $H_*(|K|)$ と同型である．*

この結果と，特異ホモロジー群のホモトピー不変性をあわせると，単体的複体 K のホモロジー群のホモトピー不変性が得られる．とくに，多面体のホモロジー群は単体分割によらないことがわかる．

2 射影空間のホモロジー群

$X = \mathbf{R}P^n$ として，標準的なセル分割を考える．$X^k \cong \mathbf{R}P^k, 0 \leq k \leq n$ となっている．このとき，$C_k(X) = H_k(X^k, X^{k-1}) \cong \mathbf{Z}$ である．境界作用素 $\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X), 1 \leq k \leq n$ は，k が奇数のとき零写像，k が偶数のとき 2 倍写像となる．このことから次の結果が得られる．

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{R}P^n) &\cong \mathbf{Z}, \\ H_{2i+1}(\mathbf{R}P^n) &\cong \mathbf{Z}_2, \quad (0 < 2i+1 < n) \\ H_{2i}(\mathbf{R}P^n) &\cong 0, \qquad\quad (0 < 2i \leq n) \end{aligned}$$

n 次のホモロジー群については,

$$H_n(\mathbf{R}P^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n : odd \\ 0 & n : even \end{cases}$$

となる．また，複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ については,

$$\begin{aligned} H_{2i}(\mathbf{C}P^n) &\cong \mathbf{Z}, \qquad (0 \leq 2i \leq 2n) \\ H_{2i+1}(\mathbf{C}P^n) &\cong 0, \quad (0 < 2i+1 < 2n) \end{aligned}$$

となる．