

## 幾何学 I 演習 レポート問題

1.  $r \leq n$  として,  $n$  行  $r$  列の実行列全体を  $M(n, r)$  で表す.

$$V(n, r) = \{ X \in M(n, r) \mid {}^tXX = I_r \}$$

とおく. ここで,  $I_r$  は  $r$  次の単位行列を表す.  $M(n, r)$  は  $\mathbf{R}^{nr}$  と同一視してユークリッド位相を入れ,  $V(n, r)$  には相対位相を入れる.  $V(n, r)$  はコンパクトな可微分多様体の構造をもつことを示せ.

2. 開円板  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  に

$$g_{11} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

によって Riemann 計量を入れる.  $O$  は原点とする.

- (1)  $0 < r < 1$  として, 座標  $(a_1, a_2) \in D$ ,  $a_1^2 + a_2^2 = r^2$  で表される点  $P$  をとる. 線分  $OP$  の上の Riemann 計量に関する長さを  $r$  で表せ.

- (2)  $D$  の 2 点  $P, Q$  に対して,  $d(P, Q)$  を,  $P, Q$  を結ぶなめらかな曲線の, 上の計量に関する長さの最小値として定義する.  $d$  により,  $D$  に距離空間の構造が入ることを示せ. また, この距離に関して  $D$  が完備であるかどうかを調べよ.