幾何学I追試問題

1. a_j, $1 \leq j \leq n+1$ を $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ を満たす実数とする. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

上の関数 f を

$$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j^2$$

で定める。$(df)_p = 0$ となる $p \in S^n$ をすべて求めよ.

2. $\mathbf{R}^n$ の一次独立なベクトル $e_1, \cdots, e_n$ に対して

$$\Gamma = \{m_1 e_1 + \cdots + m_n e_n \mid m_1, \cdots, m_n \in \mathbf{Z}\}$$

とおく.

(1) 商空間 $T^n = \mathbf{R}^n / \Gamma$ は可微分多様体の構造をもつことを示せ.

(2) 射影 $p : \mathbf{R}^n \to T^n$ のランクは各点で n であることを示せ.

3. $0 < a < b$ とする. 3 次元ユークリッド空間内のトーラス

$$x = (a\cos\theta + b)\cos\phi, \quad y = (a\cos\theta + b)\sin\phi, \quad z = a\sin\theta$$

$0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ について, $\mathbf{R}^3$ のユークリッド計量から誘導されるトーラスのリーマン計量を θ, ϕ で表せ.