幾何学 I 演習　3．多様体の接空間と写像の微分

1．M を n 次元可微分多様体として，$f : M \to M$ を C^∞ 級写像とする．M の点 p において微分 $(df)_p$ のランクは n とする．

(1) p を含む M の開集合 U で $f : U \to f(U)$ は微分同相写像となるものが存在することを示せ．

(2) 微分 $(df)_q$ のランクが n となるような M の点 q 全体の集合は M の開集合であることを証明せよ．

(3) 問 (1) の状況のとき，f は p において局所微分同相であるという．M の各点で局所微分同相な $f : M \to M$ で微分同相写像でないような，多様体 M と C^∞ 級写像 $f : M \to M$ の例を挙げよ．

2．$j : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ を包含写像とする．S^n の点 $p = (a_1, \cdots, a_{n+1})$ をとる．微分

$$(dj)_p : T_pS^n \to T_{j(p)}\mathbf{R}^{n+1}$$

は単射であることを示し，その像を $a_1, \cdots, a_{n+1}$ で表せ．

3．$\mathbf{R}^n$ の一次独立なベクトル $e_1, \cdots, e_n$ に対して

$$\Gamma = \{m_1e_1 + \cdots + m_ne_n \mid m_1, \cdots, m_n \in \mathbf{Z}\}$$

とおく．

(1) 商空間 $T^n = \mathbf{R}^n/\Gamma$ は可微分多様体の構造をもつことを示せ．

(2) 射影 $p : \mathbf{R}^n \to T^n$ のランクは各点で n であることを示せ．

4．$f : \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^3$ を

$$f([x : y : z]) = (xy, yz, zx)$$

で定義する。微分 $(df)_p$ の p によるランクが p によってどのように変化するかを調べよ．ただし，$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ とする．