13. コホモロジー論と普遍係数定理

1　特異コホモロジーの定義といくつかの性質

X を位相空間，$S_q(X)$ を X の特異 q 次チェイン群とする．$S_q(X)$ の双対加群を $S^q(X)$ とおき，特異 q 次コチェイン群とよぶ．つまり，$S^q(X) = \mathrm{Hom}(S_q(X), \mathbf{Z})$ である．コバウンダリー作用素 $\delta : S^q(X) \to S^{q+1}(X)$ が，$c \in S_{q+1}(X)$ に対して $\langle \delta u, c\rangle = \langle u, \partial c\rangle$ を満たすように定まる．$\delta : S^q(X) \to S^{q+1}(X)$ を δ_q で表す．$H^q(X) = \mathrm{Ker}\ \delta_q / \mathrm{Im}\ \delta_{q-1}$ とおき，これを X の q 次の**特異コホモロジー群** (singular cohomology group) とよぶ．

コホモロジー群とホモロジー群の間には自然なペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle : H^q(X) \times H_q(X) \to \mathbf{Z}$$

が定義され，これを Kronecker 積とよぶ．

位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ に対して，準同型写像 $f^\sharp : S^q(Y) \to S^q(X)$ および $f^* : H^q(Y) \to H^q(X)$ が導かれる．ホモトピー不変性，位相空間対に対する完全系列，Mayer-Vietoris の完全列はホモロジーの場合と同様に述べられる．完全列の形は次の通りである．

$$\cdots \xrightarrow{\delta_*} H^q(X, Y) \longrightarrow H^q(Y) \xrightarrow{i^*} H^q(X) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X, Y) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta^*} H^q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\beta^*} H^q(X_1) \oplus H^q(X_2) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow \cdots$$

2　カップ積

位相空間 X のコホモロジー $H^*(X) = \oplus_q H^q(X)$ は，次のように次数環 (graded ring) の構造をもつ．コチェイン $u \in S^p(X)$, $u \in S^q(X)$ について，$u \cup v \in S^{p+q}(X)$ を $\sigma \in S_{p+q}(X)$ に対して

$$\langle u \cup v, \sigma\rangle = \langle u, F_p\sigma\rangle\langle v, L_q\sigma\rangle$$

が満たされるように定める．ここで，$F_p\sigma$ は σ のはじめの $p+1$ 個の頂点ではられる p-face, $L_q\sigma$ は σ の後の $q+1$ 個の頂点ではられる q-face を表す．これは以下の性質を持つ．

1. 連続写像 $f : X \to Y$ について，$f^\sharp(u \cup v) = f^\sharp(u) \cup f^\sharp(v)$
2. $\delta(u \cup v) = \delta u \cup v + (-1)^p u \cup \delta v$

コチェイン u, v が，$\delta u = 0, \delta v = 0$ を満たすとき，これらのコホモロジー類 $[u], [v]$ に対して

$$[u] \cup [v] = [u \cup v]$$

と定義する．これはコホモロジー $H^*(X)$ に積の構造を定め，**カップ積** (cup product) とよばれる．$\alpha \in H^p(X)$, $\beta \in H^q(X)$ に対して $\alpha \cup \beta = (-1)^{pq}\beta \cup \alpha$ が成立する．

3　普遍係数定理

アーベル群 G について $S_q(X, G) = S_q(X) \otimes G, S^q(X, G) = \mathrm{Hom}(S_q(X), G)$ とおくことにより，G 係数のホモロジーとコホモロジーが定義される．

定理 1. 次の完全列が存在する．

$$0 \to H_n(X) \otimes G \to H_n(X; G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), G) \to H^n(X; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X), G) \to 0$$

これらの完全列は分解するが，一般には標準的な分解の方法があるわけではない．

一般にアーベル群 A, B に対して，$\mathrm{Tor}(A, B)$ および $\mathrm{Ext}(A, B)$ は次のように定義される．A の自由分解 (free resolution)

$$0 \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$$

をとる．これは完全列で，F_0, F_1 は自由アーベル群である．$\mathrm{Tor}(A, B)$ および $\mathrm{Ext}(A, B)$ は以下の完全列で特徴付けられる．

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, B) \to F_1 \otimes B \to F_0 \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F_0, B) \to \mathrm{Hom}(F_1, B) \to \mathrm{Ext}(A, B) \to 0$$