

# 幾何学II演習

## 7. 曲面の分類とホモロジー

### 1 曲面のホモロジー

(1) 閉曲面  $S_1, S_2$  の連結和の Euler 数について

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

が成り立つことを示せ．

(2) 種数  $g$  の向き付け可能な閉曲面  $F_g$  から，互いに共通部分を持たない開円板  $D_1, \dots, D_n$  を除いて得られる曲面  $X = F_g \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k$  のホモロジー群を求めよ．

(3) 向き付け不可能な閉曲面  $N_g$  について， $\mathbb{Z}_2$  係数のホモロジー群  $H_*(N_g; \mathbb{Z}_2)$  を求めよ．

### 2 曲面の多角形表示

(1)  $2n$  角形の辺を

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}$$

に従って同一視して得られる曲面の標準形を求めよ．

(2) Euler 数が  $-2$  以上の閉曲面は，すべて 8 角形の辺を適当に 2 本ずつはり合わせることにによって得られることを示せ．

### 3 球面の分割

球面  $S^2$  を 2-cell がすべて 6 角形で，異なる 2-cell は高々 1 つの辺で隣接するような有限セル複体として表示することはできないことを証明せよ．