

幾何学 III 演習 3

1. 次のようにパラメータ表示される 3 次元ユークリッド空間内の曲面 T を考える。

$$p_1(\varphi, \theta) = (a + b \cos \varphi) \cos \theta,$$

$$p_2(\varphi, \theta) = (a + b \cos \varphi) \sin \theta,$$

$$p_3(\varphi, \theta) = b \sin \varphi$$

ただし, $0 < b < a, 0 \leq \theta, \varphi < 2\pi$ とする。

(1) \mathbf{R}^3 のユークリッド計量から導かれる, 曲面 T の Riemann 計量を φ, θ で表せ。

(2) (1) で求めた Riemann 計量についての, T の体積要素 ω を求めよ。

(3) 積分

$$\int_T \omega$$

を計算せよ。

2. S^n を \mathbf{R}^{n+1} の単位球面とする。 \mathbf{R}^{n+1} のユークリッド計量から導かれる S^n の Riemann 計量についての, S^n の体積要素 ω を求め S^n の体積

$$\int_{S^n} \omega$$

を計算せよ。

3. M を Riemann 多様体とする。 M 上の滑らかな関数 f に対して, ラプラシアン Δ を

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

を定める。 Δ を M の局所座標と Riemann 計量で表せ。

4. (自由課題) M をコンパクト Riemann 多様体, ω をその体積要素とする。 $f: M \rightarrow M$ を滑らかな写像とすると

$$\deg f = \frac{1}{\operatorname{Vol}(M)} \int_M f^* \omega$$

は整数であることを示せ。