幾何学 II　演習の解説（12/3）

1

(1) $q > 0$ ならば $\widetilde{H}_q(X) \cong H_q(X)$ ですから，X の可縮性より $\widetilde{H}_q(X) \cong 0$ を得ます．$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in S_0(X)$ を 0 次の被約鎖群のサイクルとします．つまり

$$\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i = 0$$

です．このとき x は境界になっていることが次のようにしてわかります：

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i + a_k x_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i - (a_1 + \cdots + a_{k-1}) x_k \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i (x_i - x_k) = \partial_1 \sum_{i=1}^{k-1} a_i [x_k x_i]. \end{aligned}$$

ここで $[ab]$ は 1 次の特異単体で，1 単体 $\Delta^1 = I$ の境界をそれぞれ a, b に写すようなものです．X は可縮なので特に連結であり，従ってこのような特異単体が存在します．以上により $\widetilde{H}_0(X) = 0$ がわかりました．

(2) これも 0 次のところだけ見れば十分です．次の図式を考えましょう：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_1(Y) & \longrightarrow & S_1(X) & \longrightarrow & S_1(X,Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_0(Y) & \longrightarrow & S_0(X) & \longrightarrow & S_0(X,Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{id} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

この図式は明らかに可換で，しかも横の列は全て完全です．従ってホモロジー群の完全列を誘導します．具体的に，境界作用素による $[z] \in H_1(X,Y)$ の像 $\partial_*[z] \in \widetilde{H}_0(Y)$ を書いてみましょう．

$[z] \in S_1(X,Y)$ の代表元 $z + i_* y \in S_1(X)$ を取ります．ただしこの z の取り方には，$y \in S_1(Y)$ だけの不定性がある訳です．$[z]$ が $H_1(X,Y)$ の元を表わしていましたが，これは $\partial z \in S_0(Y)$ と見なせることを意味します．従っ

て $\partial(z+i_*y) \in S_0(X)$ はそのまま $S_0(Y)$ の元 $\partial z + \partial y$ と見なせます．∂y はホモロジーの元としては自明ですから，∂z が $\partial_*[z] \in \widetilde{H}_0(Y)$ を表わします．これは必ずしも 0 ではないことに注意しましょう．例えば Y が連結でなければ，∂z は（X では 0 ホモローグですが）Y では 0 ホモローグでないことが起こり得ます．

結果を見ると，$\partial_*[z]$ は y の選び方にはよらずに決まっていることがわかります．また $\partial_*[z]$ は確かに $\widetilde{H}_0(Y)$ の元です．実際，任意の特異 1 単体 x に対して，定義から $\epsilon(\partial x) = 0$ です．

2

(1) $\mathbb{R}^n$ の場合だけ示します．D^n の場合も全く同様です．

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0\}, \quad f(x) = 0,$$
$$g : \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(0) = 0$$

とおきます．$f \circ g = id_{\{0\}}$ は明らかです．$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と $id_{\mathbb{R}^n}$ の間のホモトピーは以下のように構成されます：

$$h : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad h(x,t) = tx.$$

h の連続性と $h(x,0) = g \circ x$, $h(x,1) = id_{\mathbb{R}^n}$ であることは明らかでしょう．h により，$\mathbb{R}^n$ が一点 $\{0\}$ に「潰されて」いるわけです．以上により，ホモトピー同値 $\mathbb{R}^n \sim \{0\}$ がわかります．

(2) 錘の頂点にあたる点を $p = [x,1]$ と書きます．CX を一点 p に「潰す」ことを考えます．

$$f : CX \longrightarrow \{p\}, \quad f([x,s]) = p,$$
$$g : \{p\} \longrightarrow CX, \quad g(p) = p$$

とおきます．明らかに $f \circ g = id_{\{p\}}$ です．$g \circ f : CX \to CX$ と id_{CX} の間のホモトピーは，(1) と同様に次のようにすればよいことがわかります：

$$h : CX \times [0,1] \longrightarrow CX, \quad h([x,s],t) = [x,(1-t)s+t].$$

問題になるのは h の連続性でしょう．これは次の図式を見ればわかります：

$$\begin{array}{ccc}
(X \times I) \times [0,1] & \xrightarrow{\tilde{h}} & X \times I \\
{\scriptstyle \pi \times id_{[0,1]}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \pi} \\
CX \times [0,1] & \xrightarrow{h} & CX
\end{array}$$

$\pi : X \times I \to CX$ は商写像です．また

$$\tilde{h}((x,s),t) = (x,(1-t)s+t)$$

です．この図式が可換であることはすぐにわかります．また，$\tilde{h}$ は定義から連続で，商写像 π も連続です（商位相とは π が連続になるような位相です）．従って $\pi \times id_{[0,1]}$ も連続になります．

h の連続性を示すには，CX の任意の開集合 U に対して，$h^{-1}(U) \subset CX \times I$ が開集合であることを示せばよいわけです．まず $V = (\pi \circ \tilde{h})^{-1}(U) \subset (X \times I) \times [0,1]$ を考えます（上の図式で,「上回り」で U を戻したわけです）．$\pi \circ \tilde{h}$ の連続性から V は開集合です．

図式の可換性から，U を「下回り」で戻した $(h \circ (\pi \times id_{[0,1]}))^{-1}(U) = V$ で，これは開集合でした．知りたいのは $W = h^{-1}(U)$ ですが，明らかに $(\pi \times id_{[0,1]})^{-1}(W) = V$ です．一方，商位相及び積空間の位相の定義から

$$W \text{ が開集合} \Longleftrightarrow (\pi \times id_{[0,1]})^{-1}(W) \text{ が開集合}$$

がすぐにわかります．これらと V が開集合であることから $W = h^{-1}(U)$ が開集合であることが従い，h の連続性がわかります．

(3) K の頂点を任意に一つ選び，これを u と書くことにします．$|K|$ の各点と u を繋ぐような「ただ一つの」道があり，これに沿って $|K|$ を「縮めて」いけば，$|K|$ は一点に潰れる，というのが大筋です．

まず，一つの 1 単体で u と繋がっているような頂点 $v_1, \ldots, v_k$ を考えます．これらと u を繋ぐ 1 単体 $e_1, \ldots, e_k$ に，u に向かうような向きを与えましょう．

$$v_j \xrightarrow{\quad e_j \quad} u$$

次に，一つの 1 単体で v_1 と繋がっているような頂点 $w_{11}, \ldots, w_{1,n_1}$ に対し，これらと v_1 を繋ぐ 1 単体 $e_{11}, \ldots, e_{1,n_1}$ に，同じように v_1 に向かう向きをつけます．$v_2, \ldots, v_k$ についても同じことを考えます．

以下同様にして，全ての 1 単体に向きをつけていきます．K が tree であることから，各 1 単体の向きは一意に定まります．つまり，u から他の頂点に向かう道は本質的に一通りしかないので，頂点 $v_1, \ldots, v_k, w_{11}, \ldots, w_{1,n_1}, w_{21}, \ldots$ の中に同じものは決して現れず，従って一つの 1 単体に二つの向きがつくことはないのです．

この向きを使うと，$|K|$ の各点 x に対し，u へ向かう「最短経路」γ_x が定まり，しかもそれは x に対し連続に依存します．そこで

$$\begin{aligned}
f &: |K| \longrightarrow \{u\}, \quad f(x) = u, \\
g &: \{u\} \longrightarrow |K|, \quad g(u) = u, \\
h &: |K| \times [0,1] \longrightarrow |K|, \quad h(x,t) = \gamma_x(t)
\end{aligned}$$

とおけば，$f \circ g = id_{\{u\}}$, またホモトピー h により $g \circ f \sim id_{|K|}$ となります．

別解として，辺の数に関する帰納法を用いることもできます．第 3 回の解説にもあるとおり，tree$K$ は必ず「端」を持ちます．端とは頂点 v であって，

v を端点に持つような辺がただ一つであるようなものです．この辺を e とします．e の端点は v ともう一つあり，これを w とします．辺 e を一点 w に縮めると新たな tree K' ができますが，これは明らかに K とホモトピー同値です．しかも K' は K より辺が一本少なくなっていますから，帰納法の仮定が使えて $K \sim K' \sim *$ となります．詳しくは各自で検証して下さい．