幾何学 I 演習　1. 多様体の定義と例

1. 次の式で定義される図形が，可微分多様体の構造をもつことをそれぞれ示せ.

(1) 曲線　$x^2 + xy + y^2 = 1, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$

(2) 曲面　$a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + b)^2,$
$(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $a^2 - 4b > 0, b > 0$

(3) $\mathbf{R}^{n+1}$ の超曲面　$\sum_{1 \leq i,j \leq n+1} a_{ij} x_i x_j = 1$
ただし，$a_{ij} \in \mathbf{R}, a_{ij} = a_{ji}$ で行列 $A = (a_{ij})$ は正則とする.

2. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

について，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分集合としての相対位相を入れる. $p^{\pm} = (0, \cdots, 0, \pm 1)$, $S^n - \{p^-\} = U^+$, $S^n - \{p^+\} = U^-$ とおいて，写像 $\varphi^{\pm} : U^{\pm} \to \mathbf{R}^n$ を第 j 成分が

$$\varphi_j^{\pm} = \frac{x_j}{1 \pm x_{n+1}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

で表される写像とする.

(1) φ^+, φ^- はともに同相写像 (homeomorphism) であることを示せ.

(2) φ^+ の $U^+ \cap U^-$ への制限 $\varphi^+|_{U^+ \cap U^-}$ は $U^+ \cap U^-$ と $\mathbf{R}^n - \{0\}$ の同相を与えることを示せ.

(3) 写像の合成 $\varphi^-|_{U^+ \cap U^-} \circ (\varphi^+|_{U^+ \cap U^-})^{-1}$ は，微分同相 (diffeomorphism) であることを示せ.