8. 特異ホモロジー論 (I)

1　位相空間の特異ホモロジー群の定義

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の原点 P_0 と単位ベクトル $P_1, \cdots, P_n$ を頂点とする n 次元単体を Δ^n で表す．X を位相空間とする．連続写像 $\sigma : \Delta_n \to X$ を X の特異 n 単体とよぶ．また，X の特異 n 単体全体で生成される自由アーベル群を $S_n(X)$ で表す．$S_n(X)$ の要素は特異 n 単体の有限個の整数係数の線形結合で書ける．$i = 0, 1, \cdots, n$ に対して $\varepsilon_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ を

$$\varepsilon_i(P_j) = P_j, \quad j < i, \quad \varepsilon_i(P_j) = P_{j+1}, \quad j \geq i$$

で定まる線形写像とする．特異 n 単体 $\sigma : \Delta_n \to X$ に対して，$d_i(\sigma) = \sigma \circ \varepsilon_i : \Delta^{n-1} \to X$ を σ の i 番目の面 (face) という．境界作用素 $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ を

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i(\sigma)$$

で定めると $\partial \circ \partial = 0$ が成立する．$S(X) = \oplus S_n(X)$ は ∂ を境界作用素とするチェイン複体となる．$S(X)$ を X の**特異チェイン複体** (singular chain complex) とよぶ．特異チェイン複体 $S(X)$ のホモロジー群 $H_*(X)$ を位相空間 X の**特異ホモロジー群** (singular homology group) という．上の自由アーベル群は整数環 $\mathbf{Z}$ 上の自由加群であるが，一般の可換環 A 上の自由加群として，A 上の特異チェイン複体 $S(X; A)$ が定義される．そのホモロジー群を $H_*(X; A)$ で表し，A 係数の特異ホモロジー群とよぶ．また，$H_*(X)$ について，係数をはっきりさせる必要があるときは，$H_*(X; \mathbf{Z})$ で表し，整係数の特異ホモロジー群とよぶ．

位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ に対して，σ に $f \circ \sigma$ を対応させることにより，チェイン写像 $S(f) : S(X) \to S(Y)$ が定まる．さらに，$S(f)$ は特異ホモロジー群の間の準同型写像 $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ を導く．

2　特異ホモロジー群のいくつかの性質

0 次の特異ホモロジー群は次のような意味をもつ.

補題 1. 位相空間 X に対して，特異ホモロジー群 $H_0(X)$ は X の弧状連結成分と一対一に対応する基底をもつ自由加群である.

特異ホモロジー群は以下の意味でホモトピー不変である.

定理 1. X. Y を位相空間とし，$f, g : X \to Y$ をホモトピー同値な連続写像とする．このとき，チェイン写像 $S(f), S(g) : S(X) \to S(Y)$ はチェインホモトピー同値で,

$$f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$$

となる.

位相空間 X, Y がホモトピー同型ならば $H_*(X) \cong H_*(Y)$ である．特に, X と Y が同相ならば $H_*(X) \cong H_*(Y)$ となる.