幾何学 I 演習　5　群作用と商多様体（続き）

1. 整数全体のなす群 $\mathbf{Z}$ が，平行移動によって実数全体 $\mathbf{R}$ に作用しているとき，商空間 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ は，S^1 と可微分同相であることを示せ.

2. $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とみなし，無理数 α に対して $f_\alpha : \mathbf{R} \to S^1 \times S^1$ を

$$f_\alpha(t) = (2\pi t, 2\pi\alpha t)$$

で定める．f_α の像に相対位相を入れるとき，$f_\alpha : \mathbf{R} \to f_\alpha(\mathbf{R})$ は同相写像ではないことを示せ.

3. 有限群 G が可微分多様体 M に，微分同相として自由に作用しているとき，商空間 M/G は可微分多様体の構造をもつことを示せ.

4. p, q を互いに素な自然数とし，$\xi = e^{2\pi i/p}$ とおく．3 次元球面 S^3 を

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

で与え，S^3 への p 次の巡回群 $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ への作用を $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の生成元に対して

$$(z_1, z_2) \mapsto (\xi z_1, \xi^q z_2)$$

を対応させることにより定める．問 3 を用いて，商空間 S^3/G はコンパクト 3 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ．また，$p = 2, q = 1$ のとき，得られた多様体は $\mathbf{R}P^3$ と可微分同相であることを示せ.