

幾何学II演習

5. ホモロジー群の計算例

1 鎖複体のホモロジー群の計算例

(1) 自由加群 M_1, M_2 は $M_1 \cong M_2 \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ を満たすとする．準同型

$$h : M_1 \rightarrow M_2$$

を次のように定める．

$$h(e_1) = f_1 + f_2, \quad h(e_2) = 2f_1 + 6f_2$$

ここで, $(e_1, e_2), (f_1, f_2)$ は, それぞれ M_1, M_2 の基底を表す．このとき, $M_2/\text{Im}h$ を求めよ．また,

$$h'(e_1) = f_1 + f_2, \quad h'(e_2) = f_1 + f_2$$

のとき $\text{Ker}h', M_2/\text{Im}h'$ を求めよ．

(2) 次の鎖複体のホモロジー群を計算せよ．

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

ただし, $C_2 = C_1 = C_0 = \mathbf{Z}$, $\partial_2(x) = 2x, \partial_1(y) = 0$ とする．

2 Mayer-Vietoris 完全列の応用例

(1) 二つの n 次元単体 $\sigma = [a_0 a_1 \cdots a_n]$ と $\tau = [b_0 b_1 \cdots b_n]$ の $(n-1)$ -skeleton について, 頂点 a_0 と b_0 を同一視して得られる多面体のホモロジー群を求めよ．

(2) Klein bottle の単体分割を与え, ホモロジー群を求めよ．