

## 幾何学II 演習の解説 (12/17)

### 1

(1)  $\mathbb{R}P^n$  は, 各次元にひとつずつのセルを持つようなセル複体の構造  $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$  を持ち, 境界作用素  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$  は

$$\partial_k e^k = \begin{cases} 0 & k : \text{奇数}, \\ 2e^{k-1} & k : \text{偶数} \end{cases}$$

でした. 特に  $\mathbb{Z}_2$  係数では全て 0 になります. よって全ての次数において  $\ker \partial_k = C_k = \mathbb{Z}_2$ ,  $\operatorname{im} \partial_k = 0$  ですから

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad 0 \leq k \leq n.$$

一般の可換環  $A$  の場合もほぼ同様です. 境界作用素は

$$\partial_k e^k = \begin{cases} 0 & k : \text{奇数}, \\ e^{k-1} + e^{k-1} & k : \text{偶数} \end{cases}$$

ですから,  $A$  のイデアル  $I = \langle a + a; a \in A \rangle$ ,  $J = \langle a \in A; a + a = 0 \rangle$  とすると

$$H_k(\mathbb{R}P^n; A) = \begin{cases} A & k = 0, \text{または } k = n \text{ が奇数}, \\ A/I & 1 \leq k \leq n-1 : \text{奇数}, \\ J & 2 \leq k \leq n : \text{偶数}. \end{cases}$$

特に  $A = \mathbb{Z}_2$  のときは  $I = \{0\}$ ,  $J = A$  となって上の結果と一致します.

(2) 連続写像  $g : S^n \rightarrow S^n$  を

$$g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{|f(x) + f(-x)|}$$

とおきます. このとき, 仮定から任意の  $x \in S^n$  において  $f(x) \neq -f(-x)$  でしたから  $g$  は well-defined です. また,  $g$  の定義から  $g$  は連続写像で  $g(x) = g(-x)$  を満たすことが簡単にわかります.

$f$  と  $g$  を結ぶホモトピー  $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  は

$$F(x, t) = \frac{f(x) + tf(-x)}{|f(x) + tf(-x)|}$$

によって構成されることを証明します. 明らかに

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

ですから, あとはこの写像が well-defined であることを証明すれば充分です.

仮に well-defined ではないとすると  $|f(x) + tf(-x)| = 0$  となります. よって

$$f(x) + tf(-x) = 0 \Rightarrow |f(x)| = t|f(-x)|$$

が得られます.  $|f(x)| = |f(-x)| = 1$  ですから  $t = 1$  となります. しかし仮定から  $f(x) \neq -f(-x)$  でしたからこれは矛盾します. よって  $f$  と  $g$  はホモトピー同値であることが示されました.

次に  $f$  と  $g$  の写像度がともに偶数であることを証明します. ホモトピー同値な写像の写像度は等しかったので,  $g$  の写像度が偶数であることを示せば十分であることがわかります.

ここで前回の演習の 1-(4) の結果から対蹠点写像

$$r : S^n \rightarrow S^n \quad x \mapsto -x$$

の写像度は  $\deg r = (-1)^{n+1}$  でした.

一方  $g(x) = g(-x) = g \circ r(x)$  ですから

$$\deg g = \deg(g \circ r) = (-1)^{n+1} \deg g$$

を得ます. よってこのような写像が存在するのは  $g$  が可縮 ( $\deg g = 0$ ) の場合か  $n$  が奇数の場合かのどちらかです.  $g$  が可縮な場合は明らかに  $\deg g$  は偶数ですから, 以下  $n$  が奇数であると仮定しましょう.

$g$  は  $g(x) = g(-x)$  を満たしますから  $\mathbb{R}P^n$  から  $S^n$  への写像  $\tilde{g} : \mathbb{R}P^n \rightarrow S^n$  を誘導します. このとき下の図のような可換図式が得られます.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & S^n \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ \mathbb{R}P^n & & \end{array}$$

このとき, 自然な射影  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  について,  $\pi$  から誘導されるホモロジー写像

$$\pi_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n)$$

について調べてみましょう. そのために  $S^n$  の胞体分割を次のようにとります. まず  $i$  次元胞体  $e_{\pm}^i$  を

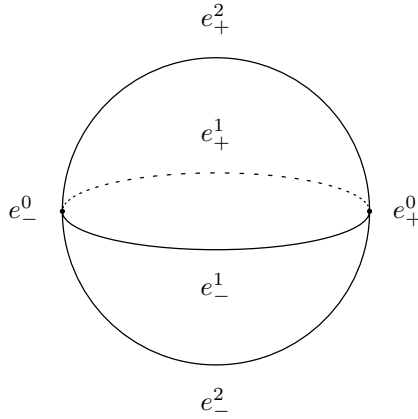
$$e_+^i := \{(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, 0, \dots, 0) \in S^n \mid x_{i+1} > 0\}$$

$$e_-^i := \{(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, 0, \dots, 0) \in S^n \mid x_{i+1} < 0\}$$

とおきます. これらが  $i$  次元の胞体になることは明らかだと思います. そして  $i$  次元胞体  $e_{\pm}^i$  に対してその  $S^n$  への胞体写像  $\varphi_{\pm}^i$  を

$$\varphi_{\pm}^i : D^i \rightarrow S^n \quad x = (x_1, \dots, x_i) \mapsto (x_1, \dots, x_i, \pm \sqrt{1 - \sum_{j=1}^i x_j^2}, 0, \dots, 0).$$

ととります. このようにして得られた  $\{(e_{\pm}^i, \varphi_{\pm}^i)\}$  は  $S^n$  の胞体分割を定めることは定義から明らかだと思います.



### $S^2$ の CW 分割

このとき  $-e_+^i = e_-^i$  になりますから

$$e^i := \pi(e_{\pm}^i), \quad \varphi^i := \pi \circ \varphi_{\pm}^i$$

は  $\mathbb{R}P^n$  の胞体分割を定めます. (ここで得られた胞体分割は問題 1 の  $\mathbb{R}P^n$  の胞体分割と一致します) このとき  $H_n(S^n)$  の生成元  $\iota$  は

$$\iota = e_+^n + e_-^n$$

で与えられます. よって

$$\pi_*(\iota) = 2e^n$$

となります. 一方  $n$  が奇数であることから,  $H_n(\mathbb{R}P^n)$  の生成元は  $e^n$  で与えられますから

$$g_*(\iota) = \tilde{g}_* \circ \pi_*(\iota) = 2\tilde{g}_*(e^n)$$

が得られます. よって  $g$  の写像度は偶数であることが示されました.

## 2

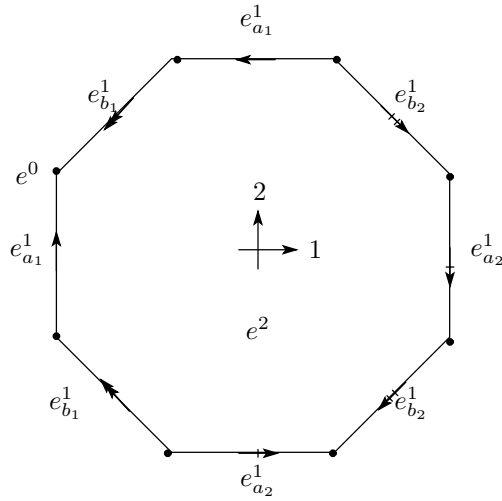
(1) 向き付け可能な閉曲面  $F_g$  は正  $4g$  角形の各辺を  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots$  と同一視することにより得られました. すると  $F_g$  を次のようにして胞体分割することが出来ます.

$$\begin{aligned} e^2 &:= \{4g \text{ 角形の内部} \} \\ e_{a_i}^1 &:= \{a_i \text{ のラベルのついている辺} \} \\ e_{b_i}^1 &:= \{b_i \text{ のラベルのついている辺} \} \\ e^0 &:= \{4g \text{ 角形の頂点} \} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} C_2(F_g) &= \mathbb{Z}e^2 \\ C_1(F_g) &= \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}e_{a_i}^1 \oplus \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}e_{b_i}^1 \\ C_0 &= \mathbb{Z}e^0 \end{aligned}$$

となります.



$F_2$  の胞体分割

つぎに境界作用素について考えてみましょう. まず  $e^2$  に関する胞体写像  $\varphi^2 : e^2 \rightarrow F_g$  を考えると  $\varphi_2^{-1}(\varphi_2(e^2))$  はちょうど上の図のようになります. このとき  $e^2$  に上のように向きを入れるとき, 向きの入れ方から

$$\partial_2 e^2 = \sum_{i=1}^g (a_i + b_i - a_i - b_i) = 0$$

となります. よって  $\ker \partial_2 = \mathbb{Z}$  です. 一方  $C_3(F_g) = 0$  より  $\text{im} \partial_3 = 0$  ですから

$$H_2(F_g) = \mathbb{Z}$$

が得られます. また  $\text{im } \partial_2 = 0$  になります.

次に  $e_{a_i}^1$  に関する胞体写像  $\varphi_{a_i}^1 : e_{a_i}^1 \rightarrow F_g$  を考えると  $(\varphi_{a_i}^1)^{-1}(\varphi_{a_i}^1(e_{a_i}^1))$  はちょうどしたの図のようになります. このとき  $\partial_1(e_{a_i}^1) = 0$  になります. 同様にして  $\partial_1(e_{b_i}^1) = 0$  ですから  $\ker \partial_1 = \mathbb{Z}^{2g}$  が得られます. よって  $H_1(F_g) = \mathbb{Z}^{2g}$  が得られます. ここでも  $\text{im } \partial_1 = 0$  です.

同様にして  $H_0(F_g) = \mathbb{Z}$  が得られ, 結果として次が得られます.

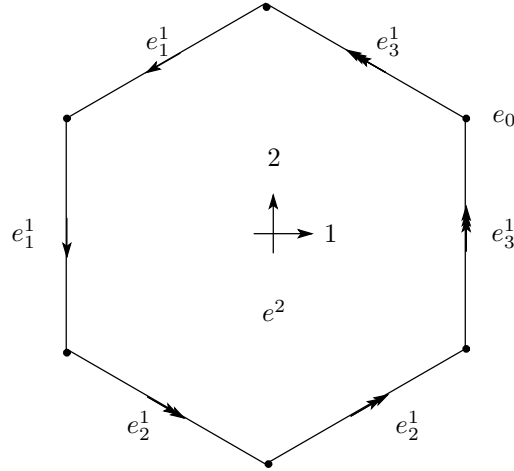
$$H_i(F_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}^{2g} & i = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

次に  $N_g$  についてですが,  $F_g$  の場合と同様に胞体分割を次のように入れます.

$$e^2 := \{2g \text{ 角形の内部} \}$$

$$e_{a_i}^1 := \{a_i \text{ のラベルのついている辺} \}$$

$$e^0 := \{2g \text{ 角形の頂点} \}$$



$N_3$  の胞体分割

このとき上と同様にして境界作用素を計算すると次のようになります.

$$\partial_2 e^2 = 2 \sum_{i=1}^g e_{a_i}^1$$

$$\partial_1 e_{a_i}^1 = 0$$

$$\partial_0 e^0 = 0$$

よって  $N_g$  のホモロジー群は以下ようになります.

$$H_i(N_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{g-1} & i = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) 単体分割の場合と違い, 胞体の積空間はまた胞体になります. ですから  $S^1$  の胞体分割を用いることによって  $T^n$  の胞体分割を得ることができます.  $S^1$  の胞体分割および胞体写像は次のようにして得られました.

$$\begin{aligned} e^1 &= S^1 \setminus \{(1, 0)\} \\ e^0 &= \{(1, 0)\} \\ \varphi_1 : [0, 1] &\rightarrow S^1 \quad t \mapsto e^{2i\pi t} \\ \varphi_0 : 0 &\rightarrow S^1 \quad 0 \mapsto (1, 0) \end{aligned}$$

これを用いて  $T^n$  の胞体分割を次のようにして得ることができます. まず, 各  $S^1$  にラベルをつけ

$$T^n = S_1^1 \times S_2^1 \times \cdots \times S_n^1$$

と書きましょう. そして各  $S_i^1$  に属する 0 次元の胞体を  $e_i^0$ , 1 次元の胞体を  $e_i^1$ , 各胞体の胞体写像を  $\varphi_i^0, \varphi_i^1$  と書くことにしましょう.

つぎに  $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  ( $i_1 < \dots < i_l$ ) に対して,  $l$  次元胞体  $e_I^l$  を

$$e_I^l := \prod_{j \notin I} e_j^0 \times \prod_{i \in I} e_i^1$$

とおきます. そして  $[0, 1]^l$  から  $e_I^l$  への胞体写像  $\varphi_I^l$  を

$$\varphi_I^l = \prod_{j \notin I} \varphi_j(0) \times \prod_{j \in I} \varphi_j[0, 1]$$

とおきましょう. 明らかに

$$T^n = \bigcup_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}} e_I^{\#I}$$

は  $T^n$  の胞体分割を定めます. 上の結果から

$$C_i(T^n) = \mathbb{Z} \binom{n}{i}$$

を得られます.

次に境界作用素を計算します. 各胞体の向きを次のように入れます. まず区間  $[0, 1]$  に関しては増加する方向を正の向きとし, 胞体  $e_I^l$  については  $i_1, i_2, \dots, i_l$  の順番と適合する順列を正の向きと定めます. このとき  $[0, 1]^l$  の  $i_p$  番目の座標の正の向きを  $v_p$  と書くことにし,  $e_I^l$  の標準的な向きを  $\langle v_1 v_2 \cdots v_l \rangle$  で表わすことにします. このとき  $l-1$  次元胞体  $e_J^{l-1}$  が  $e_I^l$  に含まれる為の条件は, 仮定から

$$J \subset I \quad \#J = l-1$$

であることがわかります。いま

$$J = I \setminus \{i_p\}$$

としましょう。このとき胞体写像の逆像を計算すると

$$(\varphi_I^l)^{-1}(e_J^{l-1}) = (0, 1)^{p-1} \times \{1\} \times (0, 1)^{l-p} \cup (0, 1)^{p-1} \times \{0\} \times (0, 1)^{l-p}$$

を得ます。このとき  $(0, 1)^{p-1} \times \{1\} \times (0, 1)^{l-p}$  の法線の向きは  $v_p$  で、 $(0, 1)^{p-1} \times \{0\} \times (0, 1)^{l-p}$  の法線の向きは  $-v_p$  で与えられます。よって各々の面は互いに逆の向きになっています。故に結合定数  $\varepsilon(e_I^l, e_J^{l-1})$  は

$$\varepsilon(e_I^l, e_J^{l-1}) = \langle v_p v_1 \cdots \check{v}_p \cdots v_l \rangle + \langle (-v_p) v_1 \cdots \check{v}_p \cdots v_l \rangle = 0$$

になりますから

$$\partial e_I^l = 0$$

が得られます。これにより  $T^n$  の任意の胞体の境界作用素は 0 になりますから

$$H_i(T^n) = \mathbb{Z} \binom{n}{i}$$

が得られます。

(3) 3次元球体  $D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  において、境界に現れる  $S^2$  上に  $p \sim -p$  という同値関係を入れ、この同値関係による商空間を考えると  $\mathbb{R}P^3$  が得られました。3次元球体と正8面体は同相ですから、問題にあるような商空間もやはり  $\mathbb{R}P^3$  になります。この分割がセル分割を与えていることは明らかでしょう。もちろん、より「簡単な」セル分割があることは問題1で述べたとおりです。

以下、これらのセルに名前を付けていきます。まず、正8面体の頂点6つを

$$A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, -1, 0), D(-1, 0, 0), E(0, 1, 0), F(0, 0, -1)$$

とします。また原点を  $O(0, 0, 0)$  とします。

(i) 0セル： $a_1 = A, a_2 = B, a_3 = C, a_4 = O$ 。

対蹠点の同一視により、 $D = a_2, E = a_3, F = a_1$  です。

(ii) 1セル：向きも込めて

$$\begin{aligned} b_1 &= \overrightarrow{BA}, b_2 = \overrightarrow{CA}, b_3 = \overrightarrow{DA}, b_4 = \overrightarrow{EA}, \\ b_5 &= \overrightarrow{EB}, b_6 = \overrightarrow{CB}, \\ b_7 &= \overrightarrow{OB}, b_8 = \overrightarrow{OC}, b_9 = \overrightarrow{OD}, b_{10} = \overrightarrow{OE}, \\ b_{11} &= \overrightarrow{OA}, b_{12} = \overrightarrow{OF}. \end{aligned}$$

対蹠点の同一視により、例えば  $\overrightarrow{DF} = b_1$  です。

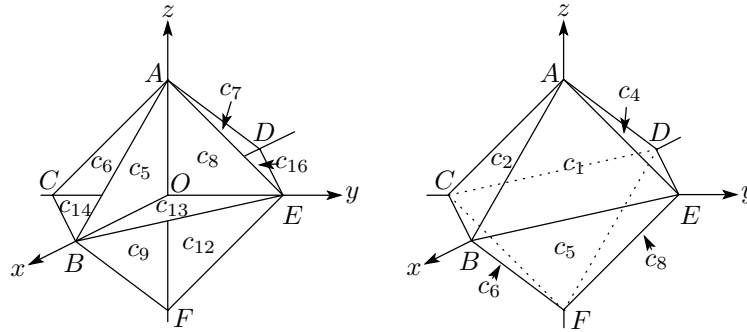
(iii) 2 セル：2 セルは3 角形になっているので，その向きは頂点の順番で表わすことができます（下図参照）．この意味での向きを込めて

$$\begin{aligned} c_1 &= ABE, c_2 = ACB, c_3 = ADC, c_4 = AED, \\ c_5 &= OAB, c_6 = OAC, c_7 = OAD, c_8 = OAE, \\ c_9 &= OFB, c_{10} = OFC, c_{11} = OFD, c_{12} = OFE, \\ c_{13} &= OBE, c_{14} = OCB, c_{15} = ODC, c_{16} = OED. \end{aligned}$$

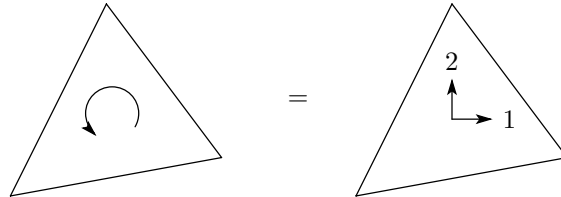
対蹠点の同一視により，例えば  $FDC = c_1$  です．

(iv) 3 セル：全て  $\mathbb{R}^3$  の向きから誘導される向きを入れておくものとします．  
3 セルは4 面体で表わされており

$$\begin{aligned} d_1 &= OABE, d_2 = OABC, d_3 = OACD, d_4 = OADE, \\ d_5 &= OFBE, d_6 = OFBC, d_7 = OFCD, d_8 = OFDE. \end{aligned}$$



2 セルの一部



2 セルの向き

このようにしておくと，結合係数は次のように求められます．例えば  $d_1$  の境界には  $c_1, c_5, c_8, c_{13}$  が係数  $\pm 1$  で現れますが，この符号は

( $d_1$ の外側に向かう法線ベクトル，各 2 セルの向き)  $= \mathbb{R}^3$ の向きなら  $+1$ ，  
そうでなければ  $-1$

と決めることができます．この規則で計算すると  $\partial d_1 = c_1 - c_5 + c_8 - c_{13}$  です．他のものについても計算すると， $\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$  は上記の基底について次



の行列で表現されます：

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & -1 & \\ & 1 & & & & & & -1 \\ & & 1 & & -1 & & & \\ & & & 1 & & -1 & & \\ \hline -1 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 1 & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & \\ 1 & & & & & -1 & & \\ \hline & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & & -1 & 1 \\ \hline -1 & & & & & & 1 & & & -1 \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & -1 & & & & & 1 & & \\ & & & -1 & & & & & 1 & \\ & & & & -1 & & & & & 1 \end{array} \right)$$

この結果から  $\partial_3 \left( \sum_{j=1}^8 d_j \right) = 0$  及び  $H_3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}$  という既知の結果を再確認できます．

次に  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$  を考えます．この結合係数も上の場合と同様に計算されます．具体的には

1 セルの向きが 2 セルの向き（即ち，頂点の順序）と適合していれば +1，  
逆向きなら -1

とすればよいことになります．例えば  $c_1$  の頂点の順序は  $ABE$  と決めましたが， $b_1 = \overrightarrow{BA}$  と  $b_5 = \overrightarrow{EB}$  は逆向きなので -1， $b_4 = \overrightarrow{EA}$  の向きは適合しているので +1 とします．よって  $\partial_2 c_1 = -b_1 - b_5 + b_4$ ．他も同じように計算すれば， $\partial_2$  は上記の基底に関して次の行列で表現されます：

$$\left( \begin{array}{cc|cc|cc} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ 1 & & & -1 & & \\ \hline -1 & & -1 & & & \\ & 1 & & 1 & & \\ \hline & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

最後に  $\partial_1: C_1 \rightarrow C_0$  を考えます．これは特異複体のときと同様で，例えば  $\partial_1 b_1 = a_1 - a_2$  のように計算されます．上記の基底に関し， $\partial_1$  は次の行列で表現されます：

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & \\ 1 & & -1 \\ 1 & -1 & \\ 1 & & -1 \\ \hline & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & 1 & -1 & \\ & 1 & & -1 \\ \hline 1 & & & -1 \\ 1 & & & -1 \end{array} \right)$$

例えば  $\partial_1(b_5 - b_6) = 0$  より  $b_5 - b_6$  が 1 次のホモロジー群の生成元で、一方  $\partial_2(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) = 2(b_6 - b_5)$  より、この元は位数 2 であることがわかります。