幾何学II　演習の解説（10/15）

1

(1). 一般の単体的複体について述べる前に l 単体 σ^l と m 単体 σ^m の積空間の単体分割について調べてみます. $\sigma^l = [v_0, \ldots, v_l]$, $\sigma^m = [w_0, \ldots, w_m]$ とし, 頂点の順序も上のように入っているとします. (σ^l, σ^m の頂点の順序を表す関係を $<$ で書くことにします.) このとき

$$V := \{(v_i, w_j) | v_i,\ w_j \text{ はそれぞれ } \sigma^l,\ \sigma^m \text{ の頂点}\}$$

と置きましょう. まず V に対して全順序 $<$ を定めます.

> **定義**: $(v_{i_1}, w_{i_1}), (v_{i_2}, w_{i_2}) \in V$ に対して
>
> $$(v_{i_1}, w_{j_1}) < (v_{i_2}, w_{j_2}) \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} v_{i_1} < v_{i_2} \text{ または} \\ v_{i_1} = v_{i_2} \text{ かつ } w_{j_1} < w_{j_2} \end{cases}$$

この順序が V の全順序を定めていることを確かめるのは皆さんにお任せします. (いわゆる辞書式順序と呼ばれるものです)

つぎに V の中で単体を張る頂点の集合を半順序 $\prec$ を用いて定義します.

> **定義**:$(v_{i_1}, w_{j_1}), (v_{i_2}, w_{j_2}) \in V$ に対して 2 頂点の関係 $\preceq$ を次で定めます.
>
> $$(v_{i_1}, w_{j_1}) \preceq (v_{i_2}, w_{j_2}) \overset{def}{\Leftrightarrow} v_{i_1} \leqslant v_{i_2} \text{ かつ } w_{j_1} \leqslant w_{j_2}$$
>
> また $(v_{i_1}, w_{j_1}) \prec (v_{i_2}, w_{j_2})$ を
>
> $$(v_{i_1}, w_{j_1}) \preceq (v_{i_2}, w_{j_2}) \text{ かつ } (v_{i_1}, w_{j_1}) \neq (v_{i_2}, w_{j_2})$$
>
> と定義します.

明らかに $(v_{i_1}, w_{j_1}) \prec (v_{i_2}, w_{j_2})$ ならば $(v_{i_1}, w_{j_1}) < (v_{i_2}, w_{j_2})$ になります.

集合 V の部分列 $\xi = \{(v_{i_r}, w_{j_r})\}$ で, 半順序 $\prec$ に関して totally ordered なもの, つまり $(v_{i_r}, w_{j_r}) \precneqq (v_{i_{r+1}}, w_{j_{r+1}})$ となるようなもの全体の集合を Ξ と置きます.

$$\Xi := \{\xi = \{(v_{i_r}, w_{j_r})\} \mid (v_{i_r}, w_{j_r}) \precneqq (v_{i_{r+1}}, w_{j_{r+1}})\}$$

定義から $\xi \in \Xi$ は有限列になることに注意してください．このとき次のようにして $|\sigma^l| \times |\sigma^m|$ の単体分割 $(\sigma^l \times \sigma^m)_\Xi$ を定義します．

> **定義**: 単体分割 $(\sigma^l \times \sigma^m)_\Xi$ およびその幾何的実現を次のように定義します．
>
> $$(\sigma^l \times \sigma^m)_\Xi := \{\sigma_\xi\}_{\xi \in \Xi}.$$
> $$|(\sigma^l \times \sigma^m)_\Xi| = \bigcup_{\xi \in \Xi} |\sigma_\xi|$$
>
> ここで単体 σ_ξ を
>
> $$\sigma_\xi := [(v_{i_1}, w_{j_1})(v_{i_2}, w_{j_2}) \cdots] \quad \xi = \{(v_{i_r}, w_{j_r})\} \in \Xi$$
>
> とし，その幾何的実現を
>
> $$|\sigma_\xi| := \{\sum_r t_r(v_{i_r}, w_{j_r}) \in |\sigma^l| \times |\sigma^m| \mid \sum_r t_r = 1, \forall t_r \geq 0\}$$
>
> とします．

まず始めに，$|\sigma_\xi|$ は well-defined であることを check します．これは

$$\sum_r t_r v_{i_r} \in |\sigma^l|, \quad \sum_r t_r w_{j_r} \in |\sigma^m|$$

から簡単にわかります．

つぎに $(\sigma^l \times \sigma^m)_\Xi$ が $|\sigma^l| \times |\sigma^m|$ の単体分割であることを示します．各 $|\sigma_\xi|$ は $|\sigma^l| \times |\sigma^m|$ の部分集合ですから，”$\supset$” は明らかです．なので”$\subset$” を示しましょう．

$|\sigma^l| \times |\sigma^m|$ の元は

$$x = (\sum_{i=0}^{l} p_i v_i, \sum_{j=0}^{m} q_j w_j) \text{ such that } \sum_{i=0}^{l} p_i = \sum_{j=0}^{m} q_j = 1,\ p_i, q_j \geq 0$$

とあらわすことができます．いま

$$v_0 \prec \cdots \prec v_l, \quad w_0 \prec \cdots \prec w_m$$

を仮定していることに注意しましょう．

証明の前に記号の準備をします．

$$\rho_{\sigma^l} : \sigma^l \times \sigma^m \to \{v_i\}_{i=0}^{l}$$
$$\rho_{\sigma^m} : \sigma^l \times \sigma^m \to \{w_j\}_{j=0}^{m}$$
$$\mu_{\sigma^l} : \sigma^l \times \sigma^m \to \mathbb{R}$$
$$\mu_{\sigma^m} : \sigma^l \times \sigma^m \to \mathbb{R}$$

をそれぞれ以下のように定義します.

$$\rho_{\sigma^l}(x) := v_{i_0} \text{ ただし } i_0 = \min\{i | p_i \neq 0\}$$
$$\rho_{\sigma^m}(x) := w_{j_0} \text{ ただし } j_0 = \min\{j | q_i \neq 0\}$$
$$\mu_{\sigma^l}(x) := p_{i_0} \quad \mu_{\sigma^m}(x) := q_{j_0}$$

そして

$$a(x) := \#\{v_i | p_i \neq 0\} + \#\{w_j | q_j \neq 0\}$$

とおきましょう. 定義から $a(x) \leq l + m$ がわかります.

まず,

$$x_0 := (\rho_{\sigma^l}(x), \rho_{\sigma^m}(x))$$
$$t_0 := \min\{\mu_{\sigma^l}(x), \mu_{\sigma^m}(x)\}$$
$$x'_0 := x - t_0 x_0$$

とおきます. このとき, x'_0 では $\rho_{\sigma^l}(x)$ か $\rho_{\sigma^m}(x)$ の係数が 0 になりますから $a(x'_0) = a(x) - 1$ となります. 以下帰納的に x_k, t_k, x'_k を

$$x_k := (\rho_{\sigma^l}(x'_{k-1}), \rho_{\sigma^m}(x'_{k-1}))$$
$$t_k := \min\{\mu_{\sigma^l}(x'_{k-1}), \mu_{\sigma^m}(x'_{k-1})\}$$
$$x'_k := x'_{k-1} - t_k x_k$$

と置きます. このとき定義から次のことがわかります.

$$x_{k-1} \prec x_k \text{ in } V$$
$$a(x_k) = a(x_{k-1}) - 1$$

$a(x)$ は高々$l + m$ ですから, この操作は有限回で終わります. ですから x は

$$x = \sum_{k=0}^{a(x)} t_k x_k$$

とあらわすことができます. このとき定義から $t_k \geq 0$ で, かつ x の σ^l 成分について注目することによって

$$\sum_{k=0}^{a(x)} t_k = 1$$

がわかります. ですから $\sigma_\xi = [x_0, \ldots, x_{a(x)}]$ とおくと $x \in |\sigma_\xi|$ となることがわかりました. これにより"$\subset$"を示すことができました.

この単体分割が問題の条件 1. 2. を満たすことは明らかです. (ただしここでは $K = \sigma^l$, $L = \sigma^m$ です)

最後に単体分割の一意性を示します．$|\sigma^l| \times |\sigma^m|$ の単体分割でその任意の単体 $[(v_{i_1}, w_{j_1}), \dots, (v_{i_n}, w_{j_n})]$ が条件 2．を満たすとします．すると条件 2．により

$$v_{i_1} \leqslant v_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant v_{i_n}$$
$$w_{j_1} \leqslant w_{j_2} \leqslant \cdots \leqslant w_{j_n}$$

ですから，

$$\{(v_{i_1}, w_{j_1}), (v_{i_2}, w_{j_2}), \dots (v_{i_n}, w_{j_n})\} \in \Xi$$

です．よってこの単体分割における全ての単体が Ξ に属する単体になりますから一意性が示されました．

一般の単体的複体 K, L については，上の場合をすべての K, L の単体の積空間に拡張すれば単体分割を定義することができます．

繰り返しになりますが，今の構成を $l = m = 2$ の場合 (2 つの 2 単体の積空間) に具体的に行ってみましょう．$|\sigma^2| \times |\sigma^2|$ の中の点は

$$x = (\sum_{i=0}^{2} p_i v_i, \sum_{j=0}^{2} q_i w_i) \in \sigma^2 \times \sigma^2$$

と表すことができます．あまり本質的ではありませんが簡単のため $p_i, q_j \neq 0$ を仮定しておきましょう．ここでまず p_0 と q_0 の大きさを比べ，いま $p_0 > q_0$ だと仮定します．このとき

$$x = q_0(v_0, w_0) + ((p_0 - q_0)v_0 + p_1 v_1 + p_2 v_2, q_1 w_1 + q_2 w_2)$$

と分解することができます．このとき

$$x'_0 = ((p_0 - q_0)v_0 + p_1 v_1 + p_2 v_2, q_1 w_1 + q_2 w_2)$$

ですから，$a(x) = a(x'_0) + 1$ になっています．

次に $p_0 - q_0$ と q_1 の大きさを比べ，$p_0 - q_0 < q_1$ となっていると仮定しましょう．すると

$$x'_0 = (p_0 - q_0)(v_0, w_1) + (p_1 v_1 + p_2 v_2, (q_0 + q_1 - p_0)w_1 + q_2 w_2)$$

と分解することができます．さらに

$$x'_1 = (p_1 v_1 + p_2 v_2, (q_0 + q_1 - p_0)w_1 + q_2 w_2)$$

において $p_1 < q_0 + q_1 - p_0$ であったとすると

$$x'_1 = p_1(v_1, w_1) + (p_2 v_2, (q_0 + q_1 - p_0 - p_1)w_1 + q_2 w_2)$$

となります. $p_0+p_1+p_2=q_0+q_1+q_2=1$ に注意すると

$$q_0+q_1-p_0-p_1=1-q_2-1+p_2=p_2-q_2$$

ですから, 結局

$$x_1'=p_1(v_1,w_1)+(p_2-q_2)(v_2,w_1)+q_2(v_2,w_2)$$

と変形ができ, 今の場合は $x\in|\sigma_\xi|$, ただし

$$\sigma_\xi=[(v_0,w_0),(v_0,w_1),(v_1,w_1),(v_2,w_1),(v_2,w_2)]$$

となることが示されました. ほかの色々な場合についても自分でチェックしてみてください.

(2)S^2 の単体分割として (もちろんほかにもいろいろありますが)3 単体の 2-skelton をとってきて, (1) の構成を真似すればできます. とはいえ (1) の構成が抽象的だったので, ここで実際に $S^2\times S^2$ の単体分割を構成したいと思います.

3 単体を $\sigma^3=[v_0v_1v_2v_3]$ とします. 3 単体 σ^3 の 2-skelton $\sigma^3_{(2)}$ は S^2 と同相でした.

$$\sigma^3_{(2)}\cong S^2.$$

このとき

$$\begin{aligned}\tau^0&:=[v_1v_2v_3],\quad \tau^1:=[v_0v_2v_3],\\ \tau^2&:=[v_0v_1v_3],\quad \tau^3:=[v_0v_1v_2]\end{aligned}$$

と置きます. そして各 $|\tau^i|\times|\tau^j|$ $(i,j=0,1,2,3)$ に対して (1) で構成した単体分割をとります. $|\tau^i|\times|\tau^j|$ の頂点集合を V^{ij}, V^{ij} に関して定義される半順序 $\prec$ に関して totally ordered な列の集合を Ξ^{ij} とし, Ξ^{ij} によって定義される $|\tau^i|\times|\tau^j|$ の単体分割を $K_{\Xi^{ij}}$ と置きます.

$$K_{\Xi^{ij}}=(\tau^i\times\tau^j)_{\Xi^{ij}}.$$

このとき

$$\bigcup_{i,j}|\tau^i|\times|t^j|=\bigcup_{i,j}|K_{\Xi^{ij}}|=|\sigma^3_{(2)}|\times|\sigma^3_{(2)}|$$

ですから, これにより $S^2\times S^2$ の単体分割を定義することができます. 詳細は各自確かめてみてください.

(3) 閉区間 I は 1 単体と同相ですから, これを用いて $|K|\times|I|$ の単体分割を (1) のように定義します. ここでは簡単のため $K\times I$ の頂点を

$$v_i:=(v_i,0),\quad v^i:=(v_i,1)$$

のように書き表すことにします. (レジュメと表記が異なりますがご容赦ください)

$K \times I$ の l 単体を次の 2 通りに分けて考えます.

1. $K \times I$ の単体 σ が射影 $p : K \times I \to K$ の像に同相に写るもの. つまり $\sigma \cong p(\sigma)$ となるもの.

2. (1) 以外の場合.

上の (1) に属する $K \times I$ の単体を type1, (2) に属する単体を type2 と呼ぶことにするとそれぞれの単体の表示は次のようになります.

> type1: $[v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^l]$. ただし, index がすべて上付き, またはすべて下付きのものもこの場合に属します.
> type2: $[v_0 \cdots v_k v^k \cdots v^{l-1}]$.

このとき $f : |K| \times |I| \to |K|$ および $g : |K| \to |K| \times |I|$ を次のように定義します.

$$\begin{aligned} f(x,t) &:= p(x,t) = x \\ g(x) &:= (x,1) \end{aligned}$$

このとき, $f \circ g = id_{|K|}$, と $f = p$ から

$$\begin{aligned} f_* \circ g_*(\sigma) &= \sigma \\ g_* \circ f_*(\sigma) &= \sigma \ (\sigma \text{ が type1}) \\ &= 0 \ (\sigma \text{ が type2}) \end{aligned}$$

が計算によってわかります.

まず, $id_{|K| \times |I|}$ と $g \circ f$ を結ぶ chain homotopy P_* を構成します.

$$P_l : C_l(K \times I) \to C_{l+1}(K \times I)$$

を次のように定義します.

$$\begin{aligned} P_l[v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^l] &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0 \cdots v_i v^i \cdots v^l] \ (\text{type1}) \\ P_l[v_0 \cdots v_k v^k \cdots v^{l-1}] &= 0 \quad (\text{type2}). \end{aligned}$$

$(\partial \circ P_l + P_{l-1} \circ \partial)$ を計算しましょう．まず type1 の単体については次のようになります．

$$
\begin{aligned}
&\partial \circ P_l[v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^l] \\
&\quad = [v^0 \cdots v^l] - [v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^l] \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [v_0 \cdots \check{v_j} \cdots v_i v^i \cdots v^l] \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i+1}^{l} (-1)^{i+j+1} [v_0 \cdots v_i v^i \cdots \check{v^j} \cdots v^l] \\
&P_{l-1} \circ \partial [v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^l] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+i} [v_0 \cdots v_j v^j \cdots \check{v^i} \cdots v^l] \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} (-1)^{j+i-1} [v_0 \cdots \check{v_i} \cdots v_j v^j \cdots v^l] \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=k+1}^{l} (-1)^{i+j} [v_0 \cdots v_j v^j \cdots \check{v^i} \cdots v^l]
\end{aligned}
$$

となりますが, 変数変換を駆使することによって結局

$$
(\partial \circ P_l + P_{l-1} \circ \partial)[v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^l] = [v^0 \cdots v^l] - [v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^l]
$$

が得られます．

次に type2 の単体について同様に計算すると

$$
\begin{aligned}
&\partial \circ P_l[v_0 \cdots v_k v^k \cdots v^{l-1}] = 0 \\
&P_{l-1} \circ \partial [v_0 \cdots v_k v^k \cdots v^{l-1}] \\
&\quad = P_{l-1}(\cdots + (-1)^k [v_0 \cdots v_{k-1} v^k \cdots v^{l-1}] \\
&\qquad + (-1)^{k+1} [v_0 \cdots v_k v^{k+1} \cdots v^{l-1}] + \cdots) \\
&\quad = -[v_0 \cdots v_k v^k \cdots v^{l-1}]
\end{aligned}
$$

ですから

$$
(\partial \circ P_l + P_{l-1} \circ \partial)[v_0 \cdots v_k v^k \cdots v^{l-1}] = -[v_0 \cdots v_k v^k \cdots v^{l-1}]
$$

がわかります．以上により

$$
(\partial \circ P_l + P_{l-1} \circ \partial) = (g \circ f)_* - id_*
$$

が示されました．これによって $id_{|K| \times |I|}$ と $g \circ f$ が chain homotopic であることが示されました．よって

$$
H_*(K \times I) = (g \circ f)_* H_*(K \times I)
$$

です. 一方簡単な計算により f_* が全射, g_* が単射になることがわかります. よって

$$(g \circ f)_* (H_*(K \times I)) \cong H_*(K)$$

が示されました. 以上により (3) が証明できました.

2

1. K の 1 単体の個数の帰納法で示します. まずは次のことを示します.

Lemma: K が tree なら, 次の条件 (($\bigstar$)) を満たす K の 0 単体 (しばしば頂点と呼びます)v が少なくとも 2 つ存在する.

($\bigstar$): v は K の唯 1 つの 1-simplex の boundary にしか含まれない.

証明:K に含まれる 1 単体が 1 つの場合は明らかです. 1 単体が n 個以下の tree に関して主張が成立しているとします. $(n \geq 2)$

今 K を 1 単体が $n+1$ 個の tree だとします. このとき $|K|$ から任意の 1 単体 σ の内部 intσ を取り除いてできる複体は連結ではなく, 2 つの連結成分 $|K_1|$, $|K_2|$ をもちます.

今 K_1 がグラフだと仮定します. このとき K_1 は tree になります. 仮に K_1 が tree でないと仮定すると, K_1 の 1 単体 τ で, $|K_1|$ から intτ を取り除いたものが連結であるようなものが存在します. 1 単体 τ は K に含まれますから, $|K|$ から intτ を取り除いたグラフを考えると今の仮定から連結になります. よってこれは K が tree であることに矛盾するので, K_1 は tree になります.

以上の考察の元で Lemma を証明しましょう.

i)K_1 がグラフで K_2 が 0 次元複体の場合

$|K|$ が連結であることから K_2 は 1 つの頂点 v_0 からなる単体的複体です. 一方 K_1 は上の考察から 1 単体の数が n 個の tree なので, 帰納法の仮定より K_1 には少なくとも 2 つ条件 ($\bigstar$) を満たす頂点 v_1, v_2 があります. よって仮に v_1 が σ の boundary であっても, v_0, v_2 が条件 ($\bigstar$) を満たしていますから, この場合は Lemma が成立します.

ii)K_1, K_2 がグラフの場合

上の考察から K_1, K_2 はグラフで 1 単体の数はそれぞれ n 個以下ですから, 条件 ($\bigstar$) を満たす頂点 $v_1^1, v_2^1 \in K_1$, $v_1^2, v_2^2 \in K_2$ が存在します. よって, 仮に 1 単体 σ が v_i^1, v_j^2 のどれかを含んでいたとしても 2 つ条件 ($\bigstar$) を満たす頂点が生き残るので, Lemma が成立します.

この Lemma を用いて問題を証明します. 今 K の chain を考えると

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

となります. $C_q(K) = 0$ $(q > 1)$ ですから $H_q(K) = 0$ $(q > 1)$ です. また, K

は連結なので $H_0(K)=\mathbb{Z}$ です．よってあとは $H_1(K)=0$ を証明すれば十分です．

ところで上の図式から $\mathrm{im}\partial_2=0$ ですから $H_1(K)=0$ を示すには $\ker\partial_1=0$ を示せばよいことになります．そのために次の claim を証明します．

claim: 任意の tree K に対して $\sigma_1,\cdots\sigma_r$ を K が定める全ての 1 単体とする．

$$c=\sum_{i=1}^{r}n_i\sigma_i \qquad n_i\in\mathbb{Z}$$

とするとき

$$\partial_1 c=0\Leftrightarrow n_i=0(\forall i).$$

この claim が証明されれば $H_1(K)=0$ が示されたことになります．これを 1 単体の数の帰納法により証明します．

i) $r=1$ の場合

この場合は明らかなので省略します．

ii) $r\leq m$ の tree について claim が示されたとして, $r=m+1$ の場合について claim を証明します．このとき $\partial_1\sigma_1$ に Lemma の条件 (★) を満たす頂点 v_0 が含まれているとしても一般性を失いませんのでそのように仮定します．

このとき $v_0\in\partial_1\sigma_1$ かつ $v_0\notin\partial_1\sigma_i$ $(i>1)$ です．さらに $\partial_1 c=0$ の仮定から, $[v_0]$ に関する項に注目すると $n_1=0$ がわかります．よって c は頂点が m 個の tree の 1-chain を定めますが, 帰納法の仮定より, $\partial_1 c=0$ になるためには $n_i=0$ $(i>1)$ が必要充分な条件でしたからこれにより claim が示されました．

2. $\tau_1,\cdots\tau_d$ を設問の条件を満たす K の 1 単体としましょう．

$$\tau_k=[u^k v^k] \quad k=1,\ldots,d$$

とします．また $|K|$ から $\tau_1,\cdots\tau_d$ の内点を取り除いて得られるグラフを K_1 と置きます．このとき, 仮定から K_1 は tree であることに注意しましょう．

仮定により K_1 は連結ですから K_1 の 1 単体を通ることによって得られる v^k から u^k への頂点の列 $v^k=v_0^k,v_1^k,\cdots v_{l_k}^k=u^k$ が存在します．このとき 1-chain p_k を

$$p_k=[v_0^k v_1^k]+\cdots+[v_{l_k-1}^k v_{l_k}^k]$$

とおきます．また便宜上 $|p_k|\subset|K_1|$ を

$$|p_k|:=|[v_0^k v_1^k]|\cup\cdots\cup|[v_{l_k-1}^k v_{l_k}^k]|$$

とおくことにします．

このとき, p_k は一意的に定まることを示しておきましょう. 仮に v^k から u^k への頂点の列が 2 つ以上あると仮定します. p_k, p'_k をこの中のある 2 つの列から定まる 1-chain とすると $p_k \neq p'_k$ より, $|p_k|$ に含まれる 1 単体 $[v_i v_{i+1}]$ と $|p'_k|$ に含まれる 1 単体 $[v'_j v'_{j+1}]$ で

$$\mathrm{int}|[v_i v_{i+1}]| \cap \mathrm{int}|[v'_j v'_{j+1}]| = \emptyset$$

を満たすものが存在します. このとき $|K_1| \cup |[uv]|$ は連結で $|p_k| \cup |[uv]|$ および $|p'_k| \cup |[uv]|$ は $|K_1| \cup |[uv]|$ 内の閉じた loop になっていますから

$$|K_1| \cup |[uv]| \setminus (\mathrm{int}|[v_i v_{i+1}]| \cup \mathrm{int}|[v'_j v'_{j+1}]|)$$

は連結です. よって $|K|$ から $d+1$ 個の 1 単体

$$\sigma_1, \cdots, \hat{\sigma}_k, \cdots, \sigma_d, [v_i v_{i+1}], [v'_j v'_{j+1}]$$

の内部を取り除いた空間は連結になります. これは d の最大性に反しますから p_k が一意的に定まります.

ここで K の 1-chain c_k を

$$c_k := p_k + [u^k v^k]$$

とおきます. まず簡単に分かるように $\partial_1 c_k = 0$ です. また各 c_k は $\ker \partial_1$ の生成元として独立になっています. さらに次の事が成立します.

claim: $c \in C_1(K)$ が $\partial_1 c = 0$ を満たすなら c は $c_1, \ldots c_d$ の 1 次結合で表わされる.

このことを証明しましょう. 1 単体 $[u^1 v^1], \cdots [u^d v^d]$ に注目することにより

$$c = c' + \sum_{i=1}^{d} n_i c_i \quad c' \in C_1(K_1),\ n_i \in \mathbb{Z}$$

と書くことができます. $\partial_1 c = 0$ より $\partial_1 c' = 0$ でなければいけませんが K_1 は tree ですから前の設問により $c' = 0$ です. よって claim が示されました.

以上により

$$H_1(K) = \ker \partial_1 = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}[c_i] \cong \mathbb{Z}^d$$

が示されました.

また, K のオイラー数を e とすると

$$e = \mathrm{rank} H_0(K) - \mathrm{rank} H_1(K) = 1 - d$$

が分かります.