幾何学II　演習の解説（12/10）

1

(1) まず $n = 1$ のときを考えます．$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と考えて，$f_1 : S^1 \to S^1$ を

$$f_1(z) = z^2$$

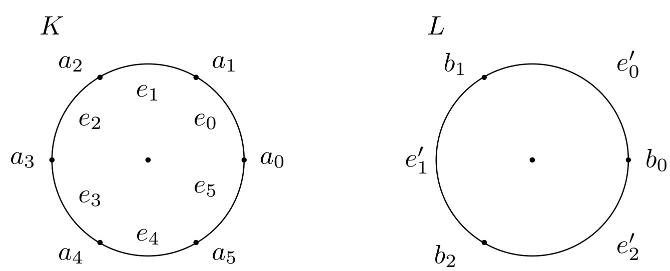
とおくと，これは写像度 2 です．これを示すために，S^1 の二つの単体分割 K, L を次のように定義します．K は

- 頂点：$a_m = e^{\frac{m\pi i}{3}}$，$0 \leq m \leq 5$,
- 辺：$e_m = [a_m a_{m+1}]$，$0 \leq m \leq 5$,

また L は

- 頂点：$b_m = e^{\frac{2m\pi i}{3}}$，$0 \leq m \leq 2$,
- 辺：$e'_m = [b_m b_{m+1}]$，$0 \leq m \leq 2$,

とします（添字はそれぞれ mod 6, mod 3）．S^1 をそれぞれ六角形，三角形に分割している訳です．



$H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 α_1 は，それぞれの場合について，$\alpha_1 = e_0 + \cdots + e_5 = e'_0 + e'_1 + e'_2$ と表されます．ところが，$f_1 : |K| \to |L|$ と見なすとき，f_1 は単体写像を与えていて

$$\begin{aligned}(f_1)_* e_0 = (f_1)_* e_3 = e'_0,\\ (f_1)_* e_1 = (f_1)_* e_4 = e'_1,\\ (f_1)_* e_2 = (f_1)_* e_5 = e'_2\end{aligned}$$

となっていますから，$(f_1)_*(e_0+\cdots+e_5)=2(e'_0+e'_1+e'_2)$，つまり $(f_1)_*\alpha_1=2\alpha_1$ ということになり，写像度が 2 であることがわかります.

以下，帰納的に $f_n : S^n \to S^n$ で $\deg f_n = 2$ のものを構成します．そのために懸垂というものを導入しましょう.

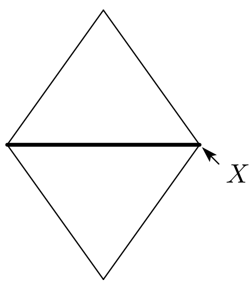
一般の位相空間 X に対し，その懸垂（suspension）$S(X)$ とは

$$S(X) := X \times [-1,1]/\sim,$$

ただし

$$(x,t) \sim (y,u) \Leftrightarrow (x,t)=(y,u) \text{ または } t=u=\pm 1$$

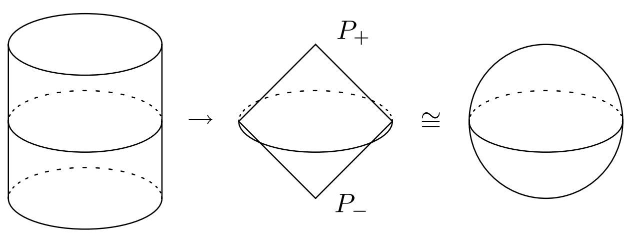
と定義されます．これは，X の錘 $c(X)$ を X のところで二つ張り合わせたものになっています：

$S(X) =$ 

また，連続写像 $f : X \to Y$ があると，その懸垂 $S(f) : S(X) \to S(Y)$ が

$$S(f)([x,t]) = [f(x),t]$$

で定義されます（well-defined であることを確かめてみて下さい）．$X = S^{n-1}$ に対して懸垂 $S(S^{n-1})$ を考えると，$S^{n-1}\times[-1,1]$ の両端 $S^{n-1}\times\{\pm 1\}$ を一点に潰したものですから，それは S^n に同相です：



$S^{n-1}\times[-1,1]$ $\qquad$ $S(S^{n-1})$ $\qquad$ S^n

従って，$f_{n-1} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ があると，その懸垂として $f_n = S(f_{n-1}) : S^n \to S^n$ を定義することができます.

位相空間 X が単体分割を持つとき，その懸垂 $S(X)$ は自然な単体分割を持ちます．つまり，$\{\sigma\}$ を X の単体の集合とするとき,「頂点」（商を取る前の $X\times\{\pm 1\}$ にあたる二点）を $P_\pm$ として，$\{P_\pm * \sigma\}$ 及びその辺単体を全て合

わせたものが $S(X)$ の単体分割を与えています．錘 $c(X)$ のときも同様の考察をしたのを思い出して下さい．

S^1 に上で与えた単体分割 K を考えます．この単体分割が導く $S^2 = S(S^1)$ の単体分割は,

- 0 単体：a_i（$0 \leq i \leq 5$），$P_{\pm}$,
- 1 単体：$[a_i a_{i+1}]$, $[P_+ a_i]$, $[P_- a_i]$（$0 \leq i \leq 5$），
- 2 単体：$\Delta_{i\pm} := [P_{\pm} a_i a_{i+1}]$（$0 \leq i \leq 5$）

を持つようなものです．この単体分割で $H_2(S^2)$ を計算してみます．まず

$$\begin{aligned}\partial\left(\sum_{i=0}^{5}\Delta_{i+}\right) &= \partial\left(\sum_{i=0}^{5}[P_+ a_i a_{i+1}]\right)\\ &= -\sum_{0\leq i\leq 5}[a_i a_{i+1}] + \sum_{0\leq i\leq 5}[P_+ a_{i+1}] - \sum_{0\leq i\leq 5}[P_+ a_i]\\ &= -\sum_{0\leq i\leq 5}[a_i a_{i+1}]\end{aligned}$$

です．第 2 項と第 3 項が打ち消しあっています．また

$$\begin{aligned}\partial\left(\sum_{i=0}^{5}\Delta_{i-}\right) &= \partial\left(\sum_{i=0}^{5}[P_- a_i a_{i+1}]\right)\\ &= -\sum_{0\leq i\leq 5}[a_i a_{i+1}] + \sum_{0\leq i\leq 5}[P_- a_{i+1}] - \sum_{0\leq i\leq 5}[P_- a_i]\\ &= -\sum_{0\leq i\leq 5}[a_i a_{i+1}]\end{aligned}$$

です．やはり第 2 項と第 3 項が打ち消しあっています．以上から

$$\sum_{i=0}^{5}\Delta_{i+} - \sum_{i=0}^{5}\Delta_{i-}$$

が $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 α_2 を与えています．

一方，S^1 の単体分割 L からも同様に S^2 の単体分割が得られます．これは

- 0 単体：b_i（$0 \leq i \leq 2$），$P_{\pm}$,
- 1 単体：$[b_i b_{i+1}]$, $[P_+ b_i]$, $[P_- b_i]$（$0 \leq i \leq 2$），
- 2 単体：$\Delta_{i\pm} := [P_{\pm} b_i b_{i+1}]$（$0 \leq i \leq 2$）

を持つようなものです．K の場合と全く同様に

$$\sum_{i=0}^{2}\Delta'_{i+} - \sum_{i=0}^{2}\Delta'_{i-}$$

が α_2 を与えています．

懸垂 $f_2 : S(|K|) \to S(|L|)$ を考えます．f_2 は単体写像を定めています．実際，懸垂の定義から

$$(f_2)_* P_\pm = P_\pm$$

で，また懸垂を取る前は

$$\begin{aligned}(f_1)_* a_0 &= (f_1)_* a_3 = b_0,\\ (f_1)_* a_1 &= (f_1)_* a_4 = b_1,\\ (f_1)_* a_2 &= (f_1)_* a_5 = b_2\end{aligned}$$

でしたから，頂点は頂点に移っています．また $S(|K|)$ の 1 単体についても，$[P_\pm a_i]$ の形のものについては，やはり懸垂の定義により

$$\begin{aligned}(f_2)_*[P_\pm a_0] &= (f_2)_*[P_\pm a_3] = [P_\pm b_0],\\ (f_2)_*[P_\pm a_1] &= (f_2)_*[P_\pm a_4] = [P_\pm b_1],\\ (f_2)_*[P_\pm a_2] &= (f_2)_*[P_\pm a_5] = [P_\pm b_2]\end{aligned}$$

です．$e_i = [a_i a_{i+1}]$ の形のものについては $(f_1)_*$ のときと同様です．従って 1 単体は 1 単体に移っていることになります．2 単体に対しても同様に

$$\begin{aligned}(f_2)_*\Delta_{0\pm} &= (f_2)_*\Delta_{3\pm} = \Delta'_{0\pm},\\ (f_2)_*\Delta_{1\pm} &= (f_2)_*\Delta_{4\pm} = \Delta'_{1\pm},\\ (f_2)_*\Delta_{2\pm} &= (f_2)_*\Delta_{5\pm} = \Delta'_{2\pm}\end{aligned}$$

です．特に 2 単体の行き先に注目すれば

$$(f_2)_* \left(\sum_{i=0}^{5} \Delta_{i+} - \sum_{i=0}^{5} \Delta_{i-} \right) = 2 \left(\sum_{i=0}^{2} \Delta'_{i+} - \sum_{i=0}^{2} \Delta'_{i-} \right)$$

つまり $(f_2)_*\alpha_2 = 2\alpha_2$ がわかり，従って $\deg f_2 = 2$ です．

以下同様に，帰納的に進みます．即ち，S^{n-1} の二つの単体分割 K_{n-1}, L_{n-1} で，それぞれ $n-1$ 単体

$$\{\sigma_i\}_{1 \le i \le 6\cdot 2^{n-2}}, \quad \{\sigma'_j\}_{1 \le j \le 3\cdot 2^{n-2}}$$

を持ち，その総和がともに $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 α_{n-1} で，しかも

$$(f_{n-1})_*\sigma_m = (f_{n-1})_*\sigma_{m+3\cdot 2^{n-1}} = \sigma'_m, \quad 1 \le m \le 3\cdot 2^{n-2}$$

を満たすようなものがあったとします．このとき，懸垂 $S(S^{n-1}) = S^n$ の単体分割 K_n, L_n として，n 単体

$$\{P_\pm * \sigma_i\}_{1 \le i \le 6\cdot 2^{n-2}}, \quad \{P_\pm * \sigma'_i\}_{1 \le i \le 3\cdot 2^{n-2}}$$

を持つようなものが導かれます（n 単体の数はそれぞれ $6 \cdot 2^{n-1}$, $3 \cdot 2^{n-1}$ です）．それぞれの場合について，その総和は $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 β_n になっており，しかも懸垂 f_n は単体写像 $f_n : K_n \to L_n$ を与え，

$$(f_n)_* P_\pm * \sigma_m = (f_n)_* P_\pm * \sigma_{m+3\cdot 2^{n-2}} = P_\pm * \sigma'_m, \quad 1 \leq m \leq 3 \cdot 2^{n-2}$$

となることが懸垂の性質からわかります．これは $(f_n)_* \beta_n = 2\beta_n$ を意味し，従って $\deg f_n = 2$ です．以上の構成は一般の写像度 $n \in \mathbb{Z}$ に対して同様に行うことができます．

(2) 対称変換 r の写像度は，$\deg r = (-1)^{n+1}$ でした．n が偶数なら $\deg r = -1$ ですから，写像度 1 である恒等写像とはホモトピックではあり得ません．n が奇数のときは，r と恒等写像の間のホモトピーを次のように作ることができます．(1) と同様に $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と考えて，$f : S^n \times I \to S^n$ を

$$f(x,t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t & & & \\ \sin \pi t & \cos \pi t & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos \pi t & -\sin \pi t \\ & & & \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

で定義すれば，$f(x,0) = x$, $f(x,1) = r(x)$ です．上記の行列は $SO(n+1)$ の元ですから，特に右辺は S^n の点を定めています．

(3) $g(x)$ の対蹠点 $r(g(x))$ を考えます．もし $f(x) = g(x)$ だと，$f(x)$ と $r(g(x))$ を結ぶ最短経路（大円）は無数にあり得ますが，ここでは $f(x) \neq g(x)$ なので，$f(x)$ と $r(g(x))$ を結ぶ最短経路（大円）は唯一つに定まります．これに沿って $f(x)$ と $r(g(x))$ を繋げば求めるホモトピーを得ます．具体的には

$$h(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tr(g(x))}{|(1-t)f(x) + tr(g(x))|}$$

とします．分母は $\mathbb{R}^{n+1}$ の通常のノルムです．もし分母が 0 になるとすると

$$(1-t)f(x) = -tr(g(x)) = t(g(x))$$

ですから，ノルムを考えると $t = 1/2$ で $f(x) = g(x)$ しかあり得ませんが，仮定からそのようなことは起こりません．従って h を定義することができます．$|h(x,t)| = 1$ ですから確かに S^n への連続写像で，$h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = r(g(x))$ です．

これで $f \sim r \circ g$ がわかりました．$\deg r = (-1)^{n+1}$ でしたから

$$\deg f = \deg r \circ g = \deg r \cdot \deg g = (-1)^{n+1} \deg g$$

を得ます．

(4) $g = id_{S^n}$ は (3) の条件を満たしています．$\deg id_{S^n} = 1$ ですから，(3) で得た式に代入すれば結果を得ます．

(5) 対偶を示します．もし $f(x) = -x$ を満たす x が存在しないとすれば，$g = r$ が (3) の条件を満たすことになりますから，$f \sim -r$ です．ところが $-r$ とは恒等写像に他なりませんから $f \sim id_{S^n}$ です．よってその写像度は $\deg f = 1$ です．

2

(1) ホモトピーは

$$h(z,s) = (1-s)z^n + s(z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) = z^n + s\sum_{k=1}^{n} a_k z^{n-k}$$

で与えられます．$h : S \times [0,1] \to \mathbb{C} - 0$ でなければなりませんが

$$\begin{aligned} |h(z,t)| &\geq |z^n| - s(|a_1 z^{n-1}| + \cdots + |a_{n-1}z| + |a_n|) \\ &> t^n - s(|a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|)t^{n-1} \\ &= t^{n-1}(t - s(|a_1| + \cdots + |a_n|)) \geq 0 \end{aligned}$$

ですから，確かに $h(z,s) \in \mathbb{C} - 0$ です．上の評価では，三角不等式と $|z| = t > \max\{1, |a_1| + \cdots + |a_n|\}$ を用いています．

(2) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq t\}$ とおくと $\partial D = S$ です．$f(z) = 0$ となる z が存在しないと仮定すれば $0 \notin f(D)$ です．よって $f(D)$ は $\mathbb{C} - 0$ の中で可縮です．実際

$$H(f(z), s) = f(sz)$$

とおけば，$H(f(z), 1) = f(z)$, $H(f(z), 0) = f(0)$ ですから，H が $id_{f(D)}$ と一点写像 $f(0)$ の間のホモトピーです．任意の w について $f(w) \neq 0$ なので，H は確かに $\mathbb{C} - 0$ への写像になっています．

このことから，ホモトピー同値 $\mathbb{C} - 0 \sim \partial D \sim S^1$ のもとで $f|_S : S^1 \to S^1$ とみなしたとき，その写像度は 0 です．ところが $f \sim g$ ですから $\deg f = \deg g = n$ となり矛盾です．