# 幾何学 I　10．多様体上のリーマン計量

## リーマン計量

$M$ を可微分多様体とする．$M$ の各点 $p$ における接ベクトル空間 $T_pM$ に，内積（正定値な対称双線形形式)

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

が与えられているとする．点 $p$ のまわりの局所座標系 $(U, (x_1, \cdots, x_n))$ をとり，$U$ の点 $q$ について

$$g_{ij}(q) = g_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_q\right)$$

とおく．$g_{ij}$ が $M$ の各点の近傍で $C^\infty$ 級であるとき，$M$ の各点 $p$ に内積 $g_p$ を対応させる対応 $g$ を $M$ のリーマン計量とよぶ．また，リーマン計量が与えられた可微分多様体をリーマン多様体とよぶ．

別の局所座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ について，

$$\overline{g}_{ij}(q) = g_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q\right)$$

とおくと，変換規則

$$g_{ij}(q) = \sum_{k,\ell} \overline{g}_{k\ell}(q)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(q)\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}(q)$$

が成立する．

リーマン多様体 $M$ について，接ベクトル $v \in T_pM$ の長さを

$$\|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$$

で定義する．可微分多様体 $M$ 上のなめらかな曲線 $\gamma : [0, 1] \to M$ に対して，$\gamma$ の長さを

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt$$

で定める．

## リーマン計量の存在，誘導されたリーマン計量

1の分割を用いると，可微分多様体にはリーマン計量が存在することを示すことができる．これは，局所的にユークリッド計量を与えて，1の分割により足し合わせればよい．

$f : M \to N$ をはめ込みとする．$N$ にリーマン計量が与えられているとき，

$$g_{ij}(p) = g_p\left(df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\ df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$$

とおくことにより，$M$ のリーマン計量が定まる．これを，$f$ によって $N$ の計量から誘導されたリーマン計量とよぶ．とくに，$f$ がユークリッド空間へのはめ込みのとき，$M$ には $f$ によってユークリッド計量から誘導されたリーマン計量が入る．