12. 写像のホモトピー類と被覆空間

1　写像度とホモトピー類

$f, g : S^1 \to S^1$ を連続写像とするとき，次の命題が成立する．

命題 1. $f, g : S^1 \to S^1$ がホモトピー同値であるための必要十分条件は，$\deg\ f = \deg\ g$ である．

必要性はすでに証明されている．逆は以下のように示される．$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ とおき．$\pi : \mathbf{R} \to S^1$ を $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ で定める．$f : [0,1] \to S^1$ は連続で $f(0) = f(1) = 1$ とし，対応する S^1 から S^1 への写像の写像度を n とする．このとき，連続写像 $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbf{R}$ で $\pi \circ \tilde{f} = f$, $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(1) = n$ となるものが一意に存在する．ホモトピー $F(x,t) = t\tilde{f}(x) + (1-t)nx$ により，f に対応する S^1 から S^1 への写像 $z \mapsto z^n$ とホモトピー同値であることがわかる．

一般に次の Hopf の定理が知られている．

定理 1. 連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ がホモトピー同値であるための必要十分条件は，$\deg\ f = \deg\ g$ である．

2　被覆空間

上の $\pi : \mathbf{R} \to S^1$ は以下のように被覆写像の概念に一般化される．$\pi : Y \to X$ を位相空間の間の連続写像とする．π が**被覆写像** (covering map) であるとは，X の各点の開近傍 U で次の条件を満たすものが存在することである．

1. $\pi^{-1}(U)$ は Y の共通部分をもたない開集合の和集合 $\cup_\lambda V_\lambda$ と表される．
2. π の V_λ への制限 $\pi|V_\lambda : V_\lambda \to U$ は同相写像である．

このとき，Y を X の**被覆空間** (covering space) とよぶ．

群 G が，位相空間 Y に同相写像として自由に作用しているとする．さらに，Y の各点について開近傍 V で，$g \in G$ が単位元でなければ $g{\cdot}V \cap V \neq \emptyset$ となるものが存在すると仮定する．このとき，商空間 Y/G を X とおくと自然な射影 $\pi : Y \to X$ は被覆写像である．このようにして得られる被覆空間を G-被覆 (G-covering) とよぶ．

3　基本群

以下，X は弧状連結な位相空間として，基点 $x_0 \in X$ を固定する．連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ を満たすものを，x_0 を基点とする X のループとよぶ．このようなループ全体に基点を固定するホモトピーによる同値関係を入れ，同値類の集合を $\pi_1(X, x_0)$ で表す．x_0 を基点とする X のループ α, β に対して合成 $\alpha \cdot \beta$ を

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で定義すると，$\pi_1(X, x_0)$ に群構造を定めることがわかる．このようにして定義された群 $\pi_1(X, x_0)$ を X の**基本群** (fundamental group) とよぶ．

一般に基本群が単位元のみからなる位相空間はは**単連結** (simply connected) であるという．また，G-被覆 $\pi : \widetilde{X} \to X$ で，$\widetilde{X}$ が単連結であるとき，$\pi : \widetilde{X} \to X$ を**普遍被覆** (universal covering) という．

定理 2. G-被覆 $\pi : \widetilde{X} \to X$ が普遍被覆ならば，$\pi_1(X, x_0)$ は群 G と同型である．

以下に普遍被覆と基本群の例を挙げる．

(1) $\pi : \mathbf{R} \to S^1, \quad \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbf{Z}.$

(2) $\pi : \mathbf{R}^2 \to S^1 \times S^1, \quad \pi_1(S^1 \times S^1, x_0) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$

(3) $\pi : S^n \to \mathbf{R}P^n, \quad \pi_1(\mathbf{R}P^n, x_0) \cong \mathbf{Z}_2, \quad (n \geq 2).$

(4) Klein bottle K の普遍被覆空間は $\mathbf{R}^2$ であり，基本群は $t : (x, y) \mapsto (x+1, y)$, $s : (x, y) \mapsto (-x, y+1)$ で生成されるユークリッド平面の合同変換群と同型である．