

幾何学I演習 3. 多様体間の写像とその微分

1. M を n 次元可微分多様体として, $f: M \rightarrow M$ を C^∞ 級写像とする. M の点 p において微分 $(df)_p$ のランクは n とする.

(1) p を含む M の開集合 U で $f: U \rightarrow f(U)$ は微分同相写像となるものが存在することを示せ.

(2) 微分 $(df)_q$ のランクが n となるような M の点 q 全体の集合は M の開集合であることを証明せよ.

2. $j: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を包含写像とする. S^n の点 $p = (a_1, \dots, a_{n+1})$ をとる. 微分

$$(dj)_p: T_p S^n \rightarrow T_{j(p)} \mathbf{R}^{n+1}$$

は単射であることを示し, その像を a_1, \dots, a_{n+1} で表せ.

3. \mathbf{R}^n の一次独立なベクトル e_1, \dots, e_n に対して

$$\Gamma = \{m_1 e_1 + \dots + m_n e_n \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}\}$$

とおく.

(1) 商空間 $T^n = \mathbf{R}^n / \Gamma$ は可微分多様体の構造をもつことを示せ.

(2) 射影 $p: \mathbf{R}^n \rightarrow T^n$ のランクは各点で n であることを示せ.

4. $f: \mathbf{R}P^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$f([x: y: z]) = (xy, yz, zx)$$

で定義する. 微分 $(df)_p$ の p によるランクが p によってどのように変化するかを調べよ. ただし, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ とする.