

## 幾何学I演習 7 埋め込みとはめ込み, 正則値と臨界値

1.  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$f(x, y, z) = (xy, x, y)$$

により定義する. この写像の各点における微分のランクを求めよ.

2.  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  を

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, 2yz, 2zx)$$

により定義する.  $f$  が導く写像  $\bar{f}: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  は埋め込みであることを示せ.

3.  $M, N$  を連結な可微分多様体,  $f: M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  写像とする. ここでは,  $M$  はコンパクトで  $m = n$  とする.  $f$  がはめ込みであるとき, 以下を証明せよ.

(1)  $f$  は全射である.

(2)  $y \in N$  に対して  $f^{-1}(y)$  は有限集合で, その個数は  $y$  によらない.

4. 正則値の引き戻しが可微分多様体になることを利用して,  $SO(n)$  が可微分多様体になることを示し, その次元を求めよ.

5.  $f: S^n \rightarrow S^n$  を

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

で定める.  $f$  の写像度を求めよ.