9. 特異ホモロジー論 (II)

1　位相空間対の特異ホモロジー群

位相空間 X とその部分空間 Y について，$S(Y)$ を $S(X)$ の部分複体とみなして，$S(X,Y)=S(X)/S(Y)$ とおく．$S(X,Y)$ には自然に境界作用素が定義される．そのホモロジー群を位相空間対 X,Y のホモロジー群とよび，$H_*(X,Y)$ で表す．包含写像を $i:Y\to X$ とすると，以下の完全列が存在する．

$$\cdots\xrightarrow{\partial_*}H_q(Y)\xrightarrow{i_*}H_q(X)\longrightarrow H_q(X,Y)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(Y)\longrightarrow\cdots$$

また，Z が Y の部分空間のとき，次の完全列が存在する．

$$\cdots\xrightarrow{\partial_*}H_q(Y,Z)\xrightarrow{i_*}H_q(X,Z)\longrightarrow H_q(X,Y)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(Y,Z)\longrightarrow\cdots$$

位相空間 X の特異チェイン複体 $S(X)$ に対して，準同型写像 $\varepsilon:S_0(X)\to\mathbf{Z}$ が，X の 0 次元単体 x について，$\varepsilon(x)=1$ とおくことにより定義される．$\widetilde{S}_q(X)=S_q(X)$, $q\geq 1$, $\widetilde{S}_0(X)=\mathrm{Ker}\varepsilon$ とおく．複体 $\widetilde{S}(X)$ のホモロジー群を X の被約ホモロジー群 (reduced homology group) とよび，$\widetilde{H}_*(X)$ で表す．X の点 x_0 をとると $\widetilde{H}_*(X)\cong H_*(X,x_0)$ となる．

2　切除可能な対

位相空間 X の部分空間 X_1, X_2 が切除可能な対 (excisive couple) であるとは，包含写像 $S(X_1)+S(X_2)\to S(X_1\cup X_2)$ がホモロジー群の同型を導くことである．

X_1,X_2 が切除可能な対とする．$i_1:X_1\cap X_2\to X_1$, $i_2:X_1\cap X_2\to X_2$, $j_1:X_1\to X_1\cup X_2$, $j_2:X_2\to X_1\cup X_2$ をそれぞれ包含写像とすると，次の特異ホモロジーの **Mayer-Vietoris 完全列**が導かれる．

$$\cdots\xrightarrow{\partial_*}H_q(X_1\cap X_2)\xrightarrow{\alpha_*}H_q(X_1)\oplus H_q(X_2)\xrightarrow{\beta_*}H_q(X_1\cup X_2)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(X_1\cap X_2)\longrightarrow\cdots$$

次の定理は X の部分空間 X_1, X_2 が切除可能な対であるための十分条件を与える．

定理 1． *1.* $X_1 \cup X_2 = \mathrm{Int} X_1 \cup \mathrm{Int} X_2$ ならば，X_1, X_2 は切除可能な対である．ここで Int は内点集合を表す．

2. X が CW 複体で，X_1, X_2 がその部分複体のとき，X_1, X_2 は切除可能な対である．

X_1, X_2 が切除可能な対のとき，包含写像から導かれる同型

$$H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$$

が成立する．

次の定理は切除同型 (excision isomorphism) とよばれる．

定理 2． X を位相空間 Y をその部分空間とする．U を Y の部分集合で，閉包 $\overline{U}$ が Y の内点集合に含まれるとする．このとき，$X - U$, Y は切除可能な対であり，包含写像から導かれる同型

$$H_*(X - U, Y - U) \cong H_*(X, Y)$$

が成立する．