幾何学II演習
4. 完全列 (1)

1　完全列の分解

加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M' \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$$

に対して，以下の 2 条件は同値であることを示せ．

1. 準同型写像 $\bar{i} : M' \to M$ が存在して $\bar{i} \circ i = \mathrm{id}$ が成り立つ．
2. 準同型写像 $\bar{j} : M'' \to M'$ が存在して $j \circ \bar{j} = \mathrm{id}$ が成り立つ．

上の 2 条件のいずれかが成立するとき加群の短完全列は分解するという．このとき，加群の同型

$$M' \cong M \oplus M''$$

が成立することを示せ．また，分解しない短完全列の例を挙げよ．M'' が自由加群のときは，上の短完全列はつねに分解することを示せ．

2　Five Lemma

加群の完全列の間の準同型

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_1 & \xrightarrow{i_1} & M_2 & \xrightarrow{i_2} & M_3 & \xrightarrow{i_3} & M_4 & \xrightarrow{i_4} & M_5 \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\
M_1' & \xrightarrow{j_1} & M_2' & \xrightarrow{j_2} & M_3' & \xrightarrow{j_3} & M_4' & \xrightarrow{j_4} & M_5'
\end{array}$$

が与えられたとする．つまり，上の図式の横の列はともに完全列で図式は可換であるとする．f_1 が全射，f_5 が単射，f_2, f_4 が同型写像ならば，f_3 は同型写像となることを示せ．