幾何学 II 演習
8. 特異ホモロジー論 (I)

1 特異ホモロジーのいくつかの性質

(1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を位相空間の間の連続写像とする．特異ホモロジー群に誘導される準同型写像 f_*, g_* に対して，$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ を示せ．

(2) X を位相空間として，$\{X_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$ をその弧状連結成分とする．特異ホモロジー群について

$$H_*(X) \cong \oplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_\lambda)$$

が成立することを示せ．

2 Mapping cone

C, C' をチェイン複体，$f : C \to C'$ をチェイン写像とする．

$$D_q = C_{q-1} \oplus C'_q$$

とおき $\partial : D_q \to D_{q-1}$ を

$$\partial(c, c') = (-\partial c, f(c) + \partial c'), \quad c \in C_{q-1}, c' \in C'_q$$

で定義する．

(1) 上の $\partial : D_q \to D_{q-1}$ は，$\partial \circ \partial = 0$ を満たすことを示せ．

(2) 完全列

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(D) \longrightarrow H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(C') \longrightarrow H_q(D) \longrightarrow \cdots$$

が存在することを示せ．

(3) すべての q について $f_* : H_q(C) \to H_q(C')$ が同型ならば，$H_*(D) = 0$ となることを示せ．