幾何学 II　演習の解説（1/21）

1

(1) 定義に沿って確かめればそんなに難しくありませんので各自確かめてみてください.

(2) 1 次元の場合は簡単に確かめることができるので, ここでは $n \geq 2$ を仮定します. k 次元単体 σ の内点 $x \in \sigma \subset |K|$ を 1 つ取ってきます. $|K|$ は n 次元のホモロジー多様体ですから

$$H_p(|K|, |K| \setminus \{x\}) \cong H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

が得られます. 一方で切除同型によって

$$H_p(|K|, |K| \setminus \{x\}) \cong H_p(St\ \sigma, \partial St\ \sigma)$$

を得ることができます. かつ $(St\ \sigma, \partial St\ \sigma)$ の対のホモロジー完全系列を用いると, $|St\ \sigma|$ は可縮なので

$$H_p(St\ \sigma, \partial St\ \sigma) \cong H_{p-1}(\partial St\ \sigma)$$

となります.

一方で次が成り立つことがわかります.

Lemma: σ を k 次元の単体とするとき, $|\partial St\ \sigma|$ は $S^k(|Lk\ \sigma|)$ と同相である. ここで S は懸垂で, $S^k(M) = S(S^{k-1}(M)) = \cdots = S(S(\cdots(S(M))\cdots))$($k$ 回懸垂をとったもの).

proof: σ の次元に関する帰納法で証明します.

$$\sigma = [a_0 a_1 \cdots a_k]$$

とおくことにします.

$k = 0$ の場合は任意の n に対して $\partial St\ \sigma = Lk\ \sigma$ を簡単に示すことができます. (詳しくは各自証明してみてください.)

$\dim \sigma = k - 1$ の場合まで主張が正しいとして, $\dim \sigma = k$ の場合を証明します. このとき $St\ \sigma$ に属する n 次元単体をひとつとります. これを $\tau = [a_0 a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]$ としましょう. このとき

$|\tau|$ の境界に含まれる $n-1$ 次元単体で $\partial St\ \sigma$ に属するものを取り出すと

$$\begin{aligned}|\tau| \cap |\partial St\ \sigma| &= \bigcup_{i=0}^{k} |[a_0 a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| \\ &= |[a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| \cup \bigcup_{i=1}^{k} |[a_0 a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| \\ &= |[a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| \cup |a_0 * \bigcup_{i=1}^{k} |[a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]|\end{aligned}$$

となります. ここで帰納法の仮定から

$$a_0 * \bigcup_{i=0}^{k} |[a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| = |a_0 * S^{k-1}(\tau \cap Lk\ \sigma)|$$

を得ることができます. (ここで a_0* は a_0 を頂点とする錐をとったものとします)

一方で, k 単体 $[a_1 \cdots a_k]$ の重心を a_0' とおきます. すると

$$\begin{aligned}|[a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| &= \bigcup_{j=1}^{k} |[a_0' a_1 \cdots \check{a}_j \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| \\ &= a_0' * \bigcup_{j=1}^{k} [a_1 \cdots \check{a}_j \cdots a_k b_1 \cdots b_{n-k}]| \\ &= |a_0' * (\tau \cap Lk\ \sigma)|\end{aligned}$$

となります. よって $St\ \sigma$ に含まれる全ての n 単体を合わせることによって

$$\partial St\ \sigma = |a_0 * S^{k-1} Lk\ \sigma| \cup |a_0' * S^{k-1} Lk\ \sigma| \cong S^k Lk\ \sigma$$

を示すことができます. ■

よって懸垂同型を用いることにより

$$H_{p-1}(\partial St\ \sigma) \cong H_{p-1}(S^k Lk\ \sigma) \cong \tilde{H}_{p-k-1}(Lk\ \sigma)$$

を得ることができました. 以上により, $q = p-k-1$ と置きなおすことで

$$\tilde{H}_q(Lk\ \sigma) \cong H_{q+k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

が示されました.

2

ここでは全て係数を $\mathbb{R}$ にして考えます.
(1)M はコンパクトで向き付け可能ですから, Poincaré duality から

$$H_q(M) \simeq H^{n-q}(M)$$

がわかります. 一方で普遍係数定理から

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H^{n-q}(M) = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_{n-q}(M)$$

ですから

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_q(M) = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_{n-q}(M)$$

がわかります. これにより

$$\begin{aligned}\xi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_i(M) \\ &= \sum_{i=0}^{(n+1)/2} \{(-1)^i \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_i(M) + (-1)^{n-i}\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_{n-i}(M)\} \\ &= \sum_{i=0}^{(n+1)/2} (-1)^i \{\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_i(M) - \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H_{n-i}(M)\} = 0\end{aligned}$$

となり, $\xi(M) = 0$ がわかりました.
(2) 任意の $x \in H^q(M)$ $(x \neq 0)$ に対してある $y \in H^{n-q}(M)$ が存在して $(x, y) \neq 0$ となることを示せば十分です. Poincaré duality によって

$$x \cap [M] \in H_{n-q}(M)$$

となりますが, このとき普遍係数定理によりある $y \in H^{n-q}(M)$ が存在して

$$\langle y, x \cap [M]\rangle \neq 0$$

になります. 具体的には y は普遍係数定理から得られる同型写像

$$0 = \mathrm{Ext}(H_{n-1}(M), \mathbb{R}) \to H^n(M) \to Hom(H_n(M), \mathbb{R}) \cong H_n(M) \to 0$$

における $x \cap [M]$ の逆像を y と定義しています. よって

$$\langle y, x \cap [M]\rangle = \pm\langle x \cup y, [M]\rangle \neq 0$$

によってこの写像が非退化であることが示されました.

3

ここでも係数は $\mathbb{R}$ で考えます.
(1) まず $H_n(S^n \times S^n) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H_{2n}(S^n \times S^n) = \mathbb{R}$ です. 次に, 交叉数を計算するためにホモロジーの生成元を調べてみましょう. ここで Künneth の定理を使うと

$$H_n(S^n) \oplus H_n(S^n) \to H_n(S^n \times S^n)$$

は同型で同型写像は Alexander-Whitney 写像 (前回の解答を参照してください) によって生成されますから, L.H.S. のおのおのの生成元を p, q とおくと

$$(p, 0) \mapsto p \otimes 1, \quad (0, q) \mapsto 1 \otimes q$$

となります. よって $p \otimes 1$ および $1 \otimes q$ を表すホモロジーの代表元は

$$p \otimes 1 = [S^n \times e], \quad 1 \otimes q = [e \times S^n]$$

と表されます. (ここで $e = (1, 0, \ldots 0)$.) ですから, 交点の個数を計算すると

$$I(p \otimes 1, 1 \otimes q) = 1$$

がわかります. 一方

$$I(1 \otimes q, p \otimes 1) = (-1)^n I(p \otimes 1, 1 \otimes q) = (-1)^n$$

となります. 以下 $p \otimes 1 = p$, $1 \otimes q = q$ と略記することにします. このとき交叉数の定義から

$$I(p, p) = I(q, q) = 0$$
$$I(p, q) = 1 \quad I(p, q) = (-1)^n$$

がわかります. (例えば $I(p, p)$ を計算するときには $S^n \times e$ と $S^n \times (-e)$ のように同じホモロジーの代表元を表す異なる cycle をとってきて交点を比べます. この 2 つは共有点を持ちませんから $I(p, p) = 0$ がわかるわけです.)
(2) $[\Gamma_f], [\Delta]$ のホモロジー類はそれぞれ

$$[\Gamma_f] = p + (\deg f)q, \quad [\Delta] = p + q$$

と表されますから, 交叉形式の線形性を用いて

$$I([\Gamma_f], [\Delta]) = I(p, q) + (\deg f)I(q, p) = 1 + (-1)^n \deg f$$

がわかります.
一般の向き付け可能な n 次元多様体 M についても同様のことが言えます. ただし, 例えば複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の様に自己交叉がある多様体も考えられますので

$$I([\Gamma_f], [\Delta]) = I(p, p) + (1 + (-1)^n (\deg f))I(p, q) + (\deg f)I(q, q)$$

と表されます.