

幾何学 III 演習問題 1

1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を, \mathbb{R}^n のある基底について行列 A で表される線形変換とすると

$$f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

を A を用いて表せ.

2. V を n 次元の実線形空間とする. $\wedge^2(V^*)$ の要素 ω に対して, V^* の基底 f_1, \dots, f_n と $0 \leq 2r \leq n$ を満たす整数 r が存在して

$$\omega = \sum_{k=1}^r f_{2k-1} \wedge f_{2k}$$

と表されることを示せ. さらに, この r は

$$\omega^r \neq 0, \quad \omega^{r+1} = 0$$

を満たすことを示せ. ただし, ω^k は ω の k 階外積を表す.

3. 微分形式

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{(x^2 + y^2)^p}$$

が閉形式になるような p を求めよ. また, このとき ω が完全形式ではないことを示せ. また,

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}$$

について同様の考察をせよ.

講義の web page

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/lectures/geom3.html>