7. 閉曲面の分類

1　多角形表示

閉曲面とは境界のない 2 次元コンパクト多様体である．閉曲面は単体分割が可能であることが知られている．このことを用いると，閉曲面を多角形の辺を 2 つずつ組にして同一視した商空間として表示することができる．さらに，これを次のような標準形で表すことができる．以下，g は自然数とする．

定理 1. 向き付け可能な閉曲面は，球面，または $4g$ 角形の辺を

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

に従って同一視して得られる曲面 F_g と同相である．また，向き付け不可能な閉曲面は，$2g$ 角形の辺を

$$a_1 a_1 \cdots a_g a_g$$

に従って同一視して得られる曲面 N_g と同相である．

F_g を**種数** (genus) g の向き付け可能な閉曲面とよぶ．また，球面の種数は 0 とする．上の多角形表示は F_g と N_g の CW 複体としてのセル分割を与える．F_g と N_g のホモロジー群は以下の通りである．

$$H_q(F_g) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \\ \mathbf{Z}^{2g} & q = 1 \\ \mathbf{Z} & q = 2 \end{cases}$$

$$H_q(N_g) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}^{g-1} & q = 1 \\ 0 & q = 2 \end{cases}$$

また，Euler 数は

$$\chi(F_g) = 2 - 2g, \quad \chi(N_g) = 2 - g$$

となる．

2 連結和による表示

閉曲面 F, F' に対して，それぞれの曲面から開円板を取り除き，境界の S^1 を同一視して得られる曲面を F と F' の**連結和** (connected sum) といい $F \sharp F'$ で表す．連結和を用いると，閉曲面の分類定理は次のようにも述べられる．

定理 2. 向き付け可能な閉曲面は，球面，またはトーラス T のいくつかの連結和と同相である．向き付け可能な閉曲面は，実射影平面 $\mathbf{R}P^2$ のいくつかの連結和と同相である．

定理 1, 2 の証明の際に次の事実を用いる．

$$\mathbf{R}P^2 \sharp \mathbf{R}P^2 \cong K$$

ここで K は Klein bottle を表す．また，

$$T \sharp \mathbf{R}P^2 \cong K \sharp \mathbf{R}P^2 \cong \mathbf{R}P^2 \sharp \mathbf{R}P^2 \sharp \mathbf{R}P^2$$

が成立する．