

幾何学 I 演習 10 曲面の微分幾何

1. 3次元ユークリッド空間内のトーラス

$$x = (a \cos \theta + b) \cos \phi, \quad y = (a \cos \theta + b) \sin \phi, \quad z = a \sin \theta$$

$0 < a < b, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ の曲面積を求めよ。また、ガウス曲率を θ, ϕ を用いて表せ。

2. \mathbf{R}^3 に Minkowski 内積

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

を入れる。双曲面

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0$$

上に \mathbf{R}^3 の Minkowski 内積から導かれる計量はリーマン計量であることを示し、この計量を x, y で表せ。

3. 楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

のガウス曲率と平均曲率を求めよ。

4. xyz 空間において懸垂線

$$x = \cosh z$$

を z 軸の周りに一回転して得られる曲面のガウス曲率と平均曲率を求めよ。