幾何学 I　0. 陰関数定理，曲線と曲面の方程式など

陰関数定理

$\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された連続微分可能な関数 $F(x,y)$ が，$P=(a,b)\in D$ において，

$$F(a,b)=0, \quad F_y(a,b)\neq 0$$

を満たすとする．このとき，$x=a$ を含む開区間 U で定義された関数 $y=f(x)$ で次の性質を満たすものが一意的に存在する．

1. $F(x,f(x))=0, \quad x\in U$
2. $b=f(a)$

ここで，導関数は

$$\frac{dy}{dx}=-F_x/F_y$$

となる．

一般的な陰関数定理は次のように述べられる．$\mathbf{R}^{n+p}$ の領域 D で定義された連続微分可能な関数 $F_i(x_1,\cdots,x_{n+p}), 1\leq i\leq n$ が，$a=(a_1,\cdots,a_{n+p})\in D$ において，

$$F_i(a)=0, \quad 1\leq i\leq n$$

を満たし，さらにヤコビ行列式が

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(a)\neq 0$$

を満たすとする．このとき，$(a_{n+1},\cdots,a_{n+p})$ を含むある開集合で

$$x_i=\varphi_i(x_{n+1},\cdots,x_{n+p}), \quad 1\leq i\leq n$$

と表される関数で，次の条件を満たすものが一意的に存在する．

1. $F_i(\varphi_1,\cdots,\varphi_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+p})=0, \quad 1\leq i\leq n$
2. $a_i=\varphi_i(a_{n+1},\cdots,a_{n+p}), \quad 1\leq i\leq n$

逆関数定理

陰関数定理を用いて，次の逆関数定理を示すことができる．$\mathbf{R}^n$ の領域 D で定義された連続微分可能な関数

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n$$

が $a \in D$ において，

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(a) \neq 0$$

を満たすとする．このとき，$f(a)$ を含むある開集合で定義された連続微分可能な逆関数

$$x_i = \varphi_i(y_1, \cdots, y_n), \quad 1 \leq i \leq n$$

が一意的に存在する．

曲線と曲面の方程式

$\mathbf{R}^2$ の領域で定義された曲線

$$F(x, y) = 0$$

の上の点で，$(F_x, F_y) \neq (0, 0)$ を満たすものを**正則点**とよぶ．正則点 (a, b) における曲線の接線の方程式は

$$(x - a)F_x(a, b) + (y - b)F_y(a, b) = 0$$

で与えられる．$\mathbf{R}^3$ の領域で $F(x, y, z) = 0$ によって定義された曲面についても，正則点の概念が同様に定義される．正則点 (a, b, c) における接平面の方程式は

$$(x - a)F_x(a, b, c) + (y - b)F_y(a, b, c) + (z - c)F_z(a, b, c) = 0$$

で与えられる．

講義の web page
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/lectures/geom1.html