No.

Date

こんどは、点 p のまわりに、多様体 M の局所座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ があるとしよう. 点 p はこの座標系で $p=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ と表せているとする. $t=0$ のとき、点 p を通過し、ある x_i 座標の方向に単位の速さで進む曲線 $c_i(t)$ を考えよう. M の局所座標系で書けば、

$$(2.64)\qquad c_i(t) = (a_1,\cdots,a_{i-1}, a_i+t, a_{i+1},\cdots,a_m)$$

である. この曲線 $c_i(t)$ の $t=0$ における速度ベクトル $\mathbf{e}_i$ は、いわば、局所座標系 $(x_1,\cdots,x_m)$ に関する x_i 方向の「基本ベクトル」である. 各方向についてこれらをあわせたもの

$$(2.65)\qquad \mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_m$$

が接ベクトル空間 $T_p(M)$ の基底になっている

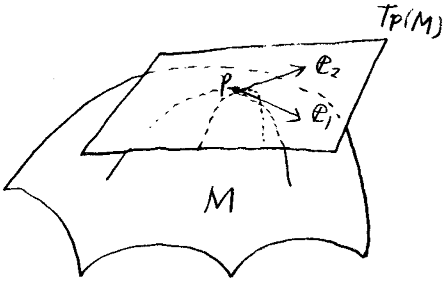

図2.10 $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_m$ は $T_p(M)$ の基底

微分操作としての $\mathbf{e}_i$ は

$$(2.66)\qquad \mathbf{e}_i\cdot f = \frac{d}{dt} f(c_i(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} f(a_1,\cdots,a_{i-1}, a_i+t, a_{i+1},\cdots,a_m)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

であるから、f の x_i 方向の偏微分に一致する. このため、x_i 方向の基本ベクトル $\mathbf{e}_i$ のことを記号で、

$$(2.67)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と書くことがある.

2つの接ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が、微分操作として等しいときは、接ベクトルとしても等しい. つまり、点 p の近傍で、定義された任意の関数 f について、

$$(2.68)\qquad \mathbf{u}\cdot f = \mathbf{v}\cdot f$$

が成り立てば、$\mathbf{u}=\mathbf{v}$ である.

このことを使うと、$t=0$ のときの点 p を通過する曲線 $c(t)$ を M の局所座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ で表したとき、$c(t)$ の $t=0$ での速度ベクトル $\mathbf{u}$ を基本ベクトル $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_m$ で表す公式が得られる.