$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right|=\left|a\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|, \quad i=1,2,\cdots,m$$

となる．したがって，aの絶対値さえ十分小さく選んでおけば，$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$ と $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right)^2$ の差はいくらでも小さくできる．はじめに見ておいたように，$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = X_f\cdot f$ は，$D_{2\varepsilon}$ と D_ε の間で，最小値 $4\varepsilon^2>0$ をとるから，aが十分小さければ，$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right)^2$ もそこで 0 でない最小値をもつ．したがって，円板 D_ε と $D_{2\varepsilon}$ の間の部分で，$\tilde{f}$ に臨界点を生じることはない．こうして，f と $\tilde{f}$ とがまったく同じ臨界点の集合をもつことがわかった．これらの臨界点は，$\tilde{f}$ の臨界点としても非退化であるから，$\tilde{f}$ は Morse 関数である．また，$f(p_1)=f(p_2)$ であったとしても，$\tilde{f}$ のほうでは $\tilde{f}(p_1)\neq\tilde{f}(p_2)$ になっている．

この議論を続けていけば，すべての臨界点での関数値が異なるようにできることがわかる．$\tilde{f}$ が (C^2,ε) の意味で f に近いことの証明も，Morse関数の存在定理 2.20 の証明のなかでやった議論と同様である．■

演習問題

2.1 点 p_0 が関数 $f: M\to\mathbb{R}$ の臨界点であることは，p_0 のまわりの局所座標系の取り方に無関係であることを示せ．

[証明] 点 p_0 のまわりの異なる局所座標系 $(x_1,\cdots,x_m)$，$(y_1,\cdots,y_m)$ をとる．偏微分の座標変換の公式

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_j}(p_0)$$

から，p_0 が $(y_1,\cdots,y_m)$ で計算したとき f の臨界点 $\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(p_0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial y_m}(p_0)=0\right)$ であれば，$(x_1,\cdots,x_m)$ で計算したときも，f の臨界点 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0)=0\right)$ であることがわかる．2つの座標系の役割を入れ替えても同じことが言えるから，p_0 が f の臨界点であることは局所座標系の取り方によらない．

2.2 $S^{m-1}=\{(x_1,\cdots,x_m)\mid x_1^2+\cdots+x_m^2=1\}$ を $m-1$ 次元球面とし，$f: S^{m-1}\to\mathbb{R}$ を $f(x_1,\cdots,x_m)=x_m$ で定義される「高さ関数」とすれば，f は S^{m-1} の上 Morse 関数である。これを証明し，かつ，臨界点とその指数を求めよ．（座標 $(x_1,\cdots,x_m)$ は S^{m-1} の局所座標系ではない．！ また，$m\geq 2$ としてよい．）

「証明」 臨界点は $(0,\cdots,\pm1)$ の2つだけである．その指数は $(0,\cdots,0,-1)$ が 0，$(0,\cdots,0,1)$ が $m-1$ である．第1章 例 1.15 参照 ■