No.

Date . .

(2.33) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,\cdots,0)\neq 0$$

と仮定できる．すると，式(2.32)より，$H_{11}(0,\cdots,0)\neq 0$ である．H_{11} は連続であるから，

(2.34) H_{11} は原点の近傍で 0 でない

ということがわかる．そこで x_1 にかわる新しい局所座標 X_1 を

(2.35) $$X_1=\sqrt{|H_{11}|}\left(x_1+\sum_{i=2}^{m}x_i\frac{H_{1i}}{H_{11}}\right)$$

という式で導入する．x_1 以外の $x_2,\cdots,x_m$ はそのままにしておく．原点において，$(X_1,x_2,\cdots,x_m)$ と $(x_1,\cdots,x_m)$ の間の Jacobi 行列の行列式が 0 でないことが容易に計算できるので，$(X_1,\cdots,x_m)$ は確かに局所座標系になっている．X_1 の2乗を計算すると，

(2.36)
$$X_1^2=|H_{11}|\left(x_1+\sum_{i=2}^{m}x_i\frac{H_{1i}}{H_{11}}\right)^2$$
$$=\begin{cases} H_{11}x_1^2+2\sum_{i=2}^{m}x_1x_iH_{1i}+\left(\sum_{i=2}^{m}x_iH_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11}>0)\\ -H_{11}x_1^2-2\sum_{i=2}^{m}x_1x_iH_{1i}-\left(\sum_{i=2}^{m}x_iH_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11}<0)\end{cases}$$

この式(2.36)と f の2次形式表示(2.30)を較べると

(2.37) $$f=\begin{cases} X_1^2+\sum_{i,j=2}^{m}x_ix_jH_{ij}-\left(\sum_{i=2}^{m}x_iH_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11}>0)\\ -X_1^2+\sum_{i,j=2}^{m}x_ix_jH_{ij}-\left(\sum_{i=2}^{m}x_iH_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11}<0)\end{cases}$$

上の式(2.37)の第2項以下は $x_2,\cdots,x_m$ に関する和になっている．したがって，この部分はもとの2次形式表示(2.30)より項の数が少ない2次形式表示として整理できるので，これで項の数に関する数学的帰納法が進行して，f が Morse の標準形のかたちの表示に直せることが証明できる．■

Morse の補題が証明できたので，次の2つの事実が曲面のときと同様にしてわかる．

系 2.18 非退化な臨界点は孤立した臨界点である． □

系 2.19 コンパクトな多様体上の Morse 関数 $f:M\to\mathbb{R}$ には有限個の臨界点しかない． □