No.

Date

$AB_\theta$の速度ベクトルを計算すると、単純な計算で、

$$(3.54)\qquad \frac{d}{d\theta}AB_\theta\Big|_{\theta=0} = A\frac{d}{d\theta}B_\theta\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。右辺の行列を$V_{12}$とおく。ここでは行列$V_{12}$を$m^2$次元のEuclid空間$\mathbb{R}^{m^2}$内のベクトルと考えている。

いまは、$\mathbb{R}^m$の1番目と2番目の軸で張られる平面内の回転行列$B_\theta$を使って定義された曲線$AB_\theta$の速度ベクトルであったが、$i$番目と$k$番目の軸で張られる平面内の回転行列を使って、同様に定義される曲線の$A$における速度ベクトル$V_{ik}$を求めると、$i$行$k$列のところに、$-\varepsilon_i$、$k$行$i$列のところに、$\varepsilon_k$、他はみな0であるような行列になる。$i$と$k$を$1 \leqq i < k \leqq m$の範囲で動かしたとき、これらのベクトル$V_{ik}$は$\mathbb{R}^{m^2}$のなかで1次独立であり、全部で$i<k$を満たす$(i,k)$の選び方の個数だけ、つまり $_mC_2 = \frac{m(m-1)}{2}$ 個だけある。これは$SO(m)$の次元に等しいから、$V_{ik}$ $(1\leqq i<k\leqq m)$が点$A$における$SO(m)$の接ベクトル空間$T_A(SO(m))$の基底になっていることがわかる。

もし$A$が補題3.12の主張する形の行列であれば、$A$において、関数$f$をどの$V_{ik}$の方向に微分しても、0であることが(3.50)と同様にして示せる。これで$A$が$f$の臨界点であることが証明できた。 ∎

$A$が補題3.12の主張する形の行列(対角線上に$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$、他は0)であるとして$A$における$f$のHesse行列$H_f$を求めよう。そのためには、$A$のまわりでの$SO(m)$の局所座標系を決めておかなければならない。

$\mathbb{R}^m$の$i$番目の座標軸と$k$番目の座標軸で張られる平面内の回転行列を$B_\theta^{(ik)}$と表すことにする。$i$と$k$ $(i<k)$のすべての選び方にわたってこの行列を考えれば、それらは全部で$\frac{m(m-1)}{2}$個だけある。これらすべてを行列$A$の右から掛けたもの

$$(3.55)\qquad A\cdot B_\theta^{(ik)}B_\varphi^{(jl)}B_\psi^{(hr)}\cdots$$

によって、$\frac{m(m-1)}{2}$次元の局所座標系$(\theta, \varphi, \psi, \cdots)$が入る。これでHesse行列$H_f$が計算できる。実際に$A$における微分を計算して、

$$(3.56)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varphi}(A\cdot B_\theta^{(ik)}B_\varphi^{(jl)})\Big|_{(\theta,\varphi)=(0,0)} = f\left(A\cdot\frac{d}{d\theta}B_\theta^{(ik)}\Big|_{\theta=0}\cdot\frac{d}{d\varphi}B_\varphi^{(jl)}\Big|_{\varphi=0}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & (i,k)\neq(j,l) \\ -c_i\varepsilon_i - c_k\varepsilon_k & (i,k)=(j,l) \end{cases}$$