No.

Date

こうして、$SU(m)$の中心化群の構造が異なるので、$U(m)$と$SU(m)\times S^1$はLie群として同型でない。

最後に、$H$を$SU(m)$に同型な$SU(m)\times S^1$の部分群とすれば、

$$H = SU(m)\times\{1\}$$

であることを証明しよう。射影$p: SU(m)\times S^1 \to S^1$による$H$の像が$\{1\}$であることを示せばよい。系3.17により$H$は単連結である。したがって、$i: H \to SU(m)\times S^1$を包含写像とすると、合成$p\circ i: H\to S^1$は準同型$j: H\to\mathbb{R}$に持ち上がる。すなわち、$e:\mathbb{R}\to S^1$を$e(\theta)=\exp(\sqrt{-1}\,\theta)$で定義される写像とすると、$p\circ i$は$e\circ j$と書ける。$\mathbb{R}$のコンパクト部分群は$\{1\}$しかないので、$j(H)=\{1\}$ したがって$p(H)=\{1\}$が示された。■

以上のように、Morse関数を使っていろいろな多様体をハンドル分解できる。その際、臨界点の個数と指数は比較的容易に求められるが、ハンドルの接着写像を求めることは一般には難しい。

§3.3 ハンドルを滑らせる。

$M$を$m$次元の閉じた多様体とし、$f: M\to\mathbb{R}$を与えられたMorse関数とする。あらかじめ定理2.34により$f$を変形しておき、異なる臨界点は異なる臨界値をもつようにしておく。臨界点の個数は全部で$n+1$個あるとしよう。それらを臨界値の小さいほうから順に並べたものが、

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_n$$

であるとする。そして$f$に適合する上向きベクトル場$X$を1つ選び、固定しておく。

定理3.4により、$M$はハンドル体

$$(3.77)\quad M = D^m \cup_{\varphi_1} D^{\lambda_1}\times D^{m-\lambda_1}\cup_{\varphi_2}\cdots\cup_{\varphi_i} D^{\lambda_i}\times D^{m-\lambda_i}\cup_{\varphi_{i+1}}\cdots\cup_{\varphi_n} D^m$$

に分解される。ここに、$\lambda_i$は臨界点$p_i$の指数である。

さて、上のハンドル分解において、$i$番目のハンドル$D^{\lambda_i}\times D^{m-\lambda_i}$に着目しよう。以下記号を簡単にするため、0番目から$j$番目までのハンドルを合わせて得られる「部分ハンドル体」$\mathcal{H}(D^m;\varphi_1,\cdots,\varphi_j)$を

$$N_j$$

という記号で表すことにする。$i$番目のハンドルは接着写像

$$(3.78)\quad \varphi_i: \partial D^{\lambda_i}\times D^{m-\lambda_i}\to\partial N_{i-1}$$