No.

Date

2.3 $f: M \to \mathbb{R}$ と $g: N \to \mathbb{R}$ を閉じた多様体上の Mōrse 関数とする. 十分大きな正数 A, B をとり,

$$F = (A+f)(B+g)$$

とおけば, $F: M \times N \to \mathbb{R}$ は直積 $M \times N$ 上の Mōrse 関数であることを証明せよ. また, その臨界点の位置と指数を求めよ. (f と g の臨界点と指数の言葉で)

[証明] (p, q) を直積 $M \times N$ の任意の点とし, $(x_1, \cdots, x_m)$ と $(y_1, \cdots, y_n)$ をそれぞれ p と q のまわりの M と N の局所座標系とすると, 直積 $M \times N$ のなかの, (p, q) のまわり局所座標系として $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$ がとれる.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(B+g), \quad \frac{\partial F}{\partial y_j} = (A+f)\left(\frac{\partial g}{\partial y_j}\right)$$

であるから, A と B をそれぞれ M と N の上で $A > |f|$ と $B > |g|$ が成り立つように十分に大きくとっておくと,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p, q) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(p, q) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$$

と

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial g}{\partial y_j}(q) = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

が同値になる. したがって, F の臨界点は (p_0, q_0) に限る. ここに, p_0 と q_0 はそれぞれ f と g の臨界点である. このときの (p_0, q_0) の指数は p_0 の指数と q_0 の指数の和である. (p_0 と q_0 の近傍で f と g を標準形で表して計算せよ.)

2.4 m 次元トーラス T^m とは m 個の円周の直積である. : $T^m = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$. T^m の点各円周上の点の角度をならべて, $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ と表すことにして, 関数 $f: T^m \to \mathbb{R}$ を

$$f(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = (R + \cos\theta_1)(R + \cos\theta_2) \cdots (R + \cos\theta_m)$$

と定義する. ただし, $R > 1$ である。このとき, 関数 f は Mōrse 関数であることを証明し, 臨界点とその指数を求めよ.

[証明] $\dfrac{\partial f}{\partial \theta_i} = 0$ と $\theta_i = 0, \pi$ は同値である (2π の整数倍の違いは無視する)

したがって 臨界点は $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)$ (ただし, $\varepsilon_i = 0, \pi$). これらの臨界点が非退化であることの証明は省略. $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$ の指数は $\varepsilon_i = 0$ であるような ε_i の個数に等しい.