

定理 1.18 (最大値の定理) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ をコンパクト空間 X 上の連続関数とすると, f は X のどこかの点 p_0 で最大値をとる. また, X のどこかの点 q_0 で最小値をとる. \square

最大値の定理の証明はよく知られているので省略する.

最大値の定理により, M 上の Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ は M のある点 p_0 で最大値をとる. また別の点 q_0 で最小値をとる. p_0 と q_0 は関数 f の臨界点である. しかも f は Morse 関数であるから, p_0 と q_0 も非退化な臨界点である.

Morse の補題 (定理 1.11) によれば, p_0 のまわりの局所座標系 (x, y) と q_0 のまわりの局所座標系 (X, Y) をそれぞれうまくとると, f は標準形で表される.

p_0 は f の最大値を与える点であるから, その指数は 2 でなくてはならない. また, q_0 は最小値を与えるから, その指数は 0 である. したがって, f は上の局所座標系によって次のように表される

$$(1.41) \quad f = \begin{cases} -x^2 - y^2 + A & (\text{点 } p_0 \text{ の近傍で}) \\ X^2 + Y^2 + a & (\text{点 } q_0 \text{ の近傍で}) \end{cases}$$

ここに, A と a はそれぞれ f の最大値と最小値である.

$\varepsilon > 0$ を十分小さい正数とすると, 点 p_0 の近傍で

$$(1.42) \quad A - \varepsilon \leq f(p) \leq A$$

を満たす点 p からなる集合 $D(p_0)$ は, 図 1.10 では左の下向きのお椀の部分であるが, これを局所座標系 (x, y) で書けば, 式 (1.41) によって

$$(1.43) \quad x^2 + y^2 \leq \varepsilon$$

となる.

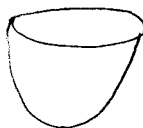


図 1.10 左: p_0 の近傍の f のグラフ 右: q_0 の近傍の f のグラフ

となる. したがって, この下向きのお椀 $D(p_0)$ は式 (1.43) で定義される 2次元の円板 (disk) に微分同相である. 同様に, 点 q_0 の近傍で

$$(1.44) \quad a \leq f(p) \leq a + \varepsilon$$

を満たす点 p からなる集合 $D(q_0)$ は, 図 1.10 の右の上向きのお椀であるが, それは局所座標系 (X, Y) で