ここに p は $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ の任意の点である。

したがって f と Y によって決まるハンドル分解においては、i 番目のハンドルは $N_{i-1} = M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ に、接着写像

(3.90) $\Psi^{-1}\circ\varphi = h\circ\varphi_i$

で張り付く。$i-1$ 番目以下のハンドル体の上では X と Y は同じであるので、$i-1$ 番目以下のハンドル体の構造は不変である。またどの番号 j についても $N_j = M_{c_j+\varepsilon}$ の微分同相類が変わらないことは、$M_{c_j+\varepsilon}$ の定義 ($M_{c_j+\varepsilon} = \{p \in M \mid f(p) \leqq c_j+\varepsilon\}$) が上向きベクトル場に無関係であることから明らかである。これで定理3.21(ハンドルを滑らせる)が証明された。■

定理3.21の応用として、次の定理を示そう。

定理3.22 (臨界点の整列) M を m 次元の閉じた多様体、$f: M \to \mathbb{R}$ をその上のMorse関数とする。このとき f を変形して、変形後の f が次の条件(*)を満たすことができる。

(*) f の任意の臨界点 p_i と p_j について、$f(p_i) < f(p_j)$ ならば $\mathrm{index}(p_i) \leqq \mathrm{index}(p_j)$ である。ここに index は臨界点の指数を表す。□

臨界値が大きくなっていくに従って、指数の方もしだいに(広義単調増加の意味)大きくなるようにすることができるというのである。

この定理は関数の変形について述べているが、証明は与えられた $f: M \to \mathbb{R}$ に伴うハンドル分解を利用するもので、幾何的である。