No.

Date

例2.9 $M_1 = N_1 = \mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$ を上半平面とし，$M_2 = N_2 = \mathbb{R}^2_- = \{(x, y) \mid y \leq 0\}$ を下半平面とする．φ も ψ も恒等写像にとっておく．すると，$W = V = \mathbb{R}^2$ である．

$$(2.16) \quad \begin{cases} h_1(x, y) = (x+y, y) & (y \geq 0 \text{ のとき}) \\ h_2(x, y) = (x, y) & (y \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義しよう．$h_1 : M_1 \to N_1$ も $h_2 : M_2 \to N_2$ も微分同相写像であるが，これらをそのまま張り合わせたのでは微分同相写像：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は得られない．そこで，h_1 を次のような $\tilde{h}_1$ に修正する：

$$(2.17) \quad \tilde{h}_1(x, y) = (x + \rho(y)y, y).$$

ただし，（$\varepsilon > 0$ を十分小さい整数として）$\rho(y)$ は，$0 \leq \rho(y) \leq 1$ であり，かつ $\rho(y) = 0$ （$y \leq \varepsilon$ のとき），$\rho(y) = 1$ （$y \geq 2\varepsilon$ のとき，）を満たす C^∞ 級関数である．

このように修正しておけば，上半平面で $\tilde{h}_1$，下半平面で h_2 と定義した $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は微分同相写像になる．定理2.8ではこのような H のことを簡単に $H = h_1 \cup h_2$ と書いたのである．

§2.2 Morse 関数

(a) m 次元多様体上の Morse 関数

境界のないコンパクトな多様体のことを閉じた多様体（closed manifold）または閉多用体という．M を m 次元の閉じた多様体，$f : M \to \mathbb{R}$ をその上の滑らかな関数とする．

定義2.10（f の臨界点）M の点 p_0 が $f : M \to \mathbb{R}$ の臨界点であるとは，p_0 のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ について，

$$(2.18) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = 0, \ \cdots, \ \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0$$

が成り立つことである． □

なお，この定義は局所座標系の選び方によらない．$(x_1, \cdots, x_m)$ について，条件 (2.18) が成り立てば，p_0 のまわりの別の局所座標系 $(y_1, \cdots, y_m)$ についても同じ条件が成り立つ（演習問題2.1）

実数 c が，$f : M \to \mathbb{R}$ の何らかの臨界点 p_0 での値 $c = f(p_0)$ になっているとき，c を f の臨界値という．