No.

Date

［証明］ X を Morse 関数 f に適合した上向きベクトル場とする。臨界点でないところでは $X\cdot f>0$ が成り立つから，M から臨界点を除いた開集合上で新しいベクトル場 Y を

$$Y=\frac{1}{X\cdot f}X$$

と定義しよう．仮定により，$M[a,b]$ には f の臨界点がないから，その上にはいま定義したベクトル場 Y が載っている．$f^{-1}(a)$ の点 p から出発する Y の積分曲線 $c_p(t)$ を考える．速度ベクトルの定義により，

$$\frac{d}{dt}f(c_p(t))=\frac{dc}{dt}(t)\cdot f=Y_{c(t)}\cdot f=\frac{1}{X\cdot f}X\cdot f=1.$$

したがって，この積分曲線 $c_p(t)$ は f の「高さ」でみると一定の速さ 1 で上昇を続ける．$t=0$ のとき $f=a$ のレベルから出発したから，$t=b-a$ のときレベル $f=b$ に達する．写像 $h: f^{-1}(a)\times[0,b-a]\to M[a,b]$ を

$$h(p,t)=c_p(t)$$

と定義する．$c_p(t)$ が p にも t にも C^∞ 級に依存すること，および積分曲線の一意性（2本の積分曲線は交わらない）を使うと，h が微分同相であることが示せる。これで，$M[a,b]\cong f^{-1}(a)\times[0,b-a]$ が証明されたが，$f^{-1}(a)\times[0,b-a]\cong f^{-1}(a)\times[0,1]$ は明らかだから，定理が証明できたことになる． ■

$f: M\to\mathbb{R}$ が必ずしも Morse 関数でなくとも，定理 2.30 や定理 2.31 の証明の手法が使える場合がある。次の両側カラー近傍の存在定理がそれである．

$f: M\to\mathbb{R}$ を（必ずしも Morse 関数でない）C^∞ 級関数とし，0 は f の臨界値でないとする．陰関数定理 2.3 により $f^{-1}(0)$ は M の部分多様体であるが，これを K とおく．M が m 次元なら K は $m-1$ 次元である．

このとき次の定理が成り立つ

定理 2.32（両側カラー近傍の存在） K がコンパクトであることを仮定する．すると，十分小さい正数 $\varepsilon>0$ に対して，次の性質 (i) (ii) をもつような K の開近傍 $U(\subset M)$ と微分同相写像 $h: K\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ が存在する．

(i) $h(K,0)=K$ （つまり，本来の K は $K\times 0$ に対応する．）

(ii) $f(h(K,t))=t$，$-\varepsilon<t<\varepsilon$ （つまり，$f=t$ の「等高面」は $K\times t$ に対応する）．

U のように，積構造 $K\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ をもつ K の開近傍を K の両側カラー近傍（bicollar neighborhood）という．