No.

Date

の意味の直線」の全体の集合を考え，それに複素 m 次元多様体の構造を入れたものが，m 次元複素射影空間 (complex projective space) である。記号で $\mathbb{C}P_m$ と表す。ここで m を下に書いたのは，$\mathbb{C}P_m$ の複素次元が m であることを表すためで，通常の意味では $\mathbb{C}P_m$ は $2m$ 次元である。この多様体もコンパクトであることが知られている。例 3.8 の P^m を $\mathbb{C}P_m$ と区別して，実射影空間 (real projective space) と呼ぶことがある。

$\mathbb{C}^{m+1}$ の原点以外の点 $(z_1, \cdots, z_m, z_{m+1})$ は $\mathbb{C}P_m$ の1点を決める。この点を $[z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}]$ と表す。$[z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}] = [w_1, \cdots, w_m, w_{m+1}]$ であるための必要十分条件は，ある0でない複素数 α が存在して，

$$(3.37) \qquad (z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}) = (\alpha w_1, \cdots, \alpha w_m, \alpha w_{m+1})$$

が成り立つことである。

$a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1}$ を実数として，関数 $f: \mathbb{C}P_m \to \mathbb{R}$ を

$$(3.38) \qquad f(z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}) = \frac{a_1|z_1|^2 + \cdots + a_m|z_m|^2 + a_{m+1}|z_{m+1}|^2}{|z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 + |z_{m+1}|^2}$$

と定義する。

実射影空間の場合と同様に，ある添え字 i を止めた上で，$z_i \neq 0$ であるような $[z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}]$ の全体からなる集合 U_i を考えると，U_i は $\mathbb{C}P_m$ の開集合になる。この上には

$$(3.39) \qquad Z_1 = \frac{z_1}{z_i}, \cdots, Z_{i-1} = \frac{z_{i-1}}{z_i}, Z_i = \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, Z_m = \frac{z_{m+1}}{z_i}$$

のように定義される m 次元の複素局所座標系がある。$(Z_1, \cdots, Z_m)$ を使って f を表してみると，

$$(3.40) \qquad f = \frac{a_1|Z_1|^2 + \cdots + a_{i-1}|Z_{i-1}|^2 + a_i + a_{i+1}|Z_i|^2 + \cdots + a_{m+1}|Z_m|^2}{|Z_1|^2 + \cdots + |Z_{i-1}|^2 + 1 + |Z_i|^2 + \cdots + |Z_m|^2}$$

となる。ここで，$Z_j = X_j + \sqrt{-1}\,Y_j \ (j = 1, \cdots, m)$ とおけば，

$$(3.41) \qquad |Z_j|^2 = X_j^2 + Y_j^2$$

である。

f を $(X_1, Y_1, \cdots, X_m, Y_m)$ に関する $2m$ 変数関数とみなし，P^m の場合と同様に議論すれば，U_i 上では f の臨界点は原点 $(0, \cdots, 0)$ だけで，それは非退化であり，その指数が $2(i-1)$ であることがわかる。(臨界値は a_i)。

$\mathbb{C}P_m$ は $m+1$ 個の複素座標近傍 $U_i \ (i = 1, \cdots, m, m+1)$ で覆えるので，次のことが