種数(genus)というのは閉曲面の「穴」のことで、トーラスの種数は1、球面の種数は0である。任意の自然数gについて、種数gの閉曲面が考えられる。

球面を記号でS^2と表す。肩の数字2は球面の次元である。トーラスはT^2、また、種数gの閉曲面はΣ_gと表されることが多い。Σ_0、Σ_1はそれぞれ、球面S^2、トーラスT^2のことに他ならない。

Mをひとつの曲面とする。Mの各点pに実数$f(p)$を対応させる写像

$$f: M \to \mathbb{R}$$

のことを、M上の関数という。($\mathbb{R}$は実数全体の集合)

さて、曲面は曲がっているので、曲面上の局所座標系も一般には曲っている。(図1.7参照)

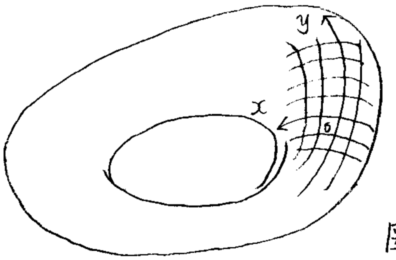

図1.7 曲面上の局所座標系

曲面M上の関数$f: M \to \mathbb{R}$がC^∞級であるというのは、その曲面上のどの滑らかな局所座標系についても、fがその座標系に関してC^∞級であることである。

以下、考える曲面はすべて滑らか(C^∞級)であるとし、考える関数もすべてC^∞級であるとする。

曲面上の関数$M \to \mathbb{R}$の「臨界点」の概念も局所座標系を使って前節と同様に定義される。すなわち、曲面Mの点p_0が関数$f: M \to \mathbb{R}$の臨界点であるとは、p_0の近傍の局所座標系(x, y)について、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0 \tag{1.39}$$

が成り立つことである。

はじめの節で説明したように、非退化な臨界点は安定な存在であり、退化した臨界点に比べて都合のよい性質をもっている。したがって、関数の中でも、非退化な臨界点しかもたないような関数は、扱いやすい関数のはずである。このような考えに基づいて、次のように定義する。