$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \quad ここに \quad z_1 = x_1 + \sqrt{-1}\,y_1 \quad z_2 = x_2 + \sqrt{-1}\,y_2$$

と書ける。ただし $|z_1|^2 + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$ である。このことからも，$SU(2) \cong S^3$ がわかる。)

この特殊ユニタリ行列に，随伴表現で対応する3次の回転行列は，

$$\begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2 & 2(-x_1y_2+y_1x_2) & 2(x_1x_2+y_1y_2) \\ 2(x_1y_2+y_1x_2) & x_1^2-y_1^2+x_2^2-y_2^2 & 2(-x_1y_1+x_2y_2) \\ 2(-x_1x_2+y_1y_2) & 2(x_1y_1+x_2y_2) & x_1^2-y_1^2-x_2^2+y_2^2 \end{pmatrix}$$

である。

例3.13 (ユニタリ群 $U(m)$) 複素 $m \times m$ 行列 $U(z_{ij})$ について，$U^* = (\bar{z}_{ji})$ とおく。すなわち，U の各要素の複素共役をとり，同時に転置行列にしたものである。

$$(3.60) \qquad UU^* = E$$

を満たす複素 $m \times m$ を m 次のユニタリ行列 (unitary matrix) という。この定義から，ユニタリ行列 U の行列式は，絶対値1の複素数である。: $|\det U| = 1$. m 次のユニタリ行列の全体 $U(m)$ は行列の積について，Lie群をなす。$U(m)$ を m 次のユニタリ群 (unitary group) という。

行ベクトルの間の Hermite 内積を

$$(3.61) \qquad a_i \cdot \bar{a}_j = z_{i1}\bar{z}_{j1} + z_{i2}\bar{z}_{j2} + \cdots + z_{im}\bar{z}_{jm}$$

と定義すれば，ユニタリ行列の条件は，$a_i \cdot \bar{a}_i = 1$ $(i = 1, \cdots, m)$，$a_i \cdot \bar{a}_j = 0$ $(i \neq j)$ と書き表すことができる。

第1行 a_1 としては $\mathbb{C}^m$ のなかの長さ1のベクトルを任意に選べる。$\mathbb{C}^m$ は，実数の意味では $2m$ 次元であるから，そのなかの単位球面の次元は $2m-1$ であり，a_1 の選択の自由度は，$2m-1$ 次元である。a_1 を決めると，a_2 は a_1 に Hermite 内積の意味で直交する複素 $(m-1)$ 次元空間の長さ1のベクトル
が任意に選べ，この分が $2(m-1)-1$ 次元だけある。以下同様にすすむと，
$U(m)$ の多様体としての次元は，

$$(3.62) \qquad \{2m-1\} + \{2(m-1)-1\} + \cdots + 3 + 1 = m^2$$