定理1.18（最大値の定理） $f: X \to \mathbb{R}$ をコンパクト空間 X の上の連続関数とすると，f は X のどこかの点 p_0 で最大値をとり，また，X のどこかの点 q_0 で最小値をとる。 □

最大値の定理の証明はよく知られているので省略する。

最大値の定理により，M 上の Morse 関数 $f: M \to \mathbb{R}$ は M のある点 p_0 で最大値をとり，また別のある点 q_0 で最小値をとる．p_0 と q_0 は関数 f の臨界点である。しかも f は Morse 関数であるから，p_0 も q_0 も非退化な臨界点である．

Morseの補題（定理1.11）によれば，p_0 のまわりの局所座標系 (x, y) と q_0 のまわりの局所座標系 (X, Y) をそれぞれうまくとると，f は標準形で表される．

p_0 は f の最大値を与える点であるから，その指数は 2 でなくてはならない．また，q_0 は最小値を与えるから，その指数は 0 である。したがって，f は上の局所座標系によって次のように表される

$$(1.41) \quad f = \begin{cases} -x^2 - y^2 + A & \text{（点 } p_0 \text{ の近傍で）} \\ X^2 + Y^2 + a & \text{（点 } q_0 \text{ の近傍で）} \end{cases}$$

ここに，A と a はそれぞれ f の最大値と最小値である．

$\varepsilon > 0$ を十分小さい正数とすると，点 p_0 の近傍で

$$(1.42) \qquad A - \varepsilon \leq f(p) \leq A$$

を満たす点 p からなる集合 $D(p_0)$ は，図1.10では左の下向きのお椀の部分であるが，これを局所座標系 (x, y) で書けば，式(1.41)によって

$$(1.43) \qquad x^2 + y^2 \leq \varepsilon$$

となる。

図1.10　左：p_0 の近傍の f のグラフ　　右：q_0 の近傍の f のグラフ

となる。したがって，この下向きのお椀 $D(p_0)$ は式(1.43)で定義される2次元の円板（disk）に微分同相である．同様に，点 q_0 の近傍で

$$(1.44) \qquad a \leq f(p) \leq a + \varepsilon$$

を満たす点 p からなる集合 $D(q_0)$ は，図1.10の右の上向きのお椀であるが，それは局所座標系 (X, Y) で