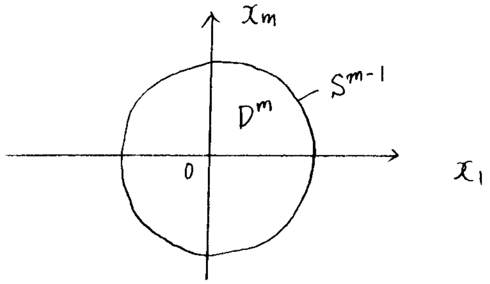

図2.1 m次元円板 D^m と $m-1$次元球面 S^{m-1}

$m=3$の場合，3次元円板 D^3 とは，通常の言葉では，中身のつまったボール（球体）のことで
その境界 ∂D^3 とは表面の2次元球面 S^2 のことである．

□

m次元円板 D^m はコンパクトだが，次の例2.2はコンパクトでない．

例2.2 （m次元上半空間）

$$\mathbb{R}^m_+ = \{ (x_1, \cdots, x_m) \mid x_m \geqq 0 \} \tag{2.7}$$

を m次元上半空間（*m-dimensional upper-half space*）と呼ぶ．
$\mathbb{R}^m_+$ の境界は $x_m=0$ のところで，$\mathbb{R}^{m-1} = \{ (x_1, \cdots, x_{m-1}) \}$ と同一視される．

$$\partial \mathbb{R}^m_+ = \mathbb{R}^{m-1}. \tag{2.8}$$

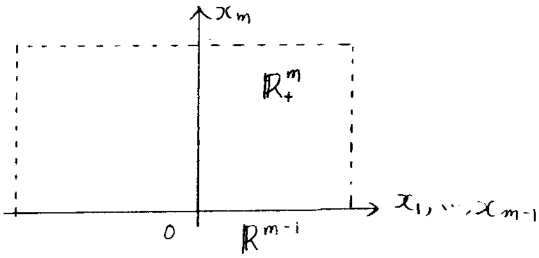

図2.2 m次元上半空間

□

Mを境界のない m次元多様体とし，$f: M \to \mathbb{R}$ をその上の滑らかな関数とする．そして 0 は fの臨界値ではないと仮定する．このとき，Mの部分集合 $M_{f \geqq 0}$ を

$$M_{f \geqq 0} = \{ p \in M \mid f(p) \geqq 0 \} \tag{2.9}$$

と定義すれば，$M_{f \geqq 0}$ は境界のある m次元多様体になる．その境界 $\partial M_{f \geqq 0}$ は

$$M_{f=0} = \{ p \in M \mid f(p) = 0 \} \tag{2.10}$$

で与えられる．

実際，円板 D^m の場合も半空間 $\mathbb{R}^m_+$ の場合も，Mとして $\mathbb{R}^m$ をとれば，よく，
$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ としては

$$f = \begin{cases} 1 - (x_1^2 + \cdots + x_m^2) & (D^m \text{ の場合}) \\ x_m & (\mathbb{R}^m_+ \text{ の場合}) \end{cases} \tag{2.11}$$