No.

Date

で定義される行列である。すなわち，B_θは$\mathbb{R}^m$の1番目と2番目の座標軸で張られる平面のなかの角度θの回転である．

式(3.46)で与える一般の回転行列Aといま定義したB_θの積AB_θは，$SO(m)$のなかのθをパラメータとする曲線になる．しかもこの曲線は，$\theta=0$のときAを通過する。実際に行列の積を計算し，関数fの定義式(3.45)に代入すると，

$$(3.49)\quad f(AB_\theta) = c_1(x_{11}\cos\theta + x_{12}\sin\theta) + c_2(-x_{21}\sin\theta + x_{22}\cos\theta) + c_3 x_{33} + \cdots + c_m x_{mm}.$$

これをθで微分して，$\theta=0$とおくと，(すなわち「点」Aにおいて，関数fを曲線AB_θの速度ベクトル $\frac{d}{d\theta}AB_\theta\Big|_{\theta=0}$ の方向に微分すると，)

$$(3.50)\quad \frac{d}{d\theta}f(AB_\theta)\Big|_{\theta=0} = c_1 x_{12} - c_2 x_{21}$$

を得る。同様の曲線$B_\theta A$についても，微分を計算してみると，

$$(3.51)\quad \frac{d}{d\theta}f(B_\theta A)\Big|_{\theta=0} = -c_1 x_{21} + c_2 x_{12}$$

を得る．さて，もし点Aが関数$f: SO(m)\to\mathbb{R}$の臨界点だとすると，Aにおける微分の結果(3.50)と(3.51)は両方とも0でなくてはならない。ところが$1<c_1<c_2$と仮定してあるから，両式の右辺が0になるとしたら，

$$(3.52)\quad x_{12} = x_{21} = 0$$

でなければならない。

以上は，$\mathbb{R}^m$の1番目の軸と2番目の軸で張られる平面の中の回転行列B_θを使って得られる結論であるが，i番目の軸とk番目の軸$(1\leqq i<k\leqq m)$で張られる平面のなかの回転行列を使って議論すれば，Aが臨界点である限り，

$$(3.53)\quad x_{ik} = x_{ki} = 0 \qquad 1\leqq \forall i < \forall k \leqq m$$

でなければならない．すなわち，Aは対角行列(対角線上にだけ0でない成分がある行列)である。しかもAは回転行列だから，Aは補題3.12の主張する形でなければならない。

逆に，補題3.12の主張する形の対角行列が実際に，$f: SO(m)\to\mathbb{R}$の臨界点であることを示すため，すべての$m\times m$行列のなす空間をm^2次元のEuclid空間$\mathbb{R}^{m^2}$とみなして，$SO(m)$は，その中に埋め込まれていると考えよう。Aを補題の主張する形の行列，すなわち，対角線上に，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ ($\varepsilon_j = \pm1$)が並び，他の行列要素が0であるような行列とする．そして，$\theta=0$のときの(点Aにおける)曲線