No.

Date

定理3.2の正確な意味は、$M_{c_i+\varepsilon}$は、$M_{c_i-\varepsilon}$にλ-ハンドルをつけ、そのあと平滑化して得られる境界のある多様体M'に微分同相である、という意味である。

図3.3では、$M_{c_i+\varepsilon}$は

$$(3.15)\quad x_1^2+\cdots+x_\lambda^2-x_{\lambda+1}^2-\cdots-x_m^2 \leq -\varepsilon$$

で表される部分になっている。定理3.2の証明も、ほぼ定理3.1と同様である。

そのアイデアを述べると、ここでもfに適合した上向きベクトル場Xを利用する。図3.3で示されているように、ベクトル場XはM'の境界$\partial M'$を出たあと上昇を続け、やがて$M_{c_i+\varepsilon}$の境界$\partial M_{c_i+\varepsilon}$に達する。ベクトル場に適当な関数を掛けて到達時間を調整し、調整したベクトル場に沿って流してやれば、M'は一定時間後に$M_{c_i+\varepsilon}$にピッタリ重なる。したがって、M'と$M_{c_i+\varepsilon}$は微分同相であるというわけである。これが定理3.2の証明のアイデアである。

以後$M_{c_i-\varepsilon}\cup D^\lambda\times D^{m-\lambda}$の境界の折れ曲がりはあまり気にせず、これをすでに平滑化を施した多様体M'であるかのように考えて、議論を進めることにする。

fの標準形(3.8)を参照しながら、λ-ハンドルの心棒D^λの上でfの関数値の変化を追ってみると、中心で臨界値c_iをとり、円板の境界に近づくにつれ減っていく。境界では$c_i-\varepsilon$という値をとる。したがって心棒D^λは「下向き」のλ次元円板である。また太さを表す円板$D^{m-\lambda}$上では中心で臨界値c_iをとり、円板の境界が近づくにつれて増えていって境界では、$c_i+\delta$という値をとる。したがって、この円板は「上向き」である。∴心棒は下向き、太さの方向は上向きである。

0-ハンドルの場合は0次元で、m次元全部が太さの方向である。したがって0-ハンドルに下に下がる方向はなく、すべての方向が「上向き」である。また、m-ハンドルの場合は、m次元全部が心棒であり、太さを表す円板は0次元というわけである。したがってm-ハンドルはすべて「下向き」である。

λ-ハンドル$D^\lambda\times D^{m-\lambda}$は、$M_{c_i-\varepsilon}$の境界$\partial M_{c_i-\varepsilon}$のところで$M_{c_i-\varepsilon}$に接着しているが、その接着しているハンドルの部分は$\partial D^\lambda\times D^{m-\lambda}$という部分である。(図3.2参照)。
ハンドルの接着を正確に表現するには、$\partial D^\lambda\times D^{m-\lambda}$の個々の点を境界$\partial M_{c_i-\varepsilon}$のどの点に接着するかを記述する写像

$$(3.16)\quad \varphi: \partial D^\lambda\times D^{m-\lambda}\to\partial M_{c_i-\varepsilon}$$

を指定しなければならない。接着に際して個々の点$P\in\partial D^\lambda\times D^{m-\lambda}$を点$\varphi(P)\in\partial M_{c_i-\varepsilon}$