No.

Date

(c) Morse関数の存在

ここでひとつ新しいことを示そう. Morse関数の存在定理がそれである.

定理(2.20)(Morse関数の存在) Mを閉じたm次元多様体とし, $g: M \to \mathbb{R}$をM上の任意のC^∞級の関数とすると, $g: M \to \mathbb{R}$にいくらでも近いMorse関数$f: M \to \mathbb{R}$が存在する.

M上のC^∞級関数はいくらでも存在するから, この定理によって, Morse関数のほうもいくらでも存在することがわかる. (例えば, Mのすべての点に, ある定数c_0を対応させる定数関数も, M上のC^∞級関数には違いないから, そのそばに, Morse関数$f: M \to \mathbb{R}$が存在する. もちろん, Morse関数fのほうは定数関数ではない.).

存在定理のなかの「gにいくらでも近い」という部分は, より正確には「C^2の意味でgにいくらでも近い」ということなのだが, この意味は, 証明の中ではっきりする.

存在定理の証明のため, 2つの補題を準備する.

補題 2.21 $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \cdots, x_m)\}$を$m$次元Euclid空間とし$U$を$\mathbb{R}^m$の中の勝手な開集合 そして$f: U \to \mathbb{R}$を$U$上の任意の$C^\infty$級関数とする. そのとき$m$個の実数$a_1, a_2, \cdots, a_m$をうまく選んで,

$$(2.38) \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m)$$

がU上のMorse関数になるようにすることができる. しかも, このような実数$a_1, a_2, \cdots, a_m$として, 絶対値がいくらでも小さなものが選べる. □

この補題の直観的な「証明」は次のようなものである.

関数(2.38)の臨界点がすべて非退化であることを示せばよい. 関数(2.38)の臨界点$p_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$はどこに生じるかというと, 点$p_0$上の, 関数

$$y = f(x_1, \cdots, x_m)$$

のグラフの「接平面」の傾きがちょうど1次関数

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$$

の傾きと一致したとき, p_0はこの2つの差の関数(2.38)の臨界点になる. また, いつ退化した臨界点になるかというと, 点p_0上での, 関数$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$のグラフの接平面がグラフにぴったり(3次以上の接触で)接するときである. ところで, グラフにぴったり接するような接平面はそんなにたくさんはないだろうから, たいていの$a_1, a_2, \cdots, a_m$を選んでおけば, そういう接平面の傾きと一致しない