

とおくと, $D_\theta^{(i)}$ は特殊ユニタリ行列になる。行列 $B_\theta^{(i,k)}$, $C_\theta^{(i,k)}$, $D_\theta^{(i)}$ は全部で

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + (m-1) = m^2 - 1$$

だけ ($SU(m)$ の次元分だけ) ある。

行列 $B_\theta^{(i,k)}$ と $C_\theta^{(i,k)}$ を使って 補題 3.12 のときと同様に議論すれば, 関数 $f|_{SU(m):SU(m)} \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点は対角行列であることがわかる。さらにこの対角行列 A は特殊ユニタリ行列であるから, その対角成分 λ_i は絶対値 1 の複素数 $\exp(\sqrt{-1}\theta_i)$ であり, それらの積は 1 である。

$$(3.67) \quad \exp(\sqrt{-1}\theta_1) \exp(\sqrt{-1}\theta_2) \cdots \exp(\sqrt{-1}\theta_m)$$

$$= \exp(\sqrt{-1}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m)) = 1.$$

この行列 A が $f|_{SU(m)}$ の臨界点であるための条件がもう一つある。それは,

$$\left. \frac{d}{d\theta} f(A \cdot D_\theta^{(i)}) \right|_{\theta=0} = \Im(-c_i \sqrt{-1} \exp(\sqrt{-1}\theta_1) + c_i \sqrt{-1} \exp(\sqrt{-1}\theta_i))$$

$$= 0, \quad i=2, \dots, m$$

である。この条件は

$$(3.68) \quad c_1 \sin \theta_1 = c_i \sin \theta_i, \quad i=2, \dots, m$$

に同値である。 c_1 に較べて, c_i ($i=2, \dots, m$) が十分大きいという条件のもとに, 上の2つの条件 (3.67) と (3.68) をあわせると,

$$(3.69) \quad \sin \theta_1 = \sin \theta_2 = \cdots = \sin \theta_m = 0$$

が導ける。

このことを示そう。もし $\sin \theta_1 \neq 0$ であれば, 式 (3.68) により, $\sin \theta_i \neq 0$ であるが, c_1 に較べて c_i が十分大きい (例えば, $100m \ c_1 < c_i$ を仮定すると), $\sin \theta_i$ の絶対値は $\sin \theta_1$ の絶対値に比べて十分小さくなる。(例えば $|\sin \theta_i| < \frac{1}{100m} |\sin \theta_1|$

になる)。以下の議論には, \sin の絶対値しか必要がなく, また角度 θ_i に π の整数倍を加えても絶対値 $|\sin \theta_i|$ は変わらないので, π の整数倍で調整することにより,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$$

と仮定してよい。すると, $|\sin \theta_i| < \frac{1}{100m} |\sin \theta_1|$ から, 粗く見積もっても,

$$|\theta_i| < \frac{1}{100m} |\theta_1|, \quad i=2, \dots, m$$