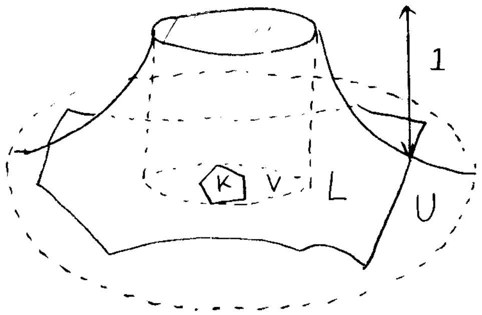

図2.7　(U, K)に適合した台形関数h. hはKの開近傍V上で1.
Vを含むコンパクト集合Lの外で0. ただし　$K \subset V \subset L \subset U$.

この補題2.27を、いま着目している座標近傍 U_ℓ とそのコンパクト集合 K_ℓ に適用すると、(U_ℓ, K_ℓ) に適合した台形関数 $h_\ell: U_\ell \to \mathbb{R}$ を得る.

新しい関数 f_ℓ を次のように構成しよう. (ただし U_ℓ 内のコンパクト集合 L_ℓ は、その外側で h_ℓ が恒等的に0になっているようなコンパクト集合である. このコンパクト集合 L_ℓ は、下の場合分けの2番目で登場している.)

$$f_\ell = \begin{cases} f_{\ell-1}(x_1,\cdots,x_m) - (a_1x_1+\cdots+a_mx_m)h_\ell(x_1,\cdots,x_m) & (U_\ell\text{の中で}) \\ f_{\ell-1}(x_1,\cdots,x_m) & (L_\ell\text{の外で}) \end{cases} \tag{2.57}$$

上の2つの定義域の共通部分(U_ℓの中, かつ, L_ℓの外; これはMの開集合)では, $h_\ell(x_1,\cdots,x_m)=0$ であるから, 2つの定義は一致して, f_ℓは全体としてつながって, M上のC^∞級関数になる.

コンパクト集合K_ℓのある開近傍では $h_\ell(x_1,\cdots,x_m)=1$ であったから, f_ℓは「差の関数」(2.56)に一致し, そこではMorse関数になっている. したがって, f_ℓはK_ℓ上に退化した臨界点がない.

次に, f_ℓが$f_{\ell-1}$の (C^∞, ε) 近似にとれるかみよう.
まず, 座標近傍 U_ℓ 上で計算して,

(2.58)

$$|f_{\ell-1}(p) - f_\ell(p)| = |(a_1x_1+\cdots+a_mx_m)|\,h_\ell(p),$$

$$\left|\frac{\partial f_{\ell-1}}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}(p)\right| = \left|a_i h_\ell(p) + (a_1x_1+\cdots+a_mx_m)\frac{\partial h_\ell}{\partial x_i}(p)\right|, \quad i=1,\cdots,m$$

$$\left|\frac{\partial^2 f_{\ell-1}}{\partial x_i\partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_i\partial x_j}(p)\right| = \left|a_i\frac{\partial h_\ell}{\partial x_j}(p) + a_j\frac{\partial h_\ell}{\partial x_i}(p) + (a_1x_1+\cdots+a_mx_m)\frac{\partial^2 h_\ell}{\partial x_i\partial x_j}(p)\right|$$

$i, j = 1, 2, \cdots, m$