

$$\begin{aligned}
 (1.23) \quad f(x, y) &= \int_0^1 \frac{df(tx, ty)}{dt} dt \\
 &= \int_0^1 \left\{ x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \right\} dt \\
 &= x g(x, y) + y h(x, y)
 \end{aligned}$$

となる。ただし、この式のまんなかの等号のところは合成関数の微分の公式を使っている。ここに出てきた記号 $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)$ は少しまぎらわしいが、関数 $f(x, y)$ の導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を計算したあとに、点 (tx, ty) においてその値を求めたもの、という意味である $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)$

についても同様である。また最後の式では、

$$(1.24) \quad g(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) dt, \quad h(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) dt$$

とおいた。

これで、等式 (1.21) が示された。また、 $g(x, y)$ と $h(x, y)$ の定義式 (1.24) において、 $(x, y) = (0, 0)$ を代入してみれば、等式 (1.22) がわかる。

さて、我々の場合、原点 $p_0 = (0, 0)$ は関数 f の臨界点であると仮定してあるから、

$$(1.25) \quad g(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad h(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

が成り立つ。したがって、関数 $g(x, y)$ と $h(x, y)$ に再び上で証明した微分積分の基本事項を使うことができて、適当な関数 h_{11} と h_{12} を用いて、

$$(1.26) \quad g(x, y) = x h_{11}(x, y) + y h_{12}(x, y)$$

と書け、また別の適当な関数 h_{21} と h_{22} を用いて、

$$(1.27) \quad h(x, y) = x h_{21}(x, y) + y h_{22}(x, y)$$

と書ける。式 (1.21) と合わせると、

$$(1.28) \quad f(x, y) = x^2 h_{11} + xy(h_{12} + h_{21}) + y^2 h_{22}$$

を得る。見やすくするために、 $H_{11} = h_{11}$, $H_{12} = \frac{1}{2}(h_{12} + h_{21})$, $H_{22} = h_{22}$ とおくと

$$(1.29) \quad f(x, y) = x^2 H_{11} + 2xy H_{12} + y^2 H_{22}$$