No

Date

注意 このようにすることが可能であることは、次のように示せる。まず M のなかのありとあらゆる座標近傍 U と、そのなかに含まれるありとあらゆる m 次元円板 D の組 (U, D) を考える。M はこのような円板たちの内部 $\mathrm{int}(D)$（これは開集合）で被覆されることは明らかである。M のコンパクト性を仮定すれば、有限個の $\mathrm{int}(D_1)$, $\mathrm{int}(D_2)$, …, $\mathrm{int}(D_k)$ で M が被覆できる。そうすれば、もちろん $D_1, D_2, \cdots, D_k$ と組になっている座標近傍 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ で M は被覆されていて、同時に、$K_\ell = D_\ell$ とおけば、$U_1, U_2, \cdots, U_k$ に含まれるコンパクト集合 $K_1, K_2, \cdots, K_k$ によっても M は被覆される。

定義 2.25　$f: M \to \mathbb{R}$ が $g: M \to \mathbb{R}$ の (C^2, ε) 近似であるとは、$\ell = 1, 2, \cdots, k$ につき、K_ℓ の上で、f が g の (C^2, ε) 近似であることである　□

(C^2, ε) 近似を論ずるときは、有限個の座標近傍による M の被覆 $M = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$ が、固定されているものとする。

補題 2.26　C を m 次元多様体 M のなかのコンパクト集合とする。C のなかに関数 $g: M \to \mathbb{R}$ の退化した臨界点がなければ、$\varepsilon > 0$ を十分小さい正数として、g の (C^2, ε) 近似であるような関数 f についても同じことがいえる。すなわち、C のなかに、f の退化した臨界点がない

[証明] 座標近傍 U_ℓ で考える。U_ℓ の座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を強調するために、この座標系で計算した g の Hesse 行列を

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

と書くことにする。容易にわかるように、g の退化した臨界点が $C \cap K_\ell$ のなかに存在しないための必要十分条件は、

$$(2.54) \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial g}{\partial x_m}\right| + \left|\det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right| > 0$$

が $C \cap K_\ell$ 上で成り立つことである。

十分小さく $\varepsilon > 0$ を選んでおけば、g の (C^2, ε) 近似であるような関数 f についても、同様の不等式

$$(2.55) \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right| + \left|\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right| > 0$$

が $C \cap K_\ell$ 上で成り立つはずであるから、f も $C \cap K_\ell$ のなかに退化した臨界点をもたない。同じ議論を $\ell = 1, 2, \cdots, k$ について行えば、f は $C \left(= \bigcup_{\ell=1}^{k} C \cap K_\ell\right)$ のなかに退化した臨界点のないことがわかる。■