2次元のMorseの補題(定理1.11)の証明中で使った「微分積分の基本事項」のm次元版によって, $f(0,0,\cdots 0)=0$ の仮定のもとで, m個の(原点の近傍 で定義された) C^∞級関数

$$(2.24)\qquad g_1(x_1,\cdots,x_m),\ g_2(x_1,\cdots,x_m),\ \cdots,\ g_m(x_1,\cdots,x_m)$$

があって 原点の近傍で

$$(2.25)\qquad f(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x_1,\cdots,x_m)$$

が成り立ち, かつ

$$(2.26)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\cdots,0)=g_i(0,\cdots,0)$$

であることがわかる.

点 $P_0=(0,\cdots,0)$ は fの臨界点なので, 式(2.26)の両辺は実は 0 である. したがって, $g_i(x_1,\cdots,x_m)$ にまた「微分積分の基本事項」が使えて. m個の(原点の近傍で定義された) C^∞級関数

$$(2.27)\quad h_{i1}(x_1,\cdots,x_m),\quad \cdots,\quad h_{im}(x_1,\cdots,x_m)$$

が存在し. 原点の近傍で

$$(2.28)\quad g_i(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{j=1}^{m} x_j h_{ij}(x_1,\cdots,x_m)$$

が成り立つ。ここで, $H_{ij}=(h_{ij}+h_{ji})/2$ とおくと,

$$(2.30)\qquad f(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{i,j=1}^{m} x_i x_j H_{ij}(x_1,\cdots,x_m)$$

であり, かつ.

$$(2.31)\qquad H_{ij}(x_1,\cdots,x_m)=H_{ji}(x_1,\cdots,x_m).$$

条件(2.31)のもとので, 式(2.30)ような, $f(x_1,\cdots,x_m)$ の表示を, fの「2次形式表示」と呼ぶことにしよう. 証明すべきfの標準形 (2.23)も 特別な形の2次形式表示である.

以下の証明のアイデアは, fの2次形式表示に含まれる項の数に関する数学的帰納法により, fの表示(2.30)を Morseの標準形のかたちの2次形式表示に直していくことである.

さて. 式(2.30)の 両辺の2次の微分係数を原点で計算すると,

$$(2.32)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\cdots,0)=2H_{ij}(0,\cdots,0).$$

2次元のMorseの補題(定理1.11)の証明のときにやったように, 臨界点 P_0が 非退化であるという仮定 ($\det H_{ij}(0,\cdots,0)\neq 0$)を使うと あらかじめ 局所座標系 $(x_1,\cdots,x_m)$ に適当な線形変換をほどこしておいて