No.

Date

は Morse 関数である。これで補題3.15が証明できた。 ■

補題3.15により，$f: U(m) \to \mathbb{R}$ の臨界点のちょうど半分が，$f|SU(m): SU(m) \to \mathbb{R}$ の臨界点であることがわかる。すなわち対角線上に $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ （$\varepsilon_i = \pm 1$）が並び，かつ $\det A = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m = 1$ であるような対角行列 A が $f|SU(m): SU(m) \to \mathbb{R}$ の臨界点である。

補題3.15の証明の最後のほうで述べた事実により，Hesse 行列 $Hf|SU(m)(A)$ を対角化したもの $\mathcal{H}f|SU(m)(A)$ は，$f: U(m) \to \mathbb{R}$ の Hesse 行列 $Hf(A)$（それはもともと対角型）から対角成分 $-c_1\varepsilon_1$ を除いてサイズを1だけ小さくしたものと本質的に同じである。したがって対角線上のマイナスの数の個数は $-c_1\varepsilon_1 > 0$ なら $\mathcal{H}f|SU(m)(A)$ と $Hf(A)$ に差はなく，$-c_1\varepsilon_1 < 0$ なら，これを対角成分に含まない分だけ $\mathcal{H}f|SU(m)(A)$ のほうが $Hf(A)$ よりも1つ少ない。

このことと，$U(m)$ のときの結果を合わせると，$SU(m)$ の場合の臨界点の指数が計算できる。すなわち，A の対角成分を順に見てゆき，$\varepsilon_i = 1$ であるような番号 i を小さい方から並べて，

$$i_1, i_2, \cdots, i_k$$

を得たとすると，Morse 関数 $f|SU(m)$ の臨界点 A の指数は次のように与えられる。

$\varepsilon_1 = -1$ のときは，

$$\{2i_1 - 1\} + \{2i_2 - 1\} + \cdots + \{2i_k - 1\}, \tag{3.72}$$

$\varepsilon_1 = 1$ のときは，

$$\{2i_1 - 1\} + \{2i_2 - 1\} + \cdots + \{2i_k - 1\} - 1. \tag{3.73}$$

注意 $\varepsilon_1 = 1$ なら $i_1 = 1$ であるから，式(3.73)は，

$$\{2i_2 - 1\} + \cdots + \{2i_k - 1\} \tag{3.74}$$

に等しい。

系3.16 $SU(2)$ は3次元球面 S^3 に微分同相である。

［証明］$SU(2)$ は3次元多様体である。補題3.15により，$f|SU(2)$ の臨界点は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

の2つだけであるから，定理3.6により，$SU(2) \cong S^3$ がわかる。 ■