No

Date

注意　SU(2)は単位4元数全体のなすLie群に同型であり，このことからも系3.16が証明できる．

系3.17　$SU(m)$は単連結である．(「単連結」の意味については§5.1を見よ．)

[証明]　補題3.15のMorse関数$f|SU(m)$の臨界点について，最小の指数はもちろん0であるが，2番目に小さい指数をもつ臨界点は，

mが奇数のときは，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

mが偶数のときは，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

である．これらの臨界点の指数はどちらも3であるから，$f|SU(m)$に伴う$SU(m)$のハンドル分解には1-ハンドルがない．(実は2-ハンドルもない．) 第5章の系5.9により，$SU(m)$は単連結である．■

2つの群　$U(m)$と$SU(m)$の関係について，次の命題を示そう．

命題3.18

(i)　C^∞級多様体としては，$U(m)$は直積$SU(m)\times S^1$に微分同相である．

(ii)　$m\geq 2$を仮定するとき，Lie群としての$U(m)$の構造は，群の直積$SU(m)\times S^1$に同型ではない．

[証明]　C^∞級写像$h: U(m)\to SU(m)\times S^1$を次のように構成する．任意の$m$次ユニタリ行列$U$について，

$$h(U)=(U\cdot\{A_\theta^{(1)}\}^{-1},\ \det U).$$

Uがユニタリ行列であれば，$\det U$は絶対値1の複素数$\exp(\sqrt{-1}\,\theta)$である。$A_\theta^{(1)}$のθはこの$\exp$のなかのθである．上のhの定義式では，絶対値1の複素数全体を円周S^1と同一視している．また$A_\theta^{(1)}$は，例3.13(ユニタリ群$U(m)$)のなかに