UがMの座標近傍で座標系$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$が付随している場合には，U上のベクトル場Xは

$$(2.74) \quad X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

と表される．$\xi_1, \cdots, \xi_m$はU上の関数である。式(2.74)の意味は，Xが，Uの各点pに，接ベクトル

$$\xi_1(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \xi_2(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + \cdots + \xi_m(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

を対応させるベクトル場であるという意味である．ここに出てきた関数$\xi_1, \cdots, \xi_m$がすべてC^∞級のとき，XはU上のC^∞級ベクトル場であるという．またM上のベクトル場がC^∞級であるとは，それらがすべての座標近傍上でC^∞級であることである．

例2.28　fを座標近傍U上の関数とする。Uに付随した座標系を$(x_1, \cdots, x_m)$として，U上のベクトル場Xを

$$(2.75) \quad X_f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}$$

と定義する．ベクトル場の係数の関数をξ_iとして，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$を選んだ場合である．ベクトル場$X_f$を関数$f$の勾配ベクトル場（gradient vector field）という．　□

ベクトル場は各点で「接ベクトル」という形の微分操作を与えているから，それ自身一種の微分作用素である。ここで定義した勾配ベクトル場X_fでfを微分してみよう．

$$(2.76) \quad X_f \cdot f = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot f$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \geqq 0.$$

得られた関数$X_f \cdot f$の値$(X_f \cdot f)(p)$は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) = 0$$

でない限り，（すなわち，pがfの臨界点でない限り）$X_f \cdot f > 0$である．言い換えれば，fの勾配ベクトル場は，fの臨界点以外の点においては，fの増加する方向を向いているということがわかる．

fがMorse型の標準形

$$(2.77) \quad f = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2$$

の場合の勾配ベクトル場が図2.12に示されている