部分多様体の定義2.4からただちに，Kには，$(x_1, \cdots, x_k)$によって局所座標系が入り，したがって，Kはそれ自身k次元多様体になることがわかる．

陰関数定理の証明の要点は，0がfの臨界値でなければ，$f^{-1}(0)$の任意の点pのまわりに，f自身を第m座標とするようなMの局所座標系

$$(2.13) \qquad (x_1, \cdots, x_m), \text{ ここに } x_m = f$$

が構成できる，ということを示すことである．それが示せれば$f^{-1}(0)$は点pの近傍で，$x_m \; (=f) = 0$ という式で記述されるから，部分多様体の定義によって，$f^{-1}(0)$はMの$m-1$次元部分多様体であるというわけである．

$M_{f \geq 0}$の境界$M_{f=0}$の点pの近傍で，(2.13)の局所座標系$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$を構成して，$M_{f \geq 0}$と$M_{f=0}$を局所的に記述してみると，$M_{f \geq 0}$は$x_m \geqq 0$と書け，$M_{f=0}$は$x_m = 0$と書ける．こうして次の補題を得る．ただし，補題では，$M_{f \geq 0}$のことをあらためてMという記号で表している．

補題2.5（境界上の点のまわりの局所座標系） Mを境界のあるm次元多様体とし，pを境界∂M上の任意の点とする．そのとき，pのまわりには，次のような（上半空間型の）局所座標系が存在する．

$$(2.14) \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_m), \quad x_m \geqq 0.$$

ここで，Mは$x_m \geqq 0$に対応し，∂Mは$x_m = 0$に対応する． □

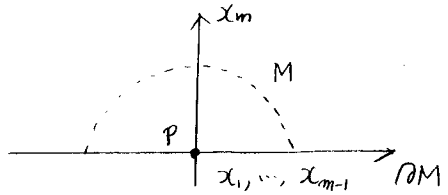

図2.4 上半空間型の局所座標系

以後，境界∂M上の点pのまわりの局所座標系といえば，必ずこのような上半空間型の局所座標系のことであるとする．

実は第3節で示すように，上の補題よりさらに強い主張が証明できる．すなわち，境界のある多様体Mの境界∂Mの近傍として，$\partial M \times [0,1)$という直積の構造をもつものが存在することがいえる．ここに$[0,1)$は右半開区間で，境界$\partial M \times \{0\}$に対応している．このような近傍を∂Mのカラー近傍という（第3節，系2.33参照）