となる。この式から簡単な計算で

$$(1.30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2H_{11}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 2H_{12}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2H_{22}(0,0) \end{cases}$$

を得るが，はじめに注意しておいたように，いまは1番目の式の左辺は0でないと仮定している。したがって，$H_{11}(0,0) \neq 0$. H_{11}は連続だから，

(1.31) $H_{11}(x,y)$は$(0,0)$の近傍で0でない。

ということがわかる。

そこで，原点，$(0,0)$の近傍で新しいx座標Xを

$$(1.32)\qquad X = \sqrt{|H_{11}|}\left(x + \frac{H_{12}}{H_{11}}y\right)$$

という式で導入する．y座標はそのままにしておく。(x,y)と(X,y)の間のJacobi行列を計算してみると，その行列式が原点$(0,0)$で0にならないことがわかるので，確かに(X,y)は原点$(0,0)$の近傍の局所座標系である。

$$\frac{\partial(X,y)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \sqrt{|H_{11}|} & \sqrt{|H_{11}|}\dfrac{H_{12}}{H_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det\left(\frac{\partial(X,y)}{\partial(x,y)}\right) = \sqrt{|H_{11}|}$$

Xの2乗を計算すれば，

$$(1.33)\qquad X^2 = |H_{11}|\left(x^2 + 2\frac{H_{12}}{H_{11}}xy + \frac{H_{12}^2}{H_{11}^2}y^2\right)$$

$$= \begin{cases} H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + \dfrac{H_{12}^2}{H_{11}}y^2 & (H_{11} > 0) \\ -H_{11}x^2 - 2H_{12}xy - \dfrac{H_{12}^2}{H_{11}}y^2 & (H_{11} < 0) \end{cases}$$