ここで微分を f のなかに入れてよいのは，$f(A)$ が A の要素の1次式になっていて，しかも定数項がないからである。また $\frac{d}{d\theta}B_\theta^{(ik)}\Big|_{\theta=0}$ などの計算はやさしい．

このHesse行列は $\frac{m(m-1)}{2}$ 行 $\frac{m(m-1)}{2}$ 列の行列で，対角型である．対角線上の要素は0でない．したがって，A は非退化な臨界点であることがわかる．

「第 (i,k) 番目」の対角線上の要素は $-c_i\varepsilon_i-c_k\varepsilon_k$ である．このHesse行列の対角線上に何個のマイナスがあるか考えてほしい（演習3.4）．答えは次のようになる．

A の対角線上の ε_i，$1\leqq i\leqq m$，のうちで，$\varepsilon_i=1$ であるような番号 i を小さいほうから並べて，

$$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n$$

を得たとする。このとき，A におけるHesse行列の指数（対角線上のマイナスの数は個数）は，

$$(3.57)\qquad (i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_n-1)$$

である。（すべての ε_i が -1 ならば，この指数は0である），また，その臨界点の臨界値は

$$(3.58)\qquad 2(c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_n})-\sum_{i=0}^{m}c_i$$

である．容易にわかるように，

$$(3.59)\qquad 2c_i<c_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,m-1$$

であれば，異なる臨界点の臨界値が一致することはない．なお $\det A=1$ を考慮すると，臨界点は全部で（2^m 個でなく）2^{m-1} 個ある． □

特別な場合として，$SO(3)$ を考えると，Morse関数 $f: SO(3)\to\mathbb{R}$ は4つの臨界点をもつ．c_i の間に条件（3.59）を仮定すると，それらの指数は臨界値の小さいほうから，順に，

$$0,1,2,3$$

である．

注意 $SO(3)$ は3次元射影空間 P^3 と同じだけの臨界点をもつが，実は $SO(3)$ と P^3 は微分同相である。このことは，系3.16により，2次の特殊ユニタリ群 $SU(2)$ が S^3 に微分同相であることと，「随伴表現 $SU(2)\to SO(3)$」が2重被覆であることから証明できる．

念のため，随伴表現を座標で書いておこう。2行2列の特殊ユニタリ行列は，