No.

Date

は直積 $S^m \times S^n$ 上の Morse 関数である. f の臨界点は4つあり, その指数は, $0, n, m, m+n$ である。(演習問題2.3参照)、臨界値はこの順に, $(A-1)(B-1)$, $(A-1)(B+1)$, $(A+1)(B-1)$, $(A+1)(B+1)$ である. (これは大きさの順でもある)

したがって $S^m \times S^n$ は D^{m+n} に次元が $(m+n)$ の n-ハンドル, m-ハンドル, $m+n$-ハンドルをつぎつぎに接着していけば得られる.

$$(3.27) \qquad S^m \times S^n = D^{m+n} \cup D^n \times D^m \cup D^m \times D^n \cup D^{m+n}. \quad \square$$

例3.8 (射影空間 P^m) $m+1$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{m+1}$ の原点 O を通る直線全体からなる集合を考え, その集合に m 次元多様体の構造を入れたものが m 次元射影空間 (projective space) P^m である。$(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1})$ を O でない $\mathbb{R}^{m+1}$ の点とすると, $(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1})$ と O を通る直線がただ1つ決まる. この直線は P^m の「点」であるから, $(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1})$ は P^m の1点を決めると考えられる. この P^m の点を $[x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}]$ で表す.

$\mathbb{R}^{m+1}$ の中で, 点 $(y_1, \cdots, y_m, y_{m+1})$ と原点 O を通る直線と点 $(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1})$ と原点を通る直線とが一致するための必要十分条件は, 0 でないある実数 α があって,

$$(3.28) \qquad (y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_m, \alpha x_{m+1})$$

が成り立つことである. したがってこの条件 (3.28) は P^m のなかで対応する2つの点が一致すること, すなわち,

$$[y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}] = [x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}]$$

であるための必要十分条件である.

この条件を使うと, P^m がコンパクトであることが次のように証明できる. P^m の任意の点 $[x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}]$ が与えられたとき, 式 (3.28) において, α を適当に選べば, $(y_1, \cdots, y_m, y_{m+1})$ が

$$(3.29) \qquad y_1^2 + \cdots + y_m^2 + y_{m+1}^2 = 1$$

を満たすことができる。こうすると $(y_1, \cdots, y_m, y_{m+1})$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ の単位球面 S^m 上の点となり, しかも P^m のなかでは, $[y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}]$ とはじめの $[x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}]$ とは同じ点を表している。したがって, $(y_1, \cdots, y_m, y_{m+1})$ に $[y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}]$ を対応させる写像

$$S^m \to P^m$$

は単位球面上の点 $(y_1, \cdots, y_m, y_{m+1})$ をはじめに任意に与えられた P^m の点 $[x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}]$ に写すので, この写像 $S^m \to P^m$ が「上へ」の連続写像であることがわかる。S^m は $\mathbb{R}^{m+1}$ の有界閉集合でコンパクトだから, その連続像になっている