定義 1.14 (Morse 関数) 曲面 M 上の関数 $f: M \to \mathbb{R}$ の臨界点がすべて非退化であるとき、f を Morse 関数 (Morse function) と呼ぶ。 □

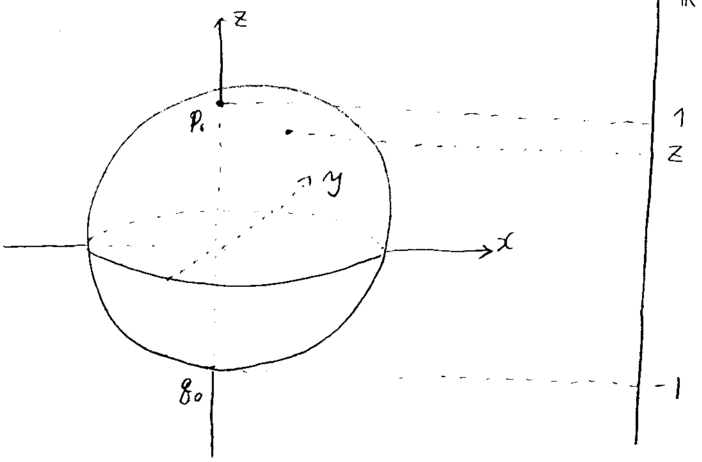
Morse 関数の例をあげよう。

例 1.15 (球面の高さ関数) 直交座標系 (x, y, z) をもつ 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のなかの単位球面 S^2 を考える、すなわち、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1.40}$$

という方程式で定義される球面である。

S^2 上の任意の点 $p = (x, y, z)$ に、その点の第三座標 z を対応させる関数 $f: S^2 \to \mathbb{R}$ を考える。いわば「高さ関数」である。すると、この f は S^2 上の Morse 関数になる。(図 1.8)。



実際、北極点 $p_0 = (0, 0, 1)$ と南極点 $q_0 = (0, 0, -1)$ が f の臨界点である。また、このほかに臨界点がないことは容易にわかる。そこで、$f: S^2 \to \mathbb{R}$ が Morse 関数であることを示すには、p_0 と q_0 が両方とも f の非退化な臨界点であることを証明すればよい。局所座標系として、(x, y) をとって、f の Hesse 行列を計算すれば、求める結論が得られる。 □

この例で見るように、球面 S^2 上には、非退化な臨界点が 2つだけの Morse 関数が存在する。実は、この逆がいえる。

定理 1.16. 閉曲面 M の上に、非退化な臨界点が 2つだけの Morse 関数 $f: M \to \mathbb{R}$ が存在すれば、M は球面 S^2 に微分同相である □

この定理は Morse 理論の簡単な例になっている。証明のまえに、「微分同相」を定義しよう。