「K上で f が g の (C^2, ε) 近似である」とは、次の3つの不等式がKのすべての点 p において成り立つことである。

$$(2.49)\quad \begin{cases} |f(p) - g(p)| < \varepsilon \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(p)\right| < \varepsilon \qquad i = 1, 2, \cdots, m, \\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right| < \varepsilon \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m. \end{cases}$$

多様体M全体で考えるには、Mを有限個の座標近傍で覆っておく。一般には有限個の座標近傍で覆うことが不可能だが、Mがコンパクトのとき可能である。それは、コンパクト性の定義による。

定義 2.24（コンパクト性）空間Xがコンパクト（compact）であるとは、Xを無限個の開集合 $U_\alpha, U_\beta, \cdots, U_\lambda, \cdots$ で被覆するとき、すなわち、

$$(2.50)\qquad X = U_\alpha \cup U_\beta \cup \cdots \cup U_\lambda \cup \cdots$$

のように表すとき、これらの開集合のなかから適当に有限個の開集合 $U_\alpha, U_\beta, \cdots, U_\gamma$ を選び出して、これだけでXを被覆することができる、すなわち、

$$(2.51)\qquad X = U_\alpha \cup U_\beta \cup \cdots \cup U_\gamma$$

と表せることである。ひとことでいえば、無限開被覆から有限開被覆が選び出せることである。 □

Heine-Borelの定理によれば、$\mathbb{R}^m$ の有界な（つまり、原点からの距離がある値以下の範囲におさまってしまう）閉集合はコンパクトである。例えば、m 次元円板 D^m や $m-1$ 次元球面 S^{m-1} はコンパクトである。

どんな多様体Mも、明らかに無限個の座標近傍で被覆できる。ここで、Mがコンパクトであることを仮定すると、有限個の座標近傍 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ を選び出して、それだけでMを被覆することができる：

$$(2.52)\qquad M = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$$

f と g が C^2 の意味で近いということの定義にもどる。Mをこのように有限個の $U_1, U_2, \cdots, U_k$ で覆っておく。さらに、各々の U_ℓ のなかにコンパクト集合 K_ℓ を1つずつとっておき、$(\ell = 1, 2, \cdots, k)$、Mはそれらの和集合にもなっているようにする：

$$(2.53)\qquad M = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_k.$$