No.

Date . .

(2.60) $v = \frac{dc}{dt}(0) = \left(\frac{dX_1}{dt}(0), \frac{dX_2}{dt}(0), \cdots, \frac{dX_N}{dt}(0)\right)$

で与えられる。そして，曲線 c が M上の曲線である場合には，この速度ベクトル $\frac{dc}{dt}(0)$ は点 p における M の接ベクトルになる。

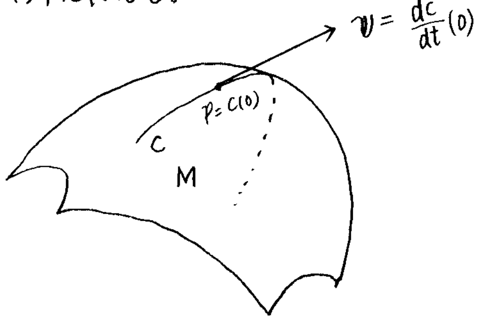

図2.9 速度ベクトル

接ベクトルがあると，その方向に関数を微分することができる．それを説明しよう．ただし，計算は当面 $\mathbb{R}^N$ の座標系 $(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ を使う． $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)$ を接ベクトル($\in T_p(M)$)とし， f を点 p の $\mathbb{R}^N$ での近傍で定義された関数とする。$t=0$ のとき p を通過するM上の曲線 $c(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_N(t))$ を考える．この曲線の「初速度」，すなわち $t=0$ のときの速度がちょうど v であったとしよう．

(2.61) $\frac{dc}{dt}(0) = v$ すなわち， $\frac{dX_j}{dt}(0) = v_j$, $j = 1, 2, \cdots, N$

関数 f を曲線 c に制限して考えると， t を変数とする 1変数関数 $f(c(t))$ になるが，これを $t=0$ で微分する。合成関数の微分の公式で

(2.62)
$$\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(X_1(t), X_2(t), \cdots, X_N(t))\Big|_{t=0}$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) \frac{dX_j}{dt}(0)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) .$$

この最後の結果を見るとわかるように，得られた答えは f と v で決まり，v を「初速度」とする曲線 c の取り方には依らない。したがって，この答えの数値を

(2.63) $v \cdot f$

と書くことができる．これが，v による 関数 f の微分である．

(2.62)からわかるように $v \cdot f > 0$ ということと，$f(c(t))$ という t の関数が $t=0$ の近傍で増加関数ということは同値だから，$v \cdot f > 0$ ということと v が f の増加する方向を向いていることとは同値である．