No.

Date

$$x_i = \cdots = x_{m-1} = x_m = 0$$

を満たさなければならないことがわかる. 次に(3.32)を $x_1$ で微分して, $a_1$ が $a_2, \cdots, a_{m+1}$ より小さいことを使うと, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ は $x_1 = 0$ のとき, かつ, そのときに限って 0になる。次に $f|_{x_1=0}$ を $x_2$ で微分する。同様の理由で, この微分は $x_2 = 0$ のとき, かつそのときに限って 0になる。以下同様に進むと, $U_i$ 上の $f$ の臨界点は

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{i-1} = 0$$

も満たさなければならない。まとめると, $U_i$ 上の $f$ の臨界点は局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ の原点 $(0, \cdots, 0)$ だけである。$[x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}]$ の表記法で書けば, $[0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0]$ が $U_i$ 内の唯一の臨界点である。ただし 1は左から $i$ 番目にある。

この臨界点での $f$ の Hesse行列 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ が

$$(3.35)\quad \begin{pmatrix} 2(a_1 - a_i) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 2(a_{i-1} - a_i) & & & \\ & & & 2(a_{i+1} - a_i) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2(a_{m+1} - a_i) \end{pmatrix}$$

であることを確かめてほしい。対角線以外の行列要素は 0 である。$a_1 < \cdots < a_i < \cdots < a_{m+1}$ であるから, Hesse行列の行列式は 0でなく, 対角成分は $i-1$ 行目までがマイナス, その後がプラスである。したがって $U_i$ の原点にある臨界点は非退化で, 指数は, $i-1$ である。またこのときの関数値は $a_i$ である。

$P^m$ は $m+1$ 個の座標近傍 $U_i$ $(i = 1, \cdots, m+1)$ で覆われるので, 次のことが証明できたことになる。ここで構成した Morse 関数 $f: P^m \to \mathbb{R}$ は $m+1$ 個の臨界点をもち, その指数は臨界値の小さいほうから,

$$0, 1, \cdots, m$$

である。したがって $P^m$ のハンドル分解は,

$$(3.36)\quad P^m = D^m \cup D^1 \times D^{m-1} \cup D^2 \times D^{m-2} \cup \cdots \cup D^{m-1} \times D^1 \cup D^m$$

のようになる。

とくに, 1次元の射影空間 $P^1 = D^1 \cup D^1$ は円周 $S^1$ に微分同相である。 □

例 3.9 (射影平面 $P^2$ のハンドル分解) 2次元射影空間 $P^2$ を射影平面 (projective plane) という. 射影平面のハンドル分解を少し詳しく考えよう。例 3.8 によれば, $P^2$ は 2次元の