No.

Date

$$\partial N \times [0,1) \xrightarrow{\cong} f^{-1}(0)\times[0,\varepsilon) \xrightarrow{h|f^{-1}(0)\times[0,\varepsilon)} V$$

が系2.33のいう h である。

§2.4 臨界点の上げ下げ

定理2.34 $f: M \to \mathbb{R}$ を M 上のMorse関数，$p_1, p_2, \cdots, p_r$ をその臨界点の集合とする。このとき，f と同じ臨界点の集合 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ をもち，かつ，次の性質をもつMorse関数 f' が存在する：

$$p_i \neq p_j \text{ なら } f'(p_i) \neq f'(p_j) \quad , \ i, j = 1, 2, \cdots, r.$$

またこのような f' は (C^2, ε) の意味で f にいくらでも近くにとれる。

[証明] いま，f の2つの臨界点 p_1 と p_2 で f が同じ関数値 c をとると，仮定して，この f を少し修正することを考えよう。定理2.16により，p_1 のまわりでうまい局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$ をとって，f を標準形に書いておく：

$$f = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 + c.$$

X_f をこの座標系に関する f の勾配ベクトル場として，$X_f \cdot f$ を計算すると，

$$X_f \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2$$

$$= 4(x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2 + \cdots + x_m^2)$$

となる。正数 $\varepsilon > 0$ を十分に小さくとり，p_1 を中心として半径 ε の m 次元円板 D_ε と半径 2ε の m 次元円板 $D_{2\varepsilon}$ を考える。この間の部分 $D_{2\varepsilon} - \mathrm{int}\, D_\varepsilon$ では，上の式から明らかに，$4\varepsilon^2 \leqq X_f \cdot f \leqq 4(2\varepsilon)^2$ が成り立つ。

そこで，コンパクト集合 K として D_ε をとり，それを含む開集合 U として，$D_{2\varepsilon}$ の内部 $\mathrm{int}(D_{2\varepsilon})$ をとって，(U, K) に付随した台形関数 $h: U \to \mathbb{R}$ を考える（補題2.27）。U の外では，0と定義して h を M 全体の C^∞ 級関数に拡張する。それをまた h と書く。a を十分小さい0でない実数とし，M 上の新しい関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f} = f + ah$$

とおいて定義する。$\tilde{f}$ の臨界点がどこにあるのかを調べよう。U の外では，$f = \tilde{f}$ なので，f と $\tilde{f}$ の臨界点の位置は同じである。また半径 ε の円板の内部では，$h = 1$ なので，$\tilde{f}$ の臨界点は f と同じく，p_1 しかない。

したがって，$\tilde{f}$ に f と異なる臨界点の生じる可能性のあるのは，D_ε と $D_{2\varepsilon}$ の間の部分である。ここで，1階偏導関数の差を計算すると，