式(1.29)と比較して，$H_{11}>0$ のとき，

$$(1.34) \qquad f = X^2 + \left(H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}} \right) y^2,$$

また，$H_{11}<0$ のとき，

$$(1.35) \qquad f = -X^2 + \left(H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}} \right) y^2$$

を得る。　まえに，式(1.30)で見ておいたことから，

$$(1.36) \qquad H_{11}(0,0)H_{22}(0,0) - H_{12}^2(0,0) = \frac{1}{4} \det H_f \neq 0$$

である。$\det H_f \neq 0$ というところに，原点 P_0 が f の非退化な臨界点であるという仮定が使われている。原点 $P_0=(0,0)$ の近傍で新たな y 座標 Y を

$$(1.37) \qquad Y = \sqrt{\left| \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}{H_{11}} \right|}\, y$$

という式で導入して，式(1.34)と(1.35)を書きなおせば，f は局所座標系 (X,Y) によって次のように表される。なお便宜上，$H_{11}H_{22} - H_{12}^2$ を K と書いた。

$$(1.38) \qquad f = \begin{cases} X^2 + Y^2 & (H_{11}>0,\ K>0) \\ X^2 - Y^2 & (H_{11}>0,\ K<0) \\ -X^2 + Y^2 & (H_{11}<0,\ K<0) \\ -X^2 - Y^2 & (H_{11}<0,\ K>0) \end{cases}$$

X軸とY軸を「90°回転」で入れ換えれば，$f = X^2 - Y^2$ と $f = -X^2 + Y^2$ とは本質的に同じ標準形とみなせる。これで目標の定理1.11が証明できた。■

定義1.13（非退化な臨界点の指数）点 P_0 を2変数関数 f の非退化な臨界点とする。点 P_0 の近傍で適当な局所座標系 (x,y) により f を標準形に直したとき，$f = x^2 + y^2 + C$，$f = x^2 - y^2 + C$，$f = -x^2 - y^2 + C$ であるのに応じて，非退化な臨界点 P_0 の指数(index)をそれぞれ，0，1，2と定義する。言い換えれば，標準形に現れるマイナスの符号の個数が P_0 の指数である。□