No.

Date

定義 2.13（非退化な臨界点と退化した臨界点）臨界点 p_0 における f の Hesse 行列 $Hf(p_0)$ の行列式 $\det Hf(p_0)$ が 0 でないとき，p_0 を非退化な臨界点と呼び，反対に $\det Hf(p_0)=0$ であるとき p_0 を退化した臨界点と呼ぶ。 □

系 2.14 関数 $f: M \to \mathbb{R}$ の臨界点 p_0 が非退化であるか，退化しているかは，p_0 のまわりの局所座標系の取り方によらずに決まる．

[証明] 関係式 (2.21) から

$$\det \mathcal{H}f(p_0) = \det {}^tJ(p_0) \det Hf(p_0) \det J(p_0)$$

である．座標変換にともなう Jacobi 行列 $J(p_0)$ の行列式は 0 でないことがわかっているから，$\det \mathcal{H}f(p_0) \neq 0$ と $\det Hf(p_0) \neq 0$ は同値である． ■

定義 2.15（Morse 関数）関数 $f: M \to \mathbb{R}$ が Morse 関数であるとは，f の臨界点がすべて非退化な臨界点であることである． □

(b) m 次元の Morse の補題

定理 2.16（m 次元の Morse の補題）点 p_0 が $f: M \to \mathbb{R}$ の非退化な臨界点であるとき，p_0 のまわりの局所座標系 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ をうまく選んで，その局所座標系によって表した関数 f の形が次の標準形になるようにすることができる．

$$f = -X_1^2 - \cdots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \cdots + X_m^2 + c. \tag{2.23}$$

ここに，c は定数 $(= f(p_0))$ である．また，p_0 は $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ の原点 $(0, 0, \cdots, 0)$ になっている． □

この標準形に現れたマイナスの符号の個数 λ は，Hesse 行列 $Hf(p_0)$ を対角化したときのマイナスの対角成分の個数に等しい．Sylvester の法則により，λ は Hesse 行列の対角化の仕方によらず決まる．したがって，λ は関数 f と臨界点 p_0 で決まってしまう．

定義 2.17 λ を非退化な臨界点 p_0 の指数と呼ぶ。m 次元の場合，λ は 0 から m までの値をとりうる． □

m 次元の Morse の補題（定理 2.16）を証明しよう．

[証明] 臨界点 p_0 のまわりの任意の局所座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を選ぶ。ただし，p_0 はこの局所座標系の原点 $(0, 0, \cdots, 0)$ であるとしておく．さらに必要なら，f のかわりに $f - f(p_0)$ を考えることにし，$f(p_0) = 0$ であると仮定してよい。