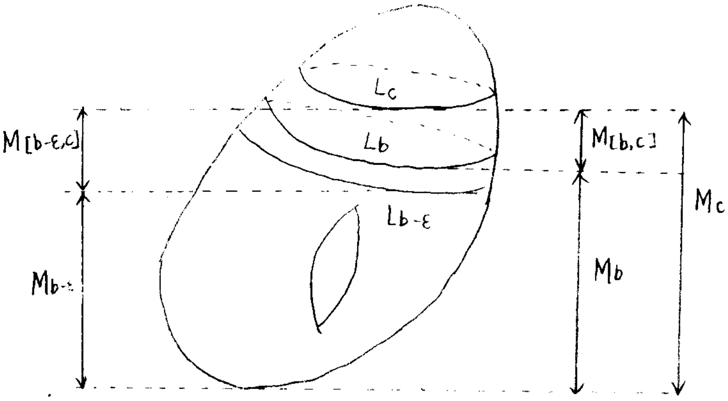

図1.13 L_bとL_cの間に臨界点がない.

[証明] 最小値aと最大値Aは当然fの臨界値であるから, 区間$[b,c]$はaもAも含んでいない. そこで,

$$a < b < c < A$$

と仮定して補題1.23を証明しよう。等高線L_bとL_cの間の部分を$M_{[b,c]}$と表そう:

$$(1.52) \qquad M_{[b,c]} = \{ p \in M \mid b \leqq f(p) \leqq c \}.$$

明らかに

$$(1.53) \qquad M_b \cup M_{[b,c]} = M_c$$

が成り立つ.

仮定により, $M_{[b,c]}$はfの臨界値を含まない.

補題1.21によれば, $f: M \to \mathbb{R}$の臨界点はM上に有限個しかない. したがって, 正数$\varepsilon > 0$を十分に小さくとれば, $M_{[b,c]}$のすそのほうを少しだけ広げた範囲, すなわち, $M_{[b-\varepsilon,c]}$の中にもfの臨界点は存在しない. としてよい.

次の章で証明する定理2.31によれば, このとき, $M_{[b-\varepsilon,c]}$は直積$L_{b-\varepsilon} \times [0,1]$に微分同相である. また$M_{[b-\varepsilon,b]} \subset M_{[b-\varepsilon,c]}$だから, $M_{[b-\varepsilon,b]}$の中にもちろん臨界点はないから. 同じ定理により, $M_{[b-\varepsilon,b]}$も直積$L_{b-\varepsilon} \times [0,1]$に微分同相である. したがって, 微分同相写像

$$h: M_{[b-\varepsilon,b]} \to M_{[b-\varepsilon,c]}$$

が存在するが, hは下の等高線$L_{b-\varepsilon}$に制限したとき恒等写像(identity)であると仮定できる. そこでhと恒等写像

$$id: M_{b-\varepsilon} \to M_{b-\varepsilon}$$

を, 境界の等高線$L_{b-\varepsilon}$に沿って張り合わせることができて, 微分同相写像

$$H = id \cup h: M_{b-\varepsilon} \cup M_{[b-\varepsilon,b]} \to M_{b-\varepsilon} \cup M_{[b-\varepsilon,c]}$$

が得られる. (微分同相写像の張り合わせについては微妙なところがある. 次の章の定理2.8とそのあとの説明を見よ)