No.

Date

ただし，$p=(x_1,\cdots,x_m)$ とおいた．

関数 h_ℓ は $0\leqq h_\ell\leqq 1$ であり，また，コンパクト集合 L_ℓ の外では 0 であるから，h_ℓ の1階導関数も，2階導関数も，その絶対値はある一定値を越えられない．(最大値の定理)．したがって，$a_1,\cdots,a_m$ の絶対値を十分小さくとれば，3つの式 (2.58) の右辺はいくらでも小さくなる．とくに，コンパクト集合 K_ℓ 上で f_ℓ は $f_{\ell-1}$ の (C^2,ε) 近似にとれる．

K_ℓ 以外の K_j の上ではどうかというと，K_j を含む座標近傍 U_j とそれに付随した座標系 $(y_1,\cdots,y_m)$ を使って，上と同様に，$f_{\ell-1}$ と f_ℓ の間の1階の導関数の差と2階導関数の差を計算する．この大きさを K_j の上で評価しよう．もともと，コンパクト集合 L_ℓ の外では $f_{\ell-1}=f_\ell$ だったので評価しなければならないのは，共通部分 $K_j\cap L_\ell$ の上だけである。この共通部分は座標近傍の共通部分 $U_j\cap U_\ell$ に含まれる．

$U_j\cap U_\ell$ での計算結果は，上の式 (2.58) の右辺を $(x_1,\cdots,x_m)$ と $(y_1,\cdots,y_m)$ の間の Jacobi 行列を使って，適当に変換したものになるはずである。ところが最大値の定理によって コンパクト集合，$K_j\cap L_\ell$ の上では Jacobi 行列の絶対値は一定以上にはなれないから，結局，$a_1,\cdots,a_m$ さえ，十分小さくとっておけば，右辺の計算結果は，$K_j\cap L_\ell$ の上でいくらでも小さくとれることになる．

L_ℓ の外では $f_{\ell-1}$ と f_ℓ に差のないことは既に見ておいたから，結局，$a_1,\cdots,a_m$ の絶対値さえ小さくとっておけば，K_j の上で，f_ℓ は $f_{\ell-1}$ の (C^2,ε) 近似にとれることがわかった．

このことが，各 $j=1,\cdots,k$ について言えるので，定義 2.25 によって，f_ℓ は $f_{\ell-1}$ の (C^2,ε) 近似にとれる．ここで $\varepsilon>0$ はあらかじめいくらでも小さく指定しておける．

帰納法の仮定により，$f_{\ell-1}$ は $C_{\ell-1}=K_1\cup\cdots\cup K_{\ell-1}$ のなかに退化した臨界点をもたなかった．f_ℓ を $f_{\ell-1}$ の (C^2,ε) 近似にとると，補題 2.26 により，$\varepsilon>0$ が小さければ，f_ℓ も同じ $C_{\ell-1}$ のなかに退化した臨界点をもたない．しかも，f_ℓ は K_ℓ のなかに退化した臨界点がないように構成しておいたから，f_ℓ は $C_{\ell-1}\cup K_\ell=C_\ell$ のなかに退化した臨界点をもたないことになる．

これで帰納法が進行する．$\ell=1,2,\cdots,k$ と進むと，最後の f_k は $C_k=M$ のなかに退化した臨界点のない関数 すなわち，M 上の Morse 関数になる．しかも帰納法の各段階で ε を十分小さくとっておけば，あらかじめ任意に指定された ε' について f_k ははじめの関数 g の (C^2,ε) 近似になっている．

これで Morse 関数の存在定理 2.20 が証明できた． ■