と定義するのである。また，fの値がちょうどtであるような点全体の集合を$f=t$の「等高線」と呼ぼう。記号でL_tと表すことにすると，M_tは等高線L_t以下の部分である。等高線L_tは部分曲面M_tの境界になっている。(図1.12参照)

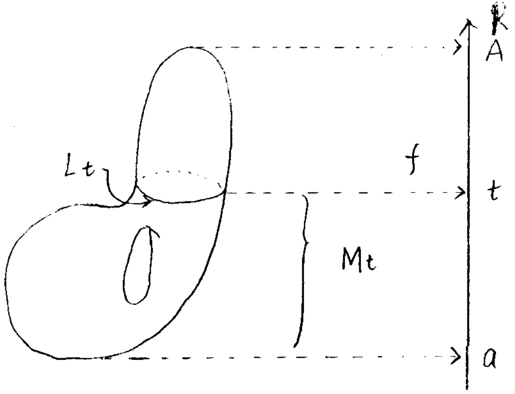

図1.12 部分曲面M_tと等高線L_t

$f: M \to \mathbb{R}$には最大値Aと最小値aがある。fの値$f(p)$が最小値aよりさらに小さくなるような点pはありえないから，$t<a$ならば

$$M_t = \phi.$$

また，M上のどの点pについても，そこでの値$f(p)$は最大値A以下であるから，$A \leqq t$であれば，M上のどの点pについても$f(p) \leqq t$が成り立つ。すなわち，$A \leqq t$ならば，

$$M_t = M$$

である。

このようにtがaより小さい所から始まってしだいに増えていくと，部分曲面M_tの形は空集合ϕから始まって変わっていき，ついにtがAより大きくなるとM_tはM全体になる。この間のM_tの形の変化を追跡しようというのがMorse理論の基本的発想である。

$f: M \to \mathbb{R}$を「高さ関数」のように思うと，次のような説明もできる。つまり，Mを水に沈めていくと思うのである。パラメタtは水位を表している。M_tは水位がtのとき水面下にある曲面の部分である。水がどんどん増えてきて，水面の位置が上がってくると，沈んでいる部分M_tの形が変わってゆく。この形の変わり方を調べようというのがMorse理論である。

定義 1.22 (臨界値) 実数c_0がfの臨界値(*critical value*)であるとは，c_0がfのある臨界点p_0での関数値になっていることである: $c_0 = f(p_0)$. □

補題 1.23 2つの実数bとc $(b<c)$について，区間$[b, c]$のなかにfの臨界値がなければ，M_bとM_cは微分同相である(図1.13参照)