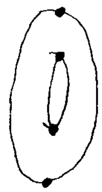
である。はじめの S^1 は $S^1\times\{1\}$ に同一視される. $S^1\times\{0\}$ では H' は恒等写像になっているので ここに円板 D^2 を張り付け, H' を恒等写像で拡張すれば, 結局, h は円板 $S^1\times[0,1]\cup D^2$ の微分同相写像に拡張できる。

1.4 円周 S^1 上の点を角度 θ を使って表す. ただし, θ と $\theta+2\pi$ とは同じ点を表すものとする. さて, トーラスとは直積 $S^1\times S^1$ のことであるが, トーラス上の関数 $f: S^1\times S^1 \to \mathbb{R}$ を

$$f(\theta,\phi) = (R+r\cos\phi)\cos\theta$$

と定義する. ただし, R と r は正の定数で, $R>r$ と仮定する. このとき f が Morse 関数であることを示し, すべての臨界点とその指数を求めよ.



[証明] トーラス上の任意の点で, (θ,ϕ) を局所座標系として使える.

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = -(R+r\cos\phi)\sin\theta = 0 \quad , \frac{\partial f}{\partial\phi} = (-r\sin\phi)\cos\theta = 0$$

を解いて, $(\theta,\phi) = (0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$ の4点が臨界点である. Hesse 行列 Hf を各臨界点で求めてみると, これらの臨界点が非退化であること また $(0,0), (0,\pi), (\pi,\pi), (\pi,0)$ の指数が $2,1,1,0$ であることがわかる. ■

2 一般次元への拡張

§2.1. m 次元多様体

当面, 必要とする (C^∞ 級の) 多様体の性質は局所座標系の存在だけである。すなわち, M を m 次元多様体とすると, M のどの点 p のまわりにも, m 次元の C^∞ 級局所座標系

(2.1) $$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

が存在する. 以下, 多様体の局所座標系といえば, C^∞ 級の局所座標系を指すものとする.

(a) 多様体上の関数と多様体間の写像

多様体 M 上の関数 $f: M \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であることの定義は, すなわち, M の任意の点 p とそのまわりの任意の局所座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ に関して f が C^∞ 級であるとき, f を M 上の C^∞ 級関数という.

N を別の n 次元多様体として, 連続写像 $h: M\to N$ が C^∞ 級であることの定義を与えておく。まず「$h: M\to N$ が点 $p\in M$ のまわりで C^∞ 級である」ということを定義する.