の閉部分集合なので, $SO(m)$ はコンパクトである。

次元を考えてみよう。1番目の行ベクトル a_1 としては, $\mathbb{R}^m$ のなかの長さ1の任意のベクトルが選べるから, これが, $(m-1)$ 次元分だけある. 1つの a_1 を固定すると, 2番目の a_2 は, a_1 に直交する $m-1$ 次元 Euclid 空間に入っており, a_2 としてそのなかの長さ1の任意のベクトルが選べるので, この分が, $(m-2)$ 次元ある。以下同様に進むと, $SO(m)$ の次元は

$$(m-1)+(m-2)+\cdots+2+1 = \frac{m(m-1)}{2}$$

であることがわかる。

$1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ を任意に固定した実数として, 関数 $f: SO(m) \to \mathbb{R}$ を次のように定義しよう.

$$(3.45) \qquad f(A) = c_1 x_{11} + c_2 x_{22} + \cdots + c_m x_{mm} .$$

ただし,
$$(3.46) \qquad A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ & \cdots & \cdots & \\ x_{m1} & \cdots & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix}$$

である.

補題 3.12 式(3.45)で与えられる関数 $f: SO(m) \to \mathbb{R}$ の臨界点は

$$(3.47) \qquad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

である(対角線上の符号は, $\det = 1$ である限り任意の組み合わせを選んでよい).

[証明] 特別な回転行列 B_θ を導入しよう. B_θ は

$$(3.48) \qquad B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$