No.

Date

定理 2.23. (Sard の定理) C^∞ 級写像 $h: U \to \mathbb{R}^m$ の臨界値の集合は $\mathbb{R}^m$ の中の測度 0 の集合である. □

「測度」という概念の説明はしないが, $m=2$ の場合なら面積が 0, また $m=3$ の場合なら, 体積が 0, ということとほぼ同じである. 要するに 臨界値の集合は $\mathbb{R}^m$ の中で "そんなに多くない" と言っているのである. とくに, $\mathbb{R}^m$ のどんな点の近傍にも, $h: U \to \mathbb{R}^m$ の臨界値でない点が存在する.

補題 2.21 を厳密に証明する.

[証明] 十分に小さな $a_1, \cdots, a_m$ を選んで,

$$f(x_1, \cdots, x_m) - (a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m) \tag{2.42}$$

を U 上の Morse 関数にすることが問題であった.

まず, 与えられた関数 $f: U \to \mathbb{R}$ を使って, 次のように成分表示される写像 $h: U \to \mathbb{R}^m$ を考える:

$$h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

第 i 成分が関数 f の第 i 偏導関数になっているような写像である. この写像 $h: U \to \mathbb{R}^m$ の, 点 p_0 における Jacobi 行列は,

$$J_h(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p_0) \\ \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p_0) \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

である. これは Hesse 行列 $Hf(p_0)$ に一致する。したがって, p_0 が写像 $h: U \to \mathbb{R}^m$ の臨界点であることと, $\det Hf(p_0) = 0$ であることとは同値である.

$\mathbb{R}^m$ の点,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

を $h: U \to \mathbb{R}^m$ の臨界点でないように選ぶ. Sard の定理により, このような点はいくらでもあり,