No.

Date

のなかに出て来た $A_\theta^{(i)}$ という m 次元対角行列の i を $i=1$ とおいたものである.

逆の C^∞ 級写像 $k: SU(m)\times S^1 \to U(m)$ は, 任意の m 次特殊ユニタリ行列 U' と任意の $\exp(\sqrt{-1}\theta)$ について,

$$k(U', \exp\sqrt{-1}\theta)) = U'\cdot A_\theta^{(1)}$$

と定義する. 容易にわかるように, h と k は互いに逆写像なので, h は微分同相写像である. これで (i) が示せた.

(ii) を示すために, 次の補題を用意する.

補題 3.19 対角線上に同じ複素数 ξ の並んだ m 次対角行列 $\Delta(\xi)$ はすべての m 次特殊ユニタリ行列と可換である. 逆に, すべての m 次特殊ユニタリ行列と可換な m 次行列は対角行列 $\Delta(\xi)$ に限る. □

この補題の前半は当たり前だから, 後半の証明を考えよう. 簡単のため $m=2$ の場合についてだけ考える. ある2次の行列 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が, 特別な2次特殊ユニタリ行列 $U_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と $U_2=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ の両方に可換であるとして, $XU_1=U_1X$ と $XU_2=U_2X$ を実際に成分で書いてみると, $a=d$, $b=c=0$ を得る. したがって $X=\Delta(a)$ である. 一般の m についても, 同様の議論で証明できる.

さて, 命題の (ii) を証明しよう. 一般に, 群 G とその部分群 H が与えられたとき, G の元 g であって, H のすべての元と可換であるような g 全体の集合は G の部分群になる. それを G のなかの H の中心化群 (centralizer) という. とくに G の中の G 自身の中心化群を G の中心 (centre) という. 上の補題より, $U(m)$ の中の $SU(m)$ の中心化群の構造がわかる. すなわちそれは, $\{\Delta(\exp(\sqrt{-1}\theta))\}$ という形の部分群で, 円周 S^1 に同相である. この群と $SU(m)$ の共通部分は $SU(m)$ の中心で, $\{\Delta(\exp(2\pi\sqrt{-1}k/m)\}_{k=0,1,\dots,m-1}$ という位数 m の巡回群である. この群を C_m という記号で表そう.

一方, 群の直積 $SU(m)\times S^1$ の群構造は,

$$(3.76)\quad (U_1, \exp(\sqrt{-1}\theta_1))\cdot(U_2, \exp(\sqrt{-1}\theta_2)) = (U_1U_2, \exp(\sqrt{-1}(\theta_1+\theta_2)))$$

で与えられる. すぐ後で示すように, $SU(m)$ に同型な $SU(m)\times S^1$ の部分群は $SU(m)\times\{1\}$ しかないので, 両者を同一視する. すると, $SU(m)\times S^1$ の中の $SU(m)$ の中心化群は $C_m\times S^1$ であることがわかる. これは m 個の円周の非交和に同相である.