No.

Date

示されたことになる。: Morse関数 $f: \mathbb{C}P_m \to \mathbb{R}$ は $m+1$ 個の臨界点をもち、その指数は、臨界値の小さい順に

$$0, 2, \cdots, 2m$$

である。したがって、$\mathbb{C}P_m$ のハンドル分解は次のようになる。

$$(3.42) \qquad \mathbb{C}P_m = D^{2m} \cup D^2 \times D^{2m-2} \cup \cdots \cup D^{2m-2} \times D^2 \cup D^{2m} \qquad \square$$

とくに複素1次元の射影空間 $\mathbb{C}P_1$ を複素射影直線 (complex projective line) という。$\mathbb{C}P_1$ は2次元のコンパクト多様体で、その上には臨界点を2つだけもつMorse関数が存在する。したがって、定理3.6により、$\mathbb{C}P_1$ は2次元球面 S^2 に微分同相である。

また、複素2次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P_2$ を複素射影平面 (complex projective plane) という。複素射影平面は、典形的な4次元多様体であり、第5章でもう1度詳しく考える。

例3.11 (回転群 $SO(m)$) まず直交行列 (orthogonal matrix) について復習しておこう。
$m \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ が次の2つの性質をもつとき、直交行列というのだった。

(i) A の第 i 行 a_i を行ベクトルと考えると、その長さは1である。すなわち、各 $i = 1, \cdots, m$ について

$$(3.43) \qquad |a_i|^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{im}^2 = 1$$

が成り立つ。

(ii) $i \neq k$ とすると、a_i と a_k は直交する。すなわち、$i, k = 1, \cdots, m$, $i \neq k$ について、a_i と a_k の内積 $a_i \cdot a_k$ は0である:

$$(3.44) \qquad a_i \cdot a_k = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \cdots + a_{im}a_{km} = 0.$$

この2性質は $A^tA = E$ に同値である。ここに、${}^tA$ は A の転置行列で、E は m 行 m 列の単位行列である。行列式を考えて、$\det A = \pm 1$ を得る。

$\det A = 1$ であるような直交行列を回転行列といい、m 行 m 列の回転行列全体を $SO(m)$ という記号で表して、m 次回転群 (rotation group) という。行列の積に関して $SO(m)$ は群をなす。しかも、$SO(m)$ は C^∞ 級の多様体であり、群の積は多様体の構造に関して、C^∞ 級である。このような群を Lie群という。$SO(m)$ は典型的な Lie群の例である。

$SO(1)$ は自明群なので、以下、$m \geq 2$ と仮定して、$SO(m)$ の多様体の構造を考えよう。
直交行列の定義により、$SO(m)$ は長さ1の行ベクトルを m 本並べたものの全体 ($\subseteq S^{m-1} \times \cdots \times S^{m-1}$)