[証明] $K=f^{-1}(0)$ のコンパクト性を使うと、十分小さい正数 ε について、$[-\varepsilon,\varepsilon]$ は $f:M\to\mathbb{R}$ の臨界値を含んでいないことがわかる。すると、$f:M\to\mathbb{R}$ による開区間 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ の逆像 $f^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)$ を U として、U に f を制限したものは、U 上の Morse 関数と考えられる。(臨界点のない Morse 関数である)。X を f に適合した U 上の上向きベクトル場とし、前のように、$Y=\frac{1}{X\cdot f}X$ とおく。

そして、K の各点 p から出発する Y の積分曲線 $c_p(t)$ を使って、微分同相写像

$$h: K\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$$

を、$h(p,t)=c_p(t)$ と定義すればよい。

上の定理の系として、境界のある多様体の場合に、境界のカラー近傍の存在が言える。

系 2.33 (カラー近傍の存在) N を境界のある多様体とする。境界 ∂N がコンパクトであれば、境界 ∂N の近傍 V と微分同相写像 $h:\partial N\times[0,1)\to V$ が存在する。ここに、$[0,1)$ は半開区間である。また、$h(\partial N,0)=\partial N$ である。(つまり、境界 ∂N は $\partial N\times 0$ に対応する。) □

境界の近傍であって、V のような積構造をもつものを、境界のカラー近傍 (collar nerborhood) と呼ぶ。

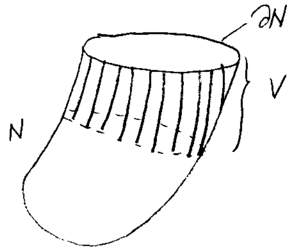

図2.16 カラー近傍

系2.33では、カラー近傍は N のなかの開集合と考えられているが、本によっては、a を 0 と 1 の間の任意の実数として、h による $\partial N\times[0,a]$ の像 $h(\partial N\times[0,a])$ のことを ∂N のカラー近傍と呼ぶこともある。この場合にはカラー近傍は N の閉集合である。

[系2.33の証明] 境界のある多様体 N は $M_{f\ge 0}$ の形をしているとしてよい。ここに、M は境界のない多様体、$f:M\to\mathbb{R}$ は M 上の滑らかな関数で 0 が臨界値でないものである。N の境界 ∂N は $f^{-1}(0)$ に対応し、仮定によって、それはコンパクトである。定理2.32により、M のなかの $f^{-1}(0)$ の両側カラー近傍 U と、U の積構造を与える微分同相写像 $h: f^{-1}(0)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ が存在する。このとき、U の半分 $h(f^{-1}(0)\times[0,\varepsilon))$ が系2.33のカラー近傍 V に他ならない。そして、微分同相写像の合成