(3.4) $$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 + c_0$$

c_0 は最小値なので、f の関数値が c_0 より小さくなることはあり得ない。したがって、標準形(3.4)の2次式のところにマイナスの符号は現れない。つまり p_0 の指数は必ず0である。

$\varepsilon > 0$ を十分小さい正数としよう。上でみたように、$M_{c_0-\varepsilon} = \phi$ であるが、$M_{c_0+\varepsilon}$ のほうは標準形(3.4)を使って

(3.5) $$M_{c_0+\varepsilon} = \{ (x_1, \cdots, x_m) \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leqq \varepsilon \}$$

と書ける。すなわち、$M_{c_0+\varepsilon}$ は m 次元円板 D^m に微分同相である。f の標準形(3.4)をみればわかるように、関数 f の値は $(x_1, \cdots, x_m) = (0, \cdots, 0)$ のところ(円板の中心)で最小値 c_0 をとり、円板の境界に近づくにつれて増えていって、円板の境界で $c_0+\varepsilon$ という値をとる。したがって、本来なら、この m 次元円板は、「上向き」のお椀のように図示したい。第1章でやったように、$m=2$ の場合本当に上を向いたお椀を描くことができるが、あいにく、現実の空間は3次元しかないので、一般の m 次元の場合に上向きのお椀を描くのは困難である。
図3.1は $m=3$ の場合の $M_{c_0+\varepsilon}$ (= 3次元円板 = 中身のつまった普通のボール D^3)の絵である。

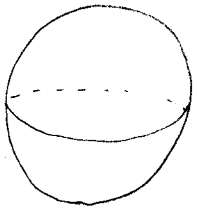

図3.1 m 次元の0-ハンドル。ここでは $m=3$

いまは最小値のところだったが、最小値に限らず、t が指数0の臨界値 c_i を通過するたびに、このような「上向き」m 次元円板が生じて、$M_{c_i+\varepsilon}$ は $M_{c_i-\varepsilon} \sqcup D^m$ (非交和)に微分同相になる。このように、指数0の臨界点に対応して現れる(上向きの)m 次元円板を0-ハンドルという。正確には、m 次元の0-ハンドルである。

次に、最大値 c_n のところを考える。我々の仮定のもとでは、最大値を与える p_n はただ1つである。p_n のまわりで f を標準形で表すと、

(3.6) $$f = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_m^2 + c_n$$

となる。c_n は最大値なので、f の値はそれ以上大きくなれないから、標準形(3.6)の2次式のなかに、プラスの符号は現れないのである。したがって、p_n の指数は必ず m である。

t が $c_n \leqq t$ であれば $M_t = M$ であるが、t の値が c_n に達するほんの少し前の $M_{c_n-\varepsilon}$ は、標準形(3.6)の右辺を $c_n - \varepsilon$ とおいて、