No.

Date

という評価が得られる。しかし、これでは、$\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)=0$ が成立するはずがない。こうして式(3.67)に矛盾する結論が得られたので、背理法により (3.69) が示せたことになる。

関数 $f|SU(m)$ の臨界点 A は対角線上に $\exp\sqrt{-1}\theta_i$ の並んだ対角行列であることは既に述べたが、式(3.69)によれば、その対角成分は実は ±1 に等しい。これらを $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ ($\varepsilon_i=\pm1$) とおこう。

行列 A の右からすべての $B_\theta^{(ik)}, \cdots, C_\varphi^{(jl)}, \cdots, D_\psi^{(h)}, \cdots$ を掛けて、

$$(3.70)\qquad A\cdot B_\theta^{(ik)}\cdots C_\varphi^{(jl)}\cdots D_\psi^{(h)}$$

を考えると、A のまわりに $SU(m)$ の局所座標系 $(\theta,\cdots,\varphi,\cdots\psi,\cdots)$ が構成される。A における $f|SU(m)$ の Hesse 行列 $H_{f|SU(m)}(A)$ をこの局所座標系を使って計算すると、ユニタリ群のときと違い、$\{D_\psi^{(i)}\}_{i=2,\cdots,m}$ の接ベクトル方向に対応して、対角型でない $(m-1)\times(m-1)$ 行列が含まれている。

2次微分 $\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}f(A\cdot D_\theta^{(i)}D_\varphi^{(j)})\Big|_{(\theta,\varphi)=(0,0)}\right\}_{i,j=2,\cdots,m}$ を計算してみると、この対角型でない部分の行列の形は、

$$(3.71)\qquad \begin{pmatrix} -C_2\varepsilon_2-C_1\varepsilon_1 & -C_1\varepsilon_1 & \cdots & -C_1\varepsilon_1 \\ -C_1\varepsilon_1 & -C_3\varepsilon_3-C_1\varepsilon_1 & \cdots & -C_1\varepsilon_1 \\ & & \ddots & \\ -C_1\varepsilon_1 & -C_1\varepsilon_1 & & -C_m\varepsilon_m-C_1\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

である。C_i ($i=2,\cdots,m$) が C_1 に較べ十分大きいと仮定すれば、(例えば、$C_i > m!\,C_1$ を仮定すれば、) 行列(3.71)の対角成分以外の行列成分が対角成分に比べて十分に小さくなるので、その性質は、対角線上に

$$-C_2\varepsilon_2,\quad -C_3\varepsilon_3,\quad \cdots,\quad -C_m\varepsilon_m$$

の並んだ対角行列の性質に近くなる。とくに行列式は 0 でなく、また対角化したときの対角線上のマイナスの数の個数も、$-C_2\varepsilon_2, -C_3\varepsilon_3, \cdots, -C_m\varepsilon_m$ のなかのマイナスの数の個数に等しい。

Hesse 行列 $H_{f|SU(m)}(A)$ において、上の行列(3.71)以外の部分 ($B_\theta^{(ik)}$ と $C_\varphi^{(jl)}$ の接ベクトルが入ってくる部分は $f: U(m)\to\mathbb{R}$ の場合と同じ成分を持つ対角行列なので、$\det H_{f|SU(m)}(A)\neq0$ が示せる。したがって A は非退化な臨界点で、$f|SU(m): SU(m)\to\mathbb{R}$