定義 2.11（Hesse行列）p_0が$f: M \to \mathbb{R}$の臨界点であるとき，次の$m \times m$行列

$$(2.19) \quad Hf(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$$

を臨界点p_0における関数fのHesse行列という．

i行j列のところに，$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$を並べた行列がHesse行列である．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p_0)$$

であるから，Hesse行列は対称行列である．

臨界点p_0のまわりの別の局所座標系$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$をとってfの2階微分を計算したものと，もとの$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$で計算したものとをくらべると，

$$(2.20) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_h \partial y_k}(p_0) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_h}(p_0) \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(p_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$$

という関係がある．したがって，次の補題を得る．

補題 2.12 臨界点p_0のまわりに2つの局所座標系

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) \text{ と } (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

をとり，それらによって計算した$f: M \to \mathbb{R}$のHesse行列をそれぞれ$\mathcal{H}f(p_0)$と$Hf(p_0)$とすれば，

$$(2.21) \quad \mathcal{H}f(p_0) = {}^tJ(p_0)\, Hf(p_0)\, J(p_0)$$

が成り立つ．ここに，$J(p_0)$は，$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$から$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$への座標変換にともなうJacobi行列を点p_0で計算したもので，具体的には，

$$(2.22) \quad J(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m}(p_0) \\ \vdots & \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p_0) & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial y_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial y_m}(p_0) \end{pmatrix}$$

で与えられる