No.

Date

3 ハンドル体

§3.1 多様体のハンドル分解

Mを閉じた多様体とし，$f: M \to \mathbb{R}$をその上のMorse関数とする。関数値tについて

$$M_t = \{p \in M \mid f(p) \leqq t\} \tag{3.1}$$

とおく．閉曲面のときのように，パラメタtが変化するに従って，M_tの形がどのように変わっていくかを調べる．

定理3.1 実数の区間$[a, b]$のなかに，fの臨界値がなければ，M_aとM_bは微分同相である：$M_a \cong M_b$. □

この定理の証明は定理2.31を使えば，閉曲面のときの結果（補題1.23）とまったく同様にできる．幾何学的内容としては，fに適合した上向きベクトル場X（に関数$\frac{1}{Xf}$を掛けて，流れの速さを調節したもの）に沿って，多様体M_aを「流して」いけば，一定時間後にM_aはM_bにピッタリと重なるというのである。

したがって，問題はパラメタtが臨界値を通過する前後のM_tの形の変化である。第2章の定理2.34によると，fは異なる臨界点では異なる値をとると考えてよい。また，fの臨界点は有限個しかないから，（$n+1$個としよう）それらのすべてをfの値が小さい順に並べて，

$$p_0, p_1, \cdots, p_n \tag{3.2}$$

とする．この章では，臨界点の番号を0から始めることにするが，それはあとの都合による。

$c_i = f(p_i)$とおくと，

$$c_0 < c_1 < \cdots < c_n \tag{3.3}$$

である。

ここで，c_0はfの最小値，c_nはfの最大値になっている。$f(p) < c_0$であるようなMの点pは存在しないから，$t < c_0$なら，$M_t = \phi$である。また，Mのすべての点pについて，$f(p) \leqq c_n$が成り立つから，$c_n \leqq t$なら$M_t = M$である。

最大値と最小値の前後でのM_tの変化はどうなるだろうか．これを追ってみよう．
まず最小値のところであるが，いまの場合最小値を与える点はp_0しかない。ここでfを標準形で表す．