

によって  $N_{i-1}$  に付いている。「ハンドル  $D^p \times D^{m-p}$  を滑らせる」とは、 $N_{i-1}$  の「イソトピー」によって接着写像  $\varphi_i$  を変形することである。まず、イソトピーを定義しよう。

定義 3.20 (イソトピー)  $K$  を  $\mathbb{R}$  次元多様体とする。ある開区間  $J$  のなかの実数  $t$  の一つ一つに  $K$  の微分同相写像  $h_t: K \rightarrow K$  が一つずつ対応しているとき、 $\{h_t\}_{t \in J}$  を  $K$  の微分同相写像の族という。族  $\{h_t\}_{t \in J}$  が  $K$  のイソトピー (isotopy) であるとは、次の 2 つの条件が成り立つことである。

(i) 開区間  $J$  は閉区間  $[0, 1]$  を含み、パラメータが  $t \leq 0$  のとき  $h_t$  は  $t$  によらず一定で  $K$  の恒等写像である:  $h_t = h_0 = \text{id}_K$ 。また  $t \geq 1$  のときも  $h_t$  は  $t$  によらず一定で  $h_1$  に等しく、それは  $K$  のある微分同相写像である:  $h_t = h_1 = h$ 。

(ii)  $H(\alpha, t) = (h_t(\alpha), t)$  により定義される写像  $H: K \times J \rightarrow K \times J$  は微分同相写像である。この意味で  $h_t$  はパラメータ  $t$  に滑らかに依存する。  $\square$

Morse 関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  とそれに適合した上向きベクトル場  $X$  が与えられている状況に戻ろう。(3.77) は  $f$  と  $X$  から決まるハンドル分解であるとする。

定理 3.21 (ハンドルを滑らせる) 臨界点の番号  $i$  をひとつ固定する ( $0 \leq i \leq n$ )。部分ハンドル体  $N_{i-1}$  の境界  $\partial N_{i-1}$  のイソトピー  $\{h_t\}_{t \in J}$  が与えられると、 $N_{i-1}$  に付くハンドル  $D^p \times D^{m-p}$  の接着写像を  $\varphi_i$  から  $h_0 \cdot \varphi_i$  に変えることができる。ここに  $h$  はイソトピー  $\{h_t\}_{t \in J}$  の  $t=1$  に対応する微分同相写像  $h_1$  である。また  $i$  番目のハンドルの接着写像を、このように変えても、ハンドル分解 (3.77) の中の各々の部分ハンドル体  $N_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) の微分同相類は変わらない。

図 3.8 がハンドルを滑らせるというイメージを表している。

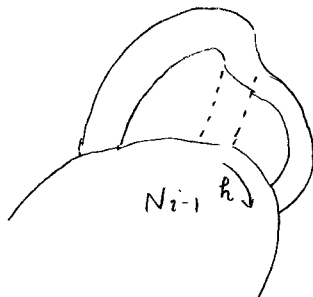


図 3.8 ハンドルを滑らせる。