そのとき，差の関数の臨界点は非退化なものばかりになる．これが直観的な「証明」である．

厳密な証明には Sard の定理が必要である．

予備的な説明をしよう．いま，Uを$\mathbb{R}^m$の開集合とし，

$$(2.39) \qquad h: U \to \mathbb{R}^m$$

を C^∞ 級写像としよう．

Uの点$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$をhでうつすと，$\mathbb{R}^m$の点$(y_1, \cdots, y_m)$にうつる．うつった点の座標成分y_iは$(x_1, \cdots, x_m)$の関数として，

$$y_i = h_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad i = 1, \cdots, m$$

のように書ける．これが，写像$h: U \to \mathbb{R}^m$の成分表示であった．

$h: U \to \mathbb{R}^m$の成分表示を縦ベクトルのように

$$(2.40) \qquad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

と書くと便利である．

このとき，次のような $m \times m$ 行列

$$(2.41) \qquad J_h(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(p_0) \\ \vdots & \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix}$$

を点p_0 $(\in U)$におけるhの Jacobi 行列という．座標変換にともなう Jacobi 行列の拡張である．

定義 2.22（写像の臨界点と臨界値）$\det J_h(p_0) = 0$ であるようなUの点p_0を写像$h: U \to \mathbb{R}^m$の臨界点と呼ぶ。また，何らかの臨界点p_0の像$h(p_0)$となっているような$\mathbb{R}^m$の点を$h: U \to \mathbb{R}^m$の臨界値という．□

ただし，この定義は，Uと$\mathbb{R}^m$のように同じ次元の空間の間の写像のときだけ有効である，ということを注意しておく．次元に差のある場合には，臨界点の定義も違ったものになる．