(2.69) $\quad c(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t))$

であるとする. pの まわりの任意の関数fについて,

$$(2.70) \qquad v\cdot f = \left.\frac{d}{dt}f(c(t))\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{d}{dt}f(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t))\right|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\,\frac{dx_i}{dt}(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{dx_i}{dt}(0)\ e_i\cdot f$$

であるから 公式

$$(2.71) \qquad v = \sum_{i=1}^{m}\frac{dx_i}{dt}(0)\ e_i$$

が得られる. これが 速度ベクトルの公式である. なお, 基本ベクトルの記号 として, e_i のかわりに $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ を使えば, 上の 公式は,

$$(2.72) \qquad v = \sum_{i=1}^{m}\frac{dx_i}{dt}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と書ける.

同様に, 考えて pのまわりに 2組の局所座標系$(x_1, \cdots, x_m)$と $(y_1, \cdots, y_m)$が あるとき, $(x_1, \cdots, x_m)$に関する 基本ベクトルと $(y_1, \cdots, y_m)$に関する 基本ベクトル との間の 変換公式が, 偏微分の 変数変換の 公式から 導かれる.

$$(2.73) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p \quad , \quad i=1,2,\cdots,m$$

以上は, Mが $\mathbb{R}^N$に 埋め込まれていると仮定して 議論してきたが, そうでない 場合でも, 接ベクトル空間 $T_p(M)$を $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ $(i=1,\cdots,m)$を基底 とするベクトル 空間として 定義し, 上の 変換公式 (2.73) を正当化することができる.

(b) ベクトル場

多様体Mの各点 Pに, その 点における 接ベクトル vを1つずつ対応させたものを, M上の ベクトル場 (vector field) という.

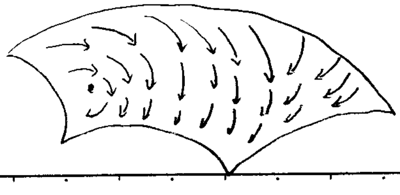

図2.11 ベクトル場