P^m もコンパクトである。これで，P^m のコンパクト性の証明ができた。(コンパクト集合の連続像はコンパクトである。[10] を見よ)

上の写像 $S^m \to P^m$ は射影とよばれる。この射影は S^m 上の2点 $(y_1,\cdots,y_m,y_{m+1})$ と $(-y_1,\cdots,-y_m,-y_{m+1})$ を P^m の同じ点に写す 2:1 の写像になっている。

関数 $f: P^m \to \mathbb{R}^m$ を

$$(3.30)\quad f([x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}]) = \frac{a_1x_1^2+\cdots+a_mx_m^2+a_{m+1}x_{m+1}^2}{x_1^2+\cdots+x_m^2+x_{m+1}^2}$$

と定義する。ただし，$a_1,\cdots,a_m,a_{m+1}$ は任意に固定した実数で，$a_1<\cdots<a_m<a_{m+1}$ を満たすものとする。右辺の x_i を α 倍しても関数値は変わらないから，確かにこの関数は P^m 上の関数として定義されている。

1つの添え字 i を止めて，$x_i \neq 0$ であるような P^m の点 $[x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}]$ 全体の集合 U_i を考えると，m 次元の局所座標系 $(X_1,\cdots,X_m)$ がある。

$$(3.31)\quad X_1=\frac{x_1}{x_i},\ \cdots,\ X_{i-1}=\frac{x_{i-1}}{x_i},\ X_i=\frac{x_{i+1}}{x_i},\ \cdots,\ X_m=\frac{x_{m+1}}{x_i}.$$

i 番目のところで X と x の添え字がずれていることに気をつける。

f の定義式 (3.30) の右辺の分母分子を x_i^2 で割ると，局所座標系 $(X_1,\cdots,X_m)$ に関して f を表す式が得られる。:

$$(3.32)\quad f(X_1,\cdots,X_m)=\frac{a_1X_1^2+\cdots+a_{i-1}X_{i-1}^2+a_i+a_{i-1}X_i^2+\cdots+a_{m+1}X_m^2}{X_1^2+\cdots+X_{i-1}^2+1+X_i^2+\cdots+X_m^2}$$

臨界値を求めるため，まず X_m で微分して，

$$(3.33)\quad \frac{\partial f}{\partial X_m}=\frac{2X_m\{(a_{m+1}-a_1)X_1^2+\cdots+(a_{m+1}-a_m)X_{m-1}^2+(a_{m+1}-a_i)\}}{(X_1^2+\cdots+X_m^2+1)^2}$$

a_{m+1} は他の a_j $(j=1,\cdots,m)$ より大きいから，上の式の右辺は $X_m=0$ のとき，かつそのときに限って 0 になる。

次に，f を $X_m=0$ に制限した $f|_{X_m=0}$ を考える。

$$(3.34)\quad f|_{X_m=0}(X_1,\cdots,X_{m-1})=\frac{a_1X_1^2+\cdots+a_{i-1}X_{i-1}^2+a_i+a_{i+1}X_i^2+\cdots+a_mX_{m-1}^2}{X_1^2+\cdots+X_{i-1}^2+1+X_i^2+\cdots+X_{m-1}^2}.$$

$f|_{X_m=0}$ を X_{m-1} で微分すると，上と同じ理由で，この微分は $X_{m-1}=0$ のとき，かつそのときに限って 0 になる。以下同様に進むと，座標近傍 U_i 上にある f の臨界点は