No.

Date

$$(2.81)\qquad h_j : U_j \to \mathbb{R}$$

を (U_j, K_j) に適合した台形関数とする。h_j は C^∞ 級で，$0 \leqq h_j \leqq 1$ であり，K_j のある開近傍上で 1，その開近傍を含む (U_j 内の) コンパクト集合 L_j の外では 0 になっていた．h_i を U_j の外で 0 と定義して，M全体の C^∞ 級関数に拡張することができる．拡張された関数をふたたび

$h_j : M \to \mathbb{R}$ と書く．

U_j 内のベクトル場 X_j の h_j 倍というベクトル場

$$(2.82)\qquad h_j X_j$$

を考える．すなわち，U_j の各点 p に「ベクトル $X_j(p)$ の $h_j(p)$ 倍のベクトル $h_j(p)X_j(p)$」を対応させるベクトル場である．このベクトル場も，U_j の外の点では常にゼロベクトルを対応させることにして，M上の C^∞ 級ベクトル場に拡張できる．これもふたたび $h_j X_j$ と書くことにする．

$j=1,2,\cdots k$ のすべてについてこのような $h_j X_j$ を構成しそれらを足し合わせた和 X を考えよう．：

$$(2.83)\qquad X = \sum_{j=1}^{k} h_j X_j$$

この X が求める上向きベクトル場である．

臨界点でない点 p のところで，X による f の微分が $X \cdot f > 0$ であることを説明しよう．U_j が p を含めば $(X_j \cdot f)(p) > 0$，含まなければ $h_j X_j(p) = 0$ であるから，上の和の各項による微分は $(h_j X_j \cdot f)(p) \geqq 0$ である。ところが，M はコンパクト集合 $K_1, K_2, \cdots, K_k$ により被覆されていたので，p はどれか少なくとも1つの K_j に含まれている．そこでは，$h_i = 1$ であり，$(X_j \cdot f)(p) > 0$ であるから，上の和 (2.83) は少なくとも1つの項による f の微分は確実に >0 である．結局 $X \cdot f > 0$ が証明できた．

臨界点 p_0 のところで X はどうなっているだろうか．p_0 の十分小さい近傍 V はただ1つの U_i に含まれていた．その近傍 V では $h_i = 1$ であり，しかも U_i 上では f は標準形に書かれていたので，V 上で $h_i X_i$ は (2.80) の形のベクトル場である．その他の $h_j X_j$ は V では 0 なのだから，結局，X は定義 2.29 の条件 (ii) も満たしている．

これで，上向きベクトル場の存在が証明された．∎

多様体 M 上のベクトル場 X の積分曲線を説明しておこう．曲線 $c(t)$ がベクトル場 X の積分曲線であるというのは，その曲線の定義域に属する任意の t について，