No.

Date

このような行列 $A_\theta^{(i)}$ は m 個ある。行列 $B_\theta^{(ik)}$ と行列 $C_\theta^{(ik)}$ は合わせて

$$\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}=m(m-1)$$

個あるから，A, B, C 3種類の行列を合わせて $m+m(m-1)=m^2$ 個ある。これは $U(m)$ の次元に等しい，これら A, B, C の行列の回転の方向によって，$U(m)$ の接ベクトル空間が張られて，$SO(m)$ のときと同様の議論ができるわけである。

結果は，$f: U(m)\to\mathbb{R}$ の臨界点は補題3.12の主張する形と同様に，対角線上に，±1 が並ぶ対角型のユニタリ行列である．ただし，回転群のときと違い，$\det=1$ である必要はない。

対角線上に $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ $(\varepsilon_i=\pm1)$ が並び，他は0であるようなユニタリ行列 U における $f: U(m)\to\mathbb{R}$ の Hesse 行列は，対角型であって，その指数は次のようにして求められる，$\varepsilon_i=1$ であるような番号 i を小さいほうから並べたものが，

$$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n$$

であったとすると，指数は，

$$(2i_1-1)+(2i_2-1)+\cdots+(2i_n-1)$$

である。すべての ε_i が -1 に等しい場合は，指数は0である。 □

例 3.14（特殊ユニタリ群 $SU(m)$） ユニタリ行列の行列式は絶対値が1の複素数 $\exp(\sqrt{-1}\theta)$ であるが，とくに行列式が1であるようなユニタリ行列を特殊ユニタリ行列という。m 行 m 列の特殊ユニタリ行列全体のなす Lie 群を m 次の特殊ユニタリ群（*special unitary group*）と呼び，$SU(m)$ という記号で表す．$\det=1$ の条件によって $U(m)$ より 1次元だけ次元が減るので，$\dim SU(m)=\dim U(m)-1=m^2-1$ である。$m=1$ のとき，$SU(1)$ は1点（自明群）である。以後，$m\geq2$ と仮定しよう。

補題 3.15 $f=\Re(c_1z_{11}+c_2z_{22}+\cdots+c_mz_{mm})$ を例3.13で構成した Morse 関数 $f: U(m)\to\mathbb{R}$ とする．（ただし，$0<c_1<c_2<\cdots<c_m$）． もし，c_1 に比べて c_i が十分に大であれば，f を部分群 $SU(m)$ に制限した関数 $f|SU(m): SU(m)\to\mathbb{R}$ は $SU(m)$ 上の Morse 関数になる。その臨界点は，対角線上に ±1 が並び行列式が1の対角行列である。

［証明］ ユニタリ群を考えるときに使った行列 $B_\theta^{(ik)}$，$C_\theta^{(ik)}$，$A_\theta^{(i)}$ のうち，$B^{(ik)}$ と $C_\theta^{(ik)}$ は特殊ユニタリ行列である。$A_\theta^{(i)}$ はそうではないが，

$$D_\theta^{(i)}=A_\theta^{(i)}\cdot\{A_\theta^{(1)}\}^{-1}\quad,\ i=2,\cdots,m$$