この分解は、球面を南半球と北半球に分解することに相当する。 □

逆に、次の定理が成り立つ。

定理3.6 m次元コンパクト多様体M上に臨界点が2つだけのMorse関数$f: M \to \mathbb{R}$があれば、Mはm次元球面S^mに同相である。さらに、$m \leqq 6$ならば、MはS^mに微分同相である。

定理1.16は上の定理の2次元の場合である。そのときは、臨界点が2個のMorse関数が存在するという条件のもとに、閉曲面Mが2次元球面S^2に微分同相であることが結論された。次元が6以下の場合には同様の結論が成り立つが、7次元以上の一般のm次元では、上の定理のように、MがS^mに同相であることまでしかいえず、微分同相であることは結論できない。すなわち、微分同相でないような滑らかなm次元多様体Mが存在するのである。このような多様体をエキゾチック球面(exotic sphere)という。エキゾチック球面は1956年にJ. Milnorにより、7次元ではじめて発見された。

定理3.6の証明は第1章の定理1.16の証明と同様である。その証明を追っていくとわかるように、一般次元で、MとS^mが微分同相であることを証明しようとしてうまくいかなくなるのは、$m-1$次元球面の間の微分同相写像

(3.24) $$h: S^{m-1} \to S^{m-1}$$

$m=3$

をm次元円板の間の微分同相写像

(3.25) $$\tilde{h}: D^m \to D^m$$

に拡張するところである。$m \leqq 6$なら、このような拡張が可能であるが$m \geqq 7$では拡張できる保証がない。

ただし、$\tilde{h}$の微分可能性を要求しなければ、次元にかかわらず、どんな同相写像$h: S^{m-1} \to S^{m-1}$でも必ずある同相写像$\tilde{h}: D^m \to D^m$に拡張できる。(演習問題3.1)これが、微分同相のかわりに単に同相であることを主張する定理3.6が(次元にかかわらず)成り立つ理由である。

例3.7 (球面の直積$S^m \times S^n$) $f_m: S^m \to \mathbb{R}$と$f_n: S^n \to \mathbb{R}$を例3.5の高さ関数とする。AとBを$1 < A < B$を満たす実数とすれば、

(3.26) $$f = (A + f_m)(B + f_n): S^m \times S^n \to \mathbb{R}$$