No.

Date

また，$a_1, \cdots, a_m$の絶対値がいくらでも小さなものが選べる．この$a_1, \cdots, a_m$が求めるものである．

実際，$\tilde{f}(x_1, \cdots, x_m) = f(x_1, \cdots, x_m) - (a_1x_1 + \cdots + a_mx_m)$ が U上の Morse関数であることを証明しよう．

点p_0が関数$\tilde{f}$の臨界点であれば，

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) - a_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{2.46}$$

であるから，写像 $h: U \to \mathbb{R}^m$の定義によって

$$h(p_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} . \tag{2.47}$$

しかし選び方から $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

は $h: U \to \mathbb{R}^m$の臨界点ではない．したがって，p_0は$h: U \to \mathbb{R}^m$の臨界点でない．
前に見たように，これは，$\det Hf(p_0) \neq 0$と同値である．fと$\tilde{f}$の差は1次式だから，Hesse行列は共通である．

$$Hf(p_0) = H\tilde{f}(p_0). \tag{2.48}$$

したがって，$\det Hf(p_0) \neq 0$と $\det H\tilde{f}(p_0) \neq 0$とは同値であり，$p_0$は$\tilde{f}$の非退化な臨界点である．

これで補題2.21が証明できた．■

証明すべきMorse関数の存在定理2.20のなかにでてきた，「2つの関数が近い」ということ，正確にいうと，2つのC^∞級関数$f, g : M \to \mathbb{R}$が「C^2の意味で近い」というのはどういうことかを，ここではっきりさせておこう．

ある開集合Uのなか全体に1つの局所座標系$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$が定義されているとき，この開集合を簡単に座標近傍と呼ぶ。座標近傍Uにはその座標系$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$を付随させておくものとする．

fとgがC^2の意味で近いということを，まず，1つの座標近傍Uに含まれているコンパクト集合K（例えば適当な半径のm次元円板D^m）の上で考える．$\varepsilon > 0$を任意の正数とするとき，次のように定義する．