No.
Date

Morse関数の存在定理2.20を証明しよう.

[証明] 関数の(C^2, ε)近似を論ずるため，Mの座標近傍U_ℓ $(\ell=1,2,\cdots,k)$による被覆と，U_ℓのなかのコンパクト集合K_ℓ $(\ell=1,2,\cdots,k)$によるMの被覆が固定されていることを再確認しておく.

はじめに与えられた関数$g: M \to \mathbb{R}$をf_0とおく: $f_0 = g$. 以下の証明のアイデアは，f_0から出発し，ℓに関する数学的帰納法で，$\ell=1,2,\cdots$と順に関数f_ℓを構成していき，f_ℓが$K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\ell$のなかに退化した臨界点をもたないようにすることである. $\ell=1,2,\cdots$と進んで，$\ell=k$までできれば，$(M = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_k$であるから$)$ f_kが求めるMorse関数になっている.

簡単のため$K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\ell$のことを$C_\ell$と書く. コンパクト集合の有限和はまたコンパクトだから，C_ℓもコンパクトである. 形式的に$C_0 = \phi$とおく.

数学的帰納法の仮定として，$C_{\ell-1}$のなかに退化した臨界点のない関数$f_{\ell-1}: M \to \mathbb{R}$が構成されたとする. $f_{\ell-1}$を使ってf_ℓを構成することを考えよう.

座標近傍U_ℓとそのなかのコンパクト集合K_ℓに着目する. U_ℓに付随している座標系が$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$であるとする. 補題2.21により，絶対値の十分小さい実数$a_1, a_2, \cdots, a_m$があって.

$$(2.56) \qquad f_{\ell-1}(x_1, x_2, \cdots, x_m) - (a_1x_1 + \cdots + a_mx_m)$$

はU_ℓ上のMorse関数になる. しかし，このままでは，$a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$という式が座標近傍U_ℓの外では意味をなさないので，上の式を少し修正する必要がある.

そのために便利な技法が多様体論で知られているので，補題として結果を引用する.

補題2.27 Uを座標近傍，KをUのなかのコンパクト集合とする. そのとき，次の性質(i)(ii)(iii)をもつU上のC^∞関数$h: U \to \mathbb{R}$が存在する.

(i) $0 \leqq h \leqq 1$

(ii) hはKのある開近傍(すなわち，Kを含むある開集合)Vの上で恒等的に1である.

(iii) hはそのVを含むあるコンパクト集合$L \subset U$の外では恒等的に0である.

(図2.7参照. $K \subset V \subset L \subset U$となっている.) $\square$