張り付けたもの

$$D^m \cup_{\varphi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1}$$

はm次元のハンドル体である. これを記号で

$$\mathcal{H}(D^m : \varphi_1)$$

と表すことにする.

(iii) $N = \mathcal{H}(D^m ; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1})$ が m次元のハンドル体なら, C^∞ 級の接着写像 $\varphi_i : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \to \partial N$ によって N に λ_i-ハンドル $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ を張り付けたもの

$$N \cup_{\varphi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$$

はm次元のハンドル体である これを記号で

$$\mathcal{H}(D^m ; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$$

と表す. □

なお,各ハンドルを張り付けるごとに平滑化を施すことによって,ハンドル体は常に C^∞ 多様体と考えることにする.

0-ハンドルの接着は,非交和をとるに過ぎないので,指数 $\lambda_i = 0$ の場合は接着写像 φ_i を考える必要はない. したがって,$\lambda_i = 0$ の場合,上の定義の記号 $\mathcal{H}(D^m ; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$ のなかの接着写像 φ_i には意味がないのであるが,一応形式的に,φ_i と書いておく. また,上の定義において (i) と (iii) があれば,論理的には十分であるが,ハンドル体のイメージを具体的にするために. (ii) を付け加えておいた.

定理3.4 (多様体のハンドル分解) 閉じたm次元多様体上に, Morse関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が与えられると, f を使って, M に, m次元のハンドル体の構造を入れることができる. このハンドル体のハンドルは, f の臨界点に対応しており, ハンドル体の指数は対応する臨界点の指数に等しい □

要するに, M をあるハンドル体として表すことができるのである. 多様体をハンドル体として表すことを多様体のハンドル分解という.

[証明] 与えられた Morse関数 $f : M \to \mathbb{R}$ の臨界点はすべて異なる臨界値をもつとし, それらを臨界値の小さい順にならべて,

$$p_0, p_1, \cdots, p_n$$