3つの関数 $z=x^2+y^2$, $z=x^2-y^2$, $z=-x^2-y^2$ のグラフ(図1.4)から明らかなように、点 p_0 の指数が0ならば、f は点 p_0 で極小値をとる。指数が1ならば、f は点 p_0 の近傍で、$f(p_0)$ より真に大きな値をとることもあるし、真に小さい値をとることもある。指数が2ならば、f は点 p_0 で極大値をとる。したがって、非退化な臨界点 p_0 の指数は、p_0 のまわりでの f の振る舞いによって確定する。

指数の確定性(well-definedness)は次のように証明することもできる。まえの例1.5で見たように、3つの関数 $z=x^2+y^2$, $z=x^2-y^2$, $z=-x^2-y^2$ の Hesse 行列はそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

であった。

これらの行列は、f の Hesse 行列 $H_f(p_0)$ を対角化したものと考えられる。すなわち、適当な行列 J をみつけて、${}^tJ\,H_f(p_0)\,J$ を計算し、それが対角線の上だけに0でない数の並んだ「対角行列」になるようにしたものと思えるわけである。線形代数で知られた Sylvester の法則によれば、$H_f(p_0)$ のような対称行列を対角行列に直したときに、対角線上に現れるマイナスの数は、はじめの $H_f(p_0)$ で決まり、対角化の仕方によらない。これが指数の確定性に他ならない。

第2章で述べるように、定理1.11と同様な定理が一般の m 次元でも証明され、非退化な臨界点 p_0 の指数が定義できる。その場合の指数の確定性も Sylvester の法則によって保証されるのである。

§1.4 曲面上の Morse 関数

前節までの考察は、すべて、臨界点の近傍での「局所的」な考察であった。この節から空間全体の形状にかかわる「大域的」な考察に移ろう。この節では、2次元の空間、すなわち曲面(surface)を考える。図1.5と図1.6は閉じた曲面、いわゆる閉曲面(closed surface)の例である。順に、球面(sphere)、トーラス(torus)、種数2の閉曲面、種数3の閉曲面が並んでいる。

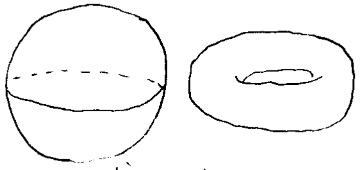

図1.5 球面とトーラス

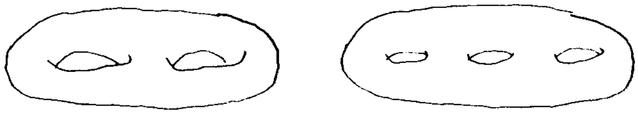

図1.6 種数2の閉曲面と種数3の閉曲面