証明については、演習問題1.3とその解答を参照してほしい。この事実は「当り前の」事実ではないことを強調しておきたい。実際、同様の事実は6次元以下の円板については正しいが、7次元以上では一般には成立しない。

この節を終える前に、次の基本的事実を証明しておく。

補題 1.21 閉曲面M上のMorse関数 $f: M \to \mathbb{R}$ の臨界点は有限個しかない。

[証明] $f: M \to \mathbb{R}$ はMorse関数なので、fの臨界点はすべて非退化である。fの臨界点が、

$p_1, p_2, p_3, \cdots$

のように無限個あるとして矛盾をたそう。系1.12により、非退化な臨界点は孤立しているから、M上で各臨界点p_nの近傍U_nを十分小さく選べば、U_nは臨界点をp_nしか含んでいないようにできる。(このことが各$n=1,2,3,\cdots$についていえる)。そこで、M上の連続関数 $h: M \to \mathbb{R}$ を点p_nで値nをとり、また、どのU_nにも属さない点では値0をとるように構成する。(U_n内の臨界点p_nで値nをとりU_nの「周辺部」で0になるようなU_n上の連続関数を各$n=1,2,3,\cdots$について構成しておき、それらをU_nたちの外では0としてつなぎあわせればよい。

任意のnについて、hの値がnになる点p_nがあるので、hについては最大値の定理が成り立たない。これはMのコンパクト性に矛盾する(定理1.18参照)。これで、補題1.21が証明された。 ■

§1.5 ハンドル分解

前節の定理1.16は、ある特別な場合であるが、曲面上のMorse関数によってその曲面の形状が決まる、ということを示している。Morse理論(とくに有限次元空間上のMorse理論)は、このような現象をもっと体系的に研究しようとするものである。そのとき有力な手段になるのが、「ハンドル分解」と呼ばれる操作である。ここでは曲面を例にとって、ハンドル分解を説明しよう。

閉曲面Mとその上のMorse関数

$$f: M \to \mathbb{R}$$

から出発する。

以下、閉曲面Mは連結(connected)、すなわち全体として一つながりであると仮定する。

さて、Morse関数 $f: M \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、fの値がある実数値t以下であるような点全体のなすMの「部分曲面」をM_tという記号で表そう。すなわち

$$M_t = \{p \in M \mid f(p) \leqq t\} \qquad (1.51)$$