No.

Date

を得たとする. 臨界点 p_i の指数は λ_i であるとする. f に適合した M 上の上向きベクトル場 X を決めておく.

定理3.4を臨界点 p_i の番号 i に関する帰納法で証明しよう. p_i での f の値を c_i とし, 任意の i (ただし $0 \leqq i \leqq n$) について, $M_{c_i+\varepsilon}$ がハンドル体であることを示すのである.

まず $i=0$ のとき, 臨界点 p_0 は f の最小値 c_0 を与えるから, その指数は 0 であり, $M_{c_0+\varepsilon}$ は は m 次元円板 D^m に微分同相である. ハンドル体の三段階の定義の(i)より, D^m は確かに m 次元のハンドル体であるから, $i=0$ については帰納法の主張は正しい. この場合には, $M_{c_0+\varepsilon}$ は 0-ハンドルそのものである.

次に $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ がハンドル体 $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1})$ であると仮定して, $M_{c_i+\varepsilon}$ がハンドル体 $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$ であることを証明しよう.

$M_{c_i+\varepsilon}$ は $M_{c_i-\varepsilon}$ に λ_i-ハンドルを接着したものと同相である. (定理3.2). そのハンドルの接着写像

(3.19) $\quad \varphi: \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \to \partial M_{c_i-\varepsilon}$

は, 図3.2のように, 曖昧さがなく自然に決っている。区間 $[c_{i-1}+\varepsilon, c_i-\varepsilon]$ には臨界値がないから, $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ は $M_{c_i-\varepsilon}$ に微分同相である (定理3.1). この微分同相は, 上向きベクトル場 X に沿って $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ を $M_{c_i-\varepsilon}$ まで流すことによって与えられる. こうして与えられる微分同相写像を

(3.20) $\quad \Phi: M_{c_{i-1}+\varepsilon} \to M_{c_i-\varepsilon}$

としよう.

さて, $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ はハンドル体 $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1})$ であることが帰納法で仮定されているから, $M_{c_i-\varepsilon}$ も同じハンドル体に微分同相である. したがって, $M_{c_i-\varepsilon}$ に λ-ハンドルを接着して得られる $M_{c_i+\varepsilon}$ もハンドル体に微分同相である. (三段階定義の(iii)).

これで, 一応定理3.4の証明ができた. しかし, 新しく付け加える λ_i-ハンドルの接着写像について, もう少し詳しく考えよう。帰納法の仮定により, $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ はハンドル体

$$\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1})$$

であるから, 上の微分同相写像 Φ はハンドル体 $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1})$ から, $M_{c_i-\varepsilon}$ への微分同相写像であると考えられる. さて, 厳密にいえば, λ_i-ハンドルはハンドル体 $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \cdots \varphi_{i-1})$ に直接ついているのではなく, $M_{c_i-\varepsilon}$ についており, その接着写像は自然に決っている. すなわち, (3.19) の φ である。したがって, (3.20) の微分同相写像 Φ によって $M_{c_i-\varepsilon}$ を ハンドル体