Metody optymalizacji

Zestaw nr 1

Tomasz Jankowiak 249006

03.04.2023

1 Wstęp

Celem było zapoznanie się z pakietem GLPK (GNU Linear Programming Kit), przeznaczonym do rozwiązywania problemów programowania liniowego oraz rozwiązanie kilku takich problemów, co przedstawiono w następnych rozdziałach.

2 Macierz Hilberta

Macierz Hilberta została wprowadzona w 1894 roku przez niemieckiego matematyka Davida Hilberta. Jest to macierz kwadratowa z elementami danymi wzorem $h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$. Przykładowo macierz Hilberta 5x5 jest postaci: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$. Wykorzystuje się ją m.in. w następującym teście na dokładność i odporność algorytmów programowania liniowego.
Minimalizujemy następującą funkcję celu:
min $c^T x$, przy warunkach $Ax = b$, $x \geqslant 0$, gdzie
$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, ..., n,$
$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, \quad i = 1, ..., n.$
Rozwiązaniem tego zagadnienia jest wektor kolumnowy $x_i = 1, \quad i = 1, ..., n$. Występująca w tym teście macierz Hilberta A powoduje złe uwarunkowanie zagadnienia nawet dla niedużych n.
Model zapisano w języku GNU MathProg. Liczono błąd względny $||x - \hat{x}||_2/||x||_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x_i})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 - \hat{x_i})^2}}{\sqrt{n}}$, gdzie x̂ - rozwiązanie obliczone, x - rozwiązanie dokładne (równe 1). Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli.

n	błąd względny
2	$5,66 \cdot 10^{-16}$
3	$3,11 \cdot 10^{-15}$
4	$1,88 \cdot 10^{-13}$
5	$3,09 \cdot 10^{-12}$
6	$1,85 \cdot 10^{-10}$
7	$9,93 \cdot 10^{-9}$
8	0,73
9	0,59
10	0,73
11	0,92
12	0,95

Rzeczywiście nawet niewielka macierz Hilberta powoduje złe uwarunkowanie zagadnienia. Wraz z rosnącym n złośliwość tej macierzy również rośnie. Znaczący rozmiar błędu pojawia się od n=8. Dla $n \leqslant 7$ można jeszcze rozwiązać problem z dokładnością do co najmniej 2 cyfr.

3 Problem przemieszczania dźwigów

W pewnej firmie budowlanej występuje problem niedoboru i nadmiaru dźwigów samojezdnych w siedmiu różnych miastach. Należy ustalić optymalny plan przemieszczania kamperów pomiędzy miastami, minimalizując koszty transportu, zależne od standardu typu dźwigu i odległości między miastami.

	Niedobór		Nadmiar	
Miejscowości	typ I	typ II	typ I	typ II
Opole	–	2	7	–
Brzeg	10	–	–	1
Nysa	–	–	6	2
Prudnik	4	–	–	10
Strzelce Opolskie	–	4	5	–
Koźle	8	2	–	–
Racibórz	–	1	–	–
Razem	22	9	18	13

Dane wejściowe: odległości pomiędzy poszczególnymi miastami (ustalone na podstawie map Google), liczby nadmiarów i niedoborów poszczególnych typów dźwigów w poszczególnych miastach, koszt transportu dźwigów danego typu. Dźwig typu 2 może zastąpić dźwig typu 1. Koszt transportu dźwigu typu 1 jest proporcjonalny do odległości, a koszt transportu dźwigu typu 2 jest o 20% wyższy.

Rozwiązano problem, zapisując go w języku *GNU MathProg*. Sparametryzowano zapis modelu i oddzielono model od danych. Otrzymane wyniki przedstawiono poniżej:

Move 4 Type1 cranes from Opole to Brzeg
Move 3 Type1 cranes from Opole to Kozle
Move 1 Type2 cranes from Brzeg to Brzeg
Move 2 Type2 cranes from Nysa to Opole
Move 5 Type1 cranes from Nysa to Brzeg
Move 1 Type1 cranes from Nysa to Prudnik
Move 3 Type2 cranes from Prudnik to Prudnik
Move 4 Type2 cranes from Prudnik to Strzelce
Move 2 Type2 cranes from Prudnik to Kozle
Move 1 Type2 cranes from Prudnik to Raciborz
Move 5 Type1 cranes from Strzelce to Kozle

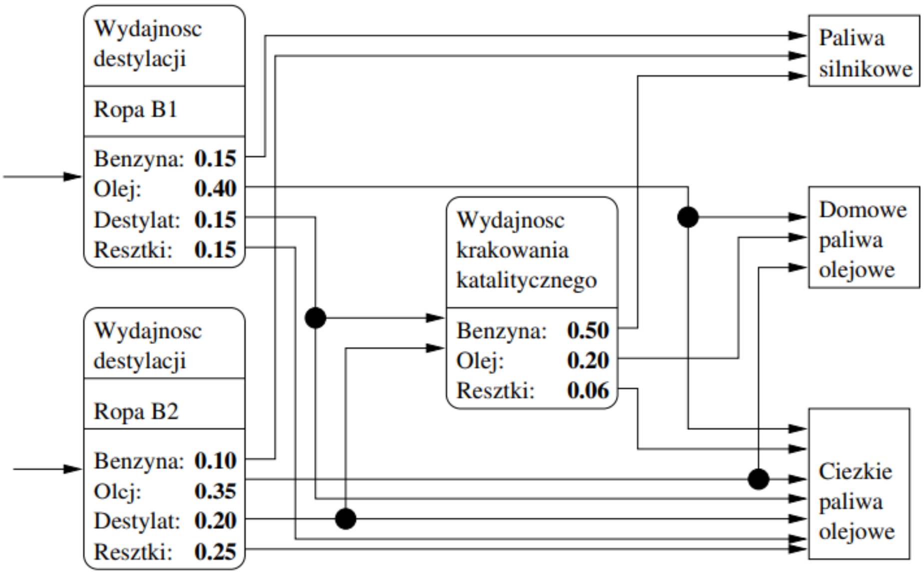
Typ dźwigu	Liczba dźwigów	Z (miasto początkowe)	Do (miasto docelowe)
1	3	Opole	Koźle
1	5	Nysa	Brzeg
1	1	Nysa	Prudnik
1	5	Strzelce Opolskie	Koźle
2	1	Brzeg	Brzeg
2	2	Nysa	Opole
2	3	Prudnik	Prudnik
2	4	Prudnik	Strzelce Opolskie
2	2	Prudnik	Koźle
2	1	Prudnik	Racibórz

Transport dźwigu do tego samego miasta należy interpretować jako zastąpienie dźwigu typu 1 dźwigiem typu 2. Całkowity koszt wszystkich operacji wyniósł 1387.2 (koszt transportu dźwigu typu 1 ustalono na 1/km.

Po usunięciu warunku całkowitoliczbowości zmiennych decyzyjnych wynik pozostał taki sam, zatem założenie to nie było konieczne.

4 Optymalizacja produkcji

Na schemacie przedstawiono wydajności procesów rafinerii. Chcemy zminimalizować koszty produkcji, przy zachowaniu odpowiednich ograniczeń i warunków.



Zmienne decyzyjne

- *B1* - liczba ton ropy B1
- *B2* - liczba ton ropy B2
- *destylat_B1_krak* - ilość destylatu z ropy B1 do krakowania
- *destylat_B2_krak* - ilość destylatu z ropy B2 do krakowania
- *olej_B1_domowe* - ilość oleju z ropy B1 do domowych paliw olejowych
- *olej_B2_domowe* - ilość oleju z ropy B2 do domowych paliw olejowych

Ograniczenia

- Składniki produktów końcowych:
  paliwa silnikowe $\leqslant 0.15 \cdot B1 + 0.1 \cdot B2 + 0.5 \cdot (destylat\_B1\_krak + destylat\_B2\_krak)$
  domowe paliwa olejowe $\leqslant olej\_B1\_domowe + olej\_B2\_domowe + 0.2 \cdot (destylat\_B1\_krak + destylat\_B2\_krak)$
  ciężkie paliwa olejowe $\leqslant 0.15 \cdot B1 + 0.25 \cdot B2 + 0.06 \cdot (destylat\_B1\_krak + destylat\_B2\_krak) +$
  $+(0.15 \cdot B1 - destylat\_B1\_krak) + (0.2 \cdot B2 - destylat\_B2\_krak) +$
  $+ (0.4 \cdot B1 - olej\_B1\_domowe) + (0.35 \cdot B2 - olej\_B2\_domowe)$

- Wymagana produkcja (w tonach):
  paliwa silnikowe $\geqslant 200000$
  domowe paliwa olejowe $\geqslant 400000$
  ciężkie paliwa olejowe $\geqslant 250000$

- Zawartość siarki w domowym paliwie olejowym:
  $olej\_B1\_domowe \cdot 0,002 + olej\_B2\_domowe \cdot 0,012 + destylat\_B1\_krak \cdot 0,003 + destylat\_B2\_krak \cdot 0,025$
  $\leqslant 0,005 \cdot domowe\_paliwa\_oliwowe$

Funkcja celu

Minimalizacja kosztów produkcji (w dolarach):

$$\min 1300 \cdot B1 + 1500 \cdot B2 + 10 \cdot (B1 + B2) + 20 \cdot (destylat\_B1\_krak + destylat\_B2\_krak)$$

Tona ropy B1 kosztuje 1300$, a tona ropy B2 kosztuje 1500$. Koszty destylacji wynoszą 10$ za tonę, a koszty obróbki destylatów w próżni w jednostce krakowania są równe 20$ za tonę.

Rozwiązanie

Do rozwiązania zagadnienia użyto solvera glpk. Zmienne decyzyjne są następujące:

- $B1 = 1\ 026\ 030$
- $B2 = 0 \pm 165$
- $destylat\_B1\_krak = 92\ 190.9$
- $destylat\_B2\_krak = 0$
- $olej\_B1\_domowe = 381\ 562$
- $olej\_B2\_domowe = 0$

Interpretacja

Żeby zminimalizować koszt produkcji surowców, trzeba przetworzyć 1 026 030 ton ropy *B1*, pomijając ropę *B2*, której w ogóle nie opłaca się przetwarzać. Do krakowania należy przeznaczyć 92 190.9 ton destylatu, a resztę, czyli 61 713.7 ton do produkcji ciężkich paliw olejowych. Olej należy rozdzielić między domowe i ciężkie paliwa olejowe, przeznaczając im odpowiednio 381 562 i 28 850.3 ton. Koszt tego procesu w rozpatrywanej jednostce czasu wyniósł 1 345 943 601 $.