Metody optymalizacji

Zestaw nr 2

Tomasz Jankowiak 249006

23.05.2023

1 Wstęp

Celem było zapoznanie się z pakietem JuMP (*Julia for Mathematical Programming*) i z językiem Julia oraz rozwiązanie kilku problemów optymalizacyjnych, których rozwiązania przedstawiono w następnych rozdziałach.

2 Tartak

Deskę o szerokości 22 cali można pociąć na deski o szerokościach 7, 5 i 3 cali na 11 różnych sposobów, przedstawionych w poniższej tabeli.

Deska (w calach)	sposób cięcia standardowej 22-calowej deski										
	I	II	II	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
7	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	3	2	1	4	3	2	1	0
3	0	1	2	0	1	3	0	2	4	5	7
odpad	1	0	2	0	2	1	2	1	0	2	1

Zmienne decyzyjne

- x_i - liczba standardowych desek (22 cale) rozcinanych i-tym sposobem

Ograniczenia

- Produkcja wymaganej w zamówieniu liczby desek szerokości odpowiednio 7, 5 i 3 cali:

$$d_7 = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} \geqslant 110$$

$$d_5 = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} + 0x_{11} \geqslant 120$$

$$d_3 = 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 3x_6 + 0x_7 + 2x_8 + 4x_9 + 5x_{10} + 7x_{11} \geqslant 80$$

- Nieujemność zmiennych decyzyjnych:

$$x_i \geqslant 0$$

- Całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych:

$$x_i \in \mathbb{Z}$$

Funkcja celu

Minimalizacja ilości odpadów (nadmiarowe deski traktujemy jako odpady):

$$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 2x_7 + 1x_8 + 0x_9 + 2x_{10} + 1x_{11} + 7(d_7 - 110) + 5(d_5 - 120) + 3(d_3 - 80) \to \min$$

Rozwiązanie

- $x_1 = 0$

- $x_2 = 45$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 20$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $x_7 = 0$
- $x_8 = 0$
- $x_9 = 8$
- $x_{10} = 0$
- $x_{11} = 1$

Interpretacja Aby wykonać zamówienie, minimalizując ilość odpadów, firma powinna pociąć 45 desek sposobem II (dwie deski 7-calowe, jedna 5-calowa i jedna 3-calowa), 20 desek sposobem IV (jedna deska 7-calowa i trzy deski 5-calowe), 8 desek sposobem IX (dwie deski 5-calowe i cztery 3-calowe) i 1 deskę sposobem XI (siedem desek 3-calowych). Zostanie wówczas 18 cali odpadów.

3 Szeregowanie zadań na jednej maszynie

Rozpatrujemy problem szeregowania zadań na jednej maszynie. Poszukujemy harmonogramu, minimalizującego ważoną sumę momentów zakończenia wszystkich zadań.

Dane

- zbiór zadań J={1,...,n},
- czasy wykonania zadań p_j, $j \in [n]$,
- czasy momenty gotowości zadań r_j, $j \in [n]$,
- wagi zadań w_j.

Zmienne decyzyjne

$$x_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli zadanie j rozpoczyna się w momencie } t-1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ograniczenia

- Każde zadanie rozpoczyna się w dokładnie jednym momencie:

$$\forall_{j \in J} \sum_{t=1}^{T-p_j+1} x_{jt} = 1$$

- Moment rozpoczęcia każdego zadania przypada dopiero, gdy jest ono dostępne lub później.

$$\forall_{j \in J} \; t - 1 \geqslant r_j.$$

- Jednocześnie na maszynie może być wykonywane co najwyżej jedno zadanie:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\max\{1, t-p_j+1\}}^{t} x_{js} \leqslant 1.$$

- Binarność zmiennych decyzyjnych:

$$x_{jt} \in \{0, 1\}.$$

Funkcja celu

$$\sum_{j \in J} w_j C_j \to \min ,$$

gdzie C_j jest momentem zakończenia zadania j.

Rozwiązanie
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

Interpretacja
Aby zminimalizować ważoną sumę momentów zakończeń wszystkich zadań dla tych danych należy wykonać na maszynie zadania w kolejności 5, 1, 3, 2, 4. Zadanie 5. zaczynamy w chwili 0, zadanie 1. w chwili 2, zadanie 3. w chwili 5, zadanie 2. w chwili 10 i zadanie 4. w chwili 14. Funkcja celu, czyli ważona suma momentów zakończenia zadań wyniesie wówczas 22.

4 Szeregowanie zadań na maszynach

Rozpatrujemy problem szeregowania zadań na kilku maszynach. Poszukujemy harmonogramu, minimalizującego czas zakończenia wszystkich zadań.

Dane

- zbiór zadań J={1,...,n},
- czasy wykonania zadań p_j, $j \in [n]$,
- relacje poprzedzania, jeśli $i \to j$, to zadanie j nie może rozpocząć się przed ukończeniem zadania i.
- liczba maszyn m.

Zmienne decyzyjne

$$x_{jtm} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli zadanie j rozpoczyna się w momencie } t-1 \text{ na maszynie } m, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ograniczenia

- Każde zadanie rozpoczyna się w dokładnie jednym momencie i jest wykonywane na jednej maszynie:

$$\forall_{j \in J} \sum_{t=1}^{T-p_j+1} x_{jtm} = 1$$

- Moment rozpoczęcia każdego zadania przypada dopiero, gdy zakończyły się zadania poprzedzające lub później.

$$\forall_{j \in J} \ \forall_{r \in R_j} \ t - 1 \geqslant r.$$

- Jednocześnie na maszynie może być wykonywane co najwyżej jedno zadanie:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\max\{1, t-p_j+1\}}^{t} x_{js} \leqslant 1.$$

- Binarność zmiennych decyzyjnych:

$$x_{jtm} \in \{0, 1\}.$$

- Funkcja celu

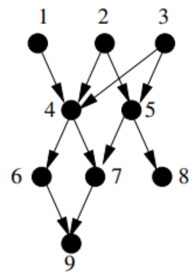
$$C_{max} \geqslant \max(p_j + t - 1) \cdot x_{jtm}$$

Funkcja celu

$$C_{max} \to \min,$$

gdzie C_{max} jest momentem zakończenia wszystkich zadań, $C_{max} = \max(p_j + t - 1) \cdot x_{jtm}$.

Rozwiązanie i interpretacja
Rozwiązanie odczytujemy osobno dla każdej maszyny analogicznie jak w poprzednim punkcie.
Przykładowy zestaw danych: Liczba maszyn $m = 3$, liczba zadań $n = 9$, czasy wykonania $p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 1,\ p_4 = 2,\ p_5 = 1,\ p_6 = 1,\ p_7 = 3,\ p_8 = 6,\ p_9 = 2$, relacje poprzedzania na poniższym rysunku.



Poniżej przedstawiono wizualizację otrzymanego rozwiązania na diagramie Gantta. Otrzymana funkcja celu dla tego zestawu danych: $C_{max} = 9$.