毕业设计理论笔记

钟 威

最后更改时间：March 12, 2013

凸规划问题基础

P_{17} 定义 1.2.1

称 S 是凸集，如果对于任意的 $x_1, x_2 \in S$ 和任意的 $\lambda \in [0,1]$, 都有：

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S \tag{1.2.1}$$

P_{17} 定义 1.2.3

任意的 $x_1, x_2 \in S$ 和任意的 $\lambda \in (0,1)$, 都有：

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{1.2.2}$$

P_{19} 定理 1.2.4

$f(x)$ 是凸函数的充要条件是：对于 S 中的任意一点 $\bar{x}$，都有：

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x}) \tag{1.2.6}$$

P_{20} 定义 1.2.6

$$\min \qquad f_0(x),\ x \in R^n \tag{1.2.10}$$
$$s.t. \qquad f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \tag{1.2.11}$$
$$h_i(x) = a_i^T x - b_i = 0,\ i = 1, \ldots, p. \tag{1.2.12}$$

其中 $f_0(x)$ 和 $f_i(x)$ 都是定义在 R^n 上的连续可微凸函数，而 $h_i(x)$ 是线性函数。

P_{20} 引理 1.2.8

若 $f(x)$ 是 R^n 上的凸函数，则对于任意的 $c \in R$，水平集：

$$S = \{x | f(x) \leq c, x \in R^n\} \tag{1.2.16}$$

是凸集。

P_{20} 定理 1.2.10

考虑凸规划问题 (1.2.10)→(1.2.12)，若 x^* 是它的局部解，则 x^* 也是它的整体解。

P_{21} 定理 1.2.12

若凸规划问题 (1.2.10)→(1.2.12) 中的目标函数 $f_0(x)$ 是严格凸函数，则该问题的解唯一。

P_{21} 定义 1.2.13

设凸规划问题 (1.2.10)→(1.2.12) 中变量 x 具有式：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_i \in R^{m_i}, \quad i = 1, 2. \quad m_1 + m_2 = n. \tag{1.2.22}$$

所示的分划。称 x_1^* 是该问题关于 x_1 的解，如果存在 $x_2^* \in R^{m_2}$，使得 $x^* = ({x_1^*}^T, {x_2^*}^T)^T$ 是该问题的解。

P_{22} 定理 **1.2.15**

设凸规划问题 (1.2.10)→(1.2.12) 中变量 x 具有式 (1.2.22) 的分划，记 $f_0(x) = \mathbf{F}_0(x_1, x_2)$。若 $\mathbf{F}_0(x_1, x_2)$ 分别是变量 x_1 和 x_2 的严格凸函数，则该问题对 x_1 的解唯一。

凸规划的对偶理论

P_{23} 定义 **1.2.16** 对偶问题

引进 Lagrange 函数：

$$\mathbf{L}(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x) \tag{1.2.35}$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$ 和 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)^T$ 是 Lagrange 乘子向量。由书上 P_{23} 的论述可知，在 $\lambda \leq 0$ 时：

$$\inf_{x \in R^n} \mathbf{L}(x, \lambda, \nu)$$

是 $f_0(x)$ 的下界。对于要找到最好的下界的问题，我们把：

$$\max \qquad g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in R^n} \mathbf{L}(x, \lambda, \nu) \tag{1.2.40}$$

$$s.t. \qquad \lambda \leq 0 \tag{1.2.41}$$

称为问题 (1.2.10)→(1.2.12) 关于 Lagrange 函数 (1.2.35) 的对偶问题，或简称为问题 (1.2.10)→(1.2.12) 的对偶问题。称 (1.2.10)→(1.2.12) 为原始问题。