ベクトルにかかっている行列を求める

定理

あるベクトル$x \in \mathrm{R}^n, y \in \mathrm{R}^m$の間に

$$Ax = y$$

という関係が成立している． xとyは既知であり，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$が未知の場合を考えよう．

このとき，かかっている行列Aはヤコビ行列を用いて

```
A = \frac{\partial y}{\partial x}
=\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots &
\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\
\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots &
\dfrac{\partial y_2}{\partial x_n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots &
\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\\
\end{bmatrix}
```

で求められる．

証明

$x \in \mathrm{R}^n$に対して定義される関数$f(x) \in \mathrm{R}$の全微分は

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

で与えられる．

$y = f(x) \in \mathrm{R}^m$でも同様に，全微分は

$$ dy_1 = f_1'(x) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1+ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots +\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n\ dy_2 =f_2'(x) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1+ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots +\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n\ \vdots\ dy_m =f_m'(x) = \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1+ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots +\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n $$

で与えられる．

ここでヤコビ行列Jを

$$ J = \frac{\partial f}{\partial x} =\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\ \end{bmatrix} $$

とおいたとき，上式は

$$dy = f'(x) = Jdx$$

と書ける．

一方，$y = Ax$が成立することから

$$dy = Adx$$

も成立する． したがって，$A = J = \partial y / \partial x$となる． （証明終了）