解説：ベクトルにかかっている行列を求める

上村知也

2025 年 4 月 10 日

定理. あるベクトル $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ の間に，行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が存在して，

$$y = Ax \tag{1}$$

という関係が成立している．x と y は既知であり，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が未知の場合を考えよう．

このとき，ベクトル x にかかっている行列 A はヤコビ行列を用いて

$$A = \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

で求められる．

証明. $x \in \mathbb{R}^n$ に対して定義されるスカラー関数 $f(x) \in \mathbb{R}$ の全微分は

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{3}$$

で与えられる．

ベクトル関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$ でも同様に，全微分は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_1 = f_1'(x) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\ \mathrm{d}y_2 = f_2'(x) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\ &\vdots \\ \mathrm{d}y_m = f_m'(x) &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる．

ここでヤコビ行列 J を

$$J = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{5}$$

とおいたとき，(4) は

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = J dx \tag{6}$$

と書ける．

一方，$y = Ax$ が成立することから

$$\mathrm{d}y = A\mathrm{d}x \tag{7}$$

も成立する．したがって，$A = J = \partial y / \partial x$ となる． □