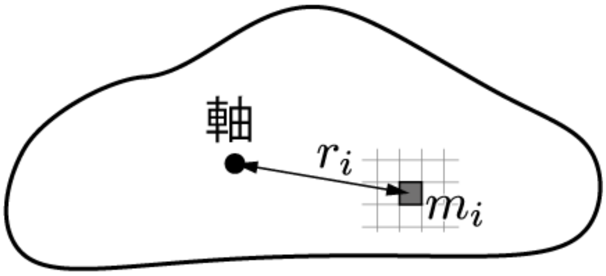
剛体の衝突力学（平面）

剛体に撃力が加えられると，並進速度の変化だけでなく角速度の変化も発生する．この関係についてまとめる．

慣性モーメント



ある軸まわりの剛体の慣性モーメントを求めると，

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

となる．ここで，m_iは軸からr_i離れた位置にある，剛体の微小分割． これをさらに細かく分割して，微小体積dVの積分として表すと

$$I = \int \rho r^2 dV$$

となる．ここでρは剛体の密度を表す．

剛体の回転

剛体に対して，軸回りにトルクNをかけたとき，剛体の角運動量Lについて以下が成立する．

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\ddot{\theta} = N$$

ここで，θは剛体が軸となす角度． 外からトルクが加えられていない状況では，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$$

となり，Lは一定となる．これを**角運動量保存則**という． （概念を拡張して，$N \neq 0$のときも角運動量保存則と呼んだりする．）

慣性半径

慣性半径 (Radius of Gyration)Rという量を定義すると便利なことがある．

$$MR^2 = I$$

これは，剛体の質量Mが，慣性モーメントを変えることなく軸からRの距離に集まっていると考えることができる．

平行軸の定理

ある軸周りの慣性モーメントがIであるとき，そこからr離れた軸回りの慣性モーメントは

$$I' = I + Mr^2$$

となる．

シンプルな振り子（準備）

質点mが長さlの糸で点Oから吊るされている．鉛直方向と振り子のなす角度をθとする．この系のO周りの慣性モーメントは

$$I = ml^2$$

であり，重力が及ぼすトルクは

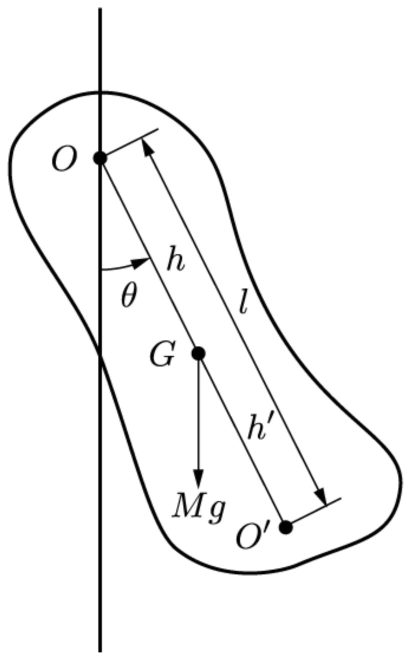
$$N = -mgl\sin\theta$$

である． したがって，角運動量保存則から

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

となる．

剛体振り子



固定された軸が質量中心を通らないような質量Mの剛体振り子を考える． 剛体の固定点と質量中心を通る直線が鉛直方向となす角度をθとする． この振り子の運動方程式は

$$MR_O^2\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta$$

ここで，hは距離$\bar{OG}$であり，R_OはOを軸とした慣性半径である． この運動方程式は,

$$l = \frac{R_O^2}{h}$$

としたとき，質量Mの質点のシンプルな振り子の運動方程式と一致する． すなわち，質量Mが半直線OG上のOからl離れた点O'に集まったときの振動が，剛体振り子の振動と一致する．

$$l = h + h'$$

$$hh' = R_O^2 - h^2$$

を満たすとき，点O'を**振動中心(center of oscillation)** と呼ぶ．

Gまわりの慣性半径をR_Gとすると，平行軸の定理から

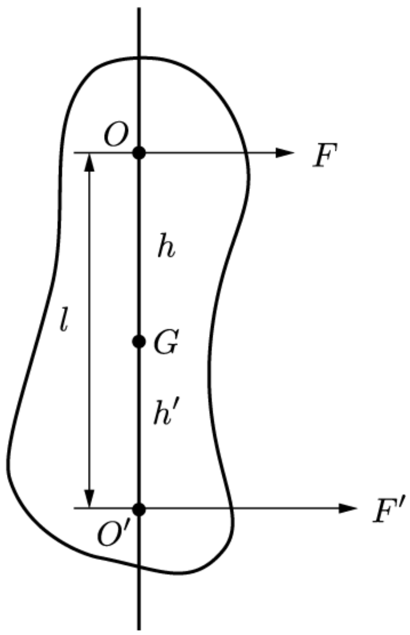
$$R_O^2 = R_G^2 + h^2$$

となる．これを用いると，

$$hh' = R_G^2$$

が成立する． この式はhとh'に関して対称である（すなわち，hとh'が入れ替わっても成立）． すなわち，点O'を軸とした剛体振り子を作ると，その振動中心はOとなる．

剛体に撃力を加える



点Oを軸として固定された剛体振り子を考える． 軸からl離れた位置にある点O'に撃力を加える． 撃力は直線$O\bar{O}'$に垂直な向きを向いているとする． O'が，直線$O\bar{O}'$が質量中心Gを通るとして，hとh'をそれぞれ距離$O\bar{G}$，$O\bar{G}'$とする． 点O'に加えられた撃力は

$$J' = \int F' \mathrm{d}t$$

である．このとき，点Oでは，固定された軸が動かないように撃力Jが発生する．

$$J = \int F \mathrm{d}t$$

剛体の（線）運動量変化は

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mh\dot{\theta}) = F + F'$$

である．ここで，$\dot{\theta}$は剛体のO周りの角速度． これを積分して，撃力による運動量の変化は

$$Mh\dot{\theta} = J + J'$$

となる．ただし，剛体は撃力を加える前は静止していたものとした． O周りの角運動量保存則は,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MR_O^2\dot{\theta}) = F'l$$

であり，これを積分して

$$MR_O^2\dot{\theta} = J'l$$

を得る． 以上の結果を用いて$\dot{\theta}$を消去すると,

$$hl = R_O^2\left(1 + \frac{J}{J'}\right)$$

となる．

ここで，O'をいい感じの場所にとって，$J = 0$とすることを考えよう．このとき，hとlの関係は

$$hl = R_O^2$$

となる． $l = h + h'$と，$R_O^2 = R_G^2 + h^2$から

$$hh' = R_G^2$$

という関係が得られる． 点O'に撃力を加えたとき，点Oでは角速度変化が一切生じない． このような点Oを，**撃力中心(Center of percussion)** と呼ぶ． 撃力中心と振動中心が同じ点であることに注意しよう．

剛体が固定されておらず，撃力中心O'に撃力が加えられたとき，その直後の運動はO周りの回転となる．

このような点は，野球でバットを振る場合などに有効である． 球を打ち返すときに，撃力中心に当てるようにすれば，回転中心である手に返ってくる力はゼロとなる．

Reference

K. Symon, "Mechanics", Addison-Wesley Publishing, 1971.