剛体の 3 次元運動方程式

名工大 上村知也

2022 年 4 月 13 日

1　ラグランジュ形式に基づく運動方程式の導出

剛体 1 内の任意の点の速度を $\boldsymbol{v}_1$ とする。

$$\boldsymbol{v}_1 = [\boldsymbol{a}_1]^\top v_1 \tag{1}$$

$$v_1 = A_{10}\dot{r_0} + \tilde{\rho}\omega_{10} = (\mathcal{L} + \rho)z \tag{2}$$

ここで、

$$z = \begin{bmatrix} \dot{r}_0 \\ \omega_{10} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} A_{10} & O \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} O & \tilde{\rho}_1 \end{bmatrix}$$

である。A_{10} は慣性座標から見た物体座標系の姿勢を表す 3×3 の回転行列、O は 3×3 のゼロ行列、$\tilde{\rho}_1$ は、剛体内の任意のベクトル ρ_1 による外積を表す行列で、

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} -\rho_{1,3} & \rho_{1,2} & \rho_{1,1} \\ \rho_{1,3} & -\rho_{1,2} & \rho_{1,1} \\ \rho_{1,3} & \rho_{1,2} & -\rho_{1,1} \end{bmatrix}$$

である。さらに、z は速度をまとめたベクトルであり、$\mathcal{L}$ は回転行列、ρ は剛体内部の位置を表すベクトルの外積行列と捉えればよい。

剛体 1 の運動エネルギー T は次の通り。

$$T = \frac{1}{2}\int_1 \boldsymbol{v}_1^\top \boldsymbol{v}_1 \mathrm{d}m_1 \tag{3}$$

ここで、

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} O & \int_1 \tilde{\rho}_1 \mathrm{d}m_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \int_1 \tilde{\rho}_1^\top \tilde{\rho}_1 \mathrm{d}m_1 \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_1 z^\top (\mathcal{L} + \rho)^\top (\mathcal{L} + \rho) z \\ &= \frac{1}{2} z^\top \left(m_1 \mathcal{L}^\top \mathcal{L} + \mathcal{L}^\top \mathcal{E} + \mathcal{E}^\top \mathcal{L} + \mathcal{J} \right) z \end{aligned} \tag{4}$$

とシンプルに書き表せる。なお、これを展開すると

$$
\begin{aligned}
2T = m_1 \dot{r}_0 A_{10}^\top A_{10} \dot{r}_0 + (A_{10}\dot{r}_0)^\top \left(\int_1 \tilde{\rho}_1 \mathrm{d}m_1 \right) \omega_{10} \\
+ (A_{10}\omega_{10})^\top \left(\int_1 \tilde{\rho}_1 \mathrm{d}m_1 \right) \dot{r}_0 + \omega_{10}^\top \left(\int_1 \tilde{\rho}_1^\top \tilde{\rho}_1 \mathrm{d}m_1 \right) \omega_{10}
\end{aligned}
$$

である。

並進のラグランジュの運動方程式は

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{0,i}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r_{0,i}} = F_{0,i} \tag{5}
$$

であり、回転のラグランジュの運動方程式は

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{10,i}}\right) - \left(\omega_{10,j}\frac{\partial T}{\partial \omega_{10,k}} - \omega_{10,k}\frac{\partial T}{\partial \omega_{10,j}}\right) = N_{1,i} \tag{6}
$$

である（詳細は別紙「角速度と擬座標を用いた運動方程式」参照)。ただし、外力 f^e による仮想仕事 δW は以下で与えられる。

$$
\delta W = \delta r_0^\top F_0 + \delta \Omega_{10}^\top N_1 = \begin{bmatrix} \delta r_0^\top & \delta \Omega_{10}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ N_1 \end{bmatrix} \tag{7}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \int_1 A_{01} f_1^e \mathrm{d}m_1 \\
N_1 &= \int_1 \tilde{\rho}_1^\top f_1^e \mathrm{d}m_1
\end{aligned}
$$

とした。F_0 は剛体にかかる外力の総和であり、N_1 は剛体にかかる外力が及ぼすトルクの総和である。

一般化運動量 P_0, L_1 を以下のように定義する。

$$
P_0 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{0,1}} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{0,2}} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{0,3}} \end{bmatrix} \quad L_0 = \frac{\partial T}{\partial \omega_{10}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \omega_{10,1}} \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_{10,2}} \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_{10,3}} \end{bmatrix} \tag{8}
$$

P_0 は (線) 運動量、L_1 は角運動量と呼ばれる。これをラグランジュの運動方程式にそれぞれ代入すると

$$
\dot{P}_0 = F_0 \tag{9}
$$

$$
\dot{L}_0 + \tilde{\omega}_{10}^\top L_1 + A_{10}\tilde{\dot{r}}_0^\top P_0 = N_1 \tag{10}
$$

を得る。並進方向については馴染みのあるニュートンの運動方程式である。回転方向の運動方程式は、一見ややこしい形をしているが、もし物体座標系を剛体の質量中心に取れば、回転の運動方程式は

$$
\dot{L}_0 = N_1 \tag{11}
$$

と簡単になる。