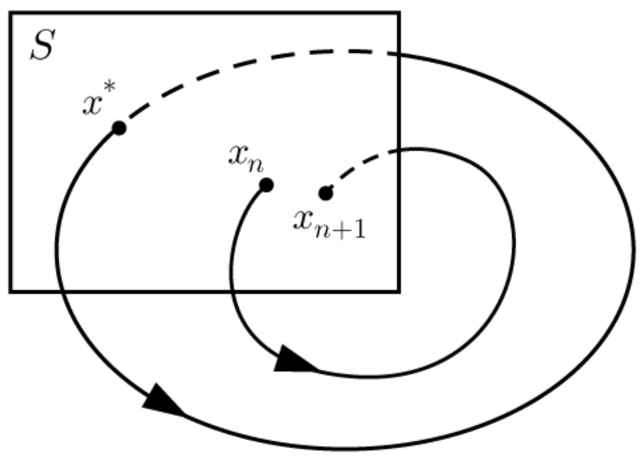
ポアンカレ写像

歩行・走行運動は周期的であるため，研究においてしばしば**周期解**を求める.
ベクトル場（流れを持つ場）における周期軌道を調べるにあたって，ポアンカレ写像を考えることが便利である.

D次元の系$\dot{x} = f(x)$を考えよう．Sを$D-1$次元の断面とする．Sが流れに横断的であること，つまり，Sから出発する全ての軌道が，Sと平行となることなくSを貫いて流れることが必要である.
このような断面Sを**ポアンカレ断面**という.



ポアンカレ写像Pは，Sからそれ自身への写像で，軌道とSが交わる点から出発して，次に軌道がSが交わるまで軌道を追跡することで得られる．もしx_nがn番目の交点なら，ポアンカレ写像は

$$x_{n+1} = P(x_n)$$

で定義される.

問．写像とは何か，簡潔に説明せよ.

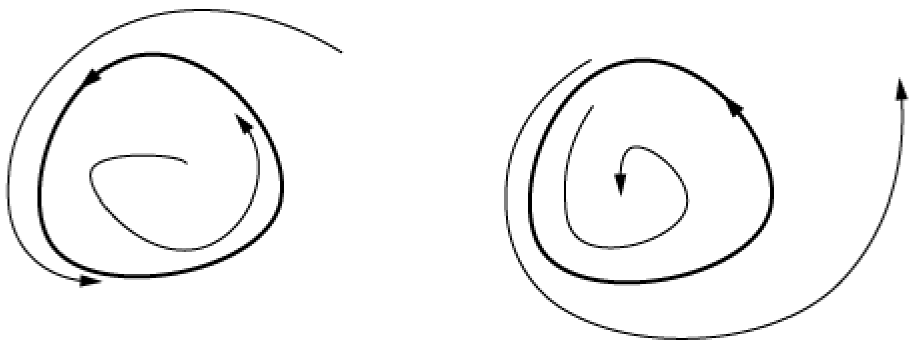
軌道が周期的であれば，その軌道とポアンカレ断面の交点x^*から出発して再びポアンカレ断面に戻ると，

$$x^* = P(x^*)$$

が成立する．このような点x^*をポアンカレ写像の**固定点**という.

このように，ポアンカレ写像は，（一般には難しい）閉軌道についての問題を，（実際上は必ずしも易しいとは限らないが，原理的にはより易しい）写像の固定点についての問題に変換する．その障害となるのは，通常はPの公式を求めるのが不可能であるという点である．実際の応用では，数値シミュレーションなどを通してPを算出する．

周期軌道の線形安定性



閉軌道を持つ$\dot{x} = f(x)$が与えられたとき，その閉軌道から少しずれた点から始まる軌跡の挙動を考える．軌跡がやがて閉軌道に吸い寄せられ，収束していくとき，その閉軌道は**安定**であるという．逆に，ずれた点から始まった軌跡が閉軌道から遠ざかっていくとき，閉軌道は**不安定**である．

軌道が安定であるか，不安定であるかは，閉軌道に対応するポアンカレ写像の固定点x^*が安定かどうかに対応している．すなわち，無限小の摂動v_0を，$x^* + v_0$がS上にあるように加え，ポアンカレ写像を施したとき，摂動が縮小すれば安定，拡大すれば不安定である．

再びポアンカレ断面上に戻ってきたときの摂動をv_1として，テイラー展開により以下が成立する．

$$x^* + v_1 = P(x^* + v_0) = P(x^*) + J(x^*)v_0 + O(||v_0||^2)$$

ここで，ヤコビ行列$J(x^*) \in \mathbb{R}^{(D-1)\times(D-1)}$は$x^*$における**線形化したポアンカレ写像**と呼ばれる．

問．1次元のテイラー展開について説明せよ．
問．ヤコビ行列はベクトル関数Pをベクトルxで偏微分して得られる．この行列の要素を書き下せ．

x^*は固定点なので，$x^* = P(x^*)$が成立することから，

$$v_1 = J(x^*)v_0$$

を得る．ここで，$O(||v_0||^2)$の小さな項を無視できると仮定している．

安定性は，$J(x^*)$の固有値λ_jを用いて表現される．すなわち，**閉軌道は，全ての$j=1,\cdots,n-1$に対して$|\lambda_j|<1$である場合に限り，線形安定である．**
これを理解するため，固有値に重複がない場合を考えよう．すると，$J(x^*)$の固有ベクトル$\{e_j\}$からなる基底があり，何らかのスカラーν_jを用いて$v_0=\sum_{j=1}^{n-1}\nu_j e_j$と書くことができる．ゆえに，

$$v_1 = J\sum_{j=1}^{n-1}\nu_j e_j = \sum_{j=1}^{n-1}\nu_j\lambda_j e_j$$

が成立する．ここで$J=J(x^*)$と略記した．

問．ある行列Aの固有値と固有ベクトルとは何か，説明せよ．
問．ベクトル空間の基底とは何か，説明せよ．

線形写像をk回繰り返すと，

$$v_k = \sum_{j=1}^{n-1}\nu_j(\lambda_j)^k e_j$$

となる．したがって，もし全てのjについて$|\lambda_j|<1$ならば，$k\to\infty$の極限で$||v_k||\to 0$となる．
すなわち，このときx^*は安定である．
逆に，もしいずれかのjに対して$|\lambda_j|>1$ならば，e_j方向に摂動は成長し，x^*は不安定である．

参考文献

S.ストロガッツ，「非線形ダイナミクスとカオス」，丸善出版，2015.