

# 連続体力学の基礎と土-水連成有限要素法の実装

2025年11月1日

Takuya Miki

# 目 次

<b>第 1 章 テンソル解析の基礎</b>	<b>1</b>
1.1 スカラーとベクトル . . . . .	1
1.2 ベクトルの計算 . . . . .	2
1.3 テンソルの定義 . . . . .	6
1.4 テンソルの計算 . . . . .	6
1.5 ガウスの発散定理 . . . . .	8
<b>第 2 章 連続体力学の基礎</b>	<b>11</b>
2.1 運動と配置 . . . . .	11
2.2 変形勾配テンソル . . . . .	11
2.3 ひずみテンソル . . . . .	14
2.4 ひずみ速度テンソル . . . . .	16
2.5 応力テンソル . . . . .	17
2.6 保存則と支配方程式 . . . . .	19
2.7 境界値問題 . . . . .	21
2.8 構成式 . . . . .	22
<b>第 3 章 数理塑性理論</b>	<b>25</b>
3.1 現象論的側面 . . . . .	25
3.2 一次元構成モデル . . . . .	26
3.3 一般化弾塑性構成モデル . . . . .	30
<b>第 4 章 Biot の圧密方程式と Cam-Clay モデル</b>	<b>33</b>
4.1 有効応力と Biot の圧密方程式 . . . . .	33
<b>第 5 章 線形有限要素法の離散化</b>	<b>45</b>
5.1 空間の離散化 . . . . .	45
5.2 形状関数による離散化 . . . . .	45
5.3 4 節点アイソパラメトリック要素 . . . . .	46
5.4 平面問題の支配方程式の弱形式化 . . . . .	47
<b>第 6 章 非線形有限要素法</b>	<b>52</b>
6.1 非線形解法の概要 . . . . .	52
6.2 有限要素方程式 . . . . .	53
6.3 構成則の数値計算 . . . . .	54
6.4 Newton-Raphson 法に整合した Return-Mapping . . . . .	56

# 第1章 テンソル解析の基礎

本書で対象とする材料の力学挙動を表現する変数は、すべてテンソル量である。よって、本章では本書全体にわたる変数などの表記方法の規則を示し、ベクトル・テンソル解析の基礎事項を復習する。

## 1.1 スカラーとベクトル

$n_{dim} = (1, 2, 3)$  次元空間において、物体内にある点とある物理量を対応付ける考え方を”場”と呼ぶ。場の物理量はスカラー場（例えば密度や温度など大きさのみを表すもの）や、ベクトル場（例えば速度や力など大きさと方向を表すもの）がある。一般にスカラー場は斜体 ( $T$ ) で表し、ベクトルやテンソルは太字斜体 ( $\mathbf{u}$  や  $\sigma$ ) で表す。このような表記法を Gibbs 表示と呼ぶ。

テンソル場を成分表示する際には座標系を導入する必要があるが、本書では図 1.1 に示すような直行デカルト座標  $O - xyz$  を導入する。

例えば、3 次元空間のベクトル場  $\mathbf{u}$  は、互いに直交する単位長さを大きさにもった基底ベクトルの組  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ （正規直交基底（orthonormal basis）と呼ぶ）を導入した座標系を用いて次式のように表される。

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (1.1)$$

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} = \{e_1, e_2, e_3\}$  を導入した座標系  $O - x_1x_2x_3$  では次式のように記述することもできる。

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{n_{dim}} u_i\mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

式 1.2 は総和記号を省略してもよい。このように 1 つの項内で同じ指標（ここでは  $i$ ）が 2 つ用いられる場合には総和記号を省略することがある。この 2 回使われるインデックスをダミーインデッ

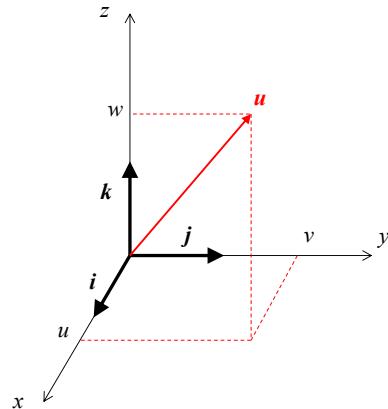


図 1.1: 直交座標系

クスと呼び、これを略記する規則を”総和規約”と呼ぶ。

## 1.2 ベクトルの計算

### 1.2.1 ベクトルの加法

2つのベクトルは  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  の和は次式で表される。

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (1.3)$$

ベクトル  $\mathbf{c}$  は図 1.2 のように  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  を辺とする平行四辺形の対角線の方向と大きさにより表すことができる。これを平行四辺形合成則 (parallelogram law) と呼ぶ。

### 1.2.2 内積 (inner product)

摩擦のない水平面 (xy 平面) 上に質量  $m$  の質点があるとする (図 1.3)。この質点はばね定数  $k$  ( $> 0$ ) のばねが取り付けられており、ばねの長さは力が働いていない状態とする。また、ばねの端点は固定されているとする。この質点を xy 平面の一定の方向へ一致の力  $f$  を作用させて引っ張る。 $f$  は x 軸正方向とのなす角が  $\theta$  であるとする。質点は xy 平面上に置いたまま、ばねの長さを自然長から長さ  $l$  だけ伸ばす。

このとき、 $f$  がばねを伸ばすために費やした仕事  $W$  は、 $\tilde{f}$  を  $f$  の x 軸方向への分解とすると次式が成り立つ。

$$W = l|\tilde{f}| = l|f| \cos \theta \quad (1.4)$$

このとき、x 軸正方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_x$  とすれば、 $\mathbf{l} = l\mathbf{e}_x$  に対して、

$$W = |\mathbf{f}||\mathbf{l}| \cos \theta \quad (1.5)$$

と表せる。以上より、以下のような概念を定義する。

ゼロでない 2つのベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  のなす角を  $\theta$  とするとき、次式が成り立ち  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の内積 (スカラーリー積) と呼ぶ。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1.6)$$

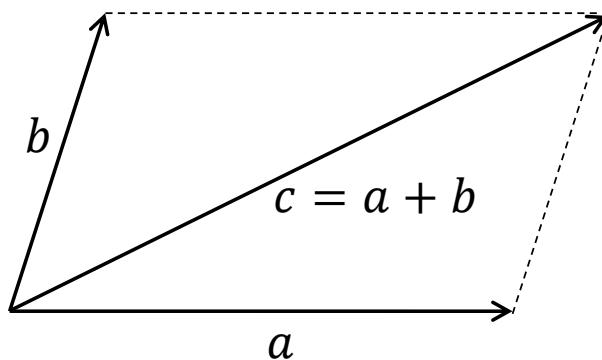


図 1.2: ベクトルの加法

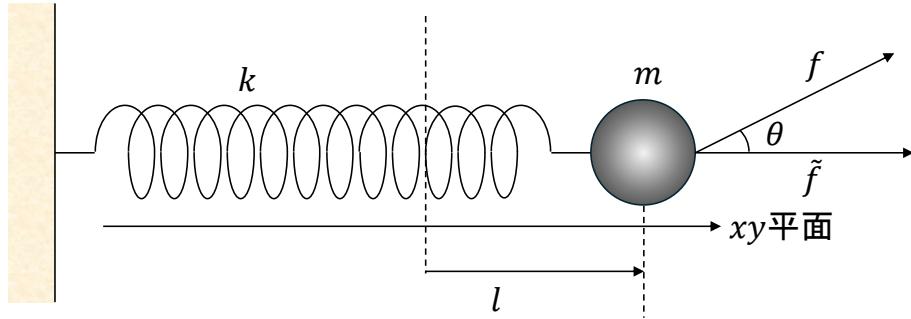


図 1.3: 摩擦のない水平面上の質点の例

ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に対して,

$$\tilde{\mathbf{b}} := \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \quad (1.7)$$

をベクトル  $\mathbf{b}$  の  $\mathbf{a}$  方向への正射影という。なお、基底ベクトルについては、次式が成立する。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.8)$$

$\delta_{ij}$  をクロネッカーのデルタ (Kronecker's delta) と呼ぶ。また、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  のとき、ベクトル  $\mathbf{a}$  はベクトル  $\mathbf{b}$  に直交するといわれる。

### 1.2.3 外積 (cross product)

三次元空間内に  $x$  軸に太さの無視できる導線があり、 $x$  軸正の方向に電流  $I$  が流れているとする。また、 $y$  軸正の方向には静磁場  $\mathbf{B}$  があるとする。このとき、 $z$  軸正の方向に、導線の単位長さ当たり  $I|\mathbf{B}|$  の力が働くことが知られている。以上を踏まえて外積を定義する。まず、以下のような概念を定義する。

3次元の座標系  $O - xyz$  に対し、手のひらから右側の親指へ向かう方向を  $x$  軸正方向、手のひらから右手の人させ指へ向かう方向を  $y$  軸正方向としたとき、右手中指を手のひらに対して垂直に立てたときの、手のひらから中指へ向かう方向を  $z$  軸正方向とする直交座標系を定義する。これを右手系と呼ぶ。一方、左手で同様な方法で方向を定めた場合を左手系と呼ぶ。

三次元空間には、右手系と左手系の2種類の直交座標系が定義できる。以後、断りがない限り三次元の直交座標系は右手系とする。

ここで、ゼロでない2つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角を  $\theta$  とするとき、以下の条件を満たすベクトル  $\mathbf{c}$  を  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の外積 (ベクトル積) と呼び、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と表す。

1.  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$
2.  $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$  かつ  $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$
3.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  は右手系

外積は置換記号  $e_{kij}$  を用いると次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j &= e_{kij} \mathbf{e}_k \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j e_{kij} \mathbf{e}_k\end{aligned}\tag{1.9}$$

### 1.2.4 ベクトルのノルム (norm)

あるベクトル  $\mathbf{a}$  のノルム (ユークリッドノルム, Euclidean norm) は次式で表される.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\tag{1.10}$$

$\|\mathbf{a}\| = 1$  のベクトルを単位ベクトル (unit vector) と呼ぶ. 一方,  $\|\mathbf{a}\| = 0$  のベクトルをゼロベクトル (zero vector) と呼ぶ.

### 1.2.5 微分演算子

三次元デカルト座標空間において, 偏微分作用素を項とするベクトルとして次式を定義する.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i\tag{1.11}$$

これをスカラー  $a$  またはベクトル  $\mathbf{a}$  に作用して得られるベクトルをスカラー  $a$  またはベクトル  $\mathbf{a}$  の勾配 (gradient) と呼び,  $\nabla a$  または  $\text{grad } a$  と表記する. また, ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\nabla$  の内積を  $\mathbf{a}$  の発散 (divergence) と呼び次式で表される.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\tag{1.12}$$

ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\nabla$  の外積は  $\mathbf{a}$  の回転 (rotation) と呼び次式で表される.

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} e_{kij} \mathbf{e}_k\tag{1.13}$$

三次元スカラー場  $f$  におけるベクトル  $\mathbf{a}$  方向への方向微分は次式で表される.

$$\mathbf{a} \cdot \nabla f = a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) f\tag{1.14}$$

物理学ではラプラシアン (Laplacian)  $\nabla^2$  がしばしば使われる. これは, スカラー関数  $a$  に作用する2階の微分演算子で次式で表される.

$$\nabla^2 a = \nabla \cdot \nabla a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}\tag{1.15}$$

特に次式で表される方程式をラプラス方程式 (Laplace's equation) と呼ぶ.

$$\nabla^2 a = 0\tag{1.16}$$

### 1.2.6 微分の連鎖則

全微分可能な関数  $z = f(x, y)$  があるとする。 $x, y$  はそれぞれ  $t$  の関数であるとする。 $z$  は全微分可能であることから、次式のような  $\delta f$  が存在する。

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \epsilon(\delta x, \delta y) \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (1.17)$$

両辺を  $\delta t$  で割ると次式が得られる。

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \epsilon(\delta x, \delta y) \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta t}\right)^2} \quad (1.18)$$

$\delta t \rightarrow 0$  のとき  $\epsilon \rightarrow 0$  になるため、次式のような微分の連鎖則が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (1.19)$$

### 1.2.7 ベクトルの変換

直交デカルト座標系  $(O - x_1, x_2, x_3)$  に加えて新しく座標系  $(O - x'_1, x'_2, x'_3)$  を定義し、その基底ベクトルを  $e'_i$  で表す。このとき、次式のような方向余弦 (direction cosine) を定義する。

$$Q_{ij} = e'_i \cdot e_j \quad (1.20)$$

ベクトルは他のベクトルの線形結合によって表すことができることから、基底ベクトルの間に次式のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} e'_i &= Q_{ij} e_j \\ e_j &= Q_{ij} e'_i \end{aligned} \quad (1.21)$$

これより、2つの座標系間に次式のような関係があることを示すことができる。

$$\begin{aligned} x_k &= Q_{ik} x'_i \\ x'_i &= Q_{ik} x_k \end{aligned} \quad (1.22)$$

上式より以下のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \\ Q_{ik} &= \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.23)$$

さらに、式 1.8 の関係を考慮すると次式が成立する。

$$\begin{aligned} Q_{im} Q_{in} &= \delta_{mn} \\ Q_{mi} Q_{ni} &= \delta_{mn} \end{aligned} \quad (1.24)$$

ここで、ベクトル  $\mathbf{a}$  が2つの座標系の基本ベクトルで表されることから次式が求められる。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_m \mathbf{e}_m = a'_k Q_{km} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{a} &= a'_k \mathbf{e}'_k = a_m Q_{km} \mathbf{e}'_k\end{aligned}\quad (1.25)$$

上式は2つの座標系におけるベクトル成分の座標変換則 (coordinate transformation law) を表している。このような変換則に従う量をベクトルという。

### 1.3 テンソルの定義

2つのベクトル  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$  の積  $\mathbf{A} = \mathbf{ab}$  を考える。この積はテンソル積 (tensor product) と呼ばれ、次式で表される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.26)$$

ここで、 $A_{ij} = a_i b_j$  で一般には  $A_{ij} \neq A_{ji}$  である。このような  $A_{ij}$  をテンソル  $\mathbf{A}$  の成分という。

次に  $A_{ij}$  の変換則について考える。 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  はともにベクトルであるため、式1.22より次式が成立する。

$$\mathbf{A} = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_i b_j Q_{ki} Q_{lj} \mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_l = a'_k b'_l Q_{ki} Q_{lj} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.27)$$

このような変換則に従う量を2階のテンソルと呼ぶ。一般にn階のテンソルは以下のように定義される。

$$\begin{aligned}A_{k_1 k_2 \dots k_n} &= Q_{m_1 k_1} Q_{m_2 k_2} \dots Q_{m_n k_n} A'_{m_1 m_2 \dots m_n} \\ A'_{m_1 m_2 \dots m_n} &= Q_{m_1 k_1} Q_{m_2 k_2} \dots Q_{m_n k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n}\end{aligned}\quad (1.28)$$

よって、ベクトルは1階のテンソル、スカラーは0階のテンソルである。このように、テンソルは座標系が違っても表現形式は変化しないことがわかる。そのため、テンソルで表現された式は不变性を持つといえる。2階以上の高階のテンソルについて、連続体力学においては特に4階のテンソルが重要である。

### 1.4 テンソルの計算

#### 1.4.1 テンソルの和と差および積

テンソルの和と差は同じ階数のテンソルに対して定義される。

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{B} \pm \mathbf{C} = (B_{ij} \pm C_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.29)$$

上式の成分は対応する成分の和もしくは差となる。一方、テンソル  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  のテンソル積  $\mathbf{C}$  は次式で定義される。

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j B_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (1.30)$$

テンソル積により得られた新しいテンソルの階数は元のテンソルの階数の和になる。さらに、テンソルの内積を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} C &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i \cdot b_j \mathbf{e}_j = a_i b_i \\ C &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot B_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_{ij} B_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} = A_{ij} B_{ji} \\ C &= \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j : B_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = A_{ij} B_{ij} \\ C &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot B_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_{ij} B_{jl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (1.31)$$

このように、2つ以上のテンソルで表された項にダミーインデックスがあると、その項の階数はダミーインデックスの個数の2倍だけ低くなる。これをテンソルの縮約（contraction）と呼ぶ。

### 1.4.2 転置・対称と反対称テンソル

2階のテンソル  $\mathbf{A}$ ,  $A_{ij}$  の転置 (transpose) を  $A^T$ ,  $A_{ji}$  で表す。対称テンソル (symmetric tensor) は次式を満足する。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^T \\ A_{ij} &= A_{ji} \end{aligned} \quad (1.32)$$

一方、反対称テンソルは次式を満足する。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{A}^T \\ A_{ij} &= -A_{ji} \end{aligned} \quad (1.33)$$

一般に、任意のテンソル  $\mathbf{A}$  は対称テンソルと反対称テンソルの和で表される。

テンソル  $\mathbf{A}$  の逆テンソルは次式で定義される。

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (1.34)$$

上式を満足する逆テンソル  $\mathbf{A}^{-1}$  が存在するとき、可逆 (invertible) であるという。ここで、 $\mathbf{I}$  は恒等テンソル (identity tensor) であり、その成分は  $\delta_{ij}$  により表すことができる。

### 1.4.3 マトリックス表記

任意の2階のテンソル  $\mathbf{A}$  は次式で表される。

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.35)$$

上記のテンソル  $\mathbf{A}$  はデカルト座標系での成分によって一意的に定義することができる。このため、マトリックス中に成分  $A_{ij}$  を配置することによって、次式のようなテンソル  $\mathbf{A}$  に対するマトリックス表記が得られる。

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

#### 1.4.4 行列式とデターミナント

2階のテンソル  $\mathbf{A}$  のマトリックス表記  $[\mathbf{A}]$  の行列式を  $\det \mathbf{A}$  と表す。テンソル  $\mathbf{A}$  は次式が成り立つ場合のみ可逆である。

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \quad (1.37)$$

#### 1.4.5 直交テンソル, 回転テンソル

逆テンソル  $\mathbf{Q}^{-1}$  が転置  $\mathbf{Q}^T$  に等しいとき, テンソル  $\mathbf{Q}$  を直交テンソル (orthogonal tensor) と呼ぶ。直交テンソルのデターミナントは +1 か -1 のいずれかとなる。 $\det \mathbf{Q} = 1$  となる直交テンソル  $\mathbf{Q}$  は固有直交 (proper orthogonal) もしくは回転 (rotation) テンソルと呼ぶ。

二次元空間におけるすべてのベクトルを反時計回り方向を正とする角度  $\theta$  で回転させる回転テンソルを  $\mathbf{R}$  とすると, そのマトリックス表記は次式で表される。

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

#### 1.4.6 等方テンソル

テンソルの成分が基底ベクトルを回転させても変化しないテンソルを等方テンソル (isotropic tensor) と呼ぶ。2階の等方テンソルは任意の回転テンソル  $\mathbf{R}$  に対し次式で表される。

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{R}] [\mathbf{A}] [\mathbf{R}]^T \quad (1.39)$$

一方, 4階のテンソルに対しては, 任意の回転テンソル  $\mathbf{R}$  に対して次式で等方テンソルが表される。

$$A_{ijkl} = R_{mi} R_{nj} R_{pk} R_{ql} A_{mnpq} \quad (1.40)$$

### 1.5 ガウスの発散定理

図 1.4 のようなあるベクトル場  $\mathbf{A}$  の任意の閉曲面  $S$  を考える。閉曲面  $S$  に対する面積分は次式で与えられる。

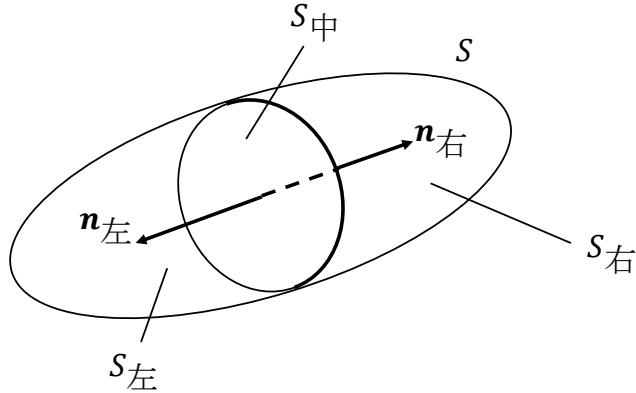
$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.41)$$

ここで, 閉曲面  $S$  を  $S_{\text{中}}$  という平面で  $S_{\text{左}}$ ,  $S_{\text{右}}$  という曲面に分割する。また,  $S_{\text{中}}$  に対し単位法線ベクトルを定義する。このとき, 次式が成立する。

$$\int_{S_{\text{左}}+S_{\text{中}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_{\text{左}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\text{中}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{\text{右}} dS \quad (1.42)$$

$$\int_{S_{\text{右}}+S_{\text{中}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_{\text{右}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\text{中}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{\text{左}} dS \quad (1.43)$$

単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_{\text{左}}$ ,  $\mathbf{n}_{\text{右}}$  は大きさが同じで向きが逆なことから次式が得られる。

図 1.4: 閉曲面  $S$ 

$$\begin{aligned} \int_{S_中} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_右 dS + \int_{S_中} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_左 dS &= 0 \\ \int_{S_左+S_中} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_右+S_中} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S_左} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_右} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (1.44)$$

上式のように、閉曲面の面積分は分割して考えることができる。よって、閉曲面  $S$  を次式のように微小な閉曲面の総和で近似することができる。

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \right\} \quad (1.45)$$

次に、図 1.5 のような微小立方体の 6 面を閉曲面とする面積分を考える。  
6 面の総面積を  $S_i$  とすると、面積分は次式で求めることができる。

$$\int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{\text{面} \in (A,B,C,D,E,F)} \int_{S_{\text{面}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{\text{面}} dS \quad (1.46)$$

ここで、面 A と面 F の寄与を考える。

$$\int_{S_A} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_A dS = A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z), \Delta x \Delta y \quad (1.47)$$

$$\int_{S_F} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_F dS = A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z), \Delta x \Delta y \quad (1.48)$$

面 A と面 F の寄与はこれらの和であり以下のように求められる。

$$\delta x \delta y \{ A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z), -A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z), \Delta x \Delta y \} \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.49)$$

同様に面 B, 面 D の寄与, 面 C, 面 E の寄与を考えると、微小立方体の面積分を求めることができる。

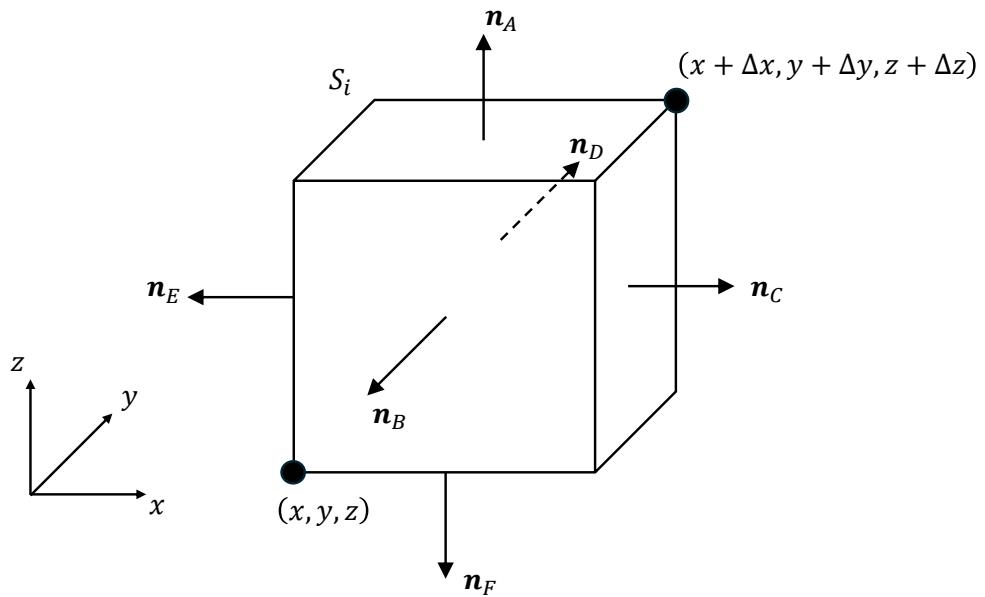


図 1.5: 微小立方体

$$\begin{aligned}
 \int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \Delta x \Delta y \Delta z \\
 &= \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta x \Delta y \Delta z \\
 &= \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

以上より、次式のガウスの発散定理が求められる。

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V \tag{1.51}$$

## 第2章 連続体力学の基礎

本章では、微小変形理論に立脚した連続体力学の基礎について記述する。

### 2.1 運動と配置

連続体力学では、物体を微小な粒子（物質点）の連続的な集合と考える。物質点は3次元ユークリッド空間における座標と一対一に対応づけられる。このとき、物質点の空間における集合状態を物体の配置（configuration）と呼ぶ。物質点の運動を記述するために、ある基準となる時刻 $t_0$ における配置を基準配置（reference configuration）とし、各物質点の位置ベクトル $\mathbf{X}$ をその物質点のラベルとする。物質点 $\mathbf{X}$ の時刻 $t$ における位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると、物質点 $\mathbf{X}$ そのものの運動は時刻 $t$ を変数として次式で表される。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

これは、「時刻 $t_0$ の基準配置において位置 $\mathbf{X}$ を占めていた物質点が、時刻 $t$ に置いて占める位置は $\mathbf{x}$ である」ことを示している。これは物質表示（Lagrangian description）と呼ばれる記述法である。このとき、時刻 $t_0$ から $t$ までの変位ベクトル $\mathbf{u}$ は次式により定義される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

以上の概要を図2.1に示す。

一方、任意の時刻 $t$ に関して次式のような一義的な関係を考えることができる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

これは「時刻 $t$ で空間内の位置 $\mathbf{x}$ を通過する物質点のラベル、すなわち基準時刻 $t_0$ での位置は $\mathbf{X}$ である」ことを意味し、空間内に固定された点 $\mathbf{x}$ に着目している。このような表示方法を空間表示（Eulerian description）と呼ぶ。本書で対象とする固体力学は、通常物質点に着目した変形履歴を考えるために、物質表示による定式化が行われる。

### 2.2 変形勾配テンソル

基準配置における物質点 $\mathbf{X}$ およびその近傍の点 $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ は、式2.1より現時刻 $t$ ではそれぞれ $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$ の位置を占める。ここで、 $d\mathbf{X}$ が微小であれば、

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \approx \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.4)$$

のように $d\mathbf{X}$ に対して線形関係が成立すると仮定できる。 $d\mathbf{X}$ から $d\mathbf{x}$ への線形変換を行うテンソル $\mathbf{F}$ は次式で定義される。

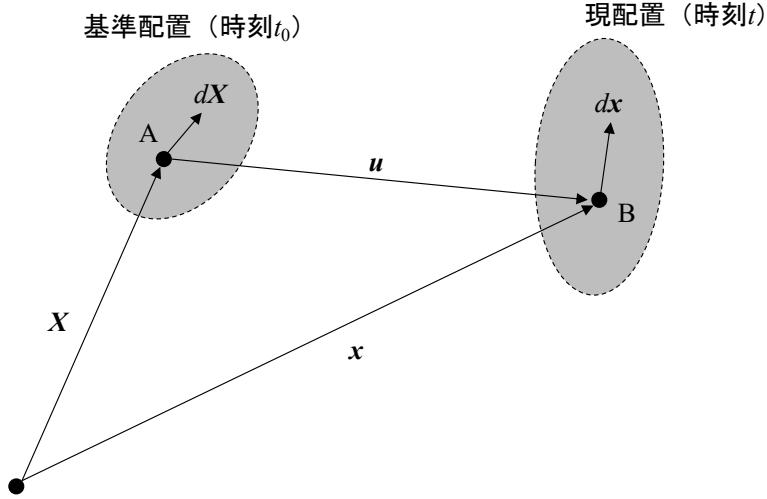


図 2.1: 連続体の配置

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.5)$$

これは物質点  $\mathbf{X}$  近傍の相対的な変形を特徴づけることから、変形勾配テンソル (deformation gradient tensor) と呼ばれる。なお、ここでは物質点は変形前後で一对一で対応する変形、つまり、

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (2.6)$$

が存在するような変形を対象とする。 $\mathbf{F}^{-1}$  が存在するための必要十分条件として次式が成り立つ必要がある。

$$\det \mathbf{F} = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \neq 0 \quad (2.7)$$

式 2.7 は「物体が運動あるいは変形によって分離したり重なり合うことはない」ということの数学的表現である。 $\det \mathbf{F}$  の物理的意味を考えるため、次式のようなスカラー三重積を考える。

$$[abc] \equiv (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (2.8)$$

基準配置において  $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3$  を 3 辺とする体積  $dV$  の微小平行六面体が、変形後の現配置では  $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3$  を 3 辺とする微小平行六面体になるとすると、変形後の体積  $dv$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} dv &= [d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3] = [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \\ &= (\det \mathbf{F}) [d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3] = (\det \mathbf{F}) dV \equiv J dV \end{aligned} \quad (2.9)$$

式 2.9 より  $\det \mathbf{F}$  は体積変化率を表す。このとき、 $\det \mathbf{F}$  もしくは  $J$  はヤコビアン (Jacobian) と呼ばれる。また、変形前後の質量密度をそれぞれ  $\rho_0, \rho$  とすると質量保存則より次式の関係が成り立つ。

$$\rho_0 dV = \rho dv \quad (2.10)$$

よって、ヤコビアンは次式のように表すこともできる。

$$\det \mathbf{F} = J = \frac{dv}{dV} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.11)$$

式2.11を物質表示による連続の式 (Euler's equation of continuity) と呼ぶ。式2.11より、 $\det \mathbf{F} = 0$  であれば微小変形は崩壊し物質粒子になることがわかる。物体は前述のように分離したり重なり合うことはないため、このような微小変形の崩壊も受け入れられない。ここで、基準配置において  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  であれば  $J = 1$  なので、 $J < 0$  とはなり得ない。よって、物体のどのような変形形態においても  $J$  は次式を満足する。

$$J > 0 \quad (2.12)$$

変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  が特異ではないとき (式2.7が成り立つとき)， $\mathbf{F}$  は直交テンソル  $\mathbf{R}$  と正定値対称テンソル  $\mathbf{U}$ ， $\mathbf{V}$  を用いて次式のように分解できる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.13)$$

式2.13を極分解 (polar decomposition) と呼ぶ。 $\mathbf{R}$  は局所的な回転テンソルであり、 $\mathbf{U}$ ， $\mathbf{V}$  はそれぞれ右ストレッチテンソル (right stretch tensor)，左ストレッチテンソル (left stretch tensor) と呼ばれる。右、左ストレッチテンソルと回転テンソルは次式の関係にある。

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T \quad (2.14)$$

ストレッチテンソル  $\mathbf{U}$ ， $\mathbf{V}$  は次式のように表すこともできる。

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}} \quad (2.16)$$

ここで、 $\mathbf{C}$ ， $\mathbf{B}$  はそれぞれ右 Cauchy-Green 変形テンソル (right Cauchy-Green strain tensor) および左 Cauchy-Green 変形テンソル (left Cauchy-Green strain tensor) と呼ばれ次式で定義される。

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.18)$$

極分解の物理的意味を図2.2に示す。右ストレッチテンソル  $\mathbf{U}$  の固有値を  $\sqrt{\lambda_i}$  とすると、微小ベクトル  $d\mathbf{X}$  は  $\mathbf{U}$  の主軸方向に  $\sqrt{\lambda_i}$  倍に伸縮変形する。次に、微小ベクトル  $\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X}$  は伸縮することなく剛体回転を受け  $d\mathbf{x}$  となる。つまり、式2.13の第二項 (第二項の分解を右極分解 (right polar decomposition) と呼ぶ) は微小ベクトル  $d\mathbf{X}$  から  $d\mathbf{x}$  への運動と変形が一連の動作の逐次的な作用の結果であることを示している。なお、式2.13の第三項を左極分解 (left polar decomposition) と呼ぶ。

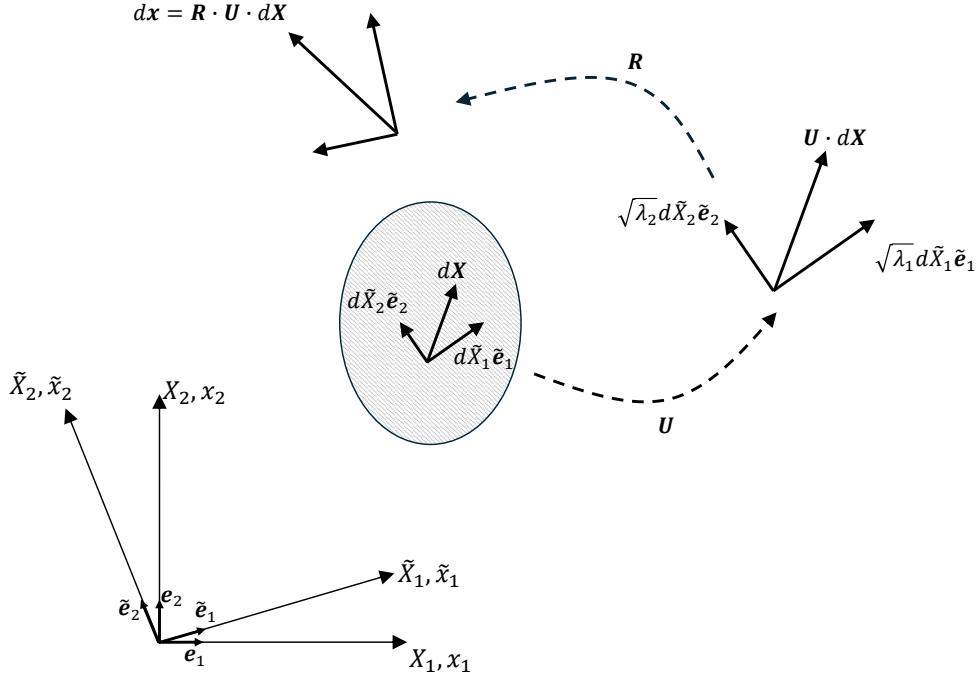


図 2.2: 変形勾配テンソルの右極分解

### 2.3 ひずみテンソル

図 2.3 に示すように、ある物質点を起点とする任意の微小ベクトル  $d\mathbf{X}$ ,  $d\mathbf{X}^*$  が変形後に  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{x}^*$  になることを考える。これら微小ベクトルの変形前後の内積をとると、次式で表される。

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}^* - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^* &= (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^*) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^* \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}^* \equiv d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X}^* \\ &\equiv d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}^* \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで、 $\mathbf{C}$  は前述の右 Cauchy-Green 変形テンソルであり、 $\mathbf{E}$  は次式で定義される Green-Lagrange ひずみテンソル (Green-Lagrange strain tensor) である。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.20)$$

式 2.7において  $d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^*$  であれば、左辺は変形前後の微小ベクトルの長さの二乗の差になる。つまり、Green-Lagrange ひずみテンソル  $\mathbf{E}$  は微小ベクトルの長さの二乗の変化量の尺度であるといえる。

$\mathbf{E}$  は次式のように変形できる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \quad (2.21)$$

上式より  $\mathbf{E}$  は変形に含まれる剛体回転の影響を受けない。式 2.20に式 2.2を代入すると次式に変形できる。

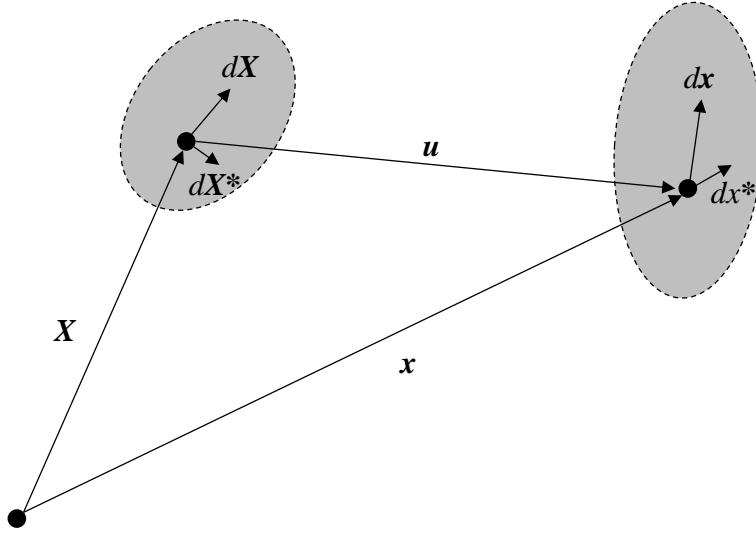


図 2.3: 連続体の構成

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(X_k + u_k)}{\partial X_i} \frac{\partial(X_k + u_k)}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{jk} \right) - \delta_{ij} \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

ここで、変位 \$u\$ の物質座標 \$X\$ による偏微分係数が 1 に比べ十分小さい場合、すなわち式 2.23 が成立する場合 \$\mathbf{E}\$ は微小変形理論におけるひずみテンソル \$\boldsymbol{\varepsilon}\$ に帰着する。

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1 \tag{2.23}$$

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{2.24}$$

\$\boldsymbol{\varepsilon}\$ は次式のように展開できる。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
 \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{12} \\
 \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{23} \\
 \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{31}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

ここで,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{31}$  は工学ひずみ (engineering strain) と呼ばれる. また, 体積ひずみ  $\varepsilon_v$  および偏差ひずみ  $\varepsilon_d$  が次式で定義される.

$$\varepsilon_v = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_d = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v \quad (2.27)$$

## 2.4 ひずみ速度テンソル

時刻  $t$  の現配置において近接する 2 つの物質点  $\mathbf{x}$  および  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  がそれぞれ速度  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  を持つとする.  $d\mathbf{v}$  は 2 つの物質点の相対速度である.  $d\mathbf{x}$  が微小であれば,  $d\mathbf{v}$  から  $d\mathbf{x}$  への線形変換を行うテンソルとして次式が定義できる.

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \equiv \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.28)$$

ここで,  $\mathbf{L}$  は次式で表される.

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \otimes \nabla_x = (v_i \mathbf{e}_i) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \right) \equiv L_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.29)$$

このとき, 現配置におけるベクトル場  $\mathbf{v}$  の勾配である  $\mathbf{L}$  を速度勾配テンソルと呼ぶ. 式 2.26から  $\mathbf{L}$  は時刻  $t$  の現配置のみにおいて定義されるテンソルであり, このようなテンソルを Euler 型テンソルと呼ぶ.

一般に任意のテンソルは対称成分と反対称成分に加算分解できる. 速度勾配テンソル  $\mathbf{L}$  を対称テンソル  $\mathbf{D}$  と反対称テンソル  $\mathbf{W}$  に分解すると次式が定義される.

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.31)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.32)$$

対称テンソル  $\mathbf{D}$  を変形速度テンソル (deformation rate tensor) またはストレッチングテンソル (stretching tensor), 反対称テンソル  $\mathbf{W}$  をスピントンソル (spin tensor) または回転テンソル (rotation rate tensor) と呼ぶ. 式 2.31, 式 2.32からわかるように  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{W}$  ともに Euler 型のテンソルである. ストレッチングテンソル  $\mathbf{D}$  は主軸方向の単位長さ当たりの伸び速度を与える. 一方, 回転テンソル  $\mathbf{W}$  はストレッチングテンソル  $\mathbf{D}$  の主軸の回転速度を表す. 弹塑性体はひずみ履歴に依存した応答を示すため, 一般的に構成式は速度型テンソルを用いて速度形で表される. このときひずみ速度としてストレッチングテンソル  $\mathbf{D}$  が用いられる.

## 2.5 応力テンソル

### 2.5.1 Cauchy 応力テンソル

図2.4に示すように、時刻  $t$  の現配置において物体内の任意の仮想表面  $A$  上の物質点  $X$  を含んだ外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を持つ微小面積  $ds$  上に作用する表面力  $d\mathbf{f}_n$  を考える。このとき、応力ベクトル（単位面積あたりの表面力ベクトル） $\mathbf{t}_n$  は次式で定義される。

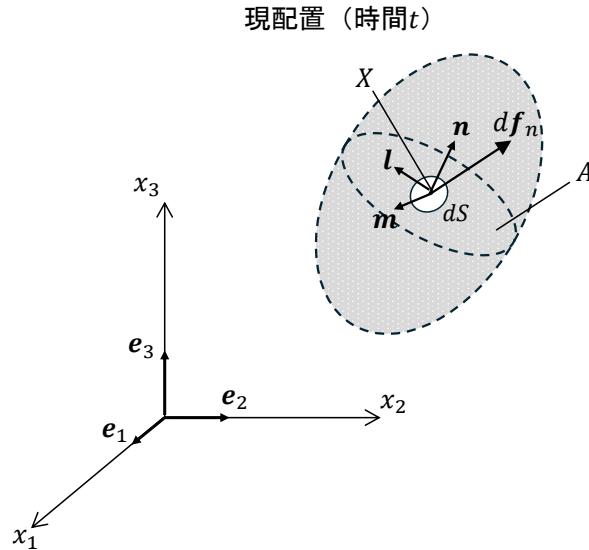


図 2.4: 現配置に作用する力

$$\mathbf{t}_n = \frac{d\mathbf{f}_n}{ds} \quad (2.33)$$

また、仮想表面  $A$  上に作用する表面力ベクトル  $\mathbf{f}_n$  は次式で定義される。

$$\mathbf{f}_n = \int_A \mathbf{t}_n ds \quad (2.34)$$

ここで  $A$  面内において直交する 2 つの単位ベクトル  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  を与える。そして、応力ベクトル  $\mathbf{t}_n$  を  $\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$  について成分分解すると次式のように表される。

$$\mathbf{t}_n = T_{nn}\mathbf{n} + T_{nl}\mathbf{l} + T_{nm}\mathbf{m} \quad (2.35)$$

このとき、係数  $T$  の第一添字は断面の向きを、第二添字は分解した力の向きを示している。 $(\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$  が直交デカルト座標系で表された全体座標系の基底ベクトルと一致した場合を考えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= T_{21}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= T_{31}\mathbf{e}_1 + T_{32}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.36)$$

式2.36を総和規約を用いて表すと次式のようになる。

$$\mathbf{t}_i = T_{ij} \mathbf{e}_j \quad (2.37)$$

これらの成分  $T_{ij}$  を用いて次のようなテンソルを定義する。

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.38)$$

これを Cauchy 応力テンソル (Cauchy stress tensor) または真応力テンソル (true stress tensor) と呼ぶ。また、Cauchy 応力テンソル  $\mathbf{T}$  と応力ベクトル  $\mathbf{t}_n$  の間には次式の関係が成り立つ。

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} \quad (2.39)$$

これは、Cauchy 応力テンソル  $\mathbf{T}$  に任意面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を作用させることで、その面に作用する応力ベクトル  $\mathbf{t}_n$  が得られることを示す。これを Cauchy の応力公式と呼ぶ。Cauchy 応力成分のうち、 $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{33}$  は垂直な成分であり、 $T_{12}$ ,  $T_{13}$ ,  $T_{21}$ ,  $T_{23}$ ,  $T_{31}$ ,  $T_{32}$  はせん断成分である。また、平均応力および偏差応力が次式で定義される。

$$p = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{T} - p \mathbf{I} \quad (2.41)$$

一般に Cauchy 応力テンソルは  $\sigma$  と表記されることが多い。

### 2.5.2 Kirchhoff 応力テンソル

時刻  $t_0$  の基準配置から時刻  $t$  の現配置に至る体積変化率  $J$  (Jacobian) を用いて次式で定義される応力を Kirchhoff 応力テンソル (Kirchhoff stress tensor) と呼ぶ。

$$\boldsymbol{\tau} = J \mathbf{T} \quad (2.42)$$

これは、体積に関してのみ基準配置から現配置に至るまでの変化を考慮している公称応力（力を変形前の断面積で割って得られる応力）である。非圧縮性材料の場合、体積変化はないため  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$  となる。

### 2.5.3 第1Piola-Kirchhoff 応力テンソル

現配置における微小面積  $ds$  に作用する力  $d\mathbf{f}_n$  を基準配置における微小面積  $dS$  で除した応力ベクトルを次式のように定義する。

$$\mathbf{t}_0 = \frac{d\mathbf{f}_n}{dS} \quad (2.43)$$

基準配置における微小面積  $dS$  の外向き単位法線ベクトルを  $\mathbf{N}$  とするとき、次式で定義されるテンソル  $\mathbf{\Pi}$  を第1Piola-Kirchhoff 応力テンソル (first Piola-Kirchhoff stress tensor) と呼ぶ。

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{N} \quad (2.44)$$

式2.44から明らかなように、これは公称応力と同義であり公称応力テンソル (nominal stress tensor) とも呼ばれる。

## 2.6 保存則と支配方程式

### 2.6.1 質量保存則

連続体の密度を  $\rho(\mathbf{x}, t)$  とすると、体積  $V$  の連続体の全質量は次式で表される。

$$m = \int_V \rho dv \quad (2.45)$$

連続体は変形中の質量が普遍であるため、式 2.45 の物質導関数は 0 となる。したがって、次式で示される質量保存則 (conservation of mass) が定義される。

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.47)$$

上式は連続の式 (equation of continuity) とも呼ばれる。速度が 0 となる静力学の場合は上式が恒等的に満足される。

### 2.6.2 運動量保存則

オイラーの運動の法則では、次式に示すように物体の運動量の変化率はその物体に作用する表面力  $P_i = \mathbf{n}_j \sigma_{ji}$  と物体力  $F_i = \rho f_i$  の合力に等しいという運動量保存則 (conservation of linear momentum) が述べられている。

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = \int_S n_j \sigma_{ji} dS + \int_V \rho f_i dv \quad (2.48)$$

左辺に連続の式 (式 2.47) を考慮すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} + \rho f_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (2.49)$$

式 2.49 をオイラーの運動方程式と呼ぶ。上式は剛体運動の場合は  $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} = 0$  となる。

### 2.6.3 角運動量保存則

次式に示すように、物体の角運動量の変化率はその物体に作用する表面力  $\mathbf{P} = n_j \sigma_{ji} \mathbf{e}_i$  と物体力  $\mathbf{F} = \rho f_i \mathbf{e}_i$  の基準点まわりの合モーメントに等しく、これを角運動量保存則 (conservation of angular momentum) と呼ぶ。

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{P} dS + \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{F} dV \quad (2.50)$$

連続の式 (式 2.47) と運動量方程式 (式 2.49) を考慮すると次式が得られる。

$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (2.51)$$

これは応力テンソルの対称性を表す式であり、応力テンソルが対称であれば角運動量は保存される。

### 2.6.4 エネルギー保存則

図2.5に示す体積  $V$ 、表面積  $S$  の物体  $B$  の任意の点  $x$  における密度を  $\rho$ 、速度を  $v$  とする。この物体  $B$  の運動エネルギー (kinetic energy)  $K$  は次式で表される。

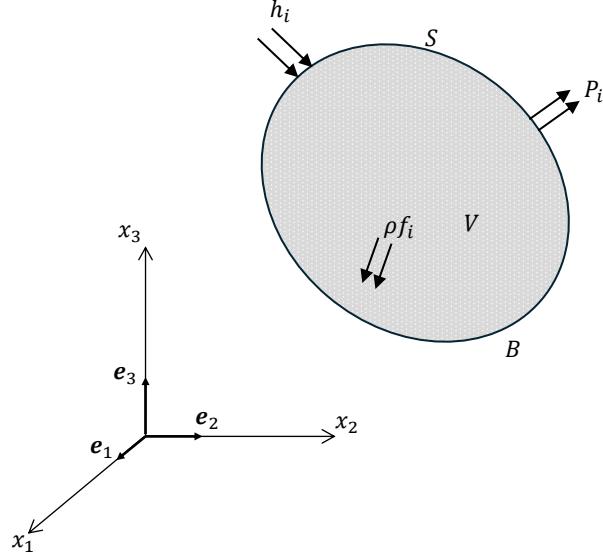


図 2.5: 表面力、物体力、熱流束を受ける物体

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV \quad (2.52)$$

これは剛体の質点あるいは物体点の運動エネルギーの連続体への一般化である。この運動エネルギーは物体の全エネルギーの一部である。他は内部エネルギー (internal energy) であり次式で表される。

$$E = \int_V \rho \varepsilon dV \quad (2.53)$$

ここで、 $\varepsilon$  は単位質量あたりの内部エネルギーである。

エネルギー保存則 (conservation of energy) もしくは熱力学第一法則 (the first law of thermodynamics) は、運動エネルギー  $K$  と内部エネルギー  $E$  の和の変化率が物体に対して表面力および物体力などの外力によってなされた仕事率 (mechanical power)  $\dot{P}$  と物体に流入および物体内で発生するエネルギーの変化率  $\dot{Q}$  の和に等しいことを意味している。ここで、表面力  $\mathbf{P} = n_j \sigma_{ji} \mathbf{e}_i$  と物体力  $\mathbf{F} = \rho f_i \mathbf{e}_i$  によってなされる仕事率  $\dot{P}$  は次式で表される。

$$\dot{P} = \int_S P_i v_i dS + \int_V \rho f_i v_i dV \quad (2.54)$$

一方、その他のエネルギーとして摩擦エネルギー (frictional energy) などの物体表面から物体に流入するエネルギー、物体内での反応などによるエネルギー発生がある。ここで、物体表面から流入するエネルギーおよび物体内部で発生するエネルギーを正として表す。単位法線ベクトル  $n_i$  をもつ面の単位体積あたりに流入する熱流束を  $h_i$ 、単位体積あたりの熱発生を  $\dot{\gamma}$  とすると、エネルギー  $Q$  の変化率  $\dot{Q}$  は、単位体積あたりのエネルギー変化率を  $\dot{q}$  として次式で表される。

$$\dot{Q} = \int_V \dot{q} dV = - \int_S h_i n_i dS + \int_V \dot{\gamma} dV \quad (2.55)$$

前述のエネルギー保存則を定式化すると次式のようになる。

$$\frac{D}{Dt}(K + E) = \dot{P} + \dot{Q} \quad (2.56)$$

連続の式（式 2.47）と運動量方程式（式 2.49），応力テンソルの対称性を考慮すると次式が得られる。

$$\rho \dot{\epsilon} = \sigma_{ji} \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{q} = \sigma_{ji} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \dot{\gamma} \quad (2.57)$$

ここで， $\sigma_{ji} \dot{\epsilon}_{ij}$  は応力の仕事率（rate of work of stress）と呼ばれる。式 2.57 はエネルギー保存則の局所形でギプスのエネルギー方程式という。

一方，熱流束ベクトル  $h_i$  は熱が温度の高い側から低い側に流れることを表すフーリエの法則を用いて次式のように表すことができる。

$$h_i = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (2.58)$$

ここで， $\kappa$  は熱伝導率である。上記は熱力学第一法則（閉じた系の内部エネルギーの変化は系に供給される熱から系が周囲に行った仕事量を差し引いたものに等しい）を示している。一般的に式 2.58 によるすべての変換は非可逆であると考えられるが、熱的な消散が非常に小さい場合可逆と仮定することができる。非可逆仮定については熱力学第二法則によりエントロピー生成の正値性として表され，Clausius-Duhem の不等式の形で表される。

## 2.7 境界値問題

前節までに連続体の変形挙動に対して統一的に運用できる変位，ひずみ，応力などの変数の概念ならびに保存則とその局所形としての支配方程式（governing equation）について述べた。本節では，変位，ひずみ，応力などの変数を決定するために必要な各種支配方程式を記述する。

連続体が熱的な変化を伴わずに変形した場合，密度  $\rho$ ，変位  $u_i$ ，ひずみ  $\epsilon_{ij}$ ，応力  $\sigma_{ij}$  を決定する問題を考える。このとき，これらの未知量に対する支配方程式は連続の式（式 2.47），運動量方程式（式 2.49），変位-ひずみ関係（式 2.24）で表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (2.60)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.61)$$

また，物体の表面  $S$  の一部  $S_t$  では表面力  $P_i$  が加えられ，別な一部  $S_u$  では変位が  $U_i$  に拘束されている。このとき，境界条件は次式で表される。

$$t_i = n_j \sigma_{ji} = P_i \quad S_t \text{ 上で} \quad (2.62)$$

$$u_i = U_i \quad S_u \text{ 上で} \quad (2.63)$$

このように定式化された問題を境界値問題 (boundary value problem) と呼ぶ。このような問題は一般に複雑であるため、各種近似解析や計算機を援用した数値シミュレーションが用いられる。本書では数値シミュレーションの手法である FEM (Finite Element Method) を用いて境界値問題を解く。

連続体が体積一定で変形するとき、式 2.47 より密度  $\rho$  は変化しないため未知数が減ることになる。

## 2.8 構成式

前節では連続体が変形した際の変形挙動を明らかにするために必要な変位  $u_i$ 、ひずみ  $\varepsilon_{ij}$ 、応力  $\sigma_{ij}$  などの変数とそれを決定するために必要な支配方程式および境界条件を述べた。これらの支配方程式はすべての連続体に対して同様に成り立ち、物質（例えば金属や土など）に依らない。一方、これら物質による挙動の違いは応力  $\sigma_{ij}$  とひずみ  $\varepsilon_{ij}$  や温度  $\theta$  などの関係が必要になる。この関係を構成式 (constitutive equation) と呼ぶ。先述の支配方程式は数学的に展開されてきたが、構成式は一般的に実験結果に基づく物理的考察から何らかの仮説を導入せざるを得ない現象論的な側面を持つ。

### 2.8.1 材料構成式が具備すべき条件

一般に構成式は以下に示す 3 つの原理に従わなければならない。

#### 物質客観性の原理

事象と呼ばれる空間内の位置  $\mathbf{x}$  と時間  $t$  の組  $(\mathbf{x}, t)$  を観測する観測者を基準枠と呼ぶ。基準枠は座標系から独立した存在であり、1 つの基準枠からはベクトル  $\mathbf{x}$  は唯一の存在として観測される。構成式は基準枠 (reference frame) の変化の下で不变でなければならない。例えば、2 つの基準枠  $O$  と  $O^*$  が次式の関係にある場合を考える。

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x} \quad (2.64)$$

2 つの基準枠は以下の関係があり、また構成式は両枠に対して同一の形をとらねばならない。これを物質客観性の原理 (principle of material frame indifference or principle of material objectivity) と呼ぶ。

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}(t)^T \quad (2.65)$$

#### 応力決定の原理

物体中の応力は物体の運動履歴によって決定される。これを応力決定の原理 (principle of determinism for the stress) と呼ぶ。

#### 局所作用の原理

物質点  $\mathbf{X}$  の応力の決定においては、 $\mathbf{X}$  の近傍の運動だけが関与しその外の物質点の運動は無視できる。これを局所作用の原理 (principle of local action) と呼ぶ。

### 2.8.2 線形弾性体の構成式

1次元構造物に引張変形が与えられると、各点でひずみ  $\varepsilon$  に応じて応力  $\sigma$  が生じる。この挙動は一般に Hooke の法則に従い、図 2.6 や式 2.66 のように表される。

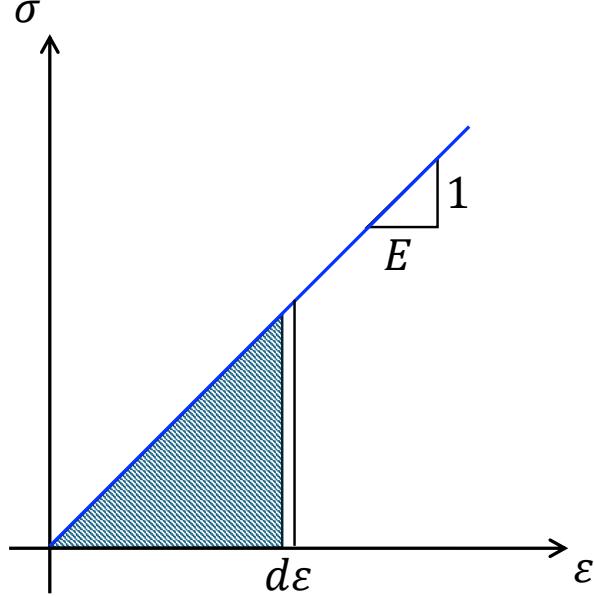


図 2.6: 線形弾性体の応力-ひずみ関係

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.66)$$

このような材料を線形弾性体 (linear elastic material) と呼び、比例定数  $E$  をヤング率と呼ぶ。このとき、物体内の各点には（弾性）ひずみエネルギーと呼ばれる物理量が蓄積される。応力  $\sigma$  の作用下でひずみ増分  $d\varepsilon$  を生じさせる際に蓄えられるひずみエネルギー密度は Hooke の法則により次式で表される。

$$\sigma d\varepsilon = E\varepsilon d\varepsilon \quad (2.67)$$

よって、無変状態から現在の変形状態に至るまでに蓄えられる総エネルギー密度は次式で表される。

$$w = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \quad (2.68)$$

これは図 2.6 の網掛け部分の面積に相当する。上記の Hooke の法則を 3 次元の線形弾性体に拡張した一般化 Hooke の法則は次式で表される。

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \quad (2.69)$$

ここで、 $D_{ijkl}^e$  は 4 階のテンソルで弾性係数テンソル (elasticity moduli tensor) と呼ばれる。このとき、3 次元弾性体内の物質点に蓄えられるひずみエネルギー密度は次式で表される。

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}D_{ijkl}^e \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (2.70)$$

なお、応力およびひずみテンソルは対称であるため、弾性係数テンソルにも対応する対称性がある。

等方性が仮定される場合の弾性体は等方弾性体 (isotropic elastic material) と呼ばれ、次式で表される。

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.71)$$

ここで、 $E$  はヤング率、 $\nu$  はポアソン比である。また、平均応力と体積ひずみ、偏差応力と偏差ひずみの間には次式の関係がある。

$$\begin{aligned} \sigma_m &= K \varepsilon_V \\ s &= 2G \varepsilon_d \end{aligned} \quad (2.72)$$

ここで、 $K$  は体積弾性係数、 $G$  はせん断弾性係数と呼び、次式で表される。

$$\begin{aligned} K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

なお、これまで論じてきた微小変形理論に対しては本節の線形弾性体は客観性を満たすが、後述する有限変形理論においては客観性を満たさないことに注意する必要がある。

### 2.8.3 超弾性体

線形弾性体では、ある変形区間での応力による仕事が初期時刻  $t_0$  と現時刻  $t$  の状態のみに依存し変形の経路に依存しない。このような性質を超弾性体 (hyperelastic) と呼ぶ。変形の経路に依存しないことから、応力は次式に示すように式 2.70 に示すひずみエネルギー密度の導関数で表される。

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.74)$$

# 第3章 数理塑性理論

## 3.1 現象論的側面

金属ないし、地盤材料は必ずしも線形弾性体としての挙動を示すわけではない。また、これらの材料は定性的には全く異なる力学挙動を示すにも関わらず、基本的な特徴を有しているため塑性論によってモデル化することが可能になる。

例えば、延性金属材料の一軸引張試験によって得られる一般的な応力ひずみ関係は図3.1のようになる。ここで、試験片には初期段階で0から軸方向応力 $\sigma_0$ まで単調増加するような負荷が与えられ、負荷のない状態まで除荷される。その後、より高い応力レベル $\sigma_1$ まで再負荷されている。このときの応力-ひずみ関係は、図中の $O_0Y_0Z_0O_1Y_1Z_1$ の経路を辿っている。この経路において、初期の線分 $O_0Y_0$ はほぼ直線であり点 $Y_0$ 以前の段階で除荷されると初期状態の点 $O_0$ に戻る。このような材料挙動は前章で述べた線形弾性体と一致する。しかし、点 $Y_0$ を超えると応力-ひずみ関係は大きく変化する。例えば、点 $Z_0$ で除荷されると $Z_0O_1$ の経路を辿り、初期状態には戻らず永久的な変形が観察される。これは永久ひずみもしくは軸方向塑性(plastic)ひずみ $\varepsilon^p$ として表される。続いて再負荷を与えると $O_1Y_1Z_1$ の経路を辿る。初期の弾性負荷経路と同様に $O_1Y_1$ は直線であり、点 $Y_1$ までに除荷すると点 $O_1$ に戻る弾性挙動を示す。

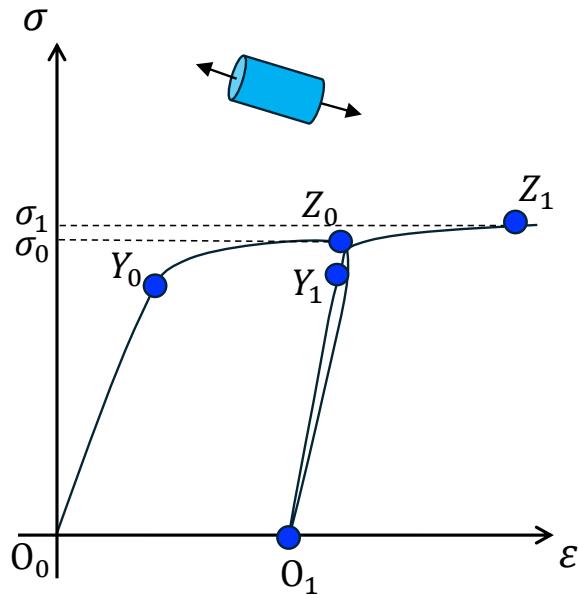


図3.1: 一軸引張試験の応力-ひずみ関係の例

以上、一軸引張りの材料挙動の特徴を以下に示す。

1. 弹性域 (elastic domain), すなわち材料の挙動が線形弾性体とみなせる応力範囲が存在し、その領域では永久変位(塑性変形)は生じない。この弾性域の境界は降伏応力(yield stress)

で定められる。図3.1において降伏応力は $Y_0$ ,  $Y_1$ である。

2. 材料が降伏応力を超えてさらに負荷を受けると、塑性降伏 (plastic yielding) もしくは塑性流れ (plastic flow) が生じ塑性ひずみが増加する。
3. 塑性ひずみの増加に伴い、降伏応力そのものの増加も観察される ( $Y_0 < Y_1$ )。この現象は硬化 (hardening) と呼ばれる。

上記の特徴はコンクリートや地盤材料等様々な材料に対して共通して観察される。本章で述べる塑性論は上記の特徴を有する材料の現象論的に記述される挙動を構成式として与えることにある。

## 3.2 一次元構成モデル

図3.1に示した応力-ひずみ曲線を図3.2に示すような理想的な曲線で近似するとする。この近似は以下に示す仮定に基づいている。

図3.1の除荷過程 $Z_0O_1$ と再負荷過程 $O_1Y_1$ の差を無視し、除荷開始点 $Z_0$ とそれに続く再負荷後の降伏開始点 $Y_1$ が一致するものとする。これにより、弾性域と弾塑性域の遷移は点 $Y_0$ と $Y_1$ で明瞭に示される。塑性降伏下では応力-ひずみ関係は常に $O_0Y_0Y_1Z_1$ の経路を辿る。この曲線は通常処女曲線 (virgin curve) と呼ばれている。

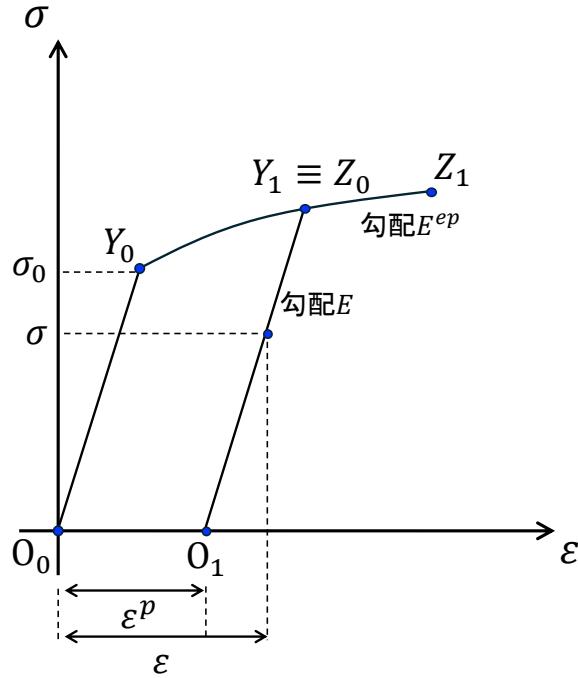


図3.2: 理想的な一軸引張の応力-ひずみ関係

以上の仮定のもとでは、初期応力から点 $Y_1$ まで単調に負荷を与えられた後の試験片は塑性ひずみ $\varepsilon^p$ と塑性限界を一定に保ったまま線形弾性挙動を示すと考えられる。よって、線分 $O_1Y_1$ 上では全ひずみ $\varepsilon$ に対応する一軸応力は次式で表される。

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3.1)$$

ここで、線形弾性体が可逆的な変形であることから、全ひずみと塑性ひずみの差は完全に可逆である。

### 3.2.1 軸方向ひずみの弾塑性分解

微小変形理論の基礎をなす重要な仮説の1つは、次式に示すように全ひずみ (total strain) が弾性成分 (elastic component)  $\varepsilon^e$  と塑性成分 (plastic component)  $\varepsilon^p$  に加算分解できることである。

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.2)$$

### 3.2.2 降伏関数と降伏基準

前節までに降伏応力を限界値とする弾性域が存在することを示した。一次元塑性モデルでは次式のような降伏関数 (yield function) を導入することで降伏応力  $\sigma_y$  で定められた弾性域が与えられる。

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y \quad (3.3)$$

$$\mathcal{E} = \{\sigma \mid \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0\} \quad (3.4)$$

あるいは弾性域では応力  $\sigma$  が次式を満たすとしても表すことができる。

$$|\sigma| < \sigma_Y \quad (3.5)$$

弾性域では変形の段階に依らず、応力レベルは降伏応力を超えることは許されない。つまり、塑性論的許容応力 (plasticity admissible stress) は、弾性域内か弾性域境界 (降伏限界) 上のいずれかに存在する。よって、塑性論的許容応力は次式を満たさなければならない。

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0 \quad (3.6)$$

応力レベルが降伏限界未満である場合、弾性ひずみのみが生じる。一方、弾性域の境界 (降伏応力) では、弾性除荷もしくは塑性降伏の状態のいずれかが起こり得る。これらは、次式に示す降伏基準 (yield criterion) として定式化される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\sigma < 0) \text{ のとき、 } \dot{\varepsilon}^p = 0 \\ \Phi(\sigma = 0) \text{ のとき、 } \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\varepsilon}^p = 0 & (\text{弾性除荷時}) \\ \dot{\varepsilon}^p \neq 0 & (\text{塑性負荷時}) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

### 3.2.3 塑性流れ則および負荷除荷の条件

式3.6は塑性降伏の判定基準、すなわち塑性ひずみが生じる条件を示している。塑性負荷の状態では引張で正の塑性ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}^p$  が生じ、圧縮で負の塑性ひずみ速度が生じる。よって塑性流れ則 (plastic flow rule, 塑性ひずみ増分と塑性ポテンシャルの関係) は次式で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) \quad (3.8)$$

ここで、 $\text{sign}$  は符号関数であり、任意のスカラー関数  $a$  に対して次式が定義される。

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} +1 & (a \geq 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases} \quad (3.9)$$

また、スカラー  $\dot{\gamma}$  は塑性定数 (plastic multiplier) と呼ばれ以下を満たす。

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad (3.10)$$

$$\Phi\dot{\gamma} = 0 \quad (3.11)$$

式 3.7, 3.9, 3.10 は降伏条件 (式 3.2) で規定されるように、弾性域では塑性ひずみ速度はゼロとなること、塑性流れは応力レベル  $\sigma$  が現段階の降伏応力に一致するときのみ発生することを意味する。式 3.5, 3.9, 3.10 は弾塑性モデルにおいて、負荷/除荷条件 (loading/unloading conditions) を定めるものである。

### 3.2.4 硬化則

塑性ひずみの増加に伴い、降伏応力も増加する。この現象（硬化）をモデルに組み込むために、 $\Phi$  を定義する式 3.2 における降伏応力  $\sigma_y$  に軸方向累積塑性ひずみの関数であるという仮定を導入する。

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) \quad (3.12)$$

なお、軸方向累積塑性ひずみ  $\bar{\varepsilon}^p$  は次式で定義される。

$$\bar{\varepsilon}^p \equiv \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| Dt \quad (3.13)$$

また、硬化関数  $\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$  で定義される曲線は一般的に硬化曲線 (hardening curve) と呼ばれている (図 3.3)。

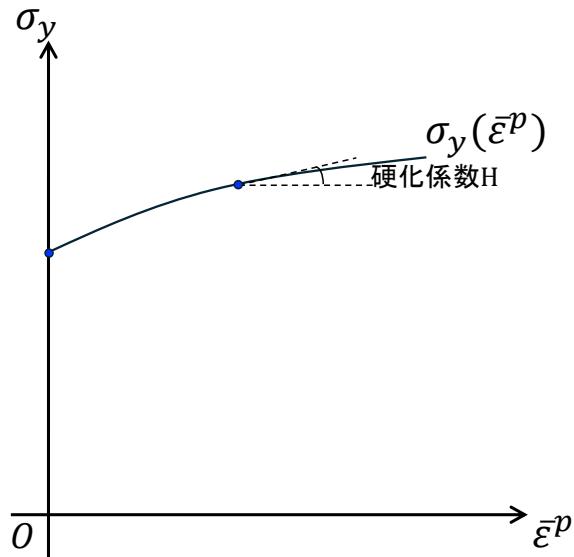


図 3.3: 一次元モデルの硬化曲線

### 3.2.5 塑性定数の決定

これまで論じてきた一次元モデルでは、塑性降伏中の塑性定数を決定する必要がある。塑性定数は塑性流れ状態で歯任意の非負の値となる。塑性定数を決定するためには、まず塑性流れ中に降伏関数の値が次式のように一定値であることに留意する。

$$\Phi = 0 \quad (3.14)$$

これは、現在の応力の絶対値は現在の降伏応力に一致することを意味する。また、塑性流れが発生する ( $\dot{\gamma} \neq 0$ ) とき、次式に示すように常に降伏関数  $\Phi$  の速度がゼロとなる。

$$\dot{\Phi} = 0 \quad (3.15)$$

式 3.14 は整合条件 (consistency condition) と呼ばれ、降伏関数の時間微分によって次式が得られる。

$$\dot{\Phi} = \text{sign}(\sigma)\dot{\sigma} - H\dot{\varepsilon}^p \quad (3.16)$$

ここで、 $H$  は硬化係数 (hardening modulus) と呼ばれ、次式が定義される。

$$H = H(\bar{\varepsilon}^p) \equiv \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (3.17)$$

式 3.14 より次式が成り立つ。

$$\text{sign}(\sigma)\dot{\sigma} = H\dot{\varepsilon}^p \quad (3.18)$$

弾性構成式 (式 2.74) を組み合わせると次式が得られる。

$$\dot{\gamma} = \frac{E}{H+E}\text{sign}(\sigma)\dot{\varepsilon} = \frac{E}{H+E}|\dot{\varepsilon}| \quad (3.19)$$

### 3.2.6 弹塑性接線係数

一般的な降伏限界における塑性流れ状態では応力-ひずみ曲線の接線に関する次式の関係式が成り立つ。

$$\dot{\sigma} = E^{ep}\dot{\varepsilon} \quad (3.20)$$

ここで、 $E^{ep}$  は弾塑性接線係数 (elasto-plastic tangent modulus) と呼ばれており、次式で求められる。

$$E^{ep} \equiv \frac{EH}{E+H} \quad (3.21)$$

### 3.3 一般化弾塑性構成モデル

前節では延性金属材料の一軸引張試験についての構成モデルを記述した。この一次元構成モデルでは、一般的な弾塑性構成モデルがもつ次の基本的な構成要素を有している。

- 弹塑性ひずみの加算分解
- 弹性構成則
- 降伏関数により規定される降伏基準
- 塑性ひずみの発展を定義する塑性流れ則
- 硬化則

本節ではこれらの概念を一般化し多次元問題に適用する。

#### 3.3.1 ひずみテンソルの加算分解

一軸ひずみと同様、多次元のひずみテンソルについても弾性成分と塑性成分に加算分解できるとする。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.22)$$

また、対応する速度形の加算分解は次式で表される。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (3.23)$$

#### 3.3.2 降伏基準と降伏曲面

一軸引張問題の降伏基準は、応力がある限界値に達すると塑性流れが生じるとするものであった。この原理は降伏関数により表現され、弾性変形のみが可能な場合は降伏関数が負の値をとり、塑性流れが生じる場合はゼロとなる。この概念は塑性流れが生じる条件を次式のように与える事により3次元に拡張される。

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \quad (3.24)$$

ここで、降伏関数  $\Phi$  は応力テンソル  $\boldsymbol{\sigma}$  と硬化に関する熱力学的応力  $\mathbf{A}$  の関数である。一次元問題と同様に弾性域は塑性降伏が生じないような応力の集合として降伏関数を用いて次式で表される。

$$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) < 0\} \quad (3.25)$$

弾性域の内部、あるいは境界上の応力は塑性論的に許容な状態にあると言われ、塑性論的許容応力の集合もしくは塑性論的許容域と定義される。降伏包絡面、すなわち塑性降伏が生じる応力の集合は  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$  であるような弾性域の境界である。この場合の降伏包絡面は応力成分を座標系の軸とする空間において超曲面 (Hypersurface) として表される。この超曲面は降伏曲面 (yield surface) と呼ばれ次式で定義される。

$$\mathcal{Y} \equiv \{\boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0\} \quad (3.26)$$

### 3.3.3 塑性流れ則と硬化則

一般的な塑性モデルを完全に定義するには内部変数に関する変数の発展式を定義しなければならない。この場合の内部変数は、塑性ひずみテンソル  $\varepsilon^p$  と硬化変数の集合  $\alpha$  であり、次式のような塑性流れ則と硬化則を仮定する。

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (3.27)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \mathbf{H} \quad (3.28)$$

ここで、 $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\sigma, A)$  は流れベクトル (flow vector) と呼ばれ、 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\sigma, A)$  は硬化変数の発展を定義する一般化硬化係数 (generalised hardening modulus) である。発展方程式 3.26 と式 3.27 は、塑性ひずみと内部変数 ( $\dot{\gamma} = 0$ ) の発展を規定する負荷/除荷条件により補完される。

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (3.29)$$

### 3.3.4 流れ則

多次元の塑性モデルを定式化する際には、流れポテンシャル (flow potential) あるいは塑性ポテンシャル (plastic potential) を利用して流れ則 (もしくは硬化則) を定義することが多い。このような定式化は、次式に示すような流れポテンシャルの一般形の存在を仮定することからはじめられる。

$$\Psi = \Psi(\sigma, A) \quad (3.30)$$

上式より、流れベクトル  $\mathbf{N}$  が次式のように得られる。

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \quad (3.31)$$

もし、硬化則が同一のポテンシャルから導かれると仮定すると次式が成り立つ。

$$\mathbf{H} \equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial A} \quad (3.32)$$

このような定式化を採用する場合には、塑性ポテンシャル  $\Psi$  は  $\sigma$  と  $A$  の非負の凸関数で原点での値はゼロでなければならない。

塑性モデルの多くは次式のように降伏関数  $\Phi$  を流れポテンシャルとして用いている。

$$\Psi \equiv \Phi \quad (3.33)$$

このようなモデルは関連流れ則 (associative flow rule) に基づく塑性モデルと呼ばれる。

### 3.3.5 塑性定数

一次元モデルと同様に次式の整合条件が成り立つとする。

$$\dot{\Phi} = 0 \quad (3.34)$$

具体的に降伏関数を時間微分すると次式が得られる。

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial A} * \dot{A} \quad (3.35)$$

また、ひずみテンソルの加算分解、弾性構成則、塑性流れ則から次式が得られる。

$$\dot{\sigma} = D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} N) \quad (3.36)$$

$A$  は硬化に関する熱力学的応力であり、次式で表される。

$$A \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \varphi^p}{\partial \alpha} \quad (3.37)$$

ここで、 $\varphi$  は自由エネルギーであり、内部変数の1つとして扱われる塑性ひずみ  $\varepsilon^p$  や硬化現象にともなう内部変数の集合  $\alpha$  の関数であると仮定する。上式と発展則（式3.27）を組み合わせることで次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) + \frac{\partial \Phi}{\partial A} * \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \alpha^2} * \dot{\alpha} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} N) + \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial A} * \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \alpha^2} * H \end{aligned} \quad (3.38)$$

以上より、塑性定数が次式で求められる。

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : D^e : \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : D^e : N - \frac{\partial \Phi}{\partial A} * \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \alpha^2} * H} \quad (3.39)$$

# 第4章 Biotの圧密方程式とCam-Clayモデル

## 4.1 有効応力とBiotの圧密方程式

### 4.1.1 2相混合体

本書が対象とする地盤材料は固体相（土粒子）と流体相（水）の2相により構成されると仮定する。実際の土は土粒子と水、空気の3相で構成されているが、地盤解析を必要とする多くの土は地下水下にあり、間隙部は水で飽和されていると仮定する。図4.1に土粒子と水で構成された2相混合体の模式図を示す。図中の $n$ は間隙率を示す。また、図中に示す相の変位ベクトルは実際の土の平均的な値であることに注意する。

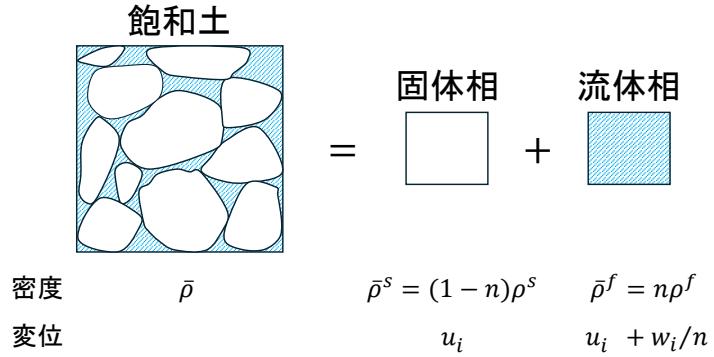


図4.1: 2相混合体の模式図

このような2相混合体の理論はBiot<sup>1)</sup>によって一般化されている。本節では多次元圧密の支配方程式（Biotの圧密方程式）を導く。

### 4.1.2 有効応力の原理

Terzaghiは飽和土に関する圧縮性と強度に関する実験データを基に有効応力の概念を提案した<sup>2)</sup>。また、この有効応力を使用して熱伝導型の1次元圧密理論を導いた。一方、一般化された2相混合体理論<sup>3)</sup>から、土粒子と間隙水の圧縮性を考慮すると固体相と流体相の間に相互作用があることが指摘されている<sup>4)</sup>。ここでは、2相混合体理論に対する有効応力の定義<sup>5)</sup>を与える。

式2.74を用いると応力テンソルは次式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^s = \bar{\rho}^s \frac{\partial w^s}{\partial \varepsilon_{ij}^s} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij}^f = \bar{\rho}^f \frac{\partial w^f}{\partial \varepsilon_{ij}^f} \quad (4.2)$$

ひずみエネルギー密度の具体形を次式で与える。

$$\bar{\rho}^s w^s = \frac{1}{2} r_1 \varepsilon_{ij}^s \varepsilon_{ij}^s + \frac{1}{3} r_2 \varepsilon_{kk}^s \varepsilon_{kk}^f \quad (4.3)$$

$$\bar{\rho}^f w^f = \frac{1}{6} r_3 \varepsilon_{kk}^f \varepsilon_{kk}^f + \frac{1}{3} r_4 \varepsilon_{kk}^s \varepsilon_{kk}^f \quad (4.4)$$

ここで、 $r_i (i=1 \sim 4)$  は材料定数である。式 4.1～4.4より、応力が次式のように求められる。

$$\sigma_{ij}^s = r_1 \varepsilon_{ij}^s + \frac{1}{3} r_2 \varepsilon_{kk}^f \delta_{ij} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{ij}^f = \frac{1}{3} r_3 \varepsilon_{kk}^f \delta_{ij} + \frac{1}{3} r_4 \varepsilon_{kk}^s \delta_{ij} \quad (4.6)$$

相互作用が 2 相間で等しいとすると、 $r_2 = r_4$  となる。式 4.5, 4.6 を等方成分について書き直すと次式が得られる。

$$\sigma^s = r_1 \varepsilon_{kk}^s + r_2 \varepsilon_{kk}^f \quad (4.7)$$

$$\sigma^f = r_2 \varepsilon_{kk}^s + r_3 \varepsilon_{kk}^f \quad (4.8)$$

ここで、 $\sigma^s$ ,  $\sigma^f$  は次式で表される。

$$\sigma^s = \frac{1}{3} \sigma_{kk}^s \quad (4.9)$$

$$\sigma^f = \frac{1}{3} \sigma_{kk}^f \quad (4.10)$$

式 4.7, 4.8 より次式が得られる。

$$\varepsilon_{kk}^s = \frac{1}{r_1 r_3 - r_2^2} (r_3 \sigma^s - r_2 \sigma^f) \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{kk}^f = \frac{1}{r_1 r_3 - r_2^2} (r_1 \sigma^f - r_2 \sigma^s) \quad (4.12)$$

ここで、 $\varepsilon_{kk}^s$  と  $\varepsilon_{kk}^f$  と土粒子実質部分の体積ひずみ  $e_s$ , 水の体積ひずみ  $e_w$ , 間隙の体積ひずみ  $e_p$  の関係は次式で表される。

$$\varepsilon_{kk}^s = n e_p + (1-n) e_s \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{kk}^f = e_w + (1-n)(e_s - e_p) \quad (4.14)$$

飽和土を非被覆の状態で水中に置き、水圧  $p_w$  を作用させた場合を考える。この場合、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk}^s &= e_p = e_s \\ e_s &= c_s p_w \\ e_w &= c_l p_w \\ c_s &= \frac{(n-1)r_3 + nr_2}{r_1 r_3 - r_2^2} \\ c_l &= \frac{(n-1)r_2 + nr_1}{r_1 r_3 - r_2^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

次に、排水試験を考える。このとき、 $\sigma_{kk}^f = 0$  より次式が得られる。

$$\varepsilon_{kk}^s = \frac{r_3}{r_1 r_3 - r_2^2} \sigma^s = c_b \sigma^s \quad (4.16)$$

$c_b$  は土粒子骨格の圧縮率である。また、 $\varepsilon_{kk}^f$  は次式で表される。

$$\varepsilon_{kk}^f = \frac{-r_2}{r_1 r_3 - r_2^2} \sigma^s \quad (4.17)$$

間隙の圧縮率を  $c_p$  とすると、式 4.13, 4.14 より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk}^s &= \varepsilon_{kk}^f + e_p \\ e_p &= \frac{r_3 + r_2}{r_1 r_3 - r_2^2} \sigma^s = c_p \sigma^s \end{aligned} \quad (4.18)$$

等方的外力  $\sigma$  が非排水状態の飽和土に作用した際の固相と液相に対する応力の分配率を求める。非排水状態では  $\varepsilon_{kk}^s = \varepsilon_{kk}^f$  より、次式が得られる。

$$r_3 \sigma^s - r_2 \sigma^f = -r_2 \sigma^s + r_1 \sigma^f \quad (4.19)$$

$\sigma = \sigma^s + \sigma^f$  より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sigma^f &= \frac{r_2 + r_3}{r_3 + 2r_2 + r_1} \sigma \\ &= \frac{c_b - c_s}{\frac{1}{n} + c_b - (1 + \frac{1}{n})c_s + c_e} \sigma \end{aligned} \quad (4.20)$$

式 4.20 より外力  $\sigma$  が作用した際、 $c_s = 0$  かつ  $c_l/c_b = 0$  の場合に限り  $\sigma^f = n\sigma$  となる。同時に  $\sigma^s$  は次式で表される。

$$\sigma^s = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right)c_b - \frac{1}{n}c_s + c_l}{\frac{1}{n}c_b - (1 + \frac{1}{n})c_s + c_l} \sigma \quad (4.21)$$

式 4.21 より  $c_s = 0$  かつ  $c_l/c_b = 0$  の場合に限り  $\sigma^s = (1 - n)\sigma$  となる。つまり、非圧縮性材料の場合には  $\sigma^f = n\sigma$ 、 $\sigma^s = (1 - n)\sigma$  となる。

次に、有効応力を定義する。この場合の”有効”とは、非排水状態で等方圧が作用した際の変形が無視できる場合、これ以外の変形を起こしうる応力を意味する。非排水状態で等方圧が作用した時、間隙内で観測される流体圧を  $p_w$  とすると、 $\sigma^f$ 、 $\sigma^s$  は次式で表される。

$$\sigma^f = np \quad (4.22)$$

$$\sigma^s = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right)c_b - \frac{1}{n}c_s + c_l}{c_b - c_s} np_w \quad (4.23)$$

式 4.22、4.23 より全応力  $\sigma$  は次式で表される。

$$\sigma = np_w + \frac{(1 - n)c_b - c_s + nc_l}{c_b - c_s} p_w \quad (4.24)$$

上式は、間隙水圧  $p_w$  が観測されるとき、土が平衡を保つためには  $\sigma$  は式 4.24 で与えられなければならぬことを意味する。また、この時の変形は  $p_w$  の流体に拘束される。式 4.24 より、有効応力は次式で表される。

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma - mp_w \\ m &= n + \frac{(1-n)c_b - c_s + nc_l}{c_b - c_s}\end{aligned}\quad (4.25)$$

$c_s = 0$ かつ  $c_l/c_b = 0$  の条件下では次式となる。

$$\sigma' = \sigma - p_w \quad (4.26)$$

式 4.26 は Terzaghi による有効応力と一致する。

### 4.1.3 ダルシー則

フランスの上水道技師 Henry Darcy は 1856 年、上水道のろ過砂の実験的研究から次式の関係を発表した。

$$v = -\frac{k}{\gamma_w} \text{grad}p_w \quad (4.27)$$

上式で表されるダルシー則は間隙流体の運動を記述する運動方程式と見なせるのと同時に、熱力学的考察からの成果も含まれているという意味で力学特性を記述する構成則と見ることもできる。

### 4.1.4 Biot の圧密方程式

Biot の圧密方程式はこれまで示した運動量方程式、連続の式、ひずみの適合条件、有効応力の原理、ダルシー則、土骨格の構成式による連立偏微分方程式にまとめられる。ただし、微小変形理論に基づくものとする。

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial v_{ji}}{\partial x_i} \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.30)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} p_w \quad (4.31)$$

$$v_{ij} = -\frac{k_{ij}}{\gamma_w} \text{grad}p_w \quad (4.32)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \varepsilon_{kl} \quad (4.33)$$

### 4.1.5 土骨格の構成式 (Cam-Clay モデル)

従来の地盤の解析は圧密とせん断を個別に考えていた。一方、Cambridge 大学の研究グループによって圧密とせん断を統一的に考えられる構成式、Cam-Clay モデルが導き出された<sup>6)</sup>。本書では、土骨格の構成式に Cam-Clay モデルを用いることとし、以下にその概要を示す。

### Cam-Clay モデルの基礎となる実験事実

前述の通り、構成式は一般的に実験結果に基づく物理的考察から何らかの仮説を導入せざるを得ない現象論的な側面を持つ。本節では Cam-Clay モデルの基礎となる実験事実を示す。

図 4.2 に理想的な等方圧密試験結果を示す。AC 上は正規圧密状態、BD 上は過圧密状態であり、AC 線は正規圧密曲線 (Normal consolidation line, NCL)、BD 線は膨潤曲線 (Swelling line) と呼ぶ。AC 線、BD 線は  $v - \ln p'$  上にプロットすると直線に近似できるため以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} v &= N - \lambda \ln p' \\ v &= v_k - \kappa \ln p' \end{aligned} \tag{4.34}$$

$\lambda$  は圧縮指数、 $\kappa$  は膨潤指数、 $N$  は  $p' = 1.0$  における比体積である。 $v_k$  は  $p'_c$  の値に応じて変化する。

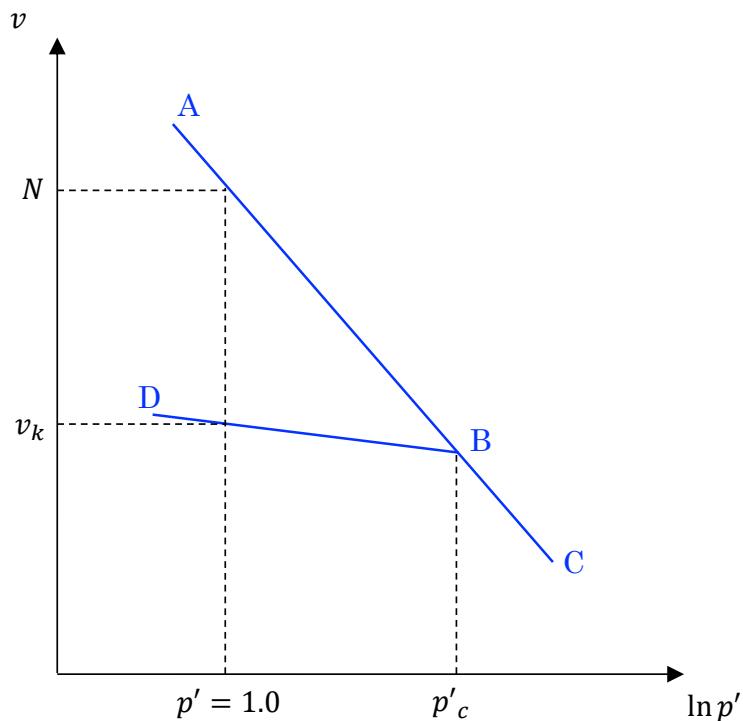
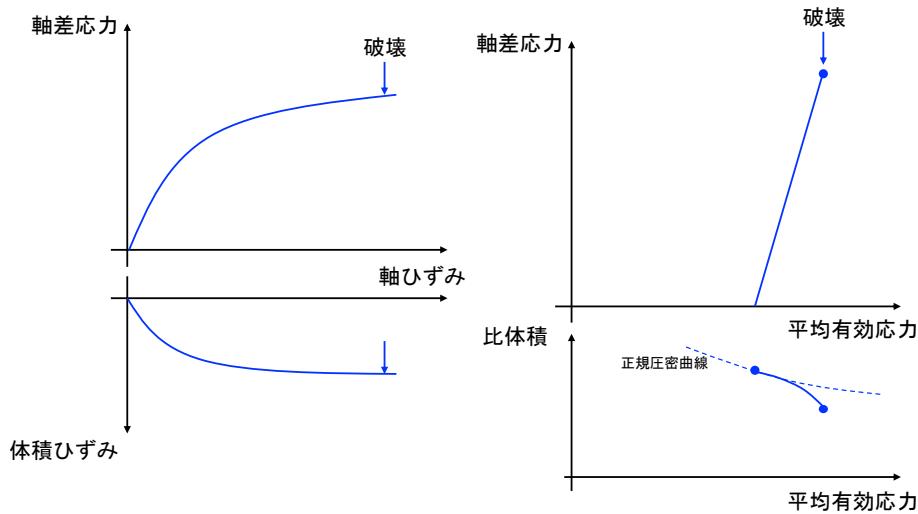
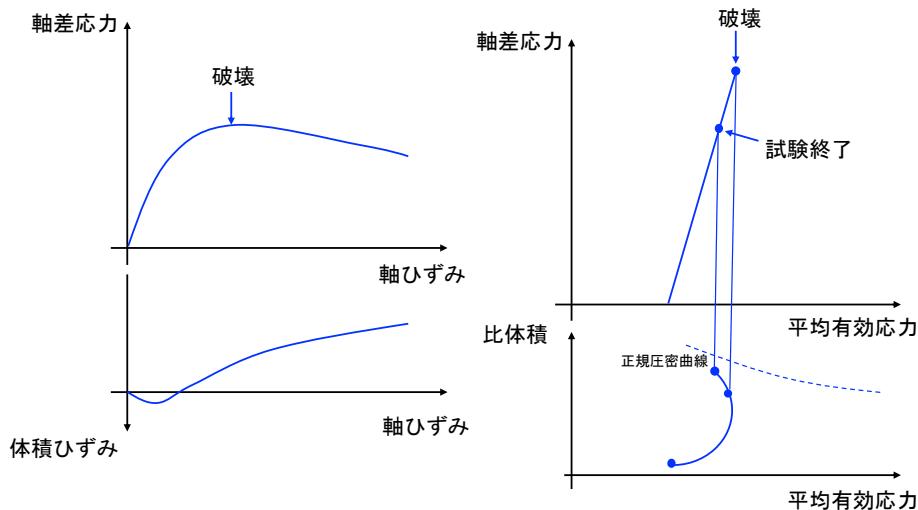


図 4.2: 比体積と平均有効応力の関係<sup>7)</sup>

次に、三軸圧縮試験結果を示す。Imperial College の研究グループは Weald clay を用いた三軸圧縮試験を行い、正規圧密状態、過圧密状態および排水せん断、非排水せん断の合わせて 4 種類のせん断挙動を示した。

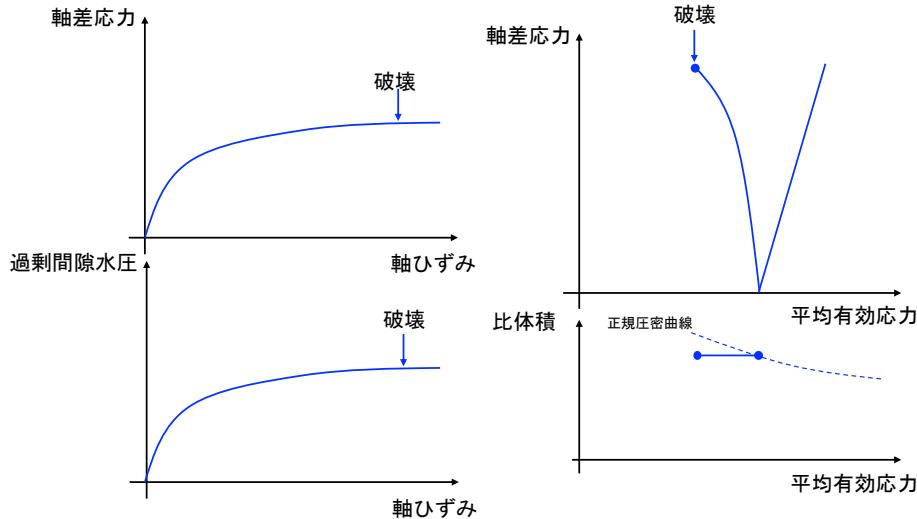
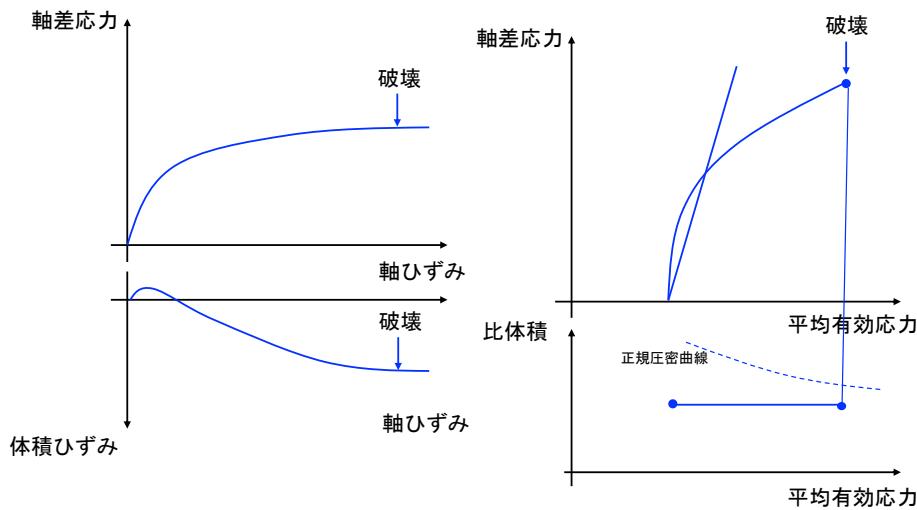
正規圧密粘土に対する側圧一定の排水せん断試験結果を図 4.3 に示す。正規圧密粘土では軸ひずみの増加とともに軸差応力が増加し体積圧縮が生じる。このようなせん断に伴う体積圧縮を負のダイレタンシー (negative dilatancy) と呼ぶ。軸ひずみがある値を超えると破壊 (failure) となり、その後は軸差応力、体積ひずみともにほぼ一定の値に達し軸ひずみのみが進行する。軸差応力と平均有効応力の関係を有効応力経路と呼び、側圧一定の排水三軸試験では傾き 3 の直線を示す。

図 4.3: 正規圧密粘土の排水せん断試験<sup>7)8)</sup>図 4.4: 過圧密粘土の排水せん断試験<sup>7)8)</sup>

過圧密粘土に対する側圧一定の排水せん断試験結果を図 4.4 に示す。せん断初期は軸ひずみの増加とともに軸差応力が増加するが、ある軸ひずみでピークを示しその後軸差応力は減少している。ここでは、軸差応力のピークの状態を破壊と定義している。体積変化は船団初期に圧縮、その後膨張を示している。過圧密状態の排水せん断挙動の大きな特徴は、吸水膨張しているにも拘らず軸差応力が増加することである。

正規圧密粘土に対する側圧一定の非排水せん断試験結果を図 4.5 に示す。非排水せん断試験では軸ひずみの増加とともに軸差応力が増加し、体積圧縮が起こるが、拘束されているため正の過剰間隙水圧が生じる。有効応力経路を見るとせん断に伴う軸差応力の増加とともに、過剰間隙水圧が増加し平均有効応力が減少している。

過圧密粘土に対する側圧一定の非排水せん断試験結果を図 4.6 に示す。軸ひずみの増加とともに軸差応力が増加する。破壊に至る軸差応力は正規圧密粘土とほぼ等しい。過剰間隙水圧はせん断初期に増加した後、負の値に転じる。破壊状態の軸差応力や過剰間隙水圧は軸ひずみが進行しても一定を保っている。

図 4.5: 正規圧密粘土の非排水せん断試験<sup>7)8)</sup>図 4.6: 過圧密粘土の非排水せん断試験<sup>7)8)</sup>

### 限界状態線 (Critical state line)

前節で示した 4 つの粘土のせん断挙動を有効応力経路にまとめると図 4.7 のようになる。破壊時の状態に着目すると、過圧密粘土の排水せん断試験以外は原点を通る直線に乗る。過圧密粘土の排水せん断試験もは介護の軸差応力  $q$  が減少していき、試験終了後の残留状態では前述した直線上に乗ると仮定する。この直線を次式で表す。

$$q = Mp' \quad (4.35)$$

ここで、 $M$  限界状態応力比と呼ばれる固有の定数である。一方、試験終了時の状態は比体積-平均有効応力平面上でも 1 本の線に達し、それは  $q = 0$  での正規圧密線より下側に位置する。上記の線は次式で表すことができる。

$$v = \Gamma - \lambda \ln p' \quad (4.36)$$

すなわち、限界状態線は正規圧密曲線と平行になる。限界状態応力比は次式で表される応力比が  $M$  となることに等しく、また、応力比は  $K_0$  条件での一次元圧縮では式 4.38 のようになる。

$$\eta = \frac{q}{p'} \quad (4.37)$$

$$\eta = \frac{3(1 - K_0)}{1 + 2K_0} \quad (4.38)$$

### 限界状態線とロスコ一面

$q - p' - \nu$  空間における正規圧密線から限界状態線までは唯一の曲線で結ばれる。この曲面はロスコ一面 (Roscoe surface) と呼ばれる。

Henkel<sup>9)</sup> は正規圧密粘土に対し排水せん断試験と非排水せん断試験を圧縮、引張の両方について系統的に実施した。そして、等含水比線 (contours of constant water content) を整理した。非排水せん断試験では等方圧に応じて含水比は異なるものの、せん断中は含水比一定であるため有効応力経路そのものが等含水比線となる。一方、排水せん断試験ではせん断中に含水比が変化するため、排水量を測定し、せん断中の含水比を逆算し同じ含水比を結んで等含水比線を描いている。等含水比線を有効応力経路に重ねると、図 4.8 のようになる。図からわかるように、非排水せん断試験の有効応力経路と排水せん断試験での有効応力経路は同じ比体積を得る。よって、正規圧密粘土のせん断試験において、排水、非排水せん断試験に拘らず  $p'$  と  $q$  が与えられるとその状態における比体積は一意的に決まることが示し、ある面を形成することが確認できる。

ロスコ一面は  $q - p' - \nu$  空間の原点から見て外側に凸の曲面を示す。この曲面の内側に土の状態を持つためには過圧密状態にする必要がある。一方、いかなるせん断を行ってもロスコ一面の外側にその状態をとることはできない。つまり、ロスコ一面は土の状態が存在できる可能領域と存在できない不可能領域とに分ける境界を示しており、状態境界面 (state boundary surface) とも呼ばれる。超過圧密粘土のせん断試験においても同様の状態境界面が認められ、その面をボシュレフ面 (Hvorslev surface) と呼ぶ。以上をまとめて図に示す。

練り返された正規圧密粘土と過圧密粘土の実験結果から以下のことが示された。

- $q - p' - \nu$  空間ににおいて状態境界面が存在し、土は境界面を含めたその内部でしか存在することができない。
- 正規圧密粘土は常に状態境界面（ロスコ一面）上に存在し、 $p'$ ,  $q$ ,  $\nu$  の値は一意的に決まる。
- 土エレメントの破壊を意味する限界状態が存在し、限界状態線として表される。限界状態線は状態境界面の一部であり、限界状態では軸差応力一定で軸ひずみが増加し続ける。また、体積変化はない。
- 限界状態線は正規圧密曲線と平行になる。

### 降伏関数と塑性ポテンシャル

ロスコ一面は 2 つの曲線、正規圧密曲線と限界状態線に挟まれた曲面である。正規圧密曲線と限界状態線の式を再掲する。

$$v = N - \lambda \ln p' \quad (4.39)$$

$$v = \Gamma - \lambda \ln p' \quad (4.40)$$

ここで、正規圧密曲線は  $\eta = \frac{q}{p'} = 0$  であり、限界状態線は  $\eta = M$  である。限界状態では有効応力に変化がなくてもせん断ひずみは不定で、どのようなせん断ひずみに対しても体積は変化しない。ひずみの加算分解から、体積ひずみ増分についても以下のように加算分解できると仮定する。

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_v^e + \dot{\varepsilon}_v^p \quad (4.41)$$

以上より、限界状態では次式に従う。

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 0 \quad (4.42)$$

式 4.39, 4.40 より、 $\lambda$  が一定であると仮定し、 $p' = 1.0$  の比体積が応力比に依存すると仮定すると、次式が得られる。

$$\nu = x(\eta) - \lambda \ln p' \quad (4.43)$$

この条件を満足する最も簡単な関数は線形補間であり、次式で表される。

$$x(\eta) = N + \frac{\Gamma - N}{M} \left( \frac{q}{p'} \right) \quad (4.44)$$

$$\nu = N + \frac{\Gamma - N}{M} \left( \frac{q}{p'} \right) - \lambda \ln p' \quad (4.45)$$

次に、この粘土を  $p' = p'_0$  で等方圧密した状態で正規圧密曲線上に位置する状態 ( $\nu_0, p'_0, q_0 = 0$ ) を初期状態とする。この状態から  $\eta$  を与えることで正規圧密状態のまま、すなわちロスコ一面上を現応力状態が  $(\nu, p', q)$  に変化したとする。初期状態は次式で表される。

$$\nu_0 = N - \lambda \ln p'_0 \quad (4.46)$$

一方、現応力は式 4.45 そのものなので、この状態変化による体積ひずみ  $\varepsilon_v$  は次式で表される。

$$\varepsilon_v = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_0} \left\{ \frac{N - \Gamma}{M} \left( \frac{q}{p'} \right) + \lambda \ln \frac{p'}{p'_0} \right\} \quad (4.47)$$

体積ひずみの弾性成分は次式で表される。

$$\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{\nu_0} \ln \frac{p'}{p'_0} \quad (4.48)$$

よって、塑性体積ひずみは次式で得られる。

$$\varepsilon_v^p = f(p', q) = \frac{1}{\nu_0} \left\{ \frac{N - \Gamma}{M} \left( \frac{q}{p'} \right) + (\lambda - \kappa) \ln \frac{p'}{p'_0} \right\} \quad (4.49)$$

上式は Original Cam-Clay モデルの降伏関数として知られている。

Henkel の実験から、比体積が負荷経路に依らないことが示されたため、体積ひずみ  $\varepsilon_v$  も同様に負荷経路に依らない。弾性体積ひずみが負荷経路に依らないことから、塑性体積ひずみも負荷経路に依らないことがわかる。よって、式 4.49 を Original Cam-Clay モデルの塑性ポテンシャル面、塑性体積ひずみを硬化パラメータとすることが可能であると考えられる。これらから、関連流れ則を適用する。

$$\dot{\varepsilon}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \quad (4.50)$$

上式は次式のように  $p' - q$  平面上の塑性ひずみ増分ベクトルの圧縮成分とせん断成分に分けることができる（図 4.10）。

$$\dot{\varepsilon}_s^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.51)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial p'} \quad (4.52)$$

式 4.42 で示した限界状態における塑性体積ひずみ増分がゼロとなる条件は、次式となる。

$$\frac{\partial f}{\partial p'} = 0 \quad (4.53)$$

上式を式 4.49 に代入すると、次式が得られる。

$$N - \Gamma = \lambda - \kappa \quad (4.54)$$

以上より、Original Cam-Clay モデルの降伏関数が次式のように得られる。

$$\varepsilon_v^p = f(p', \mathbf{q}) = \frac{1}{\nu_0} \left\{ \frac{N - \Gamma}{M} \left( \frac{\mathbf{q}}{p'} \right) + (\lambda - \kappa) \ln \frac{p'}{p'_0} \right\} = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left( \frac{1}{M} \frac{\mathbf{q}}{p'} + \ln \frac{p'}{p'_0} \right) \quad (4.55)$$

なお、式 4.44 を線形補間ではなく次式で補間すると、Modified Cam-Clay モデルとなる。

$$x(\eta) = N + \frac{\Gamma - N}{\ln 2} \ln \left( \frac{M^2 + (\mathbf{q}/p')^2}{M^2} \right) \quad (4.56)$$

$$\varepsilon_v^p = f(p', \mathbf{q}) = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left\{ \ln \left( \frac{M^2 + (\mathbf{q}/p')^2}{M^2} \right) + \ln \frac{p'}{p'_0} \right\} \quad (4.57)$$

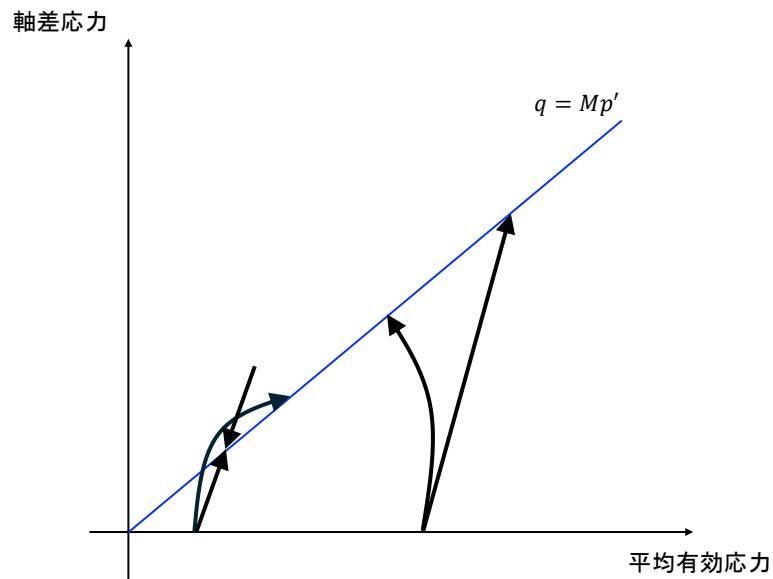
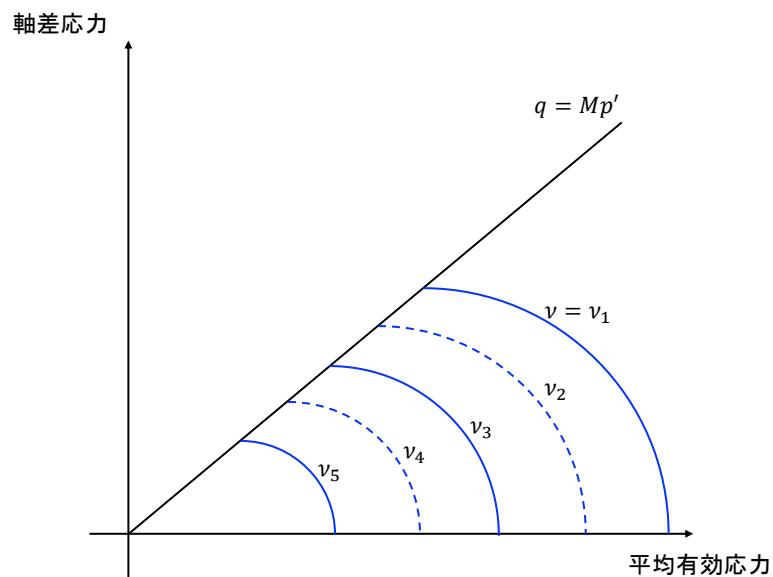
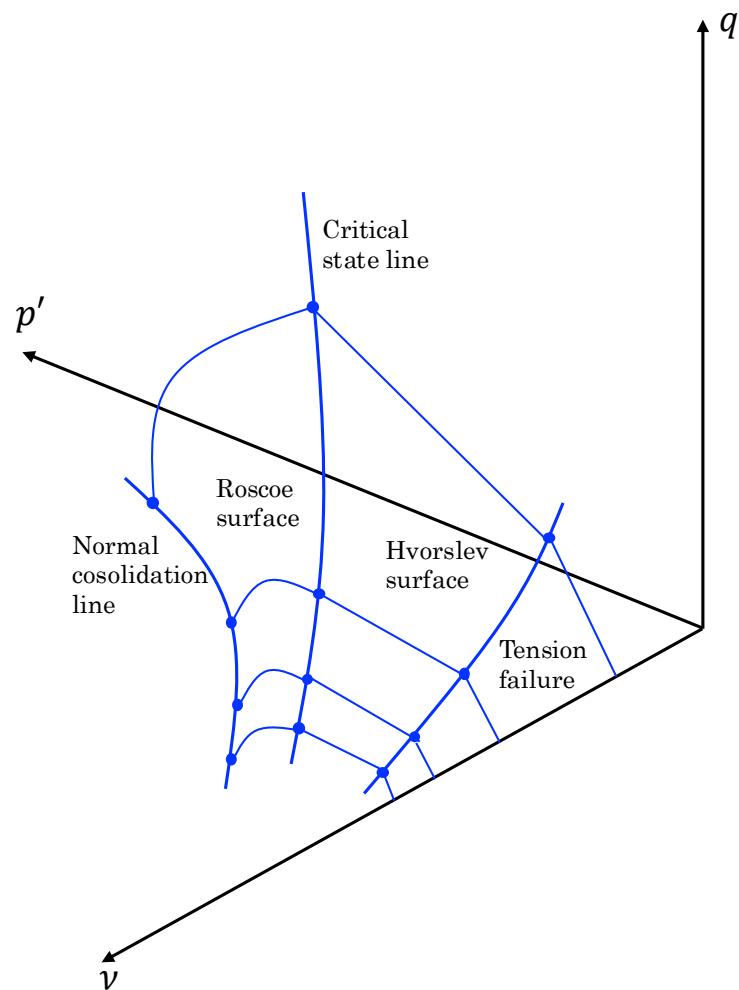
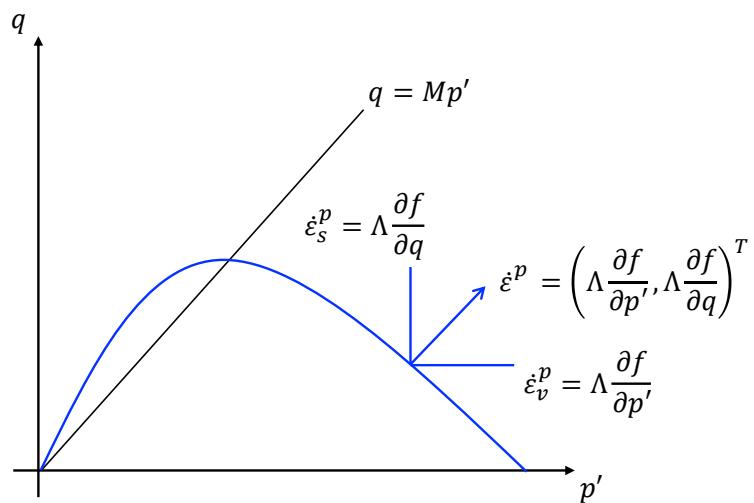


図 4.7: 4 つの典型的なせん断挙動

図 4.8: 等含水比線<sup>8)</sup>

図 4.9: 状態境界面<sup>8)</sup>図 4.10: 塑性ひずみ増分の分解<sup>10)</sup>

# 第5章 線形有限要素法の離散化

## 5.1 空間の離散化

有限要素法では、領域全体  $\Omega$  を次式のように小領域（要素）に分割する。

$$\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{n_{element}} \Omega_e \quad (5.1)$$

ここで、 $n_{element}$  は要素数、 $\Omega_e \in \mathbb{R}^{n_{dim}}$  は要素境界  $\partial\Omega_e$  を持つ要素  $e$  の小領域を表す。そして、各要素は  $n_{node}$  個の節点でその形状が定義される。図 5.1 は 2 次元の平面問題における四角形要素に分割した例を示す。この作業をメッシュ分割といい、空間を有限個の要素に分割することから空間離散化と呼ぶ。

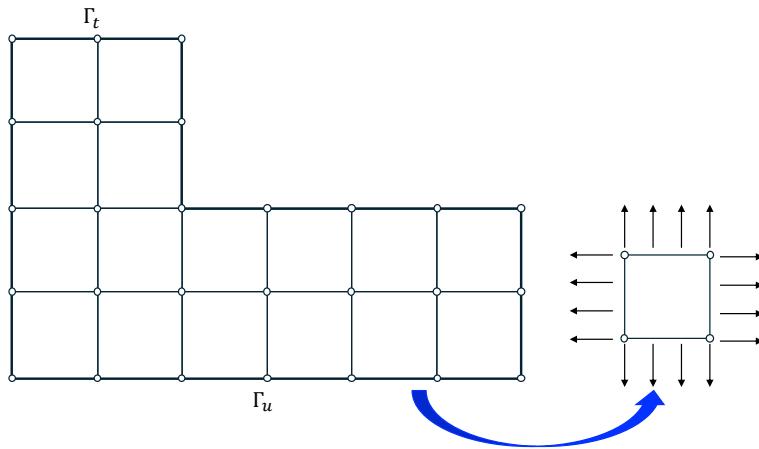


図 5.1: 有限要素の例

## 5.2 形状関数による離散化

いま、 $n_{dim}$  次元問題において、 $n_{node}$  個の節点を持つ要素  $e$  を考える。要素  $e$  内の変位  $\mathbf{u}$  及びその仮想変位  $\delta\mathbf{u}$  を形状関数  $N_\alpha^e(\mathbf{x}) (\alpha = 1, \dots, n_{node})$  を用いて次式のように近似する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Omega_e} &\approx \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n_{node}} N_\alpha^e(\mathbf{x}) \mathbf{d}_\alpha^e \\ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Omega_e} &\approx \delta\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n_{node}} N_\alpha^e(\mathbf{x}) \delta\mathbf{d}_\alpha^e \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで、下添え字  $h$  は有限要素近似であることを表している。また、 $d_\alpha^e \in \mathbb{R}^{n_{dim}}$ 、 $\delta d_\alpha^e \in \mathbb{R}^{n_{dim}}$  はそれぞれ要素  $e$  の節点  $\alpha$  における変位ベクトル及びその仮想変位ベクトルを表す。これらの変位および仮想変位の近似式を用いるとひずみと仮想ひずみは次式のように近似できる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}|_{\Omega_e} \approx \partial \mathbf{u}_h = \sum_{\alpha=1}^{n_{node}} \partial N_\alpha^e(\mathbf{x}) \mathbf{d}_\alpha^e = \sum_{\alpha=1}^{n_{node}} B_\alpha^e(\mathbf{x}) \partial \mathbf{d}_\alpha^e \quad (5.3)$$

ここで、形状関数  $N_\alpha^e$  の勾配を表すマトリックスは通称 B マトリックスと呼ばれ次式で定義される。

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} & \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (n_{dim} = 2) \quad (5.4)$$

### 5.3 4 節点アイソパラメトリック要素

具体的な形状関数として 4 節点アイソパラメトリック要素を考える。図 5.2 に示すような物理座標系  $(x, y)$  で定義された四角形要素  $e$  について考える。

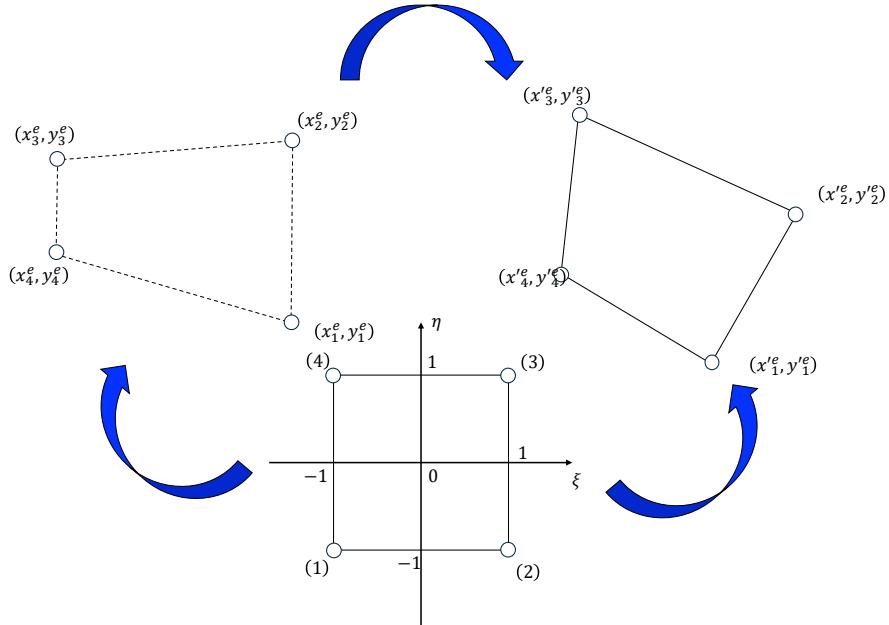


図 5.2: 自然座標で定義された形状関数によるパラメトリックマッピング

元の節点座標  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1^e, x_2^e, x_3^e, x_4^e)^T$   $\bar{\mathbf{y}} = (y_1^e, y_2^e, y_3^e, y_4^e)^T$  が変形後に  $\bar{\mathbf{x}}' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)^T$   $\bar{\mathbf{y}}' = (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)^T$  に移動したとする。このとき、変形前後の要素は自然座標系 (natural coordinate system) の  $(\xi, \eta)$  において 1 辺の長さが 2 で図心が原点における正四角形要素が変換されることで定義される。

## 5.4 平面問題の支配方程式の弱形式化

### 5.4.1 固体の支配方程式の弱形式化

これまで示した支配方程式は全て偏微分方程式であり、各物質点  $x_{ij}$  で定義されているため、その形式は一般に「局所形」と呼ばれている。有限要素法ではこの局所形の支配方程式を強形式 (strong form) と呼ぶ。一方、大域的（積分した量の）つり合い状態を記述する枠組みを弱形式 (weak form) と呼び、区別している。有限要素法は弱形式の離散化手法であり、強形式の支配方程式を弱形式に変換する必要がある。

まず、実変位  $\mathbf{u}$  から任意のズレを表す仮想的な変位  $\delta\mathbf{u}$  を導入する。変位解  $\mathbf{w}$  は次式で表される。

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u} \quad (5.5)$$

次に、変位の変分  $\delta\mathbf{u}$  を仮想的な変位として作用させた際の内力と外力による仕事のつり合いを考える。つまり、変位の変分  $\delta\mathbf{u}$  と運動量方程式の両辺の内積を取ることで、得られる仕事量を次式のような領域積分で計算する。

$$\int_{\Omega} (\delta u \quad \delta v) \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \right\} dV = 0 \quad (5.6)$$

式 5.2 は弱形式と呼ばれ、弱形式の運動方程式は領域内部の内力と外力の運動方程式と数学的に等価である。しかし、外表面  $\Gamma_t$  における内力と分布外力ベクトル  $\bar{\mathbf{t}}$  とのつり合いは考慮されておらず、任意の変位  $\delta_u$  による全仕事量としては不十分である。そこで、外表面  $\Gamma_t$  における平衡条件を弱形式に反映するため、ガウスの発散定理を適用する。

$$\int_{\Gamma} (\delta u \quad \delta v) \left\{ \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \right\} dS - \int_{\Omega} (\delta u \quad \delta v) \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \right\} dV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

上式に自然境界条件を考慮すると次式が得られる。

$$\int_{\Omega} (\delta u \quad \delta v) \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \right\} dV = \int_{\Gamma} (\delta u \quad \delta v) \begin{pmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{pmatrix} dS \quad (5.8)$$

上式は系に作用する全ての「仮想的」な仕事のつり合いを考慮した弱形式であり、仮想仕事の原理 (principle of virtual work) と呼ばれている。また、熱伝導などの場の問題に対しても同様の積分形の支配方程式が導出され有限要素法の基礎式として用いられるため、統一的に弱形式と呼ぶのが一般的である。

上記の弱形式は材料に関係なく成り立つ一般的な式である。よって土のような弾塑性材料に際しても変更を加えることなく適用できる。

### 5.4.2 固体・流体連成の支配方程式の弱形式化

土・水連成解析において最終的に解くべき多元連立連立方程式の未知量ベクトルの中身は、各節点における変位成分と間隙水圧の値である。つまり、圧密解析では土骨格と間隙水圧を同時に解く必要がある。土・水連成の有限要素法を最初に手掛けたのは Sandhu and Wilson<sup>11)</sup> であり、変分原理<sup>12)</sup> をもとに土骨格の等方線形弾性体と間隙水の非圧縮性を仮定しつり合い方程式と連続式に対する汎関数を導出した。一方、Christian and Boehmer<sup>13)</sup> は微小な時間増分ごとの体積ひずみの推移を連続式で差分化で表示し、これとつり合い方程式を連立する方法を提案した。前者は連成（Couple）解析であり Sandhu 流、後者は変位の離散化には節点値、間隙水圧の離散化には要素値を用いる非連成（Uncoupled）解析であり Christian 流と呼ばれている。特に Christian 流は後に赤井ら<sup>14)</sup> によって発展され、弾塑性材料に対する適用が試みられた。

これらに対し、Zienkiewicz and Bette<sup>15)</sup> は、つり合い方程式を仮想仕事の原理で書き下し、連続式に対し Galerkin 法を適用して離散化し、両者を連立させて多元連立微分方程式を導出した。この手法は Sandhu 流と同様節点間隙水圧を未知数とする連成解析である。本書ではこの Zienkiewicz and Bette の手法を用いて土・水連成有限要素法を導出する。

定式化には四角形一次要素を用いる。なお、一般的に変位と間隙水圧を同一の形状関数で補完することは必ずしも論理的に整合性のある方法とは言い難く、多くの場合変位と間隙水圧に異なる形状関数が採用される。しかし、本書では簡単のため変位と間隙水圧に同一の形状関数を用いることとする。

任意の要素の節点変位ベクトル  $\mathbf{u}'$ 、節点間隙水圧ベクトル  $\mathbf{p}'_w$  を次式で定義する。

$$\mathbf{u}' = [u'_{x1} \ u'_{y1} \ u'_{x2} \ u'_{y2} \ u'_{x3} \ u'_{y3} \ u'_{x4} \ u'_{y4}]^T \quad (5.9)$$

$$\mathbf{p}'_w = [p'_{w1} \ p'_{w2} \ p'_{w3} \ p'_{w4}]^T \quad (5.10)$$

変位-ひずみ関係は  $[B]$  マトリクスを用いて表される。

$$\{u\} = [N]\{u'\} \quad (5.11)$$

$$\{\varepsilon\} = -[B]\{u'\} \quad (5.12)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

また、変位-体積ひずみ関係は  $[B_\Delta]$  マトリクスで表される。

$$\{\varepsilon_v\} = [B_\Delta]\{u'\} \quad (5.14)$$

$$[B_\Delta] = \left[ \begin{array}{cccccccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{array} \right] \quad (5.15)$$

要素内の間隙水圧勾配は  $[B_q]$  マトリクスで表される。

$$\{p_w\} = [B_q]\{p'_w\} \quad (5.16)$$

$$[B_q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

表面力についても同様に形状関数で補完する。

$$\{\bar{t}\} = [N]\{\bar{t}'\} \quad (5.18)$$

仮想変位ベクトル  $\delta u$  と仮想ひずみベクトル  $\delta \varepsilon$  を定義すると、仮想仕事の原理は次式で表される。

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV - \int_{S_1} \{\delta u\}^T \{\bar{t}\} dS = 0 \quad (5.19)$$

$$\{\delta u\} = [\delta u_x \quad \delta u_y]^T \quad (5.20)$$

$$\{\delta \varepsilon\} = [\delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \tau_{xy}]^T \quad (5.21)$$

$$\{X\} = [0 \quad -\gamma_t]^T \quad (5.22)$$

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_{V_m} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV - \int_{S_{1m}} \{\delta u\}^T \{\bar{t}\} dS \right) = 0 \quad (5.23)$$

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_{V_m} -\{u'\}^T [B]^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta u'\}^T [N]^T \{X\} dV - \int_{S_{1m}} \{\delta u'\}^T [N]^T \{\bar{t}\} dS \right) = 0 \quad (5.24)$$

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_{V_m} [[B]]^T [D][B] - [B]^T [\sigma'_0] - [B]^T u_w - [N]^T \{X\} \right) dV - \int_{S_{1m}} [N]^T \{\bar{t}\} dS = 0 \quad (5.25)$$

ここで、 $\{u_w\}$  を間隙水圧を用いて表すと、 $\{u_w\} = [1 \quad 1 \quad 0][N]\{p'_w\}$  と表される。さらに、 $[B]^T$  を乗じると  $[B]^T \{u_w\} = [B]^T [1 \quad 1 \quad 0][N]\{p'_w\} = [B_\Delta][N]\{p'_w\}$  と表される。

解析領域全体の節点変位ベクトルを  $\{u\}$ 、節点間隙水圧ベクトルを  $\{p_w\}$  とすると、次式でまとめられる。

$$[K]\{u\} + [C]\{p_w\} = -\{M_1\} + \{M_2\} + \{P_1\} \quad (5.26)$$

$$[K] = \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B]^T [D][B] dV \quad (5.27)$$

$$[C] = - \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_\Delta]^T [N] dV \quad (5.28)$$

$$\{M_1\} = \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B]^T [\sigma'_0] dV \quad (5.29)$$

$$\{M_2\} = \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [N]^T \{X\} dV \quad (5.30)$$

$$\{P_1\} = \sum_{m=1}^M \int_{S_{1m}} [N]^T [N]\{\bar{t}'\} dS \quad (5.31)$$

一方、間隙水の流れはダルシー則と連続式より導かれる次式を基礎式とする。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial y} + \gamma_w \right) \right\} - \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = 0 \quad (5.32)$$

上式に Galerkin 法（重み付き残差法の一種）を適用する。まず、上式に重み関数  $w$  を乗じ、領域全体で積分する。

$$\int_V w \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial y} + \gamma_w \right) \right\} - \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (5.33)$$

Galerkin 法では、この重み関数を形状関数と一致させる。ガウスの発散定理を適用し、境界条件を考慮すると次式が得られる。

$$\int_V N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial y} + \gamma_w \right) \right\} - \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (5.34)$$

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_{V_m} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial y} + k \frac{\partial N_i}{\partial t} - N_i \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right] dV - \int_{S_{im}} N_i \bar{q} dS \right) = 0 \quad (5.35)$$

ここで、上式左辺第1項を整理すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \int_{V_m} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_w}{\partial y} \right) dV \\ &= \sum_{m=1}^M \int_{V_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k}{\gamma_w} & 0 \\ 0 & \frac{k}{\gamma_w} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_w}{\partial x} \\ \frac{\partial p_w}{\partial y} \end{pmatrix} dV \end{aligned} \quad (5.36)$$

全ての  $i$  について書き下すと次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_q]^T [k] [B_q] \{p_w\} dV \quad (5.37)$$

$$[k] = \frac{1}{\gamma_w} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

同様に式 5.35 の第2項、第3項、第4項の積分を全ての  $i$  について書き下すと次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_q]^T [k] \{X_w\} dV \quad (5.39)$$

$$- \sum_{m=1}^M \int_{V_m} ([B_\Delta][N])^T \frac{d}{dt} \{u\} dV \quad (5.40)$$

$$\sum_{m=1}^M \int_{S_{2m}} [N]^T [N] \{\bar{q}'\} dS \quad (5.41)$$

以上を解析領域全体でまとめると次式が得られる。

$$[C] \frac{d}{dt} \{u\} - [\bar{K}] \{p_w\} = \{M_3\} - \{P_2\} \quad (5.42)$$

$$[\bar{K}] = \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_q]^T [k] [B_q] dV \quad (5.43)$$

$$\{M_3\} = \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_q]^T [k] \{X_w\} dV \quad (5.44)$$

$$\{P_2\} = \sum_{m=1}^M \int_{S_{2m}} [N]^T [N] \{\bar{q}'\} dS \quad (5.45)$$

後退差分を適用すると、最終的に解くべき多元連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [K] & [C] \\ [C]^T & -\Delta t [\bar{K}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(t + \Delta t) \\ p_w(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ [C]^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ p_w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ R \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$$F = -\{M_1(t + \Delta t)\} + \{M_2(t + \Delta t)\} + \{P_1(t + \Delta t)\} \quad (5.47)$$

$$R = \Delta t \{M_3(t + \Delta t)\} - \Delta t \{P_2(t + \Delta t)\} \quad (5.48)$$

# 第6章 非線形有限要素法

## 6.1 非線形解法の概要

線形弾性体では現時刻の応力が現時刻の変位の陽な関数として表現できるため、その関係式を離散化されたつり合い方程式に組み込むことで線形代数方程式が得られる。よって、これを一度だけ解くことでつり合い方程式を満たすひずみと応力が直接得られる。一方、Cam-Clay モデルのような非線形弾塑性体では、現時刻の応力が現時刻の変位の陽な関数として表現できない。すなわち、応力-ひずみ関係が非線形であれば離散化されたつり合い方程式は節点変位に関して陰的にしか表し得ない。このため、変位やひずみ、応力の各変数を関連付ける方程式を別々に評価して求解する非線形解法が必要になる。具体的には図 6.1 に示すように、予測した変位からひずみ、応力の順に算定し、この応力がつり合い方程式を満たすかを確認する。そして、満たされていなければ予測を更新あるいは修正して反復的に求解する。

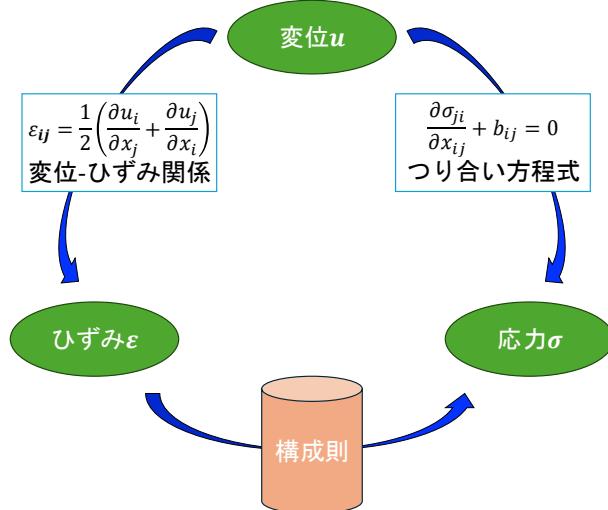


図 6.1: 非線形材料の静的つり合い問題の支配方程式と求解の手順

第4章で示した構成式（Cam-Clay モデル）には時間発展方程式（時間に関する常微分方程式）が含まれる。そのため、変形過程に依存して応力が決定されることになり、現時刻の変位と応力の一対一対応は望めない。このため、一般に非線形有限要素法では逐次的に負荷を増やして各時間間隔ごとに求解する増分解法が採用される。増分解法では、ある時間間隔の前ステップではつり合い方程式が満たされていることを前提として、現ステップにおける負荷増分を与え、対応する変位増分、ひずみ増分、応力増分の順に予測してつり合い方程式が満たされるまで繰り返す。このように、反復計算によりつり合い方程式を満たす解を求める解法を陰解法と呼ぶ。

増分解法と陰解法を組合せた非線形解法の代表的な手法として Newton-Raphson 法がある。Newton-Raphson 法では、予測値を用いて方程式を評価した際に満たされない量（残差）を求め、その残差をゼロにするように予測値を更新していく。予測値の更新に必要な修正量は、残差

を評価した予測値の方程式の一次勾配を取り、これを係数として残差をゼロにするような線形化方程式の解として求める。

## 6.2 有限要素方程式

### 6.2.1 つり合い方程式の空間離散化

対象の土構造物に対して与えられる負荷がゼロから徐々に増加する場合を考える。このときの負荷は、外荷重もしくは強制変位として与えられる。つり合い方程式は線形、非線形を問わず不变であるので、その弱形式も前章で示した次式と同様である。

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV - \int_{S_1} \{\delta u\}^T \{\bar{t}\} dS = 0 \quad (6.1)$$

平面問題において  $n$  個の節点で構成される要素  $e$  内の変位  $\{u\}$  と仮想変位  $\{\delta u\}$  は、それぞれ次式で表される。

$$\{u\} = [N]\{u'\} \quad (6.2)$$

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u'\} \quad (6.3)$$

ひずみと仮想ひずみについても、それぞれ次式で表される。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u'\} \quad (6.4)$$

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta u'\} \quad (6.5)$$

これらの変位、ひずみの有限要素近似を式 6.1 に代入すると、次式が得られる。

$$\{\delta\varepsilon\}^T \mathbf{F}_{int} = \{\delta\varepsilon\}^T \mathbf{F}_{ext} \quad (6.6)$$

ここで、 $\mathbf{F}_{int}$  は内部力ベクトル、 $\mathbf{F}_{ext}$  は外部力ベクトルであり、次式で定義される。

$$\mathbf{F}_{int} = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV \quad (6.7)$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \int_V [N]^T \{X\} dV + \int_{S_1} [N]^T \{\bar{t}\} dS \quad (6.8)$$

### 6.2.2 増分形式の有限要素方程式

応力の算定には構成式の初期値問題を解く必要があるが、非線形有限要素法の枠組みではこれを時間方向に離散化して微小時間間隔ごとに現ステップの応力の増分を算定し、これを加算していくことで順次つり合い方程式を満たす解を求めていく。よって有限要素離散化されたつり合い方程式（式 6.1）も現ステップでの求解が必要になる。このような時間増分ごとの求解法を増分解法と呼ぶ。

負荷を与えてから終了するまでの時間を  $T$  とし、これを  $N$  分割したときの代表的な時間間隔を  $[t_n \ t_{n+1}]$  と表すこととする。この増分幅  $\Delta t (= t_n - t_{n+1})$  を時間増分と呼ぶ。増分解法では、時刻  $t_n$ （前ステップ）においてつり合い方程式を満たす解は全て既知として、時刻  $t_{n+1}$ （現ステッ

の未知数を求める。式6.6が各時刻で成り立つため、各ステップにおける増分形式の有限要素方程式を次式のように表す。

$$G_n := F_n^{int} - F_n^{ext} = 0 \quad (6.9)$$

$$G_{n+1} := F_{n+1}^{int} - F_{n+1}^{ext} \neq 0 \quad (6.10)$$

ここで、現ステップ ( $t_{n+1}$ ) の解が未知であることを想定しているためつり合い状態が満たされていない。いま、つり合い状態にある前ステップから時間が  $\Delta t$  だけ経過するとき、荷重ベクトルが次式のように増加するものとする。

$$F_{n+1}^{ext} := F_n^{ext} + \Delta F_{n+1}^{ext} \quad (6.11)$$

上式を式6.9、式6.10に代入すると次式が得られる。

$$G_{n+1} := F_{n+1}^{int} - F_n^{int} - \Delta F_{n+1}^{ext} \neq 0 \quad (6.12)$$

すなわち、現ステップのつり合い状態を満たす解を求ることと、外力ベクトル増分に対応する内力ベクトルの増分が等しくなるような解を求めることは等価である。

線形弾性体であれば、応力が弾性係数にひずみを乗じるだけで算出されるため、ひずみが節点変位ベクトルで近似されれば、内力ベクトルは係数行列（剛性行列）と節点変位ベクトルの積で表される。よって一度線形方程式を解けば  $G_{n+1} = 0$  が満たされることになる。しかし、Cam-Clayモデルのような非線形材料では、未知の節点変位ベクトルの「何らかの」非線形関数で表されているため、直接的に  $G_{n+1} = 0$  を満たす解を求ることはできない。このため、会である節点変位ベクトルに当たりをつけて内力ベクトルを求め、反復的に外力との差を小さくしていく必要がある。この解法が Newton-Raphson 法である。

### 6.3 構成則の数値計算

前節のように、非線形有限要素法では前ステップの解を既知とし、現ステップにおける解を反復的に求める。時刻  $t_n$  において与えられた条件の下で、 $\Delta t$  だけ時間が経過したときの有限要素方程式を満たす節点変位を予測することから計算を始め、予測した節点変位からひずみを求め、これを入力データとする構成式から応力を算出する。そして、算出した応力を用いて内力ベクトルを計算し、外力ベクトルとの差（残差）がゼロになるまで変位の予測を繰り返し行う。このような非線形有限要素法の枠組みでは、応力評価のプロセスは離散化したつり合い方程式における内力ベクトルの計算過程と直結しているが、構成式の役割のみに着目するとつり合い方程式や変位-ひずみ関係とは切り離して考えられる。非弾性構成則の初期値問題を解く過程を図6.2に示す。図に示すように現時刻のひずみをデータとし、その他の変数の初期値を与えて解けばよい。

一方、非線形有限要素法では増分解法であるため応力評価も各時間ステップ内で行われる。すなわち、構成式の初期値問題を時間方向に離散化し、構成式内の各変数の増分量に関する代数方程式を解いて応力増分を求め、それを足し合わせて現時刻の応力を算定する。この時間離散化には差分法を適用するのが一般的である。応力増分を加算して現時刻の応力を算定するプロセスを応力積分（stress integration）もしくは応力更新アルゴリズムと呼ぶ。このプロセスは図6.3に示すように、時刻  $t_n$  においてつり合い方程式を満たす解と  $\Delta t$  だけ時間が経過したときのひずみ増分をあわせて入力データとして代数方程式を解く。このような計算法をひずみ駆動型アルゴリズム（strain-driven algorithm）と呼ぶ。

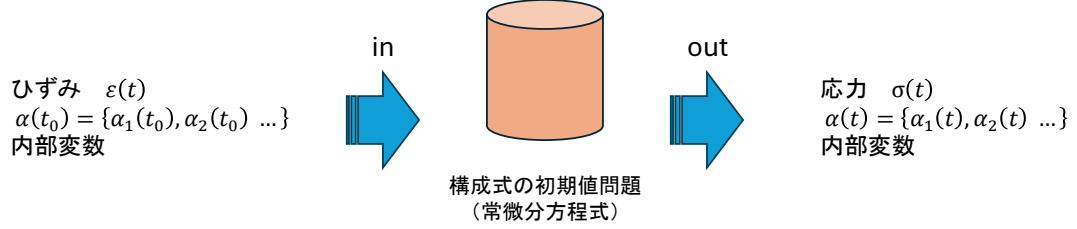


図 6.2: 構成式の初期値問題の求解による応力算定

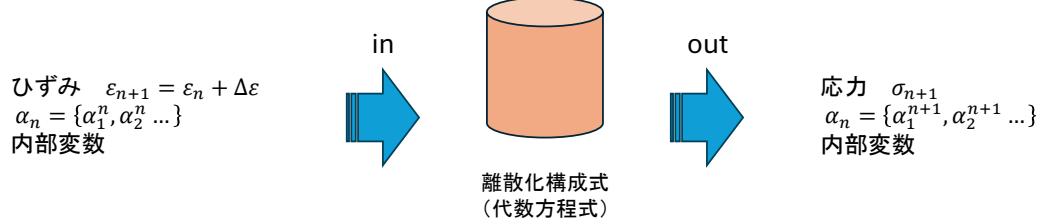


図 6.3: 時間離散化された構成式の初期値問題の求解による応力算定

構成式の初期値問題の時間離散化とは、全ての速度形の状態変数に後退 Euler 法を適用して増分形式に書き換え、擬似的時間増分幅における状態変数の更新手続き（アルゴリズム）を定式化することである。いま、擬似的時間増分幅  $[t_n \ t_{n+1}]$  の中で時刻  $t_n$  における変位  $u_n$ 、ひずみ  $\varepsilon_n$ 、応力  $\sigma_n$  および塑性ひずみ  $\varepsilon_n^p$  とその内部変数  $\alpha_n$  は全て既知の状態を想定する。そして  $\Delta t (= t_{n+1} - t_n)$  だけ時間が経過した場合、変位増分が次式で与えられるとする。

$$\Delta u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad (6.13)$$

このとき、対応するひずみ増分は次式で表される。

$$\Delta \varepsilon_{n+1} = B \Delta u_{n+1} \quad (6.14)$$

一方、塑性ひずみ増分  $\Delta \varepsilon_{n+1}^p$ 、その他の内部変数  $\alpha_{n+1}$  および応力  $\sigma_{n+1}$  は未知であり、増分形式の離散化された構成式の初期値問題の解である。この問題では、現ステップのひずみ  $\varepsilon_{n+1}$  および前ステップの応力  $\sigma_n$  と内部変数  $\alpha_n$  を入力データとして応力  $\sigma_{n+1}$ 、塑性ひずみ  $\varepsilon_{n+1}^p$ 、その他の内部変数  $\alpha_{n+1}$ 、弾性ひずみ  $\varepsilon_{n+1}^e$ 、内部変数の増分の 6 つの未知数が以下の 6 本の代数方程式から定められることになる。

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \mathcal{E}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \alpha_n) \quad (6.15)$$

$$\Delta \alpha_{n+1} = \mathcal{A}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \alpha_n) \quad (6.16)$$

$$\sigma_{n+1} = \mathcal{F}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \alpha_n) \quad (6.17)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^p \quad (6.18)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \varepsilon_{n+1}^p \quad (6.19)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \alpha_{n+1} \quad (6.20)$$

## 6.4 Newton-Raphson 法に整合した Return-Mapping

### 6.4.1 Return-Mapping アルゴリズム

前節の弾塑性計算アルゴリズムに関し, Elastic-plastic operator split の概念に基づく General return mapping algorithm により精度よく降伏曲面上にのる応力を求め, 全体の非線形連立方程式を Newton-Raphson 法に整合するよう Consistent 接線剛性テンソルを用いる手法が提案されている<sup>16)</sup>. Return-mapping には完全陰解法であるクローゼストポイント・プロジェクション (closest-point projection) とカッティングプレーン・プロジェクション (cutting-plane projection)<sup>17)</sup> がある. クローゼストポイント・プロジェクションでは Cam-Clay モデルに対する適用例<sup>18)19)</sup> があるが, 構成式に含まれる材料関数の解析微分式の導出作業が求められる. 一方, カッティングプレーン・プロジェクションではこの作業を回避できる. 本書では Cam-Clay モデルを下敷きに多様な構成式に対応することを目的にカッティングプレーン・プロジェクションによる定式化<sup>20)21)</sup>を行う.

$n$  回荷重増分  $\Delta \mathbf{F}_{ext}$  を与えて  $n$  段階における応力  $\boldsymbol{\sigma}_n$ , 塑性ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ , 硬化変数  $\mathbf{H}_n$  が計算されたとする.  $n+1$  回目の計算を行うにあたり, まず荷重増分  $\Delta \mathbf{F}_{ext}$  を入力し, それにより弾性変形が生じるとして算定される弾性予測応力を  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tri}$ , 弹性ひずみを  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,tri}$  と表すと, 次式が成立立つ.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,tri} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tri} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,tri} \quad (6.22)$$

ここで,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tri}$  が  $n$  段階目の降伏曲面内に存在するか否かの判定を離散化 Kuhn-Tucker 条件により行う.

$$f_{n+1}^{tri}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tri}) = \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \text{elastic step } \dot{\gamma} = 0 \\ > 0 & \Rightarrow \text{plastic step } \dot{\gamma} \neq 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

上式第 2 の場合, 塑性変形過程として応力, 内部変数を更新する必要がある. このような計算を次式が満たされるまで繰り返す.

$$f_{n+1}^{tri}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1}) - F(\mathbf{H}_{n+1}^{k+1}) = 0 \quad (6.24)$$

まず, 以下の関係式を導入する.

$$g(\boldsymbol{\sigma}, F) = f(\boldsymbol{\sigma}) - F \quad (6.25)$$

上式に対して Taylor 展開を行い第 1 微分のみをとると次式が得られる.

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, F + dF) &= g(\boldsymbol{\sigma}, F) + \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, F)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, F)}{\partial F} dF \\ &= f(\boldsymbol{\sigma}) - F + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} \\ &= f(\boldsymbol{\sigma}) - F - \dot{\gamma} \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}^e \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Taylor 展開式 6.26をゼロとおくと次式が得られる.

$$f(\boldsymbol{\sigma}) - F - \dot{\gamma} \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{D}^e \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = 0 \quad (6.27)$$

これにより、塑性定数および塑性ひずみ増分が次式で得られる。

$$\dot{\gamma} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}) - F}{\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{D}^e \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (6.28)$$

$$d\varepsilon^p = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}) - F}{\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{D}^e \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.29)$$

式 6.29 は超過応力  $f(\boldsymbol{\sigma}) - F$  が残留している状態で応力が降伏曲面まで下降するために生じるべき塑性ひずみ増分を示している。式 6.28, 式 6.29 に基づき  $k$  回目の計算で得られた応力、内部変数から  $k+1$  回目の塑性ひずみ増分は次式によって計算される。

$$\dot{\gamma}_{n+1}^{k+1} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k) - F_{n+1}^k}{\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k} \boldsymbol{D}^e \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k}} \quad (6.30)$$

$$d\Delta\varepsilon_{n+1}^{p(k)} = \dot{\gamma}_{n+1}^{k+1} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k} \quad (6.31)$$

修正 Cam-Clay モデルについては具体式が以下で表される。

$$f(\boldsymbol{\sigma}) - F = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left\{ \ln \left( \frac{M^2 + (\mathbf{q}/\mathbf{p}')^2}{M^2} \right) + \ln \frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{p}'_0} \right\} - \varepsilon_v^p \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}'} \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}'} = \frac{1}{\mathbf{p}'} - \frac{2\mathbf{q}^2}{M^2 \mathbf{p}'^3 + \mathbf{p}' \mathbf{q}^2} \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}^2}{M^2 \mathbf{p}'^2 + \mathbf{q}^2} \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{\mathbf{I}}{3} \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{3}{2\mathbf{q}} \mathbf{s} \quad (6.37)$$

カッティングプレーン・プロジェクションでは図に示すように Taylor 展開の一次近似によって得られる応力増分と内部変数の増分の線形関係で描かれる平面の、現応力点における内向き法線方向に応力低下を生じる。

#### 6.4.2 コンシスティント接線係数

Return-Mapping アルゴリズムにより応力は降伏曲面上まで低下される。しかし、Return-Mappingにおいては、ひずみを固定して塑性修正計算を行うので、塑性修正過程終了時点で、境界値問題の解析におけるつり合い条件は満たされない。よって、以下の方法でつり合い方程式を満たす解を得る。

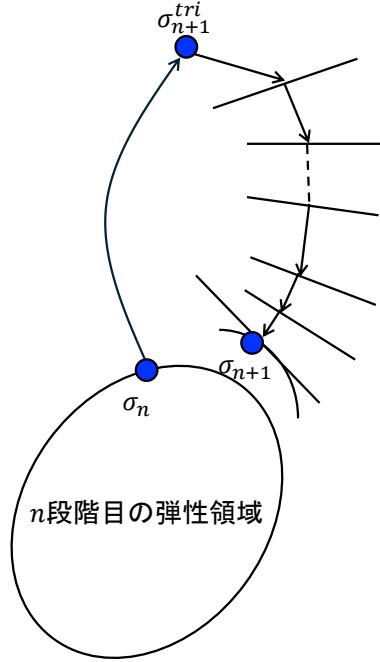


図 6.4: カッティングプレーン・プロジェクションによる応力低下

- 応力不釣り合い量を打ち消すため、塑性修正過程の終了時にリターンマッピングに整合した陰的なコンシスティント接線係数 (consistent tangent modulus) を計算する。
- コンシスティント接線係数を用いて、応力不釣り合い量を打ち消すためのひずみ増分を求める。
- ひずみ、内部変数等を全て  $n$  段階の計算終了時に戻し、直前の Return-Mapping 計算において入力されたひずみ増分に補正ひずみ増分を加え、Return-Mapping をやり直す。
- Return-Mapping を繰り返し、降伏条件およびつり合い方程式が所定の誤差内で満たされる解が得られたら  $n + 1$  段階の計算を終了する。

コンシスティント接線係数の導出方法として、本書では数値的手法<sup>22)</sup>を用いる。Return-Mapping によって、 $n + 1$  段階においてひずみ増分  $\Delta\epsilon$  の入力に対する応力  $\sigma_{n+1}$  を得たとする。さらに、摂動ひずみ増分  $\varepsilon e_r \otimes e_s$  ( $\varepsilon \ll \|\Delta\epsilon\|$ ) を加えたひずみ増分  $\Delta\epsilon + \varepsilon e_r \otimes e_s$  を入力して再び Return-Mapping を行い新たな応力を計算する。その際、全ての内部変数を  $n$  段階終了時の状態に戻す。コンシスティント接線係数は次式で与えられる。

$$\mathbf{D}_{n+1}^{ep,algo} = \frac{\partial(\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1} + \Delta\epsilon + \varepsilon e_r \otimes e_s, \epsilon_n^p, \mathbf{H}_n) - \sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1} + \Delta\epsilon, \epsilon_n^p, \mathbf{H}_n))}{\varepsilon e_r \otimes e_s} \quad (6.38)$$

$$(D_{n+1}^{ep,algo})_{ijkl} = \frac{\partial(\sigma_{n+1,ij}(\epsilon_{n+1} + \Delta\epsilon + \varepsilon e_k \otimes e_l, \epsilon_n^p, \mathbf{H}_n) - \sigma_{n+1,ij}(\epsilon_{n+1} + \Delta\epsilon, \epsilon_n^p, \mathbf{H}_n))}{\varepsilon} \quad (6.39)$$

ここで、 $\mathbf{H}_n$  は  $n$  段階終了時の内部変数である。なお、摂動ひずみは通常  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6} \sim 1.0 \times 10^{-8}$  の間に取られる。平面ひずみ条件においては式 6.39において  $(k, l) = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$  の各々について、他の摂動ひずみ増分はゼロとして計 3 回の計算で得られる。各要素において式 6.39により得られるコンシスティント接線係数に基づき全体剛性マトリクスを求め、解析領域全域において、所定の誤差内でつり合い方程式を満たす解を求める。

## 参考文献

- 1) Biot, M.A. : Mechanics of deformation and acoustic propagation in Porous media, *Journal of Applied Physics*, Vol.33, pp.1482-1498, 1962.
- 2) Terzaghi, K. : *Theoretical in Soil Mechanics*, John Wiley & Sons., 1943.
- 3) Green, A.E. and Naghdi, P.M. : A dynamical theory of interacting continua, *International Journal of Engineering Science*, Vol.3, pp.231-241, 1965.
- 4) Oka, F. : Constitutive theory for solid-fluid mixture and its application to stress wave propagation through cohesive soil, *Proceeding of JSCE*, Vol.272, pp.117-130, 1978.
- 5) 岡二三生 : 2相混合体理論からみた有効応力の原理, 土木学会論文報告集, Vol.299, pp.59-64, 1980.
- 6) Schofield, A.N. and Wroth, C.P. : *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, 1968.
- 7) Atkinson, J.H. and Bransby, P.L. : *The Mechanics of Soils*, McGraw-Hill, 1978.
- 8) Bishop, A.W. and Henkel, D.J. : *The Measurement of Soil Properties in the Triaxial Test*, Edward Arnold, 1962.
- 9) Henkel, D.J. : The shear strength of saturated remoulded clays, In *Proceeding of Research Conference on Shear strength of Cohesive Soils at Boulder*, pp.533-540, 1960.
- 10) Asaoka, A. : Consolidation of Clay and Compaction of Sand - An elasto-plastic description -, *Proceeding of 12th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Vol.232, pp.1157-1195, 2003.
- 11) Sandhu, S.S. and Wilson, E.L. : Finite element analysis of seepage in elastic media, *Proceeding of ASCE*, Vol.95, pp.641-652, 1969.
- 12) Gurtin, M.E. : Variational principles for linear elastodynamics, *Achieve Rational Mechanics Analysis*, Vol.16, pp.34-50, 1964.
- 13) Cristian, J.A. and Boehmer, J.W. : Plane strain consolidation by finite elements, *Proceeding of ASCE*, Vol.96, pp.1435-1457, 1970.
- 14) 赤井浩一, 田村武 : 弹塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, Vol.269, pp.95-104, 1978.
- 15) Zienkiewicz, O.C. and Bettes, P. : Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions; General formulation and the validity of various simplifying assumptions, *Soil mechanics - Transient and Cyclic loads*, 1982.

- 16) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. : *Computational Inelasticity*, Springer-Velag New York, 1998.
- 17) Simo, J.C. and Ortiz, M. : A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computational methods in applied mechanics and engineering*, Vol.49, pp.221-245, 1985.
- 18) Borja, R.I. and Lee, S.R. : Cam-Clay plasticity, part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.78, pp.49-72, 1990.
- 19) 矢富盟祥, 鯨洋一 : 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土/水連成有限要素法解析, 応用力学論文集, Vol.4, pp.345-356, 2001.
- 20) Huang, J. and Griffiths, D.V. : Return mapping algorithms and stress predictors for failure analysis in geomechanics, *Journal of engineering mechanics*, Vol.135, pp.276-284, 2009.
- 21) 橋口公一, 鈴木規之, 上野正実 : 下負荷面モデルに基づくリターンマッピングおよび整合接線係数テンソルの導入による弾塑性変形解析（第1報, リターンマッピングの定式化）, 日本機械学会論文集, Vol.80, 2014.
- 22) Miehe, C. : Numerical computation of algorithm (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.134, pp.223-240, 1996.

## その他参考にした文献

1. 飯塚敦：軟弱地盤の変形・安定解析に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1988.
2. 地盤工学会編：地盤の変形解析-基礎理論から応用まで-, 社団法人地盤工学会, 2002.
3. EA de Souza Neto, D Peric and DRJ Owen : *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons, 2008.
4. 浜孝之：静的陽解法有限要素法によるチューブハイドロフォーミングに関する研究，早稲田大学学位論文，2009.
5. 地盤工学会編：土の弾塑性構成モデル，社団法人地盤工学会, 2009.
6. 壁谷善継，川上竜樹：ベクトル解析入門 初歩からテンソルまで，共立出版，2019.
7. 寺田賢二郎，平山紀夫，山本晃司：数値材料試験 有限要素法によるマルチスケール解析，丸善出版，2021.
8. 安達泰治，富田佳宏：連続体力学の基礎，養賢堂，2024.
9. 地盤工学会編：地盤技術者のための FEM シリーズ 3 有限要素法をつかう，丸善出版，2020.