PF-AR のパラメータは以下の通り

表 1　PF-AR パラメータ一覧

σ_x	2.6 mm
σ_y	0.16 mm
σ_z	20 mm
q_{b}	$60\ \mathrm{mA} \times 377000\ \mathrm{mm}/c = 7.55 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}$
γ	$6.5\ \mathrm{GeV}/511\ \mathrm{keV} \sim 12720$

坂中さんの博士論文にあるようにバンチを z 方向に一様，x, y 方向にガウシアンで分布していると思うと，

$$E_x = \frac{q_{\mathrm{b}} \cdot x}{2\pi\epsilon_0 l_{\mathrm{b}} \sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)}. \tag{1}$$

ただし，ここで l_{b} はバンチの z 方向の大きさのスケールである．これに各値を代入すると，$E_x\ (x = 5\sigma_x)$ として $\sim 2.45 \times 10^6\ [\mathrm{V}]/l_{\mathrm{b}}\ [\mathrm{mm}]$ が得られる．$\pm\sigma_z$ の範囲にある電荷はバンチ全体の半分程度だと考えられるので，$l_{\mathrm{b}} = \sigma_z$ を代入し，0.45 をかけると結果として 50 MV/m という値が得られ，これがワイヤの位置が感じる x 方向の電場の最大値であると考えられる．(ワイヤとバンチが最も近づいたときが最大とする) この計算方法はバンチ中心付近で電場を線形近似したものであるため，電場の値を過大評価している値である．

一方で，横方向のビームサイズ (σ_x，σ_y) が無限に小さくバンチ長が有限と仮定する．この近似はビーム中心から十分離れた点での電場の大きさを評価していることに相当する．バンチの ± 1 mm の範囲にある電荷を考えると，これは全体の $\pm\sigma_z/20$ の範囲，つまり約 4% に相当する．このとき，Gauss の定理より，$0.04 \times q_{\mathrm{b}}$ の電荷の周りにバンチ長 2 mm 程度の高さをもち，半径 $5\sigma_x$ の円柱側面を考えると，

$$2\pi \times 5\sigma_x \times (2\ \mathrm{mm}) \times E_x = 0.04 \times q_{\mathrm{b}}/\epsilon_0. \tag{2}$$

各数値を代入して計算すると，$E_x \sim 2\ [\mathrm{MV/m}]$ となる．したがってバンチによって生じる x 方向の電場の大きさは $O(\mathrm{MV/m}) - O(10\ \mathrm{MV/m})$ となると考えられる．

次に，バンチが 3 次元ガウシアンに従って分布している場合を考える．このとき

$$E_x = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\mathrm{b}}}{2\pi^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)\exp[-\xi^2/(2\sigma_x^2) - \eta^2/(2\sigma_y^2) - \zeta^2/(2\sigma_z^2)]}{[\gamma^2(z-\zeta)^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta. \tag{3}$$

これを各 $(5\sigma_x, 0, z)$ で計算しているのが calc_elec である．

calc_elec を用いた計算結果を以下に載せる．計算に用いたのは 3σ の範囲のであり，

```
./calc_elec 3 <number of cells> <z position>
```

ただし，“number of cells” として 600 から 1800 まで 60 刻みの値を用いた．また，“z position” は積分が正負で対象であることから 0-30 [mm] までの値を 1 mm 刻みで計算した．“number of cells” について 60 刻みなのは，$\zeta = z$ での値を含んで計算しないと積分が正しい値にならないことによるものである．つまり，今回 z 方向について $3\sigma_z$ の範囲を “number of cells” 分割するため，3×20 mm/number_of_cells $= 1/N$ (ただし N はある整数) とならなくてはいけない．したがって，“number of cells” は 60 の倍数となる必要がある．

=====以下，計算中=====

二次元ラプラス方程式を極座標表示で解くと，その一般解は

$$U(r,\theta) = (A_0\theta + B_0)(C_0 \log r + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n}). \tag{4}$$

ワイヤの半径を a, 誘電率を $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$ とする (導体の場合は $\epsilon_r \to \infty$ とすればよい). 電場は x 方向にかかっており，バンチのすすむ方向を y 方向としたときに θ が反時計回りに増加する座標を以降考える.

一様電場 E_0 (前ページの E_x) による電位は遠方で $\phi_\infty = -E_0 r\cos\theta$. ワイヤ外の電位 ϕ_o はワイヤ内と θ によらず連続であることと無限遠で ϕ_∞ となることから $\phi_o = -E_0(r + \alpha/r)\cos\theta$ (ただし，α はある定数).

ワイヤ内での電位 ϕ_i は一般解のうち，まず θ によらず $\phi_i(a,\theta) = \phi_o(a,\theta)$ が成り立つ必要があるので

$$\phi_i = A\cos\theta(Cr + \frac{D}{r}). \tag{5}$$

さらに $r \to 0$ で電位が有限であることから $\phi_i = -E_0 r\beta\cos\theta$ (ただし，β はある定数).

このとき，$\phi_i(a,\theta) = \phi_o(a,\theta)$, $\epsilon_r\partial_r\phi_i(a,\theta) = \partial_r\phi_o(a,\theta)$ を解くと，

$$\beta a^2 = a^2 + \alpha, \tag{6}$$
$$\epsilon_r\beta a^2 = a^2 - \alpha. \tag{7}$$

したがって，$\alpha = a^2(1-\epsilon_r)/(1+\epsilon_r)$, $\beta = 2/(1+\epsilon_r)$ となる.

$$\phi_i = -\frac{2E_0}{1+\epsilon_r} r\cos\theta \tag{8}$$
$$\phi_o = -E_0\left(r + \frac{a^2}{r}\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r}\right)\cos\theta \tag{9}$$

ワイヤ表面における r 方向の電場は $-\partial_r\phi_o\,(r=a) = 2E_0\cos\theta\epsilon_r/(1+\epsilon_r)$, θ 方向の電場は $-r^{-1}\partial_\theta\phi_o\,(r=a) = -2E_0\sin\theta/(1+\epsilon_r)$ でその大きさは a にはよらない.

また，このとき，

$$|E| = 2E_0\frac{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon_r^2\cos^2\theta}}{1+\epsilon_r} \tag{10}$$

で最大値は $2E_0\epsilon_r/(1+\epsilon_r) \to 2E_0\,(1 < \epsilon_r \to \infty)$ となる.