

PF-AR のパラメータは以下の通り

表 1 PF-AR パラメータ一覧

σ_x	2.6 mm
σ_y	0.16 mm
σ_z	20 mm
q_b	$60 \text{ mA} \times 377000 \text{ mm}/c = 7.55 \times 10^{-8} \text{ C}$
γ	$6.5 \text{ GeV}/511 \text{ keV} \sim 12720$

坂中さんの博士論文にあるようにバンチを z 方向に一様, x, y 方向にガウシアンで分布していると思うと,

$$E_x = \frac{q_b \cdot x}{2\pi\epsilon_0 l_b \sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)}. \quad (1)$$

ただし, ここで l_b はバンチの z 方向の大きさのスケールである. これに各値を代入すると, $E_x(x = 5\sigma_x)$ として $\sim 2.45 \times 10^6 \text{ [V]}/l_b \text{ [mm]}$ が得られる. $\pm\sigma_z$ の範囲にある電荷はバンチ全体の半分程度だと考えられるので, $l_b = \sigma_z$ を代入し, 0.45 をかけると結果として 50 MV/m という値が得られ, これがワイヤの位置が感じる x 方向の電場の最大値であると考えられる. (ワイヤとバンチが最も近づいたときが最大とする)

次に, バンチが 3 次元ガウシアンに従って分布している場合を考える. このとき

$$E_x = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_b}{2\pi^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi) \exp[-\xi^2/(2\sigma_x^2) - \eta^2/(2\sigma_y^2) - \zeta^2/(2\sigma_z^2)]}{[\gamma^2(z - \zeta)^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta. \quad (2)$$

これを各 $(5\sigma_x, 0, z)$ で計算 (しようと) しているのが calc.elec である.

二次元ラプラス方程式を極座標表示で解くと、その一般解は

$$U(r, \theta) = (A_0\theta + B_0)(C_0 \log r + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n}). \quad (3)$$

ワイヤの半径を a , 誘電率を $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ とする (導体の場合は $\epsilon_r \rightarrow \infty$ とすればよい). 電場は x 方向にかかっており, バンチのすすむ方向を y 方向としたときに θ が反時計回りに増加する座標を以降考える.

一様電場 E_0 (前ページの E_x) による電位は遠方で $\phi_{\infty} = -E_0 r \cos \theta$. ワイヤ外の電位 ϕ_o はワイヤ内と θ によらず連続であることと無限遠で ϕ_{∞} となることから $\phi_o = -E_0(r + \alpha/r) \cos \theta$ (ただし, α はある定数).

ワイヤ内での電位 ϕ_i は一般解のうち, まず θ によらず $\phi_i(a, \theta) = \phi_o(a, \theta)$ が成り立つ必要があるので

$$\phi_i = A \cos \theta (Cr + \frac{D}{r}). \quad (4)$$

さらに $r \rightarrow 0$ で電位が有限であることから $\phi_i = -E_0 r \beta \cos \theta$ (ただし, β はある定数).

このとき, $\phi_i(a, \theta) = \phi_o(a, \theta)$, $\epsilon_r \partial_r \phi_i(a, \theta) = \partial_r \phi_o(a, \theta)$ を解くと,

$$\beta a^2 = a^2 + \alpha, \quad (5)$$

$$\epsilon_r \beta a^2 = a^2 - \alpha. \quad (6)$$

したがって, $\alpha = a^2(1 - \epsilon_r)/(1 + \epsilon_r)$, $\beta = 2/(1 + \epsilon_r)$ となる.

$$\phi_i = -\frac{2E_0}{1 + \epsilon_r} r \cos \theta \quad (7)$$

$$\phi_o = -E_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \right) \cos \theta \quad (8)$$

ワイヤ表面における r 方向の電場は $\partial_r \phi_o(r = a) = -2E_0 \cos \theta \epsilon_r / (1 + \epsilon_r)$, θ 方向の電場は $r^{-1} \partial_{\theta} \phi_o(r = a) = 2E_0 \sin \theta / (1 + \epsilon_r)$ でその大きさは a にはよらない.

また, このとき,

$$|E| = 2E_0 \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + \epsilon_r^2 \cos^2 \theta}}{1 + \epsilon_r} \quad (9)$$

で最大値は $2E_0 \epsilon_r / (1 + \epsilon_r) \rightarrow 2E_0 (1 < \epsilon_r \rightarrow \infty)$ となる.