PF-AR のパラメータは以下の通り

表 1　PF-AR パラメータ一覧

σ_x	2.6 mm
σ_y	0.16 mm
σ_z	20 mm
q_{b}	$60\ \mathrm{mA} \times 377000\ \mathrm{mm}/c = 7.55 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}$
γ	$6.5\ \mathrm{GeV}/511\ \mathrm{keV} \sim 12720$

坂中さんの博士論文にあるようにバンチを z 方向に一様，x, y 方向にガウシアンで分布していると思うと，

$$E_x = \frac{q_{\mathrm{b}} \cdot x}{2\pi\epsilon_0 l_{\mathrm{b}} \sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}. \tag{1}$$

ただし，ここで l_{b} はバンチの z 方向の大きさのスケールである．これに各値を代入すると，$E_x\ (x = 5\sigma_x)$ として $\sim 2.45 \times 10^6\ [\mathrm{V}]/l_{\mathrm{b}}\ [\mathrm{mm}]$ が得られる．$\pm\sigma_z$ の範囲にある電荷はバンチ全体の半分程度だと考えられるので，$l_{\mathrm{b}} = \sigma_z$ を代入し，0.45 をかけると結果として 50 MV/m という値が得られ，これがワイヤの位置が感じる x 方向の電場の最大値であると考えられる．(ワイヤとバンチが最も近づいたときが最大とする)

次に，バンチが 3 次元ガウシアンに従って分布している場合を考える．このとき

$$E_x = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\mathrm{b}}}{2\pi^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)\exp[-\xi^2/(2\sigma_x^2) - \eta^2/(2\sigma_y^2) - \zeta^2/(2\sigma_z^2)]}{[\gamma^2(z-\zeta)^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta. \tag{2}$$

これを各 $(5\sigma_x, 0, z)$ で計算しているのが calc_elec である．

二次元ラプラス方程式を極座標表示で解くと，その一般解は

$$U(r,\theta) = (A_0\theta + B_0)(C_0 \log r + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n}). \tag{3}$$

ワイヤの半径を a, 誘電率を $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ とする (導体の場合は $\epsilon_r \to \infty$ とすればよい)．電場は x 方向にかかっており，バンチのすすむ方向を y 方向としたときに θ が反時計回りに増加する座標を以降考える．

一様電場 E_0 (前ページの E_x) による電位は遠方で $\phi_\infty = -E_0 r \cos\theta$. ワイヤ外の電位 ϕ_o はワイヤ内と θ によらず連続であることと無限遠で ϕ_∞ となることから $\phi_o = -E_0(r + \alpha/r)\cos\theta$ (ただし，α はある定数).

ワイヤ内での電位 ϕ_i は一般解のうち，まず θ によらず $\phi_i(a,\theta) = \phi_o(a,\theta)$ が成り立つ必要があるので

$$\phi_i = A\cos\theta(Cr + \frac{D}{r}). \tag{4}$$

さらに $r \to 0$ で電位が有限であることから $\phi_i = -E_0 r \beta \cos\theta$ (ただし，β はある定数).

このとき，$\phi_i(a,\theta) = \phi_o(a,\theta)$, $\epsilon_r \partial_r \phi_i(a,\theta) = \partial_r \phi_o(a,\theta)$ を解くと，

$$\beta a^2 = a^2 + \alpha, \tag{5}$$

$$\epsilon_r \beta a^2 = a^2 - \alpha. \tag{6}$$

したがって，$\alpha = a^2(1-\epsilon_r)/(1+\epsilon_r)$, $\beta = 2/(1+\epsilon_r)$ となる．

$$\phi_i = -\frac{2E_0}{1+\epsilon_r} r \cos\theta \tag{7}$$

$$\phi_o = -E_0\left(r + \frac{a^2}{r}\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r}\right)\cos\theta \tag{8}$$

ワイヤ表面における r 方向の電場は $-\partial_r \phi_o\,(r=a) = 2E_0 \cos\theta \epsilon_r/(1+\epsilon_r)$, θ 方向の電場は $-r^{-1}\partial_\theta \phi_o\,(r=a) = -2E_0 \sin\theta/(1+\epsilon_r)$ でその大きさは a にはよらない．

また，このとき，

$$|E| = 2E_0 \frac{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon_r^2 \cos^2\theta}}{1+\epsilon_r} \tag{9}$$

で最大値は $2E_0\epsilon_r/(1+\epsilon_r) \to 2E_0\,(1 < \epsilon_r \to \infty)$ となる．