

PF-AR のパラメータは以下の通り

表 1 PF-AR パラメータ一覧

$\sigma_x$	2.6 mm
$\sigma_y$	0.16 mm
$\sigma_z$	20 mm
$q_b$	$60 \text{ mA} \times 377000 \text{ mm}/c = 7.55 \times 10^{-8} \text{ C}$
$\gamma$	$6.5 \text{ GeV}/511 \text{ keV} \sim 12720$

坂中さんの博士論文にあるようにバンチを  $z$  方向に一様,  $x, y$  方向にガウシアンで分布していると思うと,

$$E_x = \frac{q_b \cdot x}{2\pi\epsilon_0 l_b \sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)}. \quad (1)$$

ただし, ここで  $l_b$  はバンチの  $z$  方向の大きさのスケールである. これに各値を代入すると,  $E_x(x = 5\sigma_x)$  として  $\sim 5.45 \times 10^6 \text{ [V]}/l_b \text{ [mm]}$  が得られる.  $l_b$  は  $\sigma_z$  の大きさの倍程度であると考えられるので, 結果として  $O(0.1 - 1) \text{ MV/m}$  という値が得られ, これがワイヤの位置が感じる  $x$  方向の電場の最大値であると考えられる. (ワイヤとバンチが最も近づいたときが最大とする)

次に, バンチが 3 次元ガウシアンに従って分布している場合を考える. このとき

$$E_x = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_b}{2\pi^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi) \exp[-\xi^2/(2\sigma_x^2) - \eta^2/(2\sigma_y^2) - \zeta^2/(2\sigma_z^2)]}{[\gamma^2(z - \zeta)^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta. \quad (2)$$

これを各  $(5\sigma_x, 0, z)$  で計算 (しようと) しているのが calc.elec である.

二次元ラプラス方程式を極座標表示で解くと、その一般解は

$$U(r, \theta) = (A_0\theta + B_0)(C_0 \log r + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n}). \quad (3)$$

ワイヤの半径を  $a$ , 誘電率を  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  とする (導体の場合は  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  とすればよい). 電場は  $x$  方向にかかっており, バンチのすすむ方向を  $y$  方向としたときに  $\theta$  が反時計回りに増加する座標を以降考える.

一様電場  $E_0$  (前ページの  $E_x$ ) による電位は遠方で  $\phi_{\infty} = -E_0 r \cos \theta$ . ワイヤ外の電位  $\phi_o$  はワイヤ内と  $\theta$  によらず連続であることと無限遠で  $\phi_{\infty}$  となることから  $\phi_o = -E_0(r + \beta/r) \cos \theta$  (ただし,  $\beta$  はある定数).

ワイヤ内での電位  $\phi_i$  は一般解のうち, まず  $\theta$  によらず  $\phi_i(a, \theta) = \phi_o(a, \theta)$  が成り立つ必要があるので

$$\phi_i = A \cos \theta (Cr + \frac{D}{r}). \quad (4)$$

さらに  $r \rightarrow 0$  で電位が有限であることから  $\phi_i = -E_0 r \alpha \cos \theta$  (ただし,  $\alpha$  はある定数).

このとき,  $\phi_i(a, \theta) = \phi_o(a, \theta)$ ,  $\epsilon_r \partial_r \phi_i(a, \theta) = \partial_r \phi_o(a, \theta)$  を解くと,

$$\alpha a^2 = a^2 + \beta, \quad (5)$$

$$a^2 - \beta = \epsilon_r \alpha a^2. \quad (6)$$

したがって,  $\alpha = 2/(1 + \epsilon_r)$ ,  $\beta = a^2(1 - \epsilon_r)/(1 + \epsilon_r)$  となる.

$$\phi_i = -\frac{2E_0}{1 + \epsilon_r} r \cos \theta \quad (7)$$

$$\phi_o = -E_0 \left( r + \frac{a^2}{r} \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \right) \cos \theta \quad (8)$$

ワイヤ表面における  $r$  方向の電場は  $\partial \phi / \partial r (r = a) = -2E_0 \cos \theta / (1 + \epsilon_r)$ ,  $\theta$  方向の電場は  $r^{-1} \partial \phi / \partial \theta (r = a) = 2E_0 \sin \theta / (1 + \epsilon_r)$  でその大きさは  $a$  にはよらない. また,  $\epsilon_r$  が大きいものを選ぶほどその絶対値は小さくなる.